МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри
_________ Бобилєв Д. Є.
Протокол №_____
«___»_____________ 2023 р.

Реєстраційний № ___________
«_____»_____________ 2023 р.

РОЗРОБКА СИСТЕМИ ЗАДАЧ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТА КОМБІНАЦІЇ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ І $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ ДЛЯ УЧНІВ ЛІЦЕЇВ

Кваліфікаційна робота студентки
фізико-математичного факультету
групи МІм-22
другого (магістерського) рівня
спеціальності 014.01 Середня освіта
(математика)
Тураєвої Ольги Вадимівни
Керівник:
кандидат техн. наук, професор
Корольський Володимир Вікторович
Оцінка:
Національна шкала ____________________
Шкала ECTS _____ Кількість балів ______
Члени комісії:

_______ ___________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

_______ ___________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

_______ ___________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

_______ ___________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

_______ ___________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

Кривий Ріг – 2023

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Тураєва Ольга Вадимівна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело.

Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомлена. Чітко усвідомлюю, що у разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Одним із головних завдань загальної середньої освіти в Україні є формування особистості учня, розвиток його здібностей і обдарувань, наукового світогляду – розвиненої особистості, здатної творчо мислити, швидко набувати нові знання та вміти їх застосовувати до розв'язання нових нестандартних ситуацій [24].

Як зазначено в Проекті концепції розвитку освіти України на період 2015 – 2025 років, освіта має перетворитися на ефективний важіль економіки знань, на інноваційне середовище, в якому учні отримують навички і вміння самостійно оволодівати знаннями протягом життя та застосовувати ці знання в практичній діяльності [23].

Перспективним напрямом реалізації поставлених завдань є формування в учнів задачного підходу, що створить умови для розвитку мислення учнів, умінню нестандартно розв'язувати задачі, підвищенню мотивації навчання, здатності опрацьовувати та трансформувати отримані відомості до потреб навчання, передбачити вірогідні наслідки прийнятих рішень [9].

У процесі вивчення математичних дисциплін будь-яка технологія навчання спрямована на розвиток компетентностей щодо розв’язання задач. В задачниках, які пропонуються для загальноосвітніх закладів пропонуються добірки задач з формально вираженими умовами без поєднання з параметрами реальних об’єктів і явищ. Особливо це стосується задач при вивченні одного з важливих розділів математики «Ряди». Тому створення нових видів задач для вивчення цього розділу, в умовах яких реалізується дидактичний принцип візуалізації, має актуальне значення.

Мета дослідження: розробка системи задач для використання учнями на факультативах, спецкурсах чи підготовці до олімпіади, а також студентами при вивченні розділу «Числові ряди».

Об’єкт дослідження: система задач на комбінацію числових рядів.

Предмет дослідження: система задач на комбінацію числових рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ курсу математики профільної школи.

Завдання даної роботи:

1) аналіз науково-методичної літератури, джерел Інтернету з метою вивчення методики застосування геометричних моделей до розв'язування задач;

2) знаходження числових рядів, пов'язаних з точковою, лінійною, квадратурною та кубатурною геометричними інтерпретаціями;

3) дослідження на збіжність одержаних числових рядів і їх візуалізація;

4) визначення місця та ролі задач в курсі математики профільної школи;

5) розробка задач для практичних занять з дисципліни «Математичний аналіз», а також для олімпіадних задач учнів ліцею.

Для розв'язання завдань нашої роботи використовувалися такі **методи дослідження:**

1. Теоретичий аналіз наукової літератури з теми дослідження.
2. Моделювання – створення геометричної моделі числових рядів.
3. Розрахунок довжин відрізків, площ геометричних фігур і об'ємів тіл обертання.
4. Математичний пошук числових рядів за відомою геометричною інтерпретацією.
5. Задачний підхід – створення системи різнорівневих задач для учнів шкіл та студентів.
6. Поєднання компетентнісного, нестандартного, різнорівневого підходів з родом здіяльності та іншими темами математики.

Апробація дослідження:

1. Опублікована стаття у збірнику «Наукові записки молодих учених» № 10 Кропивницький: РВВ ЦДПУ ім. В. Винниченка.
2. Участь у V Всеукраїнській (з міжнародною участю) науково-практичній конференції молодих учених «Інноваційні педагогічні технології в цифровій школі» 10-11 травня 2023 року м. Харків.
3. Опублікована стаття у збірнику наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти» Випуск 1 (21), 2023, Суми.

4. Опублікована стаття у збірнику наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти» Випуск 22, 2023, Суми.

Структура роботи обумовлена логікою дослідження і складається зі вступу, трьох розділів, висновків до кожного розділу, висновків, списку використаної літератури, що налічує 30 джерел та додатків.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

1.1. Аналіз розвитку теорії числових рядів.

Вивчення теорії рядів починається зі знайомства з її основними поняттями, із встановлення зв'язків між ними та їх властивостей, та потім вказується, на вирішення яких практичних завдань використовується побудована теорія. Однак історичний хід формування наукової теорії майже ніколи не збігається із логікою її вивчення. Найчастіше у процесі розвитку науки практичні завдання ставили вчених перед необхідністю використання того чи іншого наукового апарату, а вже потім він удосконалився, узагальнювався.

Поняття нескінченних сум було відоме ще вченим Стародавньої Греції. Вони застосовували «метод вичерпування» при обчисленні площ фігур та поверхонь, об'ємів тіл, довжин кривих тощо. При цьому розбивали досліджувану лінію, фігуру або тіло на скінченне число частин з відомими довжиною, площею або об'ємом та знаходили суму цих величин. Розробку та застосування цього методу здійснив Евдокс Кнідський (408-355 до н. е.), хоча цю ідею намагався оформити ще Антифон (V ст. е.). «Метод вичерпування» застосовувався і Евклідом (325-265 до н.е.), і Архімедом (III ст. до н.е.), і Паппом Олександрійським (IV ст). Складовою цього методу було і знаходження суми нескінченні кількості доданків. Так, Архімед для обчислення площі сегмента параболи знайшов суму нескінченно спадної геометричної прогресії зі знаменником 0,25 [26].

Подальший розвиток теорії рядів набув тісного зв'язку з теорією наближеного представлення функцій у вигляді многочленів. Часто буває зручно розкласти ту чи іншу функцію у функціональний ряд, який сходиться до неї на деякій множині.

Проте математики, з іменами яких ми пов'язуємо сьогодні формування теорії рядів, діяли за іншою схемою. Вперше це зробив І. Ньютон (1642-1727). У 1676 р. у його листі до секретаря Лондонського Королівського Товариства з'явилася формула, яку ми знаємо як формулу бінома Ньютона. Розвиваючи його ідею, англійський математик Брук Тейлор (1685-1731) у 1715 р. довів, що для будь-якої функції, яка має в точці x_0 похідні всіх порядків можна поставити у відповідність ряд.

Колін Маклорен (1698-1746) у роботі «Трактат про флюксії» (1742) встановив, що степеневий ряд, який виражає аналітичну функцію, - єдиний, і це буде ряд Тейлора, породжений такою функцією [20, с. 6-7].

Отже, ряди з'явилися у XVIII ст. як спосіб уявлення функцій, що допускають нескінченне диференціювання. Однак функція не називалася сумою ряда, і взагалі на той час не було ще визначено, що таке сума числового або функціонального ряду, були лише спроби запровадити це поняття.

Наприклад, Л. Ейлер (1707-1783), виписавши для функції відповідний їй степеневий ряд, надавав змінної x конкретне значення x_0. Виходив числовий ряд. Сумою цього ряду Ейлер вважав значення початкової функції у точці x_0.

Про те, що ряд, що розходиться, не має суми, вчені стали здогадуватися лише у XIX ст., хоча у XVIII ст. багато працювали над поняттями збіжності та розбіжності. Ейлер називав ряд збіжним, якщо його загальний член a_n наближається до нуля у разі зростання n. Проте це умова, як ми тепер знаємо, є необхідною для збіжності ряда, тобто можливі випадки, коли загальний член ряда наближається до нуля, а ряд розбіжний.

Л. Ейлер одним із перших почав розвивати теорію розбіжних рядів і отримав чимало суттєвих результатів, проте ці результати довго не знаходили застосування. Ще 1826 р. Н. Г. Абель (1802-1829) скептично називав розбіжні ряди «диявольським вигадуванням». Результати Ейлера знайшли обґрунтування лише наприкінці XIX ст. У сучасній математиці розбіжні ряди складають важливий розділ.

У формуванні поняття суми збіжного ряду велику роль відіграв французький вчений О. Л. Коші (1789-1857). Саме він заявив у 1826 р., що розбіжний ряд не має суми. Він сформулював критерій збіжності рядів і достатню умову збіжності, якими ми зазвичай користуємося практично, як й іншими достатніми ознаками збіжності [20, с. 7].

У 1768 р. французький математик та філософ Ж. Л. Даламбер досліджував відношення наступного члена до попереднього в біноміальному ряді і показав, що якщо це відношення по модулю менше одиниці, то ряд сходиться.

Коші у 1821 р. довів теорему про ознаку збіжності знакододатних рядів, яка сьогодні має назву – ознака Даламбер. Потім було доведено такі ознаки: радикальна та інтегральна Коші, Й. Л. Раабе (1801-1859), Е. Е. Куммера (1810-1893), Бертрана (1822-1900), Гаусса (1777-1855).

Названі вище ознаки досліджували збіжність знакододатних рядів, які відіграють значну ролі у дослідженні функціональних рядів. Не менш важливі й знакозмінні ряди. Для дослідження їхньої збіжності використовується ознака Г. В. Лейбниця (1646–1716) [26, с. 19].

Числові знакододатні та знакозмінні ряди використовуються для дослідження функціональних рядів, серед яких найбільш застосовані в механіці та різних розділах фізики степеневі та тригонометричні. У другій половині XVIII ст. почався активний розвиток математики, близької до сучасної, коли такі поняття, як функція, диференціальне рівняння, ряд стали набувати того сенсу, який у них зараз вкладаємо ми. До цього часу вчені вже розуміли, що існують геометрична та аналітична моделі всього, що відбувається в природи та техніки. У 1715 р., виходячи з міркувань механіки та геометрії, Б. Тейлор вивів рівняння, що описує малі коливання струни із закріпленими кінцями – диференціальне рівняння з частинними похідними, з якого розпочала свій розвиток математична фізика. Він знайшов частинний розв'язок такого рівняння, яке було періодичною функцією [20, с. 7-8].

У сучасній теорії рядів основними завданнями є:

- визначення поняття суми нескінченної послідовності доданків;
- встановлення ознак, за якими можна визначити, чи має цей ряд суму;
- виведення формул, які дозволяють представити задані функції у вигляді сум рядів, що складаються з порівняно простих функцій;
- інші застосування рядів (наближене обчислення рядів, розв'язання диференціальних рівнянь, обчислення меж, певних інтегралів та ін.).

Проте у наш час для глибшого розуміння розділу математичного аналізу «Ряди» варто звернути увагу на їх геометричну інтерпретацію. Проблемою необхідності використання геометричної інтерпретації при вивченні числових рядів займалися: В. Бобирь [1, 2, 3], С. Габ [4, 5, 6, 7], Н. Дзигарська [9, 10], А. Комарова [13], В. Корольський [9, 10, 14, 15, 16, 17, 18, 19], Я. Михайлова [9], В. Няньчук [21], О. Примакова [22], А. Романов [25], А. Римар [16], О. Тураєва [9, 10, 17, 18], А. Христюк [3].

1.2. Теоретичні основи дослідження числових рядів на збіжність.

Якщо $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – нескінченна числова послідовність, то вираз $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається числовим рядом, а величини a_1, a_2, …, a_n – членами цього ряду [12, с. 117].

Побудуємо допоміжну послідовність частинних сум ряду:

$S_1 = a_1,$

$S_2 = a_1 + a_2,$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$

……………………

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$

……………………

Якщо ця послідовність має скінченну границю S, то ряд називається збіжним, а число S – сумою ряду. У випадку, коли границя не існує або є нескінченною, ряд називається розбіжним [11, с. 4].

Необхідна умова збіжності числового ряду.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним, то послідовність його членів прямує до нуля, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Наслідок. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є розбіжним.

Достатні умови збіжності

Ознака порівняння

Якщо для членів знакододатних рядів справджується нерівність $a_n < b_n$, та ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ є збіжним, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ також збігається.

Якщо для членів знакододатних рядів справджується нерівність $a_n > b_n$, та ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ є розбіжним, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ також розбігається.

Ознака Даламбера

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, якщо параметр $d = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ менший за 1, та розбігається, якщо це число більше за 1. У випадку $d = 1$ поведінку ряду за допомогою ознаки Даламбера визначити неможливо.

Радикальна ознака Коші

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, якщо параметр $k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ менший за 1, та розбігається, якщо це число більше за 1. У випадку $k = 1$ поведінку ряду за допомогою радикальної ознаки Коші визначити неможливо.

Інтегральна ознака Коші

Нехай загальний член ряду задано рівністю $a_n = f(n)$ і функція $y = f(x)$ є додатною та спадною на проміжку $[1; +\infty)$. Тоді невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ та ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігаються або розбігаються одночасно [30, с. 10-11].

При розв'язуванні задач доцільно обирати ознаку для дослідження, користуючись порадами, які наведені у вигляді таблиці.

Таблиця 1.2.1.

Вибір ознаки в залежності від загального члена ряду

Структура загального члена ряду	*Рекомендована ознака*
Неправильний алгебраїчний дріб	Необхідна умова збіжності
Алгебраїчний дріб, функції sin, tg, arcsin, arctg, аргументами яких є правильний алгебраїчний дріб	Ознаки порівняння
Показникова функція; факторіал; факторіальний добуток; функції sin, tg, arcsin, arctg, нескінченно малі аргументи яких містять наведені вище елементи	Ознака Даламбера
Показникова та степенево-показникова функція	Радикальна ознака Коші
Будь-яка монотонно спадна функція, інтегрування якої не вимагає значних зусиль, наприклад: $\frac{f(\ln(n))}{n}$, $\frac{f(arctgn)}{1+n^2}$	Інтегральна ознака Коші

Отже, щоб дослідити ряд на збіжність, спочатку потрібно перевірити виконання необхідної умови збіжності. Але вона не завжди дає можливість зробити кінцевий висновок. Як тільки необхідна умова збіжності буде ефективною, потім будемо застосовувати достатні умови збіжності.

1.3. Задачний підхід до навчання математики.

Основна мета нового підходу до навчання математики – створення найбільш сприятливих умов для розвитку творчої, мислячої, вільної, інформованої особистості.

У системі сучасної освіти важливим є розробка та впровадження педагогічних технологій, які підвищують інтенсивність, якість, рівень мотивації та зацікавленість навчального процесу [27, с. 17].

Задачі у навчанні математики займають важливе місце. Вони є і метою, і засобом навчання. Уміння розв'язувати задачі є показником навченості та розвитку учнів.

Основним засобом формування знань, умінь і навичок учнів є математичні задачі.

Виділяють основні функції задач:

- навчальна (формування системи математичних знань, умінь і навичок на різних етапах навчання);
- розвивальна (розвиток мислення, формування розумових дій і способів розумової діяльності, уяви, алгоритмічного мислення);
- виховна (формування наукового світогляду, сприяння екологічному, економічному, естетичному вихованню, розвиток пізнавального інтересу, позитивних якостей особистості);
- контрольна функція (встановлення навченості, рівня загального та математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і класом загалом) [27, с. 16].

Зі зміною ролі та місця задач у навчання оновлюються і модифікуються й самі задачі. Раніше вони формулювались словами «знайти», «обчислити», «довести», то у сучасній школі частіше використовуються слова «обґрунтувати», «дослідити», «спрогнозувати різні способи розв’язання», «обрати найбільш раціональний спосіб».

Систему задач можна вважати ефективною, якщо вона забезпечує:

- змістовну основу навчально-пізнавальної діяльності (подання навчального матеріалу з необхідною повнотою, глибиною та деталізацією);

- діяльнісну основу пізнавального процесу (можливість широкого вибору методів і форм навчальної роботи, можливість практичного застосування набутих знань, формування та вдосконалення предметних та узагальнених способів діяльності);
- особистісно-розвивальний компонент навчання (формування гнучкості, глибини мислення, розвиток пізнавальної мотивації, інтересу до предмета пізнання та до самої пізнавальної діяльності, морально-вольових якостей).

Розв'язування математичної задачі – це процес знаходження взаємозв’язків між даними або між данимми та шуканими величинами, визначення цих зв’язків у вигляді арифметичних дій, виконання послідовних дій з метою знаходження числового значення величини, яку треба знайти.

Вміння самостійно розв’язувати задачі є важливим не тільки для тих, хто вивчатиме математику в майбутньому, але і для всіх учнів. У повсякденному житті людині постійно доводиться постійно вирішувати задачі, навіть якщо вони відрізняються від шкільних. Здатність самостійно вирішувати задачі є показником високого інтелектуального розвитку [28].

На жаль, у шкільній практиці досить часто можна спостерігати відсутність цього вміння в учнів. З яких же компонентів і умінь складається загальне вміння вирішувати задачі?

Це:

- уміння аналізувати умову задачі;
- уміння застосовувати теорію (означення, теореми, правила) на практиці;
- уміння виділяти основну ідею у розв’язанні однієї задачі, знаходити спільне у розв’язанні кількох задач.

Таким чином, одним з найефективніших підходів до навчання математики є задачний підхід.

Задачний підхід до організації навчального процесу акцентує увагу на тому, що засвоєння матеріалу відбувається за допомогою розв’язання задач

Навчання на основі цього підходу має великі можливості до розв’язування різних мисленнєвих задач і проблемних ситуацій, що розвиває творчість і креативність у майбутньому.

«Задачний підхід до організації навчального процесу дозволяє змістити акцент з репродуктивної діяльності, спрямованої на оволодіння уміннями діяти за шаблоном, на накопичення досвіду розв’язування мисленнєвих задач і творчу діяльність» [28, с. 155-156].

Висновки до розділу 1

1. Проаналізувавши теоретичні аспекти теорії розвитку рядів, а також історичні відомості про їх виникнення, з'ясовано, що точної дати виникнення цього розділу математичного аналізу немає. Відомо, що вперше поняття нескінченних сум було досліджено вченими Стародавньої Греції. Використання рядів почалося вченими ще у 17 ст., але строга теорія рядів була створена лише в 19 столітті, яка ґрунтується на працях О. Коші, К. Гауса, П. Діріхле, Н. Абеля, К. Вейєрштрасса та ін.

2. Розглянуто основні поняття числового ряду, а саме: числовий ряд, частинна сума ряду, збіжність та розбіжність числового ряду тощо. Представлені необхідна ознака збіжності і достатні ознаки збіжності (ознака порівняння, ознака Даламбера, радикальна ознака Коші, інтегральна ознака Коші). Узагальнено яку слід використовувати ознаку в залежності від загального члена ряду.

3. У процесі навчання математики, в основі якого лежить задачний підхід, знання не просто запам'ятовуються і відтворюються, а моделюються. Це активізує процеси мислення учасників пізнавальної діяльності та стимулює розвиток раціональних розумових дій. Такий підхід дає змогу подолати недоліки навчання, які мають місце в практиці освіти, яка характеризується високим ступенем редукції науково-теоретичної інформації. Успіх реалізації задачного підходу до навчання залежить від чіткого уявлення про його структуру, принципи та умови, в яких воно здійснюється.

РОЗДІЛ 2. ГЕНЕРАЦІЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ ТА КОМБІНАЦІЇ РЯДІВ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

2.1. Генерація рядів з точковою геометричною інтерпретацією.

За допомогою геометричної інтерпретації числових рядів можна продемонструвати та пояснити як формуються ряди.

Генерація та дослідження числових рядів ґрунтується на використанні геометричних образів (лінії, площі, об'єми), пов'язаних з послідовностями геометричних об'єктів, вписаних у квадрат з параметром $a = 1$, представленим на рис. 2.1.1.

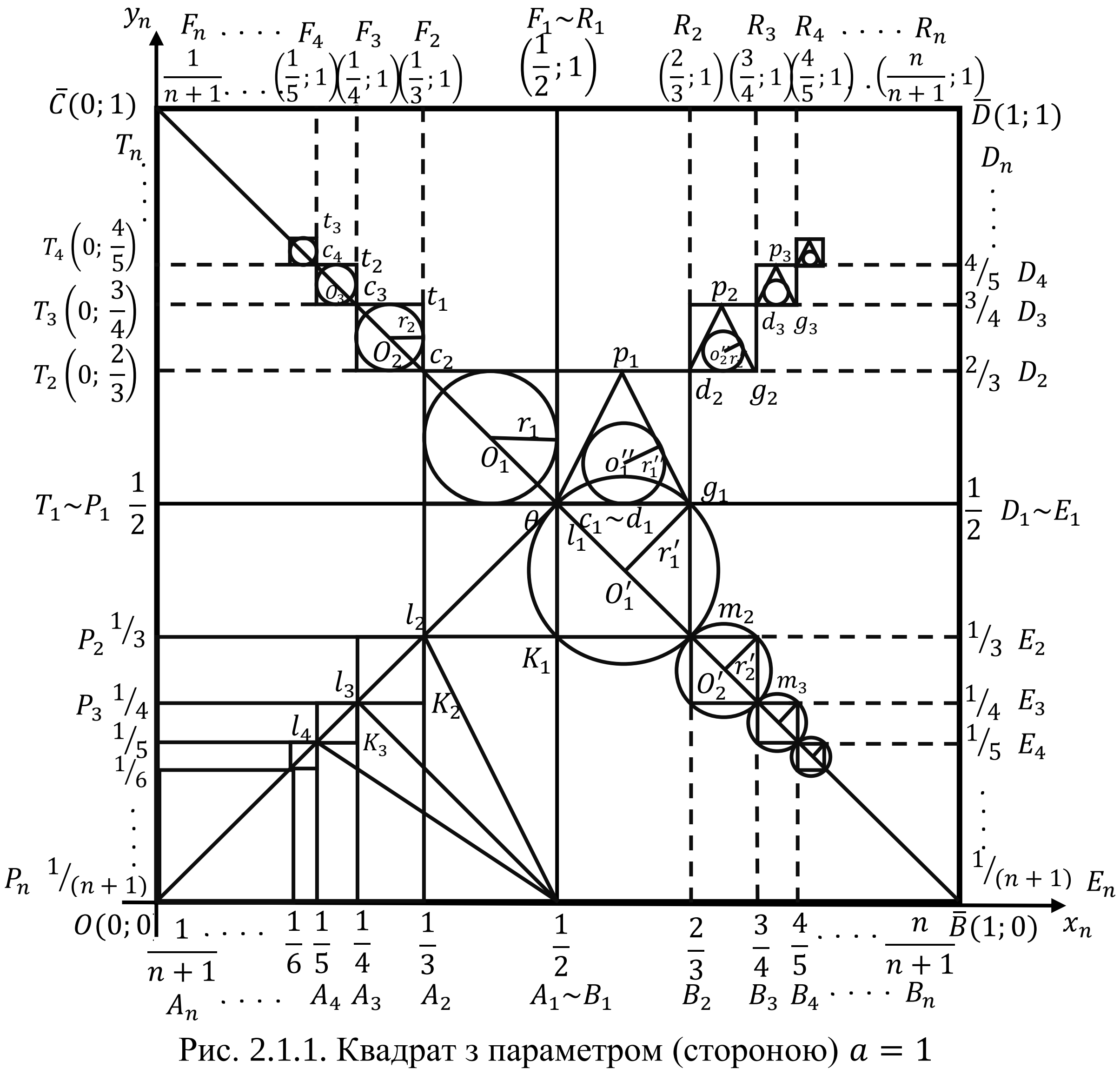


Рис. 2.1.1. Квадрат з параметром (стороною) $a = 1$

Спочатку розглянемо задачі на генерацію числових рядів, пов'язаних з точковою геометричною інтерпретацією.

Задача 1. Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n; y_n)$ координати точки A_n.

Розв'язання

Точка A_n, розподілена на половині сторони квадрата $|\overline{A_1O}|$ за законом $\frac{1}{n+1}$ і має координати $A_n\left(\frac{1}{n+1}; 0\right)$, тому ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Аналогічно можна знайти ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n; y_n)$ будуть координати точок: $B_n\left(\frac{n}{n+1}; 0\right)$, $E_n\left(1; \frac{1}{n+1}\right)$, $P_n\left(0; \frac{1}{n+1}\right)$, $T_n\left(0; \frac{n}{n+1}\right)$, $D_n\left(1; \frac{n}{n+1}\right)$, $R_n\left(\frac{n}{n+1}; 1\right)$, $F_n\left(\frac{n}{n+1}; 1\right)$:

- точка B_n, розподілена на половині сторони квадрата $\left|\overline{B_1\bar{E}}\right|$ за законом $\frac{n}{n+1}$ і має координати $B_n\left(\frac{n}{n+1}; 0\right)$, тому ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

- точка E_n, розподілена на половині сторони квадрата $\left|\overline{E_1\bar{E}}\right|$ за законом $\frac{1}{n+1}$ і має координати $E_n\left(1; \frac{1}{n+1}\right)$, тому ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

- точка P_n, розподілена на половині сторони квадрата $|\overline{OP_1}|$ за законом $\frac{1}{n+1}$ і має координати $P_n\left(0; \frac{1}{n+1}\right)$, тому ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

- точка T_n, розподілена на половині сторони квадрата $\left|\overline{T_1\bar{C}}\right|$ за законом $\frac{n}{n+1}$ і має

координати $T_n\left(0;\frac{n}{n+1}\right)$, тому ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0;$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}.$$

- точка D_n, розподілена на половині сторони квадрата $\left|\overline{D_1\bar{D}}\right|$ за законом $\frac{n}{n+1}$ і

має координати $D_n\left(1;\frac{n}{n+1}\right)$, тому ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1;$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}.$$

- точка R_n, розподілена на половині сторони квадрата $\left|\overline{R_1\bar{D}}\right|$ за законом $\frac{n}{n+1}$ і

має координати $R_n\left(\frac{n}{n+1};1\right)$, тому ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1.$$

- точка F_n, розподілена на половині сторони квадрата $\left|\overline{F_1\bar{C}}\right|$ за законом $\frac{1}{n+1}$ і має

координати $F_n\left(\frac{1}{n+1};1\right)$, тому ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1 = 1.$$

Задача 2. Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n; y_n)$ координати точки K_n.

Розв’язання

Координати точки K_n по вісі Ox співпадають з координатами точки A_n, а по вісі Oу – E_n, але починаючи з другого члену, тому має координати $K_n\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n+2}\right)$. Шукані ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}.$$

Аналогічно можна знайти координати точок: $l_n\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n+1}\right)$, $C_n\left(\frac{1}{n+1};\frac{n}{n+1}\right)$:

- точка l_n розподілена на половині діагоналі квадрата, тому має координати $l_n\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n+1}\right)$. Шукані ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

- точка C_n розподілена на половині діагоналі квадрата, тому має координати $C_n\left(\frac{1}{n+1};\frac{n}{n+1}\right)$. Шукані ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}.$$

Задача 3. Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n; y_n)$ координати точки O_n.

Розв'язання

Точка O_n знаходиться посередині між точками по осі Ox A_n і A_{n+1}, по осі Oу – T_n і T_{n+1}, тому має координати $O_n\left(\frac{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}}{2};\frac{\frac{n+1}{n+2}+\frac{n}{n+1}}{2}\right) = \left(\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)};\frac{n^2+3n+1}{2(n+1)(n+2)}\right)$.

Шукані ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Аналогічно знайдемо координати точки O_n':

$$O_n'\left(\frac{\frac{n+1}{n+2}+\frac{n}{n+1}}{2};\frac{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}}{2}\right) = \left(\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)};\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\right).$$

Задача 4. Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n; y_n)$ координати точки O_n''.

Розв'язання

O_n'' – центр вписаного кола у рівнобедрений трикутник. По осі Ox точка O_n'' знаходиться посередині між точками B_n і B_{n+1}, а по осі Oу знаходиться між точками D_n і D_{n+1} і ділить відрізок D_nD_{n+1} у певному відношенні. Знайдемо це відношення.

Розглянемо квадрат зі стороною a (рис. 2.1.2).

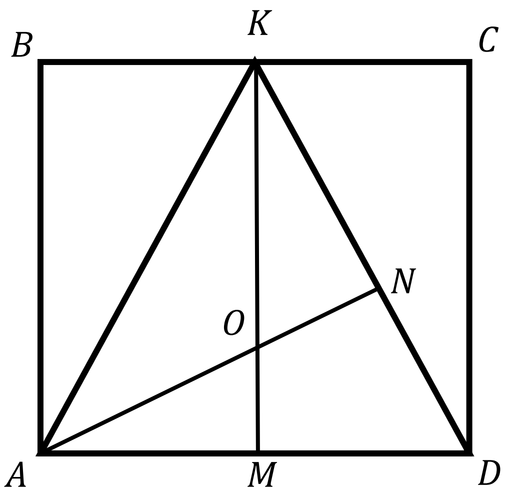


Рис. 2.1.2. Квадрат зі стороною a

K – середина BC, тому ΔAKD – рівнобедрений. Центр вписаного кола у трикутник лежить на перетині бісектрис. Тому проведемо бісектриси AN і KM. Точка O – центр вписаного кола. Знайдемо відношення $\frac{OM}{OK}$.

За властивістю бісектриси $\frac{OM}{OK}=\frac{AM}{AK}$. $AM=\frac{a}{2}, AB=a, BK=\frac{a}{2}$, тоді за теоремою Піфагора $AK=\sqrt{AB^2+BK^2}$, $AK=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}=\frac{a\sqrt5}{2}$.

$\frac{OM}{OK}=\frac{AM}{AB}, \frac{OM}{OK}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt5}{2}}=\frac{1}{\sqrt5}=\frac{\sqrt5}{5}$.

Знайдемо координати точки O по осі Oy за формулою поділу відрізку у заданому відношенні: $y_O=\frac{y_M+\lambda y_K}{1+\lambda}$, тому *к*оординати точки матимуть вид:

$$O''_n\left(\frac{\frac{n+1}{n+2}+\frac{n}{n+1}}{2};\frac{\frac{n}{n+1}+\frac{\sqrt5}{5}\cdot\frac{n+1}{n+2}}{1+\frac{\sqrt5}{5}}\right)=\left(\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)};\frac{\frac{5n^2+10n+\sqrt5n^2+\sqrt5n+\sqrt5n+\sqrt5}{5(n+1)(n+2)}}{\frac{5+\sqrt5}{5}}\right)=$$

$$\left(\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)};\frac{(5+\sqrt5)n^2+2(5+\sqrt5)n+\sqrt5}{(n+1)(n+2)(5+\sqrt5)}\right)=\left(\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)};\frac{(5+\sqrt5)(n^2+2n)}{(n+1)(n+2)(5+\sqrt5)}+\right.$$

$$\left.\frac{\sqrt5(5-\sqrt5)}{(n+1)(n+2)(5+\sqrt5)(5-\sqrt5)}\right)=\left(\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)};\frac{n}{n+1}+\frac{\sqrt5-1}{4(n+1)(n+2)}\right).$$

Отже координати точки $O''_n\left(\frac{1}{2(n+1)(n+2)};\frac{n}{n+1}+\frac{\sqrt5-1}{4(n+1)(n+2)}\right)$.

Шукані ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)};\ \sum_{n=1}^{\infty}y_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}+\frac{\sqrt5-1}{4(n+1)(n+2)}\right).$$

2.2. Генерація рядів з лінійною геометричною інтерпретацією.

Розглянемо приклади генерації числових рядів, пов'язаних з лінійною геометричною інтерпретацією членів рядів.

Задача 1. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_n A_{n+1}}|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $|\overline{A_n A_{n+1}}|$ за формулою обчислення відстані між двома точками:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \qquad (2.1)$$

де $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ [8].

