Міністерство освіти і науки України
Криворізький національний університет

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

Збірник наукових праць
Випуск XI

Том 1

Кривий Ріг
Видавничий відділ КМІ
2013

МАТЕМАТИЧНІ СОФІЗМИ І ПАРАДОКСИ, ЯКІ МОЖУТЬ ВИНИКАТИ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ, ТА ЇХ СПРОСТУВАННЯ

К. О. Школа, П. І. Ульшин
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
ksenka-khripun@rambler.ru

Вчені Стародавньої Греції приділяли велику увагу логічному мисленню. За допомогою такого мислення їм вдавалося доводити різні твердження в таких науках як філософія, математика, фізика, астрономія та ін. Одержані твердження містили в собі нові знання і збагачували науку. Проте, вже в ті часи було помічено відхилення від одержаних правильних висновків, при ніби послідовному міркуванні. Дослідження помилкових тверджень показали, що вони виникають при порушенні законів логіки.

Сучасні педагоги і математики-методисти написали велику кількість статей і книг з аналізом неправильно розв’язаних задач на математичних олімпіадах, конкурсах різних видів та на вступних екзаменах до ВНЗ. Вони пропонують, як у різних випадках можна уникати помилок. Людині, як кажуть, властиво помилятися, і тому дана тема є *актуальною*.

Утруднення давньогрецьких вчених в точних означеннях понять нескінченого і скінченого, неперервного і дискретного проявилися в парадоксах Зенона Елейського в другій половині V ст. до н.е. Він сформулював 45 тверджень, які назвав *апоріями*, – тобто, тупіковими. До наших днів збереглися лише чотири апорії Зенона: «Дихотомія», «Ахіллес», «Стріла» і «Стадій», які ще в IV ст. до н.е. записав видатний давньогрецький вчений Арістотель та зробив їм коментар. До наших днів твердження Зенона Елейського не мають достовірних пояснень.

На порушення логічних законів натрапили давньогрецькі філософи IV ст. до н.е. Діодор Кронос і Фіолет Косський. При дослідженні апорій, вони загинули від перевантаження нервової системи. Виникла необхідність у поясненні таких утруднень.

Для подолання логічних «капканів» вже в(IV ст. до н. е. серед молодих математиків проводилися так звані «профілактичні заходи». В зв’язку з цим видатним давньогрецьким математиком Евклідом, творцем відомих «Начал» був написаний збірник під назвою «Псевдарій» для математиків-початківців. В ньому розглядалися різні хибні міркування і невірні доведення та давалися пояснення суті одержаних помилок і можливості їх уникнення.

Помилки в міркуваннях, пов’язані з порушенням законів логіки бувають двох родів: паралогізми і софізми. До паралогізмів відносяться хибні міркування як результат логічних помилок, допущених не навмисне, а через втрату послідовності у міркуваннях або при порушенні хоча б одного закону логіки.

Найрізноманітніші математичні помилки, яких припускаються і школярі, і математики, здебільшого є саме паралогізмами. В наші часи написано багато збірників, в яких аналізуються такі помилки. В окремих випадках паралогізмами можуть бути і правильні твердження, проте, одержані з порушенням математичної логіки.

Розглянемо приклади паралогізмів, які можуть траплятися на уроках математики.

<u>Приклад 1.</u> Розв'язати рівняння: $\sqrt{x-5} = \sqrt{3-x}$

Розв'язання. Піднесемо до квадрату обидві частини рівняння: $x - 5 = 3 - x$. Звідси маємо: $x = 4$. Легко переконатися, що $x = 4$ не є дійсним розв'язком рівняння. Тут втрачена послідовність міркувань. Спочатку потрібно було встановити область існування розв'язків рівняння. Вона визначається системою нерівностей: $x \geq 5$ і $x \leq 3$, яка несумісна. Отже, дане рівняння розв'язків не має.

<u>Приклад 2.</u> Розв'язати рівняння: $(5 - x)^2 = (1 - x)^2$

Розв'язання. Знайдемо корені квадратні від лівої і правої частини рівняння: $5 - x = 1 - x$. Звідси слідує: $5 = 1$ – одержана рівність не має змісту, а тому дане рівняння не має розв'язків.

