МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри
__________ Д.Є. Бобилєв
«___»________ 2023 р.

Реєстраційний №________
«___»_________ 2023 р.

РОЗРОБКА СИСТЕМИ ЗАДАЧ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТА КОМБІНАЦІЇ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ ДЛЯ УЧНІВ ЛІЦЕЇВ

Кваліфікаційна робота
студентки групи МІм-22
ступінь вищої освіти магістр
спеціальності: 014.04 Середня освіта (математика)
Федоренко Наталі Сергіївни
Керівник:
кандидат техн. наук, професор
Корольський Володимир Вікторович
Оцінка:
Національна шкала__________________
Шкала ECTS ____ Кількість балів _____
Голова ЕК _______ __________________
Члени ЕК________ __________________
________ __________________
________ __________________
________ __________________

Кривий Ріг – 2023

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Федоренко Наталя Сергіївна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело.

Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомлена. Чітко усвідомлюю, що у разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. На сьогоднішній день програма навчання в Україні передбачає досить високий освітній рівень підготовки учнів. Вони мають змогу одержувати не лише різноманітні та різнобічні наукові основи з багатьох дисциплін, а також змогу творчого їх застосування з можливістю постійно поповнювати свої знання та розвиватися.

Виходячи з цього багато освітян беруть до уваги нові тенденції реформ освіти та навчального процесу, таких як пропозиції ставлення нових цілей і завдань, модернізувати зміст і удосконалити методичні системи навчання, а також покращити інформатизацію навчального процесу і додати інноваційних технологій.

З плином часу та історії звичайно зростає кількість наук та різноманітних наукових відкриттів, майже усі вони не можуть розвиватися та навіть існувати без допомоги математичної науки, і звичайно ж зростають об’єми тих знань та відкриттів з математичної науки, яку вчені інших наук та учні використовують. Можна зробити висновок, що дуже важливо зараз, щоб рівень підготовки учнів був досить грунтовним та були охоплені усі найважливіші дисципліни.

Так як дана робота виконується на фізико-математичному факультеті, то проаналізувавши досить багато джерел, можна зробити висновок, що використання інформаційних технологій до сих пір не дуже розповсюджене, тому доцільно використати також різноманітні допоміжні комп’ютерні програми та застосунки.

Теорія рядів займає дуже важливе місце в математичному аналізі. Перші дослідження в теорії рядів були ще у роботах Ньютона і Лейбніца. Важливі результати з теорії рядів були одержані Ейлером, Гаусом, Коші та іншими математиками. [27, с.3]

Геометрична інтерпретація є вагомою складовою при вивченні геометричний об'єктів та властивостей цих об'єктів. У процесі вивчення курса математичного аналізу досить багато є геометричних інтерпретацій, але якщо взяти один із основних розділів курсу «Ряди», то можна побачити, що там геометричні об'єкти, образи членів рядів використовуються скоріше як виключення, тобто їх майже немає.

Можемо зробити висновок, що необхідно постійне оновлення вже існуючих та створення нових посібників для вивчення тем математичної науки, зокрема розділу «Числові ряди».

Протягом майже усього навчання у старшій школі учні зустрічають таке поняття як «ряди». Формування поняття «ряд» бере свій початок у 9 класі, тільки з назвою послідовності, але його використання йде далеко у майбутнє школярів, оскільки вивчення та використання рядів дозволяє, та значно полегшує, розв'язування задач вищих рівнів складності, як для учнів, так і для студентів вищих навчальних закладів.

Мета дослідження: Одержання і дослідження числових рядів за допомогою заданої геометричної моделі і комбінації рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$.

Об'єкт дослідження: система задач на комбінацію числових рядів.

Предмет дослідження: система задач на комбінацію числових рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ курсу математики профільної школи.

У відповідності до мети дослідження поставлено такі **завдання роботи:**

1. Проаналізувати відомі наукові джерела, пов'язані з темою роботи;
2. Використовуючи задану геометричну модель одержати і дослідити на збіжність числові ряди з точковою, лінійною, квадратурною та кубатурною інтерпретацією члена ряда;

3. Дослідити характер зростання частинних сум S_n одержаних рядів в залежності від зміни значень $n \in N$;
4. За результатами досліджень запропонувати добірку задач для проведення математичних олімпіад серед учнів ліцеїв;
5. Скласти добірку задач для використання при вивченні розділу «Числові ряди» в процесі підготовки вчителів математики та інформатики;
6. Дослідження виконувати з урахуванням міжпредметрих зв'язків: шкільного курсу математики, алгебри, аналітичної геометрії і математичного аналізу.

Апробація дослідження:

1. Опублікована статття у збірнику «Наукові записки молодих учених» № 10 Кропивницький: РВВ ЦДПУ ім В. Винниченка.
2. Опублікована стаття у збірнику наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти» Випуск 22, 2023, Суми.

Структура роботи обумовлена логікою дослідження і складається із вступу, трьох розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаної літератури, що налічує 28 джерел. Основний текст викладено на 65 сторінках. Повний обсяг роботи 97 сторінок.

РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ НАУКОВИХ ДЖЕРЕЛ ПОВ'ЯЗАНИХ З ТЕМОЮ РОБОТИ

1.1. Історія виникнення та дослідження числових рядів

Із наукових джерел відомо, що рядами захоплювались, їх досліджували та відкривали щось нове багато вчених, більш за все у історії розвитку рядів відомо про таких вчених та дослідників: Жан Лерон Д'Аламбер, Огюстен Луі Коші, Готфрід Вільгельм Лейбніц, Йоганн Бернулі, Карл Фрідріх Гаус.

Теорія нескінченних числових рядів є дуже цікавою частиною математики, яка має численні практичні застосування. Саме тому треба знати історію її розвитку. [19, с.117].

Математика бере свій початок розвитку ще у грецькій філософії, у сфері просторових відношень та обчислень, які були необхідні тогочасній людині для власних практичних потреб, таких як обчислювати щось, виміряти, дослідити. З історії математики дуже видно на скільки стрімко розвивалась наука, вона була необхідна усім.

Час розвитку математичної науки досяг і початку дослідження рядів.

Історія розвитку теорії числових рядів має дуже глибокі та давні історичні корені. За дослідженнями історії математики стверджується, що поняття математичної нескінченності виникло в давньогрецькій або еллінській культурі між VIII і VI століттями до нашої ери, як щось нове, еволюційний крок у мисленні, певна нова парадигма мислення.

Початок розвитку числових рядів тягнеться ще із часів античності, де навіть у той час стародавні люди цікавилися числовими рядами.

Дати відповідь на питання, коли вперше з’явилися ряди в математиці неможливо. Вже вавилонські математики вміли сумувати арифметичну і геометричну прогресії. Поняття збіжності числових рядів, мабуть, вперше з’явилось у листі Й. Бернуллі до Г. Лейбніца від 7 квітня 1713 р., де він використав вираз «розбіжний ряд». У відповідь у листі від 28 червня Лейбніц використав вираз «збіжний ряд» майже у сучасному сенсі. [11].

Поняття нескінченних сум відомо вченим з Давньої Греції. Вони застосовували «метод вичерпування» при обчислені площ фігур та поверхонь, об’ємів тіл, довжин кривих і т.п. При цьому вони розбивали фігуру або тіло (лінію) на зліченне число частин з відомими площами або об’ємами (довжинами) і потім знаходили суму цих величин. Складовою частиною цього методу було знаходження суми нескінченої множини доданків. [21]

Далі теорію рядів розглядали у дуже тісному взаємозв'язку із іншою теорією, це теорія наближенного наближення функцій у вигляді многочлену.

Вперше це зробив І. Ньютон (1642–1727). У 1676 р. у його листі до секретаря Лондонського Королівського Товариства з’явилася формула, яку ми знаємо як формулу бінома Ньютона. [21]

У ході розвитку цієї ідеї Брук Тейлор (1685 – 1731) – англійський математик, зумів довести, якщо будь-яка функція, що має у певній точці x_0 похідні усіх порядків, то можна підставити ряд.

Колін Маклорен (1698–1746) в роботі «Трактат о флюксіях» (1742) встановив, що степеневий ряд, що виражає аналітичну функцію, – єдиний, і це буде ряд Тейлора, породжений такою функцією. [21]

Загалом можна стверджувати, що ряди виникли у 18 столітті, але це було тільки як певний спосіб представлення функцій, які допускають нескінчене диференціювання. У той час функція, яка могла бути представлена певним рядом, ще не називалась саме сумою цього ряда. Тоді не було визначеності щодо поняття сума ряда, чи то числового, чи то функціонального. Але вже були спроби закріпити поняття сума ряду. На той час про збіжність ряду ще не говорили, про це задумались пізніше.

В формулюванні поняття суми збіжного ряду значну роль відіграв французький вчений О.Л. Коши (1789– 1857). Саме він заявив у 1826 р., що розбіжний ряд не має суми. Він також сформулював критерій збіжності рядів і достатню ознаку збіжності ряду, яку ми зазвичай використовуємо на практиці, як й інші достатні ознаки збіжності. В 1768 р. французький математик і філософ Ж. Л. Даламбер дослідив відношення наступного члена до попереднього в біноміальному ряді і показав, що якщо це відношення за модулем менше одиниці, то ряд збігається. Коши в 1821 р. довів теорему, яка узагальнила ознаку збіжності знакододатних рядів, яку тепер називають ознакою Даламбера. Згодом були доведені наступні ознааки: радикальний та інтегральний Коши, І. Л. Раабе (1801–1859), Е. Е. Куммера (1810–1893), Бертрана (1822– 1900), Гауса (1777–1855) [21].

У процесі розвитку теорії рядів виокремлюються два основних вектори. Перший напрямок полягає в обґрунтуванні операцій з нескінченними рядами, тоді як другий спрямований на розробку методів використання рядів для розв'язання математичних та практичних задач. Обидва напрямки прогресують паралельно, хоча на початковому етапі досягнення в першому напрямку були значно скромнішими, і лише з часом здобутки в другому напрямку почали досягатися з значними труднощами.

Вивчення теорії рядів є важливим завданням, оскільки ця концепція широко використовується як у теоретичних дослідженнях, так і при вирішенні різноманітних прикладних задач. Це важливо не лише для математики, а й для таких галузей науки, як хімія, фізика, астрономія, біологія, інженерія, економіка та інші.

У математиці теорія рядів використовується для дослідження різноманітних періодичних процесів, що зустрічаються в природі та техніці.

Необхідність сформулювати достатні умови збіжності усвідомлювали великі математики. Для додатних числових рядів (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ було сформульовано багато ознак збіжності. Ці ознаки збіжності базуються на порівнянні ряду (A) з різними стандартними рядами. Так у 1768 р. Ж. Даламбер сформулював таку ознаку на основі порівняння зі збіжним рядом, членами якого є члени геометричної прогресії. Він будує варіанту $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Якщо при достатньо великому n $(n > N)$ виконується нерівність $D_n \leq q$, де q – стале число меньше одиниці, то ряд збігається, а при $D_n \geq 1$ – розбігається. [19 с. 3]

1.2. Теоретичні відомості про числові ряди

Для того, щоб ефективно використовувати ряди в математиці необхідно знати основні положення теорії рядів: означення, теореми і приклади. [12, с. 13].

Означення 1.2.1. Якщо $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ - нескінченна числова послідовність, то вираз називається числовим рядом, а величини $u_1, u_2, \cdots$ - членами цього ряду. [11, с.5]

Означення 1.2.2. Символ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ - називають рядом, а величини a_n – членами ряду. Якщо величини a_n є числами, то ряд називають числовим. [1, с.6]

Якщо всі члени ряду є додатніми, то ряд називається знакододатнім. [11, с.5]

Означення 1.2.3. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають збіжним, якщо границя $S = \lim_{M \to \infty} \sum_{n=1}^{M} a_n$ послідовності частинних сум існує і є скінченною. Цю границю називають сумою ряду. [1, с.8]

Означення 1.2.4. Сумою перших n доданків певного числового ряду $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ називається n-ою частинною сумою ряду.

Позначається: S_n

Можна показати дане означення у такому вигляді:

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Означення 1.2.5. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають розбіжним, якщо границя $S = \lim\limits_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{M} a_n$ послідовності частинних сум є нескінченною або не існує взагалі. [1, с.8]

Приклад 1.2.1. Нехай $a_n = (-1)^{n+1}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ має частинні суми $S_1 = 1$, $S_2 = 1 - 1 = 0$, $S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$, $S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$, і т.д. Очевидно, послідовність 1, 0, 1, 0, … взагалі ніякої границі не має, ні скінченної, ані нескінченної. Отже ряд розбігається. [1, с.8]

Необхідність сформулювати достатні умови збіжності усвідомлювали великі математики. Для додатних числових рядів було сформульовано багато ознак збіжності. Ці ознаки базуються на порівнянні ряду з різними стандартними рядами. [12, с. 12]

Необхідна умова збіжності. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. [1, с.15]

Очевидно, обидві частинні суми мають однакову границю, яка дорівнює сумі S ряду, оскільки він збігається. Тоді здійснюючи граничний перехід при $n \to \infty$, отримуємо: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$, що і треба було довести. □ [1, с.15]

Розглянемо достатні ознаки збіжності для рядів.

Ознака порівняння. Нехай маємо два знакосталих ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2), при чому $a_n \le b_n$, для $N \ge n$. Тоді, якщо ряд (2) збігається, то збігається і ряд (1). Якщо ряд (1) розбігається, то розбігається і ряд (2). [11, с.6]

Ознака Д'Аламбера. Якщо для знакосталого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує скінченна або нескінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho \begin{cases} \rho < 1 & \text{ряд збігається} \\ \rho > 1 & \text{ряд розбігається} \\ \rho = 1 & \text{нічого про збіжність ряду сказати не можна} \end{cases}$$ [11, с.6]

Означення 1.2.6. Рядом геометричної прогресії називається такий ряд $a + b_1 q + b_1 q^2 + \cdots + b_1 q^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1}$.

Частинна сума цього ряду: $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. [Черней с.6]

Ряд геометричної прогресії збігається при $|q| < 1$ і розбігається, якщо $|q| \geq 1$. [27, с.7]

Розглянемо геометричний ряд (ряд геометричної прогресії) з першим членом $a \neq 0$ і знаменником q.

$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ [21, с.15].

Приклад. 1.2.2. Показати, що ряд $2^3 + 2^2 + 2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-3}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-3}}$ є збіжним.

Розв'язання

Запишемо заданий ряд у вигляді

$2^3 + 1 + 2^3 + \frac{1}{2} + \cdots + 2^3 \cdot \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 2^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, a = 2^3, q = \frac{1}{2}$.

Оскільки знаменник геометричної прогресії менший, ніж одиниця, то ряд є збіжним. [21, с.15-16]

Ознака Коші. Якщо для знакосталого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує скінченна або нескінченна границя [11, с.6]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho\begin{cases}\rho<1 & \text{то ряд збігається}\\ \rho>1 & \text{то ряд розбігається}\\ \rho=1 & \text{нічого про збіжність цього ряду сказати не можна}\end{cases}$$

Приклад 1.2.2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^{n-1}+n-1}$.

Розв'язання

Так як $a_n=\frac{2}{5^{n-1}+n-1}\leq\frac{2}{5^{n-1}}$, то $S_n=\frac{2}{1}+\frac{2}{6}+\frac{2}{27}+\cdots+\frac{2}{5^{n-1}+n-1}<\frac{2}{1}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5^2}+\cdots+\frac{2}{5^{n-1}}=2\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^{n-1}}\right)=2\frac{1\left(1-\frac{1}{5^n}\right)}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{5}\right)$; [27, с.8]

Висновки до розділу 1

У першому розділі було розглянуто і проаналізовано історія виникнення та дослідження числових рядів, а також, теоретичні відомості про числові ряди із наукових джерел.

Було висвітлено, що теорія нескінченних числових рядів є цікавою частиною математики, яка має численні практичні застосування. Розглянули, де бере свій початок математика, які знання мали тогочасні люди для власних потреб.

Також показано історію розвитку теорії числових рядів, що заглиблюється у давні часи. Історія рядів розпочинається із часів античності. З'ясували, що неможливо дати точну відповідь, коли з'явилися ряди.

З'ясували, що у математиці теорія рядів використовується для дослідження різноманітних періодичних процесів, що зустрічаються в природі та техніці.

Було висвітлено основні теоретичні відомості про числові ряди та їх основні елементи. Описані означення нескінченної числової послідовності, числового ряду, знакододатного ряду, збіжного та розбіжного ряду, а також, що є сумою ряду.

Показано методи дослідження рядів на збіжність: необхідна умова збіжності, ознака Д'Аламбера, ознака Коші, ознака порівняння та деякі приклади задач.

РОЗДІЛ 2. ГЕНЕРАЦІЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ВИБРАНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ І КОМБІНАЦІЇ РЯДІВ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$.

Розглянемо приклади геометричної інтерпретації членів числових рядів за допомогою рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ і квадрата зі стороною $a = 1$.

На рисунку 2.1 розглянемо квадрат $A_1A_2D_1C_1$ зі стороною $a = 1$.
Цей квадрат розіб'ємо на чотири рівних квадрата зі стороною $a_1 = \frac{1}{2}$. В кожному із цих квадратів впишемо квадрати зі сторонами, які вдвічі менші за сторонами попередніх квадратів. Сторони цих квадратів змінюються за законом геометричної прогресії зі знаменником $q = \frac{1}{2}$.

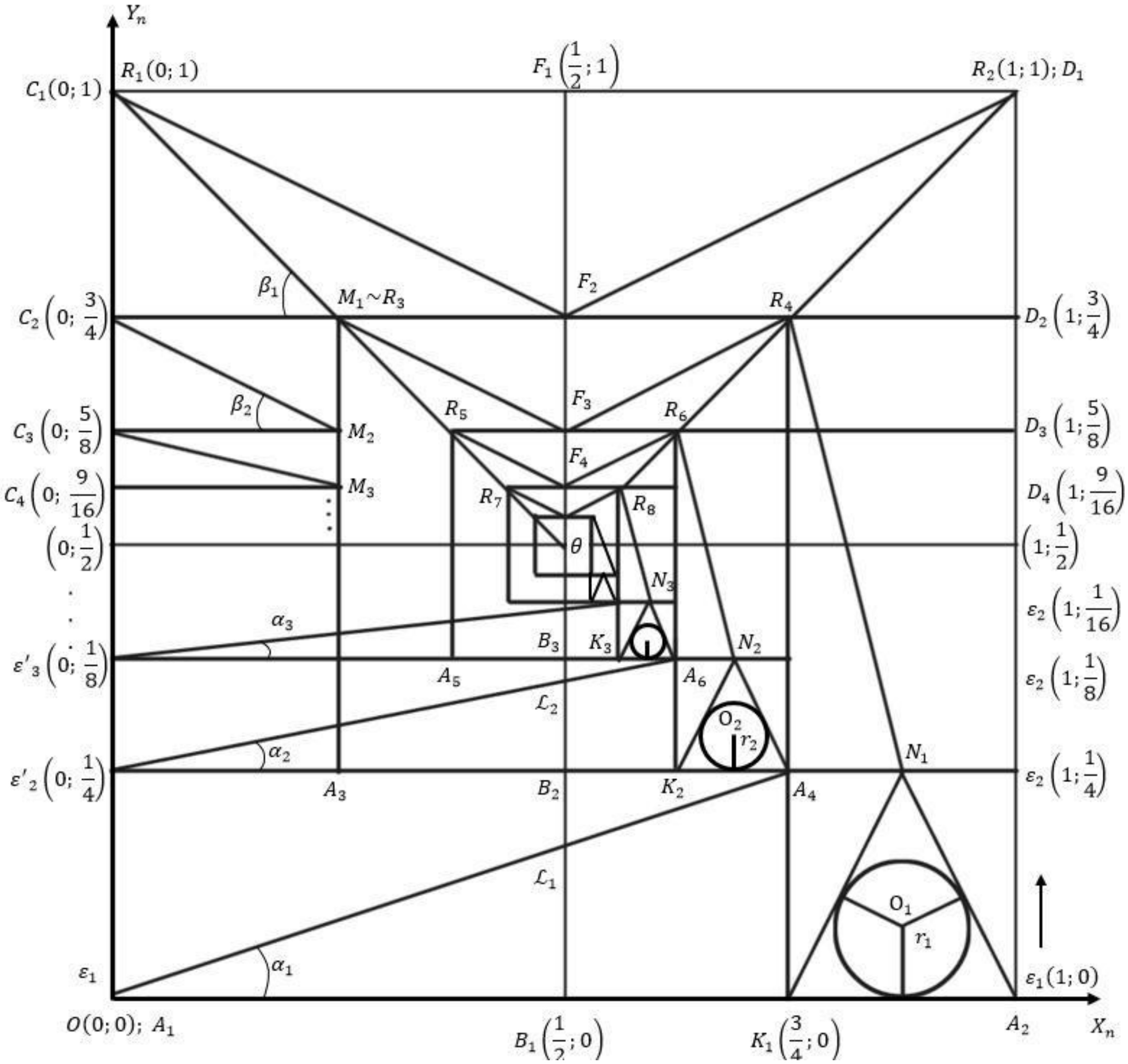


Рис. 2.1 Квадрат з параметром (стороною) $a = 1$

Числові ряди базуються на використанні геометричних образів (лінії, площі, об’єми), пов’язаних з послідовностями геометричних об’єктів, вписаних у квадрат з параметром $a = 1$, представленим на рис. 2.1.

На рисунку 1 візуально бачимо, що квадрат зі стороною $a = 1$, розбитий на чотири рівних квадрата зі стороною $a_1 = \frac{1}{2}$. В кожному із цих квадратів вписані квадрати зі сторонами, які вдвічі менші за сторонами попередніх квадратів. Тобто ми візуально спостерігаємо генерацію інших числових рядів.

Точки $C_n, D_n, \varepsilon_n, \varepsilon'_n$ розподілені по сторонам цих квадратів змінюються за законом геометричної прогресії зі знаменником $q = \frac{1}{2}$ і мають координати.

$C_n\left(0; \frac{2^{n-1}+1}{2^n}\right), D_n\left(0; \frac{2^{n-1}+1}{2^n}\right), \varepsilon_n\left(1^n; \frac{2^{n-1}-1}{2^n}\right),\ \varepsilon'_n\left(1^{n-1}; \frac{2^{n-1}-1}{2^n}\right)$

Тоді, за алгоритмом генерацією різних видів рядів, за координатами точок, ε_n і ε'_n знайдемо координати точки B_n, які обчислюються за формулою:

$x_n = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$;

$y_n = \frac{\frac{2^{n-1}-1}{2^n}+\frac{2^{n-1}-1}{2^n}}{2} = \frac{2\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2^n}}{2} = \frac{2^{n-1}-1}{2^n}$,

$B_n\left(\frac{1}{2}; \frac{2^{n-1}-1}{2^n}\right)$, що також можна побачити на рис. 1.