$A_n\left(\frac{1}{n+1}; 0\right), A_{n+1}\left(\frac{1}{n+2}; 0\right)$, тоді відстань між точками:

$$|\overline{A_n A_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_n A_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Розв'яжемо цю задачу іншим способом. Знайдемо довжину відрізка як довжину дуги плоскої кривої.

Коли крива задана в прямокутних координатах рівнянням $y = f(x)$, де функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$, то довжина цієї кривої дорівнює:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f(x)\right)^2}dx \text{ [29]}, \qquad (2.2)$$

У нашому випадку точки A_n і A_{n+1} розташовані на прямій $y = 0$, тоді $y' = 0$.

За формулою довжини кривої отримаємо:

$$|\overline{A_n A_{n+1}}| = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} \sqrt{1 + 0^2}dx = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} dx = x\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_n A_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Як бачимо, шуканий ряд ідентичний ряду, одержаному першим способом $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_n A_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Задача 2. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{B_nB_{n+1}}|$.

Розв'язання

Аналогічно до попереднього прикладу знайдемо довжину відрізка $|\overline{B_nB_{n+1}}|$за формулою (2.1), якщо $B_n\left(\frac{n}{n+1};0\right), B_{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2};0\right)$:

$$|\overline{B_nB_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}\right)^2+(0-0)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{B_nB_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Другий спосіб – знаходження довжини відрізка як довжини дуги плоскої кривої. У нашому випадку точки B_n і B_{n+1} розташовані на прямій $y=0$, тоді $y'=0$. За формулою (2.2) отримаємо:

$$|\overline{B_nB_{n+1}}| = \int_{\frac{n}{n+1}}^{\frac{n+1}{n+2}}\sqrt{1+0^2}dx = \int_{\frac{n}{n+1}}^{\frac{n+1}{n+2}}dx = x\Big|_{\frac{n}{n+1}}^{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{B_nB_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Задача 3. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{E_nE_{n+1}}|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $|\overline{E_nE_{n+1}}|$ за формулою (2.1), якщо $E_n\left(1;\frac{1}{n+1}\right)$, $E_{n+1}\left(1;\frac{1}{n+2}\right)$:

$$|\overline{E_nE_{n+1}}| = \sqrt{(1-1)^2+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{E_nE_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Задача 4. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{D_nD_{n+1}}|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $|\overline{D_nD_{n+1}}|$ за формулою (2.1), якщо $D_n\left(1;\frac{n}{n+1}\right)$, $D_{n+1}\left(1;\frac{n+1}{n+2}\right)$:

$$|\overline{D_nD_{n+1}}| = \sqrt{(1-1)^2+\left(\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{D_nD_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Задача 5. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{T_nT_{n+1}}|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $|\overline{T_nT_{n+1}}|$ за формулою (2.1), якщо $T_n\left(0;\frac{n}{n+1}\right)$, $T_{n+1}\left(0;\frac{n+1}{n+2}\right)$:

$$|\overline{T_nT_{n+1}}| = \sqrt{(0-0)^2+\left(\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{T_nT_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Задача 6. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{R_nR_{n+1}}|$.

Розв’язання

Знайдемо довжину відрізка $|\overline{R_nR_{n+1}}|$ за формулою (2.1), якщо $R_n\left(\frac{n}{n+1};1\right)$, $R_{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2};1\right)$:

$$|\overline{R_nR_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}\right)^2+(1-1)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{R_nR_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Другий спосіб – знаходження довжини відрізка як довжини дуги плоскої кривої. У нашому випадку точки R_n і R_{n+1} розташовані на прямій $y=1$, тоді $y'=0$. За формулою (2.2) отримаємо:

$$|\overline{R_nR_{n+1}}| = \int_{\frac{n}{n+1}}^{\frac{n+1}{n+2}}\sqrt{1+0^2}dx = \int_{\frac{n}{n+1}}^{\frac{n+1}{n+2}}dx = x|_{\frac{n}{n+1}}^{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{R_nR_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Задача 7. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{F_nF_{n+1}}|$.

Розв’язання

Знайдемо довжину відрізка $|\overline{F_nF_{n+1}}|$ за формулою (2.1), якщо $F_n\left(\frac{1}{n+1};1\right)$, $F_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};1\right)$:

$$|\overline{F_nF_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)^2+(1-1)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{F_n F_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Другий спосіб – знаходження довжини відрізка як довжини дуги плоскої кривої. У нашому випадку точки F_n і F_{n+1} розташовані на прямій $y = 1$, тоді $y' = 0$. За формулою (2.2) отримаємо:

$$|\overline{F_n F_{n+1}}| = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}\sqrt{1+0^2}dx = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}dx = x\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{F_n F_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Задача 8. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{P_n P_{n+1}}|$.

Розв’язання

Знайдемо довжину відрізка $|\overline{P_n P_{n+1}}|$ за формулою (2.1), якщо $P_n\left(0;\frac{1}{n+1}\right)$, $P_{n+1}\left(0;\frac{1}{n+2}\right)$:

$$|\overline{P_n P_{n+1}}| = \sqrt{(0-0)^2 + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{P_n P_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Задача 9. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_1 l_{n+1}}\right|$

Розв’язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{A_1 l_{n+1}}\right|$за формулою (2.1).

$A_1\left(\frac{1}{2};0\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$, тоді:

$$\left|\overline{A_1 l_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+2} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{n}{2(n+2)}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{n^2}{4(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^2}} = \sqrt{\frac{n^2+4}{4(n+2)^2}} = \frac{\sqrt{n^2+4}}{2|n+2|} = \frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_1 l_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)}$.

Другий спосіб – знаходження довжини відрізка як довжини дуги плоскої кривої.

Складемо рівняння прямої, яка проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \tag{2.3}$$

де $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$ координати точок, які належать прямій [8].

У нашому випадку $A_1\left(\frac{1}{2};0\right), l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$, тоді рівняння прямої матиме вид:

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}}=\frac{y-0}{\frac{1}{n+2}-0};$$

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{-\frac{n}{2(n+2)}}=\frac{y}{\frac{1}{n+2}};$$

$$\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(n+2)}{-n}=y(n+2);$$

$$2x-1=-ny;$$

$$y=-\frac{2}{n}x+\frac{1}{n}.$$

Для знаходження довжини кривої знайдемо похідну: $y'=-\frac{2}{n}$.

Тоді за формулою (2.2) отримуємо:

$$\left|\overline{A_1 l_{n+1}}\right|=\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(-\frac{2}{n}\right)^2}\,dx=\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{n^2+4}{n^2}}\,dx=\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}\,dx=\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}\cdot x\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{2}}=$$

$$\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}\cdot\frac{n}{2(n+2)}=\frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_1 l_{n+1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)}$.

Як бачимо, шуканий ряд ідентичний ряду, одержаному першим способом.

Задача 10. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_{n+1}K_{n+1}}\right|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{A_{n+1}K_{n+1}}\right|$ за формулою обчислення відстані між двома точками (2.1), якщо $A_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};0\right), K_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+3}\right)$:

$$\left|\overline{A_{n+1}K_{n+1}}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+2}\right)^2+\left(\frac{1}{n+3}-0\right)^2}=\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{n+3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{(n+3)^2}}=\frac{1}{n+3}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_{n+1}K_{n+1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$.

Задача 11. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_1 K_n}\right|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{A_1 K_n}\right|$ за формулою (2.1), якщо $A_1\left(\frac{1}{2};0\right)$, $K_n\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n+2}\right)$:

$$|\overline{A_1K_n}| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}-0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1-n}{2(n+1)}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{(n-1)^2}{4(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}} = \sqrt{\frac{(n-1)^2(n+2)^2+4(n+1)^2}{4(n+1)^2(n+2)^2}} = \frac{\sqrt{(n^2-2n+1)(n^2+4n+4)+4(n^2+2n+1)}}{2(n+1)(n+2)} =$$

$$\frac{\sqrt{n^4+4n^3+4n^2-2n^3-8n^2-8n+n^2+4n+4+4n^2+8n+4}}{2(n+1)(n+2)} = \frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+4n+8}}{2(n+1)(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_1K_n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+4n+8}}{2(n+1)(n+2)}$.

Розв’яжемо цю задачу іншим способом.

Складемо рівняння прямої за формулою (2.3), якщо $A_1\left(\frac{1}{2};0\right), K_n\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n+2}\right)$:

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}} = \frac{y-0}{\frac{1}{n+2}-0};$$

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1-n}{2(n+1)}} = \frac{y}{\frac{1}{n+2}};$$

$$-\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(n+1)}{n-1} = y(n+2);$$

$$y = -\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(n+1)}{(n-1)(n+2)};$$

$$y = -\frac{2(n+1)}{(n-1)(n+2)}x+\frac{(n+1)}{(n-1)(n+2)}.$$

Для знаходження довжини кривої знайдемо похідну: $y' = -\frac{2(n+1)}{(n-1)(n+2)}$.

Тоді за формулою (2.2) отримуємо:

$$|\overline{A_1K_n}| = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(-\frac{2(n+1)}{(n-1)(n+2)}\right)^2}\,dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{4(n+1)^2}{(n-1)^2(n+2)^2}}\,dx =$$

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{(n-1)^2(n+2)^2+4(n+1)^2}}{(n-1)(n+2)}\,dx = \frac{\sqrt{(n^2-2n+1)(n^2+4n+4)+4(n^2+2n+1)}}{(n-1)(n+2)}\cdot x\Big|_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{n^4+4n^3+4n^2-2n^3-8n^2-8n+n^2+4n+4+4n^2+8n+4}}{(n-1)(n+2)}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+4n+8}}{(n-1)(n+2)}\cdot\frac{n-1}{2(n+1)} =$$

$$\frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+4n+8}}{2(n+1)(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_1K_n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+4n+8}}{2(n+1)(n+2)}$.

Задача 12. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{l_n K_n}\right|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{l_n K_n}\right|$ за формулою (2.1), якщо $l_n\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n+1}\right)$, $K_n\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n+2}\right)$:

$$\left|\overline{l_n K_n}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{0^2+\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{l_n K_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Задача 13. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{P_n l_n}\right|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{P_n l_n}\right|$ за формулою (2.1), якщо $P_n\left(0;\frac{1}{n+1}\right)$, $l_n\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n+1}\right)$:

$$\left|\overline{P_n l_n}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1}-0\right)^2+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+0^2} = \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{P_n l_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$.

Другий спосіб – знаходження довжини відрізка як довжини дуги плоскої кривої.

У нашому випадку точки P_n і l_n розташовані на прямій $y=\frac{1}{n+1}$, тоді $y'=0$.

За формулою (2.2) отримаємо:

$$\left|\overline{P_n l_n}\right| = \int_0^{\frac{1}{n+1}}\sqrt{1+0^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{n+1}}dx = x\Big|_0^{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{P_n l_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$.

Задача 14. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{P_n l_{n+1}}\right|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{P_n l_{n+1}}\right|$за формулою (2.1), якщо $P_n\left(0;\frac{1}{n+1}\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$:

$$\left|\overline{P_n l_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}} = \sqrt{\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2(n+2)^2}} = \frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{P_n l_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}$.

Другий спосіб – знаходження довжини відрізка як довжини дуги плоскої кривої.

Складемо рівняння прямої за формулою (2.3), якщо $P_n\left(0; \frac{1}{n+1}\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2}; \frac{1}{n+2}\right)$:

$$\frac{x-0}{\frac{1}{n+2}-0} = \frac{y-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}};$$

$$\frac{x}{\frac{1}{n+2}} = \frac{\frac{y(n+1)-1}{n+1}}{\frac{-1}{(n+1)(n+2)}};$$

$$x(n+2) = -y(n+1)(n+2) + n + 2;$$

$$y(n+1)(n+2) = n + 2 - x(n+2);$$

$$y = -\frac{1}{n+1}x + \frac{1}{n+1}.$$

Для знаходження довжини кривої знайдемо похідну: $y' = -\frac{1}{n+1}$.

Тоді за формулою (2.2) маємо:

$$\left|\overline{P_n l_{n+1}}\right| = \int_0^{\frac{1}{n+2}}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{n+1}\right)^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{n+2}}\sqrt{1+\frac{1}{(n+1)^2}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{n+2}}\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{n+1}\,dx =$$

$$\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n+1}\cdot x\Big|_0^{\frac{1}{n+2}} = \frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{n+2} - 0\right) = \frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2} = \frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{P_n l_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}$.

Задача 15. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_n l_{n+1}}\right|$.

Розв’язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{A_n l_{n+1}}\right|$за формулою (2.1), якщо $A_n\left(\frac{1}{n+1}; 0\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2}; \frac{1}{n+2}\right)$:

$$|\overline{A_n l_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+2} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^2}} = \sqrt{\frac{1+(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2}} = \frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_n l_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}$.

Другий спосіб – знаходження довжини відрізка як довжини дуги плоскої кривої.

Складемо рівняння прямої за формулою (2.3), якщо $A_n\left(\frac{1}{n+1};0\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$:

$$\frac{x-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}} = \frac{y-0}{\frac{1}{n+2}-0};$$

$$\frac{\frac{x(n+1)-1}{n+1}}{-\frac{1}{(n+1)(n+2)}} = \frac{y}{\frac{1}{n+2}};$$

$$-x(n+1)(n+2) + n + 2 = y(n+2);$$

$$y = -x(n+1) + 1.$$

Для знаходження довжини кривої знайдемо похідну: $y' = -(n+1)$.

Тоді за формулою (2.2) маємо:

$$|\overline{A_n l_{n+1}}| = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}\sqrt{1+(-(n+1))^2}\,dx = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}\sqrt{1+(n+1)^2}\,dx =$$

$$\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}\sqrt{n^2+2n+2}\,dx = \sqrt{n^2+2n+2}\cdot x\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} = \sqrt{n^2+2n+2}\cdot\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) =$$

$$\sqrt{n^2+2n+2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_n l_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}$.

Задача 16. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{T_n C_{n+1}}|$.

Розв’язання

Знайдемо довжину відрізка $|\overline{T_n C_{n+1}}|$за формулою (2.1), якщо $T_n\left(0;\frac{n}{n+1}\right)$, $C_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{n+1}{n+2}\right)$:

$$|\overline{T_n C_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2} - 0\right)^2 + \left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2}\right)^2 + \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}} = \sqrt{\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2(n+2)^2}} = \frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{T_n C_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}$.

Другий спосіб – знаходження довжини відрізка як довжини дуги плоскої кривої.

Складемо рівняння прямої за формулою (2.3), якщо $T_n\left(0;\frac{n}{n+1}\right)$, $C_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{n+1}{n+2}\right)$:

$$\frac{x-0}{\frac{1}{n+2}-0} = \frac{y-\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}};$$

$$\frac{x}{\frac{1}{n+2}} = \frac{\frac{y(n+1)-n}{n+1}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}};$$

$$x(n+2) = y(n+1)(n+2) - n(n+2);$$

$$y(n+1) = x + n;$$

$$y = \frac{1}{n+1}x + \frac{n}{n+1};$$

Для знаходження довжини кривої знайдемо похідну: $y' = \frac{1}{n+1}$.

Тоді за формулою (2.2) маємо:

$$|\overline{T_n C_{n+1}}| = \int_0^{\frac{1}{n+2}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{n+2}}\sqrt{1+\frac{1}{(n+1)^2}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{n+2}}\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{n+1}\,dx =$$

$$\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n+1}\cdot x\Big|_0^{\frac{1}{n+2}} = \frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{n+2}-0\right) = \frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2} = \frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{T_n C_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}$.

Задача 17. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|r_n|$.

Розв’язання

r_n у шуканому ряді $\sum_{n=1}^{\infty}|r_n|$ – це радіус вписаного кола у квадрат зі стороною $|T_{n+1} - T_n| = \left|\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\right| = \left|\frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)}\right| = \left|\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)}\right| = \left|\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ або з іншого боку $|F_{n+1} - F_n| = \left|\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{n+1-(n+2)}{(n+1)(n+2)}\right| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Тоді r_n буде дорівнювати половині сторони квадрата: $r_n = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|r_n| = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

Задача 18. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|r_n'|$.

Розв’язання

r_n' у шуканому ряді $\sum_{n=1}^{\infty}|r_n'|$ – це радіус кола, описаного навколо квадрата зі стороною $|B_{n+1} - B_n| = \left|\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\right| = \left|\frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)}\right| = \left|\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)}\right| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Радіус кола дорівнює половині діагоналі квадрата: $r_n' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2(n+1)(n+2)}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|r_n'| = \frac{\sqrt{2}}{2(n+1)(n+2)}$.

Задача 19. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|r_n''|$.

Розв’язання

r_n'' у шуканому ряді $\sum_{n=1}^{\infty}|r_n''|$ – це радіус вписаного кола у $\Delta d_n p_n g_n$.

Розглянемо детальніше коло, вписане у трикутник. А трикутник розташований в середині квадрата (рис. 2.1).

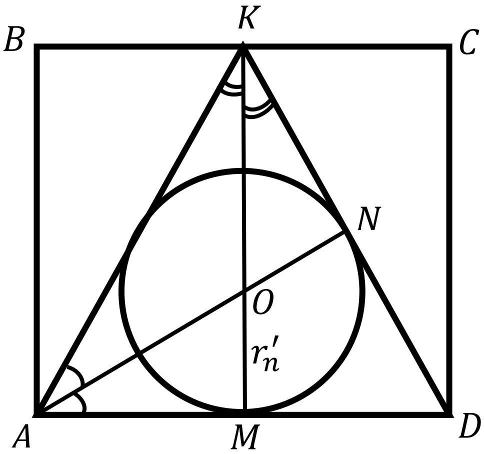


Рис. 2.2.1.

K – середина BC, тому ΔAKD – рівнобедрений. Центр вписаного кола у трикутник лежить на перетині бісектрис. Тому проведемо бісектриси AN і KM. Точка O – центр вписаного кола, $OM = r_n''$.

Знайдемо радіус вписаного кола за допомогою формули: $S = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p}$.

$S = \frac{1}{2}ah$, $p = \frac{a+b+c}{2}$, тоді $r = \frac{ah}{a+b+c}$.

Для нашої задачі $r_n'' = \frac{AD\cdot KM}{AK+KD+AD} = \frac{AD\cdot KM}{2AK+AD}$.

AD – сторона квадрата, $AD = B_{n+1} - B_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

$KM = AD = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, BK = KC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

$\Delta ABK: \angle ABK = 90°, AB = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, BK = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$, тоді за теоремою Піфагора $AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2}} = \sqrt{\frac{5}{4(n+1)^2(n+2)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2(n+1)(n+2)}$.

Отже, $r_n'' = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}} = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{(1+\sqrt{5})(n+1)(n+2)}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|r_n''| = \frac{1}{(1+\sqrt{5})(n+1)(n+2)}$.

Задача 20. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{O_{n-1}O_n}|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $|\overline{O_{n-1}O_n}|$ за формулою (2.1), якщо $O_{n-1}\left(\frac{2n+1}{2n(n+1)}; \frac{n^2+n-1}{2n(n+1)}\right), O_n\left(\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}; \frac{n^2+3n+1}{2(n+1)(n+2)}\right)$:

$$|\overline{O_{n-1}O_n}| = \sqrt{\left(\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}\right)^2 + \left(\frac{n^2+3n+1}{2(n+1)(n+2)} - \frac{n^2+n-1}{2n(n+1)}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{n(2n+3)-(n+2)(2n+1)}{2n(n+1)(n+2)}\right)^2 + \left(\frac{n(n^2+3n+1)-(n+2)(n^2+n-1)}{2n(n+1)(n+2)}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{2n^2+3n-2n^2-n-4n-2}{2n(n+1)(n+2)}\right)^2 + \left(\frac{n^3+3n^2+n-n^3-n^2+n-2n^2-2n+2}{2n(n+1)(n+2)}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{-2n-2}{2n(n+1)(n+2)}\right)^2 + \left(\frac{2}{2n(n+1)(n+2)}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{n+1}{n(n+1)(n+2)}\right)^2 + \left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{(n+1)^2}{n^2(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}} = \sqrt{\frac{n^2+2n+2}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n(n+1)(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{O_{n-1}O_n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n(n+1)(n+2)}$.

Розв'яжемо цю задачу іншим способом. Знайдемо довжину відрізка як довжину дуги плоскої кривої.

Складемо рівняння прямої за формулою (2.3), якщо $O_{n-1}\left(\frac{2n+1}{2n(n+1)};\frac{n^2+n-1}{2n(n+1)}\right)$, $O_n\left(\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)};\frac{n^2+3n+1}{2(n+1)(n+2)}\right)$:

$$\frac{x-\frac{2n+1}{2n(n+1)}}{\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}-\frac{2n+1}{2n(n+1)}}=\frac{y-\frac{n^2+n-1}{2n(n+1)}}{\frac{n^2+3n+1}{2(n+1)(n+2)}-\frac{n^2+n-1}{2n(n+1)}};$$

$$\frac{x-\frac{2n+1}{2n(n+1)}}{-\frac{1}{n(n+2)}}=\frac{y-\frac{n^2+n-1}{2n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}};$$

$$\frac{x-\frac{2n+1}{2n(n+1)}}{-(n+1)}=\frac{y-\frac{n^2+n-1}{2n(n+1)}}{1};$$

$$-\frac{x}{n+1}+\frac{2n+1}{2n(n+1)^2}=y-\frac{n^2+n-1}{2n(n+1)};$$

$$y=-\frac{x}{n+1}+\frac{2n+1}{2n(n+1)}+\frac{n^2+n-1}{2n(n+1)};$$

$$y=-\frac{x}{n+1}+\frac{n^2+3n}{2n(n+1)};$$

$$y=-\frac{x}{n+1}+\frac{n+3}{2(n+1)}.$$

Для знаходження довжини кривої знайдемо похідну: $y'=-\frac{1}{n+1}$.

Тоді за формулою (2.2) маємо:

$$|\overline{O_{n-1}O_n}|=-\int_{\frac{2n+1}{2n(n+1)}}^{\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{n+1}\right)^2}\,dx=-\int_{\frac{2n+1}{2n(n+1)}}^{\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n+1}\,dx=$$

$$-\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n+1}\cdot x\Big|_{\frac{2n+1}{2n(n+1)}}^{\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}}=-\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n+1}\cdot\left(\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}-\frac{2n+1}{2n(n+1)}\right)=-\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n+1}\cdot$$

$$\frac{2n^2+3n-2n^2-5n+2}{2n(n+1)(n+2)}=-\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n+1}\cdot\frac{-2n+2}{2n(n+1)(n+2)}=\frac{2(n+1)\sqrt{n^2+2n+2}}{2n(n+1)^2(n+2)}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{O_{n-1}O_n}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n(n+1)(n+2)}.$$

Задача 21. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{O'_{n-1}O'_n}\right|$.

Розв’язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{O'_{n-1}O'_n}\right|$ за формулою (2.1), якщо $O'_{n-1}\left(\frac{2n^2-1}{2n(n+1)};\frac{2n+1}{2n(n+1)}\right)$, $O'_n\left(\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)};\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\right)$:

$$\left|\overline{O'_{n-1}O'_n}\right| = \sqrt{\left(\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)}-\frac{2n^2-1}{2n(n+1)}\right)^2+\left(\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}-\frac{2n+1}{2n(n+1)}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{n(2n^2+4n+1)-(n+2)(2n^2-1)}{2n(n+1)(n+2)}\right)^2+\left(\frac{n(2n+3)-(n+2)(2n+1)}{2n(n+1)(n+2)}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{2n^3+4n^2+n-2n^3+n-4n^2+2}{2n(n+1)(n+2)}\right)^2+\left(\frac{2n^2+3n-2n^2-n-4n-2}{2n(n+1)(n+2)}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{2n+2}{2n(n+1)(n+2)}\right)^2+\left(\frac{-2n-2}{2n(n+1)(n+2)}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{n+1}{n(n+1)(n+2)}\right)^2+\left(-\frac{n+1}{n(n+1)(n+2)}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{n(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{O'_{n-1}O'_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{n(n+2)}$.

Розв’яжемо цю задачу іншим способом. Знайдемо довжину відрізка як довжину дуги плоскої кривої.

Складемо рівняння прямої за формулою (2.3), якщо $O'_{n-1}\left(\frac{2n^2-1}{2n(n+1)};\frac{2n+1}{2n(n+1)}\right)$, $O'_n\left(\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)};\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\right)$:

$$\frac{x-\frac{2n^2-1}{2n(n+1)}}{\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)}-\frac{2n^2-1}{2n(n+1)}} = \frac{y-\frac{2n+1}{2n(n+1)}}{\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}-\frac{2n+1}{2n(n+1)}};$$

$$\frac{x-\frac{2n^2-1}{2n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+2)}} = \frac{y-\frac{2n+1}{2n(n+1)}}{-\frac{1}{n(n+2)}};$$

$$x-\frac{2n^2-1}{2n(n+1)} = -y+\frac{2n+1}{2n(n+1)};$$

$$y = -x+\frac{2n+1}{2n(n+1)}+\frac{2n^2-1}{2n(n+1)}.$$

Для знаходження довжини кривої знайдемо похідну: $y' = -1$.

Тоді за формулою (2.2) маємо:

$$\left|\overline{O'_{n-1}O'_n}\right| = \int_{\frac{2n^2-1}{2n(n+1)}}^{\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)}} \sqrt{1+(-1)^2}\,dx = \int_{\frac{2n^2-1}{2n(n+1)}}^{\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)}} \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}\cdot x\Big|_{\frac{2n^2-1}{2n(n+1)}}^{\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)}} =$$

$$\sqrt{2}\cdot\left(\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)} - \frac{2n^2-1}{2n(n+1)}\right) = \sqrt{2}\cdot\frac{2n^3+4n^2+n-2n^3-4n^2+n+2}{2n(n+1)(n+2)} = \sqrt{2}\,\frac{2n+2}{2n(n+1)(n+2)} = \frac{\sqrt{2}}{n(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{O'_{n-1}O'_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{n(n+2)}$.

Задача 22. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{O''_{n-1}O''_n}\right|$.

Розв’язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{O''_{n-1}O''_n}\right|$за формулою (2.1), якщо $O''_{n-1}\left(\frac{2n^2-1}{2n(n+1)}; \frac{n-1}{n} + \frac{\sqrt{5}-1}{4n(n+1)}\right)$, $O''_n\left(\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)}; \frac{n}{n+1} + \frac{\sqrt{5}-1}{4(n+1)(n+2)}\right)$:

$$\left|\overline{O''_{n-1}O''_n}\right| = \sqrt{\left(\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)} - \frac{2n^2-1}{2n(n+1)}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+1} + \frac{\sqrt{5}-1}{4(n+1)(n+2)} - \left(\frac{n-1}{n} + \frac{\sqrt{5}-1}{4n(n+1)}\right)\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{n(2n^2+4n+1)-(n+2)(2n^2-1)}{2n(n+1)(n+2)}\right)^2 + \left(\frac{4\cdot n\cdot n\cdot(n+2)+\left(\sqrt{5}-1\right)n-4(n-1)(n+1)(n+2)-(\sqrt{5}-1)(n+2)}{4n(n+1)(n+2)}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{2n^3+4n^2+n-2n^3-4n^2+n+2}{2n(n+1)(n+2)}\right)^2 + \left(\frac{4n^3+8n^2+\sqrt{5}n-n-4n^3-12n^2-8n+4n^2+12n+8-\sqrt{5}n-2\sqrt{5}+n+2}{2n(n+1)(n+2)}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{2n+2}{2n(n+1)(n+2)}\right)^2 + \left(\frac{4n+10-2\sqrt{5}}{2n(n+1)(n+2)}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{n+1}{n(n+1)(n+2)}\right)^2 + \left(\frac{2n+5-\sqrt{5}}{n(n+1)(n+2)}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{(n+1)^2}{n^2(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{(2n+5-\sqrt{5})^2}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}} = \sqrt{\frac{(n+1)^2+(2n+5-\sqrt{5})^2}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{n^2+2n+1+4n^2+25+5+20n-4\sqrt{5}n-10\sqrt{5}}}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\sqrt{5n^2+2n\left(11-2\sqrt{5}\right)+31-10\sqrt{5}}}{n(n+1)(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{O''_{n-1}O''_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5n^2+2n\left(11-2\sqrt{5}\right)+31-10\sqrt{5}}}{n(n+1)(n+2)}$.

Розв’яжемо цю задачу іншим способом. Знайдемо довжину відрізка як довжину дуги плоскої кривої.

Складемо рівняння прямої за формулою (2.3), якщо $O''_{n-1}\left(\frac{2n^2-1}{2n(n+1)};\frac{n-1}{n}+\frac{\sqrt{5}-1}{4n(n+1)}\right)$, $O''_n\left(\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)};\frac{n}{n+1}+\frac{\sqrt{5}-1}{4(n+1)(n+2)}\right)$:

$$\frac{x-\frac{2n^2-1}{2n(n+1)}}{\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)}-\frac{2n^2-1}{2n(n+1)}}=\frac{y-\left(\frac{n-1}{n}+\frac{\sqrt{5}-1}{4n(n+1)}\right)}{\frac{n}{n+1}+\frac{\sqrt{5}-1}{4(n+1)(n+2)}-\left(\frac{n-1}{n}+\frac{\sqrt{5}-1}{4n(n+1)}\right)};$$

$$\frac{x-\frac{1}{2n(n+1)}}{n+1}=\frac{y-\left(\frac{n-1}{n}+\frac{\sqrt{5}-1}{4n(n+1)}\right)}{2n+5-\sqrt{5}};$$

$$x\frac{2n+5-\sqrt{5}}{n+1}-\frac{2n+5-\sqrt{5}}{2n(n+1)^2}=y-\left(\frac{n-1}{n}+\frac{\sqrt{5}-1}{4n(n+1)}\right);$$

$$y=x\frac{2n+5-\sqrt{5}}{n+1}+\frac{n-1}{n}+\frac{\sqrt{5}-1}{4n(n+1)}-\frac{2n+5-\sqrt{5}}{2n(n+1)^2}.$$

Для знаходження довжини кривої знайдемо похідну: $y'=\frac{2n+5-\sqrt{5}}{n+1}$.

Тоді за формулою (2.2) маємо:

$$\left|\overline{O''_{n-1}O''_n}\right|=\int_{\frac{2n^2-1}{2n(n+1)}}^{\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)}}\sqrt{1+\left(\frac{2n+5-\sqrt{5}}{n+1}\right)^2}\,dx=\int_{\frac{2n^2-1}{2n(n+1)}}^{\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)}}\sqrt{1+\frac{(2n+5-\sqrt{5})^2}{(n+1)^2}}\,dx=$$

$$\sqrt{\frac{(n+1)^2+(2n+5-\sqrt{5})^2}{(n+1)^2}}\cdot x\Big|_{\frac{2n^2-1}{2n(n+1)}}^{\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)}}=\sqrt{\frac{n^2+2n+1+4n^2+25+5+20n-4\sqrt{5}n-10\sqrt{5}}{(n+1)^2}}\cdot\left(\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)}-\right.$$

$$\left.-\frac{2n^2-1}{2n(n+1)}\right)=\frac{\sqrt{5n^2+2n(11-2\sqrt{5})+31-10\sqrt{5}}}{n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n(n+1)(n+2)}=\frac{\sqrt{5n^2+2n(11-2\sqrt{5})+31-10\sqrt{5}}}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{O''_{n-1}O''_n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5n^2+2n(11-2\sqrt{5})+31-10\sqrt{5}}}{n(n+1)(n+2)}.$$

2.3. Генерація рядів з квадратурною геометричною інтерпретацією.

Розглянемо приклади одержання числових рядів з квадратурною геометричною інтерпретацією їх членів.

Задача 1. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}S_{\Delta A_n l_{n+1}K_{n+1}}$.

