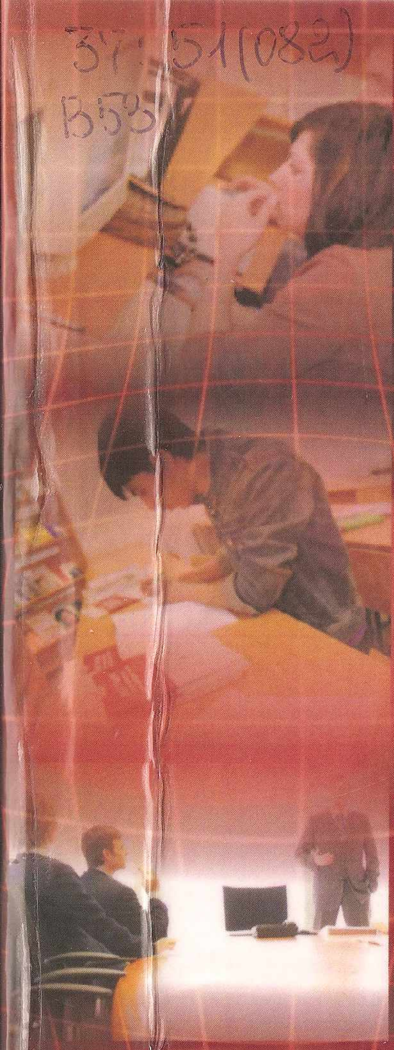


ВІСНИК

МІЖНАРОДНОГО ДОСЛІДНОГО ЦЕНТРУ

"ЛЮДИНА: МОВА, КУЛЬТУРА, ПІЗНАННЯ"

ТОМ 42
2018

6. Проект Концепції STEM-освіти в Україні [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://mk-kor.at.ua/STEM/STEM_2017.pdf (дата перегляду 26.03.2018)
7. Сотніченко О. Основи обчислювальної геометрії [Електронний ресурс] / О. Сотніченко // Зимова сесія «WEB-STEM-ШКОЛИ – 2018». – Режим доступу: https://www.youtube.com/watch?v=6rxUo56yNxw (дата перегляду 26.03.2018).

О.С. БЕСХЛІБНА, Л.О. ЧЕРНИХ

УДК 373.5.076:[515.128+517.6]

ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ МНОЖИН ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ СИСТЕМ РАЦІОНАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

В статті розглянуто систему підготовчих завдань до теми «Розв'язування систем раціональних нерівностей», запропоновано і описано методичний прийом складання вчителем системи доцільних задач з даної теми.

Ключові слова. *Раціональна нерівність, система раціональних нерівностей, числовий проміжок, розв'язок нерівності, система задач, методичний прийом.*

In the article the system of preparatory tasks for the topic "Solving of systems of rational inequalities" is considered, the methodical method of compiling the system of expedient tasks on the given topic is proposed and described.

Key words. *Rational inequalities, system of rational inequalities, a numeric interval, the solution to the inequality, system tasks, methodical reception.*

Постановка проблеми. Як відомо з історії розвитку математичної освіти, у 1962-1963 рр. в Україні почалася інтенсивна перебудова шкільної освіти, її модернізація. В наступні роки була спроба перевести математику на науковий рівень, зробити її виклад більш строгим, для чого було запропоновано один із прийомів – використання теорії множин.

Як показав досвід, такий підхід до побудови математики послабив принцип доступності, тому вивчення у школі теорії множин зазнало критики і було визнано недоцільним.

Але шкільна математика не може обійтися без використання елементів теорії множин. В сучасних підручниках, зокрема в підручнику з алгебри для 8 класу авторів А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір, вводяться поняття множини та її елементів, розглядаються види множин та операції над ними (об'єднання, переріз, різниця, доповнення до множини). В подальшому символіка теорії множин в курсі алгебри використовується для запису розв'язків рівнянь та нерівностей.

Таким чином, в явному чи неявному вигляді теорія множин присутня в будь-якій темі шкільного курсу математики. Тому актуальною на сьогодні є проблема розробки адекватної, науково обґрунтованої методики реалізації теоретико-множинного підходу в практиці навчання учнів математики.