2.1. Ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$, члени яких пов'язані з точковою геометричною інтерпретацією.

Перша група задач на знаходження числових рядів точкової геометричної інтерпретації.

Задача 1. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. A_n.

Розв'язання

Точка A_n: якщо $n = 2k-1$, розподілена на діагоналі квадрата $A_1B_1\theta$, якщо $n = 2k$ розподілена на діагоналі квадрата $A_2B_2\theta$ і числові ряди їх координат пов'язані з нескінченною спадною геометричною прогресією. Тому координати точок відповідно:

$A_{2к-1}(\frac{2^n-1}{2^{n+1}}; \frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}})$, $A_{2к}(\frac{2^n+1}{2^{n+1}}; \frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}})$,

Ряди мають вигляд:

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n == \sum_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{2^n-1}{2^{n+1}} + \frac{2^n+1}{2^{n+1}})$.

$\sum_{n-1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}}$.

Задача 2. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т.т. B_n.

Розв'язання

Точка B_n розподілена на стороні квадрата $A_1B_1\theta.$ Числові ряди її координат пов'язані з нескінченною спадною геометричною прогресією.

Тому т. B_{2k-1} $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2^n})$,

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{2}$

$\sum_{n-1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Задача 3. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т.т. K_n.

Розв'язання

Точка K_n розподілена на прямій $K_1\theta$ квадрата $A_1B_1\theta,$ де K_1 середина сторони A_1B_1. Числові ряди її координат пов'язані з нескінченноюю спадною геометричною прогресією. Тому т. K_n $(\frac{1+2^n}{2^{n+1}}; \frac{2^n-1}{2^{n+1}})$.

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{2^{n+1}}$

$\sum_{n-1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}}$.

Задача 4. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т.т. C_n.

Розв'язання

Точка C_n розподілена на стороні квадрата $C_1F_1\theta,$ Числові ряди її координат пов'язані з нескінченною спадною геометричною прогресією.

Тому т. C_n $(0; \frac{2^n+1}{2^{n+1}})$.

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0^n = 0$.

Задача 5. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т.т. D_n.

Розв'язання

Точка D_n розподілена на стороні квадрата $D_1F_1\theta,$ Числові ряди її координат пов'язані з нескінченною спадною геометричною прогресією. Тому

т. D_n $(1^{п}; \frac{2^n-1}{2^{n-1}})$

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ = 1^n= 1+1+1+... = ∞.

Задача 6. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. ε_n.

Розв'язання

Точка $\mathcal{E}_n$ розподілена на стороні квадрата $A_2\mathcal{E}_1\theta.$ Числові ряди її координат пов'язані з нескінченною спадною геометричною прогресією. Тому

т.$\mathcal{E}_n(1^{п}; \frac{2^n-1}{2^{n+1}})$

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = 1^n$,

$\sum_{n-1}^{\infty} Y_n$= $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}}$.

Задача 7. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. ε'_n.

Розв'язання

Точка ε'_n розподілена на стороні квадрата ε'_1В$_1\theta.$ Числові ряди її координат пов'язані з нескінченною спадною геометричною прогресією.

Тому т.$\varepsilon'_n(0^{п}; \frac{2^n-1}{2^{n+1}})$

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = 0^n = 0$,

$\sum_{n-1}^{\infty} Y_n$= $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}}$.

Задача 8. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. M_n.

Розв'язання

Точка M_n розподілена на прямій, яка з'єднує т. M_1 з серединою сторони квадрата $C_1F_1\theta$, Числові ряди її координат пов'язані з нескінченною спадною геометричною прогресією. Тому т. $M_n\left(\left(\frac{1}{4}\right)1^{\text{п}};\frac{2^n+1}{2^{n+1}}\right)$.

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \left(\frac{1}{4}\right)1^n$,

$\sum_{n-1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{2^{n+1}}$.

Задача 9. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. F_n.

Розв'язання

Точка F_n розподілена на сторони квадрата $C_1F_1\theta$, Числові ряди її координат пов'язані з нескінченною спадною геометричною прогресією.

Тому т. $F_n\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)1^{\text{п}};\frac{2^{n-1}+1}{2^n}),\right)$,

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \left(\frac{1}{2}\right)1^n$ a, $\sum_{n-1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}+1}{2^n}$.

Задача 10. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. R_n.

Розв'язання

Точка R_n: якщо $n = 2k-1$, розподілена на діагоналі квадрата $R_1F_1\theta$, якщо $n = 2k$ розподілена на діагоналі квадрата $R_2F_1\theta$ і числові ряди їх координат пов'язані з нескінченною спадною геометричною прогресією. Тому координати точок відповідно

$R_{2k-1}\ (\frac{2^n-1}{2^{n+1}};\frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}})$, $R_{2k}\ (\frac{2^n+1}{2^{n+1}};\frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}})$,

Ряди мають вигляд:

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2^n-1}{2^{n+1}}+\frac{2^n+1}{2^{n+1}})$.

$\sum_{n-1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}}$.

Задача 11. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. N_n.

Розв'язання

Точка N_n є вершинами трикутників $C_n N_n A_{2n}$ і має координати $\left(\frac{2^n+3}{2^{n+1}}; \frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)$.Числові ряди її координат пов'язані з нескінченною спадною геометричною прогресією.

Ряди мають вигляд:

$\sum_{n-1}^{\infty} \mathrm{X}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3}{2^{n+1}}, \sum_{n-1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}}.$

Числові ряди перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності.

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2\cdot 2^n}\right) = \frac{1}{2}.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^n}\right) = \frac{1}{2}.$

В обох числових рядах не виконується необхідна ознака збіжності рядів так як $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, висновок: ряди розбіжні.

Задача 12. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. O_n.

Розглянемо малюнок детальніше:

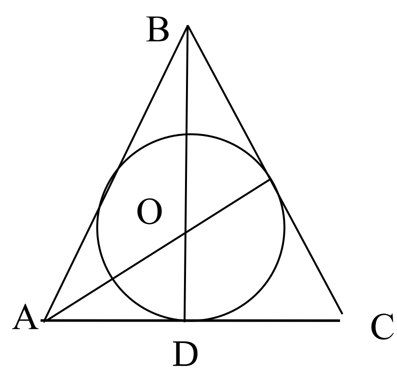


Рис. 2.2.1

Точка O_n є центр вписаних кіл в рівнобедрені трикутники $K_n N_n A_{2n},$ так як $\overline{|K_n N_n|} = \overline{|A_n N_n|}$. Знайдемо її координати. Так як точки O_n ділять в заданому відношенні λ бісектрису BD, її координати обчислюємо за формулою:

Координати O - центра кола вписаного в трикутник, яка ділить в заданому відношенні λ бісектрису BD, обчислюємо за формулою:

$$x_o = x_B + \lambda\, x_D;$$

$$y_o = y_B + \lambda\, y_D,$$

де $\lambda = \frac{|OB|}{|OD|}$.

$\frac{|OB|}{|OD|}$ знайдемо за властивістю бісектриси кута в трикутнику. Відомо, що центр O вписаного в трикутник Δ ABC кола лежить на перетину бісектрис BD та AO. Так як трикутник рівнобедрений, в якому |AC| = |BD| = a, то

BD також і медіана. AD = $\frac{1}{2}$AC, або AD = $\frac{a}{2}$. Розглянемо ΔABD, в якому AO бісектриса. За її властивістю $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|OB|}{|OD|}$.

Довжину |AB|, находимо за теоремою Піфагора:

$|AB| = \sqrt{|BD|^2 + |AD|^2}$; $|AB| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Отже $\frac{|OB|}{|OD|} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{5}$, $\lambda = \sqrt{5}$.

Знайдемо координати O - центра кола вписаного в трикутник.

$$x_o = x_B + \lambda\, x_D \text{ ; а } y_o = y_B + \lambda\, y_D,$$

Відомо, що ці координати $B\left(\frac{2^{n+1}+3}{2^{n+2}}; \frac{2^{n-1}-1}{2^n}\right)$ і $D\left(\frac{2^{n+1}+3}{2^{n+2}}; \frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)$ за малюнком до задачі.

$$x_o = \frac{2^{n+1}+3}{2^{n+2}} + \sqrt{5}\,\frac{2^{n+1}+3}{2^{n+2}} = \frac{(2^{n+1}+3)(1+\sqrt{5})}{2^{n+2}}.$$

$$y_o = \frac{2^{n-1}-1}{2^n} + \sqrt{5}\,\frac{2^n-1}{2^{n+1}} = \frac{(2^n-3)(1+\sqrt{5})}{2^{n+1}}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})2^{n+1}}$.

2.2. Ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$, члени яких пов'язані з лінійною геометричною інтерпретацією.

Друга група задач спрямована на знаходження числових рядів лінійної геометричної інтерпретації.

Задача 1. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_n A_{n+1}}|$.

Розв'язання

Довжина відрізка $\left|\overline{A_n A_{n+1}}\right|= \left|\overline{A_{2n-1}A_{2n}}\right| + \left|\overline{A_{2n}A_{2n+1}}\right|$ (1),

де довжина відрізка$\left|\overline{A_{2n-1}A_{2n}}\right| = \frac{1}{2^n}$ (2), як довжина сторін вкладених квадратів.

Довжину відрізка $\left|\overline{A_2 A_3}\right|$знайдемо з прямокутного трикутника $A_2A_3\mathcal{E}_2$. За теоремою Піфагора.

$\left|\overline{A_2 A_3}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{10}{16}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$,

Аналогічно знайдемо $\left|\overline{A_4 A_5}\right|=\frac{\sqrt{10}}{8}$, $\left|\overline{A_6 A_7}\right|=\frac{\sqrt{10}}{16}$... Звідси $\left|\overline{A_{2n} A_{2n+1}}\right|=\frac{\sqrt{10}}{2^{n+1}}$ (3).

Отже, підставляючи значення з (2) та (3) виразів у (1), отримуємо, що

$\left|\overline{A_n A_{n+1}}\right| = \frac{1}{2^n}+\frac{\sqrt{10}}{2^{n+1}}+\frac{4+\sqrt{10}}{2^{n+1}}$

Сума шуканого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4+\sqrt{10}}{2^{n+1}}\right)$

Задача 2. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{B_n B_{n+1}}|$.

Розв'язання

Візуально можна побачити, що довжини відрізків $|\overline{B_n B_{n+1}}|$ складають нескінченну геометричну прогресію з $a_1 = \frac{1}{4}$, і $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$. Тому довжина відрізка $|B_n B_{n+1}| = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Сума шуканого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$.

Задача 3. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{C_n C_{n+1}}|$.

Розв'язання

Точки C_n, C_{n+1} розподілені на половині сторони квадрата зі стороною $\alpha = 1$. Числові ряди їх координат пов'язані з нескінченною спадною геометричною прогресією. Тому, довжина відрізка $\left|\overline{\mathrm{C_n C_{n+1}}}\right| = \frac{1}{2^{\mathrm{n+1}}}$.

Сума шуканого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\mathrm{n+1}}}\right)$.

Задача 4. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{D_n D_{n+1}}|$.

Розв'язання

Точки D_n, D_{n+1}розподілені на половині сторони квадрата зі стороною $\alpha = 1$. Числові ряди їх координат пов'язані з нескінченною спадною геометричною прогресією. Тому, довжина відрізка $\left|\overline{\mathrm{D_n D_{n+1}}}\right| = \frac{1}{2^{\mathrm{n+1}}}$.

Сума шуканого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Задача 5. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{\mathcal{E}_n \mathcal{E}_{n+1}}|$.

Розв'язання

Точки $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}_{n+1}$ розподілені на половині сторони квадрата зі стороною $\alpha = 1$. Числові ряди їх координат пов'язані з нескінченною спадною геометричною прогресією. Тому, довжина відрізка $\left|\overline{\mathcal{E}_{\mathrm{n}} \mathcal{E}_{\mathrm{n+1}}}\right| = \frac{1}{2^{\mathrm{n+1}}}$.

Сума шуканого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Задача 6. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{K_n N_n}|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{K_n N_n}\right|$за формулою обчислення відстані між двома точками:

$d = \sqrt{(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^2 + (\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1)^2}$, де $A_1(x_1, y_1)$ і $A_2(x_2, y_2)$ [1]

$K_n\left(\frac{1+2^n}{2^{n+1}}; \frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)$, $N_n\left(\frac{2^n+3}{2^{n+1}}; \frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)$. Тоді відстань між точками:

$\left|\overline{K_n N_n}\right| = \sqrt{\left(\frac{2^n+3}{2^{n+1}} - \frac{1+2^n}{2^{n+1}}\right)^2 + \left(\frac{2^n-1}{2^{n+1}} - \frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2^n+3}{2^{n+1}} - \frac{1+2^n}{2^{n+1}}\right)^2} = \left|\frac{2^n+3}{2^{n+1}} - \frac{1+2^n}{2^{n+1}}\right| = \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$.

Сума шуканого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Задача 7. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{K_n A_{2n}}|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{K_n \mathrm{A}_{2n}}\right|$ за формулою обчислення відстані між двома точками:

$d=\sqrt{(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1)^2+(\mathrm{y}_2-\mathrm{y}_1)^2}$, де $A_1(x_1,y_1)$ і $A_2(x_2,y_2)$ [1]

$K_n\left(\frac{1+2^n}{2^{n+1}};\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)$, $\mathrm{A}_{2n}\left(\frac{2^n+1}{2^{n+1}};\frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}}\right)$. Тоді відстань між точками:

$\left|\overline{K_n \mathrm{A}_{2n}}\right|=\sqrt{\left(\frac{2^n+1}{2^{n+1}}-\frac{1+2^n}{2^{n+1}}\right)^2+\left(\frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}}-\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}}-\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)^2}=\left|\frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}}-\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right|=\frac{2^n+1}{2^{n+1}}$.

Сума шуканого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n+1}{2^{n+1}}\right)$.

Задача 8. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{C_{n+1} M_n}|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{\mathrm{C}_{n+1} \mathrm{M}_n}\right|$ за формулою обчислення відстані між двома точками:

$d=\sqrt{(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1)^2+(\mathrm{y}_2-\mathrm{y}_1)^2}$, де де $A_1(x_1,y_1)$ і $A_2(x_2,y_2)$ [1]

$\mathrm{C}_{n+1}\left(0;\frac{2^n+1}{2^{n+1}}\right)$, $\mathrm{M}_n\left(\frac{1}{4};\frac{2^n+1}{2^{n+1}}\right)$. Тоді відстань між точками:

$\left|\overline{\mathrm{C}_{n+1} \mathrm{M}_n}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{4}-0\right)^2+\left(\frac{2^n+1}{2^{n+1}}-\frac{2^n+1}{2^{n+1}}\right)^2}=\frac{1}{4}$.

Сума шуканого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{4}$.

Задача 9. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{\varepsilon'_n \mathrm{A}_{2n+2}}\right|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{\varepsilon'_n \mathrm{A}_{2n+2}}\right|$за формулою обчислення відстані між двома точками:

$d = \sqrt{(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^2 + (\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1)^2}$, де $A_1(x_1, y_1)$ і $A_2(x_2, y_2)$ [1]

$\varepsilon'_{\mathrm{n}}(0; \frac{2^n-1}{2^{n+1}})$, $\mathrm{A}_{2\mathrm{n}+2}\left(\frac{2^n+1}{2^{n+1}}; \frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)$. Тоді відстань між точками:

$$\left|\overline{\varepsilon'_n \mathrm{A}_{2n+2}}\right| = \sqrt{\left(\frac{2^n+1}{2^{n+1}} - 0\right)^2 + \left(\frac{2^n-1}{2^{n+1}} - \frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2^n+1}{2^{n+1}}\right)^2 + 0} = \frac{2^n+1}{2^{n+1}}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$.

Задача 10. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{K_n \mathrm{A}_{2n}}|$.

Розв'язання

З рисунку видно, що довжина відрізків$\left|\overline{K_1 A_2}\right| = \frac{1}{4}$, $\left|\overline{K_2 A_4}\right| = \frac{1}{8}$, $\left|\overline{K_3 A_6}\right| = \frac{1}{16}$, ... $\left|\overline{K_n A_{2n}}\right| = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Числовий шуканий ряд має вигляд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$.

Задача 11. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{R_n R_{n+1}}|$.

Розв'язання

Відрізки $R_n R_{n+1}$ належать діагоналі $R_1 \theta$ квадрата $R_1 F_1 \theta$ й довжини їх складають геометричну прогресію. Довжина відрізка $\left|\overline{R_n R_{n+1}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$, тоді $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ - шуканий ряд.

Задача 12. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{R_{2n} R_{2n+2}}|$.

Розв'язання

Відрізки $R_{2n} R_{2n+2}$належать діагоналі $R_2 \theta$ квадрата $R_2 F_1 \theta$ й довжини їх складають геометричну прогресію. Довжина відрізка $|R_{2n} R_{2n+2}| = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$, тоді $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ - шуканий ряд.

Задача 13. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{R_{2n} F_{n+1}}|$.

Розв'язання

Довжину відрізка $\left|\overline{R_2 \mathrm{F}_2}\right|$знайдемо з прямокутного трикутника $R_2 F_1 F_2$.

За теоремою Піфагора.

$\left|\overline{R_2\mathrm{F}_2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{5}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4},$

Аналогічно знайдемо $\left|\overline{R_4\mathrm{F}_3}\right|=\frac{\sqrt{5}}{8}$, $\left|\overline{R_6\mathrm{F}_4}\right|=\frac{\sqrt{5}}{16}$... Звідси $\left|\overline{R_{2n}\mathrm{F}_{n+1}}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}$.

Сума шуканого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}$.

Задача 14. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{N_nN_{n+1}}\right|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{N_nN_{n+1}}\right|$за формулою обчислення відстані між двома точками:

$d=\sqrt{(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1)^2+(\mathrm{y}_2-\mathrm{y}_1)^2}$, де $A_1(x_1,y_1)$ і $A_2(x_2,y_2)$ [1]

$N_{\mathrm{n}}\left(\frac{2^{n+1}+3}{2^{n+2}};\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)$, $N_{\mathrm{n}+1}\left(\frac{2^{n+2}+3}{2^{n+3}};\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}}\right)$. Тоді відстань між точками:

$|N_nN_{n+1}|=\sqrt{\left(\frac{2^{n+2}+3}{2^{n+3}}-\frac{2^{n+1}+3}{2^{n+2}}\right)^2+\left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}}-\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{2^{2n+6}}+\frac{1}{2^{2n+4}}}=\sqrt{\frac{9+4}{2^{2n+6}}}=\frac{\sqrt{13}}{2^{n+3}}.$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{13}}{2^{n+3}}$.

Задача 15. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{N_n\mathrm{R}_{2n+2}}\right|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{N_n\mathrm{R}_{2n+2}}\right|$за формулою обчислення відстані між двома точками:

$d=\sqrt{(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1)^2+(\mathrm{y}_2-\mathrm{y}_1)^2}$, де $A_1(x_1,y_1)$ і $A_2(x_2,y_2)$ [1]

$N_{\mathrm{n}}\left(\frac{2^{n+1}+3}{2^{n+2}};\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)$, $\mathrm{R}_{2\mathrm{n}+2}\left(\frac{2^n+1}{2^{n+1}};\frac{2^n+1}{2^{n+1}}\right)$. Тоді відстань між точками:

$\left|\overline{N_n\mathrm{R}_{2n+2}}\right|=\sqrt{\left(\frac{2^n+1}{2^{n+1}}-\frac{2^{n+1}+3}{2^{n+2}}\right)^2+\left(\frac{2^n+1}{2^{n+1}}-\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2^{n+1}+2-2^{n+1}-3}{2^{n+2}}\right)^2+\left(\frac{2}{2^{n+1}}\right)^2}=$
$\sqrt{\frac{1}{2^{2(n+1)}}+\frac{4}{2^{2(n+1)}}}=\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}.$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}$.

Задача 16. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{\mathrm{R}_{2n-1}F_{n+1}}\right|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{\mathrm{R}_{2n-1}F_{n+1}}\right|$за формулою обчислення відстані між двома точками:

$d=\sqrt{(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1)^2+(\mathrm{y}_2-\mathrm{y}_1)^2}$, де $A_1(x_1,y_1)$ і $A_2(x_2,y_2)$ [1]

$R_{2\mathrm{n}-1}\left(\frac{2^n-1}{2^{n+1}};\frac{2^n+1}{2^{n+1}}\right)$, $\mathrm{F}_{\mathrm{n}+1}\left(\frac{1}{2};\frac{2^n+1}{2^{n+1}}\right)$. Тоді відстань між точками:

$\left|\overline{N_n\mathrm{R}_{2n+2}}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)^2+\left(\frac{2^n+1}{2^{n+1}}-\frac{2^n+1}{2^{n+1}}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2^n-2^n+1}{2^{n+1}}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2^{2(n+1)}}}=\frac{1}{2^{n+1}}.$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$.

Задача 17. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_{2n-1}F_n}\right|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка$\left|\overline{A_{2n-1}F_n}\right|$за формулою обчислення відстані між двома точками:

$d=\sqrt{(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1)^2+(\mathrm{y}_2-\mathrm{y}_1)^2}$, де $A_1(x_1,y_1)$ і $A_2(x_2,y_2)$ [1]

$A_{2\mathrm{n}-1}\left(\frac{2^n-1}{2^{n+1}};\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)$, $\mathrm{F}_{\mathrm{n}}\left(\frac{1}{2};\frac{2^{n-1}+1}{2^n}\right)$.

Тоді відстань між точками:

$\left|\overline{A_{2n-1}F_n}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)^2+\left(\frac{2^{n-1}+1}{2^n}-\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2^n-2^n+1}{2^{n+1}}\right)^2+\left(\frac{2^n+1-2^n+1}{2^{n+1}}\right)^2}=$
$\sqrt{\frac{1}{2^{2(n+1)}}+\frac{4}{2^{2(n+1)}}}=\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}.$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}$.