Розв'язання

Вершини трикутника мають такі координати: $A_n\left(\frac{1}{n+1};0\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$, $K_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+3}\right)$.

Знайдемо площу трикутника за формулою:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sin\alpha, \tag{2.4}$$

де a і b – сторони трикутника, α – кут між цими сторонами.

Візьмемо дві сторони трикутника $A_n l_{n+1}$ і $A_n K_{n+1}$. Знайдемо $\overline{A_n l_{n+1}}$ і $\overline{A_n K_{n+1}}$:

$$\overline{A_n l_{n+1}} = \overline{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+2} - 0\right)} = \overline{\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)}; \frac{1}{n+2}\right)}.$$

$$\overline{A_n K_{n+1}} = \overline{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+3} - 0\right)} = \overline{\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)}; \frac{1}{n+3}\right)}.$$

Тоді за формулою (2.1) отримаємо:

$$|\overline{A_n l_{n+1}}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^2}} = \sqrt{\frac{1+(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{1+n^2+2n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$|\overline{A_n K_{n+1}}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{(n+3)^2+(n+1)^2(n+2)^2}{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2}} = \frac{\sqrt{n^2+6n+9+n^4+4n^3+4n^2+2n^3+8n^2+8n+n^2+4n+4}}{(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$\frac{\sqrt{n^4+6n^3+14n^2+18n+13}}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{A_n l_{n+1}} \cdot \overline{A_n K_{n+1}}}{|\overline{A_n l_{n+1}}| \cdot |\overline{A_n K_{n+1}}|} = \frac{-\frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) + \frac{1}{n+2} \cdot \frac{1}{n+3}}{\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{\sqrt{n^4+6n^3+14n^2+18n+13}}{(n+1)(n+2)(n+3)}} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)}}{\frac{\sqrt{n^2+2n+2} \cdot \sqrt{n^4+6n^3+14n^2+18n+13}}{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)}} =$$

$$\frac{n+3+(n+1)^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)} \cdot \frac{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}} = \frac{n+3+n^3+2n^2+n+2n^2+4n+2}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}} =$$

$$\frac{n^3+4n^2+6n+5}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}}.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{n^3+4n^2+6n+5}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}}\right)^2} =$$

$$\sqrt{1 - \frac{(n^3+4n^2+6n+5)^2}{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}} =$$

$$\sqrt{\frac{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)-(n^3+4n^2+6n+5)^2}{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}} =$$

$$\sqrt{\frac{n^6+8n^5+28n^4+58n^3+77n^2+62n+26-n^6-8n^5-28n^4-58n^3-76n^2-60n-25}{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}} =$$

$$\frac{\sqrt{n^2+2n+1}}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}}=\frac{\sqrt{(n+1)^2}}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}}=$$

$$\frac{n+1}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}}.$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{\sqrt{n^4+6n^3+14n^2+18n+13}}{(n+1)(n+2)(n+3)}\cdot\frac{n+1}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}}=$$

$$\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2(n+3)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta A_n l_{n+1} K_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2(n+3)}$.

Розв'яжемо цю задачу іншим способом. Застосуємо геометричний зміст визначеного інтегралу:

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

Розглянемо рисунок детальніше:

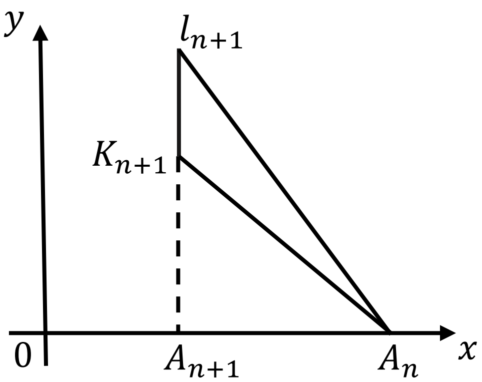


Рис. 2.3.1

Використаємо формулу:

$$S=\int_a^b\big(f_1(x)-f_2(x)\big)dx, \tag{2.5}$$

де $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ – криві, якими обмежена фігура зверху і знизу [29].

Складемо рівняння прямої $A_n l_{n+1}$ за формулою (2.3), якщо $A_n\left(\frac{1}{n+1};0\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$:

$$\frac{x-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}}=\frac{y-0}{\frac{1}{n+2}-0};$$

$$\frac{x-\frac{1}{n+1}}{-\frac{1}{(n+1)(n+2)}}=\frac{y}{\frac{1}{n+2}};$$

$$-x(n+1)(n+2)+(n+2)=y(n+2);$$

$$y = -(n+1)x + 1.$$

Складемо рівняння прямої A_nK_{n+1} за формулою (2.3), якщо $A_n\left(\frac{1}{n+1};0\right)$, $K_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+3}\right)$:

$$\frac{x-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}} = \frac{y-0}{\frac{1}{n+3}-0};$$

$$\frac{x-\frac{1}{n+1}}{-\frac{1}{(n+1)(n+2)}} = y(n+3);$$

$$-x(n+1)(n+2) + (n+2) = y(n+3);$$

$$y = -\frac{(n+1)(n+2)}{n+3}x + \frac{n+2}{n+3}.$$

Отже, використовуючи формулу (2.5) маємо:

$$S_{\Delta A_n l_{n+1} K_{n+1}} = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}\left(-(n+1)x + 1 - \left(-\frac{(n+1)(n+2)}{n+3}x + \frac{n+2}{n+3}\right)\right)dx = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}\left(\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n+3} - (n+1)\right)x + 1 - \frac{n+2}{n+3}\right)dx = \frac{1}{n+3}\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}((n^2+3n+2-n^2-4n-3)x+1)dx =$$

$$\frac{1}{n+3}\left((-n-1)\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} + x\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}\right) = \frac{1}{n+3}\left(-\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right)+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) =$$

$$\frac{1}{n+3}\left(-\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n^2+4n+4-n^2-2n-1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{n+3}\left(-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)^2}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{n+3}\cdot\frac{-2n-3+2n+4}{2(n+1)(n+2)^2} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)^2(n+3)}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta A_n l_{n+1} K_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2(n+3)}.$$

Задача 2. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta A_n K_{n+2} A_{n+1}}$.

Розв’язання

Вершини трикутника мають такі координати: $A_n\left(\frac{1}{n+1};0\right)$, $K_{n+2}\left(\frac{1}{n+3};\frac{1}{n+4}\right)$, $A_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};0\right)$.

Знайдемо площу трикутника за формулою:

$$S = \frac{1}{2}ah, \qquad (2.6)$$

де a – сторона трикутника, h – висота проведена, до сторони a.

Розглянемо рисунок детальніше:

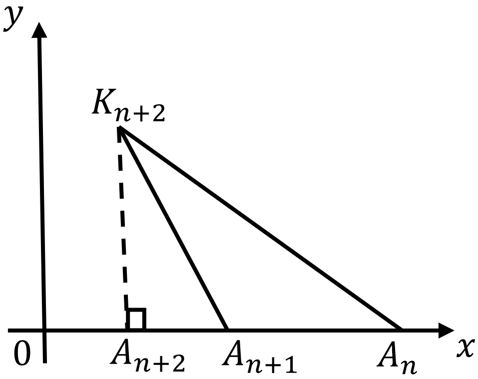


Рис. 2.3.2

У нашому випадку візьмемо сторону $A_{n+1}A_n$ $\Delta A_nK_{n+2}A_{n+1}$ і проведемо висоту $K_{n+2}A_{n+2}$.

$|\overline{A_{n+1}A_n}| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $|\overline{K_{n+2}A_{n+2}}| = \frac{1}{n+4}$.

Тоді за формулою (2.6) $S_{\Delta A_nK_{n+2}A_{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{n+4} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)(n+4)}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta A_nK_{n+2}A_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)(n+4)}$.

Розв’яжемо цю задачу іншим способом, використавши формулу (2.5).

Складемо рівняння прямої A_nK_{n+2} за формулою (2.3), якщо $A_n\left(\frac{1}{n+1};0\right)$, $K_{n+2}\left(\frac{1}{n+3};\frac{1}{n+4}\right)$:

$$\frac{x-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+1}} = \frac{y-0}{\frac{1}{n+4}-0};$$

$$\frac{x-\frac{1}{n+1}}{-\frac{2}{(n+1)(n+3)}} = y(n+4);$$

$$-\frac{1}{2}(n+1)(n+3)x + \frac{n+3}{2} = y(n+4);$$

$$y = -\frac{(n+1)(n+3)}{2(n+4)}x + \frac{n+3}{2(n+4)}.$$

Складемо рівняння прямої $A_{n+1}K_{n+2}$ за формулою (2.3), якщо $A_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};0\right)$, $K_{n+2}\left(\frac{1}{n+3};\frac{1}{n+4}\right)$:

$$\frac{x-\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+2}} = \frac{y-0}{\frac{1}{n+4}-0};$$

$$\frac{x-\frac{1}{n+2}}{-\frac{1}{(n+2)(n+3)}}=y(n+4);$$

$$-x(n+2)(n+3)+n+3=y(n+4);$$

$$y=-\frac{(n+2)(n+3)}{n+4}x+\frac{n+3}{n+4}.$$

За формулою (2.5) маємо:

$$S_{\Delta A_nK_{n+2}A_{n+1}}=\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{1}{n+2}}\left(-\frac{(n+1)(n+3)}{2(n+4)}x+\frac{n+3}{2(n+4)}-\left(-\frac{(n+2)(n+3)}{n+4}x+\frac{n+3}{n+4}\right)\right)dx+$$

$$\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}\left(-\frac{(n+1)(n+3)}{2(n+4)}x+\frac{n+3}{2(n+4)}\right)dx=\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{1}{n+2}}\left(\left(\frac{(n+2)(n+3)}{n+4}-\frac{(n+1)(n+3)}{2(n+4)}\right)x+\frac{n+3}{2(n+4)}-\right.$$

$$\left.\frac{n+3}{n+4}\right)dx+\frac{n+3}{2(n+4)}\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}(-(n+1)x+1)dx=\frac{2n^2+10n+12-n^2-4n-3}{2(n+4)}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{1}{n+2}}+$$

$$+\frac{n+3-2n-6}{2(n+4)}x\Big|_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{1}{n+2}}+\frac{n+3}{2(n+4)}\left(-(n+1)\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}+x\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}\right)=\frac{n^2+6n+9}{4(n+4)}\left(\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{1}{(n+3)^2}\right)-$$

$$\frac{n+3}{2(n+4)}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\frac{n+3}{2(n+4)}\left(-\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right)=\frac{(n+3)^2}{4(n+4)}\cdot$$

$$\left(\frac{(n+3)^2-(n+2)^2}{(n+2)^2(n+3)^2}\right)-\frac{n+3}{2(n+2)(n+3)(n+4)}+\frac{n+3}{2(n+4)}\left(-\frac{n+1}{2}\cdot\frac{(n+2)^2-(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{(n+3)^2}{4(n+4)}\cdot$$

$$\left(\frac{2n+5}{(n+2)^2(n+3)^2}\right)-\frac{n+3}{2(n+2)(n+3)(n+4)}-\frac{n+3}{2(n+4)}\cdot\left(\frac{(2n+3)}{2(n+1)(n+2)^2}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{2n+5}{4(n+2)^2(n+4)}-$$

$$\frac{1}{2(n+2)(n+4)}-\frac{(n+3)(2n+3)}{4(n+1)(n+2)^2(n+4)}+\frac{n+3}{2(n+1)(n+2)(n+4)}=$$

$$\frac{(2n+5)(n+1)-2(n+1)(n+2)-(n+3)(2n+3)+2(n+2)(n+3)}{4(n+1)(n+2)^2(n+4)}=\frac{2n+4}{4(n+1)(n+2)^2(n+4)}=\frac{1}{2(n+1)(n+2)(n+4)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}S_{\Delta A_nK_{n+2}A_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)(n+4)}$.

Задача 3. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}S_{\Delta P_nP_{n+1}l_{n+1}}$.

Розв’язання

Вершини трикутника мають такі координати: $P_n\left(0;\frac{1}{n+1}\right)$, $P_{n+1}\left(0;\frac{1}{n+2}\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$.

$\Delta P_nP_{n+1}l_{n+1}$ прямокутний з катетами P_nP_{n+1} і $P_{n+1}l_{n+1}$.

Знайдемо площу трикутника за формулою:

$$S=\frac{ab}{2},$$

де a і b – катети прямокутного трикутника.

$|\overline{P_n P_{n+1}}| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

$\left|\overline{P_{n+1} l_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{(n+2)^2}} = \frac{1}{n+2}$.

Тоді $S = \frac{|\overline{P_n P_{n+1}}| \cdot |\overline{P_{n+1} l_{n+1}}|}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)^2}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta P_n P_{n+1} l_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)(n+2)^2}$.

Розв’яжемо цю задачу іншим способом за допомогою формули (2.5).

Щоб знайти площу фігури за допомогою інтеграла складемо рівняння прямої $P_n l_{n+1}$ за формулою (2.3):

$$\frac{x-0}{\frac{1}{n+2}-0} = \frac{y-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}};$$

$$x(n+2) = \frac{y(n+1)-1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{n+1-n-2};$$

$$x(n+2) = -(y(n+1)-1)(n+2);$$

$$x = -y(n+1)+1;$$

$$y = -\frac{x}{n+1} + \frac{1}{n+1}.$$

Тоді за формулою (2.5) маємо:

$$S = \int_0^{\frac{1}{n+2}} \left(-\frac{x}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) dx = -\frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{n+2}} + \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)} \cdot x\Big|_0^{\frac{1}{n+2}} = -\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2(n+2)^2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{n+2} = -\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)^2} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)^2}.$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta P_n P_{n+1} l_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)(n+2)^2}$.

Задача 4. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta O A_n l_{n+1}}$.

Розв’язання

Вершини трикутника мають такі координати: $O(0;0)$, $A_n\left(\frac{1}{n+1};0\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$. Площу трикутника будемо знаходити за формулою (2.6).

Розглянемо рисунок детальніше:

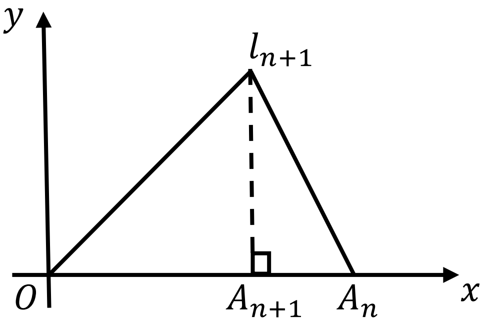


Рис. 2.3.3

У нашому випадку візьмемо сторону OA_n $\Delta OA_n l_{n+1}$ і проведемо до неї висоту $l_{n+1}A_{n+1}$.

$|\overline{OA_n}| = \frac{1}{n+1}$, $|\overline{l_{n+1}A_{n+1}}| = \frac{1}{n+2}$.

Тоді за формулою (2.6) $S_{\Delta A_n K_{n+2} A_{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta OA_n l_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

Розв’яжемо цю задачу іншим способом. Площу $S_{\Delta OA_n l_{n+1}}$ можна знайти як суму площ двох трикутників: $S_{\Delta OA_{n+1} l_{n+1}}$ і $S_{\Delta A_{n+1} A_n l_{n+1}}$.

Рівняння прямої $A_n l_{n+1}$: $y = -(n+1)x + 1$.

Рівняння прямої Ol_{n+1}: $y = x$.

$$S_{\Delta A_n K_{n+2} A_{n+1}} = \int_0^{\frac{1}{n+2}} x\,dx + \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}(-(n+1)x+1)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{n+2}} - (n+1)\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} + x\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{2(n+2)^2} - \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2(n+2)^2} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)^2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1-2n-3+2n+4}{2(n+1)(n+2)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)(n+2)^2} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta OA_n l_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

Задача 5. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta C_{n+1} F_n C_{n+2}}$.

Розв’язання

Розглянемо детальніше $\Delta C_{n+1} F_n C_{n+2}$.

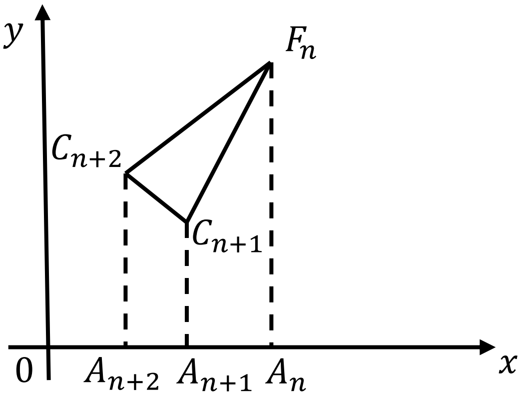


Рис. 2.3.4

Вершини трикутника мають такі координати: $C_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{n+1}{n+2}\right)$, $F_n\left(\frac{1}{n+1};1\right)$, $C_{n+2}\left(\frac{1}{n+3};\frac{n+2}{n+3}\right)$.

Знайдемо площу трикутника за формулою (2.4).

Візьмемо дві сторони трикутника F_nC_{n+1} і F_nC_{n+2}.

Знайдемо $\overline{F_nC_{n+1}}$ і $\overline{F_nC_{n+2}}$:

$$\overline{F_nC_{n+1}}=\overline{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1};\frac{n+1}{n+2}-1\right)}=\overline{\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)};-\frac{1}{n+2}\right)}.$$

$$\overline{F_nC_{n+2}}=\overline{\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+1};\frac{n+2}{n+3}-1\right)}=\overline{\left(-\frac{2}{(n+1)(n+3)};-\frac{1}{n+3}\right)}.$$

$$|\overline{F_nC_{n+1}}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2+\left(-\frac{1}{n+2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}}=$$

$$\sqrt{\frac{1+(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2}}=\frac{\sqrt{1+n^2+2n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$|\overline{F_nC_{n+2}}|=\sqrt{\left(-\frac{2}{(n+1)(n+3)}\right)^2+\left(-\frac{1}{n+3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{(n+1)^2(n+3)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}}=$$

$$\sqrt{\frac{4+(n+1)^2}{(n+1)^2(n+3)^2}}=\frac{\sqrt{4+n^2+2n+1}}{(n+1)(n+3)}=\frac{\sqrt{n^2+2n+5}}{(n+1)(n+3)}.$$

$$\cos\alpha=\frac{\overline{F_nC_{n+1}}\cdot\overline{F_nC_{n+2}}}{|\overline{F_nC_{n+1}}|\cdot|\overline{F_nC_{n+2}}|}=\frac{-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\left(-\frac{2}{(n+1)(n+3)}\right)+\left(-\frac{1}{n+2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n+3}\right)}{\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{\sqrt{n^2+2n+5}}{(n+1)(n+3)}}=$$

$$\frac{\frac{2}{(n+1)^2(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}}{\frac{\sqrt{n^2+2n+2}\cdot\sqrt{n^2+2n+5}}{(n+1)^2(n+2)(n+3)}}=\frac{2+(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)(n+3)}\cdot\frac{(n+1)^2(n+2)(n+3)}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+2n+5)}}=\frac{n^2+2n+3}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+2n+5)}}.$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{n^2+2n+3}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+2n+5)}}\right)^2}=$$

$$\sqrt{1-\frac{(n^2+2n+3)^2}{(n^2+2n+2)(n^2+2n+5)}}=\sqrt{\frac{(n^2+2n+2)(n^2+2n+5)-(n^2+2n+3)^2}{(n^2+2n+2)(n^2+2n+5)}}=$$

$$\sqrt{\frac{n^4+2n^3+5n^2+2n^3+4n^2+10n+2n^2+4n+10-n^4-4n^2-9-4n^3-6n^2-12n}{(n^2+2n+2)(n^2+2n+5)}}=\sqrt{\frac{n^2+2n+1}{(n^2+2n+2)(n^2+2n+5)}}=$$

$$\sqrt{\frac{(n+1)^2}{(n^2+2n+2)(n^2+2n+5)}}=\frac{n+1}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+2n+5)}}.$$

Отже, за формулою (2.4) маємо:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{\sqrt{n^2+2n+5}}{(n+1)(n+3)}\cdot\frac{n+1}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^2+2n+5)}}=\frac{1}{2(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}S_{\Delta C_{n+1}F_nC_{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Розв’яжемо цю задачу іншим способом.

Складемо рівняння прямої $C_{n+1}C_{n+2}$ за формулою (2.3), якщо $C_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{n+1}{n+2}\right)$, $C_{n+2}\left(\frac{1}{n+3};\frac{n+2}{n+3}\right)$:

$$\frac{x-\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+2}}=\frac{y-\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n+2}{n+3}-\frac{n+1}{n+2}};$$

$$\frac{x-\frac{1}{n+2}}{-\frac{1}{(n+2)(n+3)}}=\frac{y-\frac{n+1}{n+2}}{\frac{1}{(n+2)(n+3)}};$$

$$-x+\frac{1}{n+2}=y-\frac{n+1}{n+2};$$

$$y=-x+1.$$

Складемо рівняння прямої $C_{n+1}F_n$ за формулою (2.3), якщо $C_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{n+1}{n+2}\right)$, $F_n\left(\frac{1}{n+1};1\right)$:

$$\frac{x-\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}=\frac{y-\frac{n+1}{n+2}}{1-\frac{n+1}{n+2}};$$

$$\frac{x-\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}=\frac{y-\frac{n+1}{n+2}}{\frac{1}{n+2}};$$

$$x(n+1)(n+2)-(n+1)=y(n+2)-(n+1);$$

$$y=(n+1)x.$$

Складемо рівняння прямої $C_{n+2}F_n$ за формулою (2.3), якщо $C_{n+2}\left(\frac{1}{n+3};\frac{n+2}{n+3}\right)$, $F_n\left(\frac{1}{n+1};1\right)$:

$$\frac{x-\frac{1}{n+3}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}}=\frac{y-\frac{n+2}{n+3}}{1-\frac{n+2}{n+3}};$$

$$\frac{x-\frac{1}{n+3}}{\frac{2}{(n+1)(n+3)}}=\frac{y-\frac{n+2}{n+3}}{\frac{1}{n+3}};$$

$$\frac{(n+1)(n+3)}{2}x-\frac{n+1}{2}=y(n+3)-(n+2);$$

$$y=\frac{n+1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

Отже, площу $\Delta C_{n+1}F_nC_{n+2}$ знайдемо як суму двох площ:

$$S_{\Delta C_{n+1}F_nC_{n+2}}=\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{1}{n+2}}\left(\frac{n+1}{2}x+\frac{1}{2}-(-x+1)\right)dx+\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}\left(\frac{n+1}{2}x+\frac{1}{2}-(n+1)x\right)dx=$$

$$\int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{1}{n+2}}\left(\left(\frac{n+1}{2}+1\right)x-\frac{1}{2}\right)dx+\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}\left(\left(\frac{n+1}{2}-n-1\right)x+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{n+3}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{1}{n+2}}-\frac{1}{2}x\Big|_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{1}{n+2}}-$$

$$\frac{n+1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}+\frac{1}{2}x\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}=\frac{n+3}{4}\left(\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{1}{(n+3)^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\frac{n+1}{4}\left(\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right)+$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{n+3}{4}\cdot\left(\frac{(n+3)^2-(n+2)^2}{(n+2)^2(n+3)^2}\right)-\frac{n+3-(n+2)}{2(n+2)(n+3)}-\frac{n+1}{4}\frac{(n+2)^2-(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2}+\frac{n+2-(n+1)}{2(n+1)(n+2)}=$$

$$\frac{2n+5}{4(n+2)^2(n+3)}-\frac{1}{2(n+2)(n+3)}-\frac{2n+3}{4(n+1)(n+2)^2}+\frac{1}{2(n+1)(n+2)}=$$

$$\frac{(2n+5)(n+1)-2(n+1)(n+2)-(2n+3)(n+3)+2(n+2)(n+3)}{4(n+1)(n+2)^2(n+3)}=\frac{2n+4}{4(n+1)(n+2)^2(n+3)}=\frac{1}{2(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}S_{\Delta C_{n+1}F_nC_{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Задача 6. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}S_{\Delta P_nt_nC_{n+1}}$.

Розв’язання

Вершини трикутника мають такі координати: $P_n\left(0;\frac{1}{n+1}\right)$, $t_n\left(\frac{1}{n+2};\frac{n+2}{n+3}\right)$, $C_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{n+1}{n+2}\right)$.

Знайдемо площу трикутника за формулою (2.6).

Розглянемо малюнок детальніше:

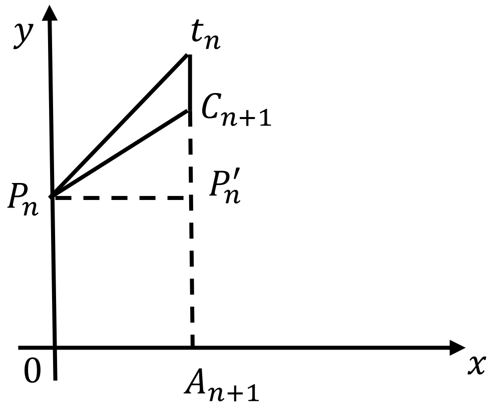


Рис. 2.3.5

У нашому випадку візьмемо сторону t_nC_{n+1} $\Delta P_nt_nC_{n+1}$ і проведемо висоту P_nP_n'. $|\overline{t_nC_{n+1}}| = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$, $|\overline{P_nP_n'}| = \frac{1}{n+2}$.

Тоді за формулою (2.6) $S_{\Delta P_nt_nC_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+2)(n+3)} \cdot \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2(n+2)^2(n+3)}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta P_nt_nC_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+2)^2(n+3)}$.

Розв'яжемо цю задачу іншим способом, використавши формулу (2.5).

Складемо рівняння прямої P_nt_n за формулою (2.3), якщо $P_n\left(0; \frac{1}{n+1}\right)$, $t_n\left(\frac{1}{n+2}; \frac{n+2}{n+3}\right)$:

$$\frac{x-0}{\frac{1}{n+2}-0} = \frac{y-\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+3}-\frac{1}{n+1}};$$

$$x(n+2) = y\frac{(n+1)(n+3)}{n^2+2n-1} - \frac{n+3}{n^2+2n-1};$$

$$y = \frac{(n+2)(n^2+2n-1)}{(n+1)(n+3)}x + \frac{1}{n+1}.$$

Складемо рівняння прямої P_nC_{n+1} за формулою (2.3), якщо $P_n\left(0; \frac{1}{n+1}\right)$, $C_{n+1}\left(\frac{1}{n+2}; \frac{n+1}{n+2}\right)$:

$$\frac{x-0}{\frac{1}{n+2}-0} = \frac{y-\frac{1}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}-\frac{1}{n+1}};$$

$$x(n+2) = y\frac{(n+1)(n+2)}{n^2+n-1} - \frac{n+2}{n^2+n-1};$$

$$y = \frac{n^2+n-1}{n+1}x + \frac{1}{n+1}.$$

Отже, за формулою (2.5) маємо:

$$S_{\Delta P_n t_n C_{n+1}} = \int_0^{\frac{1}{n+2}} \left(\frac{(n+2)(n^2+2n-1)}{(n+1)(n+3)} x + \frac{1}{n+1} - \left(\frac{n^2+n-1}{n+1} x + \frac{1}{n+1} \right) \right) dx =$$

$$\int_0^{\frac{1}{n+2}} \left(\frac{(n+2)(n^2+2n-1)}{(n+1)(n+3)} - \frac{n^2+n-1}{n+1} \right) x dx = \frac{(n+2)(n^2+2n-1)-(n^2+n-1)(n+3)}{(n+1)(n+3)} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{n+2}} =$$

$$\frac{n^3+2n^2-n+2n^2+4n-2-n^3-3n^2-n^2-3n+n+3}{2(n+1)(n+2)^2(n+3)} = \frac{n+1}{2(n+1)(n+2)^2(n+3)} = \frac{1}{2(n+2)^2(n+3)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta P_n t_n C_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+2)^2(n+3)}$.

2.4. Генерація рядів з кубатурною геометричною інтерпретацією.

Розглянемо задачу на генерацію числових рядів, пов’язаних з кубатурною геометричною інтерпретацією.

Задача 1. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – об’єми послідовності тіл обертання прямих $\overline{A_n l_{n+1}}$навколо осі Ox.

Розв’язання

Нехай навколо осі Ox обертається прямокутний $\Delta A_n A_{n+1} l_{n+1}$, в результаті чого утвориться конус.

Знайдемо об’єм конуса за формулою:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \tag{2.7}$$

У нашому випадку $r = |\overline{A_{n+1} l_{n+1}}|$, $h = |\overline{A_n A_{n+1}}|$.

$|\overline{A_n A_{n+1}}| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Знайдемо $|\overline{A_{n+1} l_{n+1}}|$, де $A_{n+1}\left(\frac{1}{n+2}; 0\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2}; \frac{1}{n+2}\right)$, тоді за формулою (2.1):

$$|\overline{A_{n+1} l_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+2}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+2} - 0\right)^2} = \frac{1}{n+2}.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{n+2}\right)^2 \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{\pi}{3(n+1)(n+2)^3}.$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{3(n+1)(n+2)^3}$.

Розв’яжемо цю задачу іншим способом – за допомогою інтеграла:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \text{ [29]}. \tag{2.8}$$

Складемо рівняння прямої $A_n l_{n+1}$ за формулою (2.3), якщо $A_n\left(\frac{1}{n+1}; 0\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2}; \frac{1}{n+2}\right)$:

$$\frac{x-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}}=\frac{y-0}{\frac{1}{n+2}-0};$$

$$\frac{x(n+1)-1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{-1}=y(n+2);$$

$$y=-x(n+1)+1.$$

Тоді за формулою (2.8) маємо:

$$V=\pi\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}(-x(n+1)+1)^2dx=\pi\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}(1-2x(n+1)+x^2(n+1)^2)dx=$$

$$\pi\left(x\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}-2(n+1)\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}+(n+1)^2\frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}\right)=\pi\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-(n+1)\left(\frac{1}{(n+1)^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{(n+2)^2}\right)+\frac{(n+1)^2}{3}\left(\frac{1}{(n+1)^3}-\frac{1}{(n+2)^3}\right)\right)=\pi\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{(n+1)((n+2)^2-(n+1)^2)}{(n+1)^2(n+2)^2}+\right.$$

$$\left.\frac{(n+1)^2((n+2)^3-(n+1)^3)}{3(n+1)^3(n+2)^3}\right)=\pi\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)^2}+\frac{3n^2+9n+7}{3(n+1)(n+2)^3}\right)=$$

$$\pi\frac{3(n+2)^2-3(2n+3)(n+2)+3n^2+9n+7}{3(n+1)(n+2)^3}=\pi\frac{3n^2+12n+12-6n^2-12n-9n-18+3n^2+9n+7}{3(n+1)(n+2)^3}=\frac{\pi}{3(n+1)(n+2)^3}.$$

Отже, шуканий ряд повністю збігається з рядом, отриманим першим способом $\sum_{n=1}^{\infty}V_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3(n+1)(n+2)^3}$.

Задача 2. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$, де V_n – об'єми послідовності тіл обертання прямих $\overline{A_nK_{n+2}}$навколо осі Ox.

Розв'язання

Нехай навколо осі Ox обертається прямокутний $\Delta A_nA_{n+2}K_{n+2}$, в результаті чого утвориться конус.

Знайдемо об'єм конуса за формулою (2.7). У нашому випадку $r=|\overline{A_{n+2}K_{n+2}}|$, $h=|\overline{A_nA_{n+2}}|$.

$A_n\left(\frac{1}{n+1};0\right)$, $A_{n+2}\left(\frac{1}{n+3};0\right)$, $K_{n+2}\left(\frac{1}{n+3};\frac{1}{n+4}\right)$, тоді:

$$|\overline{A_{n+2}K_{n+2}}|=\frac{1}{n+4}.$$

$$|\overline{A_nA_{n+2}}|=\frac{2}{(n+1)(n+3)}.$$

Отже за формулою (2.7) $V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{n+4}\right)^2\cdot\frac{2}{(n+1)(n+3)}=\frac{2\pi}{3(n+1)(n+3)(n+4)^2}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{3(n+1)(n+3)(n+4)^2}$.