Аналіз актуальних досліджень. Дослідженнями в галузі теоретичної розробки і практичної реалізації теоретико-множинного підходу до побудови математики в основній школі займалися такі дослідники: А.М. Колмогоров, Н.Я. Віленкін, К.І. Дудничев, Л.А. Калужин, А.А. Столяр, Л.О. Соколенко та інші [3], [5].

Мета статті полягає у розробці методики використання елементів теорії множин при розв'язуванні систем раціональних нерівностей.

Виклад основного матеріалу. Вміння розв'язувати раціональні рівняння та нерівності, їх системи та сукупності – важлива складова алгебраїчної культури учнів. Розв'язування системи (сукупності) рівнянь та нерівностей – це комплексна навчально-математична діяльність, яка передбачає володіння такими знаннями та уміннями:

а) розуміння сутності понять «система рівнянь та нерівностей», «сукупність рівнянь та нерівностей»;

б) володіння різними методами та прийомами розв'язання окремих видів рівнянь та нерівностей;

в) вміння планувати та реалізовувати сплановану діяльність, пов'язану з розв'язуванням систем та сукупностей нерівностей;

а) вміння зображати числові множини, що є розв'язками окремих рівнянь та нерівностей, знаходити їх перерізи та об'єднання і формулювати відповідь.

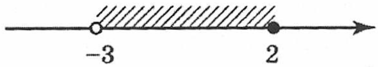
Зупинимось детальніше на останньому етапі розв'язування систем раціональних нерівностей. Цей етап часто викликає в учнів певні ускладнення, пов'язані з використанням теорії множин. Тому, перш ніж вчити учнів зображати і формулювати розв'язки систем нерівностей, доцільно розглянути підготовчі завдання.

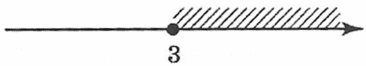
Задача 1. Зобразіть на координатній прямій проміжок:

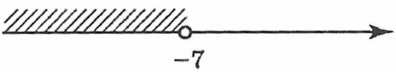
1) $(-2;1)$; 2) $(-4;2]$; 3) $[1;\ 5)$; 4) $[-3;\ 7]$;

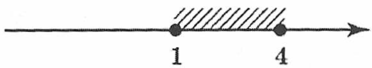
5) $(-\infty;-3)$; 6) $[4;+\infty)$; 7) $(-\infty;0]$; 8) $(5;\ +\infty)$.

Задача 2. Запишіть проміжки, які зображені на рисунках:

1) 

2) 

3) 

4) 

Задача 3. Зобразіть на координатній прямій і запишіть проміжок, який задано нерівністю:

1) $x \geq 5$; 2) $x < 4{,}5$; 3) $x \leq -1{,}5$;

4) $3{,}9 < x < 4$; 5) $2{,}5 \leq x \leq 3\frac{1}{8}$; 6) $7 < x \leq 13{,}01$.

Задача 4. (усно) Прочитайте вголос та з'ясуйте, істинні чи хибні такі твердження:

1) $-1{,}009 \in [-1{,}01;1{,}02]$;

2) $-\frac{1}{4} \in \left[-\frac{1}{2};0\right]$;

3) $0 \in (-\infty;0)$;

4) $73 \notin \mathbb{Q}$;

5) $5\frac{1}{9} \in \mathbb{Z}$;

6) $-9 \in \mathbb{N}$?

Задача 5. Запишіть усі цілі числа, що належать проміжку. Які натуральні числа належать проміжку? Яке найбільше і найменше ціле число належить проміжку?

1) $(-0{,}1;\ 4{,}9]$; 2) $[1; \sqrt{5})$;

3) $(-3; 2\frac{1}{4}]$; 4) $[2; 3{,}99)$.

Задача 6. Зобразіть проміжки (числові множини) на координатній прямій та запишіть їх об'єднання і переріз:

1) $[8; 15]$ і $(9; 20]$; 2) $[-2{,}7; 0)$ і $[0;+\infty)$; 3) $(-\infty; 3)$ і $\emptyset$;

4) $[0; 1)$ і $[-2; 1]$; 5) $(0; 2)$ і $[0; 2]$; 6) $\{4\}$ і $(-\infty; 4)$;

7) $\mathbb{N}$ і $\mathbb{Z}$; 8) $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{Q}$; 9) $(-1; 0]$ і $[-\infty; +\infty)$.

Важливо систематизувати знання і уміння учнів, пов'язані з умінням зображати у вигляді числових проміжків розв'язки нерівностей. Результати такої систематизації можна представити в таблиці (табл.1).

