Міністерство освіти і науки України
Криворізький національний університет

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

Збірник наукових праць
Випуск XI

Том 1

Кривий Ріг
Видавничий відділ КМІ
2013

ПРО ВИКОРИСТАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ МЕТОДІВ У ГЕОМЕТРІЇ

П. І. Ульшин, В. В. Ахабаніна
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
viktoriya2724@yandex.ru

Геометрія – це одна із найстародавніших математичних наук. Назва її походить від грецького слова, яке в перекладі на українську мову означає «землемірство». Очевидно, що ця наука використовувалася для вимірювання на місцевості.

Аналізуючи твори видатних грецьких вчених (V–IV ст. до н. е.) Демокріта, Аристотеля, Геродота, математик Б. Л. Ван дер Варден писав, що, на їх думку, наука геометрія була створена в Єгипті із потреб практичної діяльності людини. Про це також свідчать історичні пам'ятки, які збереглися до наших днів у вигляді задач на папірусах та надписів на стінах велетенських пірамід.

Так у папірусі Ахмеса (XVIII ст. до н. е.) стверджується, що його переписано із оригінала, який був посібником для підготовки носіїв наукових знань попередніх часів: чиновників, зодчих, гарпедонавтів і ін. Він містить ряд геометричних задач, що розв'язуються переважно за допомогою циркуля та лінійки, при користуванні правилами, встановленими експериментальним шляхом. Вказані правила зводять розв'язування задач до побудови рівнянь і знаходження їх розв'язків.

Циркулем і лінійкою єгиптяни вміли розв'язувати рівняння першого і другого степенів, проте описували їх словами, без буквених позначень.

Для визначення площ трикутника, прямокутника, трапеції вони використовували правила, що відповідають формулам, за якими вони знаходяться і тепер. Цікаво, що єгиптяни визначали об'єм зрізаної правильної чотирикутної піраміди за правилом, яке відповідає точній сучасній формулі $V = \frac{1}{3}h\left(a^2 + ab + b^2\right)$, – де a і b – сторони основ, а h – висота фігури.

Рівняння у вавилонян теж мали геометричний характер. При використанні двох невідомих вони одну з них, наприклад, x – називали довжиною, другу y – шириною, а добуток їх xy– площею. Третю змінну z – називали глибиною, а добуток xyz – об'ємом. Всі ці величини вони називали абстрактними і тому могли додавати $xyz+xy+x$, що навіть протирічило правилам геометрії.

В математиці стародавніх єгиптян і вавилонян слова «алгебра» не було, але вже тоді, в розроблених ними правилах розв'язування задач, використовувалися алгебраїчні методи.

Геометрія у Греції до VI ст. до н. е. була на такому ж рівні розвитку, як у Єгипті і Вавилоні. Потім почала швидко збагачуватися новими фундаментальними фактами і перетворюватися на абстрактну дедуктивну науку. В ній з'явилася ідея доведення, яка набула логічної форми і перетворила математику на теоретичну науку.

Видатними давньогрецькими вченими, які збагатили математику відкриттями, були Фалес Мілетський, Піфагор Самоський, Платон, Аристотель, Евклід, Евдокс, Ератосфен, Архімед, Аполлоній та ін.

Після доведення теореми Піфагора було встановлено існування нових не раціональних чисел, які не вписувались в тодішню теорію чисел і спричинили кризу в математиці. Не зрозуміло було, як виконувати арифметичні дії між раціональними й ірраціональними числами.

Відомо, що будь-якому числу можна поставити у відповідність певний відрізок. У зв'язку з цим ірраціональному числу було поставлено у відповідність гіпотенузу прямокутного трикутника, побудованого на катетах, що відповідають раціональним числам. Потім відносно відрізків і були означені всі числові операції. Додавання інтерпретувалось приставлянням відрізків на прямій. Віднімання – відкладанням частини відрізка. Добутком двох відрізків вважалася площа прямокутника із сторонами, рівними цим відрізкам. Добутком трьох відрізків був об'єм прямокутного паралелепіпеда. Добутком більшого від трьох множників не користувались. Ділення було можливим лише тоді, коли відрізок, що ділився, був довшим від дільника.