Розв’яжемо цю задачу іншим способом – за допомогою інтеграла

Складемо рівняння прямої $A_n K_{n+2}$ за формулою (2.3):

$$\frac{x-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+1}} = \frac{y-0}{\frac{1}{n+4}-0};$$

$$\frac{x(n+1)-1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)(n+3)}{-2} = y(n+4);$$

$$y = -\frac{(n+1)(n+3)}{2(n+4)} x + \frac{n+3}{2(n+4)}.$$

Тоді за формулою (2.8) маємо:

$$V = \pi \int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{1}{n+1}} \left(-\frac{(n+1)(n+3)}{2(n+4)} x + \frac{n+3}{2(n+4)}\right)^2 dx = \pi \frac{(n+3)^2}{4(n+4)^2} \int_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{1}{n+1}} (1 - 2x(n+1) +$$

$$x^2(n+1)^2)dx = \pi \frac{(n+3)^2}{4(n+4)^2} \left(x \Big|_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{1}{n+1}} - 2(n+1) \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{1}{n+1}} + (n+1)^2 \frac{x^3}{3} \Big|_{\frac{1}{n+3}}^{\frac{1}{n+1}} \right) =$$

$$\pi \frac{(n+3)^2}{4(n+4)^2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} - (n+1)\left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+3)^2}\right) + \frac{(n+1)^2}{3}\left(\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+3)^3}\right) \right) =$$

$$\pi \frac{(n+3)^2}{4(n+4)^2} \left(\frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{(n+1)((n+3)^2-(n+1)^2)}{(n+1)^2(n+3)^2} + \frac{(n+1)^2((n+3)^3-(n+1)^3)}{3(n+1)^3(n+3)^3} \right) =$$

$$\pi \frac{(n+3)^2}{4(n+4)^2} \left(\frac{2}{(n+1)(n+3)} - \frac{4n+8}{(n+1)(n+3)^2} + \frac{6n^2+24n+26}{3(n+1)(n+3)^3} \right) = \pi \frac{(n+3)^2}{4(n+4)^2} \cdot$$

$$\frac{6(n+3)^2 - 3(4n+8)(n+3) + 6n^2+24n+26}{3(n+1)(n+3)^3} = \frac{\pi}{4(n+4)^2} \cdot \frac{6n^2+36n+54-12n^2-36n-24n-72+6n^2+24n+26}{3(n+1)(n+3)} =$$

$$\frac{8\pi}{12(n+1)(n+3)(n+4)^2} = \frac{2\pi}{3(n+1)(n+3)(n+4)^2}.$$

Отже, шуканий ряд повністю збігається з рядом, отриманим першим способом $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{3(n+1)(n+3)(n+4)^2}$.

Задача 3. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – об’єми послідовності тіл обертання прямих $\overline{l_n l_{n+1}}$ навколо осі Ox.

Розв’язання

Нехай навколо осі Ox обертається прямокутна трапеція $A_n l_n l_{n+1} A_{n+1}$, в результаті чого утвориться зрізаний конус.

Знайдемо об’єм зрізаного конуса за формулою:

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \tag{2.9}$$

У нашому випадку $h = |\overline{A_n A_{n+1}}|$, $r_1 = |\overline{A_n l_n}|$, $r_2 = |\overline{A_{n+1} l_{n+1}}|$

$A_n\left(\frac{1}{n+1}; 0\right)$, $A_{n+1}\left(\frac{1}{n+2}; 0\right)$, $l_n\left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1}\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2}; \frac{1}{n+2}\right)$.

$|\overline{A_n A_{n+1}}| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $|\overline{A_n l_n}| = \frac{1}{n+1}$, $|\overline{A_{n+1} l_{n+1}}| = \frac{1}{n+2}$.

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} + \left(\frac{1}{n+2}\right)^2\right) = \frac{\pi}{3(n+1)(n+2)} \cdot$$

$$\frac{(n+2)^2 + (n+1)(n+2) + (n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{\pi(n^2+4n+4+n^2+3n+2+n^2+2n+1)}{3(n+1)^3(n+2)^3} = \frac{(3n^2+9n+7)\pi}{3(n+1)^3(n+2)^3}.$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n^2+9n+7)\pi}{3(n+1)^3(n+2)^3}$.

Розв'яжемо цю задачу іншим способом – за допомогою інтеграла.

Рівняння прямої $l_n l_{n+1}$: $y = x$

Тоді за формулою (2.8) маємо:

$$V = \pi \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} x^2 dx = \pi \frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+2)^3}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(n+2)^3 - (n+1)^3}{(n+1)^3(n+2)^3} =$$

$$\frac{(n^3+6n^2+12n+8-n^3-3n^2-3n-1)\pi}{3(n+1)^3(n+2)^3} = \frac{(3n^2+9n+7)\pi}{3(n+1)^3(n+2)^3}.$$

Отже, шуканий ряд повністю збігається з рядом, отриманим першим способом $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n^2+9n+7)\pi}{3(n+1)^3(n+2)^3}$.

Задача 4. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – об'єми послідовності тіл обертання прямих $\overline{T_n C_{n+1}}$навколо осі Ox.

Розв'язання

Нехай навколо осі Ox обертається прямокутна трапеція $T_n C_{n+1} A_{n+1} O$, в результаті чого утвориться зрізаний конус.

Знайдемо об'єм зрізаного конуса за формулою (2.9).

У нашому випадку $h = |\overline{OA_{n+1}}|$, $r_1 = |\overline{OT_n}|$, $r_2 = |\overline{A_{n+1} C_{n+1}}|$

$O(0; 0)$, $A_{n+1}\left(\frac{1}{n+2}; 0\right)$, $T_n\left(0; \frac{n}{n+1}\right)$, $C_{n+1}\left(\frac{1}{n+2}; \frac{n+1}{n+2}\right)$.

$|\overline{OA_{n+1}}| = \frac{1}{n+2}$, $|\overline{OT_n}| = \frac{n}{n+1}$, $|\overline{A_{n+1} C_{n+1}}| = \frac{n+1}{n+2}$.

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{1}{n+2}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^2+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}+\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\right)=\frac{\pi}{3(n+2)}\cdot\frac{n^2(n+2)^2+n(n+1)^2(n+2)+(n+1)^4}{(n+1)^2(n+2)^2}=$$

$$\frac{\pi(n^4+4n^3+4n^2+n^4+4n^3+5n^2+2n+n^4+4n^3+6n^2+4n+1)}{3(n+1)^2(n+2)^3}=\frac{(3n^4+12n^3+15n^2+6n+1)\pi}{3(n+1)^2(n+2)^3}.$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}V_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n^4+12n^3+15n^2+6n+1)\pi}{3(n+1)^2(n+2)^3}$.

Розв’яжемо цю задачу іншим способом – за допомогою інтеграла.

Складемо рівняння прямої T_nC_{n+1} за формулою (2.3):

$$\frac{x-0}{\frac{1}{n+2}-0}=\frac{y-\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}};$$

$$x(n+2)=\frac{y(n+1)-n}{n+1}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{1};$$

$$x(n+2)=y(n+1)(n+2)-n(n+2);$$

$$y=\frac{1}{n+1}x+\frac{n}{n+1}.$$

Тоді за формулою (2.8) маємо:

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{n+2}}\left(\frac{1}{n+1}x+\frac{n}{n+1}\right)^2dx=\frac{\pi}{(n+1)^2}\int_0^{\frac{1}{n+2}}(x^2+2nx+n^2)dx=\frac{\pi}{(n+1)^2}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{n+2}}+\right.$$

$$\left.2n\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{n+2}}+n^2x\Big|_0^{\frac{1}{n+2}}\right)=\frac{\pi}{(n+1)^2}\left(\frac{1}{3(n+2)^3}+\frac{n}{(n+2)^2}+\frac{n^2}{n+2}\right)=\frac{(1+3n(n+2)+3n^2(n+2)^2)\pi}{3(n+1)^2(n+2)^3}=$$

$$\frac{(3n^4+12n^3+15n^2+6n+1)\pi}{3(n+1)^2(n+2)^3}.$$

Отже, шуканий ряд повністю збігається з рядом, отриманим першим способом $\sum_{n=1}^{\infty}V_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n^4+12n^3+15n^2+6n+1)\pi}{3(n+1)^2(n+2)^3}$.

Задача 5. Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$, де V_n – об’єми послідовності тіл обертання прямих $\overline{F_1C_{n+1}}$навколо осі Ox.

Розв’язання

Нехай навколо осі Ox обертається прямокутна трапеція $F_1C_{n+1}A_{n+1}A_1$, в результаті чого утвориться зрізаний конус.

Знайдемо об’єм зрізаного конуса за формулою (2.9).

У нашому випадку $h=|\overline{A_1A_{n+1}}|$, $r_1=|\overline{A_{n+1}C_{n+1}}|$, $r_2=|\overline{A_1F_1}|$

$A_1\left(\frac{1}{2};0\right)$, $A_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};0\right)$, $F_1\left(\frac{1}{2};1\right)$, $C_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{n+1}{n+2}\right)$.

$|\overline{A_1A_{n+1}}|=\frac{n}{2(n+2)}$, $|\overline{A_{n+1}C_{n+1}}|=\frac{n+1}{n+2}$, $|\overline{A_1F_1}|=1$.

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{n}{2(n+2)}\left(\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2+\frac{n+1}{n+2}\cdot 1+1^2\right)=\frac{\pi}{6(n+2)}\cdot\frac{(n+1)^2+(n+1)(n+2)+(n+2)^2}{(n+2)^2}=$$

$$\frac{\pi(n^2+2n+1+n^2+3n+2+n^2+4n+4)n}{6(n+2)^3}=\frac{n(3n^2+9n+7)\pi}{6(n+2)^3}.$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}V_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(3n^2+9n+7)\pi}{6(n+2)^3}$.

Розв'яжемо цю задачу іншим способом – за допомогою інтеграла.

Складемо рівняння прямої F_1C_{n+1} за формулою (2.3):

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{\frac{n+1}{n+2}-1};$$

$$\frac{2x-1}{2}\cdot\frac{2(n+2)}{2-n-2}=(y-1)\cdot\frac{n+2}{n+1-n-2};$$

$$-\frac{2(n+2)}{n}x+\frac{n+2}{n}=-(n+2)y+n+2;$$

$$y=\frac{2}{n}x+\frac{n-1}{n}.$$

Тоді за формулою (2.8) маємо:

$$V=\pi\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{n}x+\frac{n-1}{n}\right)^2dx=\frac{\pi}{n^2}\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{2}}(4x^2+4(n-1)x+(n-1)^2)dx=\frac{\pi}{n^2}\left(\frac{4x^3}{3}\bigg|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.4(n-1)\frac{x^2}{2}\bigg|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{2}}+(n-1)^2x\bigg|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\pi}{n^2}\left(\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{(n+2)^3}\right)+\frac{4(n-1)}{2}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right)+\right.$$

$$\left.(n-1)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)\right)=\frac{\pi}{n^2}\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{(n+2)^3-8}{8(n+2)^3}+2(n-1)\frac{(n+2)^2-4}{4(n+2)^2}+(n-1)^2\left(\frac{n+2-2}{2(n+2)}\right)\right)=$$

$$\frac{\pi}{2n^2(n+2)}\left(\frac{(n+2)^3-8}{3(n+2)^2}+\frac{(n-1)((n+2)^2-4)}{n+2}+n(n-1)^2\right)=\frac{\pi}{2n^2(n+2)}\cdot$$

$$\frac{n^3+6n^2+12n+8-8+3(n+2)(n-1)(n^2+4n+4-4)+3n(n-1)^2(n+2)^2}{3(n+2)^2}=$$

$$\frac{\pi\left(n^3+6n^2+12n+(3n^2+3n-6)(n^2+4n)+3n(n^2-2n+1)(n^2+4n+4)\right)}{6n^2(n+2)^3}=$$

$$\frac{\pi(n^2+6n+12+(3n^2+3n-6)(n+4)+3(n^2-2n+1)(n^2+4n+4))}{6n(n+2)^3}=$$

$$\frac{\pi(n^2+6n+12+3n^3+12n^2+3n^2+12n-6n-24+3n^4+12n^3+12n^2-6n^3-24n^2-24n+3n^2+12n+12)}{6n(n+2)^3}=$$

$$\frac{\pi(3n^4+9n^3+7n^2)}{6n(n+2)^3}=\frac{\pi n^2(3n^2+9n+7)}{6n(n+2)^3}=\frac{n(3n^2+9n+7)\pi}{6(n+2)^3}.$$

Отже, шуканий ряд повністю збігається з рядом, отриманим першим способом $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3n^2+9n+7)\pi}{6(n+2)^3}$.

2.5. Дослідження одержаних числових рядів на збіжність.

Основна задача для числових рядів полягає в дослідженні їх на збіжність. Тож дослідимо на збіжність згенеровані нами ряди.

Задача 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Розв'язання

Перевіримо виконання необхідної ознаки ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 0.$$

Отже, необхідна ознака збіжності виконується.

Застосуємо основну ознаку порівняння з більшим збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n^2+3n+2},\ b_n = \frac{1}{n^2}.$$

$\frac{1}{n^2+3n+2} < \frac{1}{n^2}$.

Оскільки $a_n < b_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ також збігається.

Задача 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)}$.

Розв'язання

Перевіримо виконання необхідної ознаки ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Отже, необхідна ознака збіжності не виконується. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)}$ розбжний.

Задача 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{(n+1)(n+2)}$.

Розв'язання

Перевіримо виконання необхідної ознаки ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{(n+1)(n+2)}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{(n+1)(n+2)}=0.$$

Отже, необхідна ознака збіжності виконується.

Застосуємо граничну ознаку збіжності, порівнюючи даний ряд зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}n^2}{\sqrt{2}(n^2+3n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=1\ \left(\frac{\neq 0}{\neq\infty}\right).$$

Ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

Задача 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$.

Розв'язання

Перевіримо виконання необхідної ознаки ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3}=0.$$

Отже, необхідна ознака збіжності виконується.

Застосуємо достатню граничну ознаку порівняння. Оскільки $a_n=\frac{1}{n+3}\sim\frac{1}{n}=b_n$, то порівняємо даний ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, що розбігається:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{n}}=1\,.$$

Одержана границя є скінченною і відмінною від нуля. Отже, ці ряди поводять себе однаково, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$ також розбігається.

Задача 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+4n+8}}{2(n+1)(n+2)}$.

Розв'язання

Перевіримо виконання необхідної ознаки ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+4n+8}}{2(n+1)(n+2)}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+4n+8}}{2(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+4n+8}}{n^2+3n+2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\frac{8}{n^4}}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{2}\neq 0.$$ Отже,

необхідна ознака збіжності не виконується. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+4n+8}}{2(n+1)(n+2)}$ розбіжний.

Задача 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$.

Розв’язання

Перевіримо виконання необхідної ознаки ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Отже, необхідна ознака збіжності виконується.

Застосуємо достатню граничну ознаку порівняння. Оскільки $a_n=\frac{1}{n+1}\sim\frac{1}{n}=b_n$, то порівняємо даний ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, що розбігається:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1\ .$$

Одержана границя є скінченною і відмінною від нуля. Отже, ці ряди поводять себе однаково, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ також розбігається.

Задача 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}$.

Розв’язання

Перевіримо виконання необхідної ознаки ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n^2+3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}}{n+3+\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3}=0.$$

Отже, необхідна ознака збіжності виконується.

Оскільки $a_n=\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}\sim\frac{\sqrt{n^2}}{n^2}\sim\frac{n}{n^2}\sim\frac{1}{n}=b_n$, $b_n=\frac{1}{n}$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з розбіжним узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3+2n^2}}{n^2+3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1}=1\ .$$

Одержана границя є скінченною і відмінною від нуля. Отже ці ряди поводять себе однаково, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}$ також розбігається.

Задача 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

Розв'язання

Перевіримо виконання необхідної ознаки ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(\infty+1)(\infty+2)} = 0.$$

Отже, необхідна ознака збіжності виконується.

Застосуємо граничну ознаку збіжності, порівнюючи даний ряд зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+3n+2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\neq 0}{\neq\infty}\right).$$

Ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

Задача 9. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)(n+2)}$.

Розв'язання

Перевіримо виконання необхідної ознаки ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)(n+2)}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2(\infty+1)(\infty+2)} = 0.$$

Отже, необхідна ознака збіжності виконується.

Застосуємо граничну ознаку збіжності, порівнюючи даний ряд зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}n^2}{2(n+1)(n+2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+3n+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\neq 0}{\neq\infty}\right).$$

Ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

Задача 10. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\sqrt{5})(n+1)(n+2)}$.

Розв'язання

Перевіримо виконання необхідної ознаки ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\sqrt{5})(n+1)(n+2)}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\sqrt{5})(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\sqrt{5})(\infty+1)(\infty+2)} = 0.$$

Отже, необхідна ознака збіжності виконується.

Застосуємо граничну ознаку збіжності, порівнюючи даний ряд зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(1+\sqrt{5})(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(1+\sqrt{5})}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+3n+2}=\frac{1}{(1+\sqrt{5})}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=$$

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1}=\frac{1}{(1+\sqrt{5})}\ \left(\frac{\neq 0}{\neq\infty}\right).$$

Ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

Задача 11. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}(n-1)}{n(n+1)(n+2)}$.

Розв’язання

Перевіримо виконання необхідної ознаки ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}(n-1)}{n(n+1)(n+2)}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}(n-1)}{n(n+1)(n+2)}=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^3+3n^2+2n}=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{0}{1}=0.$$

Отже, необхідна ознака збіжності виконується.

Застосуємо граничну ознаку збіжності, порівнюючи даний ряд зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}(n-1)n^2}{n(n+1)(n+2)}=\sqrt{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n^2}{n^3+3n^2+2n}=\sqrt{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=$$

$$\sqrt{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1}=\sqrt{2}\ \left(\frac{\neq 0}{\neq\infty}\right).$$

Ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

Задача 12. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{n(n+2)}$.

Розв’язання

Перевіримо виконання необхідної ознаки ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{n(n+2)}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n(n+2)}=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\infty(\infty+2)}=0.$$

Отже, необхідна ознака збіжності виконується.

Застосуємо граничну ознаку збіжності, порівнюючи даний ряд зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}n^2}{n(n+2)}=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n}=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1}=\sqrt{2}\ \left(\frac{\neq 0}{\neq\infty}\right).$$

Ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

Задача 13. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5n^2+2n\left(11-2\sqrt{5}\right)+31-10\sqrt{5}}}{n(n+1)(n+2)}$.

Розв'язання

Перевіримо виконання необхідної ознаки ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5n^2+2n\left(11-2\sqrt{5}\right)+31-10\sqrt{5}}}{n(n+1)(n+2)}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n^2+2n\left(11-2\sqrt{5}\right)+31-10\sqrt{5}}}{n(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n^2+2n\left(11-2\sqrt{5}\right)+31-10\sqrt{5}}}{n^3+3n^2+2n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5+\frac{2\left(11-2\sqrt{5}\right)}{n}+\frac{31-10\sqrt{5}}{n^2}}}{n^3+3n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5}}{n^3+3n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5}}{\infty^3+3\infty^2+2\infty}=0.$$

Отже, необхідна ознака збіжності виконується.

Застосуємо граничну ознаку збіжності, порівнюючи даний ряд зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot\sqrt{5n^2+2n\left(11-2\sqrt{5}\right)+31-10\sqrt{5}}}{n(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ \sqrt{5n^2+2n\left(11-2\sqrt{5}\right)+31-10\sqrt{5}}}{n^2+3n+2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n^4+2n^3\left(11-2\sqrt{5}\right)+\left(31-10\sqrt{5}\right)n^2}}{n^2+3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5+\frac{2\left(11-2\sqrt{5}\right)}{n}+\frac{31-10\sqrt{5}}{n^2}}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5}}{1}=\sqrt{5}\ \left(\frac{\neq 0}{\neq\infty}\right).$$

Ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

Задача 14. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2(n+3)}$.

Розв'язання

Перевіримо виконання необхідної ознаки ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2(n+3)}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(\infty+1)(\infty+2)^2(\infty+3)}=0.$$

Отже, необхідна ознака збіжності виконується.

Оскільки $a_n=\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2(n+3)}\sim\frac{1}{n^4}=b_n$, $b_n=\frac{1}{n^4}$, то застосуємо граничну ознаку збіжності, порівнюючи даний ряд зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{2(n+1)(n+2)^2(n+3)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{n^4+8n^3+23n^2+28n+12}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{8}{n}+\frac{23}{n^2}+\frac{28}{n^3}+\frac{12}{n^4}}=$$

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\neq 0}{\neq\infty}\right).$$

Ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

Задача 15. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)(n+4)}$.

Розв’язання

Перевіримо виконання необхідної ознаки ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)(n+4)}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)(n+4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(\infty+1)(\infty+2)(\infty+4)}=0.$$

Отже, необхідна ознака збіжності виконується.

Оскільки $a_n=\frac{1}{2(n+1)(n+2)(n+4)}\sim\frac{1}{n^3}=b_n$, $b_n=\frac{1}{n^3}$, то застосуємо граничну ознаку збіжності, порівнюючи даний ряд зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2(n+1)(n+2)(n+4)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+7n^2+14n+8}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{7}{n}+\frac{14}{n^2}+\frac{8}{n^3}}=$$

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\neq 0}{\neq\infty}\right).$$

Ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

Задача 16. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2}$.

Розв’язання

Перевіримо виконання необхідної ознаки ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(\infty+1)(\infty+2)^2}=0.$$

Отже, необхідна ознака збіжності виконується.

Оскільки $a_n=\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2}\sim\frac{1}{n^3}=b_n$, $b_n=\frac{1}{n^3}$, то застосуємо граничну ознаку збіжності, порівнюючи даний ряд зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2(n+1)(n+2)^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+5n^2+8n+4}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{5}{n}+\frac{8}{n^2}+\frac{4}{n^3}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\neq 0}{\neq\infty}\right).$$

Ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

Задача 17. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+2)^2(n+3)}$.

Розв'язання

Перевіримо виконання необхідної ознаки ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+2)^2(n+3)}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+2)^2(n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+2)^2(n+3)} = 0.$$

Отже, необхідна ознака збіжності виконується.

Оскільки $a_n = \frac{1}{2(n+2)^2(n+3)} \sim \frac{1}{n^3} = b_n,\ b_n = \frac{1}{n^3}$, то застосуємо граничну ознаку збіжності, порівнюючи даний ряд зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2(n+2)^2(n+3)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+7n^2+16n+12} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{7}{n}+\frac{16}{n^2}+\frac{12}{n^3}} =$$

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\neq 0}{\neq \infty}\right).$$

Ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

2.6. Дослідження характеру зростання частинних сум S_n в залежності від значень $n \in N$.

Одними з важливих задач, окрім збіжності, в теорії рядів є задачі на знаходження суми ряду та дослідження швидкості збігання частинних сум до значення суми ряду S в залежності від зростання «n».

Знайдемо суму та дослідимо швидкість збігання частинних сум для деяких збіжних рядів, розглянутих у попередньому пункті.

Задача 1. Знайти суму та дослідити швидкість збігання частинних сум для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Побудувати графік залежності S_n від n для: $n = 10$, $n = 20$, $n = 40$, $n = 80$, $n = 150$.

Розв'язання

Розкладемо раціональний дріб $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ на суму найпростіших за допомогою методу невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} = \frac{A(n+2)+B(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{An+2A+Bn+B}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(A+B)+(2A+B)}{(n+1)(n+2)}.$$

Прирівнюємо чисельники для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$n(A+B)+(2A+B)=1.$$

Ця рівність виконується коли коефіцієнти при однакових степенях n рівні між собою. З цієї умови отримуємо систему лінійних рівнянь для визначення A, B:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{cases}$$

Розв'язуючи її знаходимо невідомі коефіцієнти: $A=1, B=-1$.

Тоді загальний член ряду буде мати вид: $\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$.

Розпишемо цей ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+ +\cdots-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{2}$.

Отже, $S=\frac{1}{2}$.

Запишемо частинну суму ряду та побудуємо графік перших десяти членів ряду.

$$S_1=\frac{1}{(1+1)(1+2)}=\frac{1}{6},$$

$$S_2=\frac{1}{(1+1)(1+2)}+\frac{1}{(2+1)(2+2)}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4},$$

$$S_3=\frac{1}{(1+1)(1+2)}+\frac{1}{(2+1)(2+2)}+\frac{1}{(3+1)(3+2)}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{3}{10},$$

....

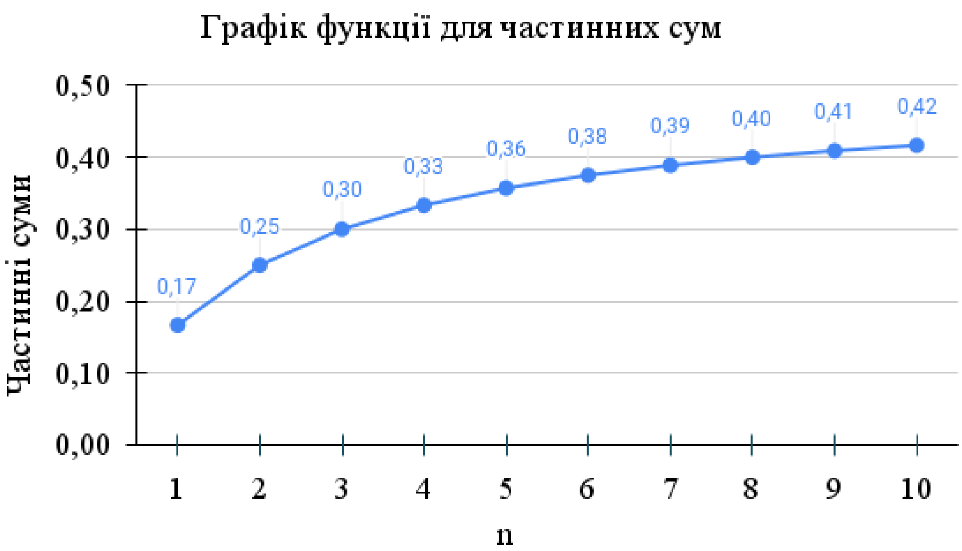


Рис. 2.6.1. Графік частинних сум для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду (рис. 2.6.2 (*а*-*г*)).

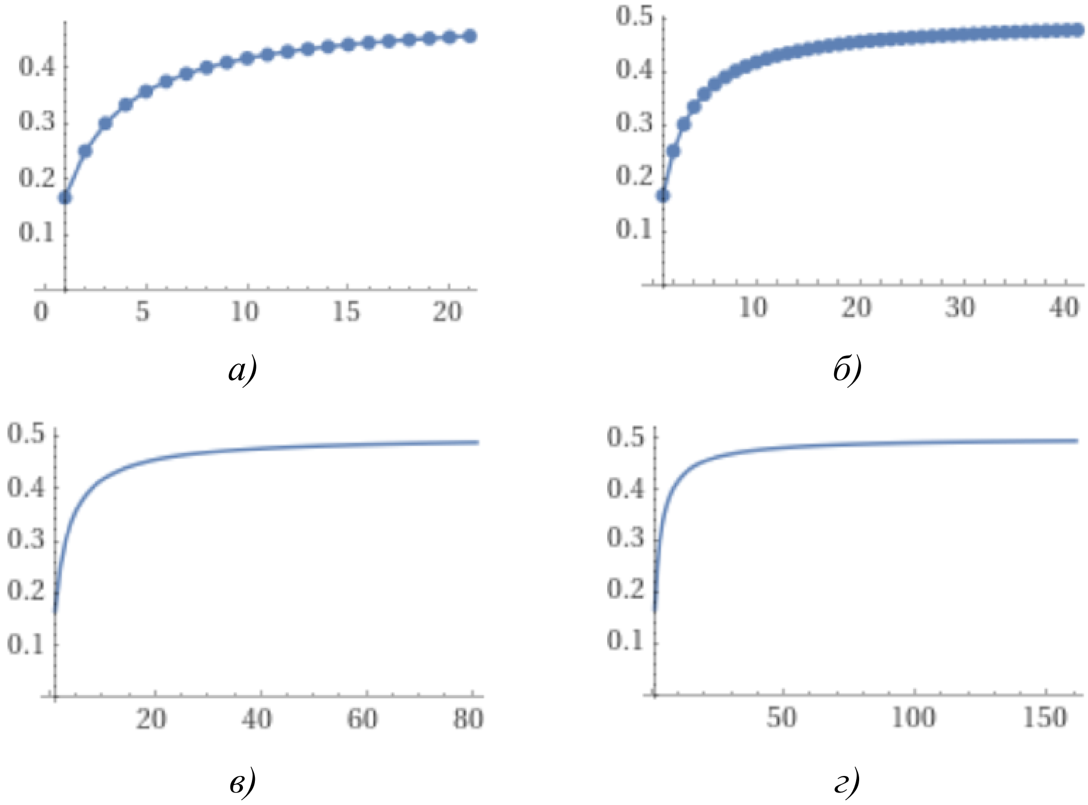


Рис. 2.6.2. Графіки зміни частинних сум.

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд.

Задача 2. Знайти суму та дослідити швидкість збігання частинних сум для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}(n-1)}{n(n+1)(n+2)}$. Побудувати графік залежності S_n від n для: $n = 10,\ n = 20, n = 40$, $n = 80, n = 150$.

Розв’язання

Розкладемо раціональний дріб $\frac{\sqrt{2}(n-1)}{n(n+1)(n+2)}$ на суму найпростіших за допомогою методу невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{\sqrt{2}(n-1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\sqrt{2}n-\sqrt{2}}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \frac{A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} =$$

$$\frac{An^2+3An+2A+Bn^2+2Bn+Cn^2+Cn}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n^2(A+B+C)+n(3A+2B+C)+2A}{n(n+1)(n+2)}.$$

Прирівнюємо чисельники для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$n^2(A+B+C) + n(3A+2B+C) + 2A = \sqrt{2}n - \sqrt{2}.$$

Ця рівність виконується коли коефіцієнти при однакових степенях n рівні між собою. З цієї умови отримуємо систему лінійних рівнянь для визначення A, B:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 3A + 2B + C = \sqrt{2}. \\ 2A = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Розв'язуючи її знаходимо невідомі коефіцієнти: $A = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $B = 2\sqrt{2}$, $C = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Тоді загальний член ряду буде мати вид: $\frac{\sqrt{2}(n-1)}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{\sqrt{2}}{2n} + \frac{2\sqrt{2}}{n+1} - \frac{3\sqrt{2}}{2(n+2)}$.

Розпишемо цей ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}(n-1)}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2n} + \frac{2\sqrt{2}}{n+1} - \frac{3\sqrt{2}}{2(n+2)}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \cdots + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \cdots - \frac{3}{6} - \frac{3}{8} - \frac{3}{10} - \frac{3}{12} - \frac{3}{14} - \cdots\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{2}{2} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{3}{6}\right) + \left(-\frac{1}{8} + \frac{2}{4} - \frac{3}{8}\right) + \left(-\frac{1}{10} + \frac{2}{5} - \frac{3}{10}\right) + \left(-\frac{1}{12} + \frac{2}{6} - \frac{3}{12}\right) + \cdots\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{2}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Отже, $S = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}354$.

Запишемо частинну суму ряду та побудуємо графік перших 10 членів ряду.

$$S_1 = \frac{\sqrt{2}(1-1)}{1(1+1)(1+2)} = 0,$$

$$S_2 = S_1 + \frac{\sqrt{2}(2-1)}{2(2+1)(2+2)} = 0 + \frac{\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{24} \approx 0{,}0589,$$

$$S_3 = S_2 + \frac{\sqrt{2}(3-1)}{3(3+1)(3+2)} = \frac{\sqrt{2}}{24} + \frac{2\sqrt{2}}{60} = \frac{3\sqrt{2}}{40} \approx 0{,}106,$$

....