Задача 18. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_{2n-1}F_n}\right|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка$\left|\overline{A_{2n-1}F_n}\right|$за формулою обчислення відстані між двома точками:

$d=\sqrt{(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1)^2+(\mathrm{y}_2-\mathrm{y}_1)^2}$, де $A_1(x_1,y_1)$ і $A_2(x_2,y_2)$ [1]

$A_{2\mathrm{n}-1}\left(\frac{2^n-1}{2^{n+1}};\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)$, $\mathrm{F}_1\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Тоді відстань між точками:

$$\left|\overline{A_{2n-1}F_n}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)^2+\left(1-\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2^n-2^n+1}{2^{n+1}}\right)^2+\left(\frac{2^{n+1}-2^n+1}{2^{n+1}}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2^{2(n+1)}}+\frac{(2^n+1)^2}{2^{2(n+1)}}} = \frac{\sqrt{1+(2^n+1)^2}}{2^{n+1}}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1+(2^n+1)^2}}{2^{n+1}}$.

Задача 19. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{F_nF_{n+1}}\right|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{F_nF_{n+1}}\right|$:за формулою обчислення відстані між двома точками:

$d=\sqrt{(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1)^2+(\mathrm{y}_2-\mathrm{y}_1)^2}$, де $A_1(x_1,y_1)$ і $A_2(x_2,y_2)$ [1]

$\mathrm{F_n}\left(\frac{1}{2};\frac{2^{n-1}+1}{2^n}\right)$, $\mathrm{F_{n+1}}\left(\frac{1}{2};\frac{2^n+1}{2^{n+1}}\right)$.

Тоді відстань між точками:

$$\left|\overline{F_n\mathrm{F}_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2^n+1}{2^{n+1}}-\frac{2^{n-1}+1}{2^{n+1}}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2^n}{2^{n+1}}\right)^2} = \left|-\frac{2^n}{2^{n+1}}\right| = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}.$$

Шукана сума ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

Задача 20. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_1\mathrm{N}_{n+1}}\right|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{A_1\mathrm{N}_{n+1}}\right|$: за формулою обчислення відстані між двома точками:

$d=\sqrt{(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1)^2+(\mathrm{y}_2-\mathrm{y}_1)^2}$, де $A_1(x_1,y_1)$ і $A_2(x_2,y_2)$ [1]

$\mathrm{A}_1(0;0)$, $N_{\mathrm{n}+1}\left(\frac{2^{n+2}+3}{2^{n+3}};\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}}\right)$.

Тоді відстань між точками:

$$|\overline{A_1 \mathrm{N}_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{2^{n+2}+3}{2^{n+3}} - 0\right)^2 + \left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2^{n+2}+3}{2^{n+3}}\right)^2 + \left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{(2^{n+2}+3)^2}{2^{2n+6}} + \frac{(2^{n+1}-1)^2}{2^{2n+4}}} = \sqrt{\frac{2^{2n+4}+6\cdot 2^{n+2}+9+4\cdot 2^{2n+2}-8\cdot 2^{n+1}+4}{2^{2n+6}}} = \sqrt{\frac{8\cdot 2^{2n+4}+4\cdot 2^{n+3}+13}{2^{2n+6}}} =$$

$$\sqrt{\frac{4\cdot 2^{2n+5}+2^{n+5}+13}{2^{2n+6}}}.$$

Шукана сума ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{4\cdot 2^{2n+5}+2^{n+5}+13}{2^{2n+6}}}$.

Задача 21. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$.

Розв'язання

Знайдемо r_n за формулою радіуса вписаного кола в рівнобедрений трикутник:

$r = \frac{ah}{a+\sqrt{4h^2+a^2}}$, де a- основа, h- висота до цієї основи.

$a : \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^{n+1}}$. Тоді $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$.

h: $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^{n+1}}$. Тоді $h_n = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Підставимо значення a_n і h_n в формулу значення радіуса вписаного кола в рівнобедрений трикутник.

$$r_n = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^{n+1}}+\sqrt{4\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{2^{2n+2}}}{\frac{1}{2^{n+1}}+\sqrt{5\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{2^{2n+2}}}{\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}} = \frac{\frac{1}{2^{2n+2}}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2^{n+1}}} = \frac{1}{(1+\sqrt{5})2^{n+1}}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{5})2^{n+1}}$.

Задача 22. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{r_n\, r_{n+1}}|$.

Розв'язання

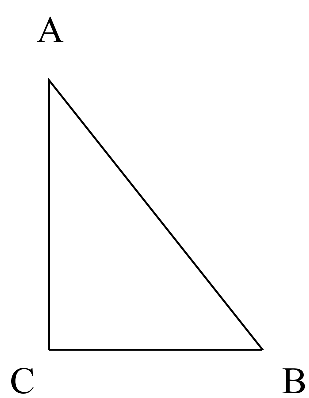
В нашому випадку неможливо опустити перпендикуляри з r_n на r_{n+1}, і навпаки, тому для знаходження $|\overline{r_n\, r_{n+1}}|$ використаємо формулу мінімальної відстані між кінцями відрізків:

$\min = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$, де $(x_1; y_1)$- координати одного з кінців першого відрізка, а $(x_3; y_3)$- координати одного з кінців другого відрізка.

Одна з кінців радіусів r_n і r_{n+1} є центр вписаного кола в рівнобедрений трикутник, а друга є середина його основи. Координати середини основи трикутників з r_{n+1}

радіусом $\left(\frac{2^{n+2}+1}{2^{n+3}};\ \frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)$.

Розглянемо прямокутний трикутник, дві вершини якого з'єднують найближчі кінці сусідніх радіусів, третя вершина знаходиться на перетину двох перпендикулярів проведених з цих вершин, паралельно висям координатної площини.



Вершина A, точка дотику основи трикутника з колом радіусом r_{n+1},

B – центр кола r_n, C – точка перетину двох перпендикулярів проведених з вершин A і B.

Відрізок $|\overline{\mathrm{AC}}| = \frac{5-\sqrt{5}}{2^{\mathrm{n}+3}}$, $|\overline{\mathrm{CB}}| = \frac{3}{2^{\mathrm{n}+3}}$.

За теоремою Піфагора знайдемо $|\overline{\mathrm{AB}}| = \sqrt{|\overline{\mathrm{AC}}|^2 + |\overline{\mathrm{CB}}|^2}$.

$$|\overline{\mathrm{AB}}| = \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2^{\mathrm{n}+3}}\right)^2 + \left(\frac{3}{2^{\mathrm{n}+3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{\left(5-\sqrt{5}\right)^2+9}}{2^{\mathrm{n}+3}} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}+5+9}}{2^{\mathrm{n}+3}} = \frac{\sqrt{39+10\sqrt{5}}}{2^{\mathrm{n}+3}}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{39+10\sqrt{5}}}{2^{\mathrm{n}+3}}$.

Задача 23. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |O_n O_{n+1}|$.

Знайдемо довжину відрізка $|\overline{O_n O_{n+1}}|$за формулою обчислення відстані між двома точками:

$d = \sqrt{(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^2 + (\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1)^2}$, де $A_1(x_1, y_1)$ і $A_2(x_2, y_2)$ [1]

$$O_n\left((1+\sqrt{5}) + \frac{3(1+\sqrt{5})}{2^{n+2}}; \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) - \frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2^{n+1}}\right)$$

$O_{n+1}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)\ +\ \frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2^{n+3}};\ \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)-\frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2^{n+2}}\right)$. Тоді відстань між

точками: $\left|\overline{O_nO_{n+1}}\right| =$

$$\sqrt{\left(\left(1+\sqrt{5}\right)\ +\ \frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2^{n+3}}-\left(1+\sqrt{5}\right)-\ \frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2^{n+2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)-\frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2^{n+2}}-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)+\frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2^{n+1}}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2^{n+3}}-\frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2^{n+2}}\right)^2+\left(-\frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2^{n+2}}+\frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2^{n+1}}\right)^2} =$$

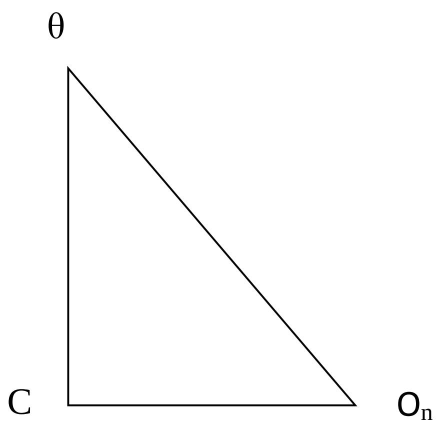
$$\sqrt{\left(\frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)-6\left(1+\sqrt{5}\right)}{2^{n+3}}\right)^2+\left(\frac{6\left(1+\sqrt{5}\right)-3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2^{n+2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2^{n+3}}\right)^2+\left(\frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2^{n+2}}\right)^2} = \frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{2^{n+2}}\sqrt{\frac{1}{4}+1} =$$

$\frac{3\sqrt{5}+15}{2^{n+3}}$.

Сума шуканого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\sqrt{5}+15}{2^{n+3}}\right)$.

Задача 24. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{O_n\theta}\right|$.

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{O_n\theta}\right|$ з прямокутного трикутника, дві вершини якого O_n і θ, третя вершина C знаходиться на перетину двох перпендикулярів проведених з цих вершин, паралельно висям координатної площини.



Відрізок $|\overline{CO_n}| = \frac{3}{2^{n+2}}$. $\left|\overline{C\theta}\right| = \frac{1+2\sqrt{5}}{2^{n+1}\left(1+\sqrt{5}\right)}$

За теоремою Піфагора знайдемо $\left|\overline{O_n\theta}\right| =$

$$\sqrt{|\overline{CO_n}|^2+\left|\overline{C\theta}\right|^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2^{n+2}}\right)^2+\left(\frac{1+2\sqrt{5}}{2^{n+1}\left(1+\sqrt{5}\right)}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{9}{2^{2n+4}}+\left(\frac{\left(1+2\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}{2^{n+3}}\right)^2} =$$

$$=\sqrt{\frac{9}{2^{2n+4}}+\frac{\left(1-\sqrt{5}+2\sqrt{5}-10\right)^2}{2^{2n+6}}} = \frac{1}{2^{n+3}}\sqrt{36+\left(\sqrt{5}-9\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{36+5-18\sqrt{5}+81}}{2^{n+3}} = \frac{\sqrt{122-18\sqrt{5}}}{2^{n+3}}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{122-18\sqrt{5}}}{2^{n+3}}$.

Задача 25. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{N_n\theta}\right|$.

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{N_n\theta}\right|$ з прямокутного трикутника $N_nB_{n+1}\theta$, де $|\overline{B_{n+1}N_n}| = \frac{3}{2^{n+2}}$, $\left|\overline{B_{n+1}\theta}\right| = \frac{1}{2^{n+1}}$.

За теоремою Піфагора знайдемо $\left|\overline{N_n\theta}\right| = \sqrt{|\overline{B_{n+1}N_n}|^2 + \left|\overline{B_{n+1}\theta}\right|^2}$.

$\left|\overline{N_n\theta}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2^{n+2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2^{2n+4}} + \frac{1}{2^{2n+2}}} = \frac{\sqrt{13}}{2^{n+2}}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{13}}{2^{n+2}}$.

Перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності ряду.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_{\text{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{13}}{2^{n+2}} = 0$, отже числовий ряд збіжний.

Задача 26. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{R_nR_{n+1}}|$.

Розв'язання

Довжина відрізка $\left|\overline{R_nR_{n+1}}\right| = \left|\overline{R_{2n-1}R_{2n}}\right| + \left|\overline{R_{2n}R_{2n+1}}\right|(1)$,

де довжина відрізка $\left|\overline{R_{2n-1}R_{2n}}\right| = \frac{1}{2^n}\,(2)$, як довжина сторін вкладених квадратів.

Довжину відрізка $\left|\overline{R_2\mathrm{R}_3}\right|$знайдемо з прямокутного трикутника $\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3D_2$. За теоремою Піфагора.

$\left|\overline{R_2\mathrm{R}_3}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$,

Аналогічно знайдемо $\left|\overline{R_4\mathrm{R}_5}\right| = \frac{\sqrt{10}}{8}$, $\left|\overline{R_6\mathrm{R}_7}\right| = \frac{\sqrt{10}}{16}$... Звідси $\left|\overline{R_{2n}\mathrm{R}_{2n+1}}\right| = \frac{\sqrt{10}}{2^{n+1}}\,(3)$.

Отже, підставляючи значення з (2) та (3) виразів у (1), отримуємо, що $\left|\overline{R_nR_{n+1}}\right| = \frac{1}{2^n} + \frac{\sqrt{10}}{2^{n+1}} = \frac{4+\sqrt{10}}{2^{n+1}}$.

Сума шуканого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4+\sqrt{10}}{2^{n+1}}\right)$.

2.3. Ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$, члени яких пов'язані з квадратурною геометричною інтерпретацією.

Третя група задач спрямована на знаходження числових рядів квадратної геометричної інтерпретації.

Задача 1. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta K_n A_{2n} N_n}\right|$.

Розв'язання

$\left|S_{\Delta K_n A_{2n} N_n}\right|$ знайдемо за формулою площі трикутника:

S = $\frac{1}{2}ah$, де a- довжина основи, h - довжина висоти.

Розглянемо $\Delta K_n A_{2n} N_n$, де його основа $\left|\overline{K_n A_{2n}}\right| = \frac{1}{2^{n+1}}$, висота $h = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Отже $\left|S_{\Delta K_n A_{2n} N_n}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+3}}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+3}}$.

Задача 2. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta K_n N_n A_{2n+2}}\right|$.

Розв'язання

$\left|S_{\Delta K_n N_n A_{2n+2}}\right|$ знайдемо за формулою площі трикутника:

S = $\frac{1}{2}ah$, де a- довжина основи, h - довжина висоти.

Розглянемо $\Delta K_n N_n A_{2n+2}$, де його основа $\left|\overline{A_{2n+2} N_n}\right| = \frac{1}{2^{n+2}}$,

висота $\left|\overline{K_n A_{2n}}\right| = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Отже $\left|S_{\Delta K_n N_n A_{2n+2}}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n+2}}\cdot\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{2n+4}}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+4}}$.

Задача 3. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta {\varepsilon'}_n K_n K_{n+2}}\right|$.

Розв'язання

$\left|S_{\Delta {\varepsilon'}_n K_n K_{n+2}}\right|$ знайдемо за формулою площі трикутника:

S = $\frac{1}{2}ah$, де a- довжина основи, h - довжина висоти.

В трикутнику $\varepsilon'_n K_n K_{n+2}$, де $a = \frac{1+2^n}{2^{n+1}}$, $h = \frac{3}{2^{n+2}}$.

$\left|S_{\Delta N_n A_{2n+2} R_{2n+2}}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{3}{2^{n+2}} = \frac{3(1+2^n)}{2^{2n+4}}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1+2^n)}{2^{2n+4}}$..

Задача 4. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta N_n A_{2n+2} R_{2n+2}}\right|$.

Розв'язання

$\left|S_{\Delta N_n A_{2n+2} R_{2n+2}}\right|$знайдемо за формулою площі трикутника:

S = $\frac{1}{2}ah$, де a- довжина основи, h - довжина висоти.

В трикутнику $N_n A_{2n+2} R_{2n+2}$, де $a = \frac{1}{2^{n+2}}$, $h = \frac{1}{2^n}$.

$\left|S_{\Delta N_n A_{2n+2} R_{2n+2}}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2n+3}}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$.

Цей числовий ряд представляє нескінчену геометричну прогресію $\frac{1}{2^5}, \frac{1}{2^7}, \frac{1}{2^9}$ ...

з $q = \frac{1}{4} < 1$, який збіжний.

Задача 5. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta R_{2n-1}\, R_{2n+1} F_{n+1}}\right|$.

Знайдемо $\left|S_{\Delta R_{2n-1}\, R_{2n+1} F_{n+1}}\right|$ за формулою площі трикутника:

S = $\frac{1}{2}ah$, де a- довжина основи, h- довжина висоти.

В трикутнику $R_{2n-1}\, R_{2n+1} F_{n+1}$, де a=$\frac{1}{2^{n+1}}$, h=$\frac{1}{2^{n+1}}$.

Отже $\left|S_{\Delta R_{2n-1}\, R_{2n+1} F_{n+1}}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{2n+3}}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$.

Цей числовий ряд представляє нескінчену геометричну прогресію $\frac{1}{2^5}, \frac{1}{2^7}, \frac{1}{2^9}$ ...

де $q = \frac{1}{4} < 1$, який збіжний.

Задача 6. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta R_{2n-1}\, F_{n+1} F_n}\right|$.

Знайдемо $\left|S_{\Delta R_{2n-1}\, F_{n+1} F_n}\right|$ за формулою площі прямокутного трикутника:

$S = \frac{1}{2}ah$, де a- перший катет, b- другий катет.

В трикутнику $R_{2n-1}\ F_{n+1}F_n$, де a=$\frac{1}{2^n}$, b=$\frac{1}{2^{n+1}}$.

Отже $\left|S_{\Delta R_{2n-1}\ F_{n+1}F_n}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{2n+2}}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+2}}$.

Цей числовий ряд представляє нескінчену геометричну прогресію $\frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^6}, \frac{1}{2^8} \dots$ де $q = \frac{1}{4} < 1$, і є збіжний.

Задача 7. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta C_{n+1}\ M_n C_{n+2}}\right|$.

Знайдемо $\left|S_{\Delta C_{n+1}\ M_n C_{n+2}}\right|$ за формулою площі прямокутного трикутника:

$S = \frac{1}{2}ah$, де a- перший катет, b- другий катет.

В трикутнику $C_{n+1}\ M_n C_{n+2}$, де a=$\frac{1}{4}$, b=$\frac{1}{2^{n+2}}$.

Отже $\left|S_{\Delta R_{2n-1}\ F_{n+1}F_n}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^{n+5}}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+5}}$.

Цей числовий ряд представляє нескінчену геометричну прогресію $\frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^6}, \frac{1}{2^8} \dots$ де $q = \frac{1}{2} < 1$, і є збіжний.

Задача 8. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta R_2\ R_{2n+2}D_{n+1}}\right|$.

Знайдемо $\left|S_{\Delta R_2\ R_{2n+2}D_{n+1}}\right|$ за формулою площі прямокутного трикутника:

$S = \frac{1}{2}ah$, де a- перший катет, b- другий катет.

В трикутнику $C_{n+1}\ M_n C_{n+2}$, де a=$\frac{1}{4}$, b=$\frac{1}{2^{n+1}}$.

Отже $\left|S_{\Delta R_{2n-1}\ F_{n+1}F_n}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+4}}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}$.

Цей числовий ряд представляє нескінчену геометричну прогресію $\frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^6}, \frac{1}{2^8} \dots$ де $q = \frac{1}{2} < 1$, і є збіжний.

Задача 9. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\mathcal{L}_1 B_{n+1} A_{2n+2}}\right|$.

Розв'язання

Трикутники $\mathcal{L}_1 B_{n+1} A_{2n+2}$ – прямокутні.

Знайдемо довжину катета $\mathcal{L}_1 B_{n+1}$, тобто $\mathcal{L}_1 B_2, \mathcal{L}_1 B_3, \mathcal{L}_1 B_4$.

Розглянемо $\Delta\mathcal{L}_1 B_2 A_4 \sim \Delta\varepsilon'_1\varepsilon'_2 A_4$, і складемо пропорцію:

$$\frac{\mathcal{L}_1 B_2}{\varepsilon'_1\varepsilon'_2} = \frac{A_4 B_2}{A_4\varepsilon'_2}$$

$$\frac{\mathcal{L}_1 B_2}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$$

$$\mathcal{L}_1 B_2 = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{16}\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{12}$$

$$\mathcal{L}_1 B_3 = \mathcal{L}_1 B_2 + B_2 B_3 = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$$

$$\mathcal{L}_1 B_4 = \mathcal{L}_1 B_3 + B_3 B_4 = \frac{5}{24} + \frac{1}{16} = \frac{13}{48}$$

…

$$\mathcal{L}_1 B_n = \frac{2^{n+1}-3}{3\cdot 2^{n+1}}$$

$$S_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^{n+1}-3}{3\cdot 2^{n+1}}\cdot\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\cdot\frac{1}{2^{n+1}} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$$
$$= \frac{2^{n+1}-3}{3\cdot 2^{n+1}}\cdot\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}-3}{3\cdot 2^{2n+3}}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}-3}{3\cdot 2^{2n+3}}$

Задача 10. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{R_{2n-1}R_{2n+1}R_{2n+2}R_{2n}}\right|$.

Розв'язання

$R_{2n-1}R_{2n+1}R_{2n+2}R_{2n}$ – рівнобедрена трапеція.

Площу трапеції знаходимо за формулою: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, де a і b – нижня та верхня основи $(a||b), h$ - висота трапеції.

$$a: 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots ; \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$b: \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots ; \frac{1}{2^{n+1}}$$

де $h = \frac{1}{2^{n+1}}$

Обчислюємо площу трапеції:

$$S = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\frac{5}{2^{n+1}}}{2^{n+2}} = \frac{5}{2^{n+3}}$$

Шуканий ряд має вигляд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^{n+3}}$

Ряд збіжний, як ряд геометричної спадної прогресії при $q < 1$.

2.4. Ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$, члени яких пов'язані з кубатурною геометричною інтерпретацією.

Задача 1. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – величини об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{R_{2n}F_{n+1}}$ навколо осі OX.

Розв'язання

Відрізок $|R_{2n}F_{n+1}|$ послідовності прямих $\overline{R_{2n}F_{n+1}}$ обертається навколо осі *OX*. В результаті отримуємо зрізаний конус. Для знаходження числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n величини тіл обертання.

Об'єм зрізаного конуса знаходимо за формулою:

$V_n = \frac{\pi}{3} h(R^2 + Rr + r^2)$, де R та r - радіуси верхньої та нижньої основи, а h - висота конуса.

$r = \frac{2^n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$, $R = 1 + \frac{2^n+1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$, $h = \frac{1}{2^n}$.

Тоді $V_n = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^n}\left(\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2\right) =$

$\frac{\pi}{3 \cdot 2^n 2^2}\left(\left(3 + \frac{1}{2^n}\right)^2 + \left(3 + \frac{1}{2^n}\right)\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+2}}\left(9 + 2 \cdot 3\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} + 3 + \right.$

$\left. 3\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} + 1 + 2\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}}\right) = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+2}}\left(13 + \frac{12}{2^n} + \frac{3}{2^{2n}}\right) = \frac{13\pi}{3 \cdot 2^{n+2}} + \frac{12\pi}{3 \cdot 2^{2n+2}} + \frac{3\pi}{3 \cdot 2^{3n+2}} =$

$\frac{13\pi}{3 \cdot 2^{n+2}} + \frac{\pi}{2^{2n}} + \frac{\pi}{2^{3n+2}}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{13\pi}{3 \cdot 2^{n+2}} + \frac{\pi}{2^{2n}} + \frac{\pi}{2^{3n+2}}\right)$.