При розв'язуванні задач важливо, щоб у рівняння входили члени з однаковими вимірами. В цьому полягає принцип однорідності. Такі рівняння можна легко перетворити на відношення відрізків, що лежать на паралельних прямих. Метод розв'язування рівнянь називався «прикладанням площ».

Основні теореми, пов'язані з методом «прикладання площ», збереглися в праці «Начала», написаній давньогрецьким вченим Евклідом (III ст. до н. е.). Цими твердженнями обґрунтовувалися найважливіші праці видатних вчених того часу Теетета, Архімеда, Аполлонія й ін.

Складність творів цих вчених полягає в тому, що потрібно довго читати, відшукувати на рисунку відповідні точки і напружено міркувати. Щоб зробити хід думки потрібно використовувати допоміжні засоби, вводити певні позначення, або використовувати усне спілкування. Коли по ряду причин зовнішнього характеру усна передача знань розривалася, то зрозуміти книги видатних вчених ставало дуже складно. Сильно ускладнювалось розв'язування рівняння вище третього степеня. В зв'язку з цим грецька математика прийшла до занепаду.

Французький історик математики Поль Таннері (1843–1904) після досконалого дослідження евклідових «Начал» зробив обширний коментар методів і результатів доведень, в якому назвав методи розв'язування задач давньогрецькими вченими «геометричною алгеброю». Після П. Таннері таку назву почали давати методам давньогрецької математики й інші історики, незважаючи на те, що в ті часи слово «алгебра» не існувало.

Слово «алгебра» в широкому використанні, з'явилося в Середній Азії в IX ст. Ця назва виникла завдяки праці «Кітаб ал-джебр ал-мукабала», написаній видатним таджицьким вченим Мухаммедом аль-Хорезмі (787–850). Операція «аль-джебр» означає перенесення членів рівняння із однієї його частини в другу, так, щоб в обох частинах були тільки додатні члени, а «аль-мукабала» – зведення подібних членів. Слово «алгебра» виникло від слова «аль-джебр», що визначає певну операцію при розв'язуванні рівнянь.

У Європі ця назва закріплялася повільно. В XIII ст. італійський вчений Леонардо Пізанський написав працю «Книга про абак», в якій розглядав розв'язування квадратних рівнянь за зразком аль-Хорезмі. Цією книгою, як довідником, користувалися понад 200 років у деяких університетах.

Французький математик Ф. Вієт (1540–1603), як і його італійський колега, був тісно пов'язаний з геометрією. Алгебру він називав «аналітичним мистецтвом» і розглядав як «королівську дорогу в геометрію».

Р. Декарт (1596–1650) – відомий французький вчений, в алгебрі бачив потужний метод для проведення міркувань в області абстрактних і невідомих величин. У праці «Роздуми про метод» (1637 р.) він розробив систему координат на площині, за допомогою якої можна будь-яку змінну величину представляти графічно і рівнянням. Цією роботою Р. Декарт заклав основу для розвитку аналітичної геометрії.

Аналізуючи історію розвитку геометрії можна сказати, що алгебраїчні методи завжди були супутником цієї науки. При розв'язуванні будь-якої геометричної проблеми вони допомагали: прискорювати міркування, скорочувати хід розрахунків, уводити умовні позначення, унаочнювати результат.

В наш час алгебраїчні методи систематично використовуються в геометрії шкільного курсу. Важливим питанням, яке ще залишається не достатньо розв'язаним, відноситься до можливостей їх ефективного використання в навчальному процесі. В зв'язку з цим тема є актуальною.

Розглянемо приклади.

Задача 1. У прямокутному трикутнику радіуси вписаного і описаного кіл відповідно дорівнюють: $r = 2$ см і $R = 5$ см. Знайти катети трикутника.

Розв'язання. Нехай дано ΔABC (рис. 1).

O – точка перетину бісектрис трикутника, одночасно вона є центром вписаного кола,

$OP = OM = ON = r = 2$ см – центр описаного кола,

$O_1A = O_1B = O_1C = R = 5$ см. Позначимо катети: $AC = x$ і $BC = y$.

Для знаходження катетів складемо рівняння:

1) згідно теореми Піфагора: $x^2 + y^2 = (2R) = 100$;

2) гіпотенуза: $AB=AN+NB=AP+BM=x–r+y–r=x+y–4=2R=10$.

