МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри

_________ ________________
«___» _____________ 20___ р.

Реєстраційний № _______
«___» _____________ 20___

МЕТОДИКА УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ УЧНІВ ГІМНАЗІЙ ТА ЛІЦЕЇВ У НАВЧАННІ ТЕМ ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ «ФУНКЦІЇ»

Кваліфікаційна робота
студента групи МІм-22
ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності: 014.04 Середня освіта (Математика)
Сивка Євгенія Сергійовича
Науковий керівник:
кандидат педагогічних наук, доцент
Віхрова Олена Вікторівна
Оцінка:
Національна шкала __________________
Шкала ECTS _____ Кількість балів _____
Голова ЕК _________ ________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
Члени ЕК _________ ________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

_________ ________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

_________ ________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

_________ ________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2023

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Сивко Євгеній Сергійович, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавав і не одержував недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело. Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомлений. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми магістерської роботи. Поняття «функція» було і залишається фундаментальним поняттям не тільки шкільного курсу алгебри але й вищої математики. На базі поняття функції, яке формується в учнів ще в сьомому класі, будується вся функціональна лінія шкільного курсу алгебри. Це поняття в своєму розвитку пройшло довготривалий шлях починаючи від стародавніх часів до сьогодення.

Дуже багато завдань на функцію останні роки пропонується під час складання ЗНО та НМТ з математики, які іноді у більшості випускників викликають труднощі. Наприклад, завдання на знаходження похідної функції $f(x)=2x^3-5$ у точці $x_0=-1$ (НМТ 2022 року) не виконали 53,7% учасників національного мультипредметного тесту.

Причинами цього є багато факторів, таких як:

- складне для сприйняття первинне означення функції (особливо в підручниках сучасних авторів);

-відсутність в учнів цілісної системи знань про основні функції та їх властивості;

-зниження інтересу до математики;

- зменшення кількості годин з математики та інші.

Загальновідомо, що формування такого поняття, як «функція» відбувається протягом усього вивчення курсу алгебри у школі. Тому весь накопичений учнями обсяг знань у гімназії та ліцеї не може бути приведений у систему без узагальнюючих прийомів повторення і закріплення вивченого матеріалу.

Вирішення даної проблеми, особливо актуальне, на наш погляд, для учнів, у яких уже сформований інтерес до математики, які мають певний обсяг математичних знань та обрали для навчання у ліцеї математичний, або фізико-математичний профіль. Воно може бути здійснено через пошук оптимальних варіантів узагальнення та систематизації цих знань. До того ж, високий рівень загальності та абстрактності такого фундаментального поняття математики як «функція» зумовлює його дидактичні функції. Для того, щоб основні теоретичні знання змістової лінії «Функції», що вивчаються у шкільному курсі математики, були практично використані як система, необхідно щоб цілеспрямовано на уроках математики здійснювалися систематизація та узагальнення знань, виявлялися та закріплювалися внутрішні структурні та логічні зв'язки, що дозволить знайти спільне у різноманітті матеріалу, який вивчається.

Тому зважаючи на таку тенденцію спрямованості математичної освіти сучасних гімназій та ліцеїв можна сказати, що робота актуальна і носить практичну спрямованість.

Мета магістерської роботи: полягає у тому, щоб розробити та теоретично обґрунтувати методичні рекомендації організації систематизації та узагальнення знань учнів із змістової лінії «Функції».

Об'єкт дослідження – процес навчання алгебри в гімназіях та ліцеях.

Предмет дослідження – методика узагальнення та систематизації знань учнів гімназій та ліцеїв із змістової лінії «Функції».

Для досягнення поставленої мети на початку роботи було сформульовано основні завдання роботи:

1. Проаналізувати стан дослідження проблеми узагальнення та систематизації знань учнів у психолого-педагогічній, методичній та навчальній літературі; дослідити ефективність узагальнення і систематизації у навчанні на основі аналізу педагогічного досвіду.

2. Визначити психолого-педагогічні та методичні основи формування математичних компетентностей учнів гімназій та ліцеїв.

3. Дослідити та проаналізувати різні методи та підходи до систематизації та узагальнення знань з теми «Функції» у різних класах гімназії та ліцею.

4. Розробити методичні рекомендації систематизації та узагальнення знань учнів з тем змістової лінії «Функція» та розробити систему комп'ютерно-орієнтованих задач для 7-9 класу.

Під час роботи над виконанням поставлених нами завдань ми використовували наступні теоретичні та практичні методи:

- аналіз психолого-педагогічної, математичної, методичної, літератури з теми дослідження;
- аналіз шкільних програм, підручників і навчальних посібників;
- вивчення і узагальнення педагогічного досвіду роботи вчителів математики;
- анкетування учнів та вчителів.

Практичне значення дипломної роботи полягає в тому, що її матеріали можуть бути використані вчителями математики, студентами – практикантами при підготовці до проведення уроків, учнями та студентами фізико-математичного факультету під час самостійної роботи.

Робота складається з вступу, двох розділів, висновків до розділів та загальних висновків; додатків та списку використаної літератури.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ.

1.1. Проблема узагальнення та систематизації знань учнів у психолого-педагогічній, методичній та навчальній літературі

Узагальнення та систематизація представляють собою невід'ємну властивість будь-якої розумової діяльності, яке сприяє встановленню зв'язків між явищами дійсності, фактами, науковими поняттями, а також різними галузями знань. Суттєвою є роль цих процесів в математиці, адже сутність математики складають узагальнення та абстракції. Узагальнення та систематизацію в освітньому процесі розглядають і як мислєннєвий прийом, і як спосіб розвитку знань. З методичної точки зору важливим є поєднання та взаємозв'язок цих функціональних аспектів.

Проблема узагальнення та систематизації досліджувалась видатними психологами, дидактами, методистами. Поліфункціональністю пояснюється відсутність у науковій літературі єдиного підходу до трактування поняття «узагальнення». У логіці під узагальненням розуміють логічний прийом, за допомогою якого відбувається мисленнєвий перехід від одиничного до загального. Аналогічної точки зору дотримуються і психологи, при цьому термін «узагальнення» у контексті освітнього процесу означає як сам процес навчання, так і його результат. Перший полягає у переході від розгляду властивостей окремого об'єкту до їх знаходження та виділення у класі подібних об'єктів. Результатом процесу узагальнення є вміння учнів, абстрагуючись від несуттєвих, змінних ознак об'єкта, знаходити спільні, суттєві ознаки. Ми розуміємо під узагальненням процес виокремлення найбільш суттєвих ознак, характеристик, взаємозв'язків для формування та формулювання понять, їх систем, законів та закономірностей математики.

Узагальнення, як один із важливих прийомів розумової діяльності, розглядають у двох формах: емпіричне та теоретичне узагальнення, що відповідає двом рівням мислення – емпіричному та теоретичному. Емпіричне узагальнення відбувається при порівнянні предметів та уявлень про них, які дозволяють виділити однакові, загальні властивості. Схема такого узагальнення полягає у наступному: порівняння предметів → відбір загальних рис та якостей (абстрагування) → встановлення загальних властивостей (узагальнення).

Розрізняють індуктивні та дедуктивні узагальнення, в залежності від того, як відбувається міркування від «одиничного, конкретного до загального» або «від загального до конкретного». У процесі індуктивного емпіричного узагальнення безпосередньо процесу узагальнення передують операції порівняння, елементарного аналізу та абстрагування. Прийом узагальнення даного виду включає такі операції:

- визначення мети узагальнення;
- виділення різних ознак об’єктів, що узагальнюються;
- виокремлення спільних ознак цих об’єктів, у відповідності до поставленої мети;
- формулювання висновку.

Перехід «від загального до конкретного» застосовується в узагальненні, якщо воно включається в систему операції класифікації. При цьому вирішується задача розпізнавання одиничних предметів. Операції такого дедуктивного узагальнення здійснюються у наступній послідовності:

- визначення мети узагальнення;
- формулювання означення поняття та визначення його основної ознаки;
- співставлення та порівняння предметів за цією ознакою;
- перевірка наявності ознаки у кожного об’єкта, який вивчається;
- абстрагування об’єктів, які володіють цією ознакою;
- формулювання висновку.

Схема теоретичного узагальнення представлена наступним чином: аналіз (виокремлення суттєвих властивостей, загального із частинного) → абстрагування (розкриття власних внутрішніх властивостей об’єктів у закономірних залежностях) → узагальнення (наукове поняття, що відображає суттєво спільне в об’єктах та явищах). Таким чином, теоретичне узагальнення полягає у сходженні від абстрактного до конкретного і здійснюється діалектичним шляхом. Тому розвиток у здобувачів освіти теоретичного мислення означає оволодіння ними двома процесами узагальнення з переважанням руху від абстрактного до конкретного.

Узагальнення займає в освітньому процесі особливо місце, пронизуючи всі його етапи. Уміння проводити узагальнення формується за умови сформованості вмінь порівнювати, аналізувати, виділяти головне, абстрагуватися. Тісний зв'язок з узагальненням має абстракція. Якщо абстракція виділяє загальну для всіх предметів та явищ ознаку, то узагальнення об'єднує в одне поняття або клас різні предмети, поняття, явища, які мають цю загальну, виділену у процесі абстрагування, ознаку. Прийом узагальнення проявляється в різноманітних видах навчальної діяльності: знаходження головної ідеї матеріалу, що вивчається; основних зв'язків, думок, встановлення причин та наслідків, складання схем, таблиць, алгоритмів, плану; побудові моделі математичної теорії або змістової задачі; зміни умови задачі тощо. Узагальнення також пов'язано з синтезом, класифікацією та систематизацією. Узагальнення навчального матеріалу з теми або змістової лінії курсу передбачає систематизацію, як одну із мисленнєвих операцій. Знання, які приведені у деяку систему, стають науковими. Тому у шкільному курсі математики необхідно використовувати систематизацію отриманих знань. У дидактиці під систематизацією розуміють зведення знань та відомостей про об'єкти, явища та закони у систему, в якій би відрізнялися її компоненти та зв'язки між ними. Сутність процесу систематизації полягає у розподіленні об'єктів у види та класи на основі ознак або принципів. При цьому існує тісний взаємозв'язок систематизації та класифікації. Спочатку (за допомогою) класифікації деякий об'єкт відноситься до певного виду або класу, потім завдяки систематизації різні об'єкти групуються певним чином. Систематизація може здійснюватися без класифікації. Тоді її функції полягають у такій організації навчального матеріалу, відповідно до якої окремі частини цього матеріалу, розташовуючись у певних відношеннях, складають одне ціле. У цьому випадку головна задача систематизації полягає у досягненні нового результату на основі відомого: окремі знання згруповані у відповідних відношеннях і утворюють систему.

Систематизація теоретичного навчального матеріалу – складний процес. У результаті систематизації відбувається концентрація знань, що створює умови для швидкого їх запам'ятовування та ефективного використання у практичній діяльності, сприяє переорієнтуванню освітнього процесу з «навчання» на «учіння». Результатом процесу систематизації та узагальнення є поняття, твердження, теорії. Поняття – вихідна одиниця знань, тому, перш за все, необхідно сформувати в учнів уміння узагальнювати та систематизувати поняття. Методично обґрунтована наступна схема дій:

- розглянути всі групи понять даної системи;
- виділити найбільш важливі та суттєві ключові поняття цієї системи;
- встановити зв'язки між поняттями даної системи;
- визначити роль та місце даної системи понять у курсі, який вивчається;
- розкрити прикладні функції даної системи понять.

Причому, узагальнення понять не передбачає строгого виконання кожного разу всіх пунктів схеми. Все залежить від ролі та функції узагальнення. Для шкільного курсу математики характерною рисою є те, що фундаментальні поняття вивчаються протягом тривалого часу, зміст цих понять розвивається поступово, протягом декілька років розширюється і поглиблюється. До таких понять відноситься поняття функції, яке формується протягом всього вивчення шкільного курсу алгебри, Тому доцільно з методичної точки зору здійснювати узагальнення за змістовими лініями шкільної математики, зокрема за функціональною лінією шкільного курсу алгебри.

Так, після вивчення властивостей парності, непарності та періодичності функцій, доцільно узагальнити відповідні властивості для функцій, які вивчалися у курсі алгебри 7-9 класів, поставивши учням такі запитання:

1. При яких значеннях $kmab$ лінійна функція $y=kx+b$ буде парною? Буде непарною? Чи може лінійна функція буде одночасно парною та непарною? Якщо так, то при яких значеннях $kmab$ це можливо?

2. Чи є квадратична функція $y=ax^2+bx+c$ парною, непарною? При яких значеннях коефіцієнтів a,b,c квадратична функція буде парною, буде непарною?

3. Якою щодо парності є функція пряма пропорційність? Обернена пропорційність?

4. Чи буде лінійна функція $y=kx+b$ періодичною? При яких значеннях $kmab$ це можливо? Чи можна вказати головний період для цієї функції?

5. Наведіть приклад періодичної функції та вкажіть її головний період.

Важливість процесів узагальнення та систематизації математичних знань обумовила різноманітність методичних підходів до їх організації, у тому числі і спеціальних уроків систематизації та узагальнення знань. Аналіз досліджень проблеми організації та проведення узагальнюючих уроків дозволив встановити, що проведення уроків систематизації та узагальнення :

- сприяє підвищенню ефективності навчання та якості математичних знань учнів;

- дозволяє сформувати в уявленні учнів цілісну картину матеріалу, що вивчається;

- дає можливість краще усвідомити структуру та зміст основних змістово -методичних ліній курсу;

- дозволяє продемонструвати приклади узагальнення та систематизації на базі конкретного матеріалу;

- формує теоретичне мислення учнів, сприяє більш міцному засвоєнню програмного матеріалу.

Уроки узагальнення та систематизації необхідно організовувати таким чином, щоб учні мали змогу виокремити в навчальному матеріалі найбільш суттєві поняття, закони та закономірності, провідні ідеї та теорії, встановити між елементами теоретичних знань крім змістово-логічних, причинно-наслідкові та функціональні зв'язки, що визначає структуру як окремих понять та явищ, так і їх систем.

Формування в учнів узагальнених та системних знань вимагає від вчителя, крім спеціально підібраного матеріалу та систем задач, ще й вибору адекватних способів та методів організації пізнавальної діяльності здобувачів освіти. Ці методи та прийоми повинні активізувати як розумову та практичну діяльність школярів, так і мотиваційні фактори. Одним із доцільних способів організації узагальнення та систематизації знань учнів ми вважаємо використання на уроках математики інформаційно-комунікаційних технологій. Інформаційні технології не тільки полегшують доступ до інформації і відкривають можливості варіативності навчальної діяльності, її індивідуалізації та диференціації, але і дозволяють по-новому організувати взаємодію всіх суб'єктів навчання, побудувати освітню систему, в якій учень був би активним і рівноправним учасником освітньої діяльності.

Розвиток інформаційних технологій та все більш широке їх використання на уроках математики стимулює потребу в створенні нових програмно-методичних комплексів спрямованих на якісне підвищення ефективності уроку. Тому, для успішного і цілеспрямованого використання в навчальному процесі засобів інформаційних технологій, вчителі повинні знати загальний опис принципів функціонування та дидактичні можливості програмно-прикладних засобів, а потім, виходячи зі свого досвіду і рекомендацій, «вбудовувати» їх у навчальний процес. Інформаційні технології дозволяють ефективно організувати самостійну роботу учнів. Самостійна робота, виконання якої вимагає незалежно від способу навчання, розумової активності, дає можливість учням не тільки засвоїти матеріал, який з різних причин (брак часу, наприклад), не був засвоєний на уроці, але й систематизувати раніше отриману інформацію, осмислити її у нових аспектах. Для організації творчої пізнавальної діяльності учнів на узагальнюючих уроках доцільно пропонувати завдання продуктивного характеру. До таких завдань відносяться завдання, виконання яких передбачає внесення суттєвих змін у структуру засвоєних учнями знань, способів діяльності або вимагає пошук нових знань та нових способів діяльності. Такі завдання зобов'язують вчителя так організувати освітню діяльність учнів, щоб процеси узагальнення та систематизації знань не зводилися до відтворення відомого, а сприяли глибокому проникненню у сутність явищ, виявляли зв'язки та відношення між окремими об'єктами пізнання, синтезували їх у цілісну систему.

Виконання таких завдань із використанням інформаційних технологій дозволяє індивідуалізувати процес навчання, поглибити знання учнів з основних змістових ліній шкільного курсу математики, зокрема з лінії «Функції».

1.2. Розвиток поняття функції в науці та у шкільній математиці

Поняття «функція» - одне з основних математичних і загальнонаукових понять. Воно відіграло і понині відіграє велику роль у пізнанні реального світу. Це поняття пройшло довготривалий шлях розвитку, в якому можна виділити декілька етапів.

І. Пропедевтичний період (з найдавніших часів до 17 століття). Ідея функціональної залежності сходить до давнини. Її зміст можна знайти вже в перших, математично виражених співвідношеннях між величинами, у перших правилах дій над числами. У перших формулах для знаходження площі і об'єму тих або інших фігур. Так, вавилонські вчені (4-5 тис. років тому) хоча й несвідомо, та все ж таки встановили, що площа кола є функцією від його радіуса за допомогою знаходження наближеної формули: $S = 3r^2$. Прикладами табличного задання функції можуть служити астрономічні таблиці вавилонян, стародавніх греків та індійців, а прикладами словесного задання функції - теорема про стале відношення площ круга і квадрата, побудованого на його діаметрі.

II. Введення поняття функції через механічне та геометричне уявлення (17 століття.)

Починаючи лише з 17 століття, у зв'язку з проникненням в математику ідеї змінних, поняття функції застосовується явно і цілком свідомо. Шлях до появи поняття функції заклали в 17 столітті французькі вчені Франсуа Вієт (1540-1603) і Рене Декарт (1596-1650); вони розробили єдину буквену математичну символіку, яка незабаром отримала загальне визнання. Введено було єдине позначення: невідомих - останніми літерами латинського алфавіту - x, y, z, відомих - початковими буквами того ж алфавіту - *a,b,c, ...* і т.д. Під кожною буквою стало можливим розуміти не тільки конкретні дані, але і багато інших; в математику прийшла змінна величина. Тим самим з'явилася можливість записувати загальні формули.

Крім того, у Декарта і Ферма (1601-1665) в геометричних роботах з'являється чітке уявлення змінної величини і прямокутної системи координат. У своїй «Геометрії» в 1637 році Декарт дає поняття функції, як зміни ординати точки в залежності від зміни її абсциси; він систематично розглядав лише ті криві, які можна точно представити за допомогою рівнянь, причому переважно алгебраїчних. Поступово поняття функції стало ототожнюватися, таким чином, з поняттям аналітичного виразу - формули.

У 1671 році Ньютон (1643-1727) під функцією став розуміти змінну величину, що змінюється з часом. У «Геометрії» Декарта і роботах Ферма, Ньютона і Лейбніца (1646-1716) поняття функції носило по суті інтуїтивний характер і було пов'язане або з геометричними, або з механічними уявленнями. Наприклад: ординати точок кривих - функція від абсцис *(x);* відстань і швидкість - функція від часу *(t)* і т.п .

ІІІ. Аналітичне визначення функції (17 - початок 19 століття). Саме слово «функція» (від латинського functio - здійснення, виконання) вперше було вжито німецьким математиком Лейбніцем в 1673 році в листі до Гюйгенса (1629-1695) (під функцією він розумів відрізок, довжина якого змінюється за яким-небудь певним законом), а вже для більш широкого загалу став використовувати поняття «функція» лише з 1694 року. Починаючи з 1698 року, Лейбніц ввів також терміни «змінна» і «константа». У 18 столітті з'являється новий погляд на функцію як на формулу, що зв'язує одну змінну з іншою. Це так звана аналітична точка зору на поняття функції. Підхід до такого визначення вперше зробив швейцарський математик Йоганн Бернуллі (1667-1748). Для позначення довільної функції від x Бернуллі застосував знак $j(x)$, називаючи характеристикою функції, а також букви x або e; Лейбніц вживав x^1, x^2 замість сучасних $f_1(x)$, $f_2(x)$. Ейлер позначив через $f{:}x$, $f{:}(x+y)$те, що ми нині позначаємо через $f(x)$, $f(x+y)$.Поряд з ***e*** Ейлер пропонує використовувати літери F, Y та інші. Даламбер зробив крок вперед на шляху до сучасних позначень, відкидаючи двокрапки Ейлера, він пише, наприклад: jt, $j(t+s)$.

Остаточне формулювання визначення функції з аналітичної точки зору зробив в 1748 році учень Бернуллі Ейлер у роботі «Введення в аналіз нескінченного»: «Функція змінної кількості є аналітичний вираз, складений будь-яким чином з цієї кількості і чисел або постійних кількостей». Так розуміли функцію протягом майже всього 18 століття Даламбер, Лагранж (1736-1813), Фур'є (1768-1830) та інші видатні математики. Що стосується Ейлера, то він не завжди дотримувався вище зазначеного визначення, в його роботах поняття функції зазнавало, в подальшому розвитку відповідно до потреб математичного аналізу.