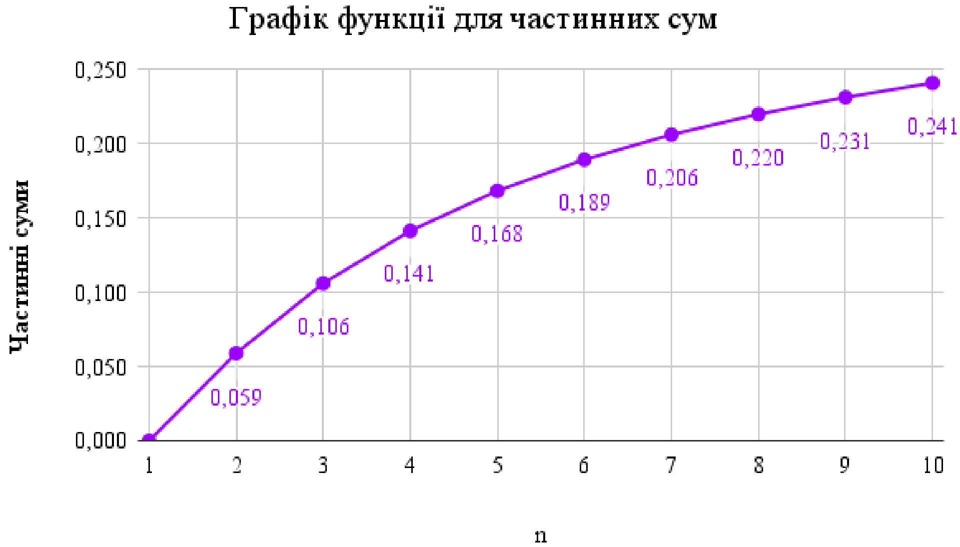


Рис. 2.6.3. Графік частинних сум для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}(n-1)}{n(n+1)(n+2)}$.

Прослідкуємо зміну графіка частинних сум для перших 150 членів ряду (рис. 2.6.4 (*а-г*)).

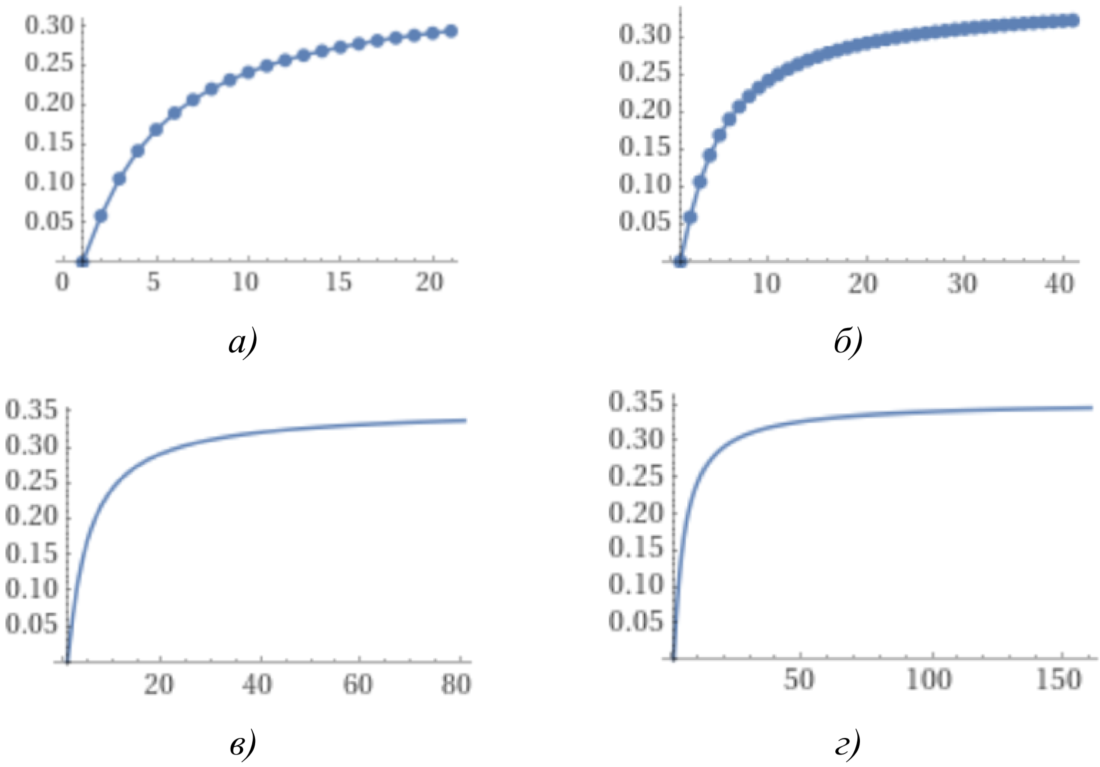


Рис. 2.6.4. Графіки зміни частинних сум

У наступних завданнях будемо досліджувати швидкість збігання частинних сум для деяких розбіжних рядів.

Задача 3. Дослідити швидкість збігання частинних сум для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$. Побудувати графік залежності S_n від n для: $n = 10, n = 20, n = 40, n = 150, n = 1200$.

Розв'язання

Запишемо частинні суми ряду та побудуємо графік перших десяти членів ряду.

$$S_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0{,}5,$$

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \approx 0{,}833,$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{3+1} = \frac{5}{6} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} \approx 1{,}0833,$$

$$S_4 = S_3 + \frac{1}{4+1} = \frac{13}{12} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60} \approx 1{,}283,$$

....

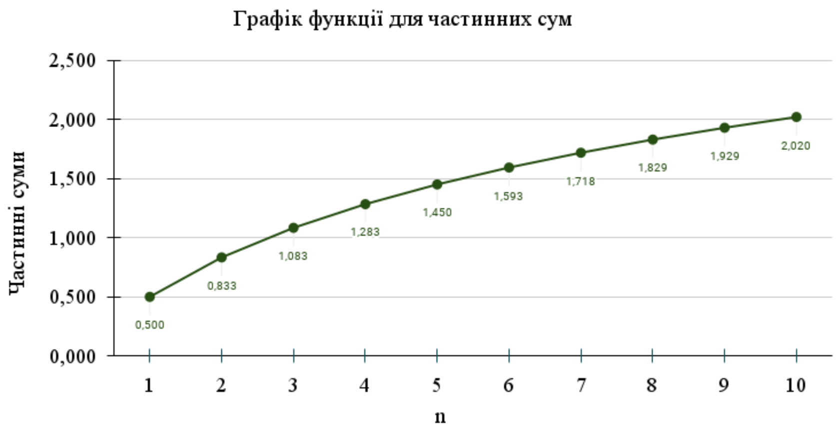
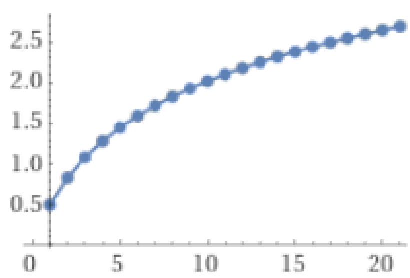
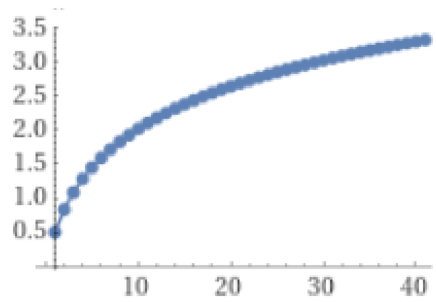


Рис. 2.6.5. Графік частинних сум для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$.

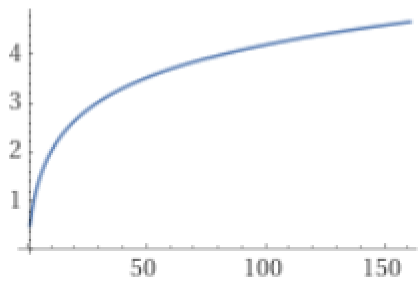
Прослідкуємо зміну графіка частинних сум для перших тисячі членів ряду (рис. 2.6.6 (*а*-*г*)).



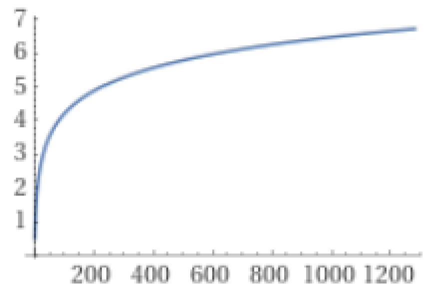
а)



б)



в)



г)

Рис. 2.6.6. Графіки зміни частинних сум.

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд.

Задача 4. Дослідити швидкість збігання частинних сум для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)}$. Побудувати графік залежності S_n від n для: $n=10, n=20, n=40, n=150, n=1200$.

Розв'язання

Запишемо частинні суми ряду та побудуємо графік перших десяти членів ряду.

$$S_1=\frac{\sqrt{1+4}}{2(1+2)}=\frac{\sqrt{5}}{6}\approx 0{,}373,$$

$$S_2=S_1+\frac{\sqrt{4+4}}{2(2+2)}=\frac{\sqrt{5}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{12}\approx 0{,}726,$$

$$S_3=S_2+\frac{\sqrt{9+4}}{2(3+2)}=\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{12}+\frac{\sqrt{13}}{10}=\frac{10\sqrt{5}+15\sqrt{2}+6\sqrt{13}}{60}\approx 1{,}087,$$

....

Рис. 2.6.7. Графік частинних сум для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$.

Прослідкуємо зміну графіка частинних сум для перших тисячі членів ряду (рис. 2.6.8 (*а*-*г*)).

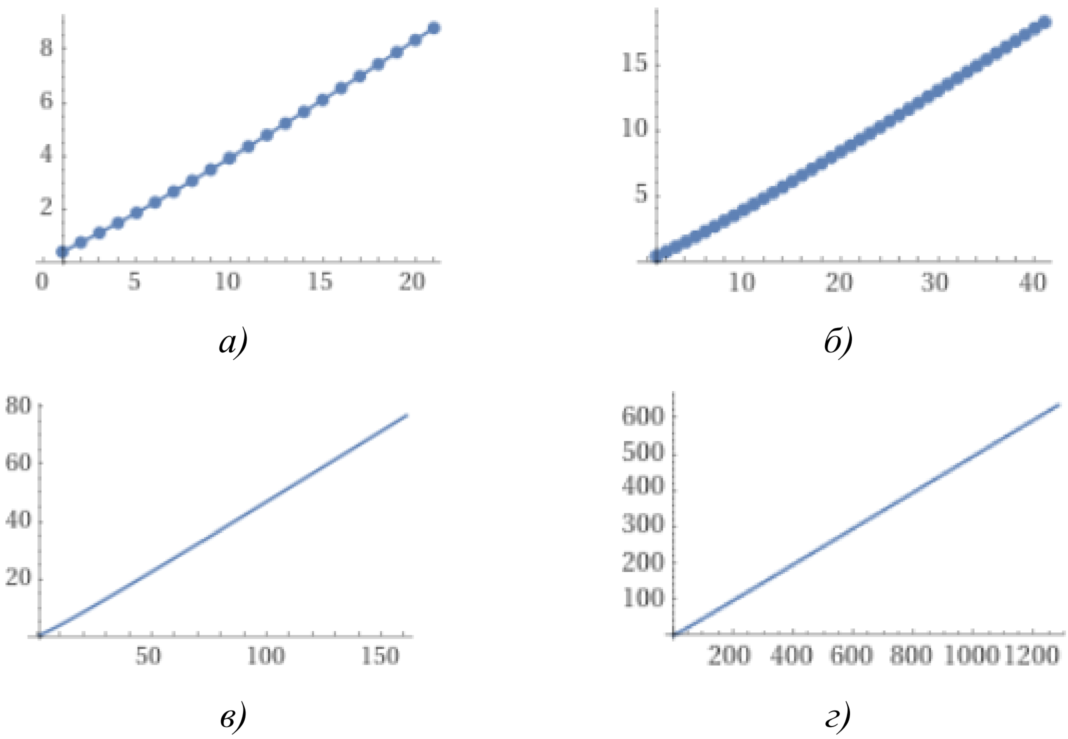


Рис. 2.6.8. Графіки зміни частинних сум.

Висновки до розділу 2

1. Запропонований алгоритм генерації числових рядів з використанням квадрата зі стороною $a = 1$, розташованого в системі координат OXY дозволяє створювати числові ряди з можливістю візуалізації членів ряду.

2. Використана нами геометрична модель складається з композиції множини певних фрагментів, кожен з яких може бути основою для створення числових рядів, процес одержання і дослідження яких може бути сформульований у вигляді задач.

3. Нами було побудовано 47 числових рядів, з яких: 14 з точковою, 22 з лінійною, 6 з квадратурною, 5 з кубатурною геометричними інтерпретаціями. Одержані ряди було досліджено на збіжність із використанням необхідних та достатніх умов.

4. Із розв'язаних задач видно, що при генерації та дослідженні різноманітних геометричних образів (ліній, площ, об'ємів), що лежать у квадраті з параметром $a = 1$, та за допомогою рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ можна отримати досить велику кількість числових рядів.

5. З'ясовано, що на базі елементів, вписаних в квадрат можна генерувати інші числові ряди. При цьому поле досліджень може бути поширене, якщо використовувати послідовності інших точок на сторонах квадрату, та інші геометричні об'єкти, які можуть бути вписаними в квадрат.

6. Нами була знайдена сума ряда для збіжних рядів та досліджено швидкість збігання частинних сум до значення суми ряду S, якщо ряд збіжний, і до нескінченності, якщо ряд розбіжний.

РОЗДІЛ 3. АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ЇХ ВПРОВАДЖЕННЯ У НАВЧАЛЬНІ ЗАКЛАДИ

3.1. Розробка системи завдань з теми «Числові послідовності» для учнів ліцею.

На сучасному етапі розвитку математики числові послідовності розглядають як частинні випадки функцій. Функції проходять наскрізною лінією через увесь шкільний курс математики, тому і числові послідовності набувають великого значення і широкого застосування. Але, щоб глибше зрозуміти поняття «послідовність», слід звернути увагу на геометричну інтерпретацію. Для того, щоб процес навчання був ефективнішим, вчителем розробляються усіляки підходи для активізації інтересу учнів і саме геометрична модель є одним з цих підходів [9].

Для кращої візуалізації розіб’ємо наш квадрат (рис. 2.1.1) на чотири квадрати і для кожного з них складемо систему задач.

Перший квадрат

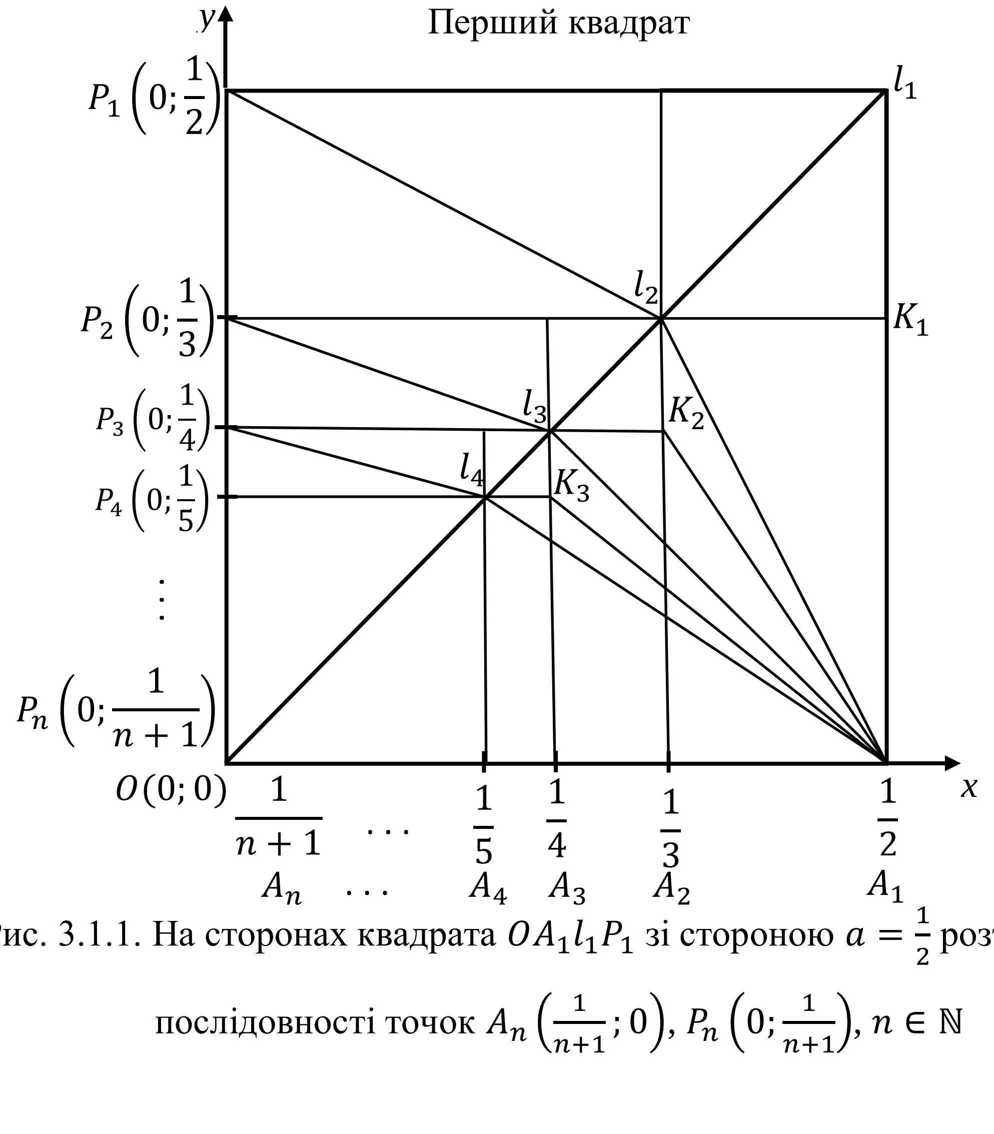


Рис. 3.1.1. На сторонах квадрата $OA_1l_1P_1$ зі стороною $a=\frac{1}{2}$ розташовані послідовності точок $A_n\left(\frac{1}{n+1};0\right)$, $P_n\left(0;\frac{1}{n+1}\right)$, $n\in\mathbb{N}$

Використовуючи послідовності координат точок A_n, P_n, можна розв’язати наступні задачі.

I. Задачі першого рівня складності

1. Визначити послідовність координат точок l_n.
2. Визначити послідовність координат точок K_n.
3. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{A_n A_{n+1}}$.
4. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{P_n P_{n+1}}$.

II. Задачі другого рівня складності

1. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{A_1 l_{n+1}}$.
2. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{l_n l_{n+1}}$.
3. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{A_{n+1} K_{n+1}}$.
4. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{A_1 K_n}$.
5. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{l_n K_n}$.
6. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{P_n l_n}$.
7. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{P_n l_{n+1}}$.
8. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{A_n l_{n+1}}$.

III. Задачі третього рівня складності

1. Визначити послідовність величин площ $\Delta A_n l_{n+1} K_{n+1}$.
2. Визначити послідовність величин площ $\Delta A_n A_{n+1} K_{n+1}$.
3. Визначити послідовність величин площ $\Delta A_n K_{n+2} A_{n+1}$.
4. Визначити послідовність величин площ $\Delta A_n K_n l_{n+1}$.
5. Визначити послідовність величин площ $\Delta P_n P_{n+1} l_{n+1}$.
6. Визначити послідовність величин площ $\Delta O A_n l_{n+1}$.

Дослідницькі задачі

1. Знайти суму перших 5 членів послідовності довжин відрізків $\overline{A_n A_{n+1}}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.
2. Знайти суму перших 10 членів послідовності довжин відрізків $\overline{P_n l_n}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

3. Знайти суму перших 5 членів послідовності довжин відрізків $\overline{A_1 l_{n+1}}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

4. Знайти суму перших 10 членів послідовності довжин відрізків $\overline{A_{n+1} K_{n+1}}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

5. Знайти суму перших 7 членів послідовності довжин відрізків $\overline{P_n l_{n+1}}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

6. Знайти суму перших 5 членів послідовності площ $\Delta O A_n l_{n+1}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

7. Знайти суму перших 5 членів послідовності площ $\Delta P_n P_{n+1} l_{n+1}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

Формулювання задач та приклади їх розв'зання для всіх чотирьох квадратів представлені у додатку А.

3.2. Розробка системи завдань з даної теми для студентів в процесі вивчення розділу «Числові ряди».

У процесі вивчення математичних дисциплін будь-яка технологія навчання спрямована на розвиток компетентностей щодо розв'язання задач. В існуючих задачниках для вищих навчальних закладів пропонуються добірки задач з формально вираженими умовами без поєднання з параметрами реальних об'єктів і явищ. Особливо це стосується задач при вивченні одного з важливих розділів математичного аналізу «Числові ряди». Тому створення нових видів задач для вивчення цього розділу є дуже доцільним та актуальним [17].

Розглянемо задачі, які можна запропонувати студентам.

I. Задачі першого рівня складності.

Знайти числові ряди «точкової» геометричної інтерпретації $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n; y_n)$ координати точок:

1. A_n,	7. P_n,	13. l_n,
2. B_n,	8. T_n,	14. p_n,
3. C_n,	9. R_n,	15. t_n,
4. D_n,	10. K_n,	16. O_n,

5. E_n,   11. d_n,   17. O'_n,
6. F_n,   12. g_n,   18. O''_n.

II. Задачі другого рівня складності.

Знайти числові ряди лінійної геометричної інтерпретації:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_nA_{n+1}}|$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{B_nB_{n+1}}|$,
3. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{E_nE_{n+1}}|$,
4. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{D_nD_{n+1}}|$,
5. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{T_nT_{n+1}}|$,
6. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{R_nR_{n+1}}|$,
7. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{F_nF_{n+1}}|$,
8. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{P_nP_{n+1}}|$,
9. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_1l_{n+1}}|$,
10. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{l_nl_{n+1}}|$,
11. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_{n+1}K_{n+1}}|$,
12. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_1K_n}|$,
13. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{l_nK_n}|$,
14. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{P_nl_n}|$,
15. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{P_nl_{n+1}}|$,
16. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_nl_{n+1}}|$,
17. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{T_nC_{n+1}}|$,
18. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{m_nm_{n+1}}|$,
19. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{B_nm_n}|$,
20. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{m_nE_n}|$,
21. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{Bm_n}|$,
22. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{C_nC_{n+1}}|$,
23. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{CC_n}|$,
24. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{CO_n}|$,
25. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{C_nF_n}|$,
26. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{R_nd_n}|$,
27. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{D_ng_n}|$,
28. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{Dd_n}|$,
29. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{d_np_n}|$,
30. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{p_ng_n}|$,
31. $\sum_{n=1}^{\infty}|r_n|$,
32. $\sum_{n=1}^{\infty}|r'_n|$,
33. $\sum_{n=1}^{\infty}|r''_n|$,
34. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{O_{n-1}O_n}|$,
35. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{O'_{n-1}O'_n}|$,
36. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{O''_{n-1}O''_n}|$.

III. Задачі третього рівня складності/

Знайти числові ряди квадратурної геометричної інтерпретації:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta A_nl_{n+1}K_{n+1}}$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta A_nK_{n+2}A_{n+1}}$,
3. $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta A_nK_nl_{n+1}}$,
4. $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta OA_nl_{n+1}}$,
5. $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta P_nP_{n+1}l_{n+1}}$,
6. $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta C_{n+1}F_nC_{n+2}}$,
7. $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta P_nt_nC_{n+1}}$,
8. $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_np_ng_n}$.

IV. Задачі четвертого рівня складності.

Знайти числові ряди кубатурної геометричної інтерпретації $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – об’єми послідовності тіл обертання навколо осі Ox прямих:

1. $\overline{A_nl_{n+1}}$,
2. $\overline{A_nK_{n+2}}$,
3. $\overline{l_nl_{n+1}}$,
8. $\overline{m_nm_{n+1}}$,
9. $\overline{C_nC_{n+1}}$,
10. $\overline{CC_n}$,
15. $\overline{O_nO_{n+1}}$,
16. $\overline{O'_nO'_{n+1}}$,
17. $\overline{O''_nO''_{n+1}}$,

4. $\overline{T_n C_{n+1}}$,
5. $\overline{F_1 C_{n+1}}$,
6. $\overline{P_n l_{n+1}}$,
7. $\overline{B m_n}$,
11. $\overline{D d_n}$,
12. $\overline{d_n p_n}$,
13. $\overline{p_n g_n}$,
14. $\overline{C O_n}$,
18. $|r_n|$,
19. $|r_n'|$,
20. $|r_n''|$.

Дослідницькі задачі

1. Дослідити характер зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_n A_{n+1}}\right|$ в залежності від n. Побудувати графік залежності S_n від n для $n = 100$.

2. Дослідити характер зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{D_n D_{n+1}}\right|$ в залежності від n. Побудувати графік залежності S_n від n для $n = 500$.

3. Дослідити характер зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_1 l_{n+1}}\right|$ в залежності від n. Побудувати графік залежності S_n від n для $n = 1\,000$.

4. Дослідити характер зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{P_n l_n}\right|$ в залежності від n. Побудувати графік залежності S_n від n для $n = 10\,000$.

5. Дослідити характер зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{d_n p_n}\right|$ в залежності від n. Побудувати графік залежності S_n від n для $n = 20\,000$.

6. Дослідити характер зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|r_n|$ в залежності від n. Побудувати графік залежності S_n від n для $n = 50\,000$.

7. Дослідити характер зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{O_{n-1}' O_n'}\right|$ в залежності від n. Побудувати графік залежності S_n від n для $n = 50\,000$.

8. Дослідити характер зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta O A_n l_{n+1}}$ в залежності від n. Побудувати графік залежності S_n від n для $n = 100\,000$.

Формулювання задач та приклади їх розв’зання представлені у додатку Б.

Висновки до розділу 3

1. Так як в існуючих підручниках пропонуються умови з формально вираженими умовами, тому нами було створено за допомогою геометричної моделі нові види задач для:

- учнів ліцею на тему «Числові послідовності»;
- студентів при вивченні розділу «Ряди».

2. Враховуючи різний рівень навчальних досягнень ліцеїстів і студентів, створена нами система задач є різнорівневою: 1 рівень складності – задачі на знаходження координат точок; 2 рівень складності – задачі на знаходження довжин відрізків; 3 рівень складності – задачі на знаходження площ геометричних фігур; 4 рівень складності – задачі на знаходження об'ємів тіл обертання (запропоновано лише для студентів).

3. Для кожного рівня складності ми продемонстрували розв'язання декількох задач з детальним поясненням, щоб учні могли використовувати їх для розв'язування інших задач.

ВИСНОВКИ

1. Ряди широко використовуються в математиці, особливо при дослідженні різноманітних технічних проблем, пов'язаних з наближеним інтегруванням диференціальних рівнянь, обчисленням значень функцій та інтегралів, розв'язуванням трансцендентних та алгебраїчних рівнянь. Вони відіграють важливу роль у математиці принаймні з двох причин: є ефективним інструментом математичних досліджень і одним із найважливіших засобів побудови практичних чисельних методів.

2. Точної дати виникнення та чіткої періодизації етапів розвитку рядів немає. Проте ми з’ясували, що арифметичні і геометричні прогресії існували ще в Стародавньому Єгипті, а в Древньому Вавилоні вже вміли обчислювати їх суми. Ряд як самостійне поняття, математики почали використовувати XVII ст.. Такі вчені як І. Ньютон та Г. Лейбніц застосовували ряди для вирішення алгебраїчних та диференціальних рівнянь. Теорія рядів у XVIII-XIX ст. розвивалася в роботах Я. та І. Бернуллі, Б. Тейлора, К. Маклорена, Л. Ейлера, Ж. Даламбера, Ж. Лагранжа та ін. Сувора теорія рядів була створена в XIX ст. на основі поняття границі в працях К. Гаусса, Б. Больцано, О. Коші, П. Діріхле, Н. Абеля, К. Вейєрштрасса, Б. Рімана та ін.

3. В роботі були представлені основні поняття числових рядів (числовий ряд, члени числового ряду, сума ряду, збіжний та розбіжний числовий ряд, необхідна та достатні умови збіжності ряду).

4. Одним з найефективніших підходів до навчання математики є задачний підхід, який акцентує увагу на тому, що засвоєння матеріалу відбувається за допомогою розв’язання задач, що розвиває творчість і креативність.

5. Найбільшим вдалим та наочним методом предствлення числових рядів є геометричні інтерпретація їх членів. Питанням геометричної інтерпретації числових рядів в підручниках не приділяється увага. Але це є суттєвим недоліком у вивченні теорії числових рядів і їх практичному застосуванні. Використання геометричних інтерпретацій числових рядів дає можливість здійснювати в навчанні дидактичний принцип візуалізації і в той же час створювати різні види числових рядів для використання на практичних заняттях, пов’язаних з дослідженням рядів на збіжність.

Саме з цією метою нами було розглянуто приклади геометричної інтерпретації числових рядів. Ряд може складатись із довжин відрізків, площ та об'ємів геометричних фігур тощо.

6. В роботі було згенеровано низку числових рядів із величин різноманітних геометричних об'єктів, що лежать у квадраті зі стороною $a = 1$ із точковою, лінійною, квадратурною та кубатурною геометричними інтерпретаціями. Одержані числові ряді було досліджено на збіжність із використанням необхідної та достатніх умов. Також були знайдені суми збіжних рядів та частинні суми для перших п'яти членів. Побудовано графіки залежності s_n від n.

7. Було створено різнорівневу систему задач для ліцеїстів (доцільно використовувати на факультативних заняттях, спецкусах, математичних гуртках та при підготовці до олімпіад) та студентів з прикладами розв'язання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бобирь В. Д., Корольський В. В. Застосування ІКТ при вивченні числових та степеневих рядів. Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання: Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів і молодих учених (Чернігів, 27 листопада 2019 р.): матер. тез Чернігів, 2019.

2. Бобирь В. Д., Корольський В. В. Реалізація дидактичного принципу наочності при вивченні числових рядів. Молоді вчені 2019 – від теорії до практики: X Міжнародна конференція молодих вчених (Дніпро, 7 березня 2019 р.): матер. тез. Дніпро, 2019. С. 249-252.

3. Бобирь В. Д., Христюк А. М. Зв'язок рядів арифметичної прогресії та гармонічних рядів: матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2019 р.), м. Черкаси, 11-12 квітня 2019 р. Черкаси, 2019. 280 с.

4. Габ С. С. Геометрична інтерпретація рядів: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр, спеціальності 014.04 середня освіта (математика), наук. керівник В. В. Корольський. Кривий Ріг, 2018. 100 с.

5. Габ С. С. Геометрична інтерпретація числових рядів, пов'язаних з фракталами: матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції молодих вчених «Співдружність наук. Барановичі 2018» (Барановичі, 17 травня 2018 р.). Барановичі, 2018. С. 50-51.

6. Габ С. С., Корольський В. В. Лінійна, квадратурна та куботурна геометрична інтерпретація числових рядів засобами моделювання. Новітні комп’ютерні технології: наук-метод. зб. редкол.: С. О. Семеріков [та ін.], Том XVI. Кривий Ріг, 2018. С. 67-73.

7. Габ С. С., Корольський В. В., Числові ряди, які пов’язані з параметрами додекаедра. Вісник міжнародного дослідницького центру «Людина: мова, культура, пізнання»: науковий журнал, Том 42. Кривий Ріг, 2018. С. 39-45.

