МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет Фізико-математичний

Кафедра Математики та методики її навчання

(назва)

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри

_________ _________________ Реєстраційний № _______

(підпис) (прізвище, ініціали)

«___» _____________ 20___ р. «___» _____________ 20___ р.

РОЗВИТОК МАТЕМАТИЧНОЇ КУЛЬТУРИ СТАРШОКЛАСНИКІВ У НАВЧАННІ ТЕМИ «ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ» В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

Кваліфікаційна робота студента групи
МІм-17
(шифр групи)
ступінь вищої освіти магістр
(бакалавр, магістр)

спеціальності

014 Середня освіта (Математика)
014 Середня освіта (Інформатика)
(шифр і назва спеціальності)

Костюка Сурена Суреновича
(прізвище, ім'я, по батькові)

Керівник кандидат педагогічних наук, доцент

Армаш Тетяна Сергіївна
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище, ініціали)

Оцінка:
Національна шкала __________________
Шкала ECTS _____ Кількість балів ____
Голова ЕК _________ ________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
Члени ЕК _________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2022

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Костюк Сурен Суренович, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавав і не одержував недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело.

Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомлений. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Зміни, що відбуваються в економічному житті нашого суспільства, зачіпають всі сфери соціокультурної діяльності. Пошук засобів та методів навчання для розвитку математичної культури учнів є однією з найважливіших тенденцій освіти.

Однак для успішного розвитку математичної культури необхідно привести у відповідність мету та зміст математичного освітнього процесу, методи навчання. Математична освіта має гармонійно поєднуватися з усім процесом освіти загалом.

Закриття шкіл через коронавірус на карантин та широкомасштабне вторгнення російської федерації на територію України створило умови для неочікуваного глобального освітнього експерименту зі створення дистанційного навчання. Створення цифрової школи – один із пріоритетних напрямів освітньої політики, з 2010 р. уряд поступово вводить у освіту дистанційні технології. Виходячи з факту широкомасштабності та безпрецедентності впливу пандемії на освітню сферу, очевидно, що COVID-19 вплине на розвиток інновацій та цифровізацію освіти.

Мета дослідження: розробити методику розвитку математичної культури учнів старшої школи при вивченні тригонометричних функцій в курсі алгебри і початків аналізу. Відповідно до мети дослідження сформулюємо наступні **завдання**:

1) вивчити проблеми розвитку математичної культури, представлені в психолого-педагогічній та методичній літературі;

2) розробити методичні рекомендації щодо розвитку математичної культури учнів при розв’язанні завдань з теми «Тригонометричні функції»;

3) розробити методику навчання учнів теми «Тригонометричні функції» з використанням комп’ютерних технологій.

Об’єкт дослідження: навчання теми «Тригонометричні функції» у старшій школі.

Предмет дослідження: методичні особливості навчання учнів розв’язуванню завдань теми «Тригонометричні функції».

Методи дослідження, застосовані для реалізації поставлених завдань:

– теоретичні: вивчення і аналіз навчальної і методичної літератури з теми, узагальнення;

– емпіричні: вивчення педагогічного досвіду, спостереження, порівняння.

Практичне значення роботи полягає в тому, що її матеріали можуть бути використані вчителями математики, студентами-практикантами при підготовці до проведення уроків, учнями та студентами фізико-математичного факультету під час самостійної роботи.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів, загального висновку, списку використаних джерел, що містить 36 найменувань. У вступі підкреслена актуальність дослідження. У першому розділі розкрито теоретичні основи розвитку математичної культури старшокласників при вивчені тригонометричних функцій. У другому розділі описана методика розвитку математичної культури при вивченні різних видів тригонометричних рівнянь та нерівностей.

РОЗДІЛ 1.
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНОЇ КУЛЬТУРИ СТАРШОКЛАСНИКІВ ПРИ ВИВЧЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

1.1. Розвиток математичної культури учнів на уроках алгебри

В останні роки відбулися докорінні зміни у житті українського суспільства: реформування системи освіти, відтворення та зміцнення інтелектуального потенціалу нації, вихід вітчизняної науки і техніки, економіки та виробництва на світовий рівень, інтеграція у світову освітню систему, перехід до ринкових відносин та конкуренції будь-якої продукції, у тому числі й інтелектуальної. Всі зміни в системі суспільних відносин вимагають адекватних відповідей на завдання, що стоять перед освітою.