У «Диференційному численні», що вийшло у світ в 1755 році, Ейлер дає загальне визначення функції: «Коли деякі кількості залежать одна від одної таким чином, що при зміні останніх і самі вони піддаються зміні, то перші називають функцією других» [18]. Це означення має надзвичайно широкий характер; воно охоплює всі способи, якими одна кількість визначається за допомогою інших. Як можна побачити з певних визначень, саме поняття функції фактично ототожнювалося з аналітичним виразом. Нові кроки у розвитку природознавства і математики викликали і подальше узагальнення поняття функції.

Одним з невирішених питань, пов'язаних з поняттям функції, з приводу якого велися дискусії, був наступний: чи можна одну функцію задати декількома аналітичними виразами для різних значень аргументу?

Значний внесок у вирішення цього питання зробили Ейлер, Даламбер, Бернуллі та інші вчені XVIII століття. З приводу того, що варто розуміти під функцією, говорив і французький математик Жан Батист Жозеф Фур'є, який займався в основному математичною фізикою. У поданих ним у Паризьку Академію Наук в 1807-1811 рр..мемуарах з теорії розповсюдження тепла в твердому тілі Фур'є і привів перші приклади функцій, які задані на різних ділянках різними аналітичними виразами. З праць Фур'є випливало, що будь-яка крива незалежно від того, зі скількох і яких різнорідних частин вона складається, вона може бути представлена у вигляді єдиного аналітичного виразу.

У своїй праці «Курс алгебраїчного аналізу», опублікованій в 1721р., французький математик О. Коші (1789-1857) обґрунтував висновки Фур'є. Таким чином, на певному етапі розвитку фізики і математики стало зрозуміло, що доводиться користуватися і такими функціями, для визначення яких дуже складно або навіть неможливо обмежитися одними лише аналітичними виразами. Останній став гальмувати необхідне математиці і природознавству розширення поняття функції.

IV. Ідея відповідності (19 століття).

У 1855 році Н.І. Лобачевський (1792-1856), розвиваючи вищезазначене визначення функції, запропоноване Ейлером, в 1755р., писав: «Загальне поняття вимагає, щоб функцією від *x* називати число, яке дається для кожного *x* і разом з *x* поступово змінюється. Значення функції може бути дано і аналітичним виразом, або умовою, яка надає спосіб відчувати всі числа і обирати одне з них, або, нарешті, залежність може існувати, чи залишатися невідомою. Великий погляд теорії припускає існування залежності тільки в тому сенсі, щоб числа, одні з іншими в зв'язку, приймати як би даними разом» [20].

Ще до Лобачевського аналогічна точка зору на поняття функції була висловлена чеським математиком Б. Больцано (1781-1848).

Таким чином, сучасне визначення функції, зазвичай приписуване німецькому математику П.Л. Діріхле (1805-1859), неодноразово пропонувалося і до нього. У 1837 році Діріхле так сформулював загальне визначення поняття функції: *«y* є функція змінної *x,* якщо кожному значенню *x* на цьому відрізку відповідає цілком певне значення *y,* причому байдуже яким чином встановлено цю відповідність – аналітичною формулою, графіком, таблицею або навіть просто словами».

Прикладом, що відповідає цьому загальному визначенню, може слугувати так звана «функція Діріхле»$\beta(x)$:

$$\beta(x)=\begin{cases}1, \text{якщо } x\in Q\\ 0, \text{якщо } x\in I\end{cases}$$

Ця функція задана двома формулами і словесно. Вона відіграє певну роль в математичному аналізі. Аналітично її можна визначити лише за допомогою досить складної формули, це сприяє успішному вивченню її властивостей.

Таким чином, приблизно в середині XIX століття після тривалої боротьби думок поняття функції звільнилося від обмежень аналітичного виразу. Головний наголос в загальному визначенні поняття функції робиться на ідею відповідності.

У другій половині 19 століття після створення теорії множин в поняття функції, крім ідеї відповідності було включено і ідею нескінченності.

Таким чином, в повному своєму обсязі загальне визначення поняття функції формулюється наступним чином: якщо кожному елементу *x* множини *A* поставлений у відповідність певний елемент *y* з нескінченності *B,* то говорять, що на множині *A* задана функція $y = f(x)$, або що нескінченність *A* відображується на нескінченність *B.* У першому випадку елементи *x* множини *A* називають значеннями аргументу, а елементи із нескінченності *B* – значеннями функції, у другому випадку *x* – прообрази, *y* – образи. У сучасному розумінні розглядають функції, визначені для безлічі значень *x,* які можливо, і не заповнюють відрізок$[a,b]$, про який йдеться у визначенні Діріхле.

Досить вказати, наприклад, на функцію-факторіал $y = n!$, задану на множині натуральних чисел. Загальне поняття функції застосовано, звичайно, не тільки до числових значень, а й до інших математичних об’єктів. Наприклад, до геометричних фігур. При будь-якому геометричному перетворенні ми маємо справу з функцією. Іншими синонімами терміна «функція» у різних розділах математики є: відповідність, відображення, оператор, функціонал та інші. Подальший розвиток математичної науки в XIX столітті ґрунтувався на загальному визначенні функції Діріхле, яке стало класичним.

V. Подальший розвиток поняття функції (з XX століття – до наших днів)

Вже з самого початку 20 століття визначення Діріхле стало викликати деякі сумніви серед частини математиків. Ще важливішою була критика фізиків, які зіткнулися з явищами, що вимагали більш широкого погляду на фізику. Необхідність подальшого розширення поняття функції стала особливо гострою після виходу у світ в 1930 році книги «Основи квантової механіки» Поля Дірака (1902-1984), видатного англійського фізика, одного із засновників квантової механіки. Дірак увів так звану дельта-функцію, яка виходила далеко за рамки класичного визначення функції. Це наштовхнуло радянського математика Н.М. Гюнтера (1871-1941) та інших вчених на публікацію в 30-40 роках XX століття робіт, в яких вони зазначали, що невідомими є не «функції точки», а «функції області», що краще відповідало фізичній суті явищ. Так, наприклад, температуру тіла в точці практично визначити не можна, у той час як температура в деякій області тіла має конкретний фізичний зміст. У загальному вигляді поняття узагальненої функції було введено французом Лораном Шварцем. У 1936 році, 28-річний радянський математик і механік С.Л. Соболєв (1908 – 1989 рр.) першим розглянув окремий випадок узагальненої функції, що включає і дельта-функцію, і застосував створену теорію до розв'язування ряду задач математичної фізики. Важливий внесок у розвиток теорії узагальненої функції зробили учні та послідовники Шварца – І.М. Гельфант, Г.Є. Шилов та ін.

Різні сучасні підходи до визначення поняття «функція».

Поняття функції часто зустрічається в шкільному курсі математики і добре знайоме учням. Тим не менше на підсумковій атестації та зовнішньому незалежному оцінюванні випускники допускають багато помилок при використанні цього поняття. Пояснюється це різними причинами, але в першу чергу тим, що слово «функція» використовується в математиці в кількох значеннях, а в шкільних підручниках цю обставину не роз'яснено. Тому, перш за все, необхідно детально розібрати всі випадки, в яких вживається поняття «функція».

Проаналізувавши історію розвитку поняття «функція» можна сказати, що воно пройшло довгий шлях перш ніж дійти до наших часів в тому вигляді яким ми звикли користуватися. Тож наведемо узагальнюючу схему еволюції поняття «функція» (Таблиця 1.1):

Таблиця 1.1

Період, вчений	Визначення
З найдавніших часів до XVII ст.	Несвідоме використання вавилонськими вченими формули: $S = 3r^2$
XVIIст.	

Рене Декарт Ньютон Лейбніц	Функція – зміна ординати точки в залежності від зміни її абсциси; Функція – змінна величина що змінюється з часом; Функція – відрізок, довжина якого змінюється за певним правилом.
XVIII ст. Ейлер	Функція – формула що зв'язує одну змінну з іншою; Коли декілька множин залежать одна від одної таким чином, що при зміні останніх і самі вони піддаються зміні, то перші називаються ***функціями*** других;
XIX ст. Лобачевський Діріхле	Функцією від *x* слід називати число, яке дається для кожного *x* і разом з ним поступово змінюється; *y* є функцією змінної *x*, якщо кожному значенню *x* на певному відрізку відповідає цілком певне значення *y*, причому байдуже яким чином встановлюють цю відповідність.
XX – XXI ст.	Визначення поняття «функція» залишається досить близьким до визначення Лобачевського та Діріхле, але автори сучасних підручників дозволяють собі трактувати це поняття на свій лад та за власним сприйняттям і розумінням, що часто лише ускладнює процес розуміння та вивчення поняття «функція» учнями.

Вивчення основних елементарних функцій у шкільному курсі математики.

У результаті вивчення курсу математики учні повинні:

- розуміти, що функція – це математична модель, що дозволяє описувати й вивчати різноманітні залежності між реальними величинами, що конкретні типи функцій (пряма і обернена пропорційності, лінійна, квадратична функції) описують велику різноманітність реальних залежностей;
- правильно вживати функціональну термінологію (значення функції, аргумент, графік функції, область визначення, проміжки зростання та ін), розуміти її в тексті, у мові вчителя, у формулюванні завдань;
- знаходити значення функцій, заданих формулою, таблицею, графіком;
- знаходити за графіком функції проміжки зростання та спадання функції, проміжки знакосталості, найбільше і найменше значення;
- будувати графіки лінійної функції, прямої і оберненої пропорційності, квадратичної функції;
- інтерпретувати в нескладних випадках графіки реальних залежностей між величинами, відповідаючи на поставлені питання.

Змістова функціональна лінія шкільного курсу алгебри будується за аналогією з розвитком в історії поняття функції.

До 7 класу йде накопичення знань, необхідних для запровадження поняття функції. Розглядаються залежності площ фігур від довжини їх сторін, величини радіусів; розв’язуються завдання, в яких одна величина залежить від іншої тощо. Цей курс є пропедевтичним.

У 7-му класі вперше дається визначення поняття «функція».

Це визначення дається з урахуванням ідеї залежності та відповідності однієї величини іншій. Після визначення поняття можна розповісти про те, де люди зустрічалися із функціональними залежностями, хто вперше ввів цей термін і що означає саме слово «функція». Також у цьому класі вивчаються різні способи задання функції. Можна докладніше розповісти про табличний спосіб задання функції: навести приклади з історії математики, розповісти про значення й роль математичних таблиць для математиків минулих століть. Прикладами можуть бути таблиці квадратів, кубів чисел, які учні можуть побачити на форзацах своїх підручників, якими вони користуються і користувалися раніше. По завершенню вивчення теми функція (на останніх уроках) можна розповісти учням про те, що функція може бути не тільки від однієї змінної, а й від декількох.

У дев'ятому класі вкотре дається визначення функції з урахуванням ідеї залежності однієї змінної від іншої: «Функцією називають таку залежність змінної y від змінної x, за якої кожному значенню змінної x ставиться у відповідність єдине значення y». З іншого боку, у цьому класі вводиться символічне позначення функції. Учням доцільно розповісти, хто ввів цей запис.

У 10 – 11 класах вводиться сучасне поняття функції як відповідності між двома множинами: «числовою функцією з областю визначення D називається відповідність, за якої кожному числу x з множини D ставиться у відповідність, за деяким правилом єдине число у, залежне від х». Знову потрібно простежити, коли вперше було дане таке визначення та наголосити на тому чим воно відрізняється від раніше відомих.

Потрібно нагадати учням й те, що математика виникла з практичних потреб людини, звідки й виникла потреба у введенні такого поняття, як «функція». Також слід висвітлити проблему, яка спіткала фізиків, зокрема Поля Дірака; згадати його дельта-функцію, що виходить далеко за межі класичного визначення функції.

Слід також зазначити, що на цьому розвиток поняття функції не зупинився, а навіть більше буде змінюватися і надалі пристосовуючись до розвитку і потреб науки.

У наш час школи користуються досить великою кількістю різних підручників з математики, алгебри та геометрії. Зазвичай ці підручники обираються за поглядом вчителя або за замовленням міністерства. Дуже часто автори цих підручників не зовсім зрозуміло і доступно пояснюють поняття «функція» і як результат випускники шкіл іноді не можуть розв'язувати навіть елементарні завдання функціональної лінії, не говорячи вже про завдання підвищеного рівня.

Працюючи над магістерською роботою, ми проаналізували те, як автори діючих сучасних підручників дають визначення поняттю «функція». Вивчивши рекомендації міністерства освіти, для аналізу ми взяли наступні підручники [1 – 10].

Наведемо порівняльну таблицю (Таблиця 1.2) визначень поняття «функція» в підручниках цих двох груп авторів, та визначимо наскільки доцільно вони подані.

Таблиця 1.2

Бевз Г.П., Бевз В.Г.	Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.
7-й клас	
Якщо кожному значенню змінної x з множини D відповідає єдине значення змінної y, то змінну y називають функцією від x.	Функція – це правило за яким кожному значенню незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної.
8-й клас	
Функція – це відповідність між двома змінними, при якій кожному значенню однієї змінної відповідає єдине значення другої.	Окремого означення функції не дається лише вказується коли почали вивчати поняття «функція» і одразу дається визначення оберненої функції.
9-й клас	
Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини D відповідає єдине значення змінної y,	Функція – це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з

то таку відповідність називають ***функцією***.	множини *X* можна знайти єдине значення залежної змінної.
Нелін Є.П.	Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С.
10-й клас	
Означення дане на основі того, що функція – це залежність змінної *y* від змінної *x*. І вже на основі цього означення представлені означення числової, степеневої та тригонометричної функцій.	Функція – це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини *X* можна знайти єдине значення залежної змінної з множини *Y*. Дане означення повністю повторює означення попередніх років. І на основі цього означення подаються означення наступних функцій, а саме степеневої та тригонометричної.
11-й клас	
Загальне означення взагалі не повторюється і не уточнюється. Одразу вводяться поняття показникової та логарифмічної функцій.	Загальне означення не повторюється а всі означення даються з посиланням на 10-й клас, на цій основі вводяться поняття показникової та логарифмічної функцій.

Аналіз наведених означень поняття «функція» в діючих шкільних підручниках алгебри свідчить про те, що у першу чергу *функцією називають правило* за яким змінній *x* ставиться у відповідність змінна *y*. Цей факт значною мірою ускладнює подальше розуміння учнями завдань з теми функція, оскільки назвавши функцію правилом ми надалі просимо знайти область визначення «правила», значення «правила», побудувати графік «правила» і так далі. Тому в результаті вивчення функції саме за такими визначеннями ми і отримуємо не зовсім гарний результат, велика кількість випускників шкіл на ЗНО роблять помилки переважно в завданнях на функцію, і навіть в завданнях тестового рівня.

Отже можна сказати, що труднощі, які виникають особливо у старшокласників, здебільшого є результатами доволі заплутаного розуміння авторами сучасних підручників істинного, історичного, визначення поняття «функція».

1.3. Психолого-педагогічні та методичні основи формування математичних компетентностей учнів ліцеїв та гімназій

Узагальнення та систематизація знань учнів з основних змістових ліній шкільного курсу математики сприяє формуванню у них ключових компетентностей.

У науково-педагогічній, методичній літературі існують різні підходи до трактування поняття «компетентність». Методисти визначають компетентність у певній галузі як поєднання відповідних знань, умінь та позитивного досвіду діяльності, що дають змогу аргументовано вести мову про цю сферу й ефективно діяти в ній, а також особистісне ставлення до неї та предмету діяльності. Таким чином, під компетентністю розуміють особистісну якість, сформовану в процесі навчальної діяльності [11].

Н. М. Бібік [12] розуміє під компетентністю освітні результати (у когнітивній, діяльнісній, мотиваційній, соціальній сфері), що досягаються як засобами змісту освіти, так і засобами соціальної взаємодії. Такі освітні результати можна спрогнозувати у різних сферах: когнітивній, діяльнісній, мотиваційний, соціальній.

С. П. Бондар [13] визначає «компетентність» як загальну здатність і готовність до продуктивної діяльності, інтегровану характеристику якостей особистості, результативний блок, який сформований, передусім, через досвід, знання, вміння, ставлення, поведінкові реакції.

На думку М. С. Голованя [14], компетентність - це інтегративне характеристика особистості, що поєднує в собі знання, уміння, навички, досвід і особисті якості, які обумовлюють прагнення, здатність і готовність розв'язувати проблеми і завдання, що виникають в реальних життєвих ситуаціях, усвідомлюючи при цьому значущість предмету і результату діяльності.

С. А. Раков [15] виокремлюючи поняття компетентності і компетенції, визначає компетентність як рівень досягнення компетенцій, а компетенції як еталон досвіду дій, знань, умінь, навичок, творчості, емоційно-ціннісної діяльності, який встановлює суспільство.

Ю. В. Триус [16] розуміє під компетентністю спеціальну систему знань, умінь, звичок та відносин (компетенції), які набуваються в процесі навчання і які дають можливість ефективно діяти або виконувати певні функції, спрямовані на досягнення визначених стандартів у професійній області або певній діяльності.

Великий тлумачний словник сучасної української мови [17] дає такі тлумачення понять: «компетентний – який має достатні знання в якій-небудь галузі; який з чим-небудь добре обізнаний; тямущий; компетентність – властивість за значенням компетентний». Отже, у своїй роботі під компетентністю розуміємо особистісну характеристику, що складається зі знань, вмінь та навичок, здобутих у процесі навчання, збагачених досвідом людини та вбудованих в систему цінностей задля ефективної мотивації навчальної діяльності. Задля формування компетентностей освітній процес має бути відповідним чином організований.

Компетентнісний підхід – це спрямованість освітнього процесу на досягнення результатів, які ієрархічно підпорядковані ключовим, загальнопредметним і предметним (галузевим) компетентностями. Цей підхід сприяє розвитку ключових і дисциплінарних компетенцій.

Математичні компетентності складають основу для формування ключових компетентностей. За визначенням С.А.Ракова, математична компетентність – це спроможність особистості бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень.

До математичних компетентностей відносяться такі:

- процедурна компетентність – уміння розв'язувати типові математичні задачі;
- логічна компетентність – володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень;
- технологічна компетентність – володіння сучасними математичними пакетами;
- дослідницька компетентність – володіння методами дослідження практичних та прикладних задач математичними методами.

Методологічна компетентність – уміння оцінювати доцільність використання математичних методів для розв'язування практичних та прикладних задач.

Природа компетентності така, що вона може проявлятися лише в органічній єдності з цінностями людини, тобто в умовах глибокої особистої зацікавленості в даному виді діяльності.

Компонентами математичної компетентності, як і будь-якої іншої є:

- мотиваційний – внутрішня мотивація, інтерес;
- змістовний – комплекс математичних знань, умінь та навичок;
- дійовий – навички навчальної праці (самостійність, самооцінка, самоконтроль).

Формування мотиваційного компонента здійснюється через забезпечення позитивного ставлення учнів до математичної діяльності; виховання пізнавального інтересу. Для досягнення цієї мети на уроках використовують висловлювання відомих особистостей. Шифровані вправи дають можливість швидко перевірити якість знань учнів та познайомитись з відомими математиками.

Внутрішня мотивація у багатьох учнів ще нестійка і залежить від ситуації. Тому слід пропонувати логіко-розвивальні завдання, цікаві факти з життя видатних вчених, різноманітні історичні матеріали, ігрові ситуації, розв'язання ситуативних задач.

Як варіант для застосування ІКЗ на етапі формування предметних компетентностей можуть використовуватися заздалегідь розроблені алгоритми розв'язання завдань різних типів.

Також з допомогою ІКЗ можна ілюструвати приклади застосування математики в житті, формувати в учнів навички самоконтролю та самостійної роботи.

Основоположним у компетентнісному підході є ідея нерозривної єдності та цілісності знань, умінь і особистісних якостей людини. У цьому контексті навчання математики має включати аспекти, спільні для багатьох, якщо не для всіх, шкільних предметів. Серед них насамперед слід назвати аксіологію, мотивацію, пізнання, інформацію, інтелект, загальну культуру, комунікацію, світогляд та інші компоненти математичної освіти. Усі названі компоненти входять до складу математичних і ключових компетентностей, які формуються прямо чи опосередковано під час навчання за програмою математики в школах.

Надамо стислий змістовний опис позначених компонентів та їх прогнози в галузі «математичної» освіти, виражені у формі діяльності для результатів навчання.

Розділ «Ціннісна мотивація (аксіологія)» включає ставлення учнів до цінності інформації, пізнавальну активність, ініціативу, відповідальність, прагнення до підвищення результатів роботи. Його ціннісна складова є системотвірним фактором навчально-пізнавального процесу, оскільки залежить від цілей, цінностей та ідеалів, якими дотримуються учні у своїй навчальній діяльності, Від них залежать фактичні результати навчання. Ціннісна орієнтація впливає на рівень пізнавальних інтересів учнів, навчально-пізнавальну діяльність, їх мотиваційну сферу. Реалізація мотиваційних компонентів має пробуджувати та формувати в учнів стійкі позитивні установки на навчальну діяльність, стимулювати допитливість і пізнавальний інтерес, налагоджувати навчальну діяльність з особистісною значущістю, формувати в учнів внутрішні потреби в самостійному навчанні.