Систематизовані таким чином знання і уміння є важливими складовими діяльності учнів, пов'язаної з останнім етапом розв'язування систем раціональних нерівностей [4, с. 9–10].

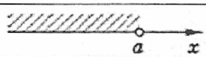
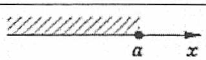
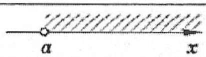
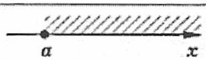
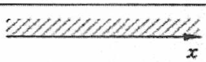
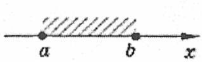
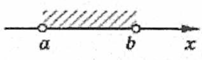
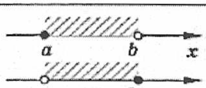
Нерівність	Зображення	Позначення	Словесне формулювання
$x < a$		$(-\infty; a)$	Нескінченний проміжок (промінь)
$x \le a$		$(-\infty; a]$	
$x > a$		$(a; +\infty)$	
$x \ge a$		$[a; +\infty)$	
$-\infty < x < \infty$		$(-\infty; +\infty)$ або R	Множина всіх дійсних чисел, числова пряма
$a \le x \le b$		$[a; b]$	Закритий проміжок (відрізок) із кінцями a і b
$a < x < b$		$(a; b)$	Відкритий проміжок (інтервал) із кінцями a і b
$a \le x < b$ $a < x \le b$		$[a; b)$ $(a; b]$	Напіввідкритий проміжок (півінтервал) із кінцями a і b

Табл.1

Складаючи систему доцільних задач з даної теми, вчителю слід охопити різноманітні випадки співвідношення розв'язків окремих нерівностей, що складають систему. Більшість шкільних підручників і збірників задач з алгебри [1, 2 та ін.] містять цікаві набори систем та сукупностей раціональних нерівностей, але інколи ці набори задач не охоплюють всіх можливих варіантів співвідношень між розв'язками окремих нерівностей.

Опишемо методичний прийом, яким може скористатись вчитель, добираючи повноцінну систему задач. Спочатку вчителю слід розглянути можливі випадки співвідношень між числовими проміжками, що зображатимуть розв'язки окремих нерівностей.

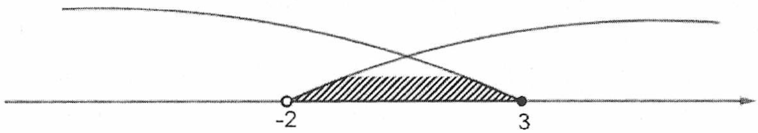


Рис.1

Рис.2

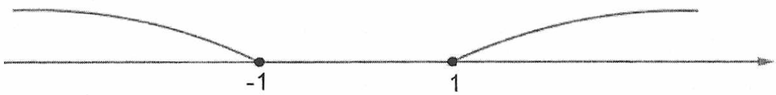


Рис.3

Рис.4

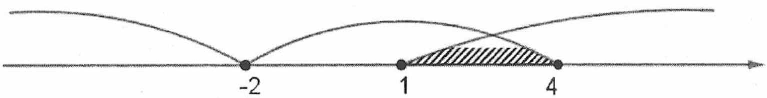


Рис.5

На основі запропонованих рисунків вчитель складає відповідну систему елементарних нерівностей. Цю систему він може «ускладнити», використовуючи властивості числових нерівностей.

Приклад 1. Складання системи нерівностей на основі рис.1.

Система елементарних нерівностей, що відповідає рис.1, має вигляд:

$$\begin{cases} x > -2, \\ x \leq 3 \end{cases} \tag{1}$$

«Ускладнити» таку систему можна, помноживши першу нерівність на 3, а другу – на (–2):

$$\begin{cases} 3x > -6, \\ -2x \geq -6 \end{cases}$$

В кожній нерівності перенесемо (–6) у ліву частину і одержимо:

$$\begin{cases} 3x + 6 > 0, \\ 6 - 2x \geq 0 \end{cases}$$

В першій нерівності винесемо 3 за дужки, а в другій (–2). Одержимо систему у вигляді:

$$\begin{cases} 3(x + 2) > 0, \\ -2(x - 3) \geq 0 \end{cases}$$

В результаті розв'язування учні одержують рисунок, аналогічний рис.1, знаходять спільну частину проміжків $(-2;\ +\infty)$ і $(-\infty;\ 3]$, тобто їх переріз. Таким чином розв'язком заданої системи нерівностей буде проміжок $(-2; 3]$.

