

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА ФІЗИКИ ТА МЕТОДИКИ ЇЇ НАВЧАННЯ**

«Допущено до захисту»

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_

(підпис) (прізвище, ініціали)

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

Реєстраційний № \_\_\_\_\_

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

**ВИВЧЕННЯ ПРОЦЕСІВ ПОГЛИНАННЯ  
ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ КВАНТОВИМИ ТОЧКАМИ З  
ДОМІШКАМИ МАЙБУТНІМИ ВЧИТЕЛЯМИ ФІЗИКИ**

Кваліфікаційна робота студента групи ФМм-22  
ступінь вищої освіти магістр

Спеціальності 014.08 Середня освіта (Фізика)

**Мельника Ярослава Юрійовича**

Керівник:

доктор фізикоматематичних наук, професор  
кафедри фізики та методики її навчання

**Білинський Ігор Васильович**

Оцінка:

Національна шкала \_\_\_\_\_

Шкала ECTS \_\_ Кількість балів \_\_

Голова ЕК \_\_\_\_\_

(підпис) (прізвище, ініціали)

Члени ЕК \_\_\_\_\_

(підпис) (прізвище, ініціали)

\_\_\_\_\_

(підпис) (прізвище, ініціали)

\_\_\_\_\_

(підпис) (прізвище, ініціали)

\_\_\_\_\_

(підпис) (прізвище, ініціали)

## **ЗАПЕВНЕННЯ**

Я, Мельник Ярослав Юрійович, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавав і не одержував недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело.

Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомлений. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....	4
<b>РОЗДІЛ 1. ПОГЛИНАННЯ СВІТЛА НАПІВПРОВІДНИКАМИ</b> .....	7
1.1 Власне поглинання .....	7
1.2 Поглинання вільними носіями .....	10
1.3 Поглинання ґраткою .....	12
1.4 Домішкове поглинання .....	14
Висновки до розділу 1 .....	18
<b>РОЗДІЛ 2 ПОГЛИНАННЯ СВІТЛА ІДЕАЛЬНОЮ КВАНТОВОЮ ТОЧКОЮ</b> .....	19
2.1 Квантові точки як наноб'єкти .....	19
2.2 Поглинання світла ідеальною квантовою точкою .....	22
2.2.1 Квантові точки великого радіуса .....	22
2.2.2 Квантові точки малого радіуса .....	24
Висновки до розділу 2 .....	27
<b>РОЗДІЛ 3 ПОГЛИНАННЯ СВІТЛА КВАНТОВОЮ ТОЧКОЮ З ДОМІШКАМИ. АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ У ШКОЛІ</b> .....	28
3.1 Електронні стани у квантовій точці з одновалентною домішкою ....	28
3.2 Коефіцієнти поглинання та заломлення світла .....	33
3.3 Вивчення процесів поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками з домішками для майбутніх вчителів фізики у контексті навчання учнів у школі .....	39
Висновки до розділу 3 .....	45
<b>ВИСНОВКИ</b> .....	46
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ</b> .....	47

## ВСТУП

Зараз дуже важко уявити сучасну фізику твердого тіла без напівпровідникових гетероструктур. Напівпровідникові гетероструктури, зокрема, квантові ями, нитки і точки сьогодні є предметом дослідження, адже вони дають можливість вирішити проблему керування фундаментальними параметрами в напівпровідникових кристалах і приладах: шириною забороненої зони, ефективними масами носіїв та їх рухливості, показником заломлення і т.д.

Розвиток сучасних технологій та електроніки зумовлює вивчення властивостей квантових точок та їхніх взаємодій з електромагнітними хвилями є критично важливим для подальшого розвитку електроніки, оптоелектроніки, фотоніки та інших галузей, що є основою для сучасних технологій.

Також відомо, що просторове обмеження носіїв струму у низькорозмірних гетеросистемах спричинює появу дискретного енергетичного спектру, який можна контролювати змінюючи розміри та форму наносистем. А це дає можливість адаптувати енергетичні спектри під бажані оптичні переходи. Ця особливість лежить в основі побудови оптичних та оптоелектронних приладів, зокрема лазерів з дуже вузькою шириною спектральних ліній.

Розвиток фізики і технології напівпровідникових гетероструктур призвів до значних змін в нашому повсякденному житті. Електронні властивості на основі гетероструктур широко використовуються в багатьох областях людської діяльності. Адже важко уявити наше життя без телекомунікаційних систем, створених на двійній гетероструктурі, без гетероструктурних світлодіодів і біполярних транзисторів, лазерів.

Оскільки властивості напівпровідникових кристалів вагомо залежать від наявності домішок у них, то наявність домішок у квантових точках також

вплине на їх властивості. Зокрема, домішки можуть змінювати показник заломлення світла, що зумовлений міжривневими переходами електрона чи дірки. Інтерес до таких переходів зумовлено можливістю їх використання при конструюванні детекторів терагерцового випромінювання, бо енергії таких переходів є в терагерцовому діапазоні.

В даний час терагерцеві хвилі починають широко застосовуватися в системах контролю та безпеки, в промислових установках, в астрономічних дослідженнях, в науці і в медицині, де вони стають більш безпечною для людей заміною рентгенівської техніки. Терагерцове сканування може виявити маленькі осередки раку шкіри, непомітні неозброєним оком. Багато складних органічних хімічних сполук, які використовуються у вибухівці, можуть поглинати терагерцове випромінювання певних частот, створюючи «власний почерк», який можна зафіксувати детектором. А через те, що високі частоти можуть переносити більше інформації, терагерцові сигнали можна вважати супер-блютузом, завдяки якому кіно високої чіткості передавалося б безпроводним шляхом всього за декілька секунд.

Збільшення ефективності енергозбереження та зеленої енергії: Розуміння способів поглинання та використання електромагнітних хвиль квантовими точками може привести до створення більш ефективних енергетичних систем та нових джерел зеленої енергії.

Сприяння науковим дослідженням та інноваціям вимагає дослідження процесів поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками є ключовим елементом наукових досліджень та може сприяти створенню нових матеріалів та технологій для подальших інновацій.

Для покращення навчального процесу з фізики необхідно знати основи дослідження процесів поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками може бути використане для покращення методик навчання фізики в освітніх закладах. Це дозволяє збагачувати програми з фізики та залучати учнів до активної практичної роботи та досліджень.

Саме тому, **мета** даної роботи полягає у вивченні та розумінні процесів поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками з домішками з метою подальшого використання цієї інформації для розробки ефективних освітніх програм та методик навчання майбутніх вчителів фізики.

Щоб досягнути цієї мети, потрібно було вирішити наступні **завдання**:

- обчислити енергію та хвильові функції КТ сферичної форми з одновалентною домішкою;
- побудувати залежність енергії основного стану електрона для наногетероструктур CdS/SiO<sub>2</sub> з одновалентною домішкою від радіуса КТ;
- обчислити коефіцієнт поглинання та показник заломлення матеріалу через міжрівневі переходи одновалентної домішки у КТ;
- розробка рекомендацій та методик навчання майбутніх вчителів фізики на основі отриманих результатів.

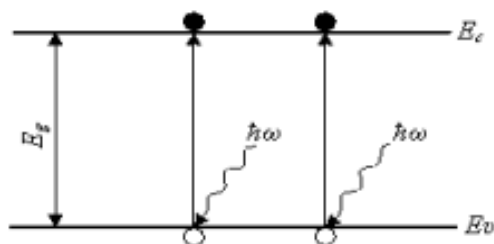
**Об'єктом дослідження** є КТ сферичної форми з донорною домішкою.

**Предметом дослідження** є енергетичний спектр електрона у КТ з домішкою, коефіцієнт поглинання та показник заломлення. Дослідження спрямоване на отримання більш глибокого розуміння цих процесів для подальшого використання у навчальних програмах та методиках навчання майбутніх вчителів фізики.

## РОЗДІЛ 1. ПОГЛИНАННЯ СВІТЛА НАПІВПРОВІДНИКАМИ

### 1.1 Власне поглинання

При власному поглинанні енергія світла, що потрапляє в напівпровідник, витрачається на збудження електронів з валентної зони в зону провідності (рис. 1.1).



**Рис. 1.1.** Схема власного поглинання світла у напівпровідниках

Відповідно до закону збереження енергії таке поглинання може відбуватися лише в тому випадку, якщо енергія світлових квантів  $h\nu$  буде не менша ширини забороненої зони  $E_g$ :

$$h\nu \geq E_g \quad (1.1)$$

З цієї умови можна визначити максимальну довжину хвилі  $l_{max}$  власного поглинання:

$$l_{max} = 2pc/v = 2pch/E_g \quad (1.2)$$

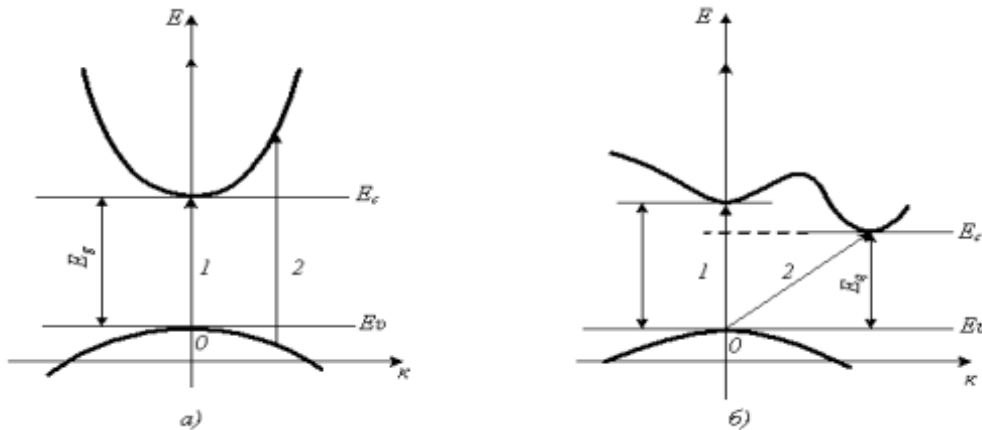
де  $c$  – швидкість світла. Для кремнію, наприклад, що має  $E_g \gg 1,1\text{eV}$ ,  $l \gg 1,13\text{ мкм}$ .

Квантово-механічний розгляд процесу поглинання світла показує, що окрім закону збереження енергії повинен виконуватися закон збереження імпульсу:

$$p_n = p_p + p_{\text{фот}}$$

Тут  $p_n = \hbar k_n$  – імпульс електрона, перекинутого в зону провідності;  $p_n$  – імпульс дірки, що виникла у валентній зоні;  $p_{\text{фот}}$  – імпульс фотона (кванта світла), що викликав перехід електрона. В межах першої зони Бріллюена проекції імпульсу електрона на кристалографічній осі лежать в

межах від  $-\hbar p/a$  до  $+\hbar p/a$ , де  $a$  – параметр ґратки;  $a \gg 340\text{-}8 \text{ см}$   
 $\hbar p/a \gg 108 h$ .



**Рис 1.2.** Прямі (а) і непрямі (б) переходи при власному поглинанні світла

Імпульс фотона рівний  $2\hbar p/l$  і для  $l = 10^{-5} \text{ см}$  складає  $\gg 10^5 h$ , тобто приблизно на три порядки менше імпульсу електрона.

Тому можна вважати, що при оптичних переходах імпульс електрона практично не змінюється:

$$\hbar k p \gg \hbar k v. \quad (1.3)$$

На енергетичній діаграмі такі переходи зображені вертикальними стрілками 1, 2 (рис. 1.2, а) і називаються прямими переходами.

Теоретичний розрахунок коефіцієнта власного поглинання для прямих переходів в напівпровідниках з екстремумами зон, розташованими при одному і тому ж значенні, приводить до такого виразу:

$$a_c = \frac{q^2 \left[ \frac{2m_n m_p}{m_n + m_p} \right]^{\frac{3}{2}}}{4\pi \bar{n} c \hbar^2 e_0 m} (\hbar v - E_g)^{1/2},$$

де  $\bar{n}$  – коефіцієнт заломлення напівпровідника. Приймаючи  $\bar{n} = 4$ , а ефективні маси електронів ( $m_n$ ) і дірок ( $m_p$ ) рівними масі вільного електрона і виражаючи  $\hbar v$  і  $E_g$  у еВ,  $a_c$  в  $\text{см}^{-1}$ , одержуємо

$$a_c \gg 2,7 \cdot 10^5 (\hbar v - E_g)^{1/2}. \quad (1.4)$$

Дійсно, в області власного поглинання  $a_c$  досягає величини  $\gg 10^4 - 10^5 \text{ см}^{-1}$ , тобто світло поглинається вже на глибині  $\gg 1,0 - 0,1 \text{ мкм}$  від поверхні.



Якщо дно зони провідності  $E_c$  розташовано при іншому значенні  $k$ , ніж стеля валентної зони  $E_v$  (рис.1.2, б), як це має місце, наприклад, в германію і кремнію, та відстань  $E_g^0$  по вертикалі між зонами більша ширини забороненої зони  $E_g = E_c - E_v$ . Тоді прямі оптичні переходи можуть збуджуватися лише квантами світла з енергією, що перевищує  $E_g^0$ :

$$h\nu \geq E_g^0. \quad (1.5)$$

Величину  $E_g^0$  називають оптичною шириною забороненої зони; вона рівна мінімальній відстані по вертикалі між зонами.