Розділ про загальну культуру охоплює коло питань, якими учні повинні володіти: характеристики людської та національної культури в цілому; духовно-моральні основи людського життя, людей і націй; культурні основи сім'ї, суспільства, явища і традиції, роль науки та релігії в ролі людини в житті. Сюди також входить досвід опанування учнями наукової картини світу. При плануванні освітнього напряму «математика» це стосується формування та розвитку уявлень учнів про математику як невіддільну частину людської культури в цілому, про історію її розвитку, про її місце в інших наукових системах, про математику. у минулому та його значення в сучасному суспільстві.

Освітньо-пізнавальний (когнітивний) розділ забезпечує кожному учневі базові математичні знання, уміння, навички, способи діяльності, достатні для вивчення відповідних предметів на сучасному рівні, а також продовження освіти, різноманітні способи організації та реалізації навчання (уміння, дії), маніпулювання, когнітивні процеси) на різних рівнях когнітивної незалежності (регенерація, часткове дослідження, творчість).

Інформаційний розділ відображає здатність особистості визначати інформаційні потреби, шукати інформацію та ефективно використовувати її в різних формах і проявах, набувати навичок діяльності, пов'язаної з навчальними дисциплінами та напрямами освіти, інформацією в навколишньому світі. шукати, аналізувати та відбирати необхідну інформацію, перетворювати, зберігати та передавати її за допомогою сучасних інформаційних засобів та інформаційних технологій.

Комунікативний розділ передбачає розвиток умінь чітко та чітко висловлювати свої думки, будувати обґрунтовану аргументацію, вести діалог (дискусію), сприймати точку зору співрозмовника та, за необхідності, критично її аналізувати. У цьому компоненті можна виділити володіння такими видами діяльності: володіння усними виступами (монологами, діалогами, багатосторонніми діалогами, уміння (по)ставити запитання, наводити докази в усних відповідях чи захисті проєктів); вести «людина-машина» діалоги; володіння технологією проєктування текстів (електронне спілкування, створення текстових документів на основі шаблонів тощо); володіння телекомунікаційним обладнанням для організації спілкування з віддаленими співрозмовниками; уміння працювати в команді, шукати та знаходити компроміси.

Світоглядний розділ (світогляд — це знання і діяльність людини про світ, своє місце у світі, ставлення людей до навколишньої дійсності й до себе, загальна система поглядів, зумовлена цими поглядами, переконаннями, ідеалами, принципами) Світоглядний компонент досягнень математичної освіти стосується розуміння учнями основної системи математичних понять, розуміння математичної мови як засобу вираження математичних законів і закономірностей, розуміння математики як способу опису форм і розуміння дійсності. Цей компонент реалізується в процесі вивчення історії виникнення математичних понять, у процесі встановлення зв'язків математики з іншими навчальними дисциплінами, у процесі формулювання математичних моделей тощо.

Таким чином, компетентнісний підхід не заперечує важливості знань, але його суть (на відміну від традиційної орієнтованої на отримання знання освіти) полягає в тому, що вони розглядаються не як самоціль, а як засіб розвитку та виховання особистості дитини. Вони навчають лише тих Знань, які мають суб'єктивну цінність. Таким чином, фокус постановки цілей у компетентнісному навчанні зміщується з того, чого хочуть досягти вчителі, на те, що потрібно учням. Крім того, вчитель повинен пам'ятати, що він не виховує (навіть з дуже обдарованих учнів) професійних математиків, а перш за все всебічно розвинених особистостей, і що він не виконує цю роботу сам, а з усіма учителями закладу. Вчителі-предметники тісно співпрацюють разом. Ми вважаємо, що це важливий крок на шляху до нової якості математичної освіти.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ І

Аналіз дослідження проблеми узагальнення та систематизації знань учнів у психолого-педагогічній, методичній та навчальній літературі дозволив дослідити ефективність узагальнення і систематизації у навчанні на основі аналізу педагогічного досвіду та вивчити особливості узагальнення і систематизації знань, вмінь і навичок учнів при вивченні змістовної лінії «Функції». Встановлено, що систематизація знань невіддільна від їх узагальнення, оскільки чим ширше узагальнення, тим більше відображено між ними істотних взаємозв'язків, які об'єднуються в широку систему знань. Необхідна умова формування узагальнених знань – це послідовне здійснення систематизації. Такий спосіб, з використанням видів узагальнень, приводить знання старшокласників в струнку систему та є одним із ефективніших засобів їх зміцнення й закріплення.

Визначено психолого-педагогічні та методичні основи формування математичних компетентностей учнів гімназій та ліцеїв.

МЕТОДИКА УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ УЧНІВ ГІМНАЗІЙ ТА ЛІЦЕЇВ З ТЕМ ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ «ФУНКЦІЇ»

2.1. Методика узагальнення та систематизації основних властивостей функцій у курсі алгебри та початків аналізу 10-го класу

Для курсу «Алгебра і початки аналізу» однією з провідних змістових ліній навчання є функціональна, тому у освітньому процесі приділяється особлива увага дослідженням властивостей функцій у тій чи іншій формі.

Важливо при цьому демонструвати взаємозв'язок між основними поняттями курсу: функція, рівняння та нерівність. Зокрема, розв'язування рівняння $F(x)=0$, нерівностей $F(x)<0$, $F(x)>0$ є окремими випадками задачі на дослідження функції (знаходження нулів функції та проміжків її знакосталості тощо).

Функціональна змістова лінія у профільній школі узагальнюється, систематизується, поглиблюється та розширюється. При вивченні функцій у цей період значна увага приділяється використанню теоретико-множинного підходу до визначення функцій. Основна частина навчального матеріалу присвячена вивченню нових класів функцій та розширенню інструментів дослідження вже відомих функцій.

Змістова лінія пронизує курс і висвітлюється в темах «Функції, многочлени, рівняння та нерівності», «Степенева функція», «Тригонометричні функції» «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування», «Показникова та логарифмічна функції».

Основною ідеєю функціональної лінії має бути моделювання реальних процесів за допомогою функцій. Оскільки діяльність людини сучасного світу нерозривно пов'язана з графічною інформацією, її аналізом і прогнозуванням процесів на її основі, розвиток графічної культури учнів є одним з пріоритетних завдань математичної освіти.

Вивчення елементарних функцій в курсі алгебри і початків аналізу розпочинається з повторення загальнофункціональних понять, систематизації і узагальнення системи знань про функцію. У процесі розв'язування задач учні мають можливість повторити означення функції, підготуватися до сприйняття означення числової функції, пригадати основні способи задання функції, повторити властивості деяких основних видів функцій, відомих учням з курсу алгебри основної школи.

Схема подання окремого виду функції залишається загалом незмінною, проте вносяться деякі корективи відповідно до математичного досвіду учнів, їх вікових особливостей, психологічної готовності до роботи з абстрактними величинами і з врахуванням усвідомленого вибору учнем профільного навчання за природничим напрямом, невід'ємною частиною якого є профільне вивчення математики.

Для огляду властивостей певного виду функцій, з метою мотивації пізнавальної діяльності та формування міжпредметних зв'язків, корисно розглядати залежність, яка має місце в біології, хімії, екології, медицині, або закономірність деякого життєвого процесу, зрозумілу і просту для сприйняття. Вибрана залежність є функцією певного виду, а отже вивчення властивостей, які притаманні обраній залежності, дозволяє узагальнити їх до властивостей функцій даного виду. Іншою метою введення залежностей на основі реальних процесів та явищ є сприяння більшій залученості учнів у процес пізнання, оскільки самостійно помічати властивості функцій учневі переважно простіше на конкретній закономірності, ніж виходячи з абстрактного аналітичного виразу функції.

Вибрану залежність необхідно подати не лише аналітично, а й графічно з урахуванням наочності, дослідити властивості залежності. Після виявлення властивостей конкретної залежності і проведення їх аналізу вони узагальнюються для всього виду функцій. Державним стандартом з математики визначено що повинні знати учні 10 класу при вивченні тем змістової лінії «Функції».. Також у роботі, у додатку А приведено приклади узагальнюючих уроків з тем функціональної змістової лінії шкільного курсу алгебри.

2.2. Методичні особливості узагальнення та систематизації знань учнів при вивченні функцій в курсі алгебри та початків аналізу 11-го класу

Годинне навантаження з алгебри та початків аналізу в 11-му класі, на академічному рівні, трішки більше а ніж в 10-му, але не суттєво, всього на 35 годин з яких 25 виділяються на повторення. Час на вивчення тем курсу алгебри та початків аналізу в 11 класі суттєво не збільшився, а навчальний матеріал ускладнюється, тож для оптимізації навчального процесу ми рекомендуємо звертатися до ІКТ, яке дозволяє в ширшому обсязі дослідити всі обов’язкові питання.

Розглядаючи функціональну лінію в курсі алгебри та початків аналізу одинадцятого класу, стає зрозумілим той факт що без ІКТ раціонально заощадити час на уроках складно. За програмою академічного рівня в одинадцятому класі вивчаються чотири розділи. Кожен з розділів дуже громіздкий та містить складний, для учнів, навчальний матеріал. Але ми розглянемо детально лише один розділ, який відповідає темі та меті нашої роботи, це розділ «Показникова та логарифмічна функції». На вивчення даного розділу програмою виділяється 22 години з яких, за рекомендаціями Міністерства освіти та науки України, слід виділити одну годину на контрольну роботу, отже залишається 21 година на повноцінне вивчення розділу, який поділяється на 5 тем, тобто припадає по чотири години на кожну тему. Цього часу не достатньо аби навчити учнів будувати графіки, ілюструвати властивості показникової та логарифмічної функцій за допомогою графіків та вивчити інші важливі питання. Далі розглянемо детальніше побудову матеріалу та етапи на яких доцільно використовувати ІКТ.

Вивчення розділу починається з вивчення показникової функції а вже потім вводиться логарифмічна.

Показниковою функцією називається функція вигляду $y=a^x, де\, a>0\, i\, a\neq 1$. А далі вже за відомою схемою проводимо аналіз властивостей функції. Областю визначення функції $D(a^x)=R$ це пояснюється тим, що для основи з самого початку встановлено обмеження $a>0$ а число відмінне від нуля можна піднести до будь-якого степеня. Далі, на відміну від попередніх функцій курсу алгебри та початків аналізу, Нелін Е. П. пропонує побудувати графік декількох простих показникових функцій, а вже потім розглядати його властивості. Отже побудуємо графік наприклад функції $y=2^x$ та$y=$¿. Щоб побудувати графіки цих функцій спочатку складемо таблицю (Таблиця 2.1):

Таблиця 2.1

x	-3	-2	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0.7	1	1,4	2	4	8
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1.4	1	0.7	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Далі наносимо отримані точки на координатну площину після чого плавною лінією з’єднуємо отримані точки.

Графік функції $y=2^x$

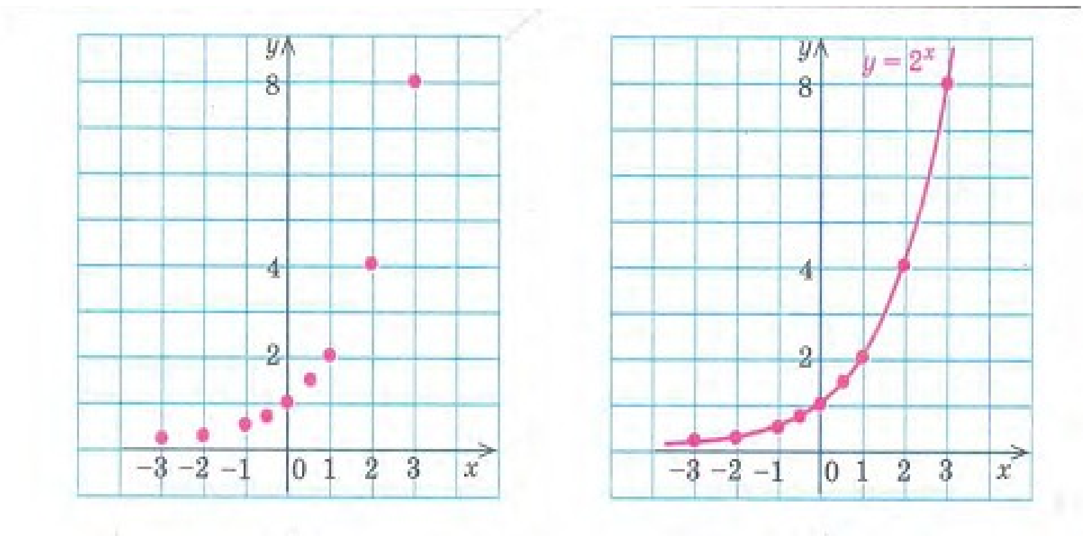


Рис2.1.

Графік функції $y=$¿

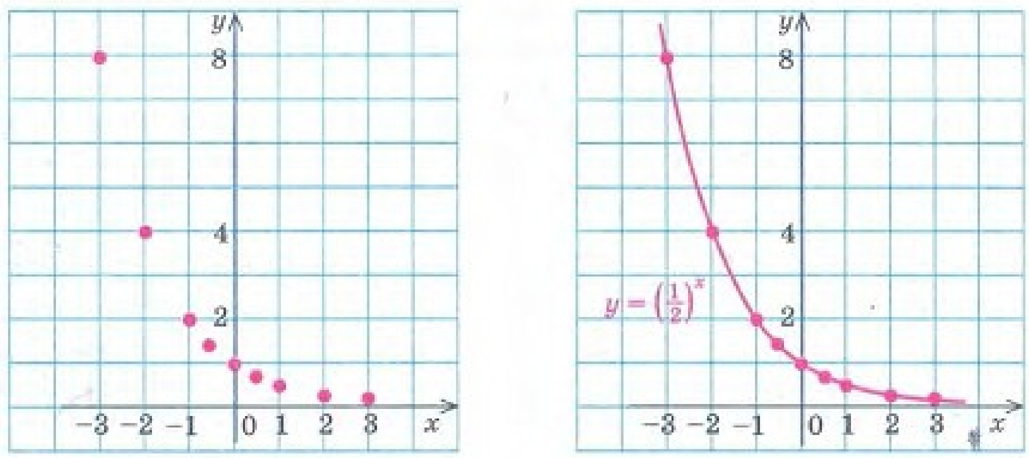


Рис2.2.

Дані побудови можна показати за допомогою мультимедійних засобів що збільшить долю наочності та підвищить рівень запам’ятовування.

На основі отриманих графіків робимо узагальнення і говоримо, що графік функції $y=a^x$ матиме вигляд подібний до першого графіка при $a>1$, а при $a>0, але\, a<1$ графік матиме вигляд подібний до другого графіка.

Наступним кроком є дослідження властивостей отриманих графіків функцій. Раніше зазначалося, що область визначення даної функції $D(a^x)=R$. Що ж до області значення, то вона випливає з означення та властивостей степеня. Як видно з графіків функція $y=a^x$ набуває лише додатних значень, тобто знаходиться над віссю абсцис, $E(a^x)=(0;+\infty)$.

Далі за вже відомою та знайомою схемою дослідження властивостей функції визначаємо проміжки зростання та спадання функції $y=a^x$. Зростання та спадання показникової функції залежить від значення основи. При $0<a<1$ функція $y=a^x$ зростає на всій області визначення, а при $a>1$ функція $y=a^x$ спадає на всій області визначеня. Далі спираючись на вже відомі властивості доволі легко обґрунтовувати та доводити всі інші властивості.

Функція є ні парною, ні непарною оскільки $f(-x)\neq f(x) i f(-x)\neq -f(x)$. Точок перетину з віссю абсцис не має оскільки $y=a^x$ ніколи не набуває значення $y=0$. З віссю ординат графік функції моє лише одну точку перетину, до того ж вона одна й та ж сама і для $0<a<1$, і для $a>1$ це точка $y=1$, оскільки при $x=0$ $y=1$. Наступна властивість проміжки знакосталості як ми говорили раніше функція $y=a^x$ додатна на всій області визначення. Останньою розглядається властивість про найбільше та найменше значення, функція $y=a^x$ немає найбільшого та найменшого значень, оскільки область значень $E(a^x)=(0;+\infty)$ не містить найбільших та найменших значень.

Але окрім основних властивостей для показникової функції властиві ще декілька властивостей, притаманних саме цій функції. Так враховуючи, що графік функції $y=a^x$ перетинає вісь ординат а точці $y=1$, а також враховуючи спадання та зростання функції виділяють співвідношення між значеннями функції та аргументу. Представляють їх у вигляді таблиці, для кращої наочності (Таблиця 2.2.):

Таблиця 2.2.

Значення функції	Значення аргументу	
	при $a>1$	при $0<a<1$
$y>1$	$x\in(0;+\infty)$	$x\in(-\infty;0)$
$0<y<1$	$x\in(-\infty;0)$	$x\in(0;+\infty)$

І ще одна властивість, яка притаманна лише показниковій функції: якщо $f(x)=a^x, (a>0, a\neq 1)$, то при будь-яких дійсних значеннях аргументів $x_1 \, i \, x_2$ виконується рівність $f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_2)$.

Виходячи з цієї властивості навіть по іншому дається означення показникової функції: показникова функція $y=f(x)$ – це строго монотонна функція, визначена на всій числовій вісі, яка задовольняє функціональне рівняння $f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_2)$.

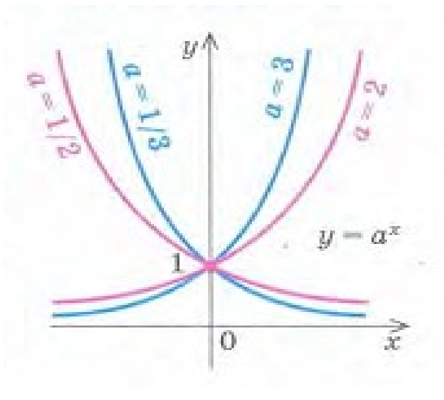
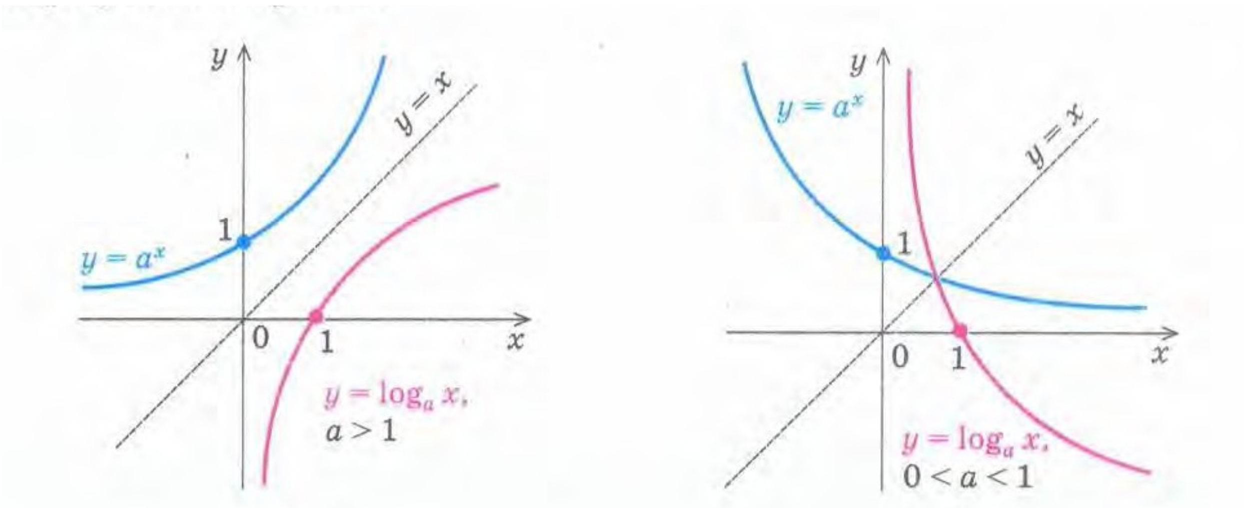


Рис.2.3.

До основних властивостей показникової функції додають властивості конкретних функцій, які розглядаються окремо. Зокрема говорять про те, що пологість графіка та швидкість цього наближення до вісі абсцис повністю залежить від значення основи. Тобто чим більше значення основи тим графік крутіший і тим швидше рухається до вісі абсцис, а чим менше – тим повільніше рухається і буде більш пологим.

Особливу увагу також приділяють тому факту, що показникову функцію не розглядають для від’ємної основи та основи, що дорівнює нулю.

Після вивчення показникової функції переходять до дослідження логарифмічної функції.



Р

ис.2.4.

Логарифмічною функцією називається функція вигляду $f(x)=\log_a x, де\, a>0\, і\, a\neq 1$. Оскільки логарифмічна функція є оберненою до показникової, то графік цієї функції, як відомо, буде симетрично відображений, відносно прямої $y=x$, до графіка функції $f(x)=a^x$.

Це можна продемонструвати на уроках за допомогою ІКТ, що дозволить краще засвоїти учням новий навчальний матеріал.

Наступним кроком вивчення логарифмічної функції – є дослідження її властивостей. План дослідження учням відомий, а осмислення того, що логарифмічна функція є оберненою до показникової спрощує процес дослідження і дозволяє використовувати при дослідженні евристичний метод.