На цей раз, одержали паралогізм, в результаті порушення правила добування коренів. Відомо, що дійсне значення кореня квадратного існує від виразу додатного або рівного нулеві. Тому після добування коренів квадратних, одержуємо: $|5 - x| = |1 - x|$. Далі, розглядаючи всі можливі випадки, знаходимо один з них, який дає розв'язок рівняння:

$$5 - x = -1 + x; \qquad x = 3.$$

Отже, *відповідь* $x = 3$.

Існують й інші невизначені правила арифметики для вузьких числових множин. Всіх таких правил запам'ятати неможливо, але ті, що запам'ятались, допомагають розв'язувати задачу з меншою затратою зусиль і часу та розширюють знання математики.

<u>Приклад 3.</u> Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^4 - 1321x - 23 = 0 \\ x^4 - 1310x - 144 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання: Віднімемо від першого рівняння почленно друге, одержимо: $-11x + 121 = 0$, звідки $x = 11$.

Чи буде розв'язком системи $x = 11$?

<u>Пояснення:</u> Одержане рівняння $-11x + 121 = 0$, – є наслідком сис-

теми, не еквівалентним їй. Розв'язок системи є і розв'язком рівняння, але не навпаки. Підставивши значення $x = 11$ в систему рівнянь, – її рівняння не задовольняються, тому система рівнянь не має розв'язків. Тут паралогізм утворився в результаті втрати послідовності міркувань.

Софізми – це міркування, побудовані так, що містять навмисне допущену помилку і, звичайно, приводять до хибних висновків. Слово софізм в перекладі з грецької мови означає: хитрий викрутас, вигадка, хитрий умовивід. Вперше поняття софізму було введене в V ст. до н. е. давньогрецьким філософом, засновником школи філософів у Греції Протагором із Абдери. Введення софізмів було великим кроком у розгадуванні закономірностей людського мислення. Воно сприяло вдосконаленню ораторського мистецтва та підвищенню логічної культури мислення. Щоправда, диспути софістів перетворилися в безрезультатні суперечки. Звідки й одіозне значення слова «софіст» – людина, яка готова за допомогою будь-яких прийомів захищати певні тези, не рахуючись з об'єктивною істинністю чи хибністю цих тез.

Дуже часто софістичне міркування ґрунтується на підміні понять, на двозначності слів, на навмисне неправильному доборі посилок, на зовнішній подібності.

Розглянемо приклади утворення софізмів.

<u>Приклад 1.</u> Довести, що $2 = 1$.

Доведення. Нехай $a = b + c$. Помножимо це рівняння на 2: $2a=2+2c$. Додамо почленно рівняння перше з другим: $2b + 2c + a = b + c + 2a$. Від обох частин рівності віднімемо $3a$: $2(b + c - a) = (b + c - a)$. Поділимо ліву і праву частини рівності на вираз $(b + c - a)$, одержимо $2 = 1$.

Пояснення: софізм утворився у зв'язку із замаскованим діленням на вираз $b + c - a$, який дорівнює нулеві.

<u>Приклад 2.</u> Довести, що $5 < 1$.

Доведення. Розглянемо вірну нерівність: $\left(\frac{1}{3}\right)^5 < \frac{1}{3}$. Прологарифмуємо цю нерівність: $5\ln\frac{1}{3} < \ln\frac{1}{3}$. Поділивши нерівність на $\ln\frac{1}{3}$, одержимо: $5 < 1$.

Пояснення. Софізм утворився в результаті замаскованого ділення нерівності на від'ємне число: $\ln\frac{1}{3} = -\ln 3$. При діленні нерівності на від'ємне число, згідно правила, змінюється сенс знака нерівності.

<u>*Парадокси*</u> – є правильними твердженнями (висновками), але в силу наших життєвих і психологічних причин здаються невірними. В перекладі з грецької мови слово «парадокс» означає – несподіваний, диво-

вижний.

Суперечності у вигляді паралогізмів або софізмів можна спростувати, відшукавши помилку в ланцюжку міркувань, яка може бути математичною або логічною, і далі позбавитися від неї. У випадку парадоксів – логічно правильні міркування приводять до взаємно протилежних висновків, причому кожний з яких не можна віднести ні до істинних, ні до хибних.

Розглянемо приклади парадоксів у математиці.

Приклад 1. Знайти суму ряду: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+1-1+\ldots$

Запишемо цей ряд у двох розташуваннях його членів:

1) 1 – (1 – 1) – (1 – 1) – … = 1;

2) (1 – 1) + (1 – 1) + (1 – 1) + … = 0.