Математичну освіту розглядають як найважливішу складову фундаментальної підготовки школярів. Основним завданням навчання школярів математики є забезпечення рівня математичної культури, необхідного для повноцінної участі у повсякденному житті, продовження освіти та трудової діяльності. Саме тому значно зріс інтерес до проблеми формування математичної культури.

Ідея значущості математичної освіти наголошується у доповідях зарубіжних та вітчизняних дослідників. У статті «Зміст математичної освіти в контексті реалізації концепції математичної освіти та державного стандарту загальної освіти» наводиться фрагмент доповіді Джона Глена від Національної комісії з математики та природничих наук для 21 століття президенту Сполучених штатів під назвою «Поки не пізно» (Before It Is Too Late, John Glenn’s National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century): «Комісія переконана, що на зорі нового століття і тисячоліття в майбутньому добробут нашої держави залежить не тільки від того, наскільки ми добре навчаємо дітей загалом, а й від того, наскільки ми добре навчаємо природничих, фундаментальних наук та математики. Ці науки дають нам продукти, рівень життя, економічну та військову безпеку, які підтримуватимуть нас як удома, так і в усьому світі» [**Помилка! Джерело посилання не знайдено.**].

У нашій країні система поглядів на базові принципи, цілі, завдання та основні напрямки розвитку математичної освіти представлена в Концепції розвитку математичної освіти в Україні [**Помилка! Джерело посилання не знайдено.**]. У концепції виділено три групи проблем розвитку математичної освіти та науки, які гостро стоять у сучасній школі. Перша група включає низьку мотивацію школярів, яка пов'язана з суспільною недооцінкою значущості математичної освіти, перевантаженістю освітніх програм, а також оціночних та методичних матеріалів технічними елементами та застарілим змістом. До другої групи віднесено проблеми змістового характеру, де фактично відсутня відмінність у навчальних програмах, оціночних та методичних матеріалах, у вимогах проміжної та державної підсумкової атестації для різних груп учнів, що призводить до низької ефективності навчального процесу. Третя група включає брак кадрів, які можуть якісно викладати математику, враховуючи, розвиваючи та формуючи навчальні та життєві інтереси різних груп, що навчаються [23].

Насправді в ході вивчення математики та організації навчального процесу в учнів 5-8 класів виникають проблеми різного характеру. На всіх етапах вивчення курсу математики у школярів формується обчислювальна культура, та її основа закладається у перші п'ять років навчання. У цей період закладаються вміння усвідомлено використовувати закони математичних дій, а надалі отримані вміння та навички закріплюються та вдосконалюються. Тим самим усна робота на уроках у 5-8 класах як ніколи актуальна, але найчастіше, особливо в 5-6 класах, виконання найпростіших арифметичних операцій викликає у школярів труднощі, і виникає бажання скористатися калькулятором [5].

В останні роки питання необхідності спеціальної роботи вчителя над розвитком логічної складової мислення учнів набуває особливої гостроти.

Шкільні уроки, як і раніше, націлені на проходження програми, а не на розвиток мислення дітей, тим самим виникає проблема розвитку логічного мислення [42].

Під час вивчення геометрії спостерігаються тенденція зниження рівня освоєння геометричного матеріалу учнями. Аналіз діагностичних робіт з математики показує, що під час розв'язування завдань геометричного змісту виникають труднощі, пов'язані з недостатнім розвитком просторового мислення [11].

На відміну від геометрії під час уроків алгебри математичним поняттям приділяється менше уваги. У геометрії все будується на поняттях, тоді як у алгебрі вчителі намагаються уникати вивчення понять, вважаючи, що досить знати практичний матеріал [35].

Сказане дозволяє дійти невтішного висновку у тому, що проблеми освоєння математичної культури обумовлені: обчислювальною культурою, логічним мисленням, освоєнням геометричного матеріалу, формуванням математичних понять, вміннями моделювати, розвитком критичного мислення, прогалинами у математичних знаннях, нерозумінням суті математичних правил тощо.