Крім прямих переходів, в таких напівпровідниках можуть протікати і непрямі переходи, показані на рис. 1.2, б похилою стрілкою 2. Вони відбуваються з участю третьої квазічастинки – фонона. В цьому випадку закони збереження енергії і імпульсу набувають такого вигляду:

$$E_n = E_p + h\nu + E_{\text{фон}}, \quad (1.6)$$

$$p_n + p_p + p_{\text{фон}} \pm p_{\text{фон}}. \quad (1.7)$$

Знак плюс відноситься до процесів, що протікають з поглинанням фонона, знак мінус – з випуском фонона. Оскільки енергія фононів в напівпровідниках не перевищує сотих часток електрон-вольта, а  $h\nu \gg 1$  еВ, то  $E_{\text{фон}}$  у виразі (1.6) можна нехтувати в порівнянні з  $h\nu$ . Імпульс же фонона  $hk_{\text{фон}}$  лежить в тих же межах першої зони Бріллюена, що і імпульс електрона. Тому при переходах з участю фононів імпульс електрона може змінюватися в широких межах, що графічно виражають проведенням похилих стрілок, що характеризують такі переходи (рис. 1.2, б) внаслідок того, що вірогідність протікання процесів з участю трьох частинок набагато менша вірогідності двочасткових процесів, коефіцієнт поглинання в області непрямих переходів значно нижчий, ніж в області прямих. З пониженням температури процеси з поглинанням фонона йдуть рідше і коефіцієнт поглинання для непрямих переходів зменшується.

## 1.2. Поглинання вільними носіями

В напівпровідниках із значною концентрацією носіїв струму за краєм смуги власного поглинання спостерігається поглинання, що має неселективний характер і простягається до дуже великих (порядку 100 мкм) довжин хвиль. Коефіцієнт поглинання в цьому випадку приблизно пропорційний концентрації носіїв заряду, що переважають в даному напівпровіднику. Це поглинання зв'язане з носіями струму і обумовлене переходами всередині однієї зони. Таке поглинання називають „поглинанням вільними носіями”, хоча у незбуреній ґратці такі переходи електронів згідно із законом збереження імпульсу є забороненими.

Проте теплові коливання та недосконалості структури, з якими можуть взаємодіяти носії, обумовлюють можливість переходів всередині зони. Таке неселективне поглинання описується законом

$$\alpha \sim \lambda^p,$$

де  $p=1,5 \div 3,5$

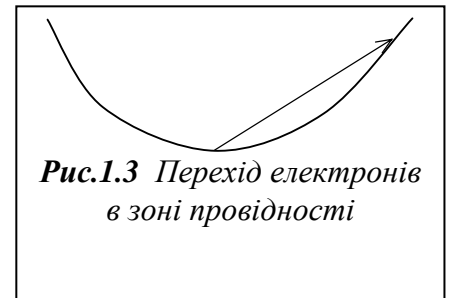
Виявляється, що поглинання вільними носіями пропорційне питомій електропровідності матеріалу напівпровідника

$$\alpha \sim \sigma$$

Класичний вираз для коефіцієнта поглинання світла вільними носіями має вигляд:

$$\alpha = \frac{Ne^2 \lambda^2}{m^* 8\pi^2 n c^3 \tau},$$

де  $N$  – концентрація носіїв,  $n$  – показник заломлення,  $\tau$  - час релаксації (він враховує вплив розсіювання).



На рис 1.3 представлена залежність  $\alpha(\lambda^2)$  для антимоніду індію  $n$ -типу для різних концентрацій електронів.

Якщо в напівпровіднику реалізуються кілька типів розсіювання, то коефіцієнт поглинання буде рівний

$$\alpha = A\lambda^{3/2} + B^{2.5} + C\lambda^{3.5},$$

де три доданки відображають вклад розсіювання на акустичних

фононах, оптичних фононах і на іонізованих домішках. В залежності від концентрації легуючої домішки буде домінувати той чи інший механізм розсіювання.

Крім неселективного поглинання в напівпровідниках спостерігається

селективне поглинання, яке обумовлене переходами між підзонами всередині валентної зони, або зони провідності. Приклад такого спектру поглинання приведений на рис. 1.5, а структура підзон показана на рис. 1.4.

Переходові  $V_3-V_1$  відповідає пік з енергією  $0,4eV$ ; переходові  $V_3-V_2$  – пік з енергією  $0,3eV$ , а широкий пік при малих енергіях відповідає переходам типу  $a$  ( $V_2-V_1$ ).

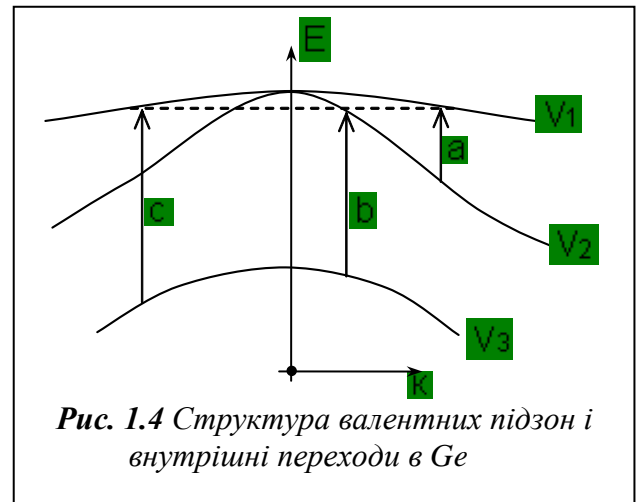


Рис. 1.4 Структура валентних підзон і внутрішні переходи в Ge

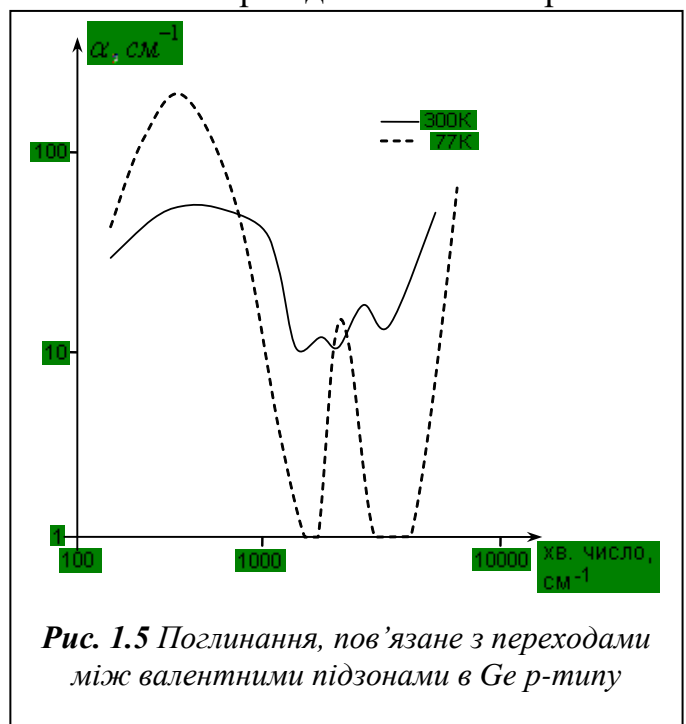


Рис. 1.5 Поглинання, пов'язане з переходами між валентними підзонами в Ge  $p$ -типу

### 1.3. Поглинання ґраткою

Напівпровідникові сполуки  $A^3B^5$  і  $A^2B^6$  мають іонну складову зв'язку, тому їх можна розглядати як сукупність електричних диполів. Ці диполі можуть поглинати енергію електромагнітної хвилі і взаємодія максимальна тоді, коли частота випромінювання співпадає з частотою власних коливань диполів. Таке поглинання світла, яке пов'язане із збудженням коливань кристалічної ґратки, називають ґратковим поглинанням. Воно має місце в далекій ІЧ області спектру.

Оскільки при поглинанні світла ґраткою має виконуватися закон збереження квазіімпульсу, то внаслідок малості імпульсу фотона ( $p = \frac{h}{\lambda}$ ) поглинання світла супроводжується випусканням кількох фотонів, імпульс яких може бути  $\frac{h}{a}$ , де  $a$  – стала ґратки.

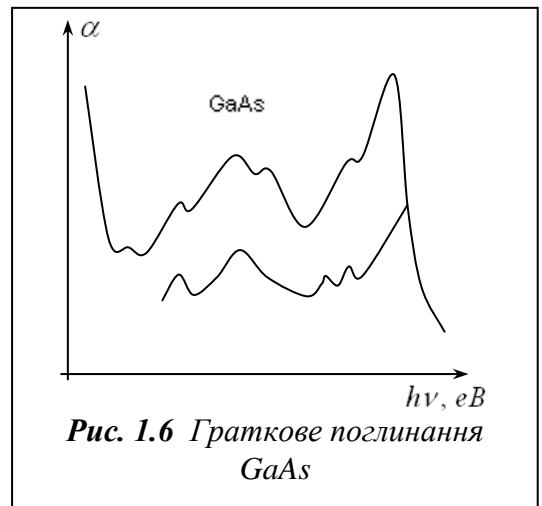


Рис. 1.6 Ґраткове поглинання GaAs

Тому спектр ґраткового поглинання буде складним, як, наприклад, для GaAs, який зображено на рис. 1.6. Піки можуть бути ідентифіковані і встановлено, які фонони беруть участь у процесі.

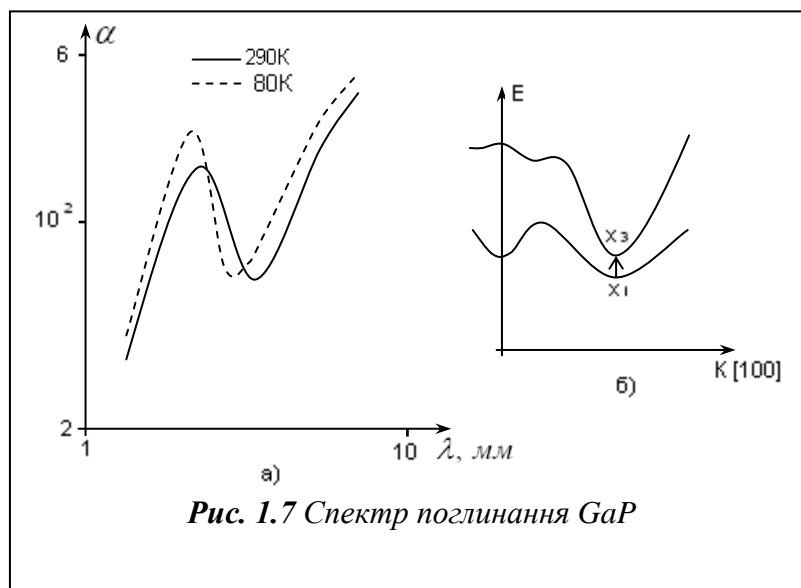
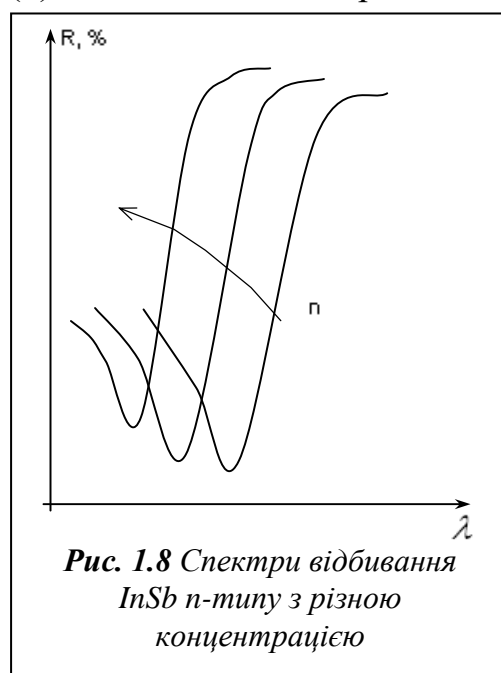


Рис. 1.7 Спектр поглинання GaP

Гомополярні напівпровідники не мають диполів, але під дією світлової хвилі їх атоми отримують дипольні моменти. В результаті виникають фонони, які обумовлюють багатий на піки спектр. Пониження температури приводить до поглинання інтенсивності смуг поглинання ґраткою, а їх положення не змінюється.

Для напівпровідників *n*-типу провідності можливі переходи між різними підзонами в зоні провідності. Для прикладу на рис.1.7. приведений спектр поглинання *GaP* *n*-типу провідності з концентрацією носіїв  $N = 1 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$  (а) і структура зони провідності (б). Пік поглинання при  $0,27 \text{ eV}$  зв'язують з переходами в точці  $\langle 100 \rangle$  між мінімумами підзон  $x_1$  і  $x_3$ . Пік зникає у сплавах  $\text{GaAs}_{1-x}\text{P}_x$  для такого складу  $x$ , коли долина  $\Gamma_1$  стає найнижчою і тоді в неї переходять всі електрони.

При високих концентраціях носіїв і малих ефективних масах носіїв зручно спостерігати відбивання, а не поглинання. На рис. 1.8 показані спектри відбивання кількох зразків *InSb* *n*-типу з різною концентрацією носіїв.