Задача 2. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – величини об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{C_n M_n}$ навколо осі OX.

Розв'язання

Відрізок $|C_n M_n|$ послідовності прямих $\overline{C_n M_n}$ обертається навколо осі *OX*. В результаті отримуємо зрізаний конус. Для знаходження числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$. де V_n величини тіл обертання.

Об'єм зрізаного конуса знаходимо за формулою

$V_n = \frac{\pi}{3} h(R^2 + Rr + r^2)$, де R та r - радіуси верхньої та нижньої основи, а h - висота конуса.

$r = \frac{2^n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$, $R = 1 + \frac{2^n+1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$, $h = \frac{1}{4}$.

Тоді $V_n = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{4}\left(\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2\right) = \frac{\pi}{48}\left(\left(3 + \frac{1}{2^n}\right)^2 + \left(3 + \frac{1}{2^n}\right)\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{48}\left(9 + 2 \cdot 3\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} + 3 + 3\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} + 1 + 2\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}}\right) = \frac{\pi}{48}\left(13 + \frac{12}{2^n} + \frac{3}{2^{2n}}\right) = \frac{13\pi}{48} + \frac{12\pi}{48 \cdot 2^n} + \frac{3\pi}{48 \cdot 2^{2n}} = \frac{13\pi}{48} + \frac{\pi}{4 \cdot 2^n} + \frac{\pi}{16 \cdot 2^{2n}}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{13\pi}{48} + \frac{\pi}{4 \cdot 2^n} + \frac{\pi}{16 \cdot 2^{2n}}\right)$.

Задача 3. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – величини об’ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{\varepsilon'_n \mathrm{A}_{2n+2}}$ навколо осі OX.

Розв’язання

Відрізок $\left|\overline{\varepsilon'_n \mathrm{A}_{2n+2}}\right|$ послідовності прямих $\overline{\varepsilon'_n \mathrm{A}_{2n+2}}$ обертається навколо осі *OX*. В результаті отримуємо конус (при обертанні прямої $\varepsilon'_1 \mathrm{A}_4$) і зрізаний конус (при обертанні прямої $\varepsilon'_{n+1} \mathrm{A}_{2n+4}$). Для знаходження числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n величини тіл обертання і $V_n = V_{\text{кон.}} + V_{\text{ус.кон.}}$.

Об'єм конуса знаходимо за формулою: $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi h R^2$, де $h = \frac{3}{4}$, $R = \frac{1}{4}$.

Звідси $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{64} = \frac{\pi}{2^6}$.

Об'єм зрізаного конуса знаходимо за формулою:

$V_{\text{зр.кон.}} = \frac{\pi}{3} h(R^2 + Rr + r^2)$, де R та r - радіуси верхньої та нижньої основи, а h - висота конуса.

$r = \frac{2^n - 1}{2^{n+1}}$, $R = \frac{2^n + 1}{2^{n+2}}$, $h = \frac{2^n + 1}{2^{n+1}}$.

Тоді $V_{\text{зр.кон.}} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2^n+1}{2^{n+1}}\left(\left(\frac{2^n+1}{2^{n+2}}\right)^2 + \frac{2^n+1}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^n-1}{2^{n+1}} + \left(\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)^2\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+2}}\right)^2 + + \frac{2^{2n} - 1}{2^{2n+3}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{2n+4}} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2^{2n+3}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{2n+2}}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{7}{16} + \frac{1}{2^{n+3}} + \frac{1}{2^{2n+4}} + \frac{1}{2^{2n+3}} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{7}{16} - \frac{1}{2^{n+3}} + \frac{3}{2^{2n+4}}\right) = \frac{\pi}{3 \cdot 32}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\left(7 - \frac{2}{2^n} + \frac{3}{2^{2n}}\right) = \frac{\pi}{96}\left(7 - \frac{2}{2^n} + \frac{3}{2^{2n}} + \right.$

$\frac{7}{2^n} - \frac{2}{2^{2n}} + \frac{3}{2^{3n}}\Big) = \frac{\pi}{96}\Big(7 + \frac{5}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{3}{2^{3n}}\Big) = \frac{7\pi}{96} + \frac{5\pi}{96 \cdot 2^n} + \frac{\pi}{96 \cdot 2^{2n}} + \frac{3\pi}{96 \cdot 2^{3n}} == \frac{7\pi}{96} + \frac{5\pi}{96 \cdot 2^n} + \frac{\pi}{96 \cdot 2^{2n}} + \frac{\pi}{32 \cdot 2^{3n}}$.

Так як $V_n = V_{\text{кон.}} + V_{\text{зр.кон.}}$, тоді

$V_n = \frac{\pi}{64} + \frac{7\pi}{96} + \frac{5\pi}{96 \cdot 2^n} + \frac{\pi}{96 \cdot 2^{2n}} + \frac{\pi}{32 \cdot 2^{3n}} = \frac{17\pi}{192} + \frac{5\pi}{96 \cdot 2^n} + \frac{\pi}{96 \cdot 2^{2n}} + \frac{\pi}{32 \cdot 2^{3n}}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{17\pi}{192} + \frac{5\pi}{96 \cdot 2^n} + \frac{\pi}{96 \cdot 2^{2n}} + \frac{\pi}{32 \cdot 2^{3n}}\Big)$.

Задача 4. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – величини об’ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{A_{2n}N_n}$ навколо осі ОХ.

Розв’язання

Відрізок $|\overline{A_{2n}N_n}|$ послідовності прямих обертається навколо осі *OX*. В результаті отримуємо конус (при обертанні прямої $\overline{A_2N_1}$) і зрізаний конус (при обертанні прямої $\overline{A_{2n+2}N_{n+1}}$).

Для знаходження числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$. де V_n величини тіл обертання і $V_n = V_{\text{кон.}} + V_{\text{зр.кон.}}$.

Об'єм конуса знаходимо за формулою: $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi h R^2$, де $h = \frac{1}{8}$, $R = \frac{1}{4}$.

Звідси $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{384}$.

Об'єм зрізаного конуса знаходимо за формулою:

$V_{\text{зр.кон.}} = \frac{\pi}{3} h(R^2 + Rr + r^2)$, де R та r - радіуси верхньої та нижньої основи, а h - висота конуса.

$r = \frac{2^n - 1}{2^{n+1}}$, $R = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+2}}$, $h = \frac{1}{2^{n+3}}$.

Тоді $V_{\text{зр.кон.}} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{n+3}}\left(\left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}}\right)^2 + \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^n - 1}{2^{n+1}} + \left(\frac{2^n - 1}{2^{n+1}}\right)^2\right) = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+3}} \cdot \Big(\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+2}}\Big)^2 + + \frac{2^{2n+1} - 2^{n+1} - 2^n + 1}{2^{2n+3}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2\Big) = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+3}} \cdot \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+2}} +$

$\frac{1}{2^{2n+4}}+\frac{2\cdot2^{2n}-3\cdot2^{n+1}}{2^{2n+3}}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}++\frac{1}{2^{2n+2}}\Big)=\frac{\pi}{3\cdot2^{n+3}}\Big(\frac{1}{2}-\frac{3}{2^{n+2}}+\frac{5}{2^{2n+4}}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2^{n+3}}+$ $\frac{1}{2^{2n+3}}\Big)=\ \frac{\pi}{3\cdot2^{n+3}}\ \cdot\Big(\frac{3}{4}-\frac{9}{2^{n+3}}+\frac{7}{2^{2n+4}}\Big)==\frac{\pi}{2^{n+5}}-\frac{3\pi}{2^{2n+6}}+\frac{7\pi}{2^{3n+7}}.$

Так як $V_n=V_{\text{кон.}}+V_{\text{зр.кон.}}$, звідси

V_n= $\frac{\pi}{384}+\frac{\pi}{2^{n+5}}-\frac{3\pi}{2^{2n+6}}+\frac{7\pi}{2^{3n+7}}.$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{384}+\frac{\pi}{2^{n+5}}-\frac{3\pi}{2^{2n+6}}+\frac{7\pi}{2^{3n+7}}\right).$

Задача 5. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$, де V_n – величини об’ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{K_nN_n}$ навколо осі OX.

Розв’язання

Відрізок $\left|\overline{K_nN_n}\right|$ послідовності прямих обертається навколо осі *OX*. В результаті отримуємо конус (при обертанні прямої $\overline{K_1N_1}$) і зрізаний конус (при обертанні прямої $\overline{K_{n+1}N_{n+1}}$).

Для знаходження числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$. де V_n величини тіл обертання і $V_n=V_{\text{кон.}}+V_{\text{зр.кон.}}$.

Об'єм конуса знаходимо за формулою: $V_{\text{кон.}}=\frac{1}{3}\pi hR^2$, де $h=\frac{1}{8}$, $R=\frac{1}{4}$.

Звідси $V_{\text{кон.}}=\frac{1}{3}\pi\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{\pi}{384}$.

Об'єм зрізаного конуса знаходимо за формулою:

$V_{\text{зр.кон.}}=\frac{\pi}{3}h(R^2+Rr+r^2)$, де R та r - радіуси верхньої та нижньої основи, а h - висота конуса.

$r=\frac{2^n-1}{2^{n+1}},\ R=\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}},\ h=\frac{1}{2^{n+3}}.$

Тоді $V_{\text{зр.кон.}}=\frac{\pi}{3}\cdot\ \frac{1}{2^{n+3}}\left(\left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}}\right)^2+\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^n-1}{2^{n+1}}+\left(\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)^2\right)=\frac{\pi}{3\cdot2^{n+3}}\cdot\ \Big(\Big(\frac{1}{2}-$ $\frac{1}{2^{n+2}}\Big)^2++\frac{2^{2n+1}-2^{n+1}-2^n+1}{2^{2n+3}}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2\Big)=\frac{\pi}{3\cdot2^{n+3}}\ \cdot\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+2}}+$

$\frac{1}{2^{2n+4}} + \frac{2 \cdot 2^{2n} - 3 \cdot 2^{n+1}}{2^{2n+3}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}} + + \frac{1}{2^{2n+2}}\Big) = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+3}} \Big(\frac{1}{2} - \frac{3}{2^{n+2}} + \frac{5}{2^{2n+4}} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2^{n+3}} +$

$\frac{1}{2^{2n+3}}\Big) = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+3}} \cdot \Big(\frac{3}{4} - \frac{9}{2^{n+3}} + \frac{7}{2^{2n+4}}\Big) = = \frac{\pi}{2^{n+5}} - \frac{3\pi}{2^{2n+6}} + \frac{7\pi}{2^{3n+7}}.$

Так як $V_n = V_{\text{кон.}} + V_{\text{зр.кон.}}$, звідси

$V_n = \frac{\pi}{384} + \frac{\pi}{2^{n+5}} - \frac{3\pi}{2^{2n+6}} + \frac{7\pi}{2^{3n+7}}.$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\pi}{384} + \frac{\pi}{2^{n+5}} - \frac{3\pi}{2^{2n+6}} + \frac{7\pi}{2^{3n+7}}\Big).$

2.5. Дослідження одержаних числових рядів на збіжність.

Дослідимо одержані ряди на збіжність, оскільки саме дослідження на збіжність є основним етапом у дослідженні числових рядів.

Розглянемо отримані ряди із попередніх пунктів та дослідимо їх на збіжність.

Задача 1. Дослідити на збіжність ряди $\sum_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{2^n - 1}{2^{n+1}} + \frac{2^n + 1}{2^{n+1}})$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} + 2}{2^{n+1}}$.

Розв'язання

Перший ряд збігається за означенням збіжності, оскільки

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{2^n - 1}{2^{n+1}} + \frac{2^n + 1}{2^{n+1}}) = 1 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + 0 = 2$

Перевіримо ознаку збіжності другого ряду:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 2}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2^n}) = 1$. Так як $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

Тобто необхідна ознака збіжності не виконується. Другий ряд розбіжний.

Задача 2. Дослідити на збіжність ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{2}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Перший ряд розбіжний за означенням збіжності, оскільки

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1^n}{2} = \infty;$

Перевіримо ознаку збіжності другого ряду:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$

Тобто необхідна ознака збіжності виконується. Знайдемо суму даного числового ряду

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. Ряд є рядом спадної геометричної прогресії з параметрами: $b_1=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$.

Ряд збіжний, тому що $q < 1$ і має суму $S = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

Задача 3. Дослідити на збіжність ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{2^{n+1}}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{2^{n+1}}$.

Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності на кожному з рядів.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2^n}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\cdot 2^n}+\frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^{n+1}} = (\frac{1}{2} - 0) = \frac{1}{2}$. Вона не виконується, так як $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, висновок: ряди розбіжні.

Задача 4. Дослідити на збіжність ряди $\sum_{n=1}^{\infty}0^n$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{2^{n+1}}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}X_n = \sum_{n=1}^{\infty}0^n=0$.

Цей ряд збіжний, так як його сума дорівнює 0.

$\sum_{n-1}^{\infty}Y_n= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{2^{n+1}}$.

Другий ряд перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^n}\right) = \frac{1}{2}+0 = \frac{1}{2}$. Вона не виконується так як $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, висновок: ряд розбіжний.

Задача 5. Дослідити на збіжність ряди.

$\sum_{n=1}^{\infty}X_n = 1^n= 1+1+1+... = \infty$. Числовий ряд розбіжний за його означенням (не має границі послідовності часткової суми ряда).

$\sum_{n-1}^{\infty}Y_n= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{2^{n-1}}$.

Другий числовий ряд перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності.

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} (2-\frac{1}{2^{n-1}}) = \lim\limits_{\infty}\left(2-\frac{2}{2^{\mathrm{n}}}\right) = 2-0 = 2$. Вона не виконується так як $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, висновок: ряд також розбіжний.

Задача 6. Дослідити на збіжність ряди

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = 1^n$,

$\sum_{n-1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}}$.

Перший ряд за означенням розбіжний, бо

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 1^n = \lim_{n\to\infty} (1+1+1+\cdots) = \infty;$$

Другий числовий ряд перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 2^{\mathrm{n}}}\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Вона не виконується так як $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, висновок: ряд також розбіжний.

Задача 7. Дослідити на збіжність ряди

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = 0^n = 0$,

$\sum_{n-1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}}$.

Так як сума першого ряду дорівнює нулю, то він збігається за означенням збіжності, бо $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 0^n = 0$;

Другий числовий ряд перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності. Знайдемо

чому дорівнює $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 2^{\mathrm{n}}}\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.

Вона не виконується так як $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, висновок: ряд також розбіжний.

Задача 8. Дослідити на збіжність ряди $\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \left(\frac{1}{4}\right) 1^n$, $\sum_{n-1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$.

Перший ряд розбіжний за означенням збіжності, бо

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} 1^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = \infty;$

Другий ряд перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності.

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^{\text{п}}}\right) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$

Вона не виконується так як $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, висновок: ряд розбіжний.

Задача 9. Дослідити на збіжність ряди $\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \left(\frac{1}{2}\right) 1^n$, $\sum_{n-1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}+1}{2^n}$.

Перший ряд розбіжний за означенням збіжності, бо $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) 1^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty$, тобто не існує.

Другий ряд перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}+1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{\text{п}}}\right) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Вона не виконується так як $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, висновок: ряд розбіжний.

Задача 10. Дослідити на збіжність ряди $\sum_{n=1}^{\infty} X_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2^n-1}{2^{n+1}} + \frac{2^n+1}{2^{n+1}})$.

$\sum_{n-1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}}$.

Числові ряди перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 + \frac{2^n-1}{2^{n+1}} + \frac{2^n+1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{2} + 0 = 2$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{\text{п}}}\right) = 1 + 0 = 1.$$

В обох числових рядах не виконується необхідна ознака збіжності рядів так як $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, висновок: ряди розбіжні.

Задача 11. Дослідити на збіжність ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3}{2^{n+1}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}}$.

Числові ряди перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності.

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2\cdot 2^n}\right) = \frac{1}{2}.$

$\lim_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^n}\right) = \frac{1}{2}$.

В обох числових рядах не виконується необхідна ознака збіжності рядів так як $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, висновок: ряди розбіжні.

Також дослідимо на збіжність задачі з лінійною геометричною інтерпретацією.

Задача 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4+\sqrt{10}}{2^{n+1}}\right)$.

Перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності ряду,

$\lim_{n\to\infty} b_\mathrm{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4+\sqrt{10}}{2^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\sqrt{10}}{2^{n+1}} = 0$.

Ряд може бути збіжним, а може бути і розбіжним , так як $\lim_{n\to\infty} b_\mathrm{n} = 0$.

Використовуємо ознаку Д’Аламбера.

Маємо $b_\mathrm{n} = \frac{4+\sqrt{10}}{2^{n+1}}$, $b_{\mathrm{n}+1} = \frac{4+\sqrt{10}}{2^{n+2}}$.

Обчислюємо границю:

$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{\mathrm{n}+1}}{b_\mathrm{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\sqrt{10}}{2^{n+2}} : \frac{4+\sqrt{10}}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\sqrt{10}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{4+\sqrt{10}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$, то ряд збіжний.

Задача 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4+\sqrt{10}}{2^{n+1}}\right)$.

Аналогічно ряд збіжний, бо за ознакою Д’Аламбера, де $b_\mathrm{n} = \frac{4+\sqrt{10}}{2^{n+1}}$, $b_{\mathrm{n}+1} = \frac{4+\sqrt{10}}{2^{n+2}}$:

$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{\mathrm{n}+1}}{b_\mathrm{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\sqrt{10}}{2^{n+2}} : \frac{4+\sqrt{10}}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\sqrt{10}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{4+\sqrt{10}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$.

Задача 3 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\mathrm{n}+1}}\right)$

Ряд збіжний, як ряд геометричної прогресії зі знаменником $q = \frac{1}{2} < 1$.

Задача 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Ряд збіжний, як ряд геометричної прогресії зі знаменником $q = \frac{1}{2} < 1$.

Задача 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

Ряд збіжний, як ряд геометричної прогресії зі знаменником $q = \frac{1}{2} < 1$.

Задача 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Для знаходження збіжності використовуємо ознаку Коші.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1.$

Якщо $\frac{1}{2} < 1$ – ряд збіжний.

Задача 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n+1}{2^{n+1}}\right)$.

Перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності ряду.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_\text{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^\text{п}}\right) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$

Ряд розбіжний, так як $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Задача 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{4}$.

За означенням збіжності або розбіжності випливає, що ряд розбіжний, бо $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$.

Задача 9. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{2^{n+1}}$

Перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності ряду.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_\text{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^\text{п}}\right) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$

Ряд розбіжний, так як $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Задача 10. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$.

Ряд збіжний, як ряд геометричної прогресії зі знаменником $q = \frac{1}{2} < 1$.

Задача 11. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$.

Для знаходження збіжності використовуємо ознаку Д'Аламбера.

Маємо $b_\text{n} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$, $b_{\text{n}+1} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+2}}$.

Обчислюємо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{\mathrm{n+1}}}{b_{\mathrm{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^{n+2}}:\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{\sqrt{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1,\text{ то ряд збіжний.}$$

Задача 12. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$.

Для знаходження збіжності використовуємо ознаку Д'Аламбера.

Маємо $b_{\mathrm{n}}=\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$, $b_{\mathrm{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2^{n+2}}$.

Обчислюємо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{\mathrm{n+1}}}{b_{\mathrm{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^{n+2}}:\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{\sqrt{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1,\text{ то ряд збіжний.}$$

Задача 13. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}$.

Для знаходження збіжності використовуємо ознаку Д'Аламбера.

Маємо $b_{\mathrm{n}}=\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}$, $b_{\mathrm{n+1}}=\frac{\sqrt{5}}{2^{n+2}}$.

Обчислюємо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{\mathrm{n+1}}}{b_{\mathrm{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5}}{2^{n+2}}:\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5}}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{\sqrt{5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1,\text{ то ряд збіжний.}$$

Задача 14. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{13}}{2^{n+3}}$.

Для знаходження збіжності використовуємо ознаку Д'Аламбера.

Маємо $b_{\mathrm{n}}=\frac{\sqrt{13}}{2^{n+1}}$, $b_{\mathrm{n+1}}=\frac{\sqrt{13}}{2^{n+2}}$.

Обчислюємо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{\mathrm{n+1}}}{b_{\mathrm{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{13}}{2^{n+2}}:\frac{\sqrt{13}}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{13}}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{\sqrt{13}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1,\text{ то ряд збіжний.}$$

Задача 15. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}$.

Аналогічно для знаходження збіжності використовуємо ознаку Д'Аламбера.

Маємо $b_{\mathrm{n}}=\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}$, $b_{\mathrm{n+1}}=\frac{\sqrt{5}}{2^{n+2}}$.

Обчислюємо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{\mathrm{n+1}}}{b_{\mathrm{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5}}{2^{n+2}}:\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5}}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{\sqrt{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1,\text{ то ряд збіжний.}$$

Задача 16. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$.

Ряд збіжний, як ряд геометричної прогресії зі знаменником $q = \frac{1}{2} < 1$.

Задача 17. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}$.

Для знаходження збіжності використовуємо ознаку Д'Аламбера.

Маємо $b_{\text{n}} = \frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}$, $b_{\text{n}+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^{n+2}}$.

Обчислюємо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{\text{n}+1}}{b_{\text{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5}}{2^{n+2}} : \frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{\sqrt{5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1, \text{ то ряд збіжний.}$$

Задача 18. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+(2^n+1)^2}}{2^{n+1}}$.

Перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності ряду.

$$\lim_{n\to\infty} b_{\text{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+(2^n+1)^2}}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1+(2^n+1)^2}{2^{2(n+1)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+(2^n+1)^2}{2^{2(n+1)}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^{2(n+1)}} + \frac{2^{2n}}{2^{2(n+1)}} + \frac{2\cdot 2^n}{2^{2(n+1)}} + \frac{1}{2^{2(n+1)}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{2^{2(n+1)}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{4}.$$

ми бачимо, що $\frac{2}{2^{2(n+1)}} \to 0$ і $\frac{1}{2^{n+1}} \to 0$.

