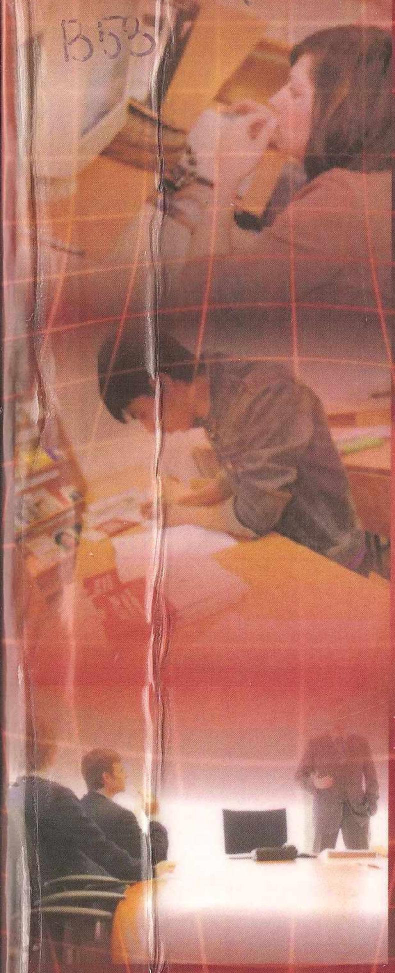

ВІСНИК

МІЖНАРОДНОГО ДОСЛІДНОГО ЦЕНТРУ

"ЛЮДИНА: МОВА, КУЛЬТУРА, ПІЗНАННЯ"

ТОМ 42
2018

Г.М. БІЛОУСОВА

УДК 517.96

ПІДСТАНОВКА АБЕЛЯ

В статті розглянуті окремі практично важливі способи інтегрування квадратичних ірраціональностей.

Ключові слова: *інтегрування квадратичих ірраціональностей, підстановка Абеля.*

In the article we consider some practical ways of integrating quadratic irrationality.

Keywords: *integration of quadratic irrationality, substitution of Abel.*

При вивченні математичного аналізу велику увагу приділяють техніці інтегрування функцій різних видів. Інтегруючи квадратичну ірраціональність, а саме інтеграл виду $I=\int f\left(x, \sqrt{ax^2+\ bx+c}\right) dx$, де *а, в, с* – сталі і *f* є раціональною функцією за допомогою підстановок Ейлера, заданий інтеграл зводиться до інтеграла від раціональної функції і дозволяє обчислити його в скінченому виді. Але практика показує, що підстановки Ейлера часто приводять до інтегрування складних раціональних дробів.

Метою публікації є з'ясувати, до яких інтегралів від ірраціональних функцій доцільно застосовувати підстановку Абеля.

Використовують інші, зручні способи інтегрування функцій, одним з яких є підстановка Абеля. Найчастіше цю підстановку застосовують до інтегралів вигляду $\int \frac{dx}{(x^2+a)\sqrt{x^2+b}}$; $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\frac{m+1}{2}}}$. Для першого інтеграла підстановка Абеля $t=\left(\sqrt{x^2+\ b}\right)'$; для другого $t-\left(\sqrt{x^2+\ px+q}\right)'$.

Розглянемо, як працює ця підстановка на прикладах.

1. Знайти $I=\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+x+2)^5}}$

Розв'язання.

Приймемо, що $t=\left(\sqrt{x^2+\ x+2}\right)'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$, тоді $dt=(1\ -\ t^2)\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$; або $\frac{dt}{1-t^2}=\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$. З рівності $t=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$ визначаємо $x^2+x+2=\frac{-7}{4\ (t^2-1)}$

Отже, $I=\int\frac{1}{(x^2+x+2)^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{16}{49}$ $\int(1-t^2)dt=\frac{16}{49}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+C=\frac{16}{49}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}-\frac{1}{24}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}\right)^3\right)$+C.

При знаходженні цього інтегралу за допомогою першої підстановки Ейлера $\sqrt{x^2+x+2}=\ t-x$, одержимо інтеграл $\int\frac{2(2t+1)^3}{(t^2+t+2)^4}dt$, обчислити який значно складніше, ніж інтеграл від раціональної функції до якої задану підінтегральну функцію зводить підстановка Абеля.

2. I = $\int\frac{dx}{(x^2+3)\sqrt{x^2+1}}$

Підстановка $t=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $dt=(1-t^2)\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; $\frac{dt}{1-t^2}=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

З рівності $t=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, маємо, що $x^2=\frac{t^2}{1-t^2}$; $x^2+3=\frac{3-2t^2}{1-t^2}$.