**Рис. 1.8** Спектри відбивання *InSb* *n*-типу з різною концентрацією

Вплив поглинання носіїв струму в значній мірі затрудняє виявлення слабких смуг поглинання, пов'язаного з коливаннями ґратки і домішками.

Тому при дослідженні нових матеріалів бажано мати матеріал з малою концентрацією носіїв заряду, що можна досягнути введенням домішок.

#### 1.4. Домішкове поглинання

Поглинання випромінювання, яке приводить до іонізації або збурення домішкових рівнів у кристалі, називається домішковим поглинанням.

Відомо, що внесення у гратку кристалу домішкового атома створює дозволені рівні енергії у забороненій зоні. Якщо домішковий атом заміщає один з атомів основної гратки кристалу і вносить в кристал один або більше електронів понад ті, які вносив заміщений ним атом, то така домішка називається донором. Так можна априорі стверджувати, що атом *As* в *Ge* або *Si* буде донором, так як і атом *Te*, який заміщатиме *As* в *GaAs*. Якщо ж домішковий атом, що заміщує атом матриці, вносить менше електронів, ніж атом, котрий він заміщує, то домішка називається акцепторною.

Може виявитись, що домішка не заміщує атом основної гратки, а розташовується в міжвузлі. Тоді електрони валентної (зовнішньої) оболонки можуть брати участь в провідності і домішка є донором. Вакансії (відсутність атома) зменшує кількість атомів у кристалі на число обірваних зв'язків і діє як акцептор. Вакансії та домішки у міжвузлах можуть утворювати домішкові комплекси, які можуть поводити себе або як донори, або як акцептори.

У складних напівпровідниках – бінарних чи з більшим числом компонентів відхилення від стехіометрії може привести до утворення донорів чи акцепторів у залежності від того, який з компонент є в надлишку.

Зайвий електрон донорної домішки сильно притягається до домішкового іона, тому він веде себе як атом водню, що поміщений в середовище з діелектричною проникністю  $\epsilon$ , характерною для даного кристалу. Тому енергія його зв'язку з домішковим атомом, тобто енергія іонізації буде виражатися виразом:

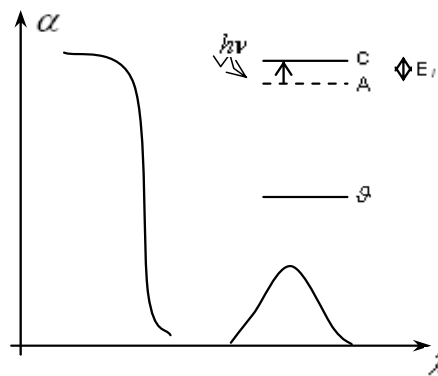
$$E_i = 13,6 \frac{m^*}{m_0} - \frac{Z^2}{\epsilon^2} \frac{1}{n^2} \quad (*)$$

де  $Z$  – порядковий номер елемента,  $m^*$  – ефективна маса,  $n$  – квантове число ( $n \geq 1$ ).

Як видно із формули (\*), енергія іонізації донорної домішки в  $\varepsilon^2$  разів менша енергії іонізації атома водню. Крім того вона залежить від  $Z^2$  в результаті чого видно, що рівень двократно іонізованої домішки повинен розташовуватись в забороненій зоні нижче рівня однократно іонізованого іона цієї домішки.

Якщо для германію  $\varepsilon = 15,8$ , а  $m^* = 0,25m_0$ , то енергія іонізації п'ятивалентних атомів домішки повинна бути рівною приблизно  $0,01 \text{ eV}$ .

Тому поглинання, пов'язане з переходами електронів з донорних рівнів у зону провідності, або з валентної зони на акцепторний рівень має смугу, що лежить при більших довжинах хвиль, ніж фундаментальне поглинання. Це відповідає далекій ІЧ області спектру і експериментально може спостерігатися при низьких температурах, коли більша частина атомів домішки не іонізована. Типовий спектр поглинання кремнію, легованого миш'яком, показано на рис. 1.9



**Рис. 1.9** Залежність  $\alpha(\lambda)$  для домішкового поглинання

Цей спектр знято при температурі, близький до гелієвої (4,2 K).

Експеримент показує, що спостерігається чітко виражена система смуг, що відповідають збудженим станам; що спектри рівних домішок подібні, але енергії їх оптичної іонізації різні.

Для акцепторних центрів картина аналогічна, що видно з рис. 1.10, який представляє спектр поглинання кремнію, легованого бором.

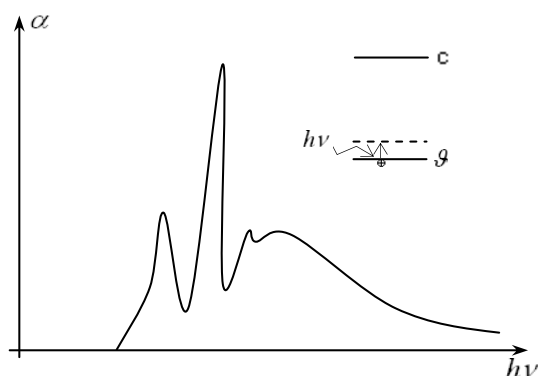


Рис. 1.10 Спектр поглинання Si:B

Для кремнію знайдені точні значення енергії переходів у збуджений стан дрібних донорних і акцепторних домішок, які методом термічної іонізації знайдені менш точно.

Перехід між валентною зоною і іонізованим донором, або між іонізованим акцептором і зоною провідності має місце, коли  $h\nu > E_g - E_i$ . Таке поглинання повинно мати місце з довгохвильової сторони поблизу краю власного поглинання. Оскільки густина домішкових станів значно менша густини станів у зонах, то  $\alpha$  для домішкових переходів значно менший, ніж для міжзонних переходів. На практиці поглинання, пов'язане із дрібними домішками, трудно виділити на тлі поглинання, пов'язаного з хвостами зон. Для глибоких рівнів, коли енергія  $E_i$  досить велика порівняно з  $E_g$ , на спектрі поглинання може спостерігатися сходинка, як це видно для домішкового поглинання *InSb*.

Можливо, що для переходів з великими енергіями для виконання закону збереження квазіімпульсу потрібна участь фононів, коли переходи непрямі. У цьому випадку край поглинання має бути

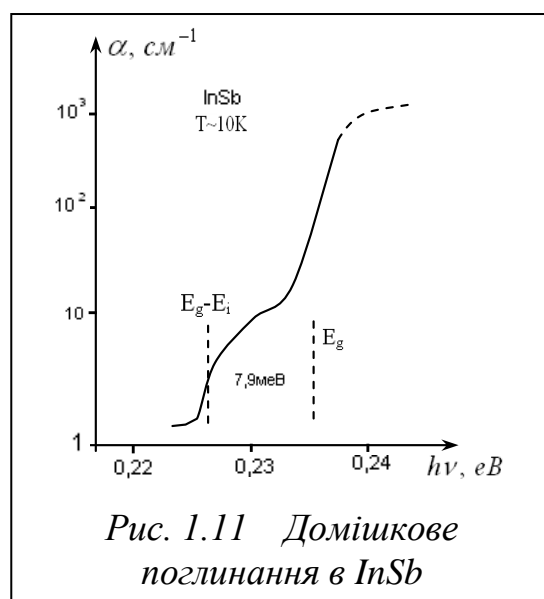


Рис. 1.11 Домішкове поглинання в *InSb*



зміщений на величину енергії фонона в сторону менших енергій при поглинанні фонона і в сторону більших енергій – при його випусканні.

Якщо в кристалі присутні одночасно і донори і акцептори, то матеріал виявляється частково або повністю скомпенсованим, або перекомпенсованим. В цьому випадку існує імовірність переходу під дією фотона відповідної енергії з акцепторного рівня на донорний. Внаслідок кулонівської взаємодії між донором і акцептором можливий цілий набір енергій переходу:

$$h\nu = E_g - E_d - E_A + \frac{q^2}{\epsilon r}.$$

Однак ця дискретна структура виявляється дуже близькою від краю власного поглинання і її важко виявити в експериментах по поглинанню. Однак вона чітко проявляється при дослідженні випромінювання.

## **Висновки до розділу 1**

Поглинання світла напівпровідниками – це складний процес, що включає різні механізми, такі як власне поглинання, поглинання вільними носіями заряду, поглинання через ґратку та домішкове поглинання. Цей розділ дозволяє краще зрозуміти фізичні основи поглинання світла в напівпровідниках і важливий для багатьох технологічних застосувань, включаючи сонячні батареї, лазери, фотодетектори та інші пристрої. Знання про поглинання світла в напівпровідниках є ключовим для розробки нових технологій і вдосконалення існуючих електронних та оптоелектронних пристроїв.

## **РОЗДІЛ 2 ПОГЛИНАННЯ СВІТЛА ІДЕАЛЬНОЮ КВАНТОВОЮ ТОЧКОЮ**

### **2.1. Квантові точки як наноб'єкти**

Створення і вивчення наноб'єктів пониженої розмірності, квантових ям і квантових точок, є актуальним завданням як для фундаментальних досліджень, так і для застосувань в наноелектроніці і оптоелектроніці. Рушійною силою для формування таких наноб'єктів виступає істотна різниця постійних кристалічних ґраток матеріалу квантових точок і матеріалу матриці .

Квантова точка (КТ) - нанофрагмент провідника або напівпровідника, повністю обмежений за всіма трьома напрямками радіусом менше характерного Боровського радіусу екситона (пари електрон-дірка) в напівпровіднику і містить електрони провідності. З фізичної точки зору, КТ представляє із себе ідеальну тривимірну потенціальну яму. Квантова точка - квазінульвимірна наноструктура, близька за розмірами до довжини хвилі електрона в цьому матеріалі. Особливістю такої структури є те, що в ній енергія носія заряду, обмеженого в пересуванні, дискретна, тому їх ще називають «штучними атомами». При наданні енергії електрон в атомі переходить в збуджений стан і переміщується на більш високий рівень, через деякий час, втрачаючи енергію (випромінюючи фотон) і повертаючись на нижній рівень, так як він відповідає мінімуму потенціальної енергії атома. Носій заряду в КТ прагне опинитися на дні потенціальної ями, тому поводить себе так само, як і в атомі. Відмінність КТ від атомів полягає в тому, що їх розмірами і внутрішньою структурою можна управляти.

Отримати квантові точки можна наступними методами: вирощування КТ на підкладці методом молекулярно-пучкової епітаксії, що містить мікронеоднорідності або при істотній відмінності параметрів елементарної

комірки підкладки і напилюваного шару (епітаксіальні КТ) та самовирощування в розчині (іони взаємодіючих елементів об'єднуються в наноструктури, які «обрастають» органічними молекулами) - колоїдні КТ.

Квантові точки (КТ) таких нанокристалів отримують за допомогою хімічного синтезу у різного типу колоїдних розчинах та полімерних матрицях .

В останні роки зріс інтерес до вивчення оптичних властивостей низьковимірних гетероструктур на основі широкозонних напівпровідників. Пристрої на їх основі (лазери, світлодіоди, фотоприймачі) не лише працюють у фіолетовій та ультрафіолетовій, але й у червоній та інфрачервоній областях спектру. Гетеструктури з КТ створюються на базі різних напівпровідників: GaAs, GaN, ZnSe, ZnO, CdS, CdSe, CdTe. Проведені дослідження показали, що квантові точки гетеросистем зазначених та інших напівпровідників залежно від технології їх отримання та матриць, у яких вони знаходяться, можуть мати різну форму. Незважаючи на те, що від форми КТ можуть залежати різні фізичні властивості гетероструктури, вона часто є невідомою не лише через недостатню кількість експериментальних вимірювань та внаслідок існування "дисперсії" як за розмірами, так і за формою КТ . Тому форму КТ нерідко встановлюють на основі загальних фізичних принципів. Найчастіше в теоретичних моделях розглядаються сферичні, еліпсоїдальні, кубічні, циліндричні та пірамідальні КТ. Для заданої гетероструктури енергетичний спектр різних квазічастинок (електронів, дірок, фононів і т.д.) визначається виглядом поверхні КТ. З іншого боку, на основі порівняння теоретичних розрахунків та даних експерименту можна встановити форму КТ. Зокрема, досить чутливими до форми КТ є оптичні вимірювання. Обчислення оптичних характеристик гетероструктур (сили осциляторів переходів, коефіцієнтів поглинання світла та люмінесценції) ґрунтується на визначенні значення енергії та хвильових функцій квазічастинок. Проте лише для КТ сферичної форми ці величини можна точно визначити. Якщо ж КТ є іншої форми, то навіть для найпростішої задачі Шредінгера потрібно використовувати наближені методи (через

неможливість розділення змінних) або використовувати чисельні методи розв'язку диференціальних рівнянь, які визначаються поставленими крайовими умовами.

Застосовують КТ досить широко: освітлювальні прилади, колоїдні люмінофори, лазери, біологічні дослідження. КТ є головними претендентами для представлення кубітів у квантових обчислювальних приладах.

КТ є одними з найбільш перспективних технологій освітлення. Незважаючи на досить малий показник світлопередачі (до 40 люмен / ват, що в 2 -2.5 разів менше, ніж у промислових люмінофорів), прилади на основі КТ можуть випромінювати якісне біле світло, а не монохромне. Лазери на основі КТ мають велику температурну стабільність, ширину спектральної лінії і швидкість передачі даних у порівнянні зі своїми газовими аналогами і лазерами на основі квантових ям.