Одержали: парадокс, – один і той же ряд може мати дві різні суми. Такий парадокс вперше виник у XVII ст., а спростовано його було в XIX ст., коли була створена теорія границь. Тепер відомо, що існують умовно-збіжні ряди. Отже, для його вірного пояснення не вистачало теоретичних знань.

Приклад 2. Через точку, взяту поза прямою на площині можна побудувати дві прямі паралельні до даної прямої. Чи вірне таке твердження?

Пояснення. Для евклідової площини це твердження є парадоксальним, оскільки воно протирічить аксіомі паралельності.

Для площини М. І. Лобачевського, яка має форму псевдосфери, дане твердження має місце, оскільки є аксіомою для такої площини. Таку площину було знайдено в 1868 році італійським математиком Е. Бельтрамі. Отже, і в цьому прикладі маємо твердження, яке є парадоксальним в геометрії Евкліда, а в геометрії М. І. Лобачевського є вірним твердженням.

Парадокси, як дивовижні витвори людської думки, часто з’являлися в математиці в періоди певних якісних перетворень її структури. Так, у V ст. до н.е. знайдені піфагорійцями ірраціональні числа були парадоксальними в існуючій на той час теорії. Вони створили поштовх до розширення теорії чисел. Інтегральне числення, створене в XVII ст., було парадоксальним в математиці. Його навіть називали «магічним» аж до створення в XIX ст. теорії границь французьким вченим О. Коші.

Починаючи з кінця XIX ст. було відкрито ряд парадоксів у теорії множин, які ще вимагають великих перетворень в цій науці. До наших днів ці тупикові твердження, які не можна ні довести, ні спростувати, лишаються не розв’язаними.

Парадокс Б. Рассела. Для будь-якої множини *M* коректним є питання: чи множина M належить собі як окремий елемент, тобто чи є множина M елементом самої себе, чи ні? Наприклад, множина всіх множин є множиною і тому належить сама собі, а множина всіх будинків у місті не є будинком, множина студентів у аудиторії не є студентом.

Отже коректно поставити сформульоване питання і щодо множини всіх множин, які не будуть власними елементами. Нехай M – множина всіх тих множин, що не є елементами самих себе. Розглянемо питання: а сама множина M є елементом самої себе чи ні? Якщо припустити, що $M \in M$, то з означення множини M випливає $M \notin M$. Якщо ж припустимо, що $M \notin M$, то з того ж таки означення дістанемо $M \in M$.

Близьким до парадокса Рассела є так званий «*парадокс цирульника*»: цирульник – це мешканець міста, який голить тих і тільки тих мешканців міста, які не голять самі себе. Проводячи міркування, аналогічні тим, що були зроблені в парадоксі Рассела, дійдемо висновку, що цирульник голить себе в тому і тільки в тому випадку, коли цирульник не голить сам себе.

А от парадокс, що був відомий самому автору теорії множин Г. Кантору. Розглянемо об'єднання всіх мислимих множин і позначимо його U. Тоді за теоремою потужність множини $\beta(U)$ всіх підмножин множини U має більшу потужність, ніж сама множина U. Однак це парадоксально, оскільки за означенням множина U є множиною, яка містить всі множини (зокрема, і множину $\beta(U)$).

Багато хто з математиків на початку XX ст. не надавали цим парадоксам особливого значення, оскільки в той час теорія множин була відносно новою галуззю математики і не зачіпала інтересів більшості математиків. Однак їхні більш відповідальні та проникливі колеги зрозуміли, що виявлені парадокси стосуються не тільки теорії множин і побудованих на ній розділів класичної математики, але мають безпосереднє відношення до логіки взагалі, тобто до головного інструменту математики.

Зокрема, парадокс Рассела може бути переформульований у термінах логіки і таким чином доданий до відомих з давніх часів логічних парадоксів (*парадокса брехуна*, *парадокса всемогутньої істоти* тощо).

Отже, для того, щоб не попасти в пастку математичних і логічних помилок, потрібно вивчати відповідну літературу і брати до уваги застереження від хибних кроків.

Знання суті паралогізмів, софізмів і парадоксів мають велику педагогічну цінність. Аналіз помилок, одержаних при таких відхиленнях, відвертає можливість повторення їх учнями і студентами вищих навчальних закладів та виховує в них критичне ставлення до різних міркувань.