Отже, $I=\int\frac{1-t^2}{3-2t^2}\cdot\frac{dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{3-2t^2}=$

$\frac{1}{2\sqrt{6}}ln\left|\frac{\sqrt{3}+t\sqrt{2}}{\sqrt{3}-t\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3t^2+3}}{\sqrt{3t^2-3}}\frac{+t\sqrt{2}}{-t\sqrt{2}}\right|+C$, де $t=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

3. I=$\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$

Підінтегральну функцію представимо у вигляді:

$\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}=\frac{x^2+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$

$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}=ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|+C_1$

$I_2=\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$

Для обчислення I_2 застосуємо підстановку Абеля $t=\left(\sqrt{x^2+2}\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$;

$$\frac{dt}{1-t^2}=\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}};\quad x^2=\frac{2t^2}{1-t^2};\quad x^2+1=\frac{t^2+1}{1-t^2}$$

$$I_2=\int\frac{1-t^2}{t^2+1}\cdot\frac{dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{t^2+1}=arctg\,t+C_2=arctg\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}+C_2$$

Шуканий інтеграл $I=I_1+I_2=\ln|x+\sqrt{x^2+2}|+$ $+arctg\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$+C.

4. $I=\int\frac{dx}{(x^2+x-3)\sqrt{x^2+x+2}}$.

Квадратні тричлени, які стоять у знаменнику запишемо у вигляді:

$$x^2+x-3=(x+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{13}{4}=y^2-\tfrac{13}{4}$$

$x^2+x+2=(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{7}{4}=y^2+\tfrac{7}{4}$, де $y=x+\tfrac{1}{2}$.

Підстановка $t=\left(\sqrt{y^2+\frac{7}{4}}\right)'=\frac{y}{\sqrt{y^2+\frac{7}{4}}};\quad \frac{dt}{1-t^2}=\frac{dy}{\sqrt{y^2+\frac{7}{4}}};$

З рівності $t=\frac{y}{\sqrt{y^2+\frac{7}{4}}}$ маємо: $y^2=\frac{\frac{7}{4}t^2}{1-t^2};\quad y^2-\frac{13}{4}=\frac{5t^2-\frac{13}{4}}{1-t^2};$

Отже, $I=\int\frac{dy}{\left(y^2-\frac{13}{4}\right)\sqrt{y^2+\frac{7}{4}}}=\int\frac{dt}{5t^2-\frac{13}{4}}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2-\frac{13}{20}}=$

$\frac{1}{10\cdot\sqrt{\frac{13}{20}}}ln\left|\frac{t-\sqrt{\frac{13}{20}}}{t+\sqrt{\frac{13}{20}}}\right|$+C, де $t=\frac{y}{\sqrt{y^2+\frac{7}{4}}}=\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}}=\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+2}}$

Застосування до підінтегральної функції заданого інтеграла першої підстановки Ейлера $\sqrt{x^2+x+2}=t-x$, приводить до обчислення інтегралу $\int\frac{2(2t+1)\,dt}{t^4+2t^3-15t^2-16t-1}$ значно складнішого, ніж інтегралу, одержаного за використанням підстановки Абеля.

Слід відмітити, що інтеграли $I_1=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{b^2-x^2}}$; $I_2=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2-b^2}}$; $I_3=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+b^2}}$ можна визначити не лише за підстановкою Абеля, а використовуючи інші підстановки. Для I_1 можна застосувати підстановку $x=bcost$, для I_2 підстановку

$x = \frac{b}{cost}$, для I_3 підстановку $x = btgt$ [4 с.92]. Але тригонометричні підстановки не завжди є більш раціональними, ніж підстановка Абеля.

Матеріал даної статті можна використовувати на практичних заняттях з математичного аналізу для студентів фізико-математичних спеціальностей, а також при написанні курсових робіт.

Д. Є. БОБИЛЄВ, В. В. КОРОЛЬСЬКИЙ, М. Р. ОВЧАРЕНКО

УДК 517.977

МОДЕЛЮВАННЯ ГАСІННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ ПРИ ЗАДАНИХ ПАРАМЕТРАХ ДЕМПФЕРА

У статті розглянуто різні постановки задачі коливання струни і способи гасіння коливань. Розв'язана задача гасіння коливання струни при заданих геометричних і фізичних характеристиках струни.

Ключові слова: *коливання струни, демпфер, моделювання.*

The article deals with various statements of the problem of oscillation of a string and methods of quenching oscillations. The problem of quenching the oscillation of a string with given geometric and physical characteristics of a string is solved.

Keywords: *fluctuations of the string, damper, modeling.*

У зв'язку з підвищенням вимог до міцності та надійності машин, приладів і апаратури, технічних споруд та засобів транспортування проблема гасіння коливань все більше привертає увагу дослідників. Незважаючи на існування різних типів гасителів коливань та чисельних теоретичних й експериментальних досліджень, дотепер не існує універсальних підходів до ефективного розв'язання проблем гасіння коливань сучасної техніки. Використання нових типів динамічних нелінійних гасителів коливань стримується за відсутності адекватних методів аналізу