Приклад 2. Складання системи нерівностей на основі рис.2.

Рисунку 2 відповідає така система елементарних нерівностей:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x > 5 \end{cases} \tag{2}$$

«Ускладнимо» цю систему таким чином: помножимо першу нерівність на 6, а до другої нерівності додамо вираз $x^2 - 9$ і зведемо подібні доданки у правій частині нерівності:

$$\begin{cases} 6x \geq 0, \\ x + x^2 - 9 > x^2 - 4 \end{cases}$$

До першої нерівності додамо вираз $x^2 + 9$ і переставимо доданки в зручному порядку; в другій нерівності скористаємось формулою скороченого множення «різниця квадратів»:

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 9 \geq x^2 + 9, \\ (x-3)(x+3) + x > (x-2)(x+2) \end{cases}$$

Представимо ліву частину першої нерівності у вигляді квадрата різниці і перенесемо всі доданки першої і другої нерівності у ліву частину:

$$\begin{cases} (x+3)^2 - x^2 - 9 \leq 0, \\ (x-3)(x+3) + x - (x-2)(x+2) > 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему нерівностей, учень відмічає на координатній прямій проміжки, задані елементарними нерівностями із системи (2) і знаходить їх переріз: $[0;+\infty) \cap (5;+\infty) = (5;\ +\infty]$. Отже, $x \in (5;\ +\infty]$.

Приклад 3. Складання системи нерівностей на основі рис.3.

Система елементарних нерівностей, що відповідає рис.3, має вигляд:

$$\begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 1 \end{cases} \tag{3}$$

Помножимо першу нерівність на 6, а другу – на 7:

$$\begin{cases} 6x \leq -6, \\ 7x \geq 7 \end{cases}$$

У лівій частині першої нерівності $6x$ представимо у вигляді суми $4x + 2x$, а в правій розпишемо (–6) як (–1–5). В другій нерівності до обох частин нерівності додамо $(x + 4)$:

$$\begin{cases} 4x + 2x \leq -1 - 5, \\ 7x + x + 4 \geq 7 + x + 4 \end{cases}$$

Перенесемо в першій нерівності з правої частини в ліву (–1), розпишемо (–5) як (–1–4) та додамо до обох частин нерівності $4x^2$. У другій нерівності зведемо подібні доданки:

$$\begin{cases} 4x^2 + 4x + 1 + 2x \leq 4x^2 - 1 - 4, \\ 8x + 4 \geq x + 11 \end{cases}$$

Помітимо, що в першій нерівності присутні формули скороченого множення, тому використаємо їх для «ускладнення» нерівності. В другій нерівності $x + 11$ представимо у вигляді $2x + 12 - x - 1$ та поділимо обидві частини нерівності на 8:

$$\begin{cases}(2x+1)^2+2x\le(2x-1)(2x+1)-4,\\ \dfrac{8x+4}{8}\ge\dfrac{2x+12-x-1}{8}\end{cases}$$

Першу нерівність залишаємо без змін, а в другій в правій частині нерівності можемо виконати почленне ділення і скоротити отримані дроби:

$$\begin{cases}(2x+1)^2+2x\le(2x-1)(2x+1)-4,\\ \dfrac{2x+1}{2}\ge\dfrac{x+6}{4}-\dfrac{x+1}{8}\end{cases}$$

В результаті розв'язання учень отримує проміжки $(-\infty;-1]$ та $[1;+\infty)$, зображені на рисунку 3. Перерізом даних числових проміжків буде порожня множина $\emptyset$, а це означає, що система розв'язків не має.

Приклад 4. Складання системи нерівностей на основі рис.4.