У концепції розвитку математичної культури представлено низку завдань, спрямованих на подолання проблем у навчанні математики: модернізація змісту навчальних програм, забезпечення відсутності прогалин у базових знаннях для кожного учня, забезпечення загальнодоступних інформаційних ресурсів, підвищення якості роботи викладачів математики, підтримка лідерів математичної освіти, забезпечення обдарованих учнів умовами для розвитку та застосування високих математичних здібностей, популяризація математичних знань та математичної освіти.

Дані завдання необхідно реалізовувати в рамках державного освітнього стандарту, який встановлює вимоги до результатів освоєння учнями основної освітньої програми закладів середньої освіти: особистісним, метапредметним та предметним у галузі математики та інформатики [2].

У контексті організації самостійної роботи на уроці та поза уроком та підвищення мотивації учнів, найбільш важливими будуть наступні результати.

Особистісні:

- формування відповідального ставлення до вчення, готовності та здібності, що навчаються до саморозвитку та самоосвіти на основі мотивації до навчання та пізнання;

- формування комунікативної компетентності у спілкуванні та співпраці у процесі різних видів діяльності.

Метапредметні:

- вміння самостійно визначати цілі свого навчання, ставити та формулювати для себе нові завдання, розвивати мотиви та інтереси своєї пізнавальної діяльності;

- вміння самостійно планувати шляхи досягнення цілей, усвідомлено вибирати найефективніші способи розв’язання навчальних та пізнавальних завдань;

- уміння співвідносити свої дії з запланованими результатами, здійснювати контроль своєї діяльності;

- володіння основами самоконтролю, самооцінки, прийняття рішень та здійснення усвідомленого вибору у навчальній та пізнавальній діяльності і т.д. [5].

Аналізуючи досвід викладання курсу математики в 10-11 класах загальноосвітньої школи для досягнення предметних результатів, неважко відзначити, що при охопленні великого обсягу математичного матеріалу необхідно організувати діяльність учнів з формування та закріплення вмінь та навичок. Виникає необхідність збільшення частки самостійної роботи під час класної і позакласної роботи. У зв’язку з цим перед вчителем стоять завдання організації самостійної роботи та підбору завдань для тренувальних робіт, які повинні бути диференційовані зі зростаючим ступенем складності та включати різні варіанти. Під час самостійної роботи потрібна миттєва перевірка завдань, щоб учень міг розібрати свої помилки, повернутися до завдання та виправити їх.

Державний освітній стандарт основної загальної освіти включає використання інформаційно-комунікаційних технологій [7] Під інформаційно-комунікаційними технологіями мається на увазі набір методів та способів збирання, зберігання, обробки, подання та передачі інформації за допомогою комп’ютерних пристроїв. До них відносяться стаціонарні комп’ютери, ноутбуки, периферійні пристрої, планшети та інші з встановленим програмним забезпеченням та виходом до мережі Інтернет. На сьогоднішній день комп’ютерні пристрої доступні учням і є невід’ємною частиною життя, але незважаючи на це не в кожній сім’ї є стаціонарний комп’ютер або ноутбук, через досить високу вартість, або в багатодітній сім’ї один на всіх дітей. В останні роки відбувається тенденція використання замість стаціонарних комп’ютерів мобільних технологій планшетів і смартфонів, які не тільки не поступаються, а іноді навіть перевершують за технічними характеристиками пізніші електронні пристрої.

В даному випадку розглядається кілька проблем у освоєнні математичної культури учнями, одна з яких є – нестача у тренувальних завданнях з формування та закріплення математичних умінь та навичок, яку можна реалізувати в рамках самостійної роботи на уроці та поза уроком за допомогою мобільних додатків та сервісів, через їх інтеграцію у методи навчання. Мобільні додатки та послуги візьмуть частину алгоритмічних функцій вчителя під час перевірки великого масиву завдань, а навчання стає інтерактивним. Доцільно досліджувати дидактичні можливості застосування мобільних додатків і сервісів при вивченні курсу математики в старших класах закладів середньої освіти.