8. Городецький В. В., Боднарук С. Б., Довгей Ж. І., Лучко В. С. Аналітична геометрія в теоремах і задачах: навч. посіб. друге вид. виправлене і доп. Чернівці, 2021. 408 с.

9. Дзигарська Н. С., Корольський В. В., Михайлова Я. А., Тураєва О. В. Застосування геометричних моделей при вивченні теми «Числові послідовності» учнями ліцеїв. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти» Випуск 22. Суми, 2023.

10. Дзигарська Н. С., Корольський В. В., Тураєва О. В. Генерація числових рядів з використанням послідовностей геометричних об’єктів, вписаних у квадрат з параметром $a = 1$ в системі координат Oxy. Наукові записки молодих учених № 10. 2022.

11. Кадильникова Т.М., Кагадій Л.П., Кочеткова І.Б., Сушко Л.Ф., Запорожченко О.Є. Вища математика в прикладах та задачах. Частина V: Навч. посібник Дніпропетровськ: НМетАУ, 2011. 88 с.

12. Клецька Т. С., Крюков М. М. До історії розвитку і становлення теорії нескінченних числових рядів. Математичне моделювання № 6. 2013. С. 117-120.

13. Комарова А. А. Побудова і дослідження числових рядів, пов'язаних з елементами квадрата «тангарам»: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр спеціальності 014.04 середня освіта (математика), наук. керівник В. В. Корольський. Кривий Ріг, 2020. 100 с.

14. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числових рядів. Новітні комп’ютерні технології: наук-метод. зб. редкол.: С. О. Семеріков [та ін.] Том XV. Кривий Ріг, 2017. С. 57-63.

15. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії. Новітні комп’ютерні технології: наук-метод. зб. редкол. С. О. Семеріков [та ін.], Том XVI. Кривий Ріг, 2018. С. 59-66.

16. Корольський В. В., Римар А. І. Геометрична інтерпретація числових рядів, пов’язаних з державною символікою: збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Випуск 2 (20). Суми, 2022. С. 29-38.

17. Корольський В. В., Тураєва О. В. Генерація та дослідження числових рядів за допомогою геометричної моделі та комбінації рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Випуск 1 (21). Суми, 2023. С. 46-54.

18. Корольський В. В., Тураєва О. В. Технологія створення задач із застосуванням геометричних моделей. Матеріали V Всеукраїнської (з міжнародною участю) науково-практичної конференції молодих учених (м. Харків, 10-11 травня 2023 року). Харків, 2023. С. 243-246.

19. Корольський В. В., Шокалюк С. В., Мельниченко Ю. А. Теоретико-методичні засади геометричного моделювання числових рядів. Фізико-математична освіта. Випуск 4 (18). 2018. С. 81-89.

20. Ламтюгова С. М. Ряди та їх застосування у схемах і таблицях: навч. довід. для самост. вивч. вищої математики (для студентів 1–2 курсів денної та заочної форм навчання). Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. 103 с.

21. Няньчук В. В. Генерація числових рядів за допомогою функції $y = \frac{1}{2^{n-1}}x$ і квадрата зі стороною a = 1: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр спеціальності 014.04 середня освіта (математика), наук. керівник В. В. Корольський. Кривий Ріг, 2021. 97 с.

22. Примакова О. Ю. Генерація числових рядів за допомогою функції $y = \frac{1}{n}x$ і квадрата зі стороною a = 1: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр спеціальності 014.04 середня освіта (математика), наук. керівник В. В. Корольський. Кривий Ріг, 2021. 84 с.

23. Проект концепції розвитку освіти України на період 2015 – 2025 років. URL: http://www.naiau.kiev.ua/files/zakon_ukr/proek-rozv-osvitu.pdf

24. Рашевська А. Н., Рашевська Н. В. Персональне навчальне середовище учня ліцею профільного рівня як складова моделі змішаного навчання: вісник Черкаського університету серія «Педагогічні науки» № 7. 2016. С. 17-23.

25. Романов А. М. Генерація числових рядів та дослідження їх на збіжність: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр спеціальності 014.04 середня освіта (математика), наук. керівник В. В. Корольський. Кривий Ріг, 2019. 90 с.

26. Сачанюк-Кавецька Н.В., Педорченко Л.І., Ковальчук М.Б. Теорія рядів: навчальний посібник. Вінниця: ВНТУ, 2008. 138 с.

27. Семенець С. Задачний підхід до формування навчально-математичної діяльності та розвитку математичних здібностей учнів: періодичне видання «Математика в рідній школі», № 4, 2016. С. 14-18.

28. Слюсаренко М. А. Задачний підхід в навчанні студентів в рамках вищої педагогічної школи. Theory and methods of e-learning, 2011. С. 152-158.

29. Шкіль М. І. Математичний аналіз, ч ІІ: Посібник для пед. інститутів. Київ, 1981. 456 с.

30. Щоголєв С. А. Теорія рядів: навчально-методичний посібник. Одеса: «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2015. 76 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Перший квадрат

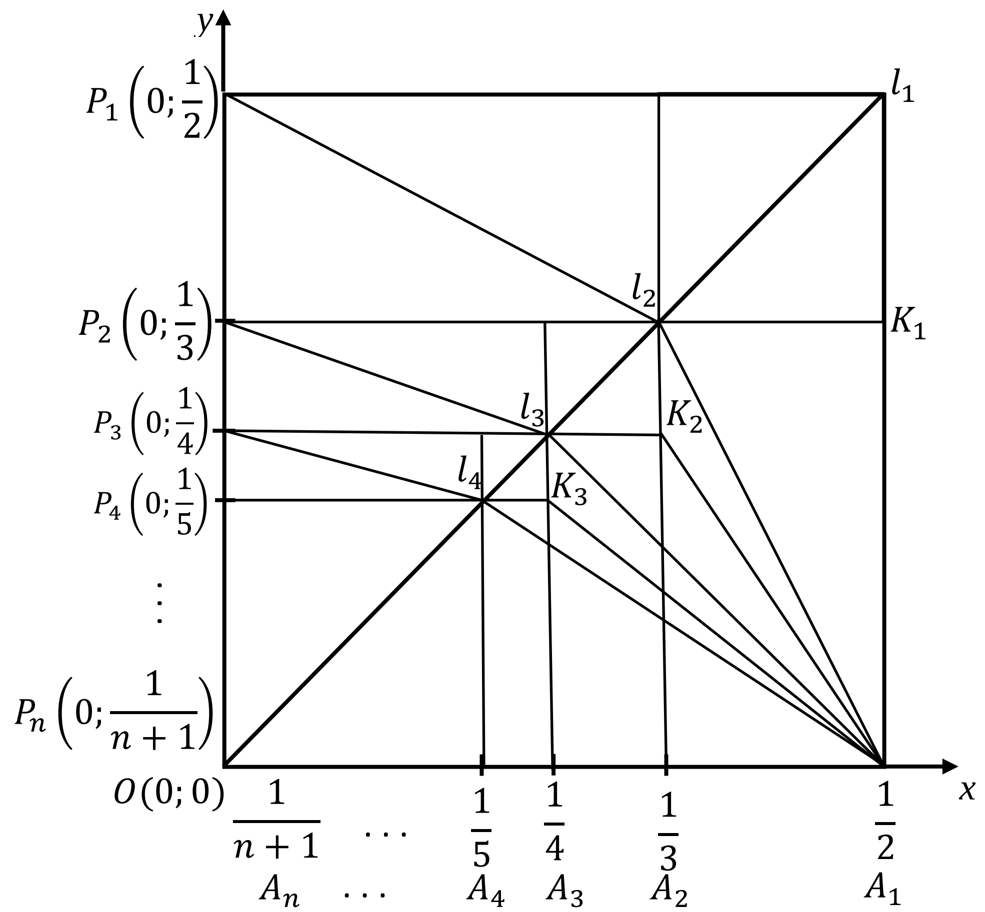


Рис. А.1. На сторонах квадрата $OA_1l_1P_1$ зі стороною $a = \frac{1}{2}$ розташовані послідовності точок $A_n\left(\frac{1}{n+1};0\right)$, $P_n\left(0;\frac{1}{n+1}\right)$, $n \in \mathbb{N}$

Використовуючи послідовності координат точок A_n, P_n, можна розв'язати наступні задачі.

I. Задачі першого рівня складності

1. Визначити послідовність координат точок l_n.
2. Визначити послідовність координат точок K_n.
3. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{A_nA_{n+1}}$.
4. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{P_nP_{n+1}}$.

II. Задачі другого рівня складності

1. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{A_1l_{n+1}}$.
2. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{l_nl_{n+1}}$.

3. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{A_{n+1}K_{n+1}}$.
4. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{A_1K_n}$.
5. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{l_nK_n}$.
6. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{P_nl_n}$.
7. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{P_nl_{n+1}}$.
8. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{A_nl_{n+1}}$.

III. Задачі третього рівня складності

1. Визначити послідовність величин площ $\Delta A_nl_{n+1}K_{n+1}$.
2. Визначити послідовність величин площ $\Delta A_nA_{n+1}K_{n+1}$.
3. Визначити послідовність величин площ $\Delta A_nK_{n+2}A_{n+1}$.
4. Визначити послідовність величин площ $\Delta A_nK_nl_{n+1}$.
5. Визначити послідовність величин площ $\Delta P_nP_{n+1}l_{n+1}$.
6. Визначити послідовність величин площ ΔOA_nl_{n+1}.

Дослідницькі задачі

1. Знайти суму перших 5 членів послідовності довжин відрізків $\overline{A_nA_{n+1}}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.
2. Знайти суму перших 10 членів послідовності довжин відрізків $\overline{P_nl_n}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.
3. Знайти суму перших 5 членів послідовності довжин відрізків $\overline{A_1l_{n+1}}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.
4. Знайти суму перших 10 членів послідовності довжин відрізків $\overline{A_{n+1}K_{n+1}}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.
5. Знайти суму перших 7 членів послідовності довжин відрізків $\overline{P_nl_{n+1}}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.
6. Знайти суму перших 5 членів послідовності площ ΔOA_nl_{n+1} та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.
7. Знайти суму перших 5 членів послідовності площ $\Delta P_nP_{n+1}l_{n+1}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

Розглянемо приклади розв'язання деяких задач.

Задача I (1). Визначити послідовність координат точок l_n.

Розв'язання

Щоб визначити послідовність координат даної точки, проаналізуємо рисунок. З рисунку видно, що точки $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ знаходяться на діагоналі квадрата, тоді абсциса і ордината цих точок будуть рівні: $l_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $l_1\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, $l_1\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$,….

Побачивши закономірність можна задати формулу координат точки $l_n\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n+1}\right)$.

Задача II (1). Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{A_1 l_{n+1}}$.

Розв'язання

Знайдемо послідовність довжин відрізка $\left|\overline{A_1 l_{n+1}}\right|$ за формулою обчислення відстані від двома точками.

$A_1\left(\frac{1}{2};0\right)$, $l_2\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, $l_3\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$, $l_4\left(\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right)$,…, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$ тоді:

$$\left|\overline{A_1 l_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}-0\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{6}.$$

$$\left|\overline{A_1 l_3}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}-0\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\left|\overline{A_1 l_4}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{5}-0\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{100}+\frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{13}}{10}.$$

……………………………………………………………………………………

$$\left|\overline{A_1 l_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}-0\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{n}{2(n+2)}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{n^2}{4(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}} = \sqrt{\frac{n^2+4}{4(n+2)^2}} = \frac{\sqrt{n^2+4}}{2|n+2|} = \frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)}.$$

Отже, $\overline{A_1 l_{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)}$.

Задача II (6). Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{P_n l_n}$.

Розв'язання

I спосіб

Так як відрізки $\overline{P_n l_n}$ паралельні осі OX, то довжиною відрізків $\overline{P_n l_n}$ буде абсциса точки l_n.

$\overline{P_1 l_1} = \frac{1}{2}$, $\overline{P_2 l_2} = \frac{1}{3}$, $\overline{P_3 l_3} = \frac{1}{4}$,…

Виявивши закономірність, можна задати формулу послідовності довжин відрізків $\overline{P_n l_n} = \frac{1}{n+1}$.

II спосіб

Знайти послідовність довжин відрізка $\left|\overline{P_n l_n}\right|$ можна за формулою обчислення відстані від двома точками.

$P_1\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $P_2\left(0;\frac{1}{3}\right)$, $P_3\left(0;\frac{1}{4}\right)$,…, $P_n\left(0;\frac{1}{n+1}\right)$.

$l_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $l_2\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, $l_3\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$,…, $l_n\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n+1}\right)$.

Тоді довжини відрізків будуть мати вид:

$$\left|\overline{P_1 l_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+0} = \frac{1}{2}.$$

$$\left|\overline{P_2 l_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+0} = \frac{1}{3}.$$

$$\left|\overline{P_3 l_3}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}+0} = \frac{1}{4}.$$

…………………………………………………...

$$\left|\overline{P_n l_n}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2}+0} = \frac{1}{n+1}.$$

Як бачимо, обидва способи дають однаковий результат.

Задача III (3). Визначити послідовність величин площ $\Delta A_n K_{n+2} A_{n+1}$.

Розв'язання

Розглянемо рисунок детальніше:

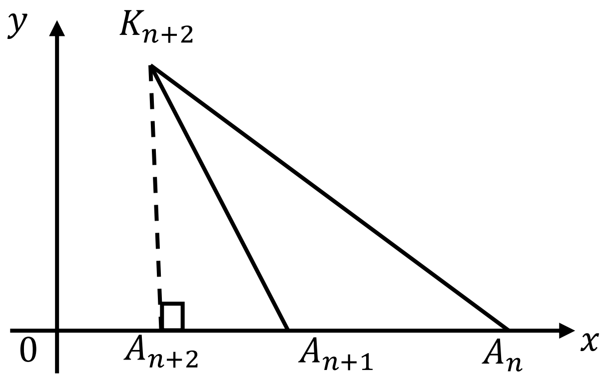


Рис. А.2

Візьмемо сторону $|\overline{A_{n+1}A_n}|$ $\Delta A_n K_{n+2} A_{n+1}$ і проведемо висоту $|\overline{K_{n+2}A_{n+2}}|$.

З рисунку видно, що площу трикутника можна знайти за формулою $S = \frac{1}{2}ah$, де $a = |\overline{A_n A_{n+1}}|$, $h = |\overline{K_{n+2}A_{n+2}}|$.

Знайдемо послідовність довжин відрізка $|\overline{A_n A_{n+1}}|$ за формулою обчислення відстані від двома точками.

$A_1\left(\frac{1}{2};0\right)$, $A_2\left(\frac{1}{3};0\right)$, $A_3\left(\frac{1}{4};0\right)$,…, $A_n\left(\frac{1}{n+1};0\right)$ тоді:

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{1}{6}.$$

$$|\overline{A_2A_3}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{12}.$$

$$|\overline{A_3A_4}| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{20}\right)^2} = \frac{1}{20}.$$

………………………………………………………………………………………

$$|\overline{A_nA_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{\left(\frac{n+1-n-2}{(n+1)(n+2)}\right)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Ділі знайдемо послідовність довжин відрізка $|\overline{K_{n+2}A_{n+2}}|$ за формулою обчислення відстані від двома точками.

$A_3\left(\frac{1}{4};0\right)$, $A_4\left(\frac{1}{5};0\right)$, $A_5\left(\frac{1}{6};0\right)$,…, $A_n\left(\frac{1}{n+1};0\right)$, $A_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};0\right)$, $A_{n+2}\left(\frac{1}{n+3};0\right)$.

$K_3\left(\frac{1}{4};\frac{1}{5}\right)$, $K_4\left(\frac{1}{5};\frac{1}{6}\right)$, $K_5\left(\frac{1}{6};\frac{1}{7}\right)$,…, $K_n\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n+2}\right)$, $K_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+3}\right)$, $K_{n+2}\left(\frac{1}{n+3};\frac{1}{n+4}\right)$.

$$|\overline{K_3A_3}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(0-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{0+\left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{5}.$$

$$|\overline{K_4A_4}| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(0-\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{0+\left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{1}{6}.$$

$$|\overline{K_5A_5}| = \sqrt{\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(0-\frac{1}{7}\right)^2} = \sqrt{0+\left(-\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{1}{7}.$$

………………………………………………………………………………………

$$|\overline{K_{n+2}A_{n+2}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+3}\right)^2 + \left(0-\frac{1}{n+4}\right)^2} = \sqrt{0+\left(-\frac{1}{n+4}\right)^2} = \frac{1}{n+4}.$$

Тоді за формулою площі маємо:

$$S_{\Delta A_1K_3A_2} = \frac{1}{2}\cdot|\overline{A_1A_2}|\cdot|\overline{K_3A_3}| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{60},$$

$$S_{\Delta A_2K_4A_3} = \frac{1}{2}\cdot|\overline{A_2A_3}|\cdot|\overline{K_4A_4}| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{144},$$

$$S_{\Delta A_3K_5A_4} = \frac{1}{2}\cdot|\overline{A_3A_4}|\cdot|\overline{K_5A_5}| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{280},$$

………………………………

$$S_{\Delta A_nK_{n+2}A_{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot|\overline{A_nA_{n+1}}|\cdot|\overline{K_{n+2}A_{n+2}}| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{n+4} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)(n+4)}.$$

Отже, $S_{\Delta A_nK_{n+2}A_{n+1}} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)(n+4)}$.

Дослідницька задача № 5. Знайти суму перших 5 членів послідовності довжин відрізків $\overline{P_nl_{n+1}}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

Розв'язання

Довжини відрізків будемо знаходити за формулою знаходження відстані між двома точками за їх координатами.

$P_1\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $P_2\left(0;\frac{1}{3}\right)$, $P_3\left(0;\frac{1}{4}\right)$, $P_4\left(0;\frac{1}{5}\right)$, $P_5\left(0;\frac{1}{6}\right)$.

$l_2\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, $l_3\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$, $l_4\left(\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right)$, $l_5\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$, $l_6\left(\frac{1}{7};\frac{1}{7}\right)$.

Якщо $n=1$, то $S_1 = \overline{P_1l_2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{45}}{3\cdot6} = \frac{3\sqrt{5}}{3\cdot6} = \frac{\sqrt{5}}{6}$.

Якщо $n=2$, то $S_2 = \overline{P_1l_2}+\overline{P_2l_3} = S_1+\overline{P_2l_3} = \frac{\sqrt{5}}{6}+\sqrt{\left(\frac{1}{4}-0\right)^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{6}+\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{12}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{6}+\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{144}} = \frac{\sqrt{5}}{6}+\frac{\sqrt{160}}{4\cdot12} = \frac{\sqrt{5}}{6}+\frac{4\sqrt{10}}{4\cdot12} = \frac{\sqrt{5}}{6}+\frac{\sqrt{10}}{12} = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}{12}$.

Якщо $n=3$, то $S_3 = \overline{P_1l_2}+\overline{P_2l_3}+\overline{P_3l_4} = S_2+\overline{P_3l_4} = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}{12}+\sqrt{\left(\frac{1}{5}-0\right)^2+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}{12}+\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{1}{20}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}{12}+\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{400}} = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}{12}+\frac{\sqrt{425}}{5\cdot20} = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}{12}+\frac{5\sqrt{17}}{5\cdot20} = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}{12}+\frac{\sqrt{17}}{20} = \frac{10\sqrt{5}+5\sqrt{10}+3\sqrt{17}}{60}$.

Якщо $n=4$, то $S_4 = \overline{P_1l_2}+\overline{P_2l_3}+\overline{P_3l_4}+\overline{P_4l_5} = S_3+\overline{P_4l_5} = \frac{10\sqrt{5}+5\sqrt{10}+3\sqrt{17}}{60}+\sqrt{\left(\frac{1}{6}-0\right)^2+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{10\sqrt{5}+5\sqrt{10}+3\sqrt{17}}{60}+\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(-\frac{1}{30}\right)^2} = \frac{10\sqrt{5}+5\sqrt{10}+3\sqrt{17}}{60}+\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{900}} = \frac{10\sqrt{5}+5\sqrt{10}+3\sqrt{17}}{60}+\frac{\sqrt{936}}{6\cdot30} = \frac{10\sqrt{5}+5\sqrt{10}+3\sqrt{17}}{60}+\frac{6\sqrt{26}}{6\cdot30} = \frac{10\sqrt{5}+5\sqrt{10}+3\sqrt{17}}{60}+\frac{\sqrt{26}}{30} = \frac{10\sqrt{5}+5\sqrt{10}+3\sqrt{17}+2\sqrt{26}}{60}$.

Якщо $n = 5$, то $S_5 = \overline{P_1 l_2} + \overline{P_2 l_3} + \overline{P_3 l_4} + \overline{P_4 l_5} + \overline{P_5 l_6} = S_4 + \overline{P_5 l_6} = \frac{10\sqrt{5}+5\sqrt{10}+3\sqrt{17}+2\sqrt{26}}{60} + \sqrt{\left(\frac{1}{7}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{7}-\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{10\sqrt{5}+5\sqrt{10}+3\sqrt{17}+2\sqrt{26}}{60} + \sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(-\frac{1}{42}\right)^2} = \frac{10\sqrt{5}+5\sqrt{10}+3\sqrt{17}+2\sqrt{26}}{60} + \sqrt{\frac{1}{49}+\frac{1}{42^2}} = \frac{10\sqrt{5}+5\sqrt{10}+3\sqrt{17}+2\sqrt{26}}{60} + \frac{\sqrt{1813}}{7\cdot 42} = \frac{10\sqrt{5}+5\sqrt{10}+3\sqrt{17}+2\sqrt{26}}{60} + \frac{7\sqrt{37}}{7\cdot 42} = \frac{10\sqrt{5}+5\sqrt{10}+3\sqrt{17}+2\sqrt{26}}{60} + \frac{\sqrt{37}}{42}$.

Таблиця А.1

Сума перших 5 членів послідовності довжин відрізків $\overline{P_n l_{n+1}}$

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{S_n}$
1	$\frac{\sqrt{5}}{6} \approx 0{,}373$
2	$\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}{12} \approx 0{,}636$
3	$\frac{10\sqrt{5}+5\sqrt{10}+3\sqrt{17}}{60} \approx 0{,}842$
4	$\frac{10\sqrt{5}+5\sqrt{10}+3\sqrt{17}+2\sqrt{26}}{60} \approx 1{,}012$
5	$\frac{10\sqrt{5}+5\sqrt{10}+3\sqrt{17}+2\sqrt{26}}{60} + \frac{\sqrt{37}}{42} \approx 1{,}157$

Побудувати графік можна за допомогою гугл таблиць.

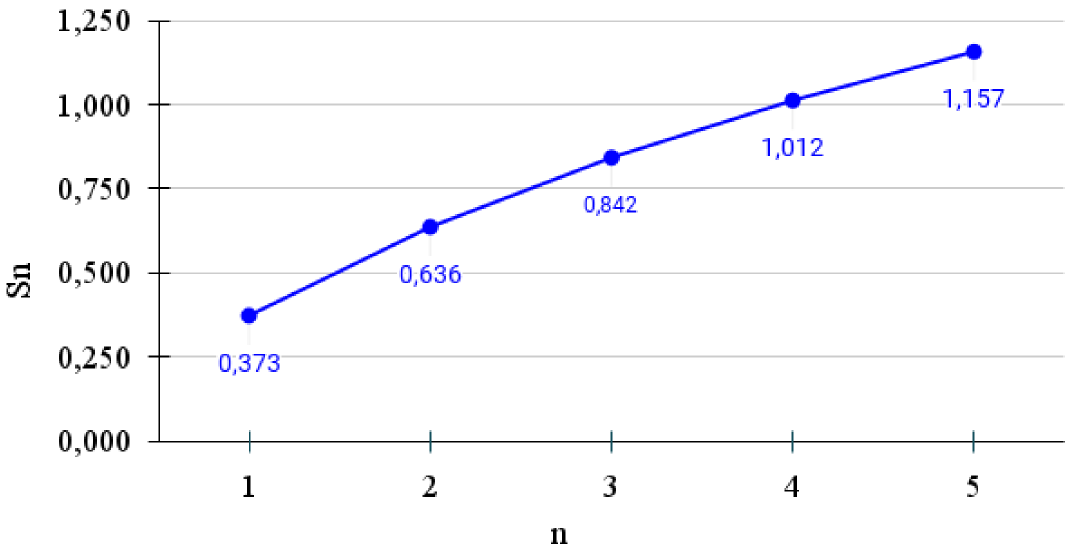


Рис. А.3.

Другий квадрат

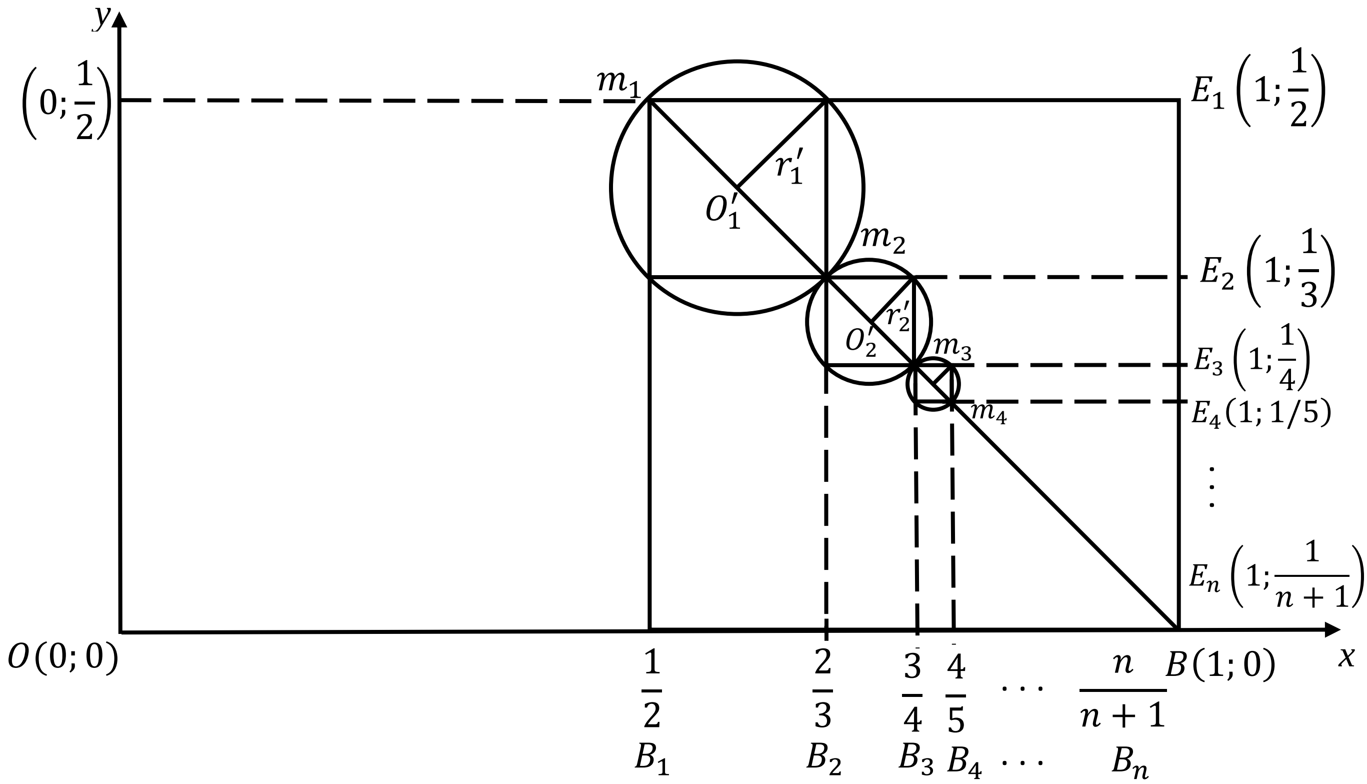


Рис. А.4. На сторонах квадрата $B_1BE_1m_1$ зі стороною $a=\frac{1}{2}$ розташовані послідовності точок $B_n\left(\frac{n}{n+1};0\right)$, $E_n\left(1;\frac{1}{n+1}\right)$, $n\in\mathbb{N}$

Використовуючи послідовності координат точок B_n, E_n, можна розв'язати наступні задачі.

I. Задачі першого рівня складності

1. Визначити послідовність координат точок m_n.
2. Визначити послідовність координат точок O'_n.
3. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{B_nB_{n+1}}$.
4. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{E_nE_{n+1}}$.

II. Задачі другого рівня складності

1. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{m_nm_{n+1}}$.
2. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{B_nm_n}$.
3. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{m_nE_n}$.
4. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{Bm_n}$.
5. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{O'_nO'_{n+1}}$
6. Визначити послідовність довжин відрізків $|r'_n|$.

III. Задачі третього рівня складності

1. Визначити послідовність величин довжин кіл з радіусом $|r'_n|$.

2. Визначити послідовність величин площ кругів з радіусом $|r'_n|$.

3. Визначити послідовність величин площ квадратів з діагоналлю $|m_n B|$.

4. Визначити послідовність величин площ квадратів з діагоналлю $2|r'_n|$.

Дослідницькі задачі

1. Знайти суму перших 5 членів послідовності довжин відрізків $\overline{E_n E_{n+1}}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

2. Знайти суму перших 10 членів послідовності довжин відрізків $\overline{B_n m_n}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

3. Знайти суму перших 5 членів послідовності довжин відрізків $\overline{O'_n O'_{n+1}}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

4. Знайти суму перших 7 членів послідовності довжин відрізків $|r'_n|$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

5. Знайти суму перших 5 членів послідовності площ кругів з радіусом $|r'_n|$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

6. Знайти суму перших 5 членів послідовності площ квадратів з діагоналлю $|m_n B|$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

Розглянемо приклади розв'язання деяких задач.

Задача I (2). Визначити послідовність координат точок O'_n.

Розв'язання

З рис. 3.1.3 видно, що точка O'_1 по вісі Ox знаходиться посередині між точками B_1 і B_2, а по вісі Oy – посередині між точками E_1 і E_2. Аналогічно точка O'_2 по вісі Ox знаходиться посередині між точками B_2 і B_3, а по вісі Oy – посередині між точками E_2 і E_3 і так далі. Точка O'_n по вісі Ox знаходиться посередині між точками B_n і B_{n+1}, а по вісі Oy – посередині між точками E_n і E_{n+1}.

Знайдемо координати точок $O'_1, O'_2, O'_3, \ldots, O'_n$ За формулою координат середини відрізка:

$$O_1'\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{2};\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2}\right)=\left(\frac{7}{12};\frac{5}{12}\right),\ O_2'\left(\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{2};\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{2}\right)=\left(\frac{17}{24};\frac{7}{24}\right),\ O_3'\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{4}{5}}{2};\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{2}\right)=\left(\frac{31}{40};\frac{9}{40}\right),\ \dots\ ,$$

$$O_n'\left(\frac{\frac{n}{n+1}+\frac{n+1}{n+2}}{2};\frac{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}}{2}\right)=\left(\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)};\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\right).$$

Отже, $O_n'\left(\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)};\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\right)$.

Задача II (6). Визначити послідовність довжин відрізків $|r_n'|$.

Розв’язання

На рис. 3.1.3 $|r_1'|$ – радіус кола, описаного навколо квадрата зі стороною $|B_1-B_2|$, $|r_2'|$ – радіус кола, описаного навколо квадрата зі стороною $|B_2-B_3|$, $|r_3'|$ – радіус кола, описаного навколо квадрата зі стороною $|B_3-B_4|$,…, $|r_n'|$ – радіус кола, описаного навколо квадрата зі стороною $|B_n-B_{n+1}|$.