Областю визначення функції $f(x)=\log_a x$ є множина $R_{+¿¿}$, тобто множина всіх додатних чисел. Областю значень функції $f(x)=\log_a x$ є множина всіх дійсних чисел R. Області значень і визначення функції $f(x)=\log_a x$ діаметрально протилежні до областей визначення та значень функції $y=a^x$. Використовуючи готові рисунки, учні усвідомлюють оберненість цих функцій та співвідношення їх областей визначення та множини значень. Сприятиме цьому усвідомленню наочне представлення даних функцій.

Розглядаючи парність функції $f(x)=\log_a x$, слід з учнями пригадати умови парності, це може бути експрес опитування, чи міні тестування, чи повторення матеріалу у формі дидактичної гри. Після відтворення умов парності досліджують функцію $f(x)=\log_a x$ на парність, і з несиметричності області визначення роблять висновок, що функція $f(x)=\log_a x$ є ні парною ні непарною.

Не менш важливою є наступна властивість, перетин графіка функції $f(x)=\log_a x$ з вісями координат. Пригадаємо спочатку з учнями умови перетину з вісями координат після чого в евристичній бесіді разом з учнями робимо висновок про перетин з вісями: з віссю Ох функція $f(x)=\log_a x$перетинається в точці $x=1$, оскільки $y=\log_a 1=0$ при будь якому а, з області визначення; з віссю Оу функція $f(x)=\log_a x$ не має перетину, оскільки для цієї вісі повинно бути $x=0$, а це виходить за межі області визначення. Детально досліджуючи графік функції $f(x)=\log_a x$ роблять висновок, що при $a>1$ графік функції $f(x)=\log_a x$ буде зростати на всій області визначення, а при $0<a<1$ – спадати на всій області визначення.

За раніше відомою схемою дослідження властивостей графіків звертається увага також на проміжки знакосталості функції $f(x)=\log_a x$. Пропонується учням самостійно визначити проміжки знакосталості на основі попередньо отриманих знань, умінь та навичок. А далі з використанням ІКТ просто перевірити правильність визначення цих проміжків і за необхідності швидким темпом пояснити їх визначення, або надати можливість пояснити учням, які визначили правильно. Ключовим, при визначенні проміжків знакосталості є врахування зростання і спадання функції $f(x)=\log_a x$. Оскільки функція $f(x)=\log_a x$ зростає при $a>1$ і спадає при $0<a<1$ то розглядають проміжки знакосталості для обох випадків. Для кращого засвоєння організуємо це у вигляді таблиці (таблиця2.3.), яка міститиме умови та проміжки знакосталості функції $f(x)=\log_a x$ на різних проміжках області визначення.

Таблиця 2.3.

Значення функції	Значення аргументу	
	при $a>1$	при $0<a<1$
$y>0$	$x\in(1;+\infty)$	$x\in(0;1)$
$y<0$	$x\in(0;1)$	$x\in(1;+\infty)$

Після дослідження функції $f(x)=\log_a x$ та обґрунтування всіх властивостей переходимо до тренувальних вправ на побудову та дослідження графіків функції $f(x)=\log_a x$. Для швидкої перевірки правильності виконання побудов та досліджень доречно використовувати заздалегідь підготовані презентаційні сторінки з графіками та розв'язками.

Ми розробили урок в якому показуємо використання ІКТ при вивченні тем даного розділу. Конспект уроку разом з доповненням ми представили в Додатку 2 .

2.3. Система комп'ютерно-орієнтованих задач для узагальнення знань учнів з тем змістової лінії «Функції» у 7-9 класі

Доцільність використання ІКТ при систематизації та узагальненні знань учнів з тем змістової лінії «Функції» обумовлена, перш за все, можливостями індивідуалізації освітнього процесу та максимальним його унаочненням. Систему комп'ютерно- орієнтованих задач представимо на прикладі розробок конспектів уроків узагальнення та систематизації знань учнів з тем функціональної змістової лінії курсу алгебри 7-9 класу.

Конспект уроку алгебри у 9 класі.

Тема. Квадратична функція, її графік та властивості.

Мета. Узагальнити і систематизувати знання учнів з даної теми;

- вдосконалити навички побудови графіка квадратичної функції, вміння проводити елементарне дослідження функції;
- показати застосування квадратичної функції;
- розвивати обчислювальні навички, графічну культуру, мислення, пам'ять, кмітливість, увагу, ініціативність, самостійність;
- виховувати навички колективної роботи та співпраці, формувати пізнавальний інтерес.

Обладнання: комп'ютери, проектор, презентація, плакат "Застосування параболи", роздатковий матеріал, маркери.

Тип уроку: узагальнення і систематизації знань.

Підручник: А. Г. Мерзляк. Алгебра: Підручник для 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. — Х.: Гімназія, 2009. — 320 с.:

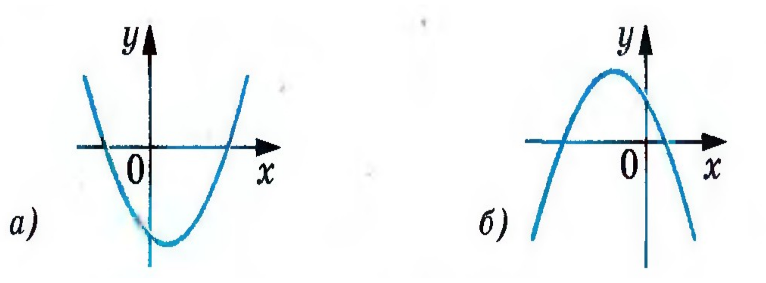
Хід уроку.

І. Організаційний момент.

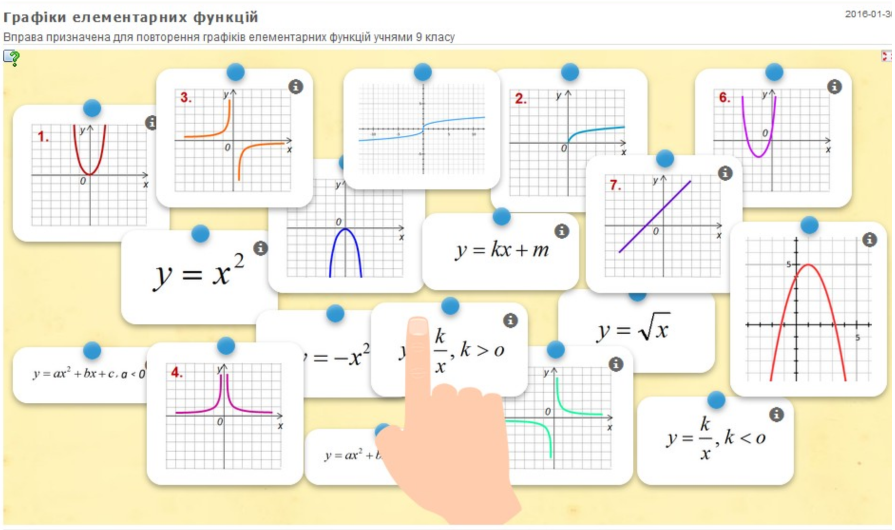
Повідомлення теми, мети уроку.

ІІ. Перевірка домашнього завдання.

№ 371. На рисунках *а)* та *б)* зображено графіки квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Які знаки мають коефіцієнти *a, b, c?*

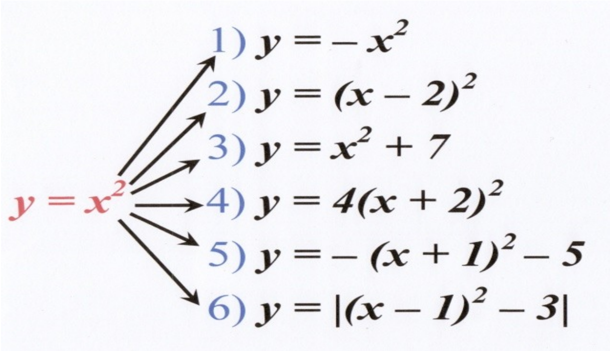


III. Актуалізація опорних знань і вмінь учнів.



<u>Усне опитування.</u> Паралельно двоє учнів виконують вправу за комп'ютерами за допомогою сервісу LearningApps на повторення графіків елементарних функцій (тип вправи – встановити логічну пару).

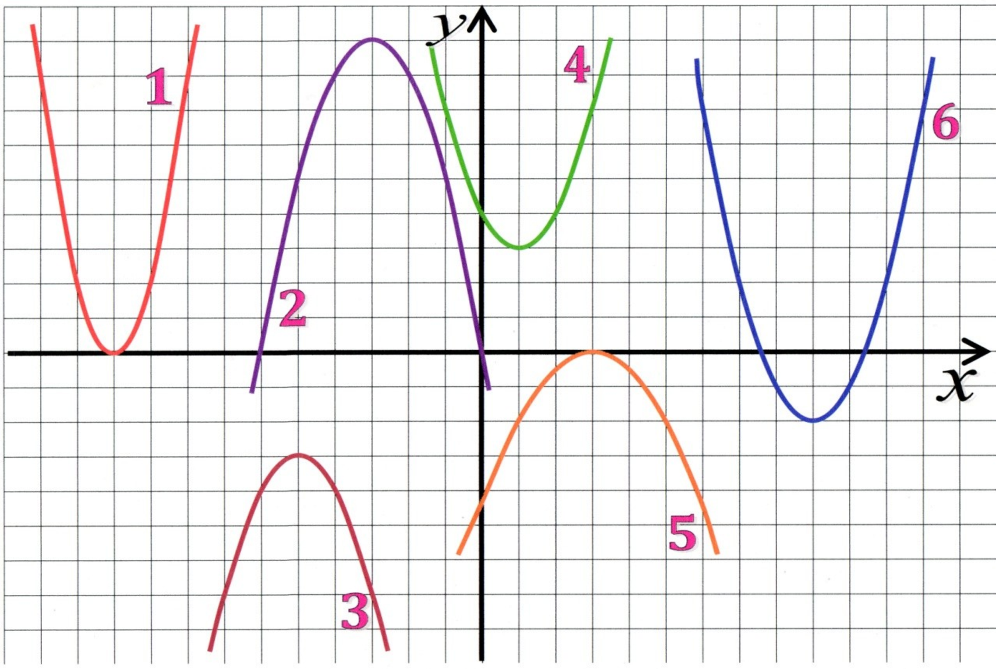
- Від якого коефіцієнта залежить напрям віток параболи?
- Вказати формулу для обчислення абсциси вершини параболи.
- Як знайти ординату вершини параболи.
- Скільки точок перетину з віссю ОХ має парабола, якщо дискримінант відповідного рівняння від’ємний?
- Скільки точок перетину з віссю ОХ має парабола, якщо дискримінант відповідного рівняння додатний?
- Скільки точок перетину з віссю ОХ має парабола, якщо дискримінант відповідного рівняння дорівнює 0?
- Як знайти точку перетину з віссю ОУ квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$?
- Чому дорівнює найбільше значення квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо $a<0$?
- Чому дорівнює найменше значення квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо $a>0$?
- Як із графіка функції $y = x^2$ за допомогою геометричних перетворень одержати графіки наступних функцій (слайд 1).



Слайд 1.

12) Вказати координати вершин кожної з функцій 1) – 6).

13) Задати формулами функції, графіки яких зображені на малюнку (слайд 2)



Слайд 2.

14) Для яких із цих функцій (слайд 2) виконується умова:

1) $a > 0, D > 0;$

2) $a < 0, D > 0;$

3) $a > 0, D < 0;$

4) $a < 0, D = 0;$

) $a < 0, D < 0?$

IV. Розв'язування вправ.

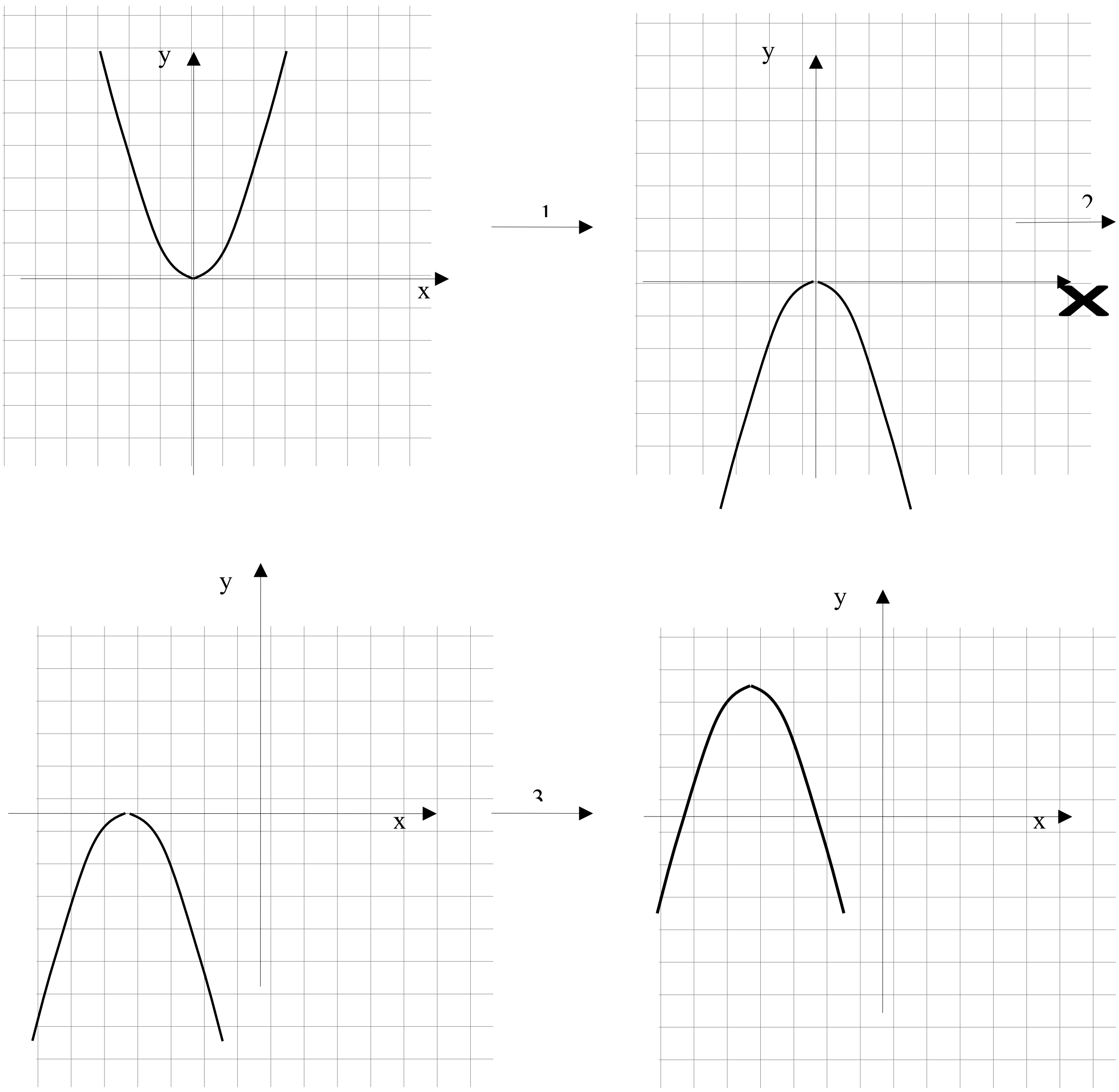
- Побудувати графік функції $y = -\ x^2 - 8x - 12$ за допомогою елементарних перетворень графіка функції $y = x^2$.

Питання до класу: *Які перетворення слід виконати, щоб можна було даний графік побудувати за допомогою елементарних перетворень графіка функції $y = x^2$?*

$y = -\ x^2 - 8x - 12 = -\,(x^2 + 8x + 12) = -\,(x^2 + 2 \cdot 4x + 16 - 16 + 12) = -\,((x + 4)^2 - 4) = -\,(x + 4)^2 + 4.$

Послідовність побудови:

$y = x^2 \xrightarrow{1} y = -\,x^2 \xrightarrow{2} y = -\,(x + 4)^2 \xrightarrow{3} y = -\,(x + 4)^2 + 4$



(Поки один із учнів виконує вправу на дошці, групи учнів виконують аналогічну вправу на місцях:

$y = x^2 – 8x + 7$ (для середнього рівня)

$y = 3x^2 – 12x + 9$ (для достатнього рівня)

$y = 0,25x^2 – 3x + 8$ (для високого рівня)

- Побудувати графік функції $y = 3x^2 – 12x + 9$.

Питання до класу: *За яким алгоритмом будується графік квадратичної функції*?

1. Знаходимо нулі функції:

$3x^2 – 12x + 9 = 0;$

$x^2 – 4x + 3 = 0;$

За теоремою Вієта $x_1 = 1; x_2 = 3$.

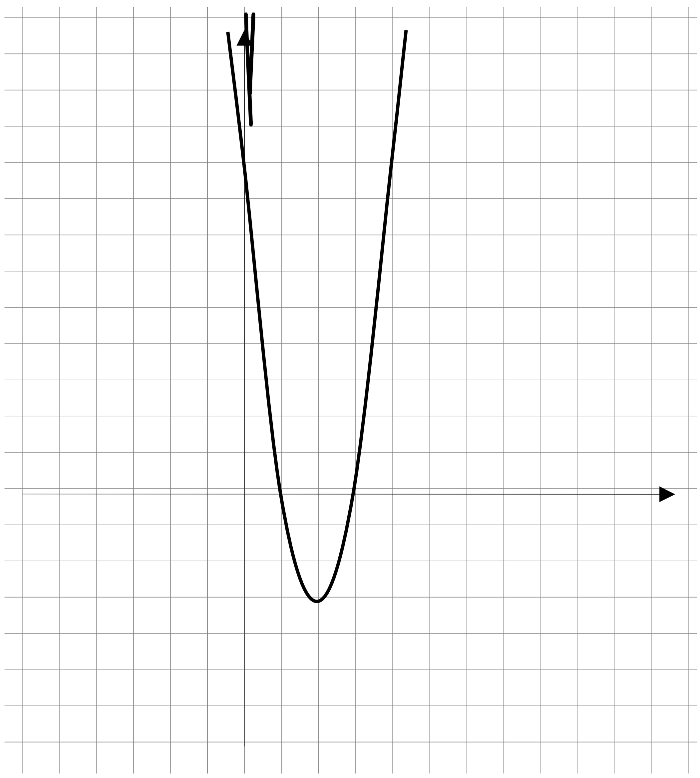
Отже, графік даної функції перетинає вісь x в точках $x_1 = 1; x_2 = 3$.

2. Знаходимо координати вершини параболи за формулами: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{--12}{2\cdot3} = 2;\ y_0 = \frac{-b^2+4ac}{4a} = \frac{-144+4\cdot3\cdot9}{4\cdot3} = -3$

Отже, вершина параболи знаходиться у точці (2; – 3)

3. Знаходимо точку перетину з віссю y:

y(0) = 9. Отже, (0; 9) – точка перетину з віссю y.