Тим не менш, розгляд математичної культури учнів як педагогічного феномена вимагає інтеграції знань різних наук: філософії, математики, культурології, психології, педагогіки та інших. Ймовірно, тому опис даного феномену на понятійному рівні викликає утруднення [8]

Формування та розвиток математичної культури можливо реалізувати у процесі навчання доведенням математичних тверджень. Сучасний систематичний шкільний курс математики, зокрема геометрії, має реальні можливості надати учням необхідні логічні знання, закласти фундамент логічної культури. У шкільному курсі математики можна виокремити такі складові математичної культури: алгоритмічну, логічну, графічну, культуру перетворень, культуру побудови креслення, обчислювальну культуру, математичну мову.

Доведення математичних тверджень – один із важливих засобів, що сприяє формуванню математичної культури, розвитку творчого та логічного мислення учнів. Термін «математичне доведення» передбачає доведення речень у межах будь-якої математичної теорії.

Необхідність підвищення ролі аргументації доведення у старших класах загальноосвітньої школи об’єктивно обумовлена особливостями пізнавальної діяльності старшокласників. Старшокласники віддають перевагу навчанню, у процесі якого необхідно не просто обґрунтувати факти, а й забезпечити їхню доказовість.

Теореми з доведеннями становлять ядро теорії з математики. Робота з теоремами передбачає виконання логіко-математичного аналізу, що включає: логічний аналіз (розкриття структури теореми) та математичний аналіз (математичний зміст виділених елементів структури).

За доведенням математичних тверджень учні привчаються до повноцінної аргументації, тобто не допускаються незаконні узагальнення, необґрунтовані аналогії, пред’являється вимога повноти диз’юнкції. Формується особливий стиль мислення: дотримання формально-логічної схеми міркувань, лаконічне вираження думок, чітка розчленованість ходу мислення, точність символіки [13].

Так, під час літературного огляду, була виявлена проблема відсутності чіткого термінологічного визначення, наукового обґрунтування окремих положень щодо формування математичної культури. Слід зазначити, що проблема формування математичної культури не є новою. Нині триває процес переусвідомлення існуючого та пошуку нового у цій справі.

Проблеми у трактуванні поняття «математична культура учнів» пов'язані зі складністю і неоднозначністю самого поняття культури та її застосуванням у математичному аспекті. У понятті «математичної культури» спостерігається інтеграція понять наук сильної (математики) та слабкої (філософії, педагогіки, психології, культурології, соціології та інших) гносеологічної версії. Саме подібна комбінація породжує різні теорії поняття «математична культура».

Розв'язання цієї проблеми перебуває у стадії розробки. Для повного усвідомлення сутності процесу формування математичної культури необхідно розглянути низку наукових завдань.

Методика формування математичної культури учнів за підтвердження математичних тверджень та її методичне забезпечення мають велике практичне значення щодо навчання учнів у старших класах.

1.2. Особливості вивчення тригонометричних виразів та їх перетворення, рівнянь та нерівностей

Розділ «Тригонометричні рівняння» займає один із основних розділів у шкільному курсі математики. Однією з особливостей змісту матеріалу даного розділу є те, що розв'язання тригонометричних рівнянь створює передумови для систематизації та узагальнення знань учнів як з розділу «Тригонометричні функції», так і за вивченим алгебраїчним матеріалом з курсу основної школи. Тому перед вчителем стоїть завдання виділення тих ідей матеріалу, що вивчається, які лежать в основі способів і прийомів розв'язання розглянутих завдань.

У навчально-методичній літературі є різні точки зору щодо класифікації тригонометричних рівнянь. Це пов'язано насамперед з тим, що тригонометричні рівняння є винятково різноманітними. Якщо за класифікації як основи дотримуватися виділення прийому чи способу розв'язання тригонометричного рівняння, можна виділити такі види:

1) рівняння, у процесі розв'язання яких використовуються властивості тригонометричних функцій;

2) найпростіші та зведені до них тригонометричні рівняння після виконання тотожних перетворень;

3) тригонометричні рівняння, що зводяться до алгебраїчних щодо будь-якої тригонометричної функції;

4) рівняння виду $a\,sinx + b\,cosx = c$, де $a, b, c \in R$, $a \neq 0, b \neq 0$ та зведені до них;

5) однорідні щодо синуса та косинуса одного і того ж аргументу тригонометричні рівняння;

6) тригонометричні рівняння, спосіб розв'язання яких зводиться до застосування штучних прийомів;

7) змішані тригонометричні рівняння.