Радіус кола дорівнює половині діагоналі квадрата, а діагональ квадрата можна знайти як добуток сторони і $\sqrt{2}$. Отже, радіуси будуть мати вид:

$$|r_1'|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot|B_1-B_2|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left|\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{\sqrt{2}}{12},$$

$$|r_2'|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot|B_2-B_3|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left|\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{12}=\frac{\sqrt{2}}{24},$$

$$|r_3'|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot|B_3-B_4|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left|\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{20}=\frac{\sqrt{2}}{40},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$|r_n'|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot|B_n-B_{n+1}|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left|\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left|\frac{n(n+2)-(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left|\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)}\right|=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)(n+2)}.$$

Отже, $|r_n'|=\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)(n+2)}$.

Задача III (2). Визначити послідовність величин площ кругів з радіусом $|r_n'|$.

Розв'язання

Площа круга знаходиться за формулою $S=\pi r^2$.

У задачі II (6) ми вже знаходили послідовінсть довжин відрізків $|r_n'|$, тому підставимо знайдені значення у формулу:

$$S_{\Delta 1}=\pi(r_1')^2=\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\right)^2=\frac{2\pi}{144}=\frac{\pi}{72},$$

$$S_{\Delta 2} = \pi(r_2')^2 = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{24}\right)^2 = \frac{2\pi}{24\cdot 24} = \frac{\pi}{24\cdot 12} = \frac{\pi}{288},$$

$$S_{\Delta 3} = \pi(r_3')^2 = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{40}\right)^2 = \frac{2\pi}{40\cdot 40} = \frac{\pi}{40\cdot 20} = \frac{\pi}{800},$$

……………………………………………......,

$$S_{\Delta n} = \pi(r_n')^2 = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)(n+2)}\right)^2 = \frac{2\pi}{4(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{\pi}{2(n+1)^2(n+2)^2}.$$

Отже, $S_{\Delta n} = \frac{\pi}{2(n+1)^2(n+2)^2}$

Дослідницька задача № 5. Знайти суму перших 5 членів послідовності площ кругів з радіусом $|r_n'|$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

Розв'язання

У задачі III (2) було знайдено формулу для загального члену послідовності площ кругів. Використаємо її в цій задачі.

$$S_1 = S_{\Delta 1} = \frac{\pi}{72},$$

$$S_2 = S_{\Delta 1} + S_{\Delta 2} = S_1 + S_{\Delta 2} = \frac{\pi}{72} + \frac{\pi}{288} = \frac{5\pi}{288},$$

$$S_3 = S_{\Delta 1} + S_{\Delta 2} + S_{\Delta 3} = S_2 + S_{\Delta 3} = \frac{5\pi}{288} + \frac{\pi}{800} = \frac{134\pi}{7200} = \frac{67\pi}{3600},$$

$$S_4 = S_{\Delta 1} + S_{\Delta 2} + S_{\Delta 3} + S_{\Delta 4} = S_3 + S_{\Delta 4} = \frac{67\pi}{3600} + \frac{\pi}{2\cdot(4+1)^2(4+2)^2} = \frac{67\pi}{3600} + \frac{\pi}{1800} = \frac{23\pi}{1200},$$

$$S_5 = S_{\Delta 1} + S_{\Delta 2} + S_{\Delta 3} + S_{\Delta 4} + S_{\Delta 5} = S_4 + S_{\Delta 5} = \frac{23\pi}{1200} + \frac{\pi}{2\cdot(5+1)^2(5+2)^2} = \frac{23\pi}{1200} + \frac{\pi}{3528}.$$

Таблиця А.2

Сума перших 5 членів послідовності довжин відрізків площ кругів з радіусом $|r_n'|$

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{S_n}$
1	$\frac{\pi}{72} \approx 0{,}044$
2	$\frac{5\pi}{288} \approx 0{,}055$
3	$\frac{67\pi}{3600} \approx 0{,}058$
4	$\frac{23\pi}{1200} \approx 0{,}06$
5	$\frac{23\pi}{1200} + \frac{\pi}{3528} \approx 0{,}061$

Побудувати графік можна за допомогою гугл таблиць.

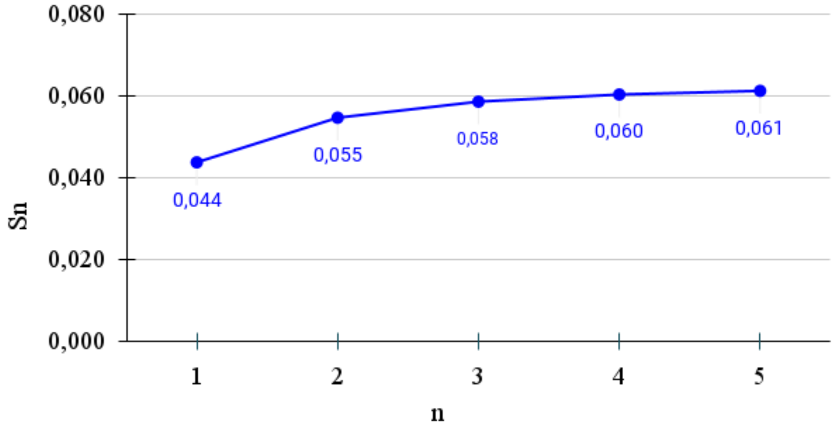


Рис. А.5.

Третій квадрат

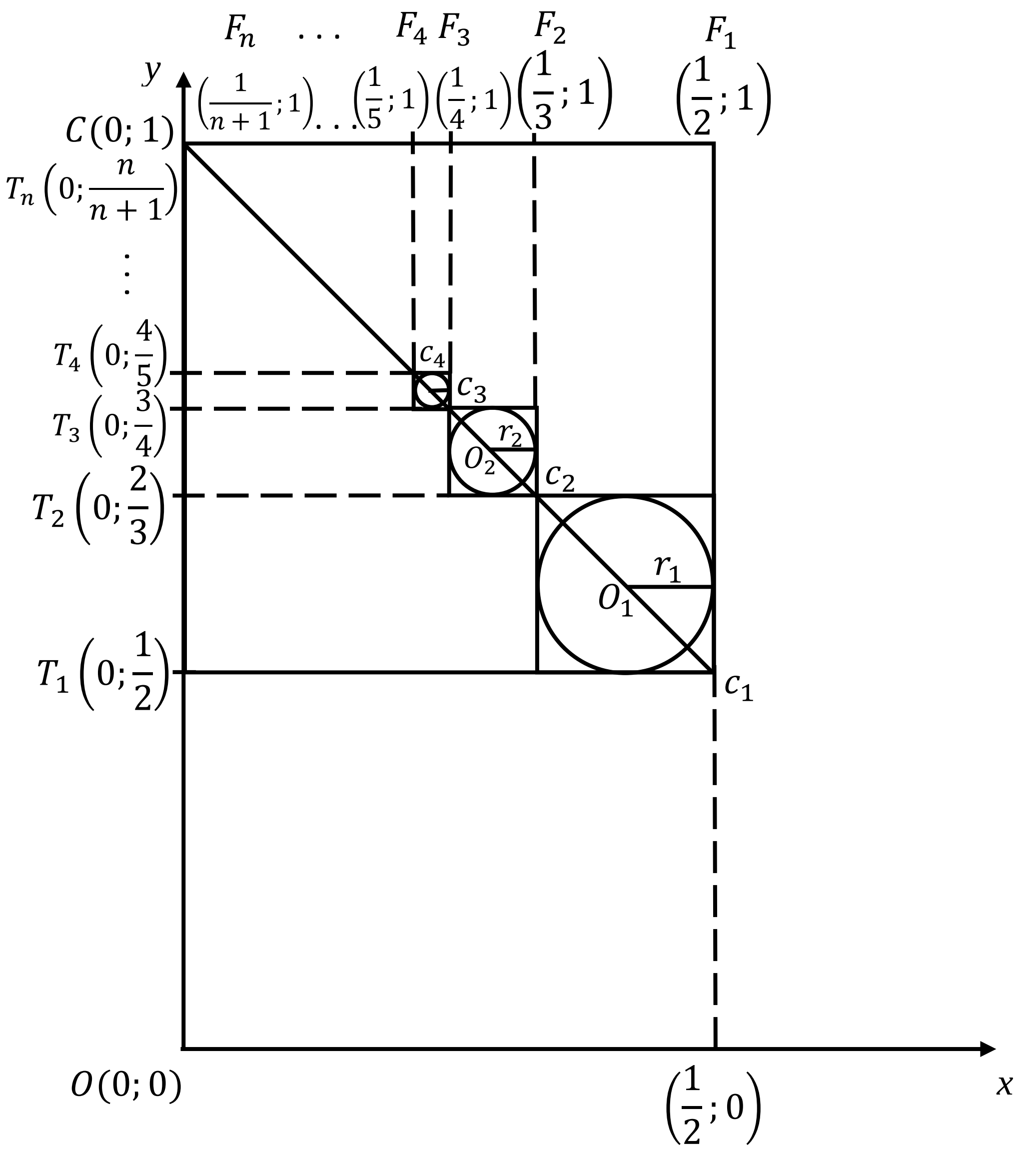


Рис. А.6. На сторонах квадрата $T_1c_1F_1C$ зі стороною $a=\frac{1}{2}$ розташовані послідовності точок $F_n\left(\frac{1}{n+1};1\right)$, $T_n\left(0;\frac{n}{n+1}\right)$, $n\in\mathbb{N}$

Використовуючи послідовності координат точок F_n, T_n, можна розв'язати наступні задачі.

I. Задачі першого рівня складності

1. Визначити послідовність координат точок c_n.
2. Визначити послідовність координат точок O_n.
3. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{T_n T_{n+1}}$.
4. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{F_n F_{n+1}}$.

II. Задачі другого рівня складності

1. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{c_n c_{n+1}}$.
2. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{O_n O_{n+1}}$.
3. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{C c_n}$.
4. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{C O_n}$.
5. Визначити послідовність довжин відрізків $|r_n|$.
6. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{c_n F_n}$.

III. Задачі третього рівня складності

1. Визначити послідовність величин довжин кіл з радіусом $|r_n|$.
2. Визначити послідовність величин площ кругів з радіусом $|r_n|$.
3. Визначити послідовність величин площ квадратів з діагоналлю $|C c_n|$.
4. Визначити послідовність величин площ квадратів зі стороною $2|r_n|$

Дослідницькі задачі

1. Знайти суму перших 5 членів послідовності довжин відрізків $\overline{O_n O_{n+1}}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.
2. Знайти суму перших 5 членів послідовності довжин кіл з радіусом $|r_n|$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.
3. Знайти суму перших 5 членів послідовності площ квадратів з діагоналлю $|C c_n|$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

Четвертий квадрат

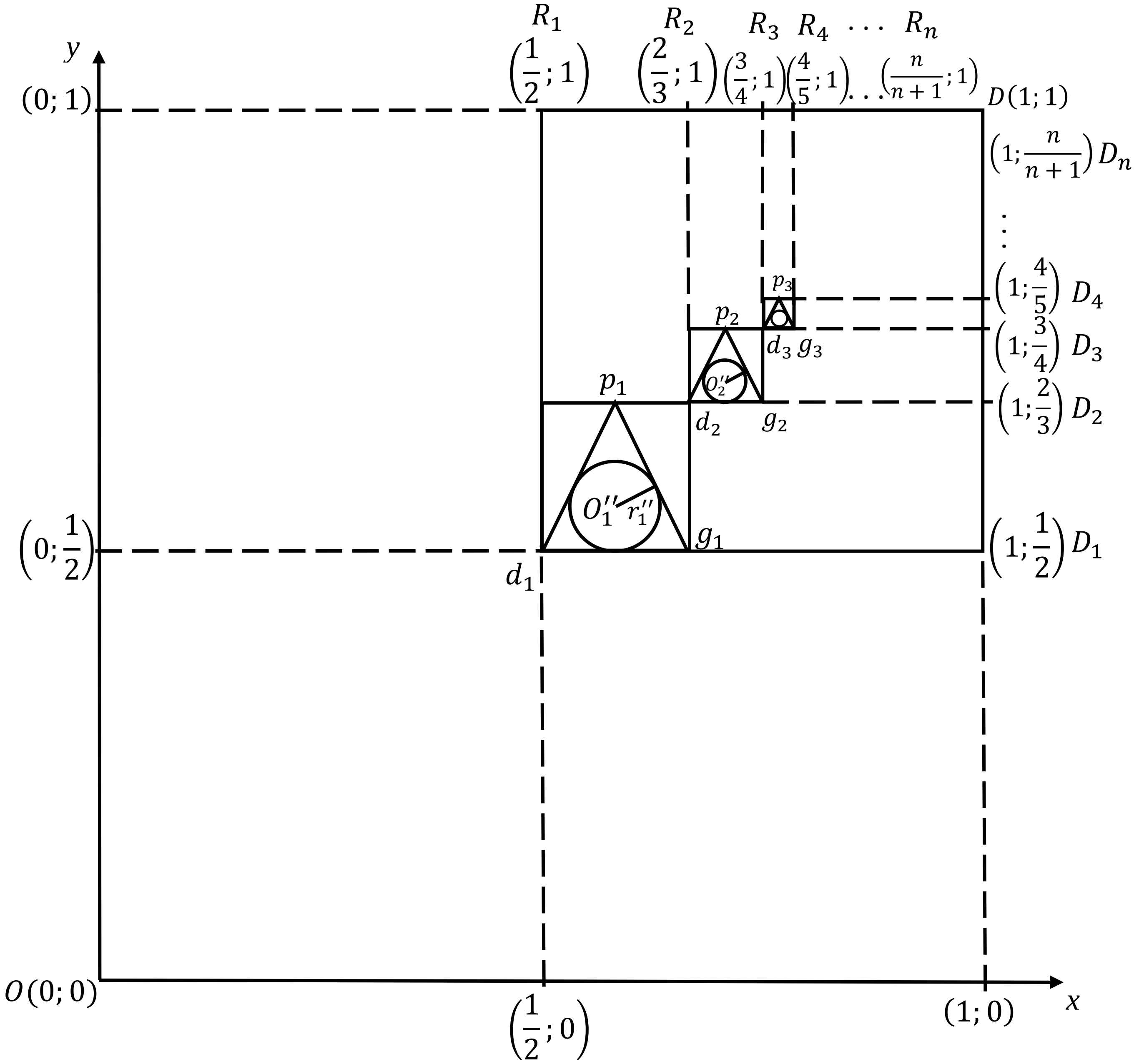


Рис. А.7. На сторонах квадрата $T_1c_1F_1C$ зі стороною $a=\frac{1}{2}$ розташовані послідовності точок $F_n\left(\frac{1}{n+1};1\right)$, $T_n\left(0;\frac{n}{n+1}\right)$, $n\in\mathbb{N}$

Використовуючи послідовності координат точок F_n, T_n, можна розв'язати наступні задачі.

I. Задачі першого рівня складності

1. Визначити послідовність координат точок O_n''.
2. Визначити послідовність координат точок r_n''.
3. Визначити послідовність координат точок d_n.

4. Визначити послідовність координат точок g_n.

5. Визначити послідовність координат точок p_n.

6. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{R_n R_{n+1}}$.

7. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{D_n D_{n+1}}$.

II. Задачі другого рівня складності

1. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{R_n d_n}$.

2. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{D_n g_n}$.

3. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{D d_n}$.

4. Визначити послідовність довжин відрізків $|r_n''|$.

5. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{d_n p_n}$.

6. Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{p_n g_n}$.

III. Задачі третього рівня складності

1. Визначити послідовність величин довжин кіл з радіусом $|r_n''|$.

2. Визначити послідовність величин площ кругів з радіусом $|r_n''|$.

3. Визначити послідовність величин площ квадратів зі стороною $|d_n g_n|$.

4. Визначити послідовність величин площ $\Delta d_n p_n g_n$.

5. Визначити послідовність величин площ квадратів з діагоналлю $|D d_n|$.

Дослідницькі задачі

1. Знайти суму перших 5 членів послідовності довжин відрізків $\overline{D d_n}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

2. Знайти суму перших 10 членів послідовності довжин відрізків $\overline{p_n g_n}$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

3. Знайти суму перших 5 членів послідовності довжин кіл з радіусом $|r_n''|$ та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

4. Знайти суму перших 5 членів послідовності площ $\Delta d_n p_n g_n$та побудувати графік залежності S_n в залежності від n.

Розглянемо приклади розв'язання деяких задач.

Задача ІІ (4). Визначити послідовність довжин відрізків $|r_n''|$.

Розв'язання

r_1'' – це радіус вписаного кола у $\Delta d_1 p_1 g_1$, r_2'' – це радіус вписаного кола у $\Delta d_2 p_2 g_2$, …, r_n'' – це радіус вписаного кола у $\Delta d_n p_n g_n$.

Розглянемо детальніше коло, вписане у трикутник. А трикутник розташований в середині квадрата (рис. 3.1.8)

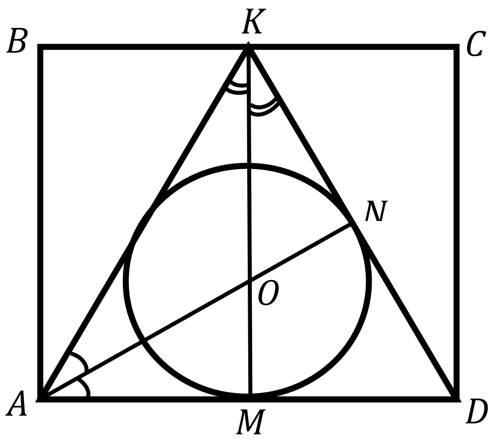


Рис. А.8.

K – середина BC, тому ΔAKD – рівнобедрений. Центр вписаного кола у трикутник лежить на перетині бісектрис. Тому проведемо бісектриси AN і KM. Точка O – центр вписаного кола, OM – шуканий радіус.

Знайдемо радіус вписаного кола за допомогою формули: $S = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p}$.

$S = \frac{1}{2}ah$, $p = \frac{a+b+c}{2}$, тоді $r = \frac{ah}{a+b+c}$.

Для нашої задачі $OM = \frac{AD \cdot KM}{AK+KD+AD} = \frac{AD \cdot KM}{2AK+AD}$.

AD – сторона квадрата.

Тоді знайдемо AD, але для наших трикутників, які представлені на рис. 3.1.8:

$$(AD)_1 = R_2 - R_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

$$(AD)_2 = R_3 - R_2 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12},$$

$$(AD)_3 = R_4 - R_3 = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20},$$

……………………………....

$$(AD)_n = R_{n+1} - R_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

$BK = KC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

$AB = AD$, тоді:

$$(AB)_1 = (AD)_1 = \frac{1}{6},$$

$$(AB)_2 = (AD)_2 = \frac{1}{12},$$

$$(AB)_3 = (AD)_3 = \frac{1}{20},$$

…………………………….…

$$(AB)_n = (AD)_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

$BK = \frac{1}{2}AB$, тоді:

$$(BK)_1 = \frac{1}{2} \cdot (AB)_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12},$$

$$(BK)_2 = \frac{1}{2} \cdot (AB)_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{24},$$

$$(BK)_3 v = (AB)_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{40},$$

…………………………….…

$$(BK)_3 = \frac{1}{2} \cdot (AB)_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

ΔABK: $\angle ABK = 90°$, сторони AB і BK знайшли, тоді за теоремою Піфагора $AK = \sqrt{AB^2 + BK^2}$.

$$(AK)_1 = \sqrt{(AB)_1^2 + (BK)_1^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{144}} = \frac{\sqrt{5}}{12},$$

$$(AK)_2 = \sqrt{(AB)_2^2 + (BK)_2^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{24}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{1}{576}} = \frac{\sqrt{5}}{24},$$

$$(AK)_3 = \sqrt{(AB)_3^2 + (BK)_3^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{20}\right)^2 + \left(\frac{1}{40}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{400} + \frac{1}{1600}} = \frac{\sqrt{5}}{40},$$

……………………………………………………………………..,

$$(AK)_n = \sqrt{(AB)_n^2 + (BK)_n^2} = \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2}} = \sqrt{\frac{5}{4(n+1)^2(n+2)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2(n+1)(n+2)}.$$

$KM = AD$.

Отже, повернемось до формули знаходження радіуса і підставимо знайдені відрізки:

$$r_1'' = \frac{(AD)_1 \cdot (KM)_1}{2(AK)_1 + (AD)_1} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{12}+\frac{1}{6}} = \frac{1}{36}\cdot\frac{6}{(\sqrt{5}+1)} = \frac{1}{6(\sqrt{5}+1)},$$

$$r_2'' = \frac{(AD)_2 \cdot (KM)_2}{2(AK)_2 + (AD)_2} = \frac{\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{24}+\frac{1}{12}} = \frac{1}{12\cdot 12}\cdot\frac{12}{(\sqrt{5}+1)} = \frac{1}{12(\sqrt{5}+1)},$$

$$r_3'' = \frac{(AD)_3 \cdot (KM)_3}{2(AK)_3 + (AD)_3} = \frac{\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{20}}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{40}+\frac{1}{20}} = \frac{1}{20\cdot 20}\cdot\frac{20}{(\sqrt{5}+1)} = \frac{1}{20(\sqrt{5}+1)},$$

………………………………………………………,

$$r_n'' = \frac{(AD)_n \cdot (KM)_n}{2(AK)_n + (AD)_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}} = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{(1+\sqrt{5})(n+1)(n+2)}.$$

Отже, $r_n'' = \frac{1}{(1+\sqrt{5})(n+1)(n+2)}$

Також для більш здібних учнів 11 класу у якості додаткового завдання можна запропонувати розв’язати задачу на знаходження площі трикутника за допомогою визначеного інтеграла.

Усі вище сказані задачі можна пропонувати ліцеїстам математичного профілю на факультативних заняттях, математичних гуртках, спецкурсах, при підготовці до олімпіад.

Додаток Б

За допомогою геометричної інтерпретації числових рядів можна продемонструвати та пояснити як формуються ряди.

Генерація та дослідження числових рядів грунтується на використанні геометричних образів (лінії, площі, об'єми), пов'язаних з послідовностями геометричних об'єктів, вписаних у квадрат з параметром $a = 1$, представленим на рис. Б.1.

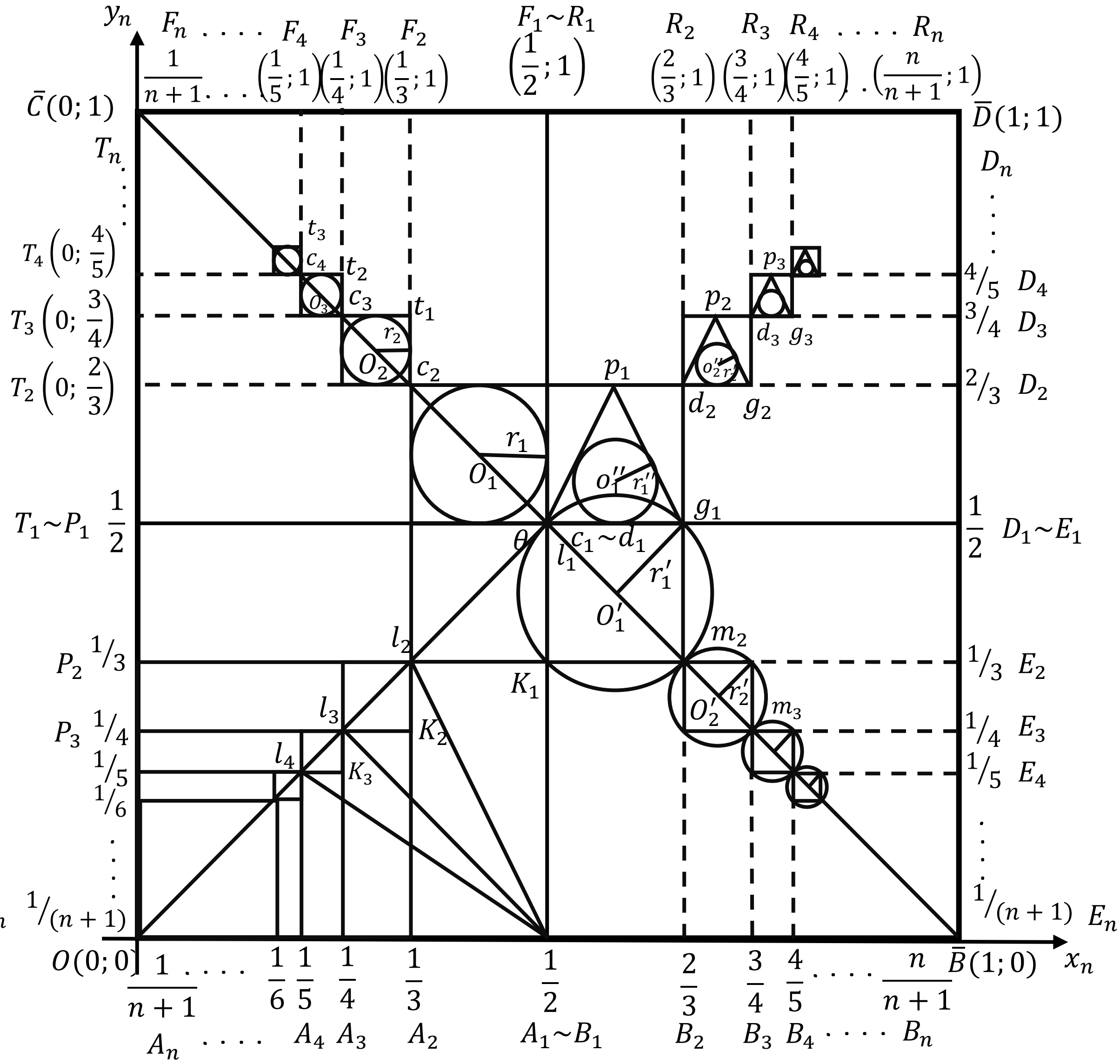


Рис. Б.1. Квадрат з параметром (стороною) $a = 1$.

I. Задачі першого рівня складності.

Знайти числові ряди «точкової» геометричної інтерпретації $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n; y_n)$ координати точок:

1. A_n,
2. B_n,
3. C_n,
4. D_n,
5. E_n,
6. F_n,
7. P_n,
8. T_n,
9. R_n,
10. K_n,
11. d_n,
12. g_n,
13. l_n,
14. p_n,
15. t_n,
16. O_n,
17. O'_n,
18. O''_n.

II. Задачі другого рівня складності.

Знайти числові ряди лінійної геометричної інтерпретації:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_nA_{n+1}}|$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{B_nB_{n+1}}|$,
3. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{E_nE_{n+1}}|$,
4. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{D_nD_{n+1}}|$,
5. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{T_nT_{n+1}}|$,
6. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{R_nR_{n+1}}|$,
7. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{F_nF_{n+1}}|$,
8. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{P_nP_{n+1}}|$,
9. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_1l_{n+1}}|$,
10. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{l_nl_{n+1}}|$,
11. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_{n+1}K_{n+1}}|$,
12. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_1K_n}|$,
13. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{l_nK_n}|$,
14. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{P_nl_n}|$,
15. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{P_nl_{n+1}}|$,
16. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_nl_{n+1}}|$,
17. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{T_nC_{n+1}}|$,
18. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{m_nm_{n+1}}|$,
19. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{B_nm_n}|$,
20. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{m_nE_n}|$,
21. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{Bm_n}|$,
22. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{C_nC_{n+1}}|$,
23. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{CC_n}|$,
24. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{CO_n}|$,
25. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{C_nF_n}|$,
26. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{R_nd_n}|$,
27. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{D_ng_n}|$,
28. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{Dd_n}|$,
29. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{d_np_n}|$,
30. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{p_ng_n}|$,
31. $\sum_{n=1}^{\infty}|r_n|$,
32. $\sum_{n=1}^{\infty}|r'_n|$,
33. $\sum_{n=1}^{\infty}|r''_n|$,
34. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{O_{n-1}O_n}|$,
35. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{O'_{n-1}O'_n}|$,
36. $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{O''_{n-1}O''_n}|$.

III. Задачі третього рівня складності.

Знайти числові ряди квадратурної геометричної інтерпретації:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta A_nl_{n+1}K_{n+1}}$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta A_nK_{n+2}A_{n+1}}$,
3. $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta A_nK_nl_{n+1}}$,
4. $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta OA_nl_{n+1}}$,
5. $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta P_nP_{n+1}l_{n+1}}$,
6. $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta C_{n+1}F_nC_{n+2}}$,
7. $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta P_nt_nC_{n+1}}$,
8. $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta d_np_ng_n}$.

IV. Задачі четвертого рівня складності.

Знайти числові ряди кубатурної геометричної інтерпретації $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – об'єми послідовності тіл обертання навколо осі Ox прямих:

1. $\overline{A_n l_{n+1}}$,
2. $\overline{A_n K_{n+2}}$,
3. $\overline{l_n l_{n+1}}$,
4. $\overline{T_n C_{n+1}}$,
5. $\overline{F_1 C_{n+1}}$,
6. $\overline{P_n l_{n+1}}$,
7. $\overline{Bm_n}$,
8. $\overline{m_n m_{n+1}}$,
9. $\overline{C_n C_{n+1}}$,
10. $\overline{CC_n}$,
11. $\overline{Dd_n}$,
12. $\overline{d_n p_n}$,
13. $\overline{p_n g_n}$,
14. $\overline{CO_n}$,
15. $\overline{O_n O_{n+1}}$,
16. $\overline{O'_n O'_{n+1}}$,
17. $\overline{O''_n O''_{n+1}}$,
18. $|r_n|$,
19. $|r'_n|$,
20. $|r''_n|$.

Дослідницькі задачі

1. Дослідити характер зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_n A_{n+1}}\right|$ в залежності від n. Побудувати графік залежності S_n від n для $n = 100$.

2. Дослідити характер зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{D_n D_{n+1}}\right|$ в залежності від n. Побудувати графік залежності S_n від n для $n = 500$.

3. Дослідити характер зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_1 l_{n+1}}\right|$ в залежності від n. Побудувати графік залежності S_n від n для $n = 1\ 000$.

4. Дослідити характер зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{P_n l_n}\right|$ в залежності від n. Побудувати графік залежності S_n від n для $n = 10\ 000$.

5. Дослідити характер зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{d_n p_n}\right|$ в залежності від n. Побудувати графік залежності S_n від n для $n = 20\ 000$.

6. Дослідити характер зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|r_n|$ в залежності від n. Побудувати графік залежності S_n від n для $n = 50\ 000$.

7. Дослідити характер зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{O'_{n-1} O'_n}\right|$ в залежності від n. Побудувати графік залежності S_n від n для $n = 50\ 000$.

8. Дослідити характер зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta O A_n l_{n+1}}$ в залежності від n. Побудувати графік залежності S_n від n для $n = 100\ 000$.

Розглянемо приклади розв'язання деяких задач.

Задача І (1). Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n; y_n)$ координати точки A_n.

Розв'язання

Точка A_n, розподілена на половині сторони квадрата $|\overline{A_1O}|$ за законом $\frac{1}{n+1}$ і має координати $A_n\left(\frac{1}{n+1}; 0\right)$, тому ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Задача І (10). Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n; y_n)$ координати точки K_n.

Розв'язання

Координати точки K_n по вісі Ox співпадають з координатами точки A_n, а по вісі Oу – E_n, але починаючи з другого члену, тому має координати $K_n\left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+2}\right)$. Шукані ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}.$$

Задача І (16). Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n; y_n)$ координати точки O_n.

Розв'язання

Точка O_n знаходиться посередині між точками по осі Ox A_n і A_{n+1}, по осі Oу – T_n і T_{n+1}, тому має координати $O_n\left(\frac{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}}{2}; \frac{\frac{n+1}{n+2}+\frac{n}{n+1}}{2}\right) = \left(\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}; \frac{n^2+3n+1}{2(n+1)(n+2)}\right)$.