Ряд розбіжний, так як $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Задача 19. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Перевіримо на виконання збіжності ряду за ознакою Коші.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1.$ З цього маємо, що ряд збіжний.

Задача 20. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{4\cdot 2^{2n+5}+2^{n+5}+13}{2^{2n+6}}}$.

Дослідимо ряд на збіжність. Знайдемо границю b_n.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{4\cdot 2^{2n+5}+2^{n+5}+13}{2^{2n+6}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4\cdot 2^{2n+5}+2^{n+5}+13}{2^{2n+6}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\infty}{\infty} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4+\frac{1}{2^n}+\frac{13}{2^{2n+5}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \neq 0$, тоді досліджуваний ряд розбіжний, оскільки не виконана необхідна ознака збіжності ряду.

Задача 21. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{5})2^{n+1}}$.

Для знаходження збіжності використовуємо ознаку Д'Аламбера.

Маємо $b_n = \frac{1}{(1+\sqrt{5})2^{n+1}}$, $b_{n+1} = \frac{1}{(1+\sqrt{5})2^{n+2}}$.

Обчислюємо границю:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{5})2^{n+2}} : \frac{1}{(1+\sqrt{5})2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+\sqrt{5})2^{n+1}}{(1+\sqrt{5})2^{n+2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$

Отже, ряд збіжний.

Задача 22. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{39+10\sqrt{5}}}{2^{n+3}}$.

Для знаходження збіжності використовуємо ознаку Д'Аламбера.

Маємо $b_n = \frac{\sqrt{39+10\sqrt{5}}}{2^{n+3}}$, $b_{n+1} = \frac{\sqrt{39+10\sqrt{5}}}{2^{n+4}}$.

Обчислюємо границю:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{39+10\sqrt{5}}}{2^{n+4}} : \frac{\sqrt{39+10\sqrt{5}}}{2^{n+3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+3}\sqrt{39+10\sqrt{5}}}{2^{n+4}\sqrt{39+10\sqrt{5}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$, то ряд збіжний.

Задача 23. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3\sqrt{5}+15}{2^{n+3}}\right)$

Для знаходження збіжності використовуємо ознаку Д'Аламбера.

Маємо $b_n = \frac{3\sqrt{5}+15}{2^{n+3}}$, $b_{n+1} = \frac{3\sqrt{5}+15}{2^{n+4}}$.

Обчислюємо границю:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{5}+15}{2^{n+4}} : \frac{3\sqrt{5}+15}{2^{n+3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+3}(3\sqrt{5}+15)}{2^{n+4}(3\sqrt{5}+15)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$, то ряд збіжний.

Задача 24. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{122-18\sqrt{5}}}{2^{n+3}}$.

Перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності ряду.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_{\text{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{122-18\sqrt{5}}}{2^{n+3}} = 0$, отже

Числовий ряд збіжний.

Задача 25. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{13}}{2^{n+2}}$.

Перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності ряду.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_{\text{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{13}}{2^{n+2}} = 0$, отже числовий ряд збіжний.

Дослідимо на збіжність третю групу задач з квадратурною геометричною інтерпретацією.

Задача 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+3}}$.

Цей числовий ряд представляє нескінчену геометричну прогресію $\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64}\ldots$ з $q=\frac{1}{2}<1,$ який збіжний.

Задача 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+4}}$..

Цей числовий ряд представляє нескінчену геометричну прогресію $\frac{1}{2^6},\frac{1}{2^8},\frac{1}{2^{10}}\ldots$ з $q=\frac{1}{4}<1,$ який збіжний.

Задача 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1+2^n)}{2^{2n+4}}$.

Перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності ряду.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_{\text{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(1+2^n)}{2^{2n+4}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2^{2n+4}}+\frac{3\cdot 2^n}{2^{2\text{n}+4}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2^{2n+4}}+\frac{3}{2^{\text{n}+4}}\right) = 0.$

Ряд збіжний, так як $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Задача 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+3}}$.

Цей числовий ряд представляє нескінчену геометричну прогресію $\frac{1}{2^5},\frac{1}{2^7},\frac{1}{2^9}\ldots$

з $q = \frac{1}{4} < 1$, який збіжний.

Задача 9. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}-3}{3 \cdot 2^{2n+3}}$.

Перевіримо на збіжність за ознакою збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}-3}{3 \cdot 2^{2n+3}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3 \cdot 2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}}\right) = 0$$

Ряд збіжний.

Задача 10. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^{n+3}}$.

Ряд збіжний, як ряд геометричної спадної прогресії при $q < 1$.

Дослідимо на збіжність четверту групу задач з кубатурною геометричною інтерпретацією.

Задача 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{13\pi}{3 \cdot 2^{n+2}} + \frac{\pi}{2^{2n}} + \frac{\pi}{2^{3n+2}}\right)$.

Перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності ряду:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{13\pi}{3 \cdot 2^{n+2}} + \frac{\pi}{2^{2n}} + \frac{\pi}{2^{3n+2}}\right) = 0.$

якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд збіжний.

Задача 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{13\pi}{48} + \frac{\pi}{4 \cdot 2^{n}} + \frac{\pi}{16 \cdot 2^{2n}}\right)$.

Перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності ряду:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{13\pi}{48} + \frac{\pi}{4 \cdot 2^{n}} + \frac{\pi}{16 \cdot 2^{2n}}\right) = \frac{13\pi}{48} \neq 0.$

якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбіжний.

Задача 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{17\pi}{192} + \frac{5\pi}{96 \cdot 2^{n}} + \frac{\pi}{96 \cdot 2^{2n}} + \frac{\pi}{32 \cdot 2^{3n}}\right)$.

Перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності ряду:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{17\pi}{192} + \frac{5\pi}{96 \cdot 2^{n}} + \frac{\pi}{96 \cdot 2^{2n}} + \frac{\pi}{32 \cdot 2^{3n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{17\pi}{192} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5\pi}{96 \cdot 2^{n}} +$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{96 \cdot 2^{2n}} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{32 \cdot 2^{3n}} = \frac{17\pi}{192} + 0 + 0 + 0 = \frac{17\pi}{192} \neq 0.$

якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбіжний.

Задача 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{384}+\frac{\pi}{2^{n+5}}-\frac{3\pi}{2^{2n+6}}+\frac{7\pi}{2^{3n+7}}\right)$.

Перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності ряду:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{384}+\frac{\pi}{2^{n+4}}-\frac{3\pi}{2^{2n+5}}+\frac{7\pi}{2^{3n+6}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{384}+\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2^{n+4}}--\lim_{n\to\infty}\frac{3\pi}{2^{2n+5}}+$
$\lim_{n\to\infty}\frac{7\pi}{2^{3n+6}} = \frac{3\pi}{384}+0-0+0=\frac{3\pi}{384} \neq 0.$

якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбіжний.

Задача 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{384}+\frac{\pi}{2^{n+5}}-\frac{3\pi}{2^{2n+6}}+\frac{7\pi}{2^{3n+7}}\right)$.

Перевіримо на виконання необхідної ознаки збіжності ряду:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{384}+\frac{\pi}{2^{n+4}}-\frac{3\pi}{2^{2n+5}}+\frac{7\pi}{2^{3n+6}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{384}+\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2^{n+4}}--\lim_{n\to\infty}\frac{3\pi}{2^{2n+5}}+$
$\lim_{n\to\infty}\frac{7\pi}{2^{3n+6}} = \frac{3\pi}{384}+0-0+0=\frac{3\pi}{384} \neq 0.$

якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбіжний.

2.6. Дослідження характеру зміни частинних сум ряду S_n одержаних числових рядів в залежності від зміни $n \in N$.

Не менш важливим за дослідження числових рядів на збіжність є дослідження характеру зміни частинних сум ряду S_n числових рядів в залежності від зміни $n \in N$.

Знайдемо суму та дослідимо характер зміни частинних сум для деяких рядів, які було розглянуто у попередніх пунктах роботи.

Для реалізації педагогічного принципу наочності варто використовувати сучасні ІКТ, зокрема можливості табличного процесора Microsoft Excel [23, с. 76].

Задача 1. Знайти суму та дослідити швидкість збігання частинних сум для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\mathrm{n}+1}}\right)$.

Розв'язання

Розпишемо частинні суми числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \cdots + S_n + \cdots$.

$$S_1 = \frac{1}{2^{1+1}} = \frac{1}{4};$$

$$S_2 = \frac{1}{2^{1+1}} + \frac{1}{2^{2+1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8};$$

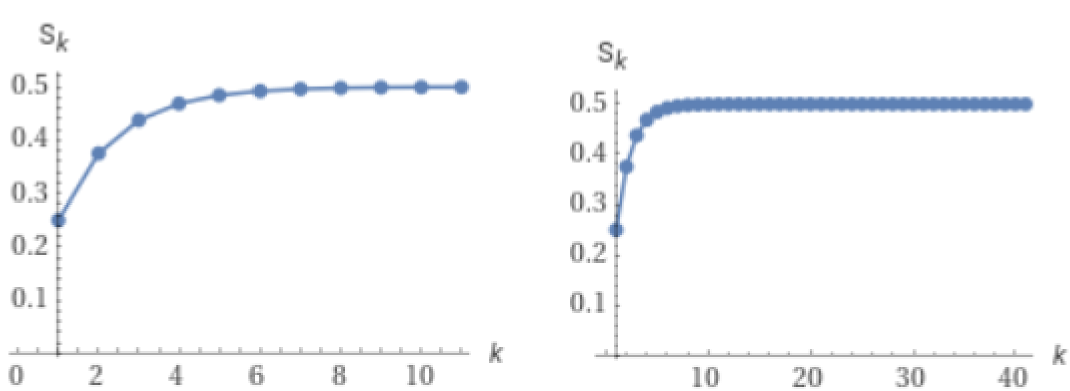
$$S_3 = \frac{1}{2^{1+1}} + \frac{1}{2^{2+1}} + \frac{1}{2^{3+1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16};$$

$$S_4 = \frac{1}{2^{1+1}} + \frac{1}{2^{2+1}} + \frac{1}{2^{3+1}} + \frac{1}{2^{4+1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{15}{32};$$

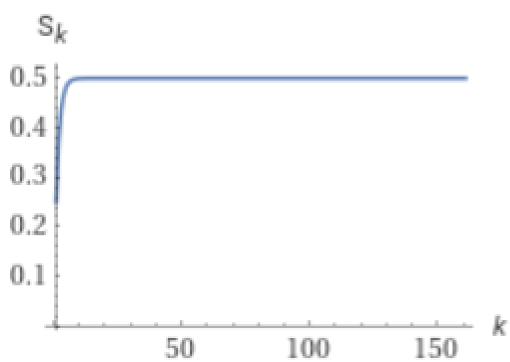
. . . .

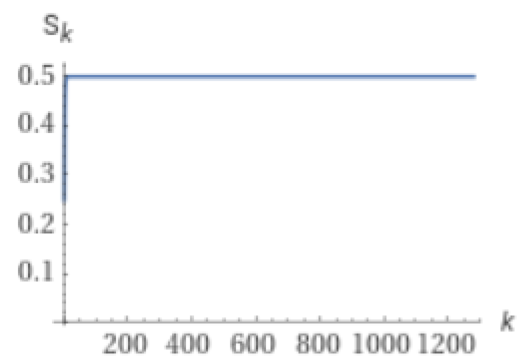
Рис. 2.6.1. Графік частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

Використовуючи онлайн сервіс WolframAlpha можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для першої тисячі членів ряду на рис. 2.6.2 (А-Г).



А) Б)





В) Г)

Рис. 2.6.2. Графіки зміни частинних сум

Ми можемо побачити як швидко змінюються частинні суми ряду від кількості доданків, що утворюють ряд.

Задача 2. Знайти суму та дослідити швидкість збігання частинних сум для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{2^{\mathrm{n}+1}}\right)$.

Розв'язання

Розпишемо частинні суми числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{2^{\mathrm{n}+1}}\right) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \cdots + S_n + \cdots$.

$$S_1 = \frac{\sqrt{5}}{2^{1+1}} = \frac{\sqrt{5}}{4} \approx 0.559,$$

$$S_2 = \frac{\sqrt{5}}{2^{1+1}} + \frac{\sqrt{5}}{2^{2+1}} = \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{5}}{8} = \frac{3\sqrt{5}}{8} \approx 0.8385,$$

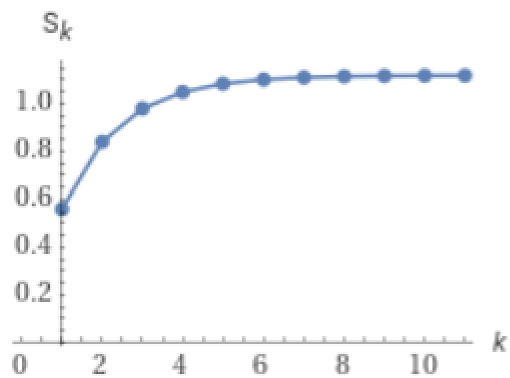
$$S_3 = \frac{\sqrt{5}}{2^{1+1}} + \frac{\sqrt{5}}{2^{2+1}} + \frac{\sqrt{5}}{2^{3+1}} = \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{5}}{8} + \frac{\sqrt{5}}{16} = \frac{7\sqrt{5}}{16} \approx 0.9783,$$

$$S_4 = \frac{\sqrt{5}}{2^{1+1}} + \frac{\sqrt{5}}{2^{2+1}} + \frac{\sqrt{5}}{2^{3+1}} + \frac{\sqrt{5}}{2^{4+1}} = \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{5}}{8} + \frac{\sqrt{5}}{16} + \frac{\sqrt{5}}{32} = \frac{15\sqrt{5}}{32} \approx 1.0482,$$

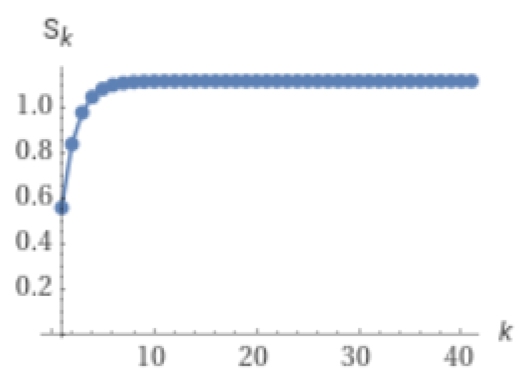
……………………………………….

Рис. 2.6.3. Графік частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}\right)$

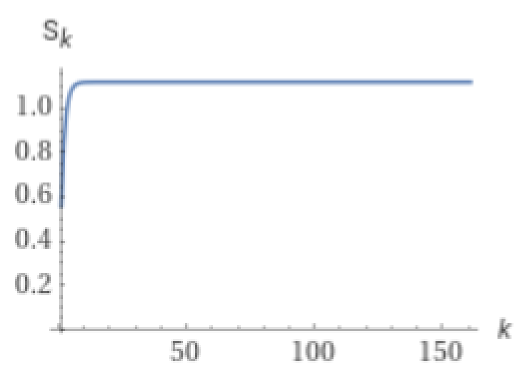
Аналогічно використаємо онлайн сервіс WolframAlpha, де можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для першої тисячі членів ряду на рис. 2.6.4 (А-Г).



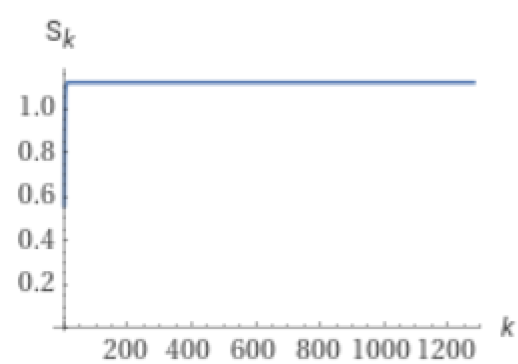
А)



Б)



В)



Г)

Рис. 2.6.4. Графіки зміни частинних сум

Задача 3. Знайти суму та дослідити швидкість збігання частинних сум для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3(1+2^n)}{2^{2n+4}}\right)$.

Розв'язання

Розпишемо частинні суми числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3(1+2^n)}{2^{2n+4}}\right) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \cdots + S_n + \cdots$.

$$S_1 = \frac{3(1+2^1)}{2^{2\cdot 1+4}} = \frac{9}{64} \approx 0.14,$$

$$S_2 = S_1 + \frac{3(1+2^2)}{2^{2\cdot 2+4}} = \frac{9}{64} + \frac{15}{256} = \frac{51}{256} \approx 0.199,$$

$$S_3 = S_2 + \frac{3(1+2^3)}{2^{2\cdot 3+4}} = \frac{51}{256} + \frac{27}{1024} = \frac{231}{1024} \approx 0.2256$$

$$S_4 = S_3 + \frac{3(1+2^4)}{2^{2\cdot 4+4}} = \frac{231}{1024} + \frac{51}{4096} = \frac{975}{4096} \approx 0.238$$

……………………………………

Рис. 2.6.5. Графік частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3(1+2^n)}{2^{2n+4}}\right)$

Таким самим чином використаємо онлайн сервіс WolframAlpha, за допомогою якого побачимо зміну графіка частинних сум для першої тисячі членів ряду на рис. 2.6.6 (А-Г).

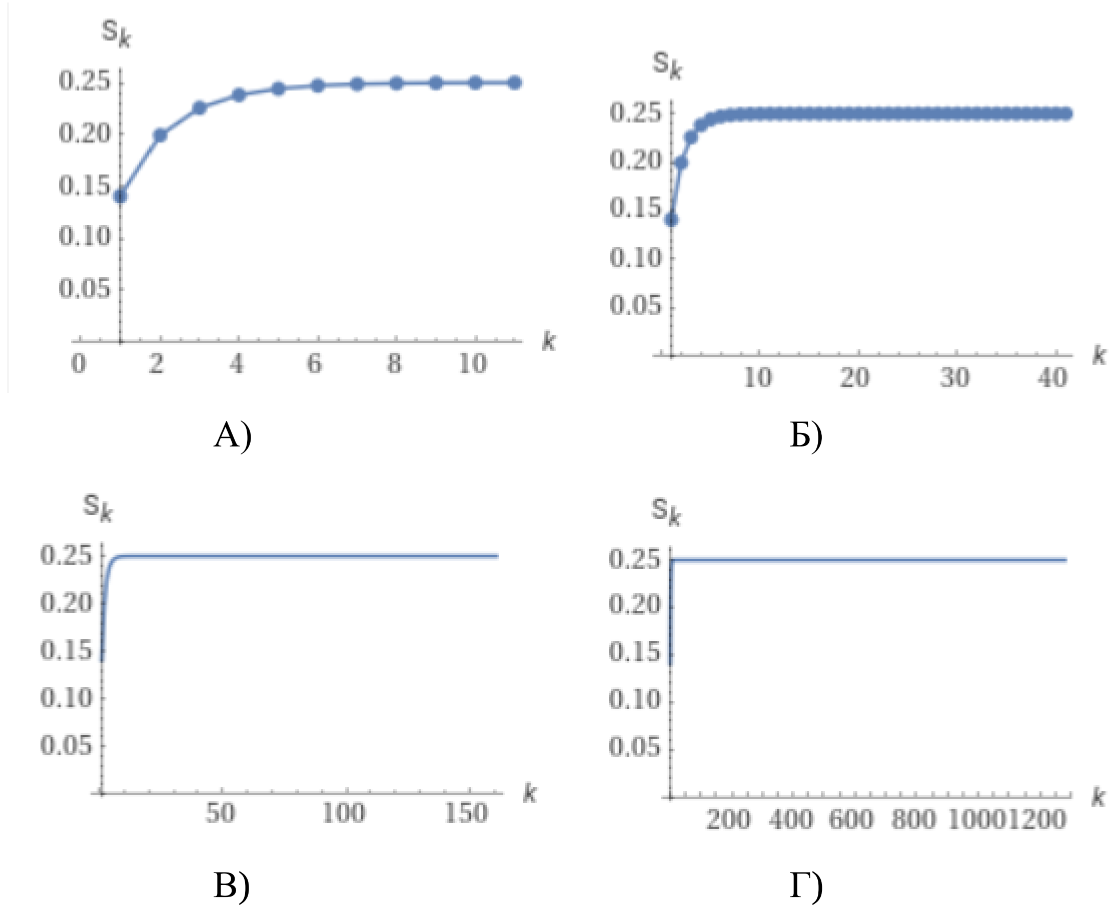


Рис. 2.6.6. Графіки зміни частинних сум

Задача 4. Знайти суму та дослідити швидкість збігання частинних сум для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}-3}{3*2^{n+1}}\right)$.

Розв'язання

Розпишемо частинні суми числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}-3}{3*2^{n+1}}\right) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \cdots + S_n + \cdots$.

$$S_1 = \frac{2^{1+1}-3}{3*2^{1+1}} = \frac{1}{12} \approx 0.0834,$$

$$S_2 = S_1 + \frac{2^{2+1}-3}{3*2^{2+1}} = \frac{1}{12} + \frac{5}{24} = \frac{7}{24} \approx 0.2917,$$

$$S_3 = S_2 + \frac{2^{3+1}-3}{3*2^{3+1}} = \frac{7}{24} + \frac{13}{48} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16} \approx 0.5625,$$

$$S_4 = S_3 + \frac{2^{4+1}-3}{3*2^{4+1}} = \frac{9}{16} + \frac{29}{96} = \frac{83}{96} \approx 0.8646,$$

. . . .