Золі на основі колоїдних КТ перевершують органічні і неорганічні люмінофори по яскравості флуоресценції і фотостабільності. КТ мають дуже широкий спектр поглинання, і, отже, КТ різних розмірів можуть бути збуджені одним джерелом світла. Піки фотолюмінесценції КТ досить вузькі і симетричні, що також дуже важливо при одночасній ідентифікації багатьох флуоресцентних сигналів. Ці властивості відкривають застосування КТ в біологічних дослідженнях.

Існування квантових точок дозволить переглянути деякі принципи створення нових електронних приладів.

## **2.2. Поглинання світла ідеальною квантовою точкою**

Характерні особливості поведінки 0D систем як низькорозмірних структур найрельєфніше проявляють себе у їхніх спектрах оптичного поглинання і випромінювання. Особливості енергетичної структури квантових точок повинні проявлятися у деякому вибіркового поглинанні світла певних частот, яке зумовлюється переходами електронів з нижчих на вищі енергетичні рівні, або деякому квазідискретному випромінюванні світла певних частот, яке зумовлюється зворотними переходами електронів з вищих на нижчі енергетичні рівні. Саме тому сьогодні електронні процеси у квантових точках вивчаються насамперед за допомогою методів поглинання і випромінювання світла, і саме з оптичними та люмінесцентними властивостями масивів квантових точок пов'язуються можливості їхнього практичного використання.

Якщо енергія кванта світла, що падає на кристалічне утворення, стає співмірною чи переважає ширину його забороненої зони, розпочинається міжзонне поглинання світла, що зумовлюється переходами електронів з валентної зони в зону провідності. За рахунок кулонівського притягання між електроном і діркою можуть виникати їхні зв'язані стани – екситони. Екситонне поглинання світла проявляє себе тим сильніше, чим нижча температура. З іншого ефекти квантування енергетичного спектра структур нанометрових розмірів також найрельєфніше проявляють себе за низьких температур. Звідси випливає, що процеси міжзонного поглинання у квантових точках за температур, при яких виявляються їхні квантові властивості, повинні мати екситонний характер.

### **2.2.1. Квантові точки великого радіуса**

Аналіз оптичних спектрів квантових точок у загальному випадку, тобто за довільного співвідношення між радіусом квантової точки і борівським

радіусом екситона, доволі складний. Він, як зазвичай у фізичних дослідженнях, спрощується для граничних випадків, якими є так звані квантові точки великого і малого радіусів.

Квантова точка великого радіуса - це кристалічне утворення, радіус якого  $a$  набагато більший за  $a_e$ . З урахуванням борівського радіуса екситона, така ситуація є цілком реальною, оскільки  $a_e$  у напівпровідниках за порядком величини становить одиниці нанометрів, а квантово-розмірні ефекти за низьких температур виникають уже за обмежень розмірів у десятки-сотні нанометрів. У разі квантової точки великого радіуса екситон можна розглядати як механічну частинку, без урахування його внутрішньої структури, а енергію екситона подавати у вигляді суми кінетичної енергії  $\Delta E(a)$  центра мас і енергії кулонівської взаємодії електрона і дірки в основному стані. За таких умов відбувається квантування руху екситона як цілого.

У найпростішому наближенні поведінка екситона у квантовій точці великого радіуса, коли

$$a \gg a_e \quad (2.1)$$

це поведінка частинки масою  $M = m_e + m_h$  у нескінченно глибокій сферично симетричній потенціальній ямі радіуса  $a$ . Розв'язок рівняння Шредінгера для цього випадку є подібним для одновимірної нескінченно глибокої прямокутної потенціальної ями завширшки  $a$  з урахуванням обмеження руху частинки в усіх трьох напрямках, і тому енергію основного стану екситона  $\Delta E(a)$  як цілого можна записати:

$$\Delta E(a) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2Ma^2} \quad (2.2)$$

Останній вираз зручно подати через екситонний ридберг і борівський радіус екситона:

$$\Delta E(a) = \frac{m_r}{M} \left( \frac{\pi a_B}{a} \right)^2 R_y^* \quad (2.3)$$

З рівняння (2.3) видно, що для квантової точки великого радіуса поправка до енергії екситону, яка визначається квантуванням його руху як

цілого  $\Delta E(a)$ , є набагато меншою за енергію зв'язку екситона  $R_y^*$ . Енергія першого максимуму в спектрі екситонного поглинання квантової точки великого радіуса  $E_1$  буде:

$$E_1 = E_g^0 - R_y^* + \Delta E(a). \quad (2.4)$$

Якщо нерівність (2.1) перестає виконуватися строго, тобто радіус квантової точки зменшується, то необхідно розв'язувати рівняння Шредінгера для електрона і дірки в 3D потенціальній ямі з урахуванням кулонівської взаємодії між ними.

### 2.2.2. Квантові точки малого радіуса

Якщо радіус квантової точки  $a$  набагато менший за  $a_0$ , то відносно екситона це так звана квантова точка малого радіуса. Щоб квантову точку можна було вважати такою, що вже сформувався, її розміри повинні містити достатньо багато елементарних комірок кристалічної структури. Тому математично умову квантової точки малого радіуса можна записати як

$$a_0 \ll a \ll a_0 \quad (2.5)$$

де  $a_0$  - період ґратки матеріалу квантової точки. Для таких квантових структур вже не можна розглядати екситон як механічну частинку, оскільки така частинка вже не "поміщається" у квантову точку. Цей випадок відповідає незалежному квантуванню руху електрона і дірки, які утворюють екситон.

Якщо квантову точку розглядати як нескінченно глибоку тривимірну потенціальну яму, то у нульовому наближенні, по-перше, форма ями стає неважливою, а, по-друге, можна обмежитись розглядом рівняння Шредінгера з гамільтоніаном, який містить тільки оператори кінетичної енергії електрона і дірки. Власне це і означає, що для квантової точки малого радіуса енергетичний спектр електрона  $E_e$  і дірки  $E_d$  квантуються незалежно:

$$E_e = E_c + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e a^2} n^2$$



$$E_d = E_v + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_d a^2} n^2, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (2.6)$$

У такому разі оптичний перехід між найвищим енергетичним рівнем валентної зони квантової точки  $1s_d$  і найнижчим енергетичним рівнем зони провідності  $1s_e$  ( $n=1$ ) відповідає енергії:

$$\Delta E_{1s_d}^{1s_e} = (E_c - E_v) + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2a^2} \left( \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_d} \right) = E_g^0 + \left( \frac{\pi a_B}{a} \right)^2 R_y^*. \quad (2.7)$$

Зі співвідношення (2.7) бачимо, що квантування руху електрона і дірки у квантовій точці малого радіуса зміщує енергію переходу в короткохвильову область спектра відносно такої у  $3D$  кристалі, а величина зміщення обернено пропорційна до квадрата радіуса квантової точки. Якщо врахувати кулонівську взаємодію між електроном і діркою, яка виникає під час поглинання кванта світла, то виникне додаткове зміщення лінії поглинання, але тепер у довгохвильову область спектра, величина якого  $\Delta E_{coul}$  виявляється обернено пропорційною до радіуса квантової точки:

$$\Delta E_{coul} = -C e^2 / a \epsilon, \quad (2.8)$$

де  $C$  - деякий коефіцієнт, який залежить від конкретної форми квантової точки. Отже, за дуже малих радіусів квантових точок поправки до положення спектральних ліній, які вносять розмірне квантування руху носіїв заряду, набагато істотніші за екситонні поправки, оскільки перші зростають за законом  $a^{-2}$ , а другі – за законом  $a^{-1}$ . Внаслідок цього мінімальна енергія екситонного переходу у квантовій точці відповідає енергії, більшій за ширину забороненої зони  $E_g^0$  вихідного напівпровідника, тоді як для масивного зразка лінії екситонного поглинання  $E_{ex}$  лежать в області енергій, менших за ширину забороненої зони напівпровідника:

$$E_{ex} = E_g^0 - R_y^* / n^2, \quad n=1, 2, 3... \quad (2.9)$$

За достатньо малого радіуса квантової точки  $a$  зміна енергії переходу за рахунок квантово-розмірного ефекту може на порядок-два переважати енергію зв'язку екситона в кристалі і за порядком величини наближатися до значення  $E_g^0$ , а також до величини потенціального бар'єра у реальних

квазінульвимірних структурах. У такому разі необхідно в явному вигляді враховувати висоту потенціального бар'єра. Врахування скінченної висоти бар'єра веде до зниження енергії основного стану екситона.

Інша особливість спектрів екситонного поглинання квантових точок пов'язана з правилами відбору. Правила відбору для об'єктів, що розглядаються, уможливають переходи тільки між рівнями з однаковими значеннями головного та орбітального квантових чисел електронів і дірок. Це приводить до того, що спектр поглинання вихідного кристала, який в області енергій, більших за ширину забороненої зони, має вигляд плавної кривої.

Дискретність оптичного спектра квантової точки малого радіуса і його залежність від кількості атомів у точці робить її подібною до атомів, для яких положення дискретних спектральних ліній визначається кількістю нуклонів у ядрі. Тому квантові точки малого радіуса часто називають “надатомами” або “штучними атомами”.

## Висновки до розділу 2

Розділ про поглинання світла ідеальною квантовою точкою розглядає основні аспекти поглинання світла цією структурою. На його основі можна зробити наступні висновки:

- Ідеальна квантова точка – це наноструктура, яка має унікальні властивості щодо поглинання світла через квантово-механічні ефекти.
- Поглинання світла ідеальною квантовою точкою залежить від її розміру, форми та складу.
- Цей розділ важливий для розуміння взаємодії світла з наноструктурами та для розвитку нових технологій, таких як квантові точкові лазери, фотодетектори та сенсори.
- Знання про поглинання світла ідеальною квантовою точкою є важливим для подальших наукових досліджень та застосувань у сферах оптики, фотоніки та квантових технологій.

## РОЗДІЛ 3 ПОГЛИНАННЯ СВІТЛА КВАНТОВОЮ ТОЧКОЮ З ДОМІШКАМИ. АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ У ШКОЛІ.

### 3.1. Електронні стани у квантовій точці з одновалентною домішкою

Розглянемо сферичну наногетеросистему, яка складається з нанокристала радіуса  $a$ , діелектрична проникність якого  $\varepsilon_1$ , а ефективна

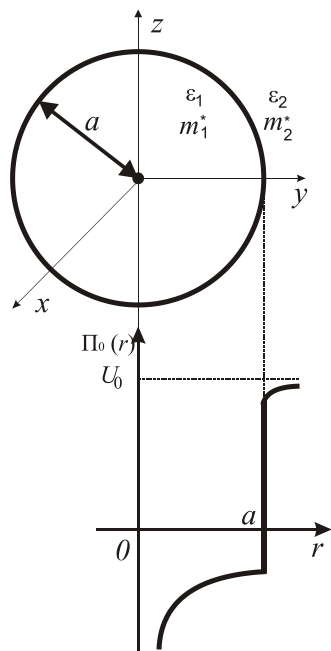


Рис.3.1. Геометрична схема наносистеми та потенціал електрона у ній.

маса електрона  $m_1^*$ , який поміщений у матрицю з діелектричною проникністю  $\varepsilon_2$  і ефективною масою електрона в ній  $m_2^*$ . У центрі цієї сферичної квантової точки знаходиться донорна домішка. На рис.3.1 подано схематично модель гетеросистеми.

Гамільтоніан такої системи має вигляд:

$$H = -\frac{\hbar}{2} \nabla \frac{1}{m^*} \nabla + \Pi(r), \quad (3.1)$$

де потенціальна енергія  $\Pi(r)$  є сумою:

$$\Pi(r) = V(r) + U(r) \quad (3.2)$$

Тут потенціальна енергія, що зумовлена розривом зон гетероструктури, така:

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r \leq a \\ U_0, & r > a \end{cases} \quad (3.3)$$

А потенціальна енергія зумовлена домішкою буде рівна:

$$V(r) = \frac{-e^2}{\varepsilon r}, \quad (3.4)$$

де

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}. \quad (3.5)$$

Рівняння Шредінгера для цієї системи матиме вигляд:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2} \nabla \frac{1}{m^*(r)} \nabla + \Pi(r)\right) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}). \quad (3.6)$$

Враховуючи сферичну симетрію задачі, хвильову функцію подано у вигляді добутку радіальної і кутової складових:  $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$ .

Вся область зміни координати  $r$  розділена на дві – внутрішню область ( $r \leq a$ ) і зовнішню ( $r > a$ ).