Аналіз навчальної та методичної літератури показує, що види (2-5) тригонометричних рівнянь досить добре описані, зокрема у шкільних підручниках та посібниках, а першому та останнім двом видам рівнянь не приділяється належної уваги, більше того – у деяких підручниках та посібниках вони відсутні.

В основі розв'язання тригонометричних рівнянь першого виду лежать висновки про такі властивості тригонометричних функцій, як область визначення або область значень. Розв'язання зводиться до встановлення областей визначення або значень виразів, що задають ліву та праву частини рівняння. У деяких випадках, коли розв'язання тригонометричного рівняння зводиться лише до знаходження області значень лівої та правої частин рівняння, цей спосіб називають способом або прийомом оцінки.

Оскільки в шкільних підручниках та посібниках вони практично відсутні, то вчителю доцільно самому конструювати такі приклади, починаючи з найпростіших. Наприклад, запропонувати розв'язати рівняння усно, обґрунтовуючи відповідь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

а) $sin2x = \sqrt{2}$

б) $cos3x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

в) $cosx \cdot tgx = 1$

г) $cos^2x = 2$

У рівнянні (в) відповідь отримуємо з висновку області визначення функції тангенс: $cosx \cdot \frac{sinx}{cosx}$ звідси, $sinx = 1, cosx \neq 0$

Система немає розв'язків, отже, дане рівняння немає розв'язків.

Рівняння (а), (б), (г) є найпростішими і не мають розв'язків, тому що ліві частини є числами, що перевищують за модулем 1.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $sin7x - sinx = 3$

Спроба застосувати формулу перетворення різниці синусів призведе до громіздких перетворень, що є нераціональним.

Перенесемо *sinx* у праву частину і отримаємо $sin7x = sinx + 3$.

Оцінивши праву та ліву частини рівняння, отримаємо: $-1 \leq sin7x \leq 1, 2 \leq sinx + 3 \leq 4$, звідки робимо висновок – рівняння не має розв'язків.

Можна видозмінити рівняння так, щоб безліч значень лівої та правої частин рівняння мали перетин.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $sin7x - sinx = 2$

Розмірковуючи аналогічно, отримаємо $-1 \leq \sin 7x \leq 1,$

$1 \leq sin\, x + 2 \leq 3.$

Тоді рівність можлива, коли обидві частини рівняння дорівнюють 1 і розв'язок рівняння зводиться до розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} sin7x = 1 \\ sinx + 2 = 1 \end{cases}$$

При розв'язанні деяких рівнянь даного виду часто доводиться виконувати тотожні перетворення, після чого необхідно оцінити праву та ліву частини рівняння.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $sin^3x + sin^2x - 2sinx - 3 = 0$

Перетворимо рівняння до виду $sin^2x \cdot (sinx\ +1) - \ 2\,sinx\ -2 = 1$, звідки $sin^2x \cdot (sinx\ +1) - \ 2 \cdot (sinx\ +1) = 1$. Тоді $(sinx\ +1)(sin^2x - 2) = 1$.

Оцінимо ліву частину рівняння. Оскільки $sinx\ \geq -1$, то $sinx\ +1\ \geq\ 0$, оскільки $sin^2x\ \leq\ 1$, то $sin^2x\ -\ 2 <\ 0$.

Отже, $(sinx\ +1)(sin^2x - 2)\ \leq 0$. З іншого боку, у правій частині 1 > 0. Отже, рівняння не має розв’язків.

Приклад 5. Розв’язати рівняння

$$|5-6x| - 4sin\frac{\pi x}{3} - 4sin\frac{2\pi x}{3} + \frac{8tg\frac{\pi x}{3}}{1+tg^2\frac{\pi x}{3}} = 0$$

Перепишемо рівняння у вигляді:

$$|5-6x| = 4sin\frac{\pi x}{3} + 4sin\frac{2\pi x}{3} - \frac{8tg\frac{\pi x}{3}}{1+tg^2\frac{\pi x}{