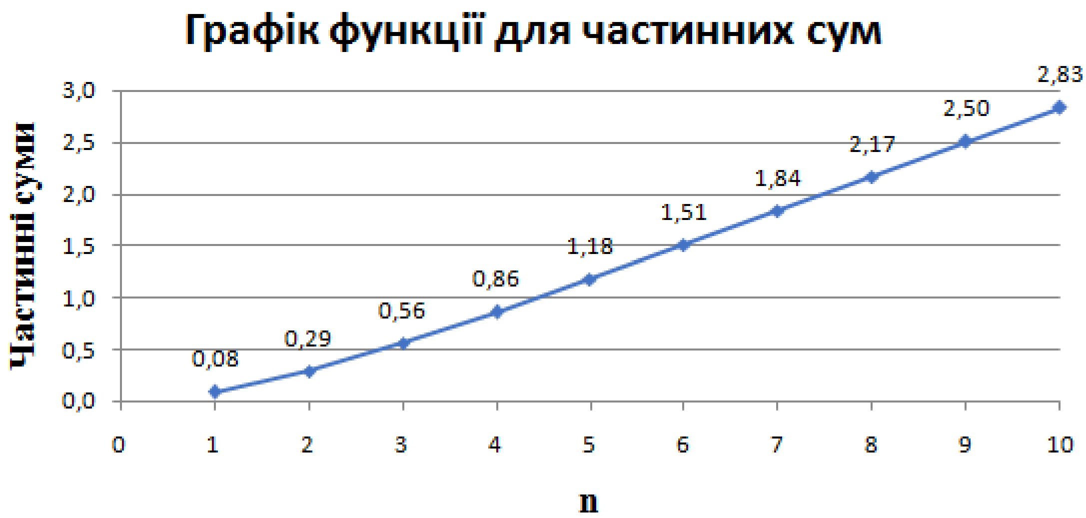
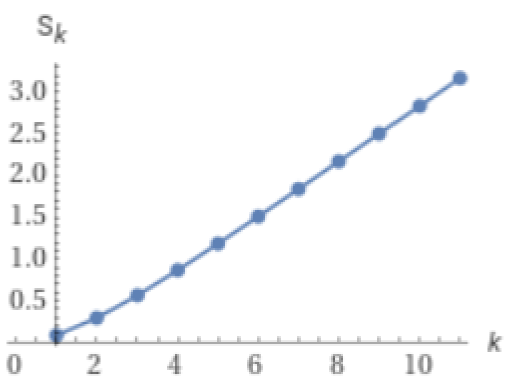
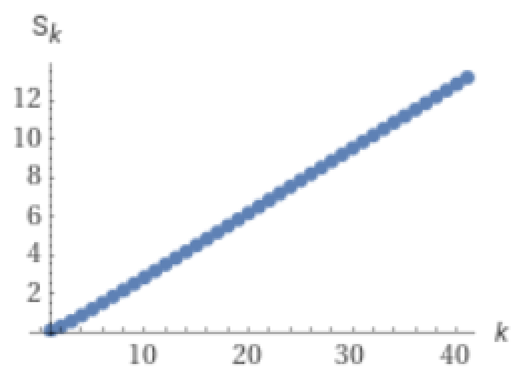


Рис. 2.6.7. Графік частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}-3}{3*2^{n+1}}\right)$

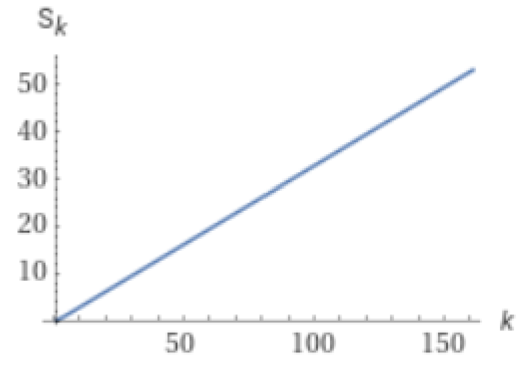
Використовуючи онлайн сервіс WolframAlpha прослідкуємо зміну графіка частинних сум для першої тисячі членів ряду на рис. 2.6.8 (А-Г).

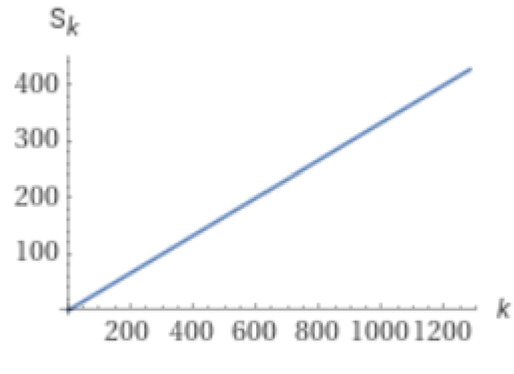


А)



Б)





В) Г)

Рис. 2.6.8. Графіки зміни частинних сум

Виведені числові ряди можна використовувати як заняттях з математичного аналізу, так і для формулювання задач шкільних математичних олімпіад, а також олімпіад III і IV курсів студентів спеціальності МІ [24, с. 72].

Висновки до розділу 2

У цьому розділі було розглянуто приклади геометричної інтерпретації членів числових рядів геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ та $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ і квадрата зі стороною $a=1.$ При цьому реалізували принцип наочності при вивченні розділу «Числові ряди» з курсу «Математичного аналізу» для студентів і теми «Послідовності» для учнів ліцеїв, що до цього часу в підручниках не розглядається.

Розкрили можливості застосування геометричних моделей при вивченні розділу, що дозволяє, за допомогою застосування геометричних інтерпретацій, будувати різні види числових рядів: з точковою геометричною інтерпретацією; з лінійною геометричною інтерпретацією; з квадратурною геометричною інтерпретацією; з кубатурною геометричною інтерпретацією. Було досліджено числові ряди на збіжність або доведена їх розбіжність.

Всього складено і розв'язано 12 задач з точкової, 25 задач з лінійної, 10 задач з квадратурною і 5 з кубатурної геометричної інтерпретації. Всі ряди досліджені на збіжність із застосуванням в кожному прикладі одного із способів: означення збіжності ряду, необхідна умова збіжності ряду, достатня ознака збіжності числових рядів.

За допомогою інформаційних технологій в задачах досліджено характер зростання частинних сум S_n в залежності від значень $n\in N.$ Складено графіки частинних сум для довільної їх кількості. Що дало унаочнити характер змін членів числового ряду. Геометричне моделювання числових рядів необхідне для студентів для кращого й глибшого сприймання розділу «Числові ряди», для цього необхідно скласти досить велику кількість числових рядів.

РОЗДІЛ 3. РОЗРОБКА УМОВ СИСТЕМИ ЗАДАЧ ПОВ'ЯЗАНИХ З РЯДАМИ

3.1. Задачі для використання при проведенні математичних олімпіад в ліцеях та профільних школах.

Застосування геометричних моделей при вивченні теми «Числові послідовност» учнями ліцеїв.

Алгоритми створення (складання) умов задач, пов'язаних з вивченням розділу "Числові ряди" студентами спеціальності "Математика" в вищих педагогічних закладах на основі використання геометричних моделей започатковані в роботах [1,2,...].

Але за нашою думкою аналогічні алгоритми можна застосовувати для створення задач при вивченні теми "Числові послідовності" учнями ліцеїв.

Алгоритми, які пропонуються, базуються на використанні послідовностей геометричних образів, розташованих в межах побудованої геометричної моделі.

Геометрична модель згідно представленого узагальненого алгоритму будується за допомогою:

- декартової системи координат $OXУ$;
- квадрата зі стороною $a = 1$, в першій чверті системи координат $OXУ;$
- загальних членів відомих послідовностей.

Пояснимо сказане на прикладі геометричної моделі, представленої на рис. 3.1.1.

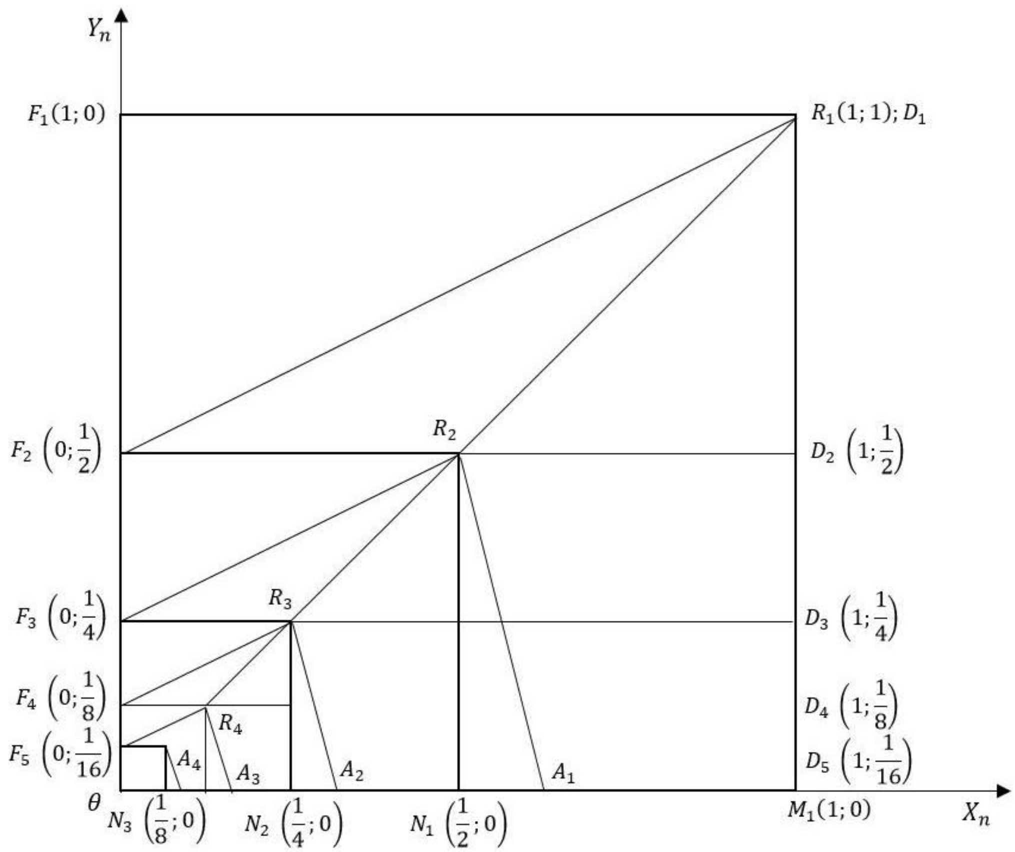


Рис. 3.1.1 На сторонах квадрата $\theta F_1R_1M_1$ зі стороною a = 1 розташовані послідовності т.т. $F_n\left(0;\frac{1}{2^{n-1}}\right)$, $D_n\left(1;\frac{1}{2^n}\right)$, $N_n\left(\frac{1}{2^{n-1}};0\right)$, $R_n\left(\frac{1}{2^{n-1}};\frac{1}{2^{n-1}}\right)$, n ∈N.

Використовуючи послідовності координат т.т. $F_n, D_n, R_n, N_n, F_{n+1}, A_n, D_{n+1}, R_{n+1}$, розв'язати наступні задачі на визначення послідовності за допомогою квадрата з параметром $a = 1$ (сторона квадрата) та вписаних в нього геометричних об'єктів.

У розділі 3 представлені деякі задачі для учнів ліцеїв, повна підбірка задач висвітлена у додатку А.

I. <u>Задачі першого рівня складності.</u>

1. Визначити послідовності координат послідовності точки · F_n.
2. Визначити послідовності координат послідовності точки· D_n.
3. Визначити послідовності координат послідовності точки R_n.

Знаходження числових послідовностей лінійної геометричної інтерпретації.

II. Задачі другого рівня складності.

1. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{M_n\ M_{n+1}}$.

8. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{F_n\ R_n}$.

15. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{F_{n+1}\ R_n}$.

Знаходження числових послідовностей квадратної геометричної інтерпретації.

III. Задачі третього рівня складності.

1. Визначити послідовності площ послідовності прямокутника $F_{n+1}F_nR_nT_n$.

10. Визначити послідовності площ послідовності $\Delta F_{n+1}R_nF_{n+2}$.

13. Визначити послідовності площ послідовності трапеції $M_nR_nF_{n+1}\theta$.

Знаходження числових послідовностей кубатурної геометричної інтерпретації членів.

IV. Задачі четвертого рівня складності.

1. Визначити послідовності об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{F_nR_n}$, навколо осі ОХ.

4. Визначити послідовності об'ємів послідовності тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{OR_n}$, навколо осі ОХ.

7. Визначити послідовності об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{R_{n+1}R_n}$, навколо осі ОХ.

Для розв'язування задач І рівня застосуємо алгебраїчні методи у геометрії. Члени послідовності координат точок F_n, D_n, R_n є послідовність спадаючої геометричної прогресії. Достатньо скористатися візуалізацією умови задачі і послідовності координат точок F_n, D_n, R_n. Проводячи аналіз результатів записати загальний член шуканої послідовності.

Всі інші задачі II рівня розв'язують одним поданих способів приведених прикладах.

До задач III рівня відносяться, задачі на знаходження послідовностей площ послідовностей прямокутників, трикутників, трапеції. Для цього необхідно згадати, що розглядаємо нескінченно малі послідовності, значення всіх її елементів – починаючи з деякого номера – стають за абсолютною величиною меншими за будь-яке позитивне число ε. Учням необхідно знати крім формул площ цих фігур і вибрати спосіб (розглянутих нами в II розділі) для обчислення довжин сторін фігур, але й властивості нескінченно малих послідовностей. А саме: Добуток нескінченно малої послідовності та обмеженої послідовності є нескінченно мала послідовність. Проілюструємо на прикладах.

До задач IV рівня відносяться, задачі на знаходження послідовностей об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих навколо вісі координат. Учням треба визначити, яке тіло обертання при цьому отримуємо: циліндр, конус, зрізаний конус та формули об'ємів цих фігур. Далі одним з способів поданих у II рівня знайти послідовності довжин послідовності відрізків. Аналогічно до III рівня застосуємо властивості нескінченно малих послідовностей, щодо можливості знайти послідовність об'ємів тіл обертання. Проілюструємо на прикладах.

Приклади розв’язання задач винесені у додатку А.

3.2. Задачі для використання на практичних заняттях при вивченні розділу «Числові ряди» при підготовці вчителя математики.

В процесі підготовки вчителя спеціальності Середня освіта (математика) розділ математичного аналізу «ряди» є важливою складовою для розвитку різноманітних компетентностей майбутнього педагога, тому при вивченні розділу «Ряди», на нашу думку, є важливою реалізація педагогічного принципу наочності. [23].

Представимо деякі задачі, які можна використовувати при підготовці студентам. Уся підбірка задач усіх рівнів складності представлена у додатку Б.

Задачі I рівня складності

1. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$,$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. A_n.

2. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$,$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. B_n.

3. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$,$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. K_n.

4. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$,$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. C_n.

Задачі II рівня складності

1. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_n A_{n+1}}|$.

2. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{B_n B_{n+1}}|$.

5. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{\mathcal{E}_n \mathcal{E}_{n+1}}|$.

19. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{F_n F_{n+1}}|$.

20. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_1 \mathrm{N}_{n+1}}|$.

21. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$.

22. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{r_n\ r_{n+1}}|$.

Задачі III рівня складності

1. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta K_n A_{2n} N_n}\right|$.

2. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta K_n N_n A_{2n+2}}\right|$.

9. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\mathcal{L}_1 B_{n+1} A_{2n+2}}\right|$.

10. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{R_{2n-1} R_{2n+1} R_{2n+2} R_{2n}}\right|$.

Задачі IV рівня складності

1. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – величини об’ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{R_{2n} F_{n+1}}$ навколо осі OX.

2. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – величини об’ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{C_n M_n}$ навколо осі OX.

Створена система числових рядів може використовуватись як на заняттях з математичного аналізу при вивчені розділу «Числові ряди», так і для формулювання задач шкільних математичних олімпіад, а також олімпіад III і IV курсів студентів спеціальності MI [24, с. 74]

Висновки до 3 розділу

Використання геометричних інтерпретацій числових послідовностей у шкільних підручниках не розглядається. Але це є суттєвим недоліком при навчанні з математики учнями з поглибленим вивченням математики для учнів ліцеїв у процесі набуття знань та практичного застосування числових послідовностей.

Використання геометричних інтерпретацій числових рядів дає можливість здійснювати в навчанні дидактичний принцип візуалізації, і, в той же час, створювати різні види числових рядів для використання на практичних заняттях, які пов’язані зі знаходженням послідовності довжин послідовності відрізків; послідовності площ плоских фігур; послідовності об'ємів тіл обертання навколо осей ОХ, ОУ.

Ми розглянули 47 задач для учнів та 53 задачі для студентів на складання нескінченої геометричної спадної прогресії, члени якої показникова функція.

І головне, це дозволяє створювати числові послідовності з можливістю візуалізації членів ряду.

ВИСНОВКИ

Аналізуючи наукові джерела було досліджено, щодо історії виникнення

Тема роботи актуальна і своєчасна, це зумовлено тим, що цей розділ математики, дозволяє вирішити будь-яке коректно поставлене завдання, зокрема в розділі «Ряди».

Але до цього часу студентам пропонується в підручниках, збірниках задач добірка великої кількості теоретичного матеріалу, приклади задач з математичного аналізу, і скрізь майже відсутня візуалізація побудови числових рядів. Теж саме можна сказати про подачу матеріалу з теми "Послідовності" у школі. У більшості студентів та учнів зникає інтерес бажання зрозуміти й глибоко засвоїти тему «Числові ряди».

Тому в роботі для більш глибокого зрозуміння і доведенні в необхідності даної теми були розглянуті основні поняття числових рядів, збіжність та їх сума. Вивчення цієї проблеми було можливе за допомогою заданої геометричної моделі і комбінації рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ та системи задач на комбінацію числових рядів, дослідження числових рядів, їх основних понять та особливостей збіжності ряду, що дало змогу скласти достатню кількість задач для студентів й учнів з класів з поглибленим вивченням математики. Задачі було досліджено і з'ясовано, що одержані ряди є рядами геометричних прогресій з загальним членом $\frac{1}{2^{n-1}}$, де $q < 1$ і з'ясовано, що збіжність одержаних рядів можна візуально спостерігати за допомогою відповідних елементів, розташованих в базовому квадраті геометричних інтерпретацій. Зважаючи на цю проблему, на базі елементів, вписаних в квадрат зі стороною 1, можна генерувати інші числові ряди точкової, лінійної, квадратурної та кубатурної геометричної інтерпретації. Використовуючи задану геометричну модель одержали і дослідили на збіжність числові ряди.

Подані способи та алгоритми, які за допомогою інформаційних технологій дають можливість дослідити швидкість зміни частинних сум ряду, які його утворюють. Дослідили характер зростання частинних сум S_n одержаних рядів в залежності від зміни значень $n \in N$.

Складено добірку задач з геометричної інтерпретацією для використання при вивченні розділу «Числові ряди» в процесі підготовки студентів. Також складено й показано розв'язки задач для використання при проведенні математичних олімпіад для учнів в ліцеях та профільних школах. Застосування геометричних моделей при вивченні теми «Числові послідовності» учнями ліцеїв.

Дослідження виконували з урахуванням міжпредметних зв'язків: шкільного курсу математики, алгебри, аналітичної геометрії і математичного аналізу в роботі використані сучасні інформаційні технології і онлайн-сервіси.

СПИСОК ВИКОРИСТАННОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Анпілогов Д.І., Сніжко Н.В. Ряди: навч. посібник / Д.І. Анпілогов, Н.В. Сніжко. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2018. – 124 с.
2. Бевз Г. П. Алгебра: підручник для 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – Київ: Освіта, 2017. – 272 с.
3. Бобирь В.Д. Застосування ІКТ при вивченні числових та степеневих рядів/ В.Д. Бобирь, В.В. Корольський// Крок у науку: дослідження у галузі природничо-метаматичних дисциплін та методик їх навчання: Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів і молодих учених (Чернігів, 27 листопада 2019 р.) матер. тез – Чернігів, 2019.
4. Бугрим О.В. Числові та степеневі ряди. Приклади їх застосування: навч. посіб. для студ. напряму підгот. 6.050301 Гірництво / О.В. Бугрим, Л.Й. Бойко; М-во освіти і науки України; Нац. гірн. ун-т. – Д.: НГУ, 2014. – 82 с.
5. Габ С.С. Геометрична інтерпритація числових рядів, пов'язаних з фракталами / С.С. Габ // Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції молодих дослідників «Співдружність наук. Барановичі – 2018» (Барановичі, 17 травня 2018 р.). – Барановичі, 2018. – с. 50 – 51.
6. Габ С.С. Числові ряди, які пов’язані з парадоксом Шварца / С.С. Габ // Актуальні аспекти фундаменталізації метематичної підготовки в 64 сучасних вищих навчальних закладах. Погляд студентів та молодих вчених: Всеукр. науково-практична конф. здобувачів вищої освіти та молодих вчених (Харків, 12 – 13 квітня 2018 р.): матер. доповідей та виступів. – Харків, 2018. – с. 114 – 117.
7. Герега А. М. Конструктивні фрактали у теорії множин: підруч. / А.М. Герега. – Одеса: «Освіта України», 2017. – 85 с.
8. Дзигарська Н. С., Корольський В. В., Михайлова Я. А., Тураєва О. В. Застосування геометричних моделей при вивченні теми «Числові послідовності» учнями ліцеїв. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти» Випуск 22. Суми, 2023.

9. Дзигарська Н. С., Корольський В. В., Тураєва О. В. Генерація числових рядів з використанням послідовностей геометричних об’єктів, вписаних у квадрат з параметром $a = 1$ в системі координат Oxy. Наукові записки молодих учених № 10. 2022.

10. Істер О. С. Алгебра: підручник для 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів / О. С. Істер . – Київ: Генеза, 2017. – 264 с.

11. Комарова А. А. Побудова і дослідження числових рядів, пов'язаних з елементами квадрата «тангарам»: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр спеціальності 014.04 середня освіта (математика), наук. керівник В. В. Корольський. Кривий Ріг, 2020. 100 с.

12. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числових рядів / В. В. Корольський. // Новітні комп’ютерні технології : наук.-метод. зб / редкол. : С. О. Семеріков [та ін.] . – Кривий Ріг, 2017. – Том XV. – С. 57–63.

13. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії / В. В. Корольський. // Новітні комп’ютерні технології : наук.-метод. зб / редкол. : С. О. Семеріков [та ін.] . – Кривий Ріг, 2018. – Том XVI. – С. 59–66.

14. Корольський В. В. Лінійна, квадратурна та кубатурна геометрична інтерпретація числових рядів засобами моделювання / Корольський В. В., Габ С.С. // Новітні комп’ютерні технології.: Видавничий центр ДВНЗ «Криворізький національний університет». - Кривий Ріг, 2018. – Том XVI. – С. 67-73.

15. Корольський В. В., Шокалюк С. В., Мельниченко Ю. А. Теоретико-методичні засади геометричного моделювання числових рядів. Фізико-математична освіта. Випуск 4 (18). 2018. С. 81-89.

16. Корольський В.В. Математичний аналіз. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної / В.В. Корольський – Кр. Ріг, 2013 – 398с.

17. Корольський В.В. Числові ряди, які пов'язані з параметрами додекаедра / В.В. Корольський, С.С. Габ // Вісник міжнародного дослідницького центру «Людина: мова, культура, пізнання»: науковий журнал / за ред.. В. В. Корольського. – Кривий Ріг, 2018. – Том 42. – с. 39- 45.