I. Розглянемо випадок коли  $r \leq a$ .

У цьому випадку матимемо радіальне рівняння Шредінгера:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1^*} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}\right) R_1(r) + \frac{\bar{L}^2}{2m_1^* r^2} + \Pi(r)\right] R_1(r) Y_l^m = E R_1(r) Y_l^m(a, \varphi) \quad (3.7)$$

До множимо рівняння (2.7) на  $Y_l^m(a, \varphi)$  і про інтегруємо по кутах:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1^*} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}\right) R_1(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_1^* r^2} R_1(r) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} R_1(r) = E R_1(r) \quad (3.8)$$

$$\text{Зробимо заміну } R_1(r) = \frac{\chi_1}{r}. \quad (3.9)$$

Підставимо вираз (2.9) у (2.8) і спростимо:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1^*} \frac{d^2}{dr^2} \chi_1(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_1^* r^2} \chi_1(r) - \frac{e^2}{\epsilon r} \chi_1(r) = E \chi_1(r). \quad (3.10)$$

Проведемо заміну змінних  $\xi = ar \rightarrow r = \xi/\alpha$ , підставимо їх у рівняння (2.10) і отримаємо:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1^*} \alpha^2 \chi_1'' + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_1^* \xi^2} \chi_1 - \frac{e^2 \alpha}{\epsilon \xi} \chi_1 - E \chi_1 = 0 \quad (3.11)$$

Зважаючи на те, що електрон знаходиться у полях  $U(r)$  та  $V(r)$ , розв'язки рівняння (3.11) існуватимуть у двох діапазонах енергії:  $E < 0$ ,  $0 < E < U_0$ .

У випадку  $E < 0$  рівняння (3.11) зведемо до рівняння Віттекера, для цього поділимо його на  $-\frac{\hbar^2}{2m_1^*} \alpha^2$ , зробимо підстановку

$$\frac{2m_1^* E}{\hbar^2 \alpha^2} = -\frac{1}{4}, \quad \frac{e^2 2m_1^*}{\epsilon \hbar \alpha} = \lambda, \quad (3.12)$$

і отримаємо:

$$\chi_1''(\xi) - \frac{l(l+1)}{\xi^2} \chi_1(\xi) + \frac{\lambda}{\xi} \chi_1(\xi) - \frac{1}{4} \chi_1(\xi) = 0. \quad (3.13)$$

Розв'язком рівняння (3.13), що задовольняє скінченності хвильової функції при  $r \rightarrow 0$  є наступна функція Віттекера:

$$\chi_1(\xi) = C_1 M_{\lambda, L+\frac{1}{2}}(\xi) \quad (3.14)$$

У випадку  $0 < E < U_0$  зробивши заміну змінних  $\xi = \beta r$  і підстановку  $\frac{2m_1^* E}{\hbar^2 \beta^2} = 1, \frac{e^2 2m_1^*}{\epsilon \hbar \beta} = \delta$  у рівнянні (3.11) отримаємо рівняння Кулона:

$$\chi_1''(\xi) - \frac{l(l+1)}{\xi^2} \chi_1(\xi) - \frac{2\delta}{\xi} \chi_1(\xi) - \frac{1}{4} \chi_1(\xi) = 0. \quad (3.15)$$

За умови скінченності хвильової функції при  $r \rightarrow 0$  розв'язком рівняння (3.15) буде регулярна функція Кулона:

$$\chi_1(\xi) = D_1 F_l(\delta, \xi). \quad (3.16)$$

II. У зовнішній області ( $r > a$ ) також матимемо радіальне рівняння:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_2^*} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) R_2(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_2^* r^2} R_2(r) - \frac{e^2}{\epsilon r} R_2(r) = E R_2(r). \quad (3.17)$$

Зробивши підстановку  $E = E - U_0$  у рівняння (3.11), то аналогічно як і в попередньому випадку отримаємо рівняння Віттекера, розв'язком якого буде:

$$\chi_2(\xi) = A W_{\lambda, L+\frac{1}{2}}(\xi). \quad (3.18)$$

З граничних умов:

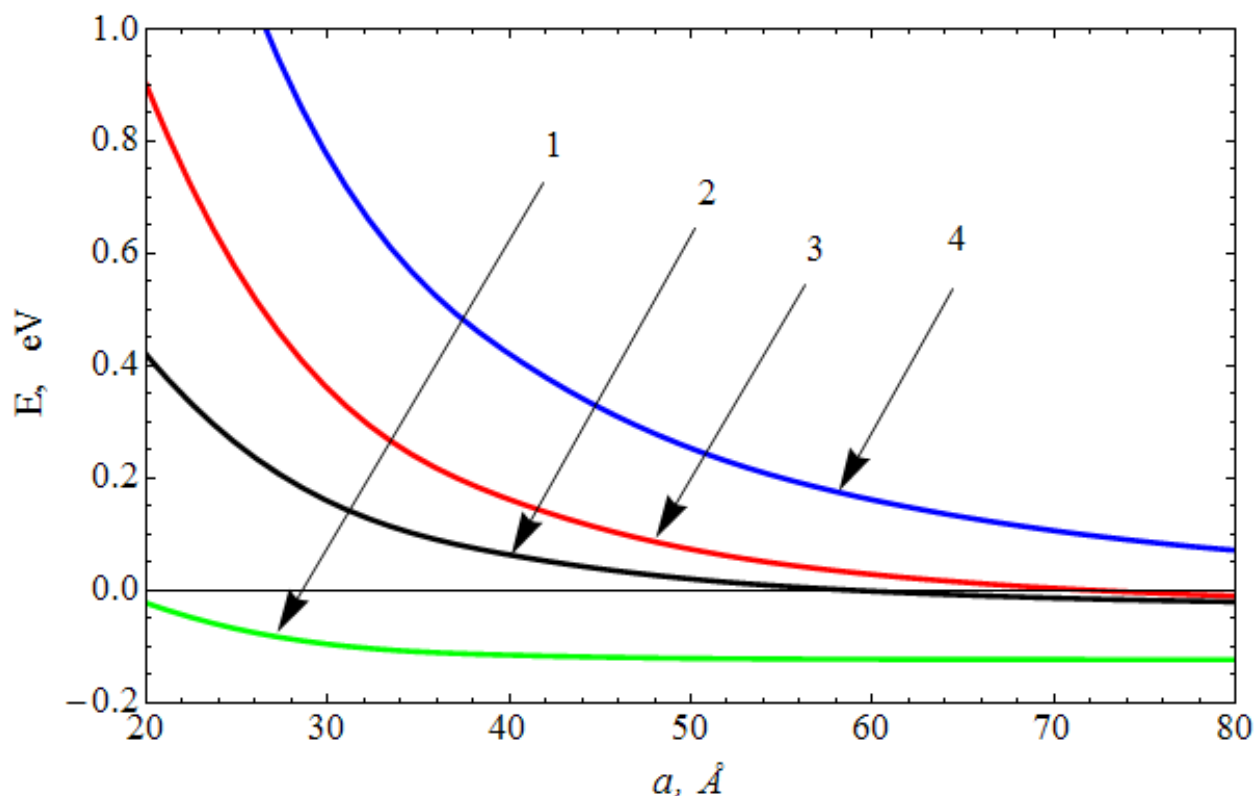
$$R_1(r)|_{r=0} = R_2(r)|_{r=a},$$

$$\frac{1}{m_1^*} \frac{\partial}{\partial r} R_1(r) \Big|_{r=0} = \frac{1}{m_2^*} \frac{\partial}{\partial r} R_2(r) \Big|_{r=a}.$$

одержано дисперсійне рівняння, з якого знайдено енергетичний спектр. Використовуючи ці умови та умову нормування, знайдено невідомі коефіцієнти, а значить повністю визначимо хвильові функції.

Розглянемо залежність енергії квантової точки від її радіусу. Використовуючи наведені вище формули, на ЕОМ було проведено розрахунок енергії основного стану одновалентної домішки у квантовій точці сферичної форми. Обчислення проводилось для різних розмірів КТ, починаючи з 20 Å, бо при менших радіусах наближення ефективної маси перестає адекватно описувати наногетеросистеми.

На рис.3.2 наведено залежність енергії основного стану електрона для наногетероструктур CdS/SiO<sub>2</sub> з одновалентною домішкою від радіуса КТ.



**Рис.3.2.** Залежність енергії основного стану електрона для наногетероструктур CdS/SiO<sub>2</sub> з одновалентною домішкою від радіуса КТ, де 1– енергія  $E_{10}$ , 2– енергія  $E_{11}$ , 3– енергія  $E_{20}$ , 4– енергія  $E_{21}$ .

Із рис. 3.2 видно, що при великих радіусах КТ енергія домішки практично не залежить від радіуса. Плавна зміна енергії є наслідком того, що в цьому випадку потенціальна яма мало впливає на енергетичний рівень. Величина енергії, в основному, визначається кулонівською взаємодією. Отже, енергія системи прямує до енергії водневоподібної домішки в об'ємному кристалі відповідно. Це пояснюється тим, що ймовірність перебування електронів у квантовій точці набагато більша, ніж у матриці.

Також з рис. 3.2 видно, що у квантових точках малих розмірів дискретний електронний спектр визначається потенціалом розмірного квантування, а кулонівська взаємодія приводить лише до незначного зміщення усіх енергетичних рівнів в область менших енергій, якісно не змінюючи його поведінки. Якщо радіус квантової точки більший ніж 70 Å, то

вплив кулонівського потенціалу стає порівняним із потенціалом розмірного квантування, що приводить до якісних змін у спектрі електрона.

Дискретні рівні електрона, який знаходиться в сумарному полі розмірного квантування та кулонівського потенціалу, при збільшенні розмірів квантової точки опускаються в область нижче дна потенціальної ями, тобто попадають у заборонену зону масивного кристалу. У випадку відсутності кулонівської взаємодії всі енергетичні рівні електрона при збільшенні розмірів КТ прямують до дна потенціальної ями. Збільшення розмірів квантової точки приводить до зменшення розмірного квантування і енергетичний спектр стає воднеподібним, що відповідає енергетичному спектру електрона, який взаємодіє з додатним зарядом у масивному кристалі. Енергетичні рівні вироджуються і стають такими як у масивному кристалі.



### 3.2. Коефіцієнти поглинання та заломлення світла

Для того щоб обчислити зміну коефіцієнта поглинання і показника заломлення матеріалу через міжрівневі переходи, розглянемо взаємодію поляризованого монохроматичного електромагнітного поля з ансамблем квантових точок. Вектор напруженості електричного поля цієї електромагнітної хвилі запишемо у вигляді:

$$\vec{E}(t) = E_0 \hat{k} e^{-i\omega t} e^{i(q+ikx)} + C, \quad (3.19)$$

де  $q$  – хвильове число,  $k$  – коефіцієнт затухання.

Припустимо, що електромагнітне поле поляризоване вздовж осі  $z$  і поширюється в напрямку осі  $x$ . Тоді, комплексна діелектрична функція системи, що пов'язана з хвильовим вектором і коефіцієнтом поглинання матиме вигляд:

$$(q + k)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon' + i\varepsilon''), \quad (3.20)$$

де  $\varepsilon'$  і  $\varepsilon''$  – дійсна і уявна частини діелектричної проникності. А показник заломлення  $n_r$  матиме такий вигляд:

$$n_r = \frac{q}{q_0} = \frac{qc}{\omega}. \quad (3.21)$$

Із виразів (3.20) і (3.21) отримаємо:

$$n_r^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \varepsilon' \quad (3.22)$$

і

$$4 \frac{k^2 c^2}{\omega^2} n_r^2 = (\varepsilon')^2. \quad (3.23)$$

Отже, коефіцієнт поглинання  $\alpha$  матиме вигляд:

$$\alpha(\omega) = 2k(\omega) = \frac{\omega}{cn_r} \varepsilon'' = \frac{\omega}{cn_r \varepsilon_0} \text{Im}(\varepsilon_0 \chi), \quad (3.24)$$

де  $\chi$  – електрична сприйтливність і  $\varepsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega)$ . З іншого боку, так як  $n_r = \text{Re}(\varepsilon^{1/2})$ , то:

$$n_r = \text{Re}\left(\sqrt{1 + \chi(\omega)}\right) \approx 1 + \frac{1}{2} \text{Re}(\chi). \quad (3.25)$$

Таким чином, зміну показника заломлення можна записати у вигляді:

$$\Delta n_r = n_r - 1 = n_r \operatorname{Re} \left( \frac{\chi(\omega)}{2n_r^2} \right) \quad (3.26)$$

або

$$\Delta n_r = \frac{1}{2n_r \varepsilon_0} \operatorname{Re}(\varepsilon_0 \chi(\omega)). \quad (3.27)$$

Із рівнянь (3.24) і (3.27) можна зробити висновок, що для того щоб обчислити зміну показника заломлення і коефіцієнт поглинання необхідно отримати електричну сприйнятливості. Для цього використаємо підхід, що полягає у використанні матриці густини.

Рівняння на визначення оператора матриці густини має вигляд:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H} - e\hat{z}E(t), \hat{\rho}] - \hat{\Gamma}(\hat{\rho} - \hat{\rho}^{(0)}), \quad (3.28)$$

де  $\hat{H}$  – гамільтоніан системи за відсутності електромагнітного поля,  $e$  – заряд електрона,  $\hat{\rho}^{(0)}$  – незбурений оператор матриці густини,  $\hat{\Gamma}$  – оператор затухання, що пов'язаний з електрон-фотонною взаємодією та іншими процесами розсіювання.

Рівняння (3.10) можна розв'язати, використовуючи ітераційний метод.