Система елементарних нерівностей, що відповідає рис.4:

$$\begin{cases}(x+3)(x-5)<0,\\(x+1)(x-2)\ge 0\end{cases} \tag{4}$$

Додамо до першої нерівності 3, а від другої віднімемо 4:

$$\begin{cases}(x+3)(x-5)+3<3,\\(x+1)(x-2)-4\ge -4\end{cases}$$

Розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$\begin{cases}x^2-2x-12<3,\\x^2-x-6\ge -4\end{cases}$$

Винесемо в першій нерівності за дужки x, а в другій перенесемо усі доданки в ліву частину і зведемо подібні:

$$\begin{cases}x(x-2)-12<3,\\x^2-x-2\ge 0\end{cases}$$

Першу нерівність поділимо на (–3), а в другій використаємо формулу скороченого множення різниці квадратів. Остаточна система нерівностей має вигляд:

$$\begin{cases}-\dfrac{x(x-2)}{3}+5>0,\\(x-1)(x+1)-x-1\ge 0\end{cases}$$

Прийшовши в результаті розв'язування до системи (4), учень відмічає на координатній прямій розв'язки першої нерівності $(-3; 5)$ та розв'язки другої нерівності $(-\infty; -1] \cup [2;+\infty)$. Розв'язком цієї системи є переріз цих множин: $(-3; -1] \cup [2; 5)$.

Приклад 5. Складання системи нерівностей на основі рис.5.

Відповідна рисунку 5 система елементарних нерівностей має вигляд:

$$\begin{cases}(x+2)(x-1) \geq 0, \\ (x+2)(x-4) \leq 0\end{cases} \qquad (5)$$

В першій і другій нерівності розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$\begin{cases}x^2 + x - 2 \geq 0, \\ x^2 - 2x - 8 \leq 0\end{cases}$$

Помножимо першу нерівність на (–4), а другу на (–1):

$$\begin{cases}-4x^2 - 4x + 8 \leq 0, \\ -x^2 + 2x + 8 \geq 0\end{cases}$$

В лівій частині першої нерівності винесемо за дужки $(-4x)$, а в другій нерівності виконаємо перестановку доданків:

$$\begin{cases}-4x(x+1) + 8 \leq 0, \\ 8 + 2x - x^2 \geq 0\end{cases}$$

Першу нерівність помножимо на 2, а другу поділимо на 2 і знову виконаємо перестановку доданків:

$$\begin{cases}-8x(x+1) + 16 \leq 0, \\ -\dfrac{x^2}{2} + x + 4 \geq 0\end{cases}$$

На останньому етапі розв'язування системи нерівностей учень зображає на координатній прямій проміжки, що є розв'язками першої нерівності $(-\infty;-2] \cup [1;+\infty)$ та другої нерівності $[-2;4]$. Розв'язком цієї системи є переріз цих проміжків: $[1;4] \cup \{-2\}$.

Отже, $x \in [1;4] \cup \{-2\}$.

Висновки. Описаний методичний прийом може бути використаний вчителем при складанні доцільної системи задач в темі «Розв'язування систем раціональних нерівностей». Сконструйовані таким чином системи раціональних нерівностей сприяють глибокому та свідомому засвоєнню учнями елементів теорії множин та направлені на формування умінь, пов'язаних з розв'язанням систем раціональних нерівностей.

Список використаних джерел

1. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвітн. навчальн. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С.Якір. – Х.: Гімназія, 2016.
2. Алгебра: збірник задач і вправ для 9 класу / Анатолій Капіносов. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004.
3. Виленкин Н.Я. Современные основы школьного курса математики: [пособие для студ. пед. инс-тов] / Н.Я. Виленкин, К.И. Дудничев, Л.А. Калужин, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1980.
4. Нешков К.И. Множества. Отношения. Числа. Величины: [пособие для учителей] / К.И. Нешков, А.М. Пышкало, В.Н. Рудницкая. – М.: Просвещение, 1978.
5. Соколенко Л.О. Теоретико-множинні аспекти шкільного курсу математики / Л.О. Соколенко // Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО-2015), м. Черкаси, 4-5 червня 2015 р. – Черкаси: ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2015. – С.211–212.

Д.Є. БОБИЛЄВ

УДК 37.09:330.1:518.8

ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

У статті розглядається проблема запровадження задач оптимізації в школу в рамках концепції STEM-освіти.

Ключові слова: *STEM-освіта, задачі оптимізації.*

The article deals with the problem of introducing optimization problems into the school within the framework of the concept of STEM-education.

Keywords: *STEM-education, optimization tasks.*

Людина повинна вміти оптимізувати свою діяльність і навколишні процеси, наприклад, за витратами часу на навчання або роботу; мінімізувати витрати транспортних переміщень;