18. Крюков М. М. До історії розвитку і становлення теорії нескінченних числових рядів / М. М. Крюков, Т. С. Клецька // Математичне моделювання – 2013. – № 6. – С. 117 – 120.

19. Крюков М. М. З історії нескінченних числових рядів / М. М. Крюков, Т. С. Клецька // Історія науки і техніки. – 2013. – №3. - С. 166. - Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ictnt_2013_3_25.

20. Ламтюгова С. М. Ряди та їх застосування у схемах і таблицях : навч. довід. для самост. вивч. вищої математики (для студентів 1–2 курсів денної та заочної форм навчання) / С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова, Г. А. Кузнецова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 103 с.

21. Мурашковська В.П. Числові ряди. Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни „Вища математика" для студентів інженерних спеціальностей./Укл.: В.П. Мурашковська, Л.А. Руновська– Чернігів: ЧНТУ,2018, - 45с.

22. Няньчук В. В. Генерація числових рядів за допомогою функції $y = \frac{1}{2^{n-1}}x$ і квадрата зі стороною a = 1: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр спеціальності 014.04 середня освіта (математика), наук. керівник В. В. Корольський. Кривий Ріг, 2021. 97 с.

23. Примакова О. Ю. Генерація числових рядів за допомогою функції $y = \frac{1}{n}x$ і квадрата зі стороною a = 1: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр спеціальності 014.04 середня освіта (математика), наук. керівник В. В. Корольський. Кривий Ріг, 2021. 84 с.

24. Романова А. М. Генерація числових рядів та дослідження їх на збіжність: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр спеціальності 014.04 середня освіта (математика), наук. керівник В. В. Корольський. Кривий Ріг, 2019. 90 с.

25. Христюк А. М. Реалізація дидактичного принципу наочності при вивченні числових рядів / В. Д. Бобирь, А. М. Христюк, // X Міжнародна конференція молодих вчених «Молоді вчені 2019 – від теорії до практики», м. Дніпро, 7 березня 2019р. – Дніпро, 2019. 404с.

26. Чернєй М.І. Числові та функціональні ряди. Ряди Фур'є. Метод. вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів енергетичних спеціальностей усіх форм навчання / Уклад.: М.І. Чернєй, Г.К. Новикова, Н.Л. Денисенко. — К.: НТУУ "КПІ", 2016. — 62 с.

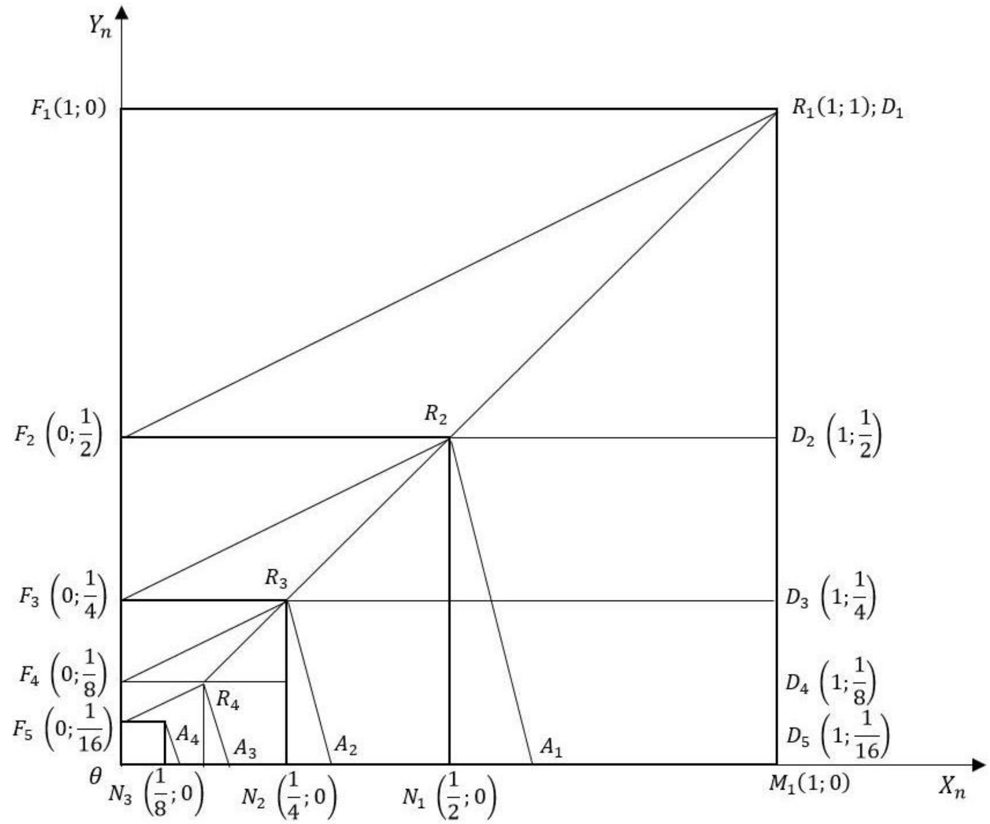
27. Шкіль М. І. Математичний аналіз, ч II: Посібник для пед. інститутів. Київ, 1981. 456 с.

28. Щоголєв С. А Теорія рядів: навчально-методичний посібник / С. А. Щоголєв. – Одеса: «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2015. – 76 с.

29. Ярхо Т. О. Теорія числових рядів: смисловий, доказовий, практичний аспекти: навчально-методичний посібник / Т.О. Ярхо – Х.: ХНАДУ, 2017. – 60 с.

ДОДАТКИ

Додаток А



На сторонах квадрата $\theta F_1R_1M_1$ зі стороною a = 1 розташовані послідовності т.т. $F_n\left(0;\frac{1}{2^{n-1}}\right)$, $D_n\left(1;\ \frac{1}{2^n}\right)$, $N_n\left(\frac{1}{2^{n-1}};0\right)$, $R_n\left(\frac{1}{2^{n-1}};\frac{1}{2^{n-1}}\right)$, $n \in N$.

Використовуючи послідовності координат т.т. F_n, D_n, R_n, N_n, F_{n+1}, A_n, D_{n+1}, R_{n+1}, розв'язати наступні задачі на визначення послідовності за допомогою квадрата з параметром $a = 1$ (сторона квадрата) та вписаних в нього геометричних об'єктів.

I. <u>Задачі першого рівня складності.</u>

1. Визначити послідовності координат послідовності точки F_n.
2. Визначити послідовності координат послідовності точки D_n.
3. Визначити послідовності координат послідовності точки R_n.
4. Визначити послідовності координат послідовності точки N_n.
5. Визначити послідовності координат послідовності точки F_{n+1}.

6. Визначити послідовності координат послідовності точки A_n.
7. Визначити послідовності координат послідовності точки D_{n+1}.
8. Визначити послідовності координат послідовності точки R_{n+1}.
9. Визначити послідовності координат послідовності точки M_n.
10. Визначити послідовності координат послідовності точки M_{n+1}.
11. Визначити послідовності координат послідовності точки T_n.
12. Визначити послідовності координат послідовності точки T_{n+1}.

Знаходження числових послідовностей лінійної геометричної інтерпретації.

II. <u>Задачі другого рівня складності.</u>

1. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{M_n M_{n+1}}$.
2. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{N_n N_{n+1}}$
3. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{F_n F_{n+1}}$.
4. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{D_n D_{n+1}}$.
5. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{N_n M_n}$.
6. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{R_n R_{n+1}}$.
7. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{A_n N_n}$.
8. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{F_n R_n}$.
9. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{F_n R_{n+1}}$.
10. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{F_{n+1} R_{n+1}}$.
11. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{A_n R_{n+1}}$.
12. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{F_n R_{n+1}}$.
13. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{R_{n+1} D_n}$.
14. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{R_{n+1} D_{n+1}}$.
15. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{F_{n+1} R_n}$.
16. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $\overline{T_n T_{n+1}}$.

Знаходження числових послідовностей квадратної геометричної інтерпретації.

III. <u>Задачі третього рівня складності.</u>

1. Визначити послідовності площ послідовності прямокутника $F_{n+1}F_nR_nT_n$.
2. Визначити послідовності площ послідовності квадрата $\theta F_nR_nM_n$.
3. Визначити послідовності площ послідовності прямокутника $F_{n+1}F_nR_nT_n$.
4. Визначити послідовності площ послідовності $\Delta R_{n+1}R_nD_n$.
5. Визначити послідовності площ послідовності $\Delta F_{n+1}R_nD_n$.
6. Визначити послідовності площ послідовності $\Delta F_{n+1}F_nD_n$.
7. Визначити послідовності площ послідовності $\Delta R_{n+1}N_nA_n$.
8. Визначити послідовності площ послідовності $\Delta F_{n+1}D_nR_{n+1}$.
9. Визначити послідовності площ послідовності $\Delta F_nF_{n+1}D_n$.
10. Визначити послідовності площ послідовності $\Delta F_{n+1}R_nF_{n+2}$.
11. Визначити послідовності площ послідовності $\Delta F_nF_{n+1}R_n$.
12. Визначити послідовності площ послідовності трапеції $M_nR_nR_{n+1}M_{n+1}$.
13. Визначити послідовності площ послідовності трапеції $M_nR_nF_{n+1}\theta$.
14. Визначити послідовності площ послідовності трапеції $A_nK_nT_{n+1}N_n$.

Знаходження числових послідовностей кубатурної геометричної інтерпретації членів.

IV. <u>Задачі четвертого рівня складності.</u>

1. Визначити послідовності об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{F_nR_n}$, навколо осі OX.
2. Визначити послідовності об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{R_{n+1}D_n}$, навколо осі OX.
3. Визначити послідовності об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{F_{n+1}R_{n+1}}$, навколо осі OX.

4. Визначити послідовності об'ємів послідовності тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{OR_n}$, навколо осі OX.

5. Визначити послідовності об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{R_{n+1}A_n}$, навколо осі OX.

6. Визначити послідовності об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{F_{n+1}R_n}$, навколо осі OX.

7. Визначити послідовності об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{R_{n+1}R_n}$, навколо осі OX.

Для розв'язування задач I рівня застосуємо алгебраїчні методи у геометрії. Члени послідовності координат точок F_n, D_n, R_n є послідовність спадаючої геометричної прогресії. Достатньо скористатися візуалізацією умови задачі і послідовності координат точок F_n, D_n, R_n. Проводячи аналіз результатів записати загальний член шуканої послідовності.

Задача 1. Визначити послідовності координат послідовності точки F_n.

Розв'язання

На моделі квадрата візуально спостерігаємо, що абсциса точки F_n дорівнює 0, тобто x_1=0, x_2=0, x_3=0 ... , x_n=0, Послідовність, усі члени якої дорівнюють нулю, є лише арифметичною прогресією. А ординати y_1=1, $y_2=\frac{1}{2}$, $y_3=\frac{1}{4}$, $y_4=\frac{1}{8}$, ..., $y_n=\frac{1}{2^{n-1}}$, є послідовністю спадної геометричною прогресією, перший член, якої дорівнює $a_1 = 1$, а знаменик $q = \frac{1}{2}$. Отже $\forall\ n \in N$ точка F_n має координати $\left(0; \frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

Задача 2. Визначити послідовності координат послідовності точки D_n.

Розв'язання

На моделі квадрата візуально спостерігаємо, що абсциса точки D_n дорівнює, тобто x_1=1, x_2=1, x_3=1 ... , $x_n=1^n$, Послідовність, усі члени якої дорівнюють одиниця, є геометричною прогресією. А ординати, $y_1=\frac{1}{2}$, $y_2=\frac{1}{4}$, $y_3=\frac{1}{8}$, ..., $y_n=\frac{1}{2^n}$, є послідовністю спадної геометричною прогресією, перший член, якої дорівнює $a_1 = \frac{1}{2}$, а знаменик $q = \frac{1}{2}$. Отже $\forall\, n \in N$ точка D_n має координати $\left(1; \frac{1}{2^n}\right)$.

Задача 3. Визначити послідовності координат послідовності точки R_n.

Розв'язання

На моделі квадрата візуально спостерігаємо, що координати точки R_n , тобто абсциса дорівнює: $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=\frac{1}{4}$ ... , $x_n=\frac{1}{2^{n-1}}$, . а ординати, $y_1=1$ $y_2=\frac{1}{2}$, $y_3=\frac{1}{4}$, $y_4=\frac{1}{8}$, ..., $y_n=\frac{1}{2^{n}-1}$. Ми бачимо, що послідовності, кожної із координат є спадної геометричною прогресією, перший член, якої дорівнює $b_1 = 1$, а знаменик $q = \frac{1}{2}$. Отже $\forall\, n \in N$ точка R_n задається послідовностями $\left(\frac{1}{2^{n-1}}; \frac{1}{2^{n}-1}\right)$.

Задачі II рівня можна розв'язати 3 способами: усно підрахувати довжини відрізків, використовуючи формулу відстані між двома точками, за їх координатами (тема "Декартові координати на площині", геометрії 9 клас) і за формулою теореми Піфагора (тема "Розв'язування прямокутних трикутників", геометрія 8 клас).

<u>Спосіб 1.</u>

Задача 1. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $M_n\, M_{n+1}$.

Розв'язання

Візуально на рисунку ми бачимо, $M_1M_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $M_2M_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $M_3M_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$.

Аналізуючи довжини трьох відрізків, знаходимо $M_nM_{n+1} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{2-1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Шукана послідовність довжин відрізків $b_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

<u>Спосіб 2.</u>

Задача 8. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $F_n\, R_n$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $F_n; R_n$за формулою обчислення відстані між двома точками:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, де F_n (x_1, y_1) і R_n (x_2, y_2) координати заданих кінців відрізків.

За цією формулою легко знайти довжини відрізків:

$F_1; R_1 = \sqrt{(0-1)^2 + (1-1)^2} = 1;$

$F_2; R_2 = \sqrt{\left(0-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0} = \frac{1}{2};$

$F_3; R_3 = \sqrt{\left(0-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 0} = \frac{1}{2^2};$

$F_4; R_4 = \sqrt{\left(0-\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + 0} = \frac{1}{2^3};$

. . . .

$F_n; R_n = \sqrt{\left(0-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + 0} = \frac{1}{2^{n-1}};$

Шукана послідовність довжин відрізків $b_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

Спосіб 3.

Задача 15. Визначити послідовності довжин послідовності відрізків $F_{n+1}R_n$.

Розв'язання

Довжину відрізка $F_2\ R_1$знайдемо з прямокутного трикутника $F_2F_1R_1$. За теоремою Піфагора.

$F_2\ R_1 = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

Аналогічно знайдемо $F_3\ R_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}}, = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$

$F_4\ R_3 = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{64}} = \sqrt{\frac{5}{64}} = \frac{\sqrt{5}}{8}.$

Звідси $F_{n+1}\ R_n = \sqrt{\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2^{2n-2}} + \frac{1}{2^{2n}}} = \sqrt{\frac{4}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}}}\sqrt{\frac{5}{2^{2n}}} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$.

Шукана послідовність довжин відрізків $b_n = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$.

Всі інші задачі II рівня розв'язують одним поданих способів приведених прикладах.

До задач III рівня відносяться, задачі на знаходження послідовностей площ послідовностей прямокутників, трикутників, трапеції. Для цього необхідно згадати, що розглядаємо нескінченно малі послідовності, значення всіх її елементів – починаючи з деякого номера – стають за абсолютною величиною меншими за будь-яке позитивне число ε. Учням необхідно знати крім формул площ цих фігур і вибрати спосіб (розглянутих нами в II розділі) для обчислення довжин сторін фігур, але й властивості нескінченно малих послідовностей. А саме: Добуток нескінченно малої послідовності та обмеженої послідовності є нескінченно мала послідовність. Проілюструємо на прикладах.

Задача 1. Визначити послідовності площ послідовності прямокутників $F_{n+1}F_nR_nT_n$.

Розв'язання

Знайдемо сумісних довжини сторін прямокутника $F_2F_1R_1T_1$. Візуально ми бачимо, що $F_2F_1 = \frac{1}{2}$, $F_2T_1 = 1$;

в прямокутнику $F_3F_2R_2T_2$ довжини сторін $F_3F_2 = \frac{1}{4}$, $F_3T_2 = \frac{1}{2}$;

в прямокутнику $F_4F_3R_3T_3$ довжини сторін $F_4F_3 = \frac{1}{8}$, $F_4T_3 = \frac{1}{4}$;

в прямокутнику $F_5F_4R_4T_4$ довжини сторін $F_5F_4 = \frac{1}{16}$, $F_5T_4 = \frac{1}{8}$;

. . . .

в прямокутнику$F_{n+1}F_nR_nT_n$ довжини сторін $F_{n+1}F_n = \frac{1}{2^n}$, $F_{n+1}T_n = \frac{1}{2^{n-1}}$;

Ми бачимо, відповідних довжини сторін цих прямокутників є нескінченні малі послідовності і є спадні геометричні прогресії: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \frac{1}{2^n}$, та, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \frac{1}{2^{n-1}}$.

Знайдемо добуток відповідних її членів:

$1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$; $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$; ...; $\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{2n-1}}$. Їх результат теж є нескінченна мала послідовність $\frac{1}{2}; \frac{1}{8}; \frac{1}{32}$; . . .; $\frac{1}{2^{2n-1}}$, згідно властивості нескінченно малих послідовностей. Але добуток сумісних сторін прямокутника є площа прямокутника з цими сторонами. Тобто ми знайшли шукану послідовність площ послідовності прямокутників $F_{n+1}F_nR_nT_n$.

Аналогічно ми можемо знайти послідовність площ послідовностей трикутників, трапецій за формулами цих фігур. Розглянемо приклади розв'язування цих задач.

Задача 10. Визначити послідовності площ послідовності $\Delta F_nF_{n+1}R_n$.

Розв'язання

Знайдемо площу трикутника за формулою:

$S = \frac{1}{2}ah$, де a- довжина основи, h- довжина висоти.

Розглянемо $\Delta F_1F_2R_1$, основа якого, як бачимо візуально, $F_1R_1 = 1$, висота $F_1F_2 = \frac{1}{2}$. Отже, $S_{\Delta F_1F_2R_1}. = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$:

з $\Delta F_2F_3R_2$ бачимо, що $F_2R_2 = \frac{1}{2}$, $F_2F_3 = \frac{1}{4}$, звідси $S_{\Delta F_2F_3R_2}. = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$:

з $\Delta F_3F_4R_3$ бачимо, що $F_3R_3 = \frac{1}{4}$, $F_3F_4 = \frac{1}{8}$, звідси$S_{\Delta F_3F_4R_3}. = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$:

. . . .

В $\Delta F_nF_{n+1}R_n$ $F_nR_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, $F_nF_{n+1} = \frac{1}{2^n}$, тоді $S_{\Delta F_nF_{n+1}R_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2n}}$.

Шукана послідовність площ послідовності трикутників $F_nF_{n+1}R_n$ $-\left\{\frac{1}{2^{2n}}\right\}$.

Задача 13. Визначити послідовності площ послідовності трапеції $M_nR_nF_{n+1}\theta$.

Розв'язання

Знайдемо площу трапеції за формулою:

$S = \frac{a+b}{2} h$, де a, b- довжини нижньої та верхньої основ, h- довжина висоти.

Розглянемо трапецію $M_1R_1F_2\theta$, основи якої, як бачимо візуально, $M_1R_1 = 1$, $\theta F_2 = \frac{1}{2}$, а висота $\theta M_1 = 1$. Отже $S_{тр.} = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4}$;

з трапеції $M_2R_2F_3\theta$ бачимо, що основи $M_2R_2 = \frac{1}{2}$, $\theta F_3 = \frac{1}{4}$, висота $\theta M_2 = \frac{1}{2}$, звідси

$S_{тр} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$;

з трапеції $M_3R_3F_4\theta$ бачимо, що основи $M_3R_3 = \frac{1}{4}$, $\theta F_4 = \frac{1}{8}$, висота $\theta M_3 = \frac{1}{4}$, звідси

$S_{тр} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$;

. . . .

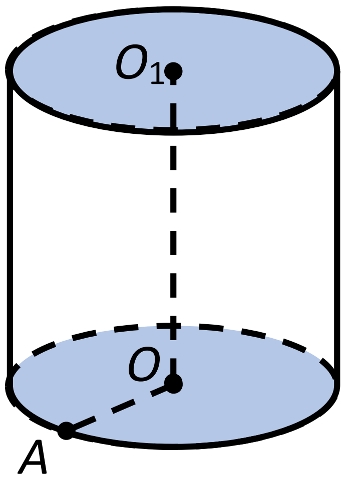
з $M_nR_nF_{n+1}\theta$ знайдемо основи $M_nR_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, $\theta F_{n+1} = \frac{1}{2^n}$, висота $\theta M_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, звідси

$S_{тр} = \frac{\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^{2n}}$.

Шукана послідовність площ послідовності трапеції $M_nR_nF_{n+1}\theta - \left\{\frac{3}{2^{2n}}\right\}$.

До задач IV рівня відносяться, задачі на знаходження послідовностей об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих навколо вісі координат. Учням треба визначити, яке тіло обертання при цьому отримуємо: циліндр, конус, зрізаний конус та формули об'ємів цих фігур. Далі одним з способів поданих у II рівня знайти послідовності довжин послідовності відрізків. Аналогічно до III рівня застосуємо властивості нескінченно малих послідовностей, щодо можливості знайти послідовність об'ємів тіл обертання. Проілюструємо на прикладах.

Задача 1 Визначити послідовності об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих F_nR_n, навколо вісі OX.



Розв'язання

Відрізок послідовності прямих F_nR_n обертається навколо вісі *OX*. В результаті

отримуємо циліндр. Знайдемо об'єм циліндра за формулою:

$V = \pi r^2 h$, *де* r – радіус основи кіл циліндрів, h – його висоти, тобто:

висота циліндрів h є відрізки F_1R_1, F_2R_2, F_3R_3, F_4R_4,. . ., F_nR_n;

радіуси кіл основ r – R_1M_1, R_1M_2, R_3M_3, R_4M_4, . . . R_nM_n,

Відрізки довжин висот, визначаємо візуально: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}$;

Аналогічно, довжини відрізків радіусів, візуально дорівнюють: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}$.