Звідси маємо $x + y = 14$.

3) Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x + y = 14 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0, \quad x_{1,2} = 7 \pm 1.$$

Маємо: якщо $x_1 = 6$ см, то $y_1 = 8$ см; якщо $x_2 = 8$ см, то $y_2 = 6$ см.

Відповідь: $AC = 6$ см, $BC = 8$ см або $AC = 8$ см, $BC = 6$ см.

При розв'язуванні системи рівнянь використано метод підстановки.

Задача 2. Дано трикутну піраміду $DABC$, в якій плоскі кути при вершині D прямі і площі бічних граней дорівнюють S_1, S_2, S_2. Знайти радіус r кулі, вписаної в піраміду.

Розв'язання. Нехай дано піраміду $DABC$ (рис. 2).

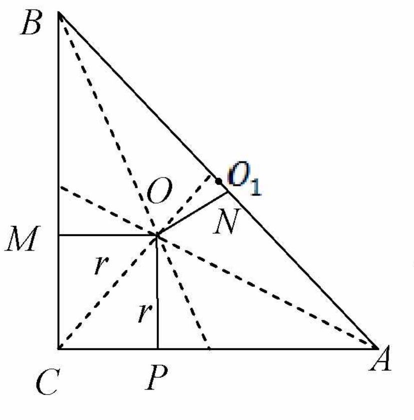

Рис. 1

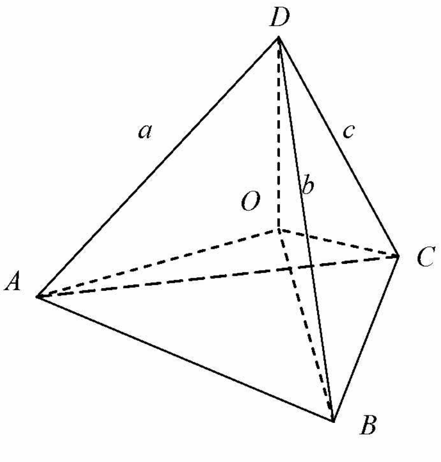

Рис. 2

$\angle ADB = \angle BDC = \angle ADC = 90°$. Бічні грані, з прямими кутами при вершині D мають площі відповідно: S_1, S_2, S_3. Точка O – центр вписаної кулі, віддалена від кожної з граней на радіус r цієї кулі.

Для спрощення міркувань введемо позначення: $DA=a$, $DB=b$, $DC=c$.

Площі бічних граней запишемо так: $S_1 = \frac{1}{2}ab, S_2 = \frac{1}{2}bc, S_3 = \frac{1}{2}ac$.

Виконаємо наступні дії:

1) знайдемо корінь квадратний із суми квадратів площ:

$$\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2} = S_4,$$

де S_4 – площа ΔABC, яку можна одержати за формулою Герона, де після елементарних перетворень отримаємо

$$p = (AB + BC + AC),\ AB = \sqrt{a^2 + b^2},\ BC = \sqrt{b^2 + c^2},\ AC = \sqrt{a^2 + c^2};$$

2) об'єм піраміди $DABC$ знайдемо як суму чотирьох пірамід з вершинами в точці O і основами на гранях:

$$V_n = \frac{1}{3\left(S_1 \cdot r + S_2 \cdot r + S_3 \cdot r + r\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}\right)};$$

3) оскільки добуток $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = \frac{1}{8}a^2b^2c^2$, то об'єм прямокутного паралелепіпеда, побудованого на ребрах a, b і c, визначається так:

$$V = abc = \sqrt{8 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3};$$

4) об'єм піраміди $DABC$, побудованої на ребрах a, b і c:

$$V_n = \frac{1}{6}V = \frac{1}{3}\sqrt{2 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3};$$

5) запишемо рівняння із рівності об'ємів 2) і 4):

$$\frac{r}{3}\left(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{2 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}.$$

Звідси одержуємо *відповідь*: $r = \dfrac{\sqrt{2 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}$

Отже, алгебраїчні методи допомагають записати умову геометричної задачі в короткій формі у вигляді рівнянь, а потім ефективно і точно привести до розв'язку.