(Поки один із учнів виконує вправу на дошці, групи учнів виконують аналогічну вправу на місцях:

$y = 3x^2 – 6x$ (для середнього рівня)

$y = – 2x^2 + 8x – 6$ (для достатнього рівня)

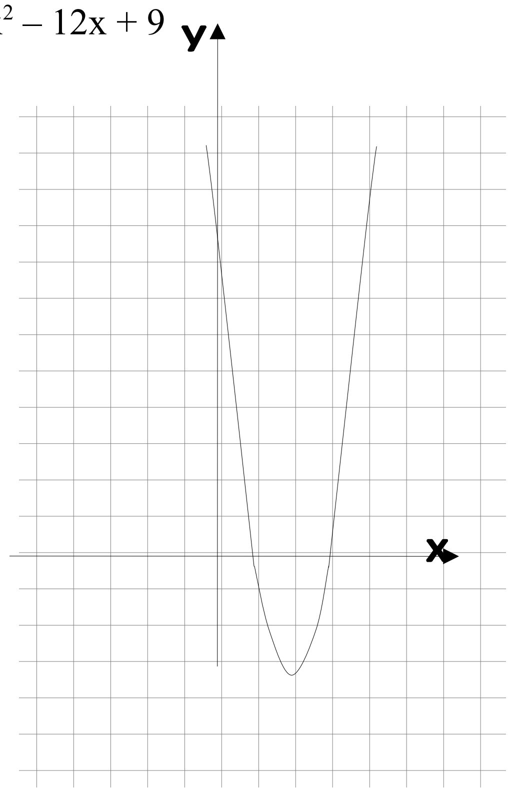
$y = – 0,5x^2 – 3x + 2,5$ (для високого рівня)

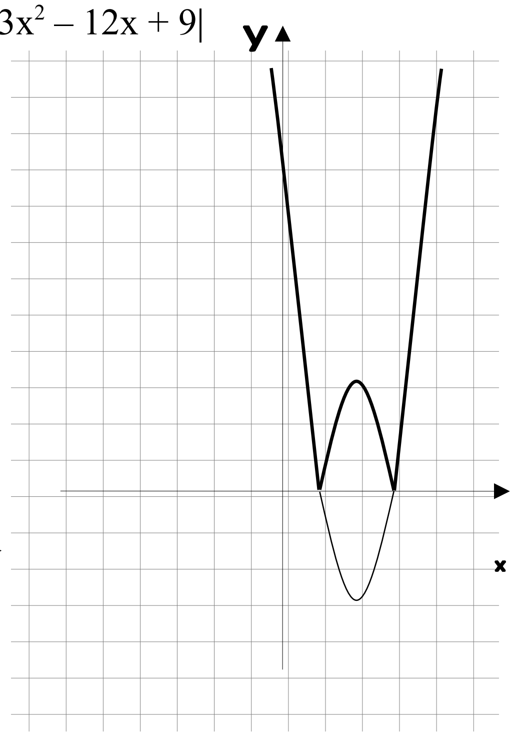
- Побудувати графік функції $y = |3x^2 – 12x + 9|$

Питання до класу: *Як із графіка функції $y = f(x)$ одержати графік функції $y = |f(x)|$?* Паралельно будується графік за допомогою програми **Geogebra.**

Послідовність побудови: $y = 3x^2 – 12x + 9 \longrightarrow y = |3x^2 – 12x + 9|$

$y = 3x^2 – 12x + 9$ $\qquad$ $y = |3x^2 – 12x + 9|$



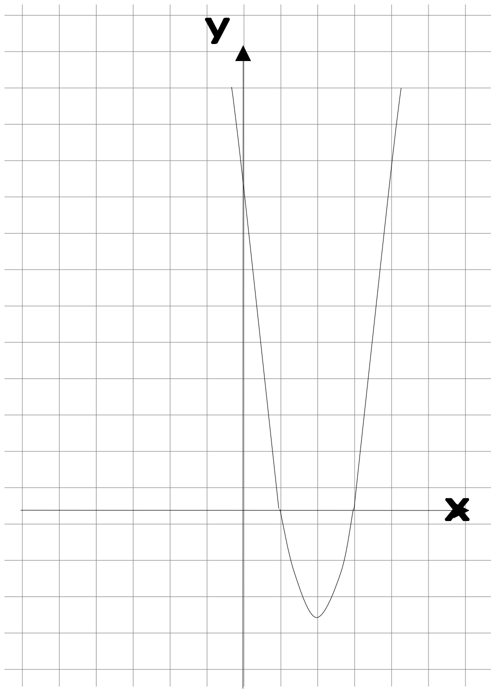


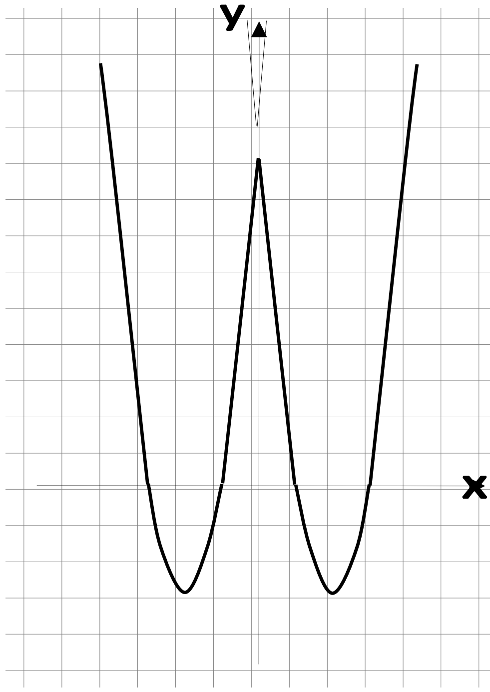
- Побудувати графік функції $y = 3x^2 – 12|x| + 9$.

Питання до класу: *Як із графіка функції $y = f(x)$ одержати графік функції $y = f(|x|)$?*

Послідовність побудови: $y = 3x^2 – 12x + 9 \longrightarrow y = 3x^2 – 12|x| + 9$

$y = 3x^2 - 12x + 9$ $\qquad$ $y = 3x^2 - 12|x| + 9$

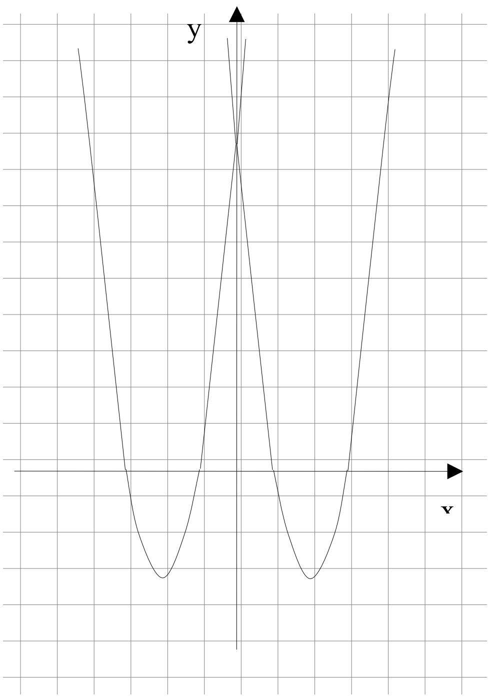


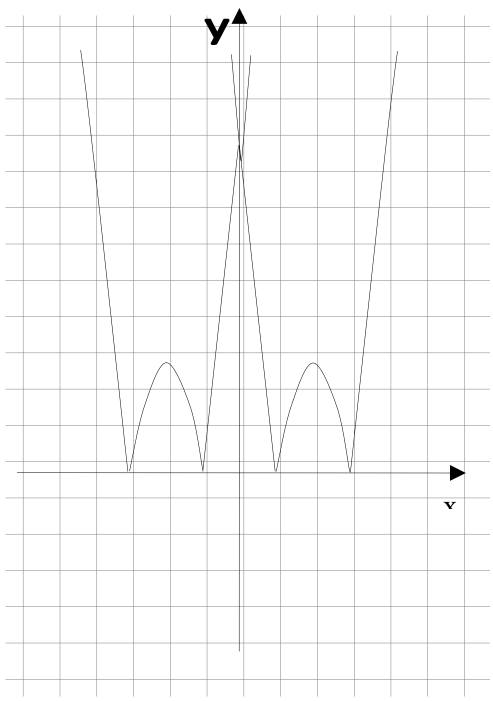


- Побудувати графік функції $y = |3x^2 - 12|x| + 9|$

Послідовність побудови: $y = 3x^2 - 12|x| + 9 \longrightarrow y = |3x^2 - 12|x| + 9|$

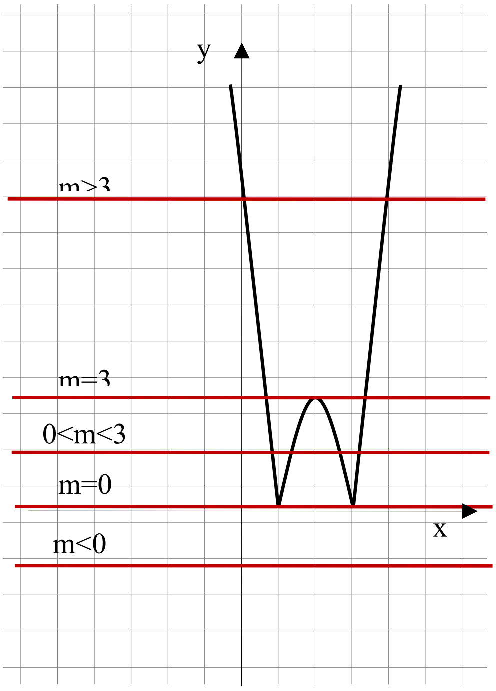
y = 3x ^{2} ***– 12|x| + 9*** $\qquad$ ***y = |3x*** ^{2} ***– 12|x| + 9|***





- Скільки розв'язків має рівняння $|3x^2 - 12x + 9| = m$ залежно від параметра m?

Щоб виконати це завдання, потрібно в одній системі координат побудувати графіки функцій $y = |3x^2 - 12x + 9|$ та $y = m$ для декількох характерних значень m, щоб визначити кількість спільних точок графіків функцій, що й буде вказувати на кількість розв'язків даного рівняння. Виконується за допомогою програми **Geogebra**.



При $m < 0$ рівняння розв'язків немає;

при $m = 0$ рівняння має 2 розв'язки;

при $0 < m < 3$ рівняння має 4 розв'язки;

при $m = 3$ рівняння має 3 розв'язки;

при $m > 3$ рівняння має 2 розв'язки.

V. Повідомлення учня.

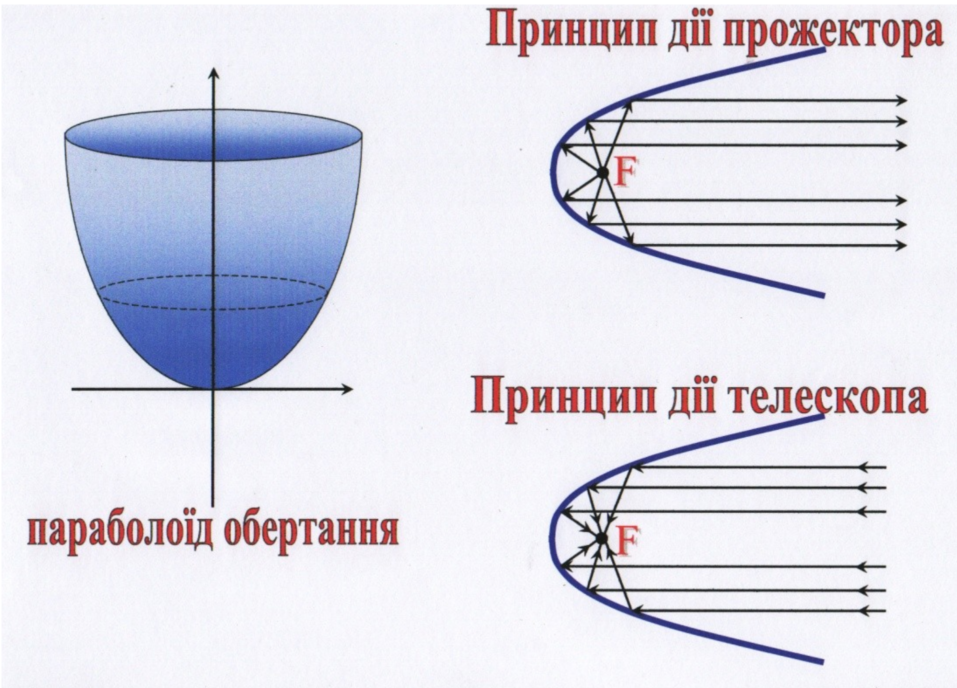
Квадратична функція або її графік, парабола, дуже часто зустрічається в різноманітних галузях науки, виробництва і навіть побуті. Наприклад, у геометрії квадратичною функцією виражається залежність площі квадрата від його сторони, площі круга від його радіуса тощо. У фізиці – це, наприклад, залежність пройденого шляху від часу при прямолінійному рівноприскореному русі.

Широко використовується квадратична функція в економічних розрахунках.

В астрономії парабола також зустрічається. Відомо, наприклад, що якщо космічному кораблю чи штучному супутнику, який обертається навколо Землі, надати другу космічну швидкість, то його траєкторія руху перетвориться з еліптичної в параболічну, і він зможе покинути Землю.

Інженерні розрахунки показують, що різні споруди, мости, арки, мають підвищену міцність.

Ще одне з багатьох застосувань параболи можна побачити на цьому плакаті.



При обертанні параболи навколо осі симетрії одержуємо поверхню, яка називається параболоїдом обертання. Якщо в фокусі такого дзеркального параболоїда помістити джерело світла, то промені світла, відбившись від параболоїда, підуть пучком променів, паралельним до осі симетрії. Цю властивість широко використовують при виготовленні різноманітних прожекторів. Такі самі параболічні дзеркала застосовують в дзеркальних телескопах: світло від далекої зірки йдучи паралельним пучком, відбивається від дзеркала телескопа і збирається в фокусі. За таким самим принципом працюють і супутникові антени, що теж мають форму параболоїда.

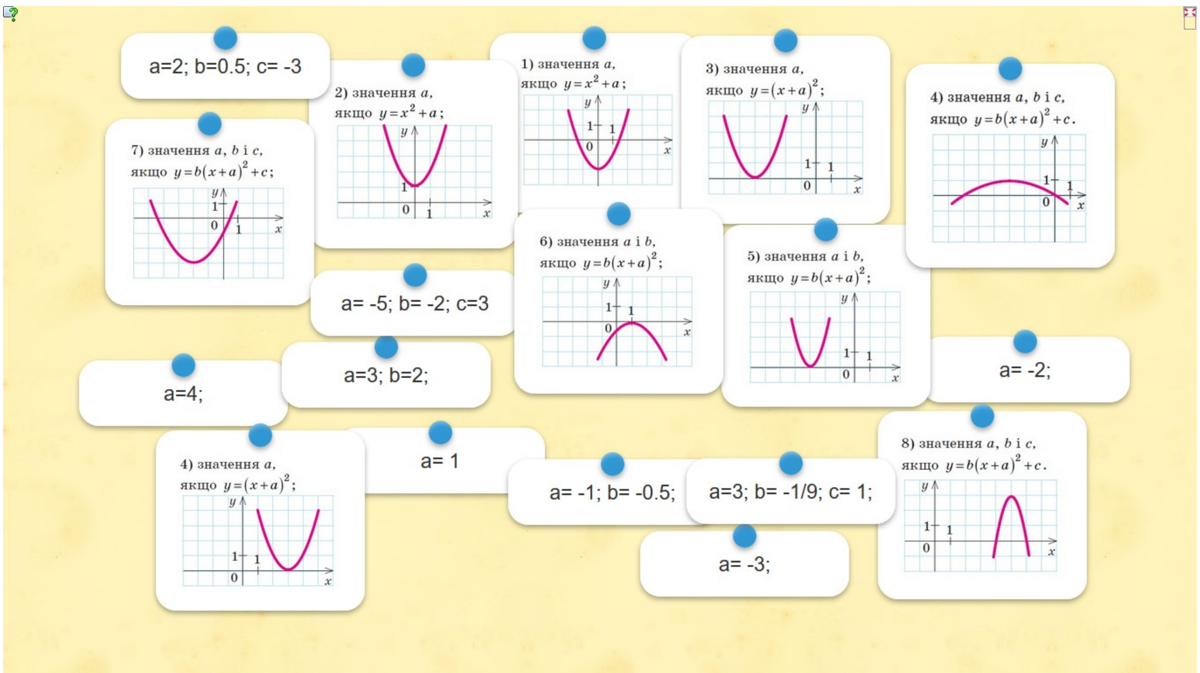
VI. Підсумок уроку.

VII. Домашнє завдання.

Підручник, повт. §11.

Вправа 1. Скільки розв’язків має рівняння $|3x^2 – 12|x| + 9| = m$ залежно від параметра *m?*

Вправа 2. Виконати вправу на LearningApps.org (вхід за індивідульними паролями). За графіком визначити знаки коефіцієнтів *a, b, c*.



ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ II

Вивчені та описані методи і форми ефективного узагальнення знань і

умінь старшокласників: уроки узагальнення і систематизації знань у навчанні змістовної лінії «Функції» дозволяє стверджувати, що їх використання допомагає учням наочно засвоїти й класифікувати вивчений матеріал; формує критичне мислення; активізує самостійну творчу діяльність учнів.

Розкриті методичні особливості узагальнення і систематизації знань учнів з теми «Функції».

Досліджено та проаналізовано різні методи та підходи до систематизації та узагальнення знань з теми «Функції» у різних класах гімназії та ліцею.

Розроблено методичні рекомендації систематизації та узагальнення знань учнів з тем змістової лінії «Функція» та систему комп'ютерно-орієнтованих задач для 7-9 класу.

ВИСНОВКИ

Аналіз дослідження проблеми узагальнення та систематизації знань учнів у психолого-педагогічній, методичній та навчальній літературі дозволив дослідити ефективність узагальнення і систематизації у навчанні на основі аналізу педагогічного досвіду та вивчити особливості узагальнення і систематизації знань, вмінь і навичок учнів при вивченні змістовної лінії «Функції». Встановлено, що систематизація знань невіддільна від їх узагальнення, оскільки чим ширше узагальнення, тим більше відображено між ними істотних взаємозв'язків, які об'єднуються в широку систему знань. Необхідна умова формування узагальнених знань – це послідовне здійснення систематизації. Такий спосіб, з використанням видів узагальнень, приводить знання старшокласників в струнку систему та є одним із ефективніших засобів їх зміцнення й закріплення.

Визначено психолого-педагогічні та методичні основи формування математичних компетентностей учнів гімназій та ліцеїв.

Вивчені та описані методи і форми ефективного узагальнення знань і умінь старшокласників: уроки узагальнення і систематизації знань у навчанні змістовної лінії «Функції» дозволяє стверджувати, що їх використання допомагає учням наочно засвоїти й класифікувати вивчений матеріал; формує критичне мислення; активізує самостійну творчу діяльність учнів.

Розкриті методичні особливості узагальнення і систематизації знань учнів з теми «Функції».

Досліджено та проаналізовано різні методи та підходи до систематизації та узагальнення знань з теми «Функції» у різних класах гімназії та ліцею.

Розроблено методичні рекомендації систематизації та узагальнення знань учнів з тем змістової лінії «Функція» та систему комп'ютерно-орієнтованих задач для 7-9 класу.

Таким чином, поставлені завдання виконані в повному обсязі, мету дослідження досягнуто.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. Алгебра : підручник для 7-го класу загальноосвітніх навчальних закладів, 2-ге видання, Київ : Генеза, 2016. 288 с.;

2. Г.П. Бевз, В.Г. Бевз Алгебра Підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти Київ Видавничий дім «Освіта» 2021

3. Г.П. Бевз, В.Г. Алгебра «Алгебра» підручник для 9 класу закладів загальної середньої освіти 2-ге видання, перероблене Видавничий дім «Освіта» 2022

4. А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір Алгебра : підручник для 7-го класу закладів загальної середньої освіти, 2-ге видання, перероблене. Харків.: Гімназія, 2020. — 288 с.;

5. А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір Алгебра підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти 2-ге видання, перероблене Харків «Гімназія» 2021

6. А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір Алгебра підручник для 9 класу закладів загальної середньої освіти 2-ге видання, перероблене Рекомендовано Міністерством освіти і науки України Харків «Гімназія» 2021

7. Є. П. Нелін Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти Харків : Видавництво «Ранок», 2018. 272 с.: іл.

8. Є. П. Нелін, О. Є. Долгова Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти Харків : Видавництво «Ранок», 2019. — 240 с.

9. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір Алгебра і початки аналізу : профільний рівень : підручник для 10 класів закладів загальної середньої освіти Харків : Гімназія, 2018. 400 с. : іл.

10. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та інші Алгебра і початки аналізу : профільний рівень : підручник для 11 класів закладів загальної середньої освіти Харків : Гімназія, 2019. 352 с. : іл.

11. М. Ф. Степко Компетентнісний підхід до організації підготовки фахівців, його розуміння і проблеми використання в вищій школі України / М. Ф. Степко // Педагогіка і психологія. – 2009. – №2 (63). – С. 42-51.

12. Н. М. Бібік Компетентнісний підхід: рефлексивний аналіз застосування / Бібік Н. М. // Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи / Під заг. ред. О. В. Овчарук ; Міністерство освіти і науки України. – К. : К.І.С., 2004. – С. 45-50.

13. С. П. Бондар . Термінологічний аналіз понять «компетенція» і «компетентність» у педагогіці : сутність та структура / Світлана Бондар // Освіта і управління. – 2007. – Т. 10. – № 2. – С. 93-99.

14. М. С. Головань Компетенція і компетентність: досвід теорії, теорія досвіду / М. С. Головань // Вища освіта України. – 2008. – №3. – С. 23-30.

15. С. А. Раков Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій : дис. д-ра пед. наук : 13.00.02 – теорія і методика навчання інформатики / Раков Сергій Анатолійович ; Харківський національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди. – Харків, 2005. – 526 с.

16. Ю. В. Триус Комп’ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах : дис. д-ра пед. наук : 13.00.02 – теорія і методика навчання інформатики / Триус Юрій Васильович ; Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького. – Черкаси, 2005. – 649 с.

17. Великий тлумачний словник сучасної української мови / [Уклад. і голов. ред. В. Т. Бусел]. – К., Ірпінь : Перун, 2004. – 1440 с.