Шукані ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Аналогічно знайдемо координати точки O_n':

$$O_n'\left(\frac{\frac{n+1}{n+2}+\frac{n}{n+1}}{2}; \frac{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}}{2}\right) = \left(\frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)}; \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\right).$$

Задача І (18). Знайти ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, де $(x_n; y_n)$ координати точки O_n''.

Розв'язання

O_n'' – центр вписаного кола у рівнобедрений трикутник. По осі Ox точка O_n'' знаходиться посередині між точками B_n і B_{n+1}, а по осі Oy знаходиться між точками D_n і D_{n+1} і ділить відрізок D_nD_{n+1} у певному відношенні. Знайдемо це відношення.

Розглянемо квадрат зі стороною a (рис. 2.1.2).

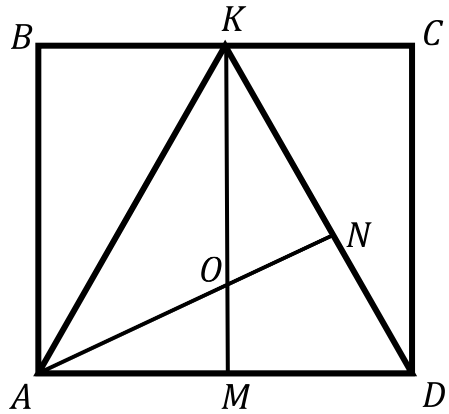


Рис. Б.2. Квадрат зі стороною a

K – середина BC, тому ΔAKD – рівнобедрений. Центр вписаного кола у трикутник лежить на перетині бісектрис. Тому проведемо бісектриси AN і KM. Точка O – центр вписаного кола. Знайдемо відношення $\frac{OM}{OK}$.

За властивістю бісектриси $\frac{OM}{OK} = \frac{AM}{AK}$. $AM = \frac{a}{2}$, $AB = a, BK = \frac{a}{2}$, тоді за теоремою Піфагора $AK = \sqrt{AB^2 + BK^2}$, $AK = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$$\frac{OM}{OK} = \frac{AM}{AB}, \frac{OM}{OK} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Знайдемо координати точки O по осі Oy за формулою поділу відрізку у заданому відношенні: $y_O = \frac{y_M + \lambda y_K}{1+\lambda}$, тому координати точки матимуть вид:

$$O_n''\left(\frac{\frac{n+1}{n+2} + \frac{n}{n+1}}{2}; \frac{\frac{n}{n+1} + \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{n+1}{n+2}}{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}\right).$$

$$\frac{\frac{n+1}{n+2} + \frac{n}{n+1}}{2} = \frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)},$$

$$\frac{\frac{n}{n+1}+\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{n+1}{n+2}}{1+\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{\frac{5n^2+10n+\sqrt{5}n^2+\sqrt{5}n+\sqrt{5}n+\sqrt{5}}{5(n+1)(n+2)}}{\frac{5+\sqrt{5}}{5}} = \frac{(5+\sqrt{5})n^2+2(5+\sqrt{5})n+\sqrt{5}}{(n+1)(n+2)(5+\sqrt{5})} = \frac{(5+\sqrt{5})n^2+2(5+\sqrt{5})n}{(n+1)(n+2)(5+\sqrt{5})} +$$

$$\frac{\sqrt{5}}{(n+1)(n+2)(5+\sqrt{5})} = \frac{(5+\sqrt{5})(n^2+2n)}{(n+1)(n+2)(5+\sqrt{5})} + \frac{\sqrt{5}(5-\sqrt{5})}{(n+1)(n+2)(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} +$$

$$\frac{5\sqrt{5}-5}{20(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{\sqrt{5}-1}{4(n+1)(n+2)}.$$

Отже координати точки $O''_n\left(\frac{1}{2(n+1)(n+2)}; \frac{n}{n+1} + \frac{\sqrt{5}-1}{4(n+1)(n+2)}\right)$.

Шукані ряди будуть мати вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+4n+1}{2(n+1)(n+2)};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} + \frac{\sqrt{5}-1}{4(n+1)(n+2)}\right).$$

Задача ІІ (1). Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_nA_{n+1}}|$.

Розв’язання

Знайдемо довжину відрізка $|\overline{A_nA_{n+1}}|$ за формулою обчислення відстані між двома точками:

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \quad (А.1)$$

де $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$.

$A_n\left(\frac{1}{n+1}; 0\right), A_{n+1}\left(\frac{1}{n+2}; 0\right)$, тоді відстань між точками:

$$|\overline{A_nA_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)^2+(0-0)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2} = \left|-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_nA_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Розв’яжемо цю задачу іншим способом. Знайдемо довжину відрізка як довжину дуги плоскої кривої.

Коли крива задана в прямокутних координатах рівнянням $y = f(x)$, де функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$, то довжина цієї кривої дорівнює:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\left(f(x)\right)^2}dx \text{ [29]}, \quad (А.2)$$

У нашому випадку точки A_n і A_{n+1} розташовані на прямій $y = 0$, тоді $y' = 0$.

За формулою довжини кривої отримаємо:

$$|\overline{A_nA_{n+1}}| = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} \sqrt{1+0^2}\,dx = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} dx = x|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{A_nA_{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$

Як бачимо, шуканий ряд ідентичний ряду, одержаному першим способом.

Задача ІІ (9). Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_1l_{n+1}}\right|$.

Розв'язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{A_1l_{n+1}}\right|$за формулою (А.1).

$A_1\left(\frac{1}{2};0\right), l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$, тоді:

$$\left|\overline{A_1l_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}-0\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{n}{2(n+2)}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}\right)^2} = \sqrt{\frac{n^2}{4(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{n^2+4}{4(n+2)^2}} = \frac{\sqrt{n^2+4}}{2|n+2|} = \frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_1l_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)}.$

Розв'яжемо цю задачу іншим способом. Знайдемо довжину відрізка як довжину дуги плоскої кривої.

Складемо рівняння прямої, яка проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \tag{А.3}$$

де $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$ координати точок, які належать прямій.

У нашому випадку $A_1\left(\frac{1}{2};0\right), l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$, тоді рівняння прямої матиме вид:

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}} = \frac{y-0}{\frac{1}{n+2}-0};$$

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{-\frac{n}{2(n+2)}} = \frac{y}{\frac{1}{n+2}};$$

$$\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(n+2)}{-n} = y(n+2);$$

$$2x-1 = -ny;$$

$$y = -\frac{2}{n}x+\frac{1}{n}.$$

Для знаходження довжини кривої знайдемо похідну: $y' = -\frac{2}{n}$.

Тоді за формулою (А.2) отримуємо:

$$\left|\overline{A_1 l_{n+1}}\right| = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(-\frac{2}{n}\right)^2}\, dx = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{n^2+4}{n^2}}\, dx = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{n^2+4}}{n}\, dx = \frac{\sqrt{n^2+4}}{n} \cdot x \Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{n^2+4}}{n} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{\sqrt{n^2+4}}{n} \cdot \frac{n}{2(n+2)} = \frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{A_1 l_{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+4}}{2(n+2)}$.

Як бачимо, шуканий ряд ідентичний ряду, одержаному першим способом.

Задача II (14). Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{P_n l_n}\right|$.

Розв’язання

Знайдемо довжину відрізка $\left|\overline{P_n l_n}\right|$ за формулою (А.1), якщо $P_n\left(0; \frac{1}{n+1}\right)$, $l_n\left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1}\right)$:

$$\left|\overline{P_n l_n}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{P_n l_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

Розв’яжемо цю задачу іншим способом. Знайдемо довжину відрізка як довжину дуги плоскої кривої.

У нашому випадку точки P_n і l_n розташовані на прямій $y = \frac{1}{n+1}$, тоді $y' = 0$.

За формулою (А.2) отримаємо:

$$\left|\overline{P_n l_n}\right| = \int_0^{\frac{1}{n+1}} \sqrt{1 + 0^2}\, dx = \int_0^{\frac{1}{n+1}} dx = x \Big|_0^{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{P_n l_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

Задача II (33). Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|r_n''|$.

Розв’язання

r_n'' у шуканому ряді $\sum_{n=1}^{\infty}|r_n''|$ – це радіус вписаного кола у $\Delta d_n p_n g_n$.

Розглянемо детальніше коло, вписане у трикутник. А трикутник розташований в середині квадрата (рис. Б.3).

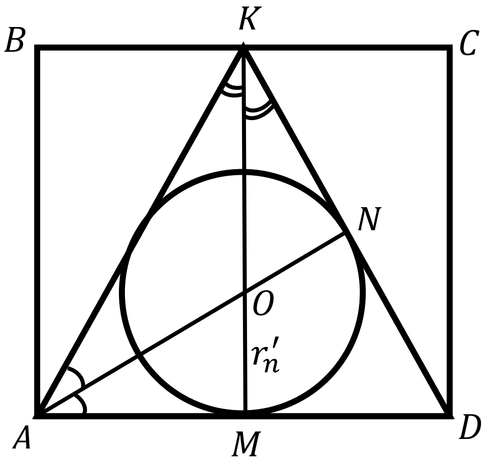


Рис. Б.3.

K – середина BC, тому ΔAKD – рівнобедрений. Центр вписаного кола у трикутник лежить на перетині бісектрис. Тому проведемо бісектриси AN і KM. Точка O – центр вписаного кола, $OM = r_n''$.

Знайдемо радіус вписаного кола за допомогою формули: $S = p \cdot r \Longrightarrow r = \frac{S}{p}$.

$S = \frac{1}{2}ah$, $p = \frac{a+b+c}{2}$, тоді $r = \frac{ah}{a+b+c}$.

Для нашої задачі $r_n'' = \frac{AD \cdot KM}{AK+KD+AD} = \frac{AD \cdot KM}{2AK+AD}$.

AD – сторона квадрата, $AD = B_{n+1} - B_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

$BK = KC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

ΔABK: $\angle ABK = 90°, AB = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, BK = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$, тоді за теоремою Піфагора $AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2}} = \sqrt{\frac{5}{4(n+1)^2(n+2)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2(n+1)(n+2)}$.

$KM = AD = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Отже, $r_n'' = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)}}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}} = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{(1+\sqrt{5})(n+1)(n+2)}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |r_n''| = \frac{1}{(1+\sqrt{5})(n+1)(n+2)}$.

Задача ІІІ (1). Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta A_n l_{n+1} K_{n+1}}$.

Розв'язання

Вершини трикутника мають такі координати: $A_n\left(\frac{1}{n+1};0\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$, $K_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+3}\right)$.

Знайдемо площу трикутника за формулою:

$$S=\frac{1}{2}absin\alpha, \qquad (Б.4)$$

де a і b – сторони трикутника, α – кут між цими сторонами.

Візьмемо дві сторони трикутника $A_n l_{n+1}$ і $A_n K_{n+1}$.

Знайдемо $\overline{A_n l_{n+1}}$ і $\overline{A_n K_{n+1}}$:

$$\overline{A_n l_{n+1}}=\overline{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1};\frac{1}{n+2}-0\right)}=\overline{\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)};\frac{1}{n+2}\right)}.$$

$$\overline{A_n K_{n+1}}=\overline{\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1};\frac{1}{n+3}-0\right)}=\overline{\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)};\frac{1}{n+3}\right)}.$$

Тоді за формулою (Б.1) отримаємо:

$$|\overline{A_n l_{n+1}}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}}=\sqrt{\frac{1+(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2}}=$$

$$\frac{\sqrt{1+n^2+2n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$|\overline{A_n K_{n+1}}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)^2+\left(\frac{1}{n+3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}}=$$

$$\sqrt{\frac{(n+3)^2+(n+1)^2(n+2)^2}{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2}}=\frac{\sqrt{n^2+6n+9+n^4+4n^3+4n^2+2n^3+8n^2+8n+n^2+4n+4}}{(n+1)(n+2)(n+3)}=$$

$$\frac{\sqrt{n^4+6n^3+14n^2+18n+13}}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

$$\cos\alpha=\frac{\overline{A_n l_{n+1}}\cdot\overline{A_n K_{n+1}}}{|\overline{A_n l_{n+1}}|\cdot|\overline{A_n K_{n+1}}|}=\frac{-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\left(-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)+\frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{n+3}}{\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{\sqrt{n^4+6n^3+14n^2+18n+13}}{(n+1)(n+2)(n+3)}}=\frac{\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}}{\frac{\sqrt{n^2+2n+2}\cdot\sqrt{n^4+6n^3+14n^2+18n+13}}{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)}}=$$

$$\frac{n+3+(n+1)^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)}\cdot\frac{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}}=\frac{n+3+n^3+2n^2+n+2n^2+4n+2}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}}=$$

$$\frac{n^3+4n^2+6n+5}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}}.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{n^3+4n^2+6n+5}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}}\right)^2} =$$

$$\sqrt{1-\frac{(n^3+4n^2+6n+5)^2}{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}} =$$

$$\sqrt{\frac{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)-(n^3+4n^2+6n+5)^2}{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}} =$$

$$\sqrt{\frac{n^6+8n^5+28n^4+58n^3+77n^2+62n+26-n^6-8n^5-28n^4-58n^3-76n^2-60n-25}{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}} =$$

$$\frac{\sqrt{n^2+2n+1}}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}} = \frac{\sqrt{(n+1)^2}}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}} =$$

$$\frac{n+1}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}}.$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{\sqrt{n^4+6n^3+14n^2+18n+13}}{(n+1)(n+2)(n+3)}\cdot\frac{n+1}{\sqrt{(n^2+2n+2)(n^4+6n^3+14n^2+18n+13)}} =$$

$$\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2(n+3)}.$$

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta A_n l_{n+1} K_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2(n+3)}$.

Розв’яжемо цю задачу іншим способом. Застосуємо геометричний зміст визначеного інтегралу:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Розглянемо рисунок детальніше:

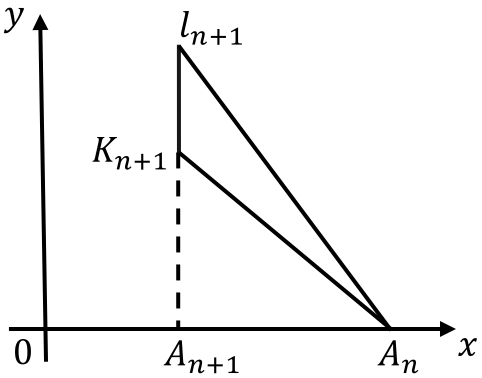


Рис. Б.4.

Використаємо формулу:

$$S = \int_a^b \big(f_1(x) - f_2(x)\big)dx, \quad \text{(Б.5)}$$

де $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ – криві, якими обмежена фігура зверху і знизу.

Складемо рівняння прямої $A_n l_{n+1}$ за формулою (Б.3), якщо $A_n\left(\frac{1}{n+1};0\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$:

$$\frac{x-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}}=\frac{y-0}{\frac{1}{n+2}-0};$$

$$\frac{x-\frac{1}{n+1}}{-\frac{1}{(n+1)(n+2)}}=\frac{y}{\frac{1}{n+2}};$$

$$-x(n+1)(n+2)+(n+2)=y(n+2);$$

$$y=-(n+1)x+1.$$

Складемо рівняння прямої $A_n K_{n+1}$ за формулою (Б.3), якщо $A_n\left(\frac{1}{n+1};0\right)$, $K_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+3}\right)$:

$$\frac{x-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}}=\frac{y-0}{\frac{1}{n+3}-0};$$

$$\frac{x-\frac{1}{n+1}}{-\frac{1}{(n+1)(n+2)}}=y(n+3);$$

$$-x(n+1)(n+2)+(n+2)=y(n+3);$$

$$y=-\frac{(n+1)(n+2)}{n+3}x+\frac{n+2}{n+3}.$$

Отже, використовуючи формулу (Б.5) маємо:

$$S_{\Delta A_n l_{n+1} K_{n+1}}=\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}\left(-(n+1)x+1-\left(-\frac{(n+1)(n+2)}{n+3}x+\frac{n+2}{n+3}\right)\right)dx=\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}\left(\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n+3}-\right.\right.$$

$$\left.\left.(n+1)\right)x+1-\frac{n+2}{n+3}\right)dx=\frac{1}{n+3}\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}((n^2+3n+2-n^2-4n-3)x+1)dx=$$

$$\frac{1}{n+3}\left((-n-1)\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}+x\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}\right)=\frac{1}{n+3}\left(-\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right)+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$\frac{1}{n+3}\left(-\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n^2+4n+4-n^2-2n-1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{n+3}\left(-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)^2}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{n+3}\cdot$$

$$\frac{-2n-3+2n+4}{2(n+1)(n+2)^2}=\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2(n+3)}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_{\Delta A_n l_{n+1} K_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2(n+3)}.$$

Задача III (5). Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta P_n P_{n+1} l_{n+1}}$.

Розв'язання

Вершини трикутника мають такі координати: $P_n\left(0;\frac{1}{n+1}\right)$, $P_{n+1}\left(0;\frac{1}{n+2}\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n+2}\right)$.

$\Delta P_n P_{n+1} l_{n+1}$ прямокутний з катетами $P_n P_{n+1}$ і $P_{n+1} l_{n+1}$.

Знайдемо площу трикутника за формулою:

$$S=\frac{ab}{2},$$

де a і b – катети прямокутного трикутника.

$|\overline{P_n P_{n+1}}|=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

$\left|\overline{P_{n+1} l_{n+1}}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{n+2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{(n+2)^2}}=\frac{1}{n+2}$.

Тоді $S=\frac{|\overline{P_n P_{n+1}}|\cdot|\overline{P_{n+1} l_{n+1}}|}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2}$.

Шуканий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta P_n P_{n+1} l_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2}$.

Розв’яжемо цю задачу іншим способом за домопогою формули (Б.5).

Щоб знайти площу фігури за допомогою інтеграла складемо рівняння прямої $P_n l_{n+1}$ за формулою (Б.3):

$$\frac{x-0}{\frac{1}{n+2}-0}=\frac{y-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}};$$

$$x(n+2)=\frac{y(n+1)-1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{n+1-n-2};$$

$$x(n+2)=-(y(n+1)-1)(n+2);$$

$$x=-y(n+1)+1;$$

$$y=-\frac{x}{n+1}+\frac{1}{n+1}.$$

Тоді за формулою (Б.5) маємо:

$$S=\int_0^{\frac{1}{n+2}}\left(-\frac{x}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)dx=-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{n+2}}+\frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)}\cdot x\Big|_0^{\frac{1}{n+2}}=-\frac{1}{n+1}\cdot$$
$$\frac{1}{2(n+2)^2}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{n+2}=-\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2}+\frac{1}{(n+1)(n+2)^2}=\frac{1}{2(n+1)(n+2)^2}.$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta P_n P_{n+1} l_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)(n+2)^2}$.

Задача IV (1). Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – об'єми послідовності тіл обертання прямих $\overline{A_n l_{n+1}}$навколо осі Ox.

Розв'язання

Нехай навколо осі Ox обертається прямокутний $\Delta A_n A_{n+1} l_{n+1}$, в результаті чого утвориться конус.

Знайдемо об'єм конуса за формулою:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \tag{Б.6}$$

У нашому випадку $r = \left|\overline{A_{n+1} l_{n+1}}\right|$, $h = |\overline{A_n A_{n+1}}|$.

$|\overline{A_n A_{n+1}}| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Знайдемо $\left|\overline{A_{n+1} l_{n+1}}\right|$, де $A_{n+1}\left(\frac{1}{n+2}; 0\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2}; \frac{1}{n+2}\right)$, тоді за формулою (Б.1):

$$\left|\overline{A_{n+1} l_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+2}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+2} - 0\right)^2} = \frac{1}{n+2}.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{n+2}\right)^2 \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{\pi}{3(n+1)(n+2)^3}.$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{3(n+1)(n+2)^3}$.

Розв'яжемо цю задачу іншим способом – за допомогою інтеграла:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \tag{Б.7}$$

Складемо рівняння прямої $A_n l_{n+1}$ за формулою (Б.3), якщо $A_n\left(\frac{1}{n+1}; 0\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2}; \frac{1}{n+2}\right)$:

$$\frac{x - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}} = \frac{y-0}{\frac{1}{n+2} - 0};$$

$$\frac{x(n+1)-1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{-1} = y(n+2);$$

$$y = -x(n+1) + 1.$$

Тоді за формулою (Б.7) маємо:

$$V = \pi \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} (-x(n+1)+1)^2 dx = \pi \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} (1-2x(n+1)+x^2(n+1)^2) dx =$$

$$\pi\left(x\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} - 2(n+1)\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} + (n+1)^2\frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}\right) = \pi\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - (n+1)\left(\frac{1}{(n+1)^2} -\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{(n+2)^2}\right) + \frac{(n+1)^2}{3}\left(\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+2)^3}\right)\right) = \pi\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{(n+1)((n+2)^2-(n+1)^2)}{(n+1)^2(n+2)^2} + \right.$$

$$\left.\frac{(n+1)^2((n+2)^3-(n+1)^3)}{3(n+1)^3(n+2)^3}\right) = \pi\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)^2} + \frac{3n^2+9n+7}{3(n+1)(n+2)^3}\right) =$$

$$\pi\frac{3(n+2)^2-3(2n+3)(n+2)+3n^2+9n+7}{3(n+1)(n+2)^3} = \pi\frac{3n^2+12n+12-6n^2-12n-9n-18+3n^2+9n+7}{3(n+1)(n+2)^3} = \frac{\pi}{3(n+1)(n+2)^3}.$$

Отже, шуканий ряд повністю збігається з рядом, отриманим першим способом $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{3(n+1)(n+2)^3}$.

Задача IV (3). Знайти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$, де V_n – об'єми послідовності тіл обертання прямих $\overline{l_n l_{n+1}}$навколо осі Ox.

Розв'язання

Нехай навколо осі Ox обертається прямокутна трапеція $A_n l_n l_{n+1} A_{n+1}$, в результаті чого утвориться зрізаний конус.

Знайдемо об'єм зрізаного конуса за формулою:

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \qquad (Б.8)$$

У нашому випадку $h = |\overline{A_n A_{n+1}}|$, $r_1 = |\overline{A_n l_n}|$, $r_2 = |\overline{A_{n+1} l_{n+1}}|$

$A_n\left(\frac{1}{n+1}; 0\right)$, $A_{n+1}\left(\frac{1}{n+2}; 0\right)$, $l_n\left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n+1}\right)$, $l_{n+1}\left(\frac{1}{n+2}; \frac{1}{n+2}\right)$.

$|\overline{A_n A_{n+1}}| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $|\overline{A_n l_n}| = \frac{1}{n+1}$, $|\overline{A_{n+1} l_{n+1}}| = \frac{1}{n+2}$.

$$V = \frac{1}{3}\pi\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2} + \left(\frac{1}{n+2}\right)^2\right) = \frac{\pi}{3(n+1)(n+2)}\cdot$$

$$\frac{(n+2)^2+(n+1)(n+2)+(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{\pi(n^2+4n+4+n^2+3n+2+n^2+2n+1)}{3(n+1)^3(n+2)^3} = \frac{(3n^2+9n+7)\pi}{3(n+1)^3(n+2)^3}.$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n^2+9n+7)\pi}{3(n+1)^3(n+2)^3}$.

Розв'яжемо цю задачу іншим способом – за допомогою інтеграла.

Рівняння прямої $l_n l_{n+1}$: $y = x$

Тоді за формулою (Б.7) маємо:

$$V = \pi \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} x^2 dx = \pi \frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+2)^3}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(n+2)^3-(n+1)^3}{(n+1)^3(n+2)^3} =$$

$$\frac{(n^3+6n^2+12n+8-n^3-3n^2-3n-1)\pi}{3(n+1)^3(n+2)^3} = \frac{(3n^2+9n+7)\pi}{3(n+1)^3(n+2)^3}.$$

Отже, шуканий ряд повністю збігається з рядом, отриманим першим способом $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n^2+9n+7)\pi}{3(n+1)^3(n+2)^3}$.

Дослідницька задача №5. Дослідити характер зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{O'_{n-1}O'_n}\right|$ в залежності від n. Побудувати графік залежності S_n від n для $n = 50\,000$.

Розв’язання

Якщо розв'язати задачу II (35), то отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{O'_{n-1}O'_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{n(n+2)}$.

Дослідимо цей ряд на збіжність. Перевіримо виконання необхідної ознаки ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{n(n+2)}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{n(n+2)} = \sqrt{2} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\infty(\infty+2)} = 0$. Отже, необхідна ознака збіжності виконується.

Застосуємо граничну ознаку збіжності, порівнюючи даний ряд зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}n^2}{n(n+2)} = \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n} = \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = \sqrt{2}\ \left(\frac{\neq 0}{\neq \infty}\right).$$

Ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

Знайдемо суму ряду.

Розкладемо раціональний дріб $\frac{\sqrt{2}}{n(n+2)}$ на суму найпростіших за допомогою методу невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{\sqrt{2}}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} = \frac{A(n+2)+Bn}{n(n+2)} = \frac{An+2A+Bn}{n(n+2)} = \frac{n(A+B)+2A}{n(n+2)}.$$

Прирівнюємо чисельники для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$n(A+B) + 2A = \sqrt{2}.$$

Ця рівність виконується коли коефіцієнти при однакових степенях n рівні між собою. З цієї умови отримуємо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих A, B:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Розв’язуючи її знаходимо невідомі коефіцієнти: $A = \frac{\sqrt{2}}{2},\ B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Тоді загальний член ряду буде мати вид: $\frac{\sqrt{2}(n-1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\sqrt{2}}{2n} - \frac{\sqrt{2}}{2(n+2)}$.

Розпишемо цей ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}(n-1)}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2n} - \frac{\sqrt{2}}{2(n+2)}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \cdots\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) + \ldots\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Отже, $S = \frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 1{,}06066$.

Запишемо частинні суми перших 5 членів ряду:

$$S_1 = \frac{\sqrt{2}}{1(1+2)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}471,$$

$$S_2 = S_1 + \frac{\sqrt{2}}{2(2+2)} = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{11\sqrt{2}}{24} \approx 0{,}648,$$

$$S_3 = S_2 + \frac{\sqrt{2}}{3(3+2)} = \frac{11\sqrt{2}}{24} + \frac{\sqrt{2}}{15} = \frac{21\sqrt{2}}{40} \approx 0{,}742,$$

$$S_4 = S_3 + \frac{\sqrt{2}}{4(4+2)} = \frac{21\sqrt{2}}{40} + \frac{\sqrt{2}}{24} = \frac{17\sqrt{2}}{30} \approx 0{,}801,$$

$$S_5 = S_4 + \frac{\sqrt{2}}{5(5+2)} = \frac{17\sqrt{2}}{30} + \frac{\sqrt{2}}{35} = \frac{25\sqrt{2}}{42} \approx 0{,}841.$$

Частинні суми для різних варіацій n будемо шукати за допомогою програми-алгоритму, написаної мовою програмування C++. Додамо до заданих варіацій n для наступні значення: $n = 10$, $n = 100$, $n = 500$, $n = 1\,000$, $n = 5\,000$, $n = 20\,000$, $n = 50\,000$ (рис. 3.2.1).

```
n=1; S=0.471405
n=2; S=0.648181
n=3; S=0.742462
n=4; S=0.801388
n=5; S=0.841794
n=10; S=0.937452
n=100; S=1.046727
n=1000; S=1.059248
n=5000; S=1.060377
n=20000; S=1.060589
n=50000; S=1.060627
```

Рис. Б.5. Результат виконання програми-алгоритму пошуку частинних сум заданого ряду.

Програма-алгоритм пошуку частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{n(n+2)}$:

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
int main()
{
    int i; double A[100000],s1=0, s2=0, s3=0, s4=0, s5=0, s6=0,
s7=0, s8=0, s9=0, s10=0, s11=0;
    for(i=1;i<=1;i++)
      {
        A[i]=sqrt(2)/(i*(i+2)); s1+=A[i];
      }
    printf ("n=1; S=%f\n", s1);
    for(i=1;i<=2;i++)
      {
        A[i]=sqrt(2)/(i*(i+2)); s2+=A[i];
      }
    printf ("n=2; S=%f\n", s2);
    for(i=1;i<=3;i++)
      {
        A[i]=sqrt(2)/(i*(i+2)); s3+=A[i];
      }
      printf ("n=3; S=%f\n", s3);
    for(i=1;i<=4;i++)
      {
        A[i]=sqrt(2)/(i*(i+2)); s4+=A[i];
      }
    printf ("n=4; S=%f\n", s4);
    for(i=1;i<=5;i++)
      {
        A[i]=sqrt(2)/(i*(i+2)); s5+=A[i];
      }
    printf ("n=5; S=%f\n", s5);
    for(i=1;i<=10;i++)
      {
        A[i]=sqrt(2)/(i*(i+2)); s6+=A[i];
      }
    printf ("n=10; S=%f\n", s6);
```

```
    for(i=1;i<=100;i++)
      {
        A[i]=sqrt(2)/(i*(i+2)); s7+=A[i];
      }
    printf ("n=100; S=%f\n", s7);
    for(i=1;i<=1000;i++)
      {
        A[i]=sqrt(2)/(i*(i+2)); s8+=A[i];
      }
      printf ("n=1000; S=%f\n", s8);
    for(i=1;i<=5000;i++)
      {
        A[i]=sqrt(2)/(i*(i+2)); s9+=A[i];
      }
      printf ("n=5000; S=%f\n", s9);
    for(i=1;i<=20000;i++)
      {
        A[i]=sqrt(2)/(i*(i+2)); s10+=A[i];
      }
      printf ("n=20000; S=%f\n", s10);
    for(i=1;i<=50000;i++)
      {
        A[i]=sqrt(2)/(i*(i+2)); s11+=A[i];
      }
    printf ("n=50000; S=%f\n", s11);
  return 0;
}
```

Як бачимо, частинні суми, розраховані нами самостійно і програмою, повністю збігаються. І при $n = 50\ 000$ значення частинної суми дуже близьке до суми ряду.

Побудуємо графік частинних сум для тих значень, які були знадені за допомогою програми-алгоритму.

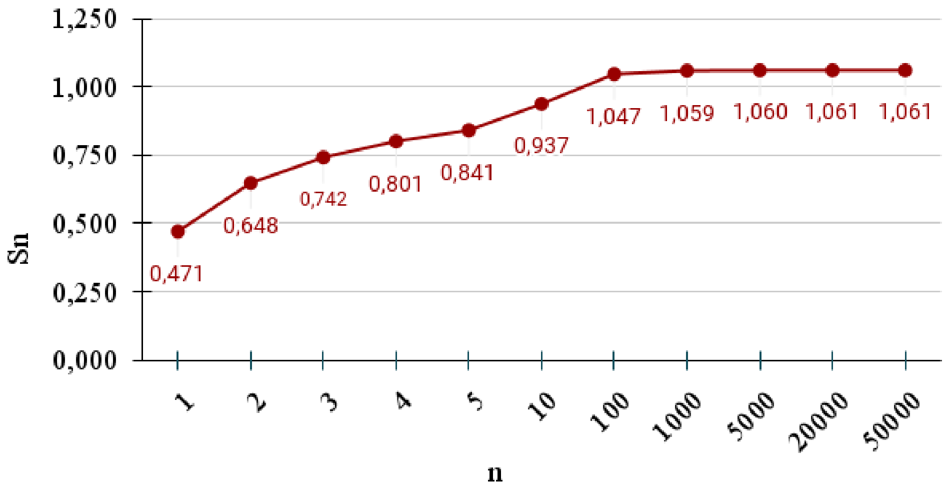


Рис. Б.6. Графік залежності S_n від n для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{n(n+2)}$.

Використання геометричних моделей, пов’язаних з квадратом в системі координат OXY дає можливість створити різні системи задач на числові послідовності. Розв’язання таких задач потребує інтегрованих знань і навичок з шкільних курсів алгебри, геометрії, тригонометрії, знань математичного аналізу, інформатики, вмінь використовувати міжпредметні зв’язки шкільної і вищої математики.