Якщо  $\hat{\rho}$  представити у вигляді  $\hat{\rho} = \sum_n \hat{\rho}^{(n)}$ , тоді:

$$\frac{\partial \rho_{ij}^{(n+1)}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \{ [\hat{H}_0, \hat{\rho}^{(n+1)}]_{ij} - [e\hat{z}, \hat{\rho}^{(n)}]_{ij} E(t) - i\hbar \Gamma_{ij} \rho_{ij}^{(n+1)} \}. \quad (3.29)$$

Крім того, електричну поляризацію системи можна записати у вигляді:

$$P(t) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \hat{E} e^{-i\omega t} + \varepsilon_0 \chi(\omega) \hat{E} e^{i\omega t} = \frac{1}{V} \operatorname{Tr}(e\hat{z}\hat{\rho}), \quad (3.30)$$

де  $\varepsilon_0$  – діелектрична проникність,  $\chi(\omega)$  – Фур'є-образ діелектричної сприйнятливості.

Таким чином, згідно симетрії системи та результатів теорії груп квадратичні та інші парні порядки сприйнятливості дорівнюють нулю, а лінійна і нелінійна сприйнятливості третього порядку отримано у вигляді [26,27]:

$$\varepsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) = \frac{\sigma_v |d_{12}|^2}{E_{21} - \hbar\omega - i\hbar\Gamma_{12}} \quad (3.31)$$

i

$$\varepsilon_0 \chi^{(3)}(\omega) = -\frac{\sigma_v |d_{12}|^2 |E|^2}{E_{21} - \hbar\omega - i\hbar\Gamma_{12}} \left[ \frac{4|d_{12}|^2}{(E_{21} - \hbar\omega)^2 + (\hbar\Gamma_{12})^2} - \frac{(d_{22} - d_{11})^2}{(E_{21} - i\hbar\Gamma_{12})(E_{21} - \hbar\omega - i\hbar\Gamma_{12})} \right], \quad (3.34)$$

де  $\sigma_v$  – густина носіїв,

$$d_{ij} = |\langle \psi_i | e\hat{z} | \psi_j \rangle| \quad (i, j = 1, 2) \text{ – матричні елементи дипольного моменту.}$$

В даному випадку дипольний момент шукатимемо у вигляді:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \int (Y_0^0 R_0^0)^* r \cos\varphi Y_1 R_{10} \sin\theta d\theta d\varphi r^2 dr \\ &= \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_0^{0*} \cos\varphi Y_1 \int R_{00}^* r R_{10} r^2 dr. \end{aligned}$$

Отже, коефіцієнт поглинання і показник заломлення пов'язані із сприйнятливістю і мають такий вигляд:

$$\alpha(\omega) = \omega \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon\varepsilon_0}} \operatorname{Im}[\varepsilon_0 \chi(\omega)] \quad (3.35)$$

$$\frac{\Delta n(\omega)}{n_r} = \operatorname{Re} \left( \frac{\chi(\omega)}{2n_r^2} \right). \quad (3.36)$$

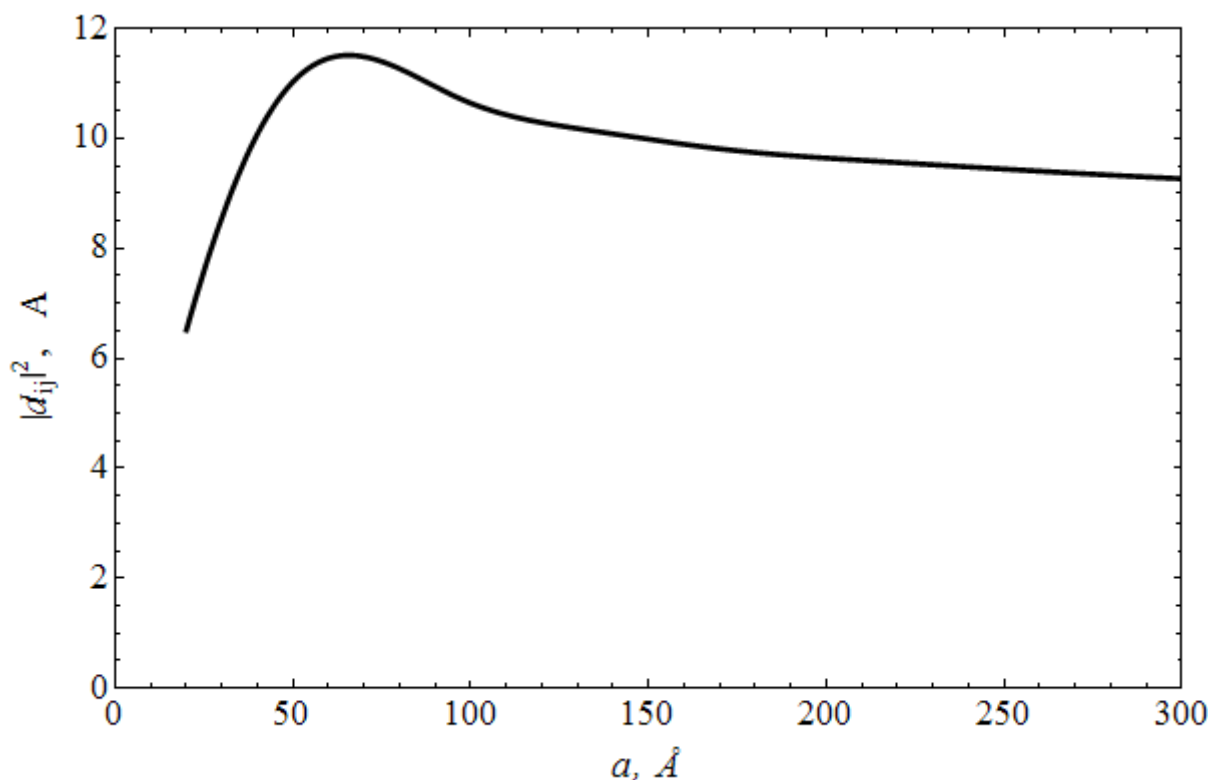
Із рівнянь (3.31) – (3.36) випливає, що лінійний коефіцієнт поглинання можна записати у такому вигляді:

$$\alpha(\omega) = \omega \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon\varepsilon_0}} \frac{\sigma_v |d_{12}|^2 \hbar\Gamma_{12}}{(E_{21} - \hbar\omega)^2 - (\hbar\Gamma_{12})^2},$$

а відносна зміна показника заломлення матиме вигляд:

$$\frac{\Delta n^{(1)}(\omega)}{n_r} = \frac{1}{2n_r^2 \varepsilon_0} \frac{\sigma_v |d_{12}|^2 (E_{21} - \hbar\omega)}{(E_{21} - \hbar\omega)^2 + (\hbar\Gamma_{12})^2}.$$

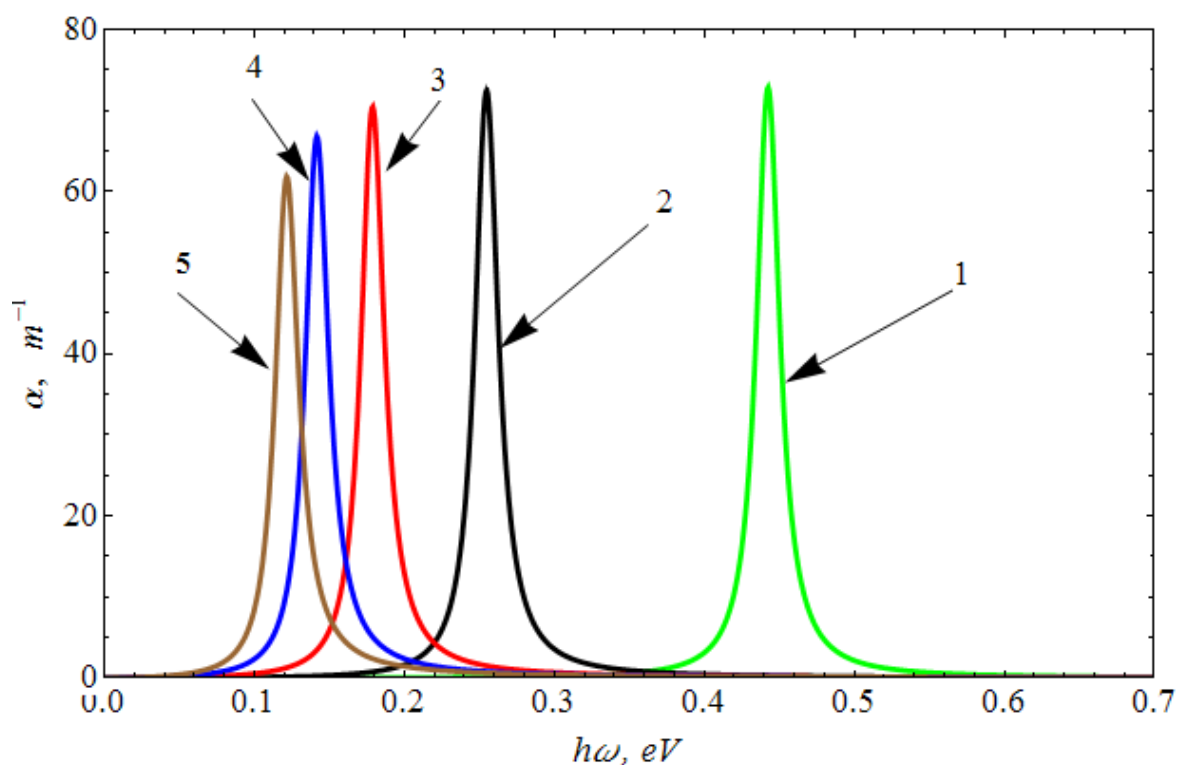
На рис. 3.3. подано залежність квадрату дипольного моменту від радіуса КТ. Видно, що значення  $|d_{ij}|^2$  немонотонно змінюються при зміні розмірів КТ. Зокрема, максимум у даній залежності припадає у точці  $a=65$  Å, а починаючи приблизно із 100 Å квадрат матричного елемента монотонно спадає. Зазначені особливості впливатимуть на залежність коефіцієнта поглинання і показника заломлення світла у сферичній КТ з донорною домішкою.



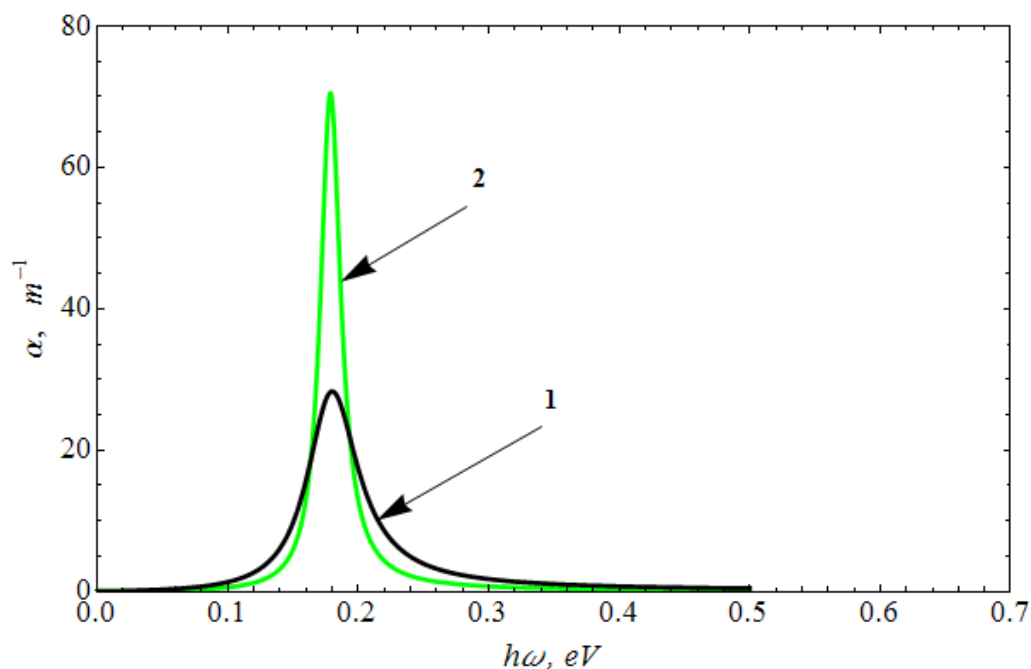
*Рис. 3.3. Квадрат матричного елемента дипольного моменту міжрівневих переходів.*

Використовуючи наведені формули було проведено розрахунок зміни коефіцієнта поглинання і показника заломлення матеріалу через міжрівневі переходи одновалентної домішки у квантовій точці сферичної форми. Обчислення проводилось для різних розмірів КТ, при інтенсивності  $I=0.04\text{МВт/см}^2$  та діелектричній проникності  $\epsilon=5.5$ .

На рис. 3.4. наведено залежність коефіцієнта поглинання від енергії падаючої електромагнітної хвилі для КТ різних розмірів. З даного рисунку видно, що для КТ радіусом меншим  $40\text{ \AA}$  смуга поглинання зміщується в область малих значень енергії, а для КТ, радіус яких більший  $40\text{ \AA}$  – у область більших енергій. Також при менших значеннях енергії фотона смуги поглинання зсувається у напрямок довгих хвиль.