18. В. І. Тромбола Урок алгебри у 9 класі "Квадратична функція, її графік і властивості" https://naurok.com.ua/urok-algebri-u-9-klasi-kvadratichna-funkciya-grafik-i-vlastivosti-55024.html

19. Л. Скочко Урок "Узагальнення та систематизація знань, вмінь та навичок з теми "Тригонометричні функції" https://naurok.com.ua/urok-uzagalnennya-ta-sistematizaciya-znan-vmin-ta-navichok-z-temi-trigonometrichni-funkci-99411.html

20. О. А. Стельмах Календарно-тематичне планування з алгебри 10 клас https://naurok.com.ua/kalendarno-tematichne-planuvannya-z-algebri-10-klas-247123.html

21. Н. Д. Федоришин Урок підсумковий з теми 'Показникова та логарифмічна функції' https://naurok.com.ua/urok-pidsumkoviy-z-temi-pokaznikova-ta-logarifmichna-funkci-264378.html

22. Н. Л. Синюк Розробка уроку з алгебри 10 клас на тему "Застосування показникової та логарифмічної функцій" https://naurok.com.ua/rozrobka-uroku-z-algebri-10-klas-na-temu-zastosuvannya-pokaznikovo-ta-logarifmichno-funkciy-62162.html

23. Г. І. Панас Презентація «Розв’язування вправ із теми «Логарифмічна функція і її властивості»» https://naurok.com.ua/prezentaciya-rozv-yazuvannya-vprav-iz-temi-logarifmichna-funkciya-i-vlastivosti-30832.html

24. Навчальні програми для 10-11 класів https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

План–конспект уроку з математики в 9 класі за темою: Узагальнення і систематизація знань, вмінь та навичок (за темою «Функції») [18]

Мета:

- *створити умови для узагальнення, поглиблення і закріплення основних знань, набутих за час вивчення теми, використання їх під час розв'язування задач; удосконалення практичних умінь учнів;*

-розвивати пізнавальний інтерес, інтелектуальні та творчі здібності учнів, уміння аналізувати, робити висновки, логічно висловлювати свої думки, розв'язувати поставлені задачі;

-виховувати комунікативні компетентності учнів, почуття доброти, бажання прийти на допомогу.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал, проектор, оціночні листи.

ХІД УРОКУ

І. Організаційний момент

Психологічне налаштування учнів на продуктивну творчу працю.

<u>*Золоті правила поведінки на уроці:*</u>

Бути

Позитивними Тут і зараз.

Точними Точність – ввічливість королів.

Толерантними Толерантність – це повага, у першу чергу, до самого себе.

Зібраними Найдорогоцінніше, що є в нас, - це час.

Сьогодні у нас урок узагальнюючого повторення з теми: «Функції». В ході уроку ми з вами повинні повторити весь матеріал, щоб трохи краще підготуватися до майбутньої контрольної роботи.

II Перевірка домашнього завдання

За готовими розв’язками перевірити виконану роботу. Самоперевірка.

(в оцінювальний листок виставити кількість балів)

III Актуалізація навчального матеріалу

Австрійський фізик-теоретик Людвіг Больцман говорив:

Нічого немає більш практичного, ніж хороша теорія

Людвіг Больцман

<u>Теоритична розминка</u>

(Кожен по черзі витягує питання, за правильну відповідь записує бал)

1. Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини відповідає єдине значення змінної - y з іншої множини, то таку залежність називають… *(функція)*

2. Значення змінної, яку вибирають довільно називають… незалежною змінною або *(аргумент)*

3.Усі значення, яких може набувати аргумент називають.. *(Область визначення функції)*

4. Змінну ***у*** називають... *(Функція, значення функції*)

5. Усі значення, яких набуває функція при аргументах, взятих з області визначення функції, утворюють... *(Область значень функції)*

6. Множина усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенню аргументу, а ординати — відповідним значенням функції, називається... *(Графіком функції)*

7. Функція задана формулою у = kx + b. Де k і b дані числа, називається… *(лінійна функція)*

8. Коефіцієнти многочлена $3x^3 - 2x^2 - x - 2$ — це... *(3; -2; -1; -2)*

9. Графіком лінійної функції є… *(пряма)*

10. Дві перпендикулярні координатні прямі, що перетинаються утворюють… *(Систему координат)*

11. Кожній точці координатної площини відповідає пара чисел, які називаються… *(координатою точки)*

12. Скільки достатньо задати точок , щоб побудувати графік лінійної функції … *(дві)*

IV. Застосування знань та вмінь

Самостійна робота – це вершки математики…

Без роботи такого характеру вивчення математики - майже даремна річ

Дж.В.Янг

<u>**Самостійна робота**</u>

Тести

1. Яка з функцій лінійна: *а)* $y = 3 - 2x$; *б)* $y = 0{,}2 + \frac{1}{x}$; *в)* $y=x^{2;}$ *г)* $y=\frac{5}{x-3}$

2. Яка з точок належить графіку функції $y = 3x + 5$: (y=3x+2)

а) (6; 7); б) (2; 8); в) (1; 8); г) (-3; 2).

3. У якій точці графік функції перетинає вісь *Oy*

$y = 5x + 2$ (y=2x-2)

а) (0; -2); б) (-0,4; 0); в) (2; 0); г) (0; 2).

4. У якій точці графік функції перетинає вісь *Ox:* $y = -5x + 2$ ($y = -3x$)

а) (0; 2); б) (0,4; 0); в) (-0,4; 0); г) (0; 0).

5. Функцію задано формулою $y=2x-5$. ($y = -5x - 4$)

Якого значення набуває функція, якщо аргумент дорівнює -*3*:

а)1; б) 3; в) -11; г) правильної відповіді немає.

6. Пряма $y=3$: (y=3x)

а) проходить через початок координат;

б) паралельна осі Ox; в) паралельна осі Oy ; г)немає правильної відповіді.

Взаємоперевірка. Бали виставити до оціночного листа.

Мало мати добрий розум, а головне
його добре застосовувати
Р.Декарт

- Зараз кожен з вас підійде до столу, візьме лист. На кожному листі зазначений номер. Цей номер відповідає номеру робочого стола. Ще у кожного на листку позначені координати точки, яку вам треба відмітити у системі координат, яку ви зараз спробуєте зібрати. Ваша задача - скласти систему координат, відмітити точки, кожен свою!!! З'єднати точки з ліва на право.

(Команда, за кожну правильну відповідь отримує по два бали. Кожен записує загальну кількість балів своєї команди).

Математика – це не так знання як уміння.

Сьогодні, ви, молоде покоління, повинні розкрити прикладне значення лінійної функції. Для цього кожна група обере галузь знань, розв'яже завдання та здійснить захист цього завдання.

Для групи метеорологів:

Швидкість поширення звуку в повітрі в залежності від температури може бути знайдена за формулою: v = 331 + 0,6t, де v – швидкість (м/с), t – температура (^{0}C), 331 м/с – швидкість поширення звуку при температурі 0^0C. Знайдіть з якою швидкістю поширюється звук у зимовий день з температурою -15^0 і в літній день з температурою $+30^0$.

Для групи екологів:

Чисельність зубрів у заповіднику може бути знайдена за формулою: y = 50 +3t, де y – кількість особин, а t – час (у роках). Знайдіть скільки особин буде в даному заповіднику через 3 роки. Через скільки років у цьому заповіднику буде 65 зубрів?

Для групи працівників сільського господарства:

Перед тим як висадити рослини в теплицю необхідно довести t повітря в ній до 25^0.

Записати формулу залежності температура Т (^{0}С)у теплиці в залежності від часу t (у хвилинах) нагрівання, якщо при нагріванні повітря в теплиці щохвилини температура підвищувалася на $0,05^0$, а початкова температура в теплиці була 6^0.

Заповнити таблиці:

t	12	2	10
T		3	17

Для групи механізаторів:

Складіть формулу для обчислення витрати пального трактором при боронуванні поля, якщо на боронування 1га витрачається 2,5 кг пального. Заповніть таблицю.

Площа, га	3	25	43		
Витрата пального, кг				1	20,5

(У задачі використовується функція y = kx (пряма пропорційність). Якщо m - витрата пального трактором, S - величина оброблюваної площі, то m = 2,5S)

Для групи військових топографів:

Дві роти десантників, що атакують, наступають за законом: $y=3x-2$ і $y=0,5x+3$. Дайте відповідь на запитання: чи відбудеться зустріч наступаючих і де саме.

Захист проектів.

V Підсумок уроку

При вивченні наук приклади корисніші від правил.

І.Ньютон

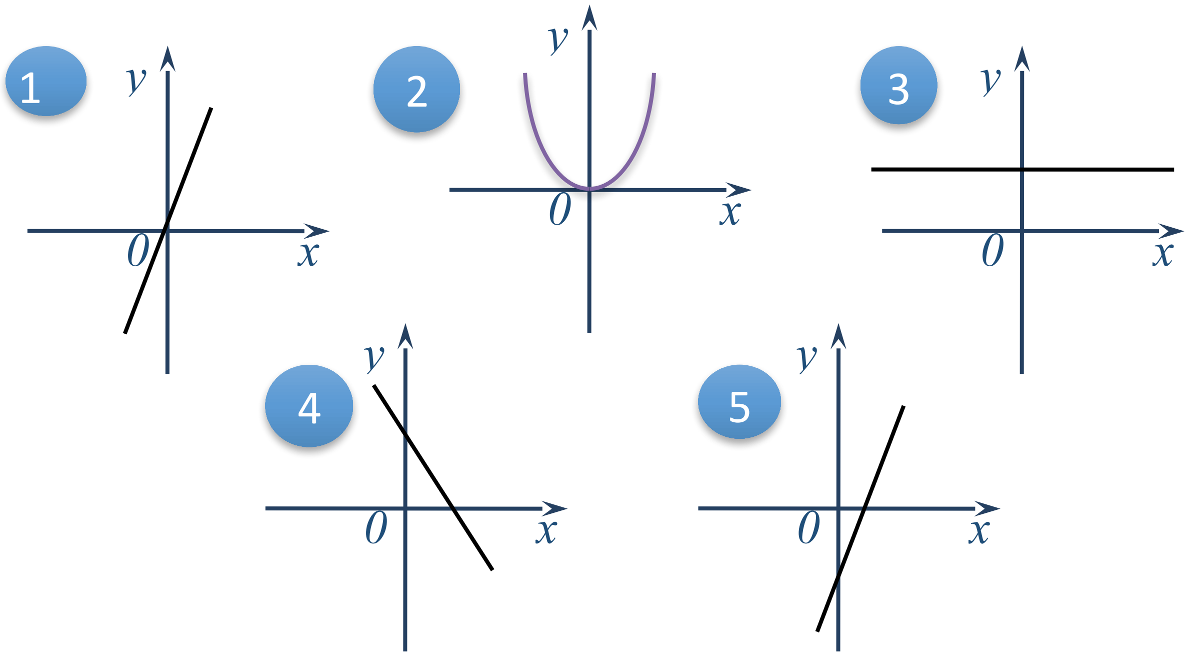
На слайді п'ять графіків функцій. Давайте довідаємося ім'я одного математика, що ввів аналітичне (яке базується на застосуванні аналізу) позначення функцій. Для цього відповімо на питання (кожному графіку відповідає своя буква) (мал.1):

- Який графік функції зайвий? Чому?
- На якому малюнку зображений графік прямої пропорційності? Чому?
- На якому малюнку зображено графік функції, у якої k0, b<0?
- На якому малюнку зображено графік функції, у якої k0, b>0?
- На якому графіку пряма паралельна осі абсцис? Як вона задається аналітично?

Одержуємо: Ейлер. Аналітичне позначення функції ввів Ейлер.

Порахуйте кількість балів одержаних за роботу, поділіть на два – це ваша оцінка за роботу на уроці.

VI. Домашнє завдання.


1
y
0
x
2
y
0
x
3
y
0
x
4
y
0
x
5
y
0
x

План–конспект уроку з математики в 10 класі за темою: «Узагальнення та систематизація знань, вмінь та навичок з теми «Тригонометричні функції» [19]

Мета: узагальнити і систематизувати знання учнів про тригонометричні функції;

розвивати вміння використовувати властивості тригонометричних функцій для розв`язання вправ, творчу активність, увагу, логічне мислення, пам'ять, культуру математичного мовлення, вміння працювати самостійно, вміння спілкуватись, допомагати іншим;

розширювати кругозір учнів, розвивати навички самостійної роботи з додатковою літературою;

виховувати уважність, кмітливість, наполегливість , охайність, працьовитість, дисциплінованість, самостійність мислення, толерантність до міркувань інших учнів, вміння оцінювати дії свої та інших учнів;

Тип уроку: систематизації та узагальнення знань, урок – гра.

Обладнання: комп'ютер, смайлики, вислови, маршрутні листи, таблиці.

I. Організаційний момент

- Добрий день. Як справи з настроєм? До уроку готові?

Запишіть дату: 28 листопада. Отже сьогодні 28.11.2023р.

Яка цифра домінує? **2.** Хто знає, що вона символізує?

Це символ спілкування, надійності, співпраці. Я сподіваюсь на гарну співпрацю з вами, бо сьогодні ми узагальнимо тему «Тригонометричні функції», підготуємось до контрольної роботи на наступний урок.

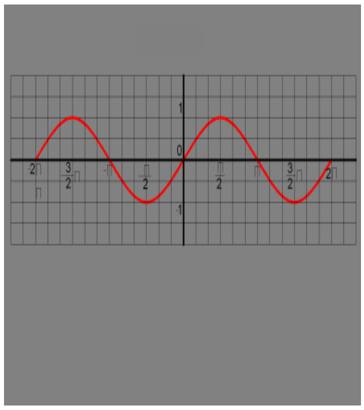
Запишіть тему уроку <u>«Узагальнення та систематизація знань, вмінь, навичок з теми «Тригонометричні функції».</u>

Сьогодні урок у нас незвичайний.

Бо у нас гості, і проведемо ми його як «Математичне ралі» . Кожна пара – це екіпаж машини. Від кожного члена екіпажу залежить результативність перегонів. Пам'ятаємо , що Я – знаю, Я – вмію

Екіпажі виконають пробіг по математичній місцевості з безліччю перешкод в населеному пункті «Тригонометрія». Девіз наших перегонів **«Поспішай повільно».** У кожного екіпажу є *аварійний ящик*, з необхідним інструментом і маршрутний лист з етапами маршруту. Ви будете його заповнювати і отримаєте результати перегонів

(на екран проектується маршрутний лист)



І. Перевірка знань правил дорожнього руху ($\frac{1}{4}$ бала за кожну правильну відповідь)

ІІ. Технічний огляд (1 бал, додатково результати «Мій клас»)

ІІІ. Змагання по гірській місцевості

ІУ Відпочинок. (довідка – 5б)

У. Раптова зупинка «Аварія»…..

УІ. Фініш.

Отож, починаємо перегони.

ІІ. Актуалізація опорних знань

1. Перевірка знань правил дорожнього руху. ***Математичний диктант.)***

1. В якій чверті знаходиться кут (-740^0.) *(ІУ чв.)*

2. Визначити знак добутку $\cos 400 \bullet \sin 220$ *(від'ємний)*

3. Якщо $cos\alpha = 0{,}6$ і α знаходиться в ІУ четверті, то $sin\alpha$ дорівнює (-0,8)

4. Зайти період функції у= $\sin 4\pi$ ($\frac{\pi}{2}$)

5. Обчислити $\sin 225^0$ (- $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

6. Знайти розв'язок рівняння $cosx = 1$ (2π n, n Є Z)

7. $\sin(2x) = 0$ ($\frac{\pi}{2}$ n, n Є Z)

8. $sinx = \sqrt{3}$ (розв. немає)

9. Областю значень функції y = $sinx+2$ є проміжок [1; 3]

10. Графік якої функції є на малюнку?

(на екран проектується завдання. Обговорення відповідей. За правильну - ¼ бала.)

ІІІ. Перевірка домашнього завдання

2. Технічний огляд. (На екран проектується попередня самостійна робота). Проаналізувати її**.** Повинні виконати роботу над помилками і знайти завдання подібні та розв'язати їх. Декілька учнів записують на дошці підібрані завдання. Вчитель переглядає наявність у останніх. ***(Після уроку зібрати зошити для перевірки)***

Результати роботи на сайті «Мій клас»

ІУ. Розв'язування вправ

3. Перегони по ускладненій місцевості.

(Результат правильних відповідей вислів « **Програє не той, хто втомився, а той, хто зупинився».** Завдання з підручника. Ознайомлення з кожним завданням . Завдання різнорівневі. Виходить представник від кожної пари.

(На екран проектуються номери завдань)

1. Обчислити: №696, №658

2. Довести тотожність № 681(1)

3. Розв'язати рівняння: №774(1), №789(2), №835(5)

А тепер всі посміхніться. Зніміть посмішку зі свого обличчя і передайте товаришеві

2.Довідка про місцевість, на якій проходить наше ралі. Використання інформаційних джерел.

4. Раптова зупинка. «Аварія». Вправа «Знайди помилку» *по 1б за знайдену помилку*

1. $\sqrt{2}\sin x+1=0; x=-1^{к}\frac{\pi}{3}+\pi к,$ КєZ

2. $2\cos x-1=0;$ $x=\frac{\pi}{3}+\pi n,$ nєZ 3. $\cos(-x)=$ - *cosx*

4. $\cos^2\beta-\cos 2\beta=-\sin^2\beta; \cos(-x)=\cos x; \cos(-x)=-\cos x$ 5. cos 7π = 1

. **У. Рефлексія**

5. Фініш Щоб успішно перетнути лінію фінішу залишилося напружитися і зробити «ривок». Встановити відповідність між завданням та його можливим результатом.

(Завдання на екран)

Завдання	*Можливий варіант відповіді*	
1. E(y)	=	**Ш**
2.Тотожність	$\frac{5}{6}$	**Н**
3. Обчислити значення виразу	[-1; 1]	**Ф**

4. Рівняння доведено **I**

5. Порівняти $(-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$ **I**

УІ. Підсумок уроку. Підраховують бали, отримані за урок. . Визначається екіпаж, який став чемпіоном. (***зібрати зошити для перевірки)***

Домашнє завдання: тести «Перевір себе» №3 ст.242, та №4 завд №1 -9, ст.300

ДОДАТОК Б

План–конспект уроку з математики в 11 класі за темою:
«Показникова та логарифмічна функції» [21]

Мета: Повторити, узагальнити, систематизувати вивчений матеріал про показникову та логарифмічну функції, показати вміння розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння та нерівності. Виховувати увагу, логічне мислення, самостійність, культуру математичної мови та записів.

Формування компетентностей:

предметна компетентність:

сприяти узагальненню і систематизації матеріалу з теми «Показникова і логарифмічна функція, рівняння і нерівності», розвивати вміння узагальнювати, мислити логічно, робити висновки, чітко висловлювати свою думку, відтворити вміння розв’язувати завдання із даної теми;

ключові компетентності:

- *математична компетентність* – розв’язувати показникові та логарифмічні рівняння та нерівності, аналізувати особливості показникових та логарифмічних функцій, будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об’єктів, інтерпретувати та оцінювати результати;
- *спілкування державною мовою* – доречно та коректно вживати математичну термінологію, поповнювати свій словниковий запас, робити висновки на основі отриманої інформації, чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку;
- *інформаційно – цифрова компетентність*– структурувати дані, визначати достатність даних для розв’язування завдань;
- *основні компетентності у природничих науках і технологіях* – розпізнавати проблеми, що виникають у довкіллі, і які можна розв’язати засобами математики;
- *соціальна та громадянська компетентності* – співпрацювати у команді, виділяти та виконувати власну роль у командній роботі ;

- *уміння вчитися впродовж життя* – визначати мету навчальної діяльності, відбирати і застосовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення мети;

- *ініціативність і підприємливість* – генерувати нові шляхи розв’язання поставлених проблем, ухвалювати оптимальні рішення, аргументувати свою позицію.

Тип уроку: урок узагальнення і систематизації знань, умінь, навичок

Обладнання: підручник, посібник, кінопроектор, ноутбук, екран, роздатковий матеріал

Хід уроку

Епіграф до уроку: ‘*Знання збільшуються, а вміння вдосконалюються, коли ними ділишся’ вислів відомого французького письменника Оноре де Бальзака.*

- Історична довідка.
- Питання, пов'язане з показникової функцією, розробляв Леонард Ейлер).

- У двох розділах своєї праці “Вступ до аналізу” він описав “показникові та логарифмічні кількості”. Навіть і сам показник може бути показниковою “кількістю”.

Іранський математик ал-Караджі розглядав рівняння і нерівності відносно деякого степеня невідомого

I. Мотивація навчальної діяльності учнів, повідомлення теми, мети і завдань уроку(слайд 1,3)

На попередньому уроці ми закінчили вивчати поняття показникових і логарифмічних функцій, рівнянь і нерівностей. А сьогодні систематизуємо і узагальнимо знання по даній темі.

II. Перевірка домашнього завдання.

№2.11 (2,3)

2) $5^{2x-3}-2\cdot 5^{x-2}=3;$

$\frac{1}{125}\cdot 5^{2x}-\frac{1}{25}\cdot 2\cdot 5^{x}-3=0;(\cdot 125)$

$5^{2x}-10\cdot 5^{x}-375=0;$

Заміна $5^{x}=t$

$t^2-10t-375=0;$ D=100+1500=1600;

$t_1=\frac{10-40}{2}=-15;$ $t_2=\frac{10+40}{2}=25;$

$5^{x}=-15-$ *розв'язків немає;*

$5^{x}=25; 5^{x}=5^{2}; x=2$ Відповідь: x=2.

3) $9^{x}-6\cdot 3^{x-1}=3; 3^{2x}-6\cdot 3^{x}\cdot 3^{-1}=3; 3^{2x}-2\cdot 3^{x}-3=0;$

Заміна $3^{x}=t$; $t^2-2t-3=0;$ D=4+12=16;

$t_1=\frac{2-4}{2}=-1;$ $t_2=\frac{2+4}{2}=3;$

$3^{x}=-1-$ *розв'язків немає;*

$3^{x}=3; x=1$ Відповідь: x=1.