Тому $V_1 = \pi 1^2 1 = \pi$;

$$V_2 = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2^3};$$

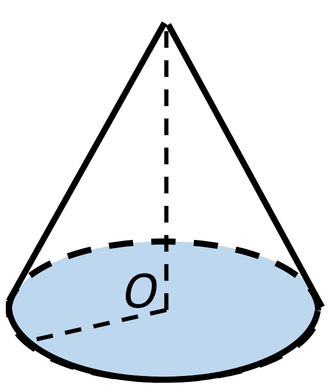
$$V_3 = \pi \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{64} = \frac{\pi}{2^6};$$

$$V_4 = \pi \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{512} = \frac{\pi}{2^9};$$

. . . .

$$V_n = \pi \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\pi}{2^{3n-3}}.$$

Шукана послідовність $\left\{\frac{\pi}{2^{3n-3}}\right\}$.



Задача 4. Визначити послідовності об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих OR_n, навколо вісі OX.

Розв'язання

Відрізок послідовності прямих OR_n обертається навколо вісі *OX*. В результаті отримуємо конус. Знайдемо об'єм конуса за формулою:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, *де* r – радіус основи кіл конуса, h – його висоти.

Висота конусів h є відрізки $OM_1, OM_2, OM_3, OM_4, \ldots, OM_n$; радіуси кіл основ r – $R_1M_1, R_2M_2, R_3M_3, R_4M_4, \ldots R_nM_n$,

Відрізки довжин висот, визначаємо візуально: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}$;

Аналогічно, довжини відрізків радіусів, візуально дорівнюють: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}$.

Тому $V_1 = \frac{1}{3}\pi 1^2 1 = \pi;$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3\cdot 8} = \frac{\pi}{3\cdot 2^3};$$

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{3\cdot 64} = \frac{\pi}{3\cdot 2^6};$$

$$V_4 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{3\cdot 512} = \frac{\pi}{3\cdot 2^9};$$

. . . .

$$V_n = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\pi}{3\cdot 2^{3n-3}}.$$

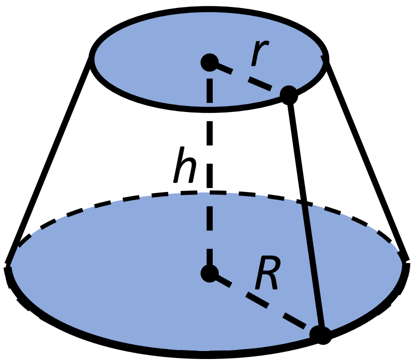
Шукана послідовність $\left\{\frac{\pi}{3\cdot 2^{3n-3}}\right\}$.

Задача 7. Визначити послідовності об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $R_{n+1}R_n$, навколо осі OX.

Розв'язання

При обертанні відрізків послідовності прямих $R_{n+1}R_n$, отримуємо усічені конуси. де R - радіус нижньої основи,

r - радіус верхньої основи, h - висота конуса.



Об'єм зрізаного конуса визначається за формулою: $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$.

Висота конусів h є відрізки $M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_5,. . . M_nM_{n+1}$;

радіуси кіл верхніх основ -

R – $R_1M_1, R_2M_2, R_3M_3, R_4M_4, . . . R_nM_n,$

радіуси кіл нижніх основ - r – $R_2M_2, R_3M_3, R_4M_4, . . . R_nM_n,$

Відрізки довжин висот, визначаємо візуально: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, . . ., \frac{1}{2^n}$;

Аналогічно, довжини відрізків радіусів нижніх та верхніх основ, візуально дорівнюють: (R)- 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, . . ., \frac{1}{2^{n-1}}$;

(r) - $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, . . ., \frac{1}{2^n}$;

Тому $V_1 = \frac{1}{3}\pi\frac{1}{2}\left(1^2 + 1\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{7\pi}{24} = \frac{7\pi}{3\cdot2^3}$;

$V_2 = \frac{1}{3}\pi\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = \frac{7\pi}{192} = \frac{7\pi}{3\cdot2^6}$;

$V_3 = \frac{1}{3}\pi\frac{1}{8}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} + \left(\frac{1}{8}\right)^2\right) = \frac{7\pi}{1536} = \frac{7\pi}{3\cdot2^9}$;

. . . .

$V_n = \frac{1}{3}\pi\frac{1}{2^n}\left(\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2^n} + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2\right) = \frac{7\pi}{3\cdot2^{3n}}$.

Шукана послідовність $\left\{\frac{\pi}{3\cdot2^{3n}}\right\}$.

Додаток Б

Задачі для студентів

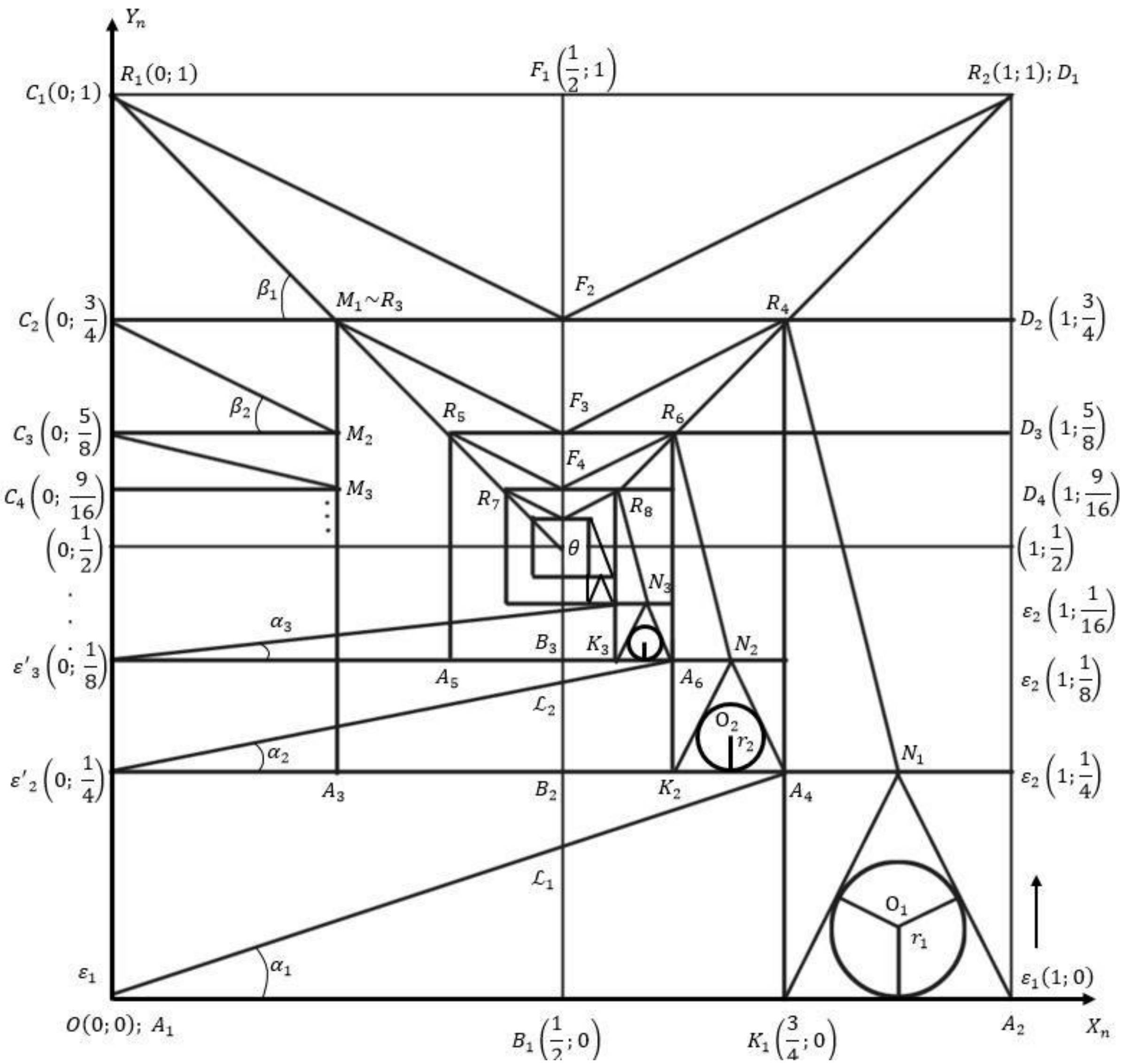


рис. Б.1 Квадрат з параметром (стороною) $a = 1$

Точки $C_n, D_n, \varepsilon_n, \varepsilon'_n$ розподілені по сторонам цих квадратів змінюються за законом геометричної прогресії зі знаменником $q = \frac{1}{2}$ і мають координати.

$C_n\left(0;\frac{2^{n-1}+1}{2^n}\right), D_n\left(0;\frac{2^{n-1}+1}{2^n}\right), \varepsilon_n\left(1^n;\frac{2^{n-1}-1}{2^n}\right),\ \varepsilon'_n\left(1^{n-1};\frac{2^{n-1}-1}{2^n}\right).$

Задачі І рівня складності

1. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. A_n.

2. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. B_n.

3. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. K_n.

4. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. C_n.

5. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. D_n.

6. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. ε_n.

7. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. ε'_n.

8. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. M_n.

9. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. F_n.

10. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. R_n.

11. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. N_n.

12. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. O_n.

Задачі II рівня складності

1. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{A_n A_{n+1}}|$.

2. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{B_n B_{n+1}}|$.

3. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{C_n C_{n+1}}|$.

4. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{D_n D_{n+1}}|$.

5. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{\mathcal{E}_n\mathcal{E}_{n+1}}|$.

6. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{K_nN_n}|$.

7. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{K_nA_{2n}}|$.

8. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{C_{n+1}M_n}|$.

9. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{\varepsilon'_n\mathrm{A}_{2n+2}}\right|$.

10. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{K_n\mathrm{A}_{2n}}|$.

11. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{R_nR_{n+1}}|$.

12. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{R_{2n}R_{2n+2}}|$.

13. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{R_{2n}F_{n+1}}|$.

14. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{N_nN_{n+1}}|$.

15. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{N_n\mathrm{R}_{2n+2}}|$.

16. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{\mathrm{R}_{2n-1}F_{n+1}}|$.

17. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_{2n-1}F_n}|$.

18. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_{2n-1}F_n}|$.

19. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{F_nF_{n+1}}|$.

20. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_1\mathrm{N}_{n+1}}|$.

21. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$.

22. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{r_n\ r_{n+1}}|$.

23. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|O_nO_{n+1}|$.

24. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{O_n\theta}\right|$.

25. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{N_n\theta}\right|$.

26. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{R_nR_{n+1}}|$.

Задачі III рівня складності

1. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta K_nA_{2n}N_n}\right|$.

2. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta K_nN_nA_{2n+2}}\right|$.

3. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta\varepsilon'_nK_nK_{n+2}}\right|$.

4. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta N_n A_{2n+2} R_{2n+2}}\right|$.

5. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta R_{2n-1}\, R_{2n+1} F_{n+1}}\right|$.

6. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta R_{2n-1}\, F_{n+1} F_n}\right|$.

7. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta C_{n+1}\, M_n C_{n+2}}\right|$.

8. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta R_2\, R_{2n+2} D_{n+1}}\right|$.

9. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\mathcal{L}_1 B_{n+1} A_{2n+2}}\right|$.

10. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{R_{2n-1} R_{2n+1} R_{2n+2} R_{2n}}\right|$.

Задачі IV рівня складності

1. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – величини об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{R_{2n}F_{n+1}}$ навколо осі OX.

2. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – величини об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{C_n M_n}$ навколо осі OX.

3. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – величини об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{\mathcal{E}'_n \mathrm{A}_{2n+2}}$ навколо осі OX.

4. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – величини об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{\mathrm{A}_{2n} N_n}$ навколо осі OX.

5. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – величини об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{K_n N_n}$ навколо осі OX.

Приклади розв'язання задач для студентів.

Приклади розв'язання задач I рівня складності.

Задача 6. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n,\ y_n)$ – координати послідовності т.т. ε_n.

Розв'язання

Точка $\mathcal{E}_n$ розподілена на стороні квадрата $A_2\mathcal{E}_1\theta.$ Числові ряди її координат пов'язані з нескінченною спадною геометричною прогресією. Тому т.$\mathcal{E}_n(1^{\text{п}}; \frac{2^n-1}{2^{n+1}})$

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = 1^n$,

$\sum_{n-1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}}$.

Задача 9. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т.т. F_n.

Розв'язання

Точка F_n розподілена на сторони квадрата $C_1F_1\theta$, Числові ряди її координат пов'язані з нескінченною спадною геометричною прогресією.

Тому т. F_n $\left(\left(\frac{1}{2}\right) 1^{\text{п}}; \frac{2^{n-1}+1}{2^n}), \right)$,

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \left(\frac{1}{2}\right) 1^n$ a, $\sum_{n-1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}+1}{2^n}$.

Задача 10. Знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де (x_n, y_n) – координати послідовності т.т. R_n.

Розв'язання

Точка R_n: якщо $n = 2k - 1$, розподілена на діагоналі квадрата $R_1F_1\theta$, якщо $n = 2k$ розподілена на діагоналі квадрата $R_2F_1\theta$ і числові ряди їх координат пов'язані з нескінченною спадною геометричною прогресією. Тому координати точок відповідно

R_{2k-1} $(\frac{2^n-1}{2^{n+1}}; \frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}})$, R_{2k} $(\frac{2^n+1}{2^{n+1}}; \frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}})$,

Ряди мають вигляд:

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2^n-1}{2^{n+1}} + \frac{2^n+1}{2^{n+1}})$.

$\sum_{n-1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}}$.

Приклади розв'язання задач ІІ рівня складності.

Задача 13. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{R_{2n}F_{n+1}}|$.

Розв'язання

Довжину відрізка $|\overline{R_2\mathrm{F}_2}|$знайдемо з прямокутного трикутника $R_2F_1F_2$.

За теоремою Піфагора.

$\left|\overline{R_2\mathrm{F}_2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{5}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$,

Аналогічно знайдемо $\left|\overline{R_4\mathrm{F}_3}\right|=\frac{\sqrt{5}}{8}$, $\left|\overline{R_6\mathrm{F}_4}\right|=\frac{\sqrt{5}}{16}$... Звідси $\left|\overline{R_{2n}\mathrm{F}_{n+1}}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}$.

Сума шуканого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}$.

Код-алгоритм написаний мовою C++ для знаходження частинних сум заданого ряду для n від 1 до 50000, а точніше для $n=1;\ n=2;\ n=3;\ n=4;\ n=5;\ n=10;\ n=100;\ n=1000;\ n=5000;\ n=20000;\ n=50000.$.

Наведемо приклад виконання для ряду із завдання: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}$. Знайдемо частинні суми заданого ряду.

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <iomanip>

int main() {
  float sum = 0;

  for (int i = 1; i <= 50000; i++) {
    sum += sqrt(5)/pow(2, i + 1);

    switch (i) {
      case 1:
      case 2:
      case 3:
      case 4:
      case 5:
      case 10:
      case 100:
      case 1000:
      case 5000:
      case 20000:
      case 50000:
        std::cout << std::setprecision(20) << "Значення суми, при n = " << i <<
": "<< sum << std::endl;
          break;
      default:
```

```
        if (i > 50000)
        {
          std::cout << "Пошук значення суми не передбачено для цього значення n.";
          return 0;
        }
      break;
    }
  }
}
```

Результат виконання коду-алгоритму для обчислення частинних сум можемо побачити на Рис.

```
Значення суми, при n = 1: 0.5590170025825500488З
Значення суми, при n = 2: 0.8385254740715026855
Значення суми, при n = 3: 0.9782797098159790039
Значення суми, при n = 4: 1.0481568574905395508
Значення суми, при n = 5: 1.0830954313278198242
Значення суми, при n = 10: 1.1169421672821044922
Значення суми, при n = 100: 1.1180338859558105469
Значення суми, при n = 1000: 1.1180338859558105469
Значення суми, при n = 5000: 1.1180338859558105469
Значення суми, при n = 20000: 1.1180338859558105469
Значення суми, при n = 50000: 1.1180338859558105469
```

Рис. Б.2. Результат виконання коду-алгоритму для обчислення частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}$

Задача 18. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{A_{2n-1}F_n}|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $|\overline{A_{2n-1}F_n}|$ за формулою обчислення відстані між двома точками:

$d = \sqrt{(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^2 + (\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1)^2}$, де $A_1(x_1, y_1)$ і $A_2(x_2, y_2)$ [1]

$A_{2\mathrm{n}-1}\left(\frac{2^n-1}{2^{n+1}}; \frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)$, $\mathrm{F}_1\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Тоді відстань між точками:

$\left|\overline{A_{2n-1}F_n}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)^2+\left(1-\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2^n-2^n+1}{2^{n+1}}\right)^2+\left(\frac{2^{n+1}-2^n+1}{2^{n+1}}\right)^2} =$ $\sqrt{\frac{1}{2^{2(n+1)}}+\frac{(2^n+1)^2}{2^{2(n+1)}}} = \frac{\sqrt{1+(2^n+1)^2}}{2^{n+1}}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1+(2^n+1)^2}}{2^{n+1}}$.

Аналогічно можемо розглянути програмний код для знаходження частинних сум ряду із задачі: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1+(2^n+1)^2}}{2^{n+1}}$.

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <iomanip>

int main() {
  long double sum = 0;

  for (int i = 1; i <= 50000; i++) {
    sum += sqrt(1 + pow((pow(2, i) + 1), 2))/(pow(2, i + 1));

    switch (i) {
        case 1:
        case 2:
        case 3:
        case 4:
        case 5:
        case 10:
        case 100:
        case 1000:
        case 5000:
        case 20000:
        case 50000:
          std::cout << std::setprecision(20) << "Значення суми, при n = " << i << ": "<<
sum << std::endl;
            break;
        default:
          if (i > 50000)
          {
            std::cout << "Пошук значення суми не передбачено для цього значення
n.";
```

```
      return 0;
     }
    break;
   }
  }
}
```

Результат виконання коду-алгоритму для обчислення частинних сум можемо побачити на Рис.

```
Значення суми, при n = 1: 0.7905694150420948807
Значення суми, при n = 2: 1.4279468542411929421
Значення суми, при n = 3: 1.9939084253747815234
Значення суми, при n = 4: 2.5260767493099816061
Значення суми, при n = 5: 3.0419384374105808977
Значення суми, при n = 10: 5.5571553788753070835
Значення суми, при n = 100: 50.557643739564916419
```

Рис. Б.3. Результат виконання коду-алгоритму для обчислення частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1+(2^n+1)^2}}{2^{n+1}}$

Приклади розв'язання задач III рівня складності.

Задача 2. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta K_n N_n A_{2n+2}}\right|$.

Розв'язання

$\left|S_{\Delta K_n N_n A_{2n+2}}\right|$ знайдемо за формулою площі трикутника:

S = $\frac{1}{2}ah$, де a- довжина основи, h - довжина висоти.

Розглянемо $\Delta K_n N_n A_{2n+2}$, де його основа $\left|\overline{A_{2n+2}N_n}\right| = \frac{1}{2^{n+2}}$,

висота $\left|\overline{K_n A_{2n}}\right| = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Отже $\left|S_{\Delta K_n N_n A_{2n+2}}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n+2}}\cdot\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{2n+4}}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+4}}$.

Задача 10. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{R_{2n-1}R_{2n+1}R_{2n+2}R_{2n}}\right|$.

Розв'язання

$R_{2n-1}R_{2n+1}R_{2n+2}R_{2n}$ – рівнобедрена трапеція.

Площу трапеції знаходимо за формулою: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, де a і b – нижня та верхня основи $(a||b), h$ - висота трапеції.

$$a: 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots; \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$b: \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots; \frac{1}{2^{n+1}}$$

де $h = \frac{1}{2^{n+1}}$

Обчислюємо площу трапеції:

$$S = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\frac{5}{2^{n+1}}}{2^{n+2}} = \frac{5}{2^{n+3}}$$

Шуканий ряд має вигляд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^{n+3}}$

Ряд збіжний, як ряд геометричної спадної прогресії при $q < 1$.

Задача 5. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – величини об'ємів тіл обертання відрізків послідовності прямих $\overline{K_n N_n}$ навколо осі OX.

Розв'язання

Відрізок $\left|\overline{K_n N_n}\right|$ послідовності прямих обертається навколо осі *OX*. В результаті отримуємо конус (при обертанні прямої $\overline{K_1 N_1}$) і зрізаний конус (при обертанні прямої $\overline{K_{n+1} N_{n+1}}$).

Для знаходження числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$. де V_n величини тіл обертання і $V_n = V_{\text{кон.}} + V_{\text{зр.кон.}}$.

Об'єм конуса знаходимо за формулою: $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi h R^2$, де $h = \frac{1}{8}$, $R = \frac{1}{4}$.

Звідси $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{384}$.

Об'єм зрізаного конуса знаходимо за формулою:

$V_{\text{зр.кон.}}=\frac{\pi}{3}h(R^2+Rr+r^2)$, де R та r - радіуси верхньої та нижньої основи, а h - висота конуса.

$r=\frac{2^n-1}{2^{n+1}}$, $R=\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}}$, $h=\frac{1}{2^{n+3}}$.

Тоді $V_{\text{зр.кон.}}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2^{n+3}}\left(\left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}}\right)^2+\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^n-1}{2^{n+1}}+\left(\frac{2^n-1}{2^{n+1}}\right)^2\right)=\frac{\pi}{3\cdot 2^{n+3}}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+2}}\right)^2++\frac{2^{2n+1}-2^{n+1}-2^n+1}{2^{2n+3}}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2\right)=\frac{\pi}{3\cdot 2^{n+3}}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{2^{2n+4}}+\frac{2\cdot 2^{2n}-3\cdot 2^{n+1}}{2^{2n+3}}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}++\frac{1}{2^{2n+2}}\right)=\frac{\pi}{3\cdot 2^{n+3}}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2^{n+2}}+\frac{5}{2^{2n+4}}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2^{n+3}}+\frac{1}{2^{2n+3}}\right)=\frac{\pi}{3\cdot 2^{n+3}}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{9}{2^{n+3}}+\frac{7}{2^{2n+4}}\right)==\frac{\pi}{2^{n+5}}-\frac{3\pi}{2^{2n+6}}+\frac{7\pi}{2^{3n+7}}$.

Так як $V_n=V_{\text{кон.}}+V_{\text{зр.кон.}}$, звідси

$V_n=\frac{\pi}{384}+\frac{\pi}{2^{n+5}}-\frac{3\pi}{2^{2n+6}}+\frac{7\pi}{2^{3n+7}}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{384}+\frac{\pi}{2^{n+5}}-\frac{3\pi}{2^{2n+6}}+\frac{7\pi}{2^{3n+7}}\right)$.