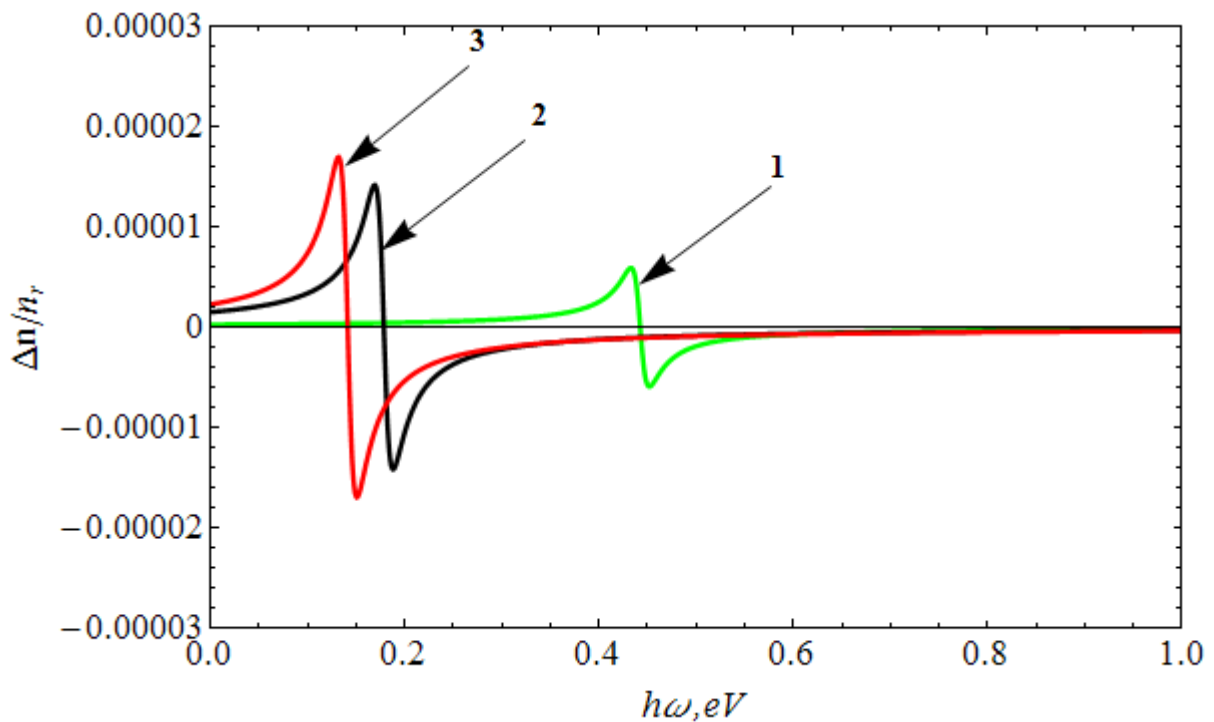
**Рис.3.4.** Лінійний коефіцієнт поглинання світла від енергії падаючої, де 1– смуга поглинання світла для КТ радіусом 20 Å, 2– смуга поглинання світла для КТ радіусом 30 Å, 3– смуга поглинання світла для КТ радіусом 40 Å, 4– смуга поглинання світла для КТ радіусом 50 Å, 5– смуга поглинання світла для КТ радіусом 60 Å.



**Рис. 3.5.** Залежність коефіцієнта поглинання від енергії падаючої електромагнітної хвилі при різній температурі, де 1 – смуга поглинання світла для КТ при  $T=4$  К, 2 – смуга поглинання світла для КТ при  $T=10$  К.

Апроксимуємо сталу затухання і нехай  $\hbar\Gamma = kT$ . Тоді при зміні температури смуги поглинання будуть видозмінюватися, що і видно із рис. 3.5. Зокрема збільшення сталої затухання призводить до розширення смуги поглинання та зменшення її піку. Проте слід враховувати, що при  $T=15\text{ K}$  і більше, то смуги поглинання для різних розмірів КТ починають близько перекриватися і тоді по спектрах поглинання важче оцінити розміри КТ.

На основі проведених обчислень енергії та хвильових функцій станів визначено залежність коефіцієнту поглинання світла, що зумовлене міжрівневими переходами електрона у квантових точках. На рис 3.6. подано графік залежності лінійного показника заломлення світла як функції енергії падаючого кванта. Із даного рисунка видно, що значення відносної зміни показника заломлення залежить від розмірів КТ, зокрема збільшення розмірів КТ призводить до зміщення резонансних енергій у низькоенергетичну область. Причиною такої залежності є зменшення відстані між енергетичними рівнями основного та першого збудженого станів.



*Рис. 3.6. Лінійний показник заломлення світла.*

### **3.3. Вивчення процесів поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками з домішками для майбутніх вчителів фізики у контексті навчання учнів у школі.**

Вивчення процесів поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками з домішками є важливим для майбутніх вчителів фізики у контексті навчання учнів у школі. Основні аспекти стосовно використання та вивчення цієї теми у шкільній освіті:

**Впровадження в навчальні програми:** Одним з ключових кроків є включення матеріалів про процеси поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками з домішками в навчальні програми з фізики. Це надасть учням можливість дізнатися про сучасні наукові дослідження та їх застосування в технологіях.

**Демонстраційні експерименти та лабораторні роботи:** Важливим етапом є проведення демонстраційних експериментів та лабораторних робіт, що дозволять учням спостерігати та аналізувати процеси поглинання електромагнітних хвиль за допомогою квантових точок.

Демонстраційні експерименти та лабораторні роботи є ключовими методами вивчення теми "Вивчення процесів поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками з домішками" у шкільній освіті. Давайте розглянемо більш детально, як ці методи можна застосувати для оптимізації навчання учнів.

#### **Можливі демонстраційні експерименти:**

а) **Ефект поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками:** За допомогою спеціальних демонстраційних засобів можна показати, як електромагнітні хвилі поглинаються квантовими точками та обговорено як це може бути використане в технологіях.

б). **Порівняння з різними матеріалами:** Проведення експериментів для порівняння поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками які

створені з різних матеріалів дозволить учням краще зрозуміти унікальні властивості квантових точок.

с). **Вплив домішок на поглинання:** Експерименти, які показують вплив різних домішок на процес поглинання, допоможуть зрозуміти, як можна оцінити ефективність поглинання електромагнітних хвиль і зрозуміти його використання при побудові різноманітних приладів.

#### **Можливі лабораторні роботи:**

а). **Вимірювання поглинання квантовими точками:** Учні можуть виконати серію лабораторних досліджень, де вони будуть вимірювати та аналізувати поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками за різних умов.

б). **Дослідження впливу розміру квантових точок:** Учні можуть вивчити або моделювати вплив розміру квантових точок на їхню спроможність поглинати електромагнітні хвилі.

с). **Моделювання додавання домішок:** Шляхом моделювання учні можуть вивчити, як додавання різних домішок впливає на характеристики поглинання.

Використання цих методів надає учням можливість самостійно моделювати, спостерігати, вимірювати та аналізувати дані. Це сприяє кращому розумінню та запам'ятовуванню матеріалу, а також розвитку дослідницьких та критичних навичок. Крім того, ці методи допомагають зв'язати теорію з практикою та продемонструвати застосування вивчених концепцій у реальних умовах.

**Практичні заняття та дослідницька діяльність:** Застосування практичних занять та дослідницької діяльності, пов'язаної з цією темою, сприяє збагаченню навчального процесу, розвитку критичного мислення та практичних навичок учнів.

Практичні заняття та дослідницька діяльність грають значущу роль у вивченні теми "Вивчення процесів поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками з домішками" у школі. Давайте розглянемо більш



детально, як ці методи можна використовувати для оптимізації навчання учнів.

#### **Проведення практичних досліджень:**

а). **Експерименти зі створенням квантових точок:** Учні можуть брати участь у лабораторних роботах щодо методів виготовлення квантових точок. Це включає в себе синтез та вивчення властивостей створених матеріалів.

б). **Вивчення параметрів електромагнітних хвиль:** Учні можуть вимірювати та аналізувати характеристики електромагнітних хвиль (довжину, частоту, амплітуду) та їх вплив на поглинання квантовими точками.

#### **Дослідження впливу домішок:**

а). **Експерименти з додаванням різних домішок:** Учні можуть провести моделювання процесу щодо впливу додавання різних домішок на поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками.

б). **Моделювання впливу концентрації домішок:** Учні можуть моделювати вплив концентрації різних домішок на характеристики поглинання електромагнітних хвиль.

#### **Створення проектів і презентації:**

Учні можуть працювати у групах та створювати проекти або презентації, в яких описують результати своїх досліджень та експериментів, а також обговорюють їхній вплив та можливі застосування.

#### **Рольові ігри та дебати:**

Проведення рольових ігор або дебатів на тему впливу квантових точок на поглинання електромагнітних хвиль може сприяти кращому розумінню матеріалу та залучити учнів до активного обговорення.

Ці методи активного навчання стимулюють учнів до самостійної дослідницької роботи, розвивають їхні аналітичні, творчі та комунікативні навички. Вони дозволяють здобути практичні навички та застосовувати

теоретичні знання у реальних ситуаціях, що є важливим для повноцінного засвоєння та застосування матеріалу.

**Інтеграція з іншими дисциплінами:** Зв'язок цієї теми з іншими науковими та технічними дисциплінами (наприклад, хімія, біологія) дозволяє учням бачити цілісну картину та розуміти взаємозв'язки між науками.

**Підготовка до наукових олімпіад та конкурсів:** Вивчення цієї теми допомагає учням глибше зрозуміти сучасні наукові досягнення та підготуватися до участі в наукових конкурсах та олімпіадах.

Підготовка до наукових олімпіад та конкурсів з фізики на базі вивчення теми "Вивчення процесів поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками з домішками" є важливою для стимулювання інтересу учнів до наукової діяльності та поглиблення їх знань у цій галузі. Давайте розглянемо детальніше, як цю тему можна використовувати для підготовки до олімпіад та конкурсів.

#### **Вивчення теорії та основних понять:**

Учні повинні детально вивчити теоретичні аспекти процесів поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками та їх взаємодію з домішками. Це включає знання про властивості квантових точок, їхню будову та вплив різних факторів на поглинання.

#### **Проведення лабораторних досліджень та практичних занять:**

Учні мають можливість поглибити свої знання шляхом проведення лабораторних експериментів та практичних занять, де вони можуть спостерігати та аналізувати явища поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками, які були запропоновані вище.

#### **Розв'язання завдань та задач:**

Під час підготовки до олімпіад та конкурсів учні мають регулярно вирішувати завдання та задачі, пов'язані з темою. Це дозволяє закріпити та застосувати теоретичні знання у практичних ситуаціях.

#### **Аналіз наукових статей та публікацій:**

Учні можуть вивчити наукові статті та публікації, присвячені даній темі, для поглиблення розуміння сучасних наукових досліджень та застосування отриманих знань у вирішенні завдань.

### **Підготовка та участь у наукових семінарах та конференціях:**

Учні можуть взяти участь у наукових семінарах та конференціях, де вони матимуть можливість обговорити тему з експертами та іншими учнями, обмінюватися досвідом та отримувати конструктивну критику.

Підготовка до олімпіад та конкурсів на основі вивчення теми "Вивчення процесів поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками з домішками" дозволяє учням поглибити свої знання, розвинути критичне мислення та навички аналізу, а також набути досвіду участі в наукових заходах.

В цілому, впровадження даної теми у шкільну освіту сприяє активізації навчального процесу, поглибленню знань учнів у галузі фізики, та підготовці майбутніх фахівців у сфері наукових досліджень та технологій.

Вивчення процесів поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками з домішками є важливим для майбутніх вчителів фізики та може мати значний вплив на навчальний процес у школі. Основні висновки щодо використання цих досліджень у шкільній освіті:

Розширення навчальних програм: Включення матеріалів з дослідження процесів поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками у навчальні програми розширить знання учнів та покращить розуміння сучасних технологій.

Активне навчання та практичні дослідження: Використання цього матеріалу дозволить залучити учнів до активного навчання та практичних досліджень, що сприяє кращому розумінню теоретичних концепцій.

Розвиток критичного мислення та дослідницьких навичок: Аналіз процесів поглинання електромагнітних хвиль засобами квантових точок дозволяє розвивати у школярів критичне мислення, логічність та дослідницькі навички.

Підготовка до майбутньої кар'єри в науці та технологіях: Вивчення сучасних наукових досліджень сприяє підготовці майбутніх фахівців у сфері науки, технологій та інновацій.

Отже, інтеграція цієї теми в освітній процес може сприяти якісній підготовці майбутніх вчителів фізики та розширенню їхніх можливостей для впровадження сучасних наукових підходів у навчання учнів.

### Висновки до розділу 3

Вивчення поглинання світла квантовою точкою з домішками в школі має значний педагогічний та науковий потенціал. За допомогою такого вивчення учні можуть розвивати різні ключові навички та компетентності, а також збагачувати своє розуміння фізичних процесів. Основні висновки до розділу можуть виглядати наступним чином:

- Поглинання світла квантовою точкою з домішками - складний фізичний процес, який включає в себе взаємодію квантових точок та домішок у напівпровіднику.
- Вивчення цього явища в школі допомагає учням розвивати фізичне розуміння світла та квантових процесів, а також підвищує їх інтерес до науки.
- Подальше дослідження поглинання світла квантовими точками з домішками може сприяти розробці нових технологій у сферах електроніки, оптики та фотоніки.
- Важливо враховувати педагогічні методи та підходи, щоб вивчення цього складного матеріалу було доступним та цікавим для учнів на різних рівнях навчання.
- Вивчення цього розділу може стимулювати науковий розвиток та сприяти формуванню молодих науковців у майбутньому.