№3.10(2,3,5)

2) $9\cdot 3^{x-1}+3^{x}<36; 9\cdot 3^{x}\cdot\frac{1}{3}+3^{x}<36; 3^{x}\cdot 4<36; 3^{x}<9; x<2.$

Відповідь: x є (-∞;2)

3) $2^{x}+2^{x-1}+2^{x-2}>56; 2^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)>56; 2^{x}>56\cdot\frac{4}{7}; 2^{x}>32;$

x>5. Відповідь: x є (5;∞)

5) $2\cdot 6^x+3\cdot 6^{x+3}\le 650;6^x\left(2+3\cdot 6^3\right)\le 650;6^x\le 1;x\le 0.$

Відповідь: х є (-∞;0)

№ 6.11(1,2)

$^2+3\log_2 x-4=0;\textit{Заміна}\log_2 x=t;t^2+3t-4=0;$

$t_1=-4;t_2=1;$ $\log_2 x=-4;\log_2 x=1;x_1=2^{-4}=\frac{1}{16};x_2=2.$

Відповідь: $x_1=\frac{1}{16};x_2=2$

- $^2+\log_3 x-2=0;\textit{Заміна}\log_3 x=t;t^2-t-2=0;$

$t_1=2;t_2=-1;$ $\log_3 x=2;\log_3 x=-1;x_1=9;x_2=\frac{1}{3};$

Відповідь: $x_1=9;x_2=\frac{1}{3}.$

№7.12(3,4)

$$\log_3(x-2)+\log_3(x-10)\ge 2;\log_3(x-2)(x-10)\ge 2;$$

$$x-2>0;x-10>0;(x-2)(x-10)\ge 9;x>10;x^2-12x+11\ge 0;$$

$x_1=11;x_2=1;x\epsilon(-\infty;1]\cup[11;\infty);x\epsilon(10;\infty).$Відповідь: $x\epsilon[11;\infty);$

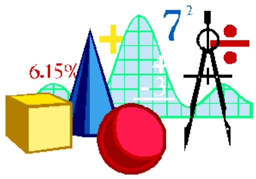
- $\log_7 x+\log_7(3x-8)\ge 1+2\log_7 2;\log_7 x(3x-8)\ge\log_7 28;$

$$3x-8>0;x>\frac{8}{3};x(3x-8)\ge 28;3x^2-8x-28\ge 0;$$

$x_1=-2;x_2=\frac{28}{6};x\epsilon$Відповідь: $x\epsilon\left[4\frac{2}{3};\infty\right).$

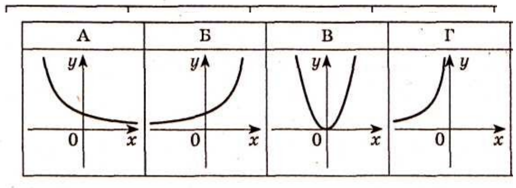
III Узагальнення та систематизація знань

Мозковий штурм під девізом ‘Хай живе теорія’. (слайд 5-9)



1. Яка функція називається показниковою?
2. Яка область значень показникової функції?
3. При якій умові показникова функція є зростаючою, а при якій спадною?

3. Які з наведених ескізів відповідають графікам показникових функцій:

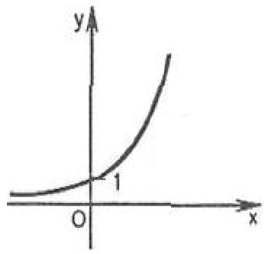


Показникова функція

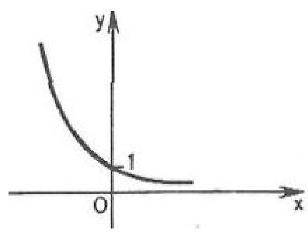
- Функція, $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, називається показниковою з основою a.

- Графік функції. Крива називається експонентою

$a > 1$



$0 < a < 1$



7

Які з перерахованих функцій є показниковими?

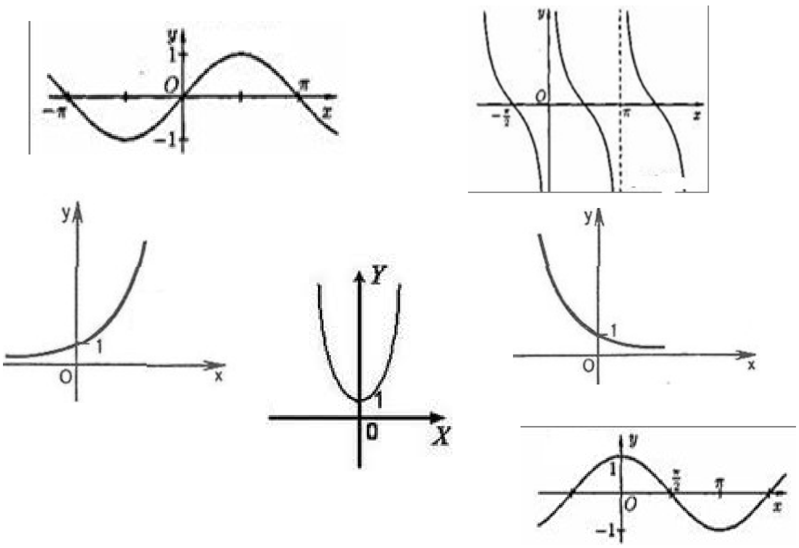
$а) y = 2^x$ $\qquad$ $г) y = x^{-1}$

$б) y = x^2$ $\qquad$ $д) y = \pi^x$

$в) y = \left(\sqrt{3}\right)^x$ $\qquad$ $е) y = (\sqrt{2} - 3)^{\pi}$

8

На якому з малюнків зображений графік показникової функції?



9

Властивості показникової функції

$$y = a^x, \ a > 0, \ a \neq 1$$

$a > 1$	$0 < a < 1$
D(f)=(-∞; +∞)	**D(f)=(-∞; +∞)**
E(f)=(0; +∞)	**E(f)=(0; +∞)**
Зростає	**Спадає**
Неперервна	**Неперервна**
Обмежена знизу	**Обмежена знизу**
Випукла вниз	**Випукла вниз**
Диференційовна	**Диференційовна**

10

Показникові рівняння

Показниковими рівняннями називаються рівняння виду

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

і рівняння, які зводяться до цього виду

Основні методи розв'язання показникових рівнянь

- *Функціонально-графічний*

  Заснований на використанні графічної ілюстрації чи окремих властивостей функції.

- Метод урівнювання показників

  Заснований на застосуванні теореми 17.1. та наслідка з неї (пункт 17 підручника)

  Рівняння рівносильне рівнянню $x_1 = x_2$ або $f(x) = g(x)$, де $a>0, a\neq1$.

- *Метод введення нової змінної*

11

Показникові нерівності

Показниковими нерівностями називаються нерівності виду

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \qquad a > 0, \quad a \neq 1$$

і нерівності, які зводяться до цього виду

Розв'язування показникових нерівностей

Теорема 18.1: Показникова нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$,

рівносильна нерівності ***f(x) > g(x)***, якщо ***a > 1*** ;

рівносильна нерівності ***f(x) < g(x)***, якщо ***0 < a < 1.***

Приклади

$$3^x \geq 27 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{16}$$

12

Знайти помилку!

1) Розв'язати рівняння

$$15^{x^2-5x+6} = 15^0,$$
$$15^{x^2-5x+6} = 15,$$
$$x^2 - 5x + 6 = 1,$$
$$x^2 - 5x + 5 = 0,$$
$$D = 25 - 20 = 5,$$
$$x_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2},$$
$$x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

2) Розв'язати нерівність

$$0{,}5^{2x-1} < 0{,}25,$$
$$0{,}5^{2x-1} < 0{,}5^2,$$
$$2x - 1 < 2,$$
$$2x < 3,$$
$$x < 1{,}5.$$

15

Розв'язати рівняння: 1)$\sqrt{3^x}=9$; $3^x=9^2; 3^x=3^4; x=4$. Відповідь: x=4.

2)$4^{x+1}+7\cdot 2^x-2=0; 2^{2x+2}+7\cdot 2^x-2=0; Замінаt=2^x$

$$4t^2+7t-2=0; D=49+32=81; t_1=\frac{-7-9}{8}=-2; t_2=\frac{-7+9}{8}=\frac{1}{4};$$

$$2^x = -2 - \textit{розв'язків немає}; 2^x = \frac{1}{4}; x = -2. \textit{Відповідь}: x = -2.$$

3) $5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-2} = 122; 5^x \cdot \left(5 - \frac{3}{25}\right) = 122; 5^x \cdot \frac{125-3}{25} = 122; 5^x = 25;$

$$5^x = 5^2; x = 2. \textit{Відповідь}: x = 2.$$

Розв'язати показникові нерівності:

- $0,6^{2x-1} < 0,216; 0,6^{2x-1} < 0,6^3; 2x - 1 > 3; 2x > 4; x > 2.$

  Відповідь: x є (2;∞).

- $9^x - 6 \cdot 3^{x-1} \leq 3; 3^{2x} - 6 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3} \leq 3; 3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 \leq 0; \textit{Заміна}\, 3^x = t$

  $$t^2 - 2t - 3 = 0; t_1 = 3; t_2 = -1; -1 \leq 3^x \leq 3; x \leq 1.$$

Відповідь: x є(-∞;1]

- $25^x + 25 \cdot 5^x - 1250 > 0; 5^{2x} + 25 \cdot 5^x - 1250 > 0; \textit{Заміна}\, 5^x = t$

  $$t^2 + 25t - 1250 = 0; D = 625 + 4 \cdot 1250 = 5625 = 75^2;$$

  $$t_1 = \frac{-25-75}{2} = -50; t_2 = \frac{-25+75}{2} = 25; t \epsilon (-\infty; -50) \cup (25; \infty)$$

  $$t < -50; t > 25; 5^x < -50 - \textit{розв'язків немає}, 5^x > 25; x > 2.$$

  Відповідь: x є (2;∞).

Узагальнення знань і вмінь по логарифмічній функції:

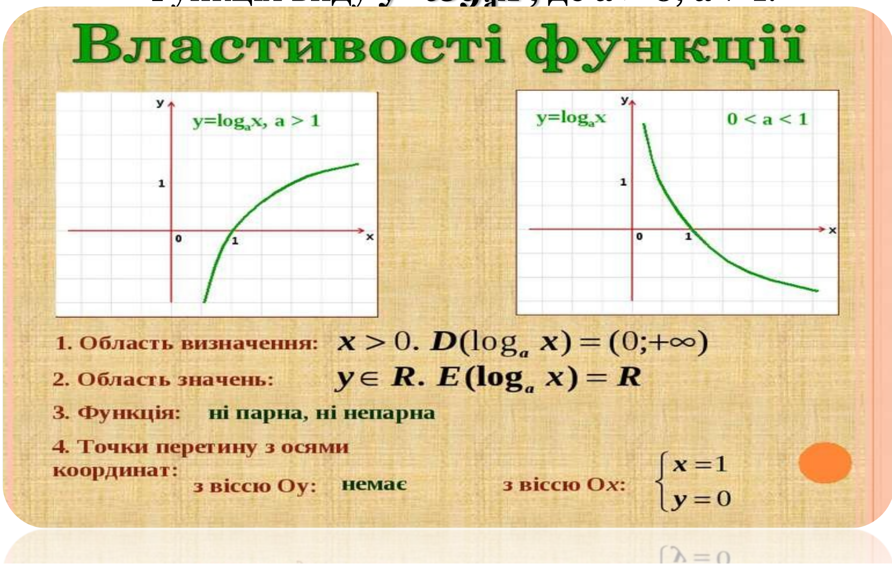
- 1 Означення логарифма.
- 2. Яка функція називається логарифмічною?
- 3. Яка область значень логарифмічної функції?
- 4. Властивості логарифма.

- 5. Які рівняння називають логарифмічними?

6. Чи існує логарифм від'ємного числа?

Логарифмічна функція

Функція виду $\boldsymbol{y=\log_a x}$, де $a > 0$, $a \neq 1$.



Логарифм та його властивості.

1. $\log_a 1 = 0;$
2. $\log_a a = 1;$
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y;$
4. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$
5. $\log_a x^p = p\log_a x;$
6. $\log_{a^z} x = \dfrac{1}{z}\log_a x;$
7. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a};$
8. $a^{\log_a b} = b.$

З наведених рівнянь виберіть логарифмічні:

1) $\log_2(x+3)=8$

2) $x^{\lg x}=100$

3) $2\ln 3 + x^3=10$

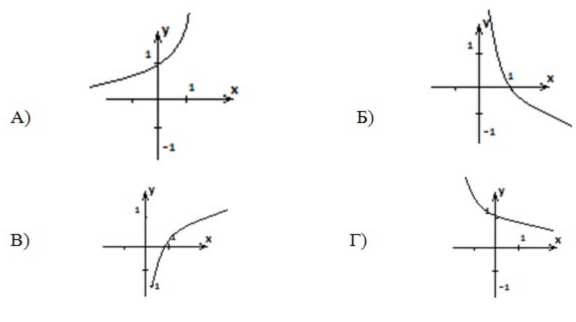
4) $\log_2^2 x + 2\log_2 x=0$

5) $\lg 100 + \lg 0{,}001 - (2x+4)=0$

6) $\log_3(x+2)+\log_3(2x-1)=\log_3 8$

Відповідь: 1), 2), 4), 6).

На якому з малюнків задано функцію $y = \log_{0,4} x$?



Відповідь: Б.

Робота в парах:

- $2^x+2^{x-3}=72;\, 2^x\left(1+\frac{1}{8}\right)=72;\, 2^x\cdot\frac{9}{8}=72;\, 2^x=64;\, x=6.$

$$\textit{Відповідь}: x=6.$$

- $\log_{2/3}(6-x) \le \log_{2/3}(x+1)$; $\begin{cases} 6-x>0, \\ x+1>0, \\ 6-x\ge x+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x<6, \\ x>-1, \\ x\le 2{,}5. \end{cases}$

Відповідь: x є (-1; 2,5].

- $9^x-2\cdot 3^x=63;\, \textit{Заміна}\; 3^x=t;\, t^2-2t-63=0;\, t_1=-7;\, t_2=9$

$$3^x=-7-\textit{роз в}'\textit{язківнемає};\, 3^x=9;\, x=2.\, \textit{Відповідь}: x=2.$$

Розв'яжіть самостійно: $\log_4\log_2\log_3(2x-3)=0{,}5$; $\log_2\log_3(2x-3)=4^{0,5}$;

$\log_3(2x-3)=2^2$; $\log_3(2x-3)=4$; $2x-3=3^4$; $2x=84$; $x=42$. Відповідь: x=42.

IV. Індивідуальна робота: Підготовка до ЗНО.

Тестування:

№1 Яка з даних функцій не є показниковою

А) y=$(\frac{1}{2}$❑^{x}; Б) y=π^x; В) y= $2^{x(3-x)}$; Г) y=x^π

№2 У якій точці перетинаються графіки функцій y=2^x і y= $\left(\frac{1}{8}\right)^x$

А) (1;1) Б) (1; 0) В) (0;1) Г) (0; -1)

№3 Зростаючою чи спадною є функція y=$\left(\frac{3}{2}\right)^x$

А) Зростаючою Б) Ні зростаючою, ні спадною; В) Спадною Г) Інша відповідь

№4 Обчисліть $\log_7 49$

А) 2; Б) 7; В) -2; Г) $\frac{1}{2}$;

№5 Обчисліть $27^{\log_3 2}$

А) 6; Б) 3; В) 8; Г) 2;

№6 Розв'яжіть нерівність $\log_3 x \le \log_3 4$

А) (0; 4) Б) (0; 4] В) x$\le 4;\, Г x\ge 4$

№7 Розв'яжіть рівняння $\lg x = 1 - \lg 2$

А)5 Б)-5 В)1 Г)2

№8 Розв'яжіть рівняння $\log_2(x+2)=5$

А) 25 Б) 2 В) 30 Г) 10

№9 Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{5}} x < \log_{\frac{1}{5}} 7$

А) x$\frac{1}{7}$ Б) x$\frac{1}{7}$ В) x7 $Гx<7$

№10 Розв'яжіть нерівність $3^x \le 27$

А) x$\le -3\,Бx \le 3\,Вx<3\,Гx \ge -3$

№11 Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^x \ge \frac{1}{16}$

А)x>1 Б) x≤ $\frac{1}{8}$ В) x≤ 4 Г) x≥ 8

№12 Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$

А) -2 Б) 2 В) 1 Г) -1

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
Г	В	А	А	В	В	А	В	В	Б	В	А

V. Домашнє завдання.

Домашнє завдання

1) **Повторити теоретичний матеріал з теми, підготуватися до контрольної роботи**
2) **Розв'язати:**
   1. $\log_2^2 x + 2\log_2 x = 0$
   2. $3^{x+1} - 2\cdot 3^{x-2} > 75$
   3. $(0,3)^{4-2x} \le (0,09)^{4x+10}$
   4. $5^x = 3^x$
   5. $3\cdot 4^x - 5\cdot 6^x + 2\cdot 9^x = 0$

VI. Підсумки уроку. ***Застосування показникової та логарифмічної функцій у нашому житті.***

- Знання про показникові функції, рівняння і нерівності потрібні не лише для розв'язування вправ, їх використовували багато років назад у різних сферах діяльності. А допоможе нам переконатися в цьому невеличкий блок реклами.

Ви прагнете бути активним учасником сучасного життя? Тоді докладніше вивчайте тему «Показникова функція» (слайд 25-30).

3. Показникові рівняння і нерівності.

- Вони допоможуть математикам розширити область визначення показника степеня.
- За їх допомогою було узагальнено поняття степеня .
- за їх допомогою Леонард Ейлер відкрив показникові і логарифмічні кількості .
- Якщо ви хочете пов'язати своє життя з наукою, то вивчайте показникові рівняння і нерівності та методи їх розв'язання!
- Вам потрібно дізнатися про радіоактивний розпад?
- Ви хочете розрахувати приріст деревини?
- Вам потрібно визначити зміну атмосферного тиску? .
- Тоді вам до показникових рівнянь і нерівностей!!!
- Вони допоможуть вам разв'язати багато практичних проблем .

4. Показникова функція.

- Вона допомогла людям описати такі процеси, як радіоактивний розпад, розмноження бактерій, утворення нейтронів у ланцюговій реакції, інформаційний бум.
- Без неї не були б розв'язані задачі на зміну атмосферного тиску, приріст деревини .
- І навіть сума вашого внеску до банку підлягає закону, який описує цю функцію .
- Логарифмічна функція. (слайд 31-37)

- К. Ціолковський вивів формулу для розрахунку абсолютної швидкості, якої досягає ракета, коли з неї витече все паливо .

- Будова слухового апарату людини відповідає властивостям цієї функції. Тому діапазон, що сприймає вухо, низький – від шелесту листя до гуркоту грому.

- Під час наповнення ставків необхідно враховувати кількість води, що прибуватиме в період повені. Розрахунки проводяться саме за допомогою цієї функції .

- Якщо вас цікавить закон зміни роботи газу і закон зміни сили відчуття від сили збудження (психофізичний закон Вебера); закон зміни тиску від зміни висоти; тривалість хімічної реакції, зверніться до логарифмічної функції .

- Саме вона допоможе вам дізнатися багато цікавого навколо нас!!! .

2. Логарифмічні рівняння і нерівності.

Я – Логарифмічне рівняння, тобто рівняння, яке містить змінну під знаком логарифма.

Розв’язуючи мене, пам’ятай, що область визначення логарифмічної функції – додатні числа, що $\log_a x$розглядають для a>0, a≠1.

Розв’язуючи мене, пам’ятай про методи розв’язування логарифмічних рівнянь: за означенням логарифму, за властивостями, введення нової змінної, логарифмування та графічний.

Увага! Акція! Саме ці методи ти використовуєш, розв’язуючи логарифмічну нерівність, але стережись підводних рифів! Ніколи не забувай про область допустимих значень нерівності та про те, що при a>1 функція $y=\log_a x$ зростає, а при 0<a<1 – спадає.

Якщо тобі набридло сидіти без діла, розв’язуй логарифмічні рівняння і нерівності, це є запорука успішного життя!!!

Логарифми широка використовуються у повсякденному житті . Логарифми проникають і в галузь психології. Досліди показали, що організм людини ніби “логарифмує” отримані ним подразнення, тобто величина відчуття приблизно пропорційна десятковому логарифму величини подразнення.

В астрономії гучність шуму й яскравість зірок оцінюється однаковим чином за логарифмічною шкалою. «Величина» зірки являє собою логарифм її фізичної яскравості. Гучність виражена в белах дорівнює десятковому логарифму відповідної фізичної величини. За логарифмічною спіраллю закручено багато галактик, у тому числі і Сонячна система .

Раковини багатьох молюсків, равликів, а також роги таких ссавців як архари (гірські кози), закручені за логарифмічною спіраллю. Можна сказати, що ця спіраль є математичним символом відношення форм росту.

Великий німецький поет Іоганн Вольфганг Гете вважав її математичним символом життя й духовного розвитку. У соняшника зернята розташовані також за дугами, близькими до логарифмічної спіралі . Один з найбільш поширених павуків, епейра, сплітаючи павутину, закручує нитки навколо центра за логарифмічною спіраллю. Хіба це не цікаво?

План–конспект уроку з математики в 11 класі за темою: «Застосування показникової та логарифмічної функцій»

Мета уроку: узагальнити та систематизувати знання учнів з теми «Показникова та логарифмічна функція», показати учням практичне значення теми в житті; викликати в учнів зацікавленість предметом алгебри, бажання вивчати його;

стимулювати пізнавальну діяльність учнів, сприяти формуванню і розвитку системних знань, колективних і міжособистісних відносин;

розвивати вміння узагальнювати, мислити логічно, робити висновки, чітко висловлювати свою думку;

виховувати відповідальність, уміння працювати самостійно й у групі.

Тип уроку: узагальнення та систематизації знань, урок-захист проекту.

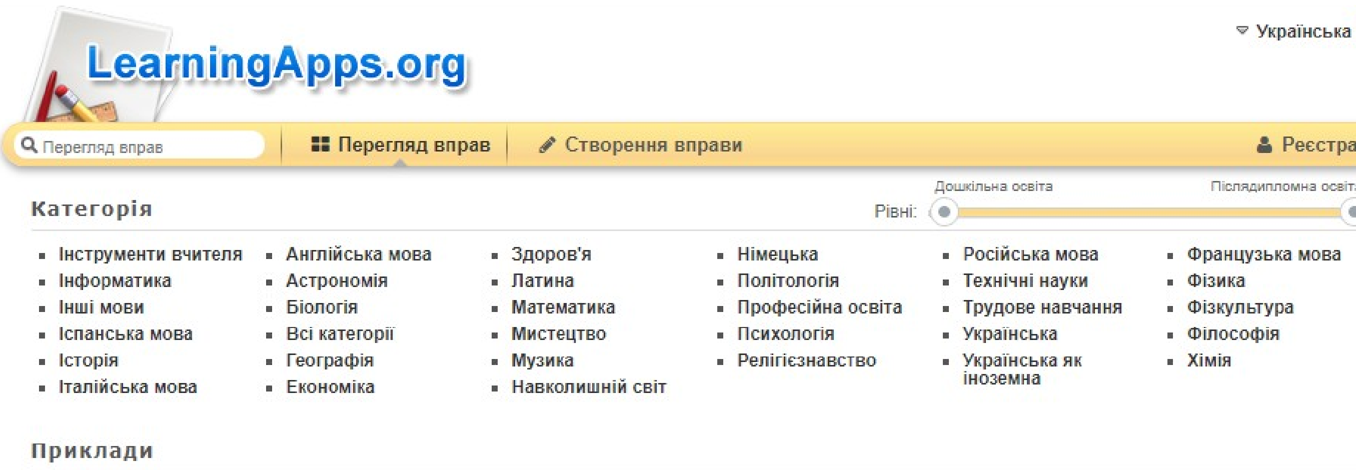
Обладнання: план-конспект, роздатковий матеріал (буклети), презентація, проектор, комп’ютер.

Хід уроку

I. Організаційний момент.

II. Актуалізація опорних знань.

Робота із завданнями інтернет-ресурсу https://learningapps.org/ на повторення властивостей показникової та логарифмічної функції


LearningApps.org
Українська
Перегляд вправ
Перегляд вправ
Створення вправи
Реєстра
Категорія
Рівні:
Дошкільна освіта
Післядипломна освіта
Інструменти вчителя
Інформатика
Інші мови
Іспанська мова
Історія
Італійська мова
Англійська мова
Астрономія
Біологія
Всі категорії
Географія
Економіка
Здоров'я
Латина
Математика
Мистецтво
Музика
Навколишній світ
Німецька
Політологія
Професійна освіта
Психологія
Релігієзнавство
Російська мова
Технічні науки
Трудове навчання
Українська
Українська як іноземна
Французька мова
Фізика
Фізкультура
Філософія
Хімія
Приклади

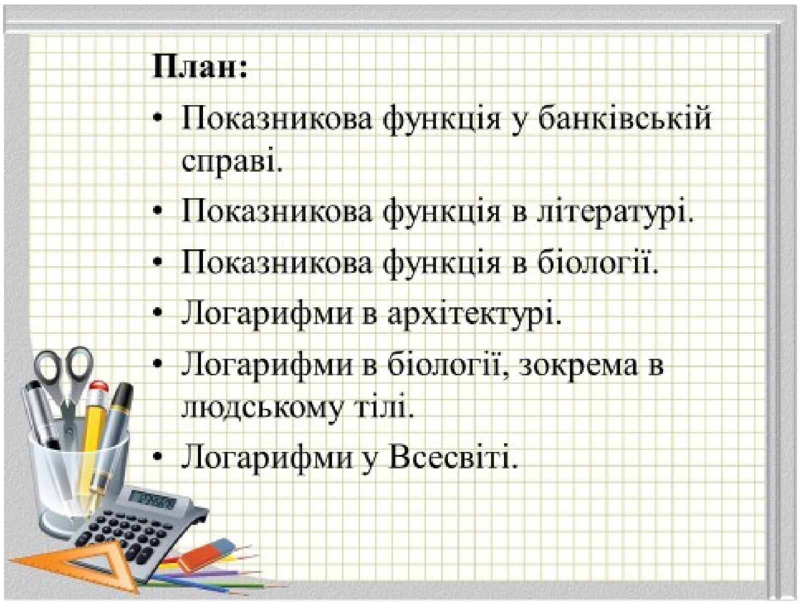

LearningApps.org
Українська
Перегляд вправ
Перегляд вправ
Створення вправи
Реєстрація
Показникові рівняння
2017-10-09
$7^x = 1$
x=4
Завдання:
Знайдіть пару: рівняння та його корені.
Бажаю успіхів!
OK
$4^{-x} = 16$
x=-2
$2^x = -4$
x=2
x=3


LearningApps.org
Українська
Перегляд вправ
Перегляд вправ
Створення вправи
Реєстрація
Поняття логарифму
2017-10-22
Завдання:
Знайди пари
OK
1
-2
0,5
3
$log_7 49$
-4
$log_3 81$
$log_6 \frac{1}{216}$
0
2
-1
4
$log_5 \frac{1}{5}$
$log_4 64$
$log_4 \frac{1}{16}$
-3


ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ. ВЛАСТИВОСТІ
$y=a^x (a>0), a\neq 1$
y
$y=a^x$
1
0
x
y
$y=a^x$
$y=(\frac{1}{a})^x$
1
0
x
$a>1$
$0<a<1$

III. Повідомлення теми, мети і завдань уроку.

Захист проекту: «Застосування показникової та логарифмічної функцій»



IV. Захист проекту.

Кожна група представляє результати своєї пошукової діяльності.

Показникова функція у банківській справі

Ще за стародавніх часів було широко поширене лихварство — віддавання грошей у позику під відсотки. Селянин у разі неврожаю, ремісник, майно якого знищила пожежа, розорений торгівець змушені були йти до лихваря, обіцяючи наступного року повернути суму значно більшу, ніж узята в позику. Наприклад, у Давньому Вавилоні лихварі брали по 20 % лихви на рік. При цьому, якщо боржник не міг повернути борг наступного року, йому треба було платити відсотки не тільки з позиченого капіталу, а й з відсотків, що виросли за рік. Тому через 2 роки слід було заплатити не 40 %, а 44 %лихви, адже $1,2^2 = 1,44$. За 5 років сума боргу збільшувалася в $1,2^5$ разів, тобто майже в 2,5 рази, а за 10 – років більш ніж у 6 разів. Зрозуміло, що більшість боржників були не в змозі повернути борг і, давно виплативши основну суму боргу, були змушені все життя працювати на те, щоб виплатити все зростаючі відсотки. Нарешті зубожілі боржники ставали рабами хижого лихваря.

У XIV—XV ст. у Західній Європі почали з'являтися банки (від фр. *banque* — лава, контора) — установи, які давали гроші в позику князям та купцям, фінансували за великі відсотки далекі мандрівки та завойовницькі походи. Щоб полегшити розрахунки складних відсотків, склали таблиці, за якими відразу можна було дізнатися, яку суму треба виплатити через ***n*** років, якщо була взята сума ***a*** під ***p***% річних. Легко підрахувати, що сума, яку треба заплатити, виражається формулою: $S = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

Якщо p — стале, то S є функцією від n. Такі таблиці давали значення показникової функції при різних значеннях основи $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ і натуральних значеннях n.

Останнє обмеження було не дуже зручним: іноді гроші бралися в борг не на ціле число років, а, наприклад, на 2 чи 6 місяців. Так виникла ідея степеня з дробовим показником. Ця ідея належала ще Архімеду, але вона не була зрозумілою його сучасникам. І лише через 1,5 тисячоліття почали розглядати піднесення чисел до степеня з дробовим показником.

<u>Показникова функція в літературі</u>

У романі Жуля Верна „Матіас Шандор" виведено образ силача Матіфу, який здійснив багато подвигів. Ось один із них.

Готувався спуск на воду корабля. І саме в цей момент до гавані влетіла яхта, яка неминуче врізалася б у корабель, якби з натовпу не вибіг чоловік, який з усієї сили оперся о землю ногами і вчепився в трос, що утримував корабель, щоб затримати спуск. Поблизу стояла гармата. Сміливець швидко накинув на неї трос і з нелюдським зусиллям утримував його 10 секунд, поки трос не лопнув. Але цих 10 секунд було досить, щоб яхта проскочила повз корабель — зіткнення не сталося. Звичайно, ви здогадалися, що сміливий незнайомець — це Матіфу.

Але чи потрібна нелюдська сила, щоб утримати корабель?

«Чи може людина втримати корабель?»

Згадаємо, як відбувається швартування корабля. З нього кидають канат на берег. Людина, що стоїть на пристані, обмотує кілька разів канат навколо стовпа. Сила тертя між канатом і стовпом і утримує судно.

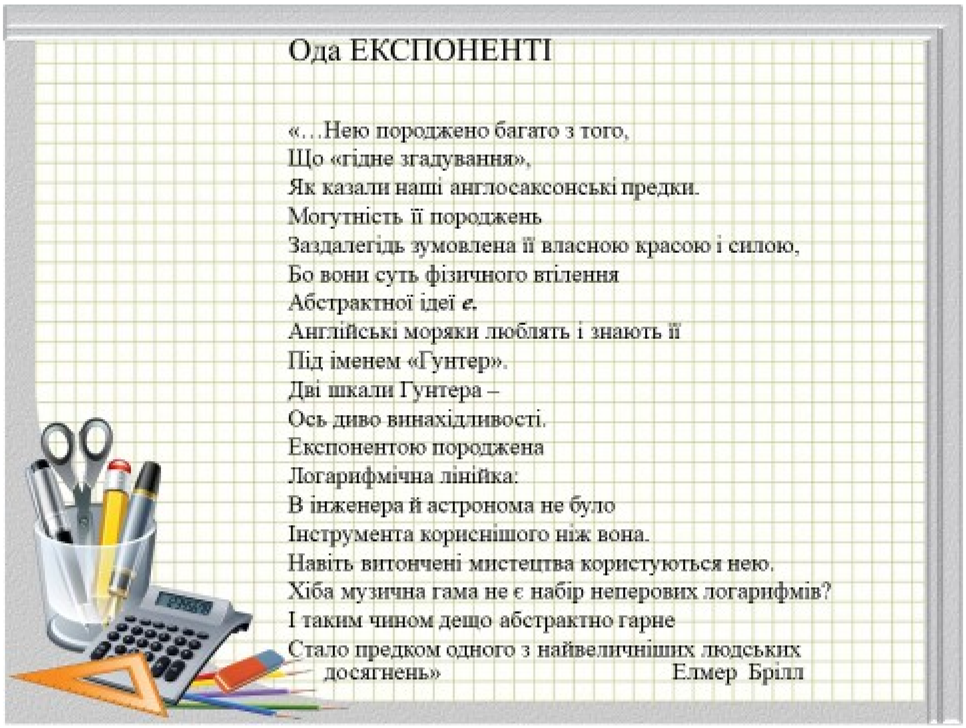
Якщо F_0 — прикладена сила, F— сила, що утримує корабель, то маємо:

х витків: $F= F_0 \bullet k^x$;

k залежить від матеріалу, з якого зроблено канат і стовп.

Тобто, обернувши канат 3 рази, силою 22 Н можна утримувати 40 т.

Різноманітні застосування показникової і логарифмічної функцій надихнули англійського поета Елмера Брілла на написання "Оди експоненті". Були поети, які не присвячували од логарифмам, але згадували їх в своїх віршах.



<u>Показникова функція в біології</u>

Показникова функція має широке застосування в біології. Розглянемо кілька прикладів.

Розглянемо, як зростає популяція бактерій у відповідності з простим життєвим циклом. При цьому час між моментом поділу материнської клітини (народження нової) і моментом, коли вона сама ділиться, називається періодом поділу, або часом генерації.

<u>ЗАДАЧА.</u> Нехай число бактерій у культурі становить A_0. За час однієї генерації всі ці A_0 бактерій поділяться навпіл і утвориться $2A_0$ бактерій. Через дві генерації їх стане $2 \cdot 2A_0$, через три — $2 \cdot 2 \cdot 2A_0$ і т.д. Через *p* генерацій $A = 2^p \cdot A_0$.

Нехай час однієї генерації *T*, тоді $p = \frac{t}{T}$, де *t* час з початку розподілу. $A = 2^{\frac{t}{T}}$.

Бачимо, що популяція росте за показниковим законом, або, як кажуть, експоненціально (лат. *exponense* — той, хто показує).

Саме здатність бактерій до швидкого розмноження забезпечує їх кількісну перевагу серед живих форм. Якби не було природних причин, що заважали б вибухам кількості бактерій, сумарна маса яких становила б декілька десятків тисяч тон, а за дві доби показникового зростання маса однієї бактерії перевищила б у декілька разів масу Земної кулі. Наша планета, проте, не перетворилася на суцільну масу мікробів. І це не тільки тому, що бактерії вичерпують поживні речовини, які підтримують їх зростання, а й тому, що при зростанні вони виділяють велику кількість продуктів, токсичних для них самих.

Звичайно, показниковий закон виконується дуже приблизно в біологічних системах, бо ми маємо тут справу з дуже складними системами.

ЗАДАЧА. За законом показникової функції розмножувалося б все живе на Землі, якби для цього були сприятливі умови, тобто не було природних ворогів і було вдосталь їжі. Доказ тому-поширення в Австралії кроликів, яких там раніше не було. Досить було випустити пару особин, як через деякий час їх потомство стало національним лихом.

ЗАДАЧА. Якби всі макові зерна давали сходи, то через 5 років число «нащадків» однієї рослини дорівнювало б $243 \cdot 10^{15}$або приблизно 2000 рослин на 1 м суші.

ЗАДАЧА. Потомство кімнатних мух за літо тільки від однієї самки може скласти $8 \cdot 10^{14}$. Ці мухи важили б кілька мільйонів тонн, а вибудувані в один ланцюжок, вони склали б відстань, більшу, ніж відстань від Землі до Сонця. Потомство пари мух за 2 роки мало б масу, що перевищує масу земної кулі. І тільки завдяки спільноті тварин і рослин, коли збільшення одного виду тягне за собою зростання кількості його ворогів, встановлюється динамічна рівновага в природі.

<u>Логарифми в архітектурі</u>

У 2006 році в мексиканському місті Наукальпан-де-Хуарес був побудований унікальний будинку у вигляді мушлі. Побудова будинку у вигляді морської мушлі в Мехіко базується на формулі логарифмічної спіралі. Творці Наутилуса - так називається проект - спробували створити відчуття четвертого виміру, яке повинне виникати, якщо знаходитися всередині будівлі.

Фасад прикрашений різнобарвним склом, завдяки якому всередину проникає багато світла, - на стінах лежать різнокольорові відблиски. Але це не сама незвичайна деталь. Увійшовши до будинку, гість бачить перед собою суцільний трав'яний «килим», по якому петляють доріжки, вимощені каменем. Ці стежки ведуть до житлових кімнат.

Круглі вікна і плавні лінії стін створюють враження, ніби будинок - справжня мушля, яка лежить на дні моря. Це особливо відчувається у ванній кімнаті, де стіни пісочного і блакитного кольорів шорсткі на дотик, а вікна розташовані високо над головою.

Матеріал, з якого побудований «Наутілус», - так званий Grancrete (granite, «граніт» + concrete, «бетон»). Це особливий вид міцної вогнетривкої кераміки, здатний витримувати екстремальні погодні умови.

Крім того, житло майже не вимагає витрат на утримання. Мешканці економлять на опаленні і кондиціонерах, оскільки для вентиляції передбачені два підземних воздуховода. Влітку повітря з вулиці, пройшовши по одному з каналів, остигає і охолоджує приміщення, а взимку, навпаки, нагріває.

Логарифми в біології, зокрема в людському тілі

Особливості логарифмічної спіралі вражали не лише математиків. Їх геометричні властивості, зокрема інваріантність(збереження кута), дивує і біологів. Вони вважають саме цю спіраль свого роду стандартом біологічних об'єктів різного походження. Логарифмічна спіраль – єдиний тип спіралі, яка не змінює своєї форми при збільшенні розмірів. Ця властивість пояснює чому логарифмічна спіраль так часто зустрічається у природі.

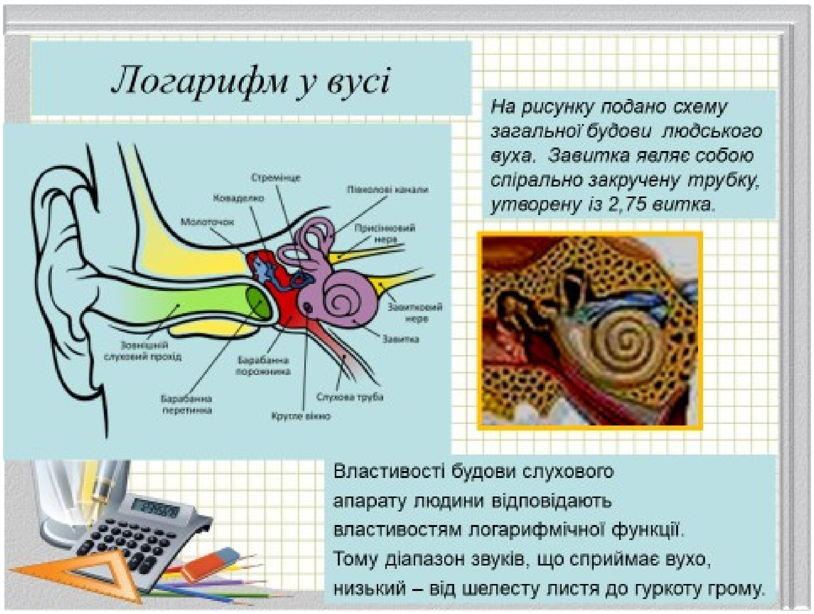
(соняшник, ананас, молюски)

Людське вухо

На рисунку подано схему загальної будови людського вуха. Завитка являє собою спірально закручену трубку, утворену із 2,75 витка.

Властивості будови слухового апарату людини відповідають властивостям логарифмічної функції.

Тому діапазон звуків, що сприймає вухо, низький – від шелесту листя до гуркоту грому.



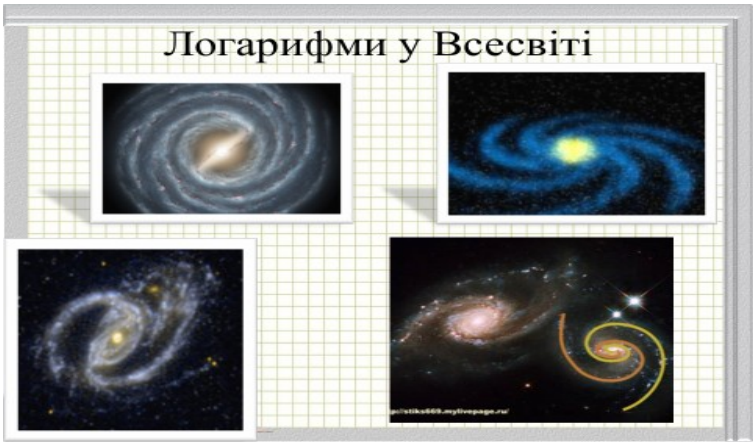
<u>Логарифми у Всесвіті</u>

Гучність шуму і яскравість зір оцінюються однаковим чином – по логарифмічній шкалі.

По логарифмічній спіралі закручена Галактика, якій належить Сонячна система. “Величина” зірки являє собою логарифм її фізичної яскравості.

Оцінюючи яскравість зір, астроном оперує таблицею логарифмів, складених при основі 2,5.

Гучність виражена у белах, дорівнює десятковому логарифму відповідної фізичної величини.



<u>V. Підсумки уроку.</u>

Виставлення оцінок: керівник кожної групи сам оцінює роботу членів своєї групи, виставляючи оцінки.

VI. Домашнє завдання.

Підготуватися до контрольної роботи.

Домашня самостійна робота

Розв’язати показникові та логарифмічні рівняння:

$$2^{x-2} = 16$$

$$4^{2x-1} = \frac{1}{64}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = 3$$

$$\log_4 x = 0{,}5$$