## ВИСНОВКИ

Проведене теоретичне дослідження поглинання електромагнітних хвиль квантовими точками дало змогу встановити:

1. Для сферичної наногетероструктури  $\text{CdS/SiO}_2$  у наближенні ефективної маси методом теорії збурень обчислено енергію електронів одновалентної домішки як функцію радіуса квантової точки.
2. При малих розмірах КТ енергія основного стану є більшою, ніж при великих розмірах.
3. Проведено розрахунок зміни коефіцієнта поглинання і показника заломлення матеріалу через міжрівневі переходи одновалентної домішки у квантовій точці сферичної форми.
4. Для КТ малих розмірів меншим смуга поглинання зміщується в область малих значень енергії, а для КТ великих розмірів – у область більших енергій.
5. Збільшення сталої затухання призводить до розширення смуги поглинання та зменшення її піку.
6. Значення відносної зміни показника заломлення залежить від розмірів КТ, зокрема збільшення розмірів КТ призводить до зміщення резонансних енергій у низькоенергетичну область. Причиною такої залежності є зменшення відстані між енергетичними рівнями основного та першого збудженого станів.
7. Інтеграція цієї теми в освітній процес може сприяти якісній підготовці майбутніх вчителів фізики та розширенню їхніх можливостей для впровадження сучасних наукових підходів у навчання учнів.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Zhu J.-L. Exact solution of hydrogenic donor states in a spherically rectangular quantum well / J.-L. Zhu // *Phys. Rev. B.* – 1989. – Vol. 39, № 12. – P. 8780-8783.
2. Zhu J.-L. Confined electron and hydrogenic donor states in a spherical quantum dot of GaAs-Ga<sub>1-x</sub>Al<sub>x</sub>As / J.-L. Zhu, J.-J. Xiong, B.-L. Gu // *Phys. Rev. B.* – 1990. – Vol. 41, № 9. – P. 6001-6007.
3. Riberio F.J. Impurities in a quantum dot: A comparative study / F.J. Riberio, A. Latge // *Phys. Rev. B.* – 1994. – Vol. 50, № 7. – P. 4913-4916.
4. Zhu J.-L. Spectrum and binding energy of an off-center donor in a spherical quantum dot / J.-L. Zhu, X. Chen // *Phys. Rev. B.* – 1994 Vol. 50, № 7. – P. 4497-4502.
5. Yang C.-C. Eigenstates and fine structure of a hydrogenic impurity in a spherical quantum dot / C.-C. Yang, L.-C. Liu, and S.-H. Chang // *Phys. Rev. B.* – 1998. – Vol. 58, № 4. – P. 1954-1961.
6. Ткач М.В. Спектр і хвильові функції водневоподібної домішки, розміщеної в центрі квантової точки / М.В. Ткач, В.А. Головацький, Я.М. Березовский // *Фіз. і хім. тверд. тіла.* – 2003. – Т. 4, № 2. – С. 213-220.
7. Boichuk V.I. Bound Energy of the Wannier Exciton in Similar Heterogeneous Double Structures / V.I. Boichuk, I.V. Bilynsky // *Phys. Stat. Sol.* – 1992. – Vol. 174, № 1. – P. 463-470.
8. Бойчук В.І. Дослідження впливу поляризації на енергію електрона, дірки сферичної наногетеросистеми напівпровідників (на прикладі структур *Si/SiO<sub>2</sub>*, *β-HgS/CdS*) / В.І. Бойчук, Р.Ю. Кубай, Г.М. Годованець [та ін.] // *ЖФД.* – 2006. – Т. 10, № 3. – С. 220-226.
9. Luttinger J.M. Motion of Electrons and Holes in Perturbed Periodic Fields / J.M. Luttinger, W. Kohn // *Phys. Rev. Vol.* – 1955. – Vol. 97, № 4. – P. 869888.

10. Luttinger J.M. Quantum theory of cyclotron resonance in semiconductors: General theory / J.M. Luttinger // *Phys. Rev.* – 1956. – Vol. 102, № 4. – P. 1030-1041
11. Lipari Nunzio O. Angular Momentum Theory and Localized States in Solids. Investigation of Shallow Acceptor States in Semiconductors / Nunzio O. Lipari, A Baldereschi // *Phys. Rev. Lett.* – 1970. – Vol. 25, № 24. – P. 1660–1664.
12. Baldereschi A. Spherical model of shallow acceptor states in semiconductors / A. Baldereschi, Nunzio O. Lipari // *Phys. Rev. B.* – 1973. – Vol. 8, № 6. – P. 2697-2709.
13. Pokatilov E.P. Development of an eight-band theory for quantum dot heterostructures / E.P. Pokatilov, V.M. Fomin, J.T. Devreese // *Phys. Rev. B.* – 2001. – Vol. 64, № 24. – P. 245328-245344.
14. Rodina A.V. General boundary conditions for the envelope function in the multiband *kp* model / A.V. Rodina, A.Yu. Alekseev, Al.L. Efros [and al.] // *Phys. Rev. B.* – 2002. – Vol. 65, № 12. – P. 125302-125314.
15. Москаленко А.С. Экситоны в нанокристаллах *Si* / А.С. Москаленко, И.Н. Яснеевич // *ФТТ.* – 2004. – Т. 46, № 8. – С.1465-1475.
16. Boichuk V.I. Interband optical transitions in spherical nanoheterostructures / V.I. Boichuk, I.V. Bilynskiy, I.O. Shakleina // *Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics.* – 2005. – Vol. 8, № 4. – P. 26-32.
17. Moskalenko A.S. Single-particle states in spherical *Si/SiO<sub>2</sub>* quantum dots / A.S Moskalenko, J. Berakdar, A.A. Prokofiev [and al.] // *Phys. Rev. B.* – 2007. – Vol. 76, № 8. – P. 085427-085436.
18. Бойчук В.І. Двозарядна домішка у сферичній квантовій точці / В.І. Бойчук, І.В. Білинський, Р.Я. Лешко // *Фізика і технологія тонких плівок та наносистем. Матеріали XI Міжнародної конференції у 2 т.: Тези доповідей. 7-12 травня 2007р. – Івано-Франківськ, 2007. – Т.2. – С. 169-170.*
19. Кубай Р.Ю. Вплив поверхневих зв'язаних зарядів на енергію екситона у сферичній наногетеросистемі типу *CdS/β-HgS/CdS* та *SiO<sub>2</sub>/Si/SiO<sub>2</sub>* /



- Р.Ю. Кубай, В.Б. Гольський, І.С. Шевчук, Р.Я. Лешко // III-а Українська наукова конференція з фізики напівпровідників: Тези доповідей. 17-22 червня 2007р. – Одеса, 2007. – Т. 1. – С. 248.
20. Лешко Р.Я. Енергетичний спектр нейтрального та негативно зарядженого донорів у сферичній квантовій точці / Р.Я. Лешко // Всеукраїнська школа-семінар і конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини: Тези доповідей. 5-6 червня 2008. – Львів, 2008, – с. 40.
21. Бойчук В.І. Енергія одновалентного та двовалентного донора у сферичній квантовій точці / В.І. Бойчук, І.В. Білинський, Р.Я. Лешко // Науковий вісник Чернівецького університету. – 2008. – Випуск 420. Фізика. Електроніка. – С. 5-11.
22. Boichuk V.I. Ground and excited states of  $D^0$  and  $D^-$  donors in a spherical quantum dot / V.I. Boichuk, I.V. Bilynskiy, R.Ya. Leshko // Ukr. J. Phys. – 2008. – Vol. 53, № 10. – P. 991-996.
23. Boichuk V.I. The effect of polarization charges on energy of univalent and bivalent donors in a spherical quantum dot / V.I. Boichuk, I.V. Bilynskiy, R.Ya Leshko // Condensed Matter Physics. – 2008. – Vol. 11, № 4. – P. 653-661.
24. Бойчук В.І. Властивості багатоелектронних сферичних квантових точок / В.І. Бойчук, І.В. Білинський, Р.Я. Лешко // Фіз. і хім. тверд. тіла. – 2009. – Т. 10, № 3. – С. 524-528.
25. Boichuk V.I. Hydrogenic impurity in a two-layer spherical quantum dot / V.I. Boichuk, I.V. Bilynskiy, R.Ya. Leshko // Semiconductor physics, quantum electronics and optoelectronics. – 2009. – Vol. 12, № 2. – P. 155-161.
26. Бойчук В.І. Водневоподібна домішка у двошаровій сферичній квантовій точці / В.І. Бойчук, І.В. Білинський, Р.Я. Лешко // VI міжнародна школа-конференція „Актуальні проблеми фізики напівпровідників”: Тези доповідей. 23-26 вересня 2008. – Дрогобич, 2008. – С. 48.

27. Бойчук В.І. Дискретні та квазістаціонарні стани водневоподібної домішки у відкритій сферичній наногетеросистемі / В.І. Бойчук, І.В. Білинський, Р.Я. Лешко, Л.Я. Вороняк // ЖФД. – 2010. – Т. 14, №1. – С. 1702(1)-1702(8).
28. Boichuk V.I. Stationary and quasistationary states of hydrogenic impurity in a spherical quantum antidot / V.I. Boichuk, I.V. Bilynskyi, R.Ya. Leshko, L.Ya. Voronyak // Ukr. J. Phys. – 2009. – Vol. 54, № 10. – P. 1021-1026.
29. Бойчук В.І. Дослідження енергетичного спектру акцепторної домішки у центрі сферичної наногетероструктури кристалів типу *GaSb/AlSb* / В.І. Бойчук, І.В. Білинський, Р.Я. Лешко // Фізика і технологія тонких плівок та наносистем. Матеріали XII Міжнародної конференції у 2 т.: Тези доповідей. 18-23 травня 2009. – Івано-Франківськ, 2009. – Т. 1. – С. 29-30.
30. Бойчук В.І. Діркові та домішкові стани у сферичній наногетероструктурі кристалів типу *GaSb/AlSb* / В.І. Бойчук, І.В. Білинський, Р.Я. Лешко, Л.М. Турянська // IV Українська наукова конференція з фізики напівпровідників: Тези доповідей. 15-19 вересня 2009. – Запоріжжя, 2009. – Т. 2. – С. 94.
31. Boichuk V.I. Study of an acceptor impurity located at the center of a spherical nanoheterostructure / V.I. Boichuk, I.V. Bilynskyi, R.Ya. Leshko, I.O. Shakleina // Ukr. J. Phys. – 2010. – Vol. 55, № 3. – P. 326-334.
32. Boichuk V.I. Hole, impurity and exciton states in a spherical quantum dot / V.I. Boichuk, I.V. Bilynskyi, R.Ya. Leshko // Condensed Matter Physics. – 2010. – Vol. 13, № 1. – P. 13702(1)-13702(12).
33. Бойчук В.І. Спектр електрон-діркової пари у сферичній квантовій точці з зарядженою домішкою в її центрі / В.І. Бойчук, І.В. Білинський, Р.Я. Лешко // 4-а Міжнародна науково-технічна конференція „Сенсорна електроніка та мікросистемні технології“: Тези доповідей. 26 червня – 2 липня 2010 р. – Одеса, 2010. – С. 39.

34. Szafran B. Excitonic trions in single and double quantum dots / B. Szafran, B. Ste'be', J. Adamowski [and al.] // Phys. Rev. B. – 2002. – Vol. 66, № 16. – P. 165331-165340.
35. Holovatskyi V.A. Electron energy spectrum in a spherical *HgS/CdS* quantum dot with a smooth bounding potential / V.A. Holovatskyi // Ukr. J. Phys. – 2006. – Vol. 51, № 2. – P. 207-210.
36. Bryant G.W. Hydrogenic impurity states in quantum-well wires: Shape effects / G.W. Bryant // Phys. Rev. B. – 1985. – Vol. 31, № 12. – P. 7812-7812.
37. Lampert M.A. Mobile and Immobile Effective-Mass-Particle Complexes in Nonmetallic Solids / M.A Lampert // Phys. Rev. Lett. – 1958. – Vol. 1, № 12. – P. 450-453.
38. Kheng K.T. Observation of negatively charged excitons X- in semiconductor quantum wells / K. Kheng, R.T. Cox, Y.M. d'Aubigne [and al.] // Phys. Rev. Lett. – 1993. – Vol. 71, № 11. – P. 1752-1755.
39. "Concepts of Modern Physics" by Arthur Beiser (2003, New York).
40. "Introduction to Electrodynamics" by David J. Griffiths (1999, New Jersey).
41. "Solid State Physics" by Neil W. Ashcroft and N. David Mermin (1976, New York).
42. "Загальна фізика. Електродинаміка. Оптика. Квантова фізика" за ред. В. М. Родіонова (2007, Київ).
43. "Фізика: Підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів" за ред. Л. В. Фізика (2007, Київ).
44. "Фізика: Курс лекцій для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів" за ред. В. С. Білецького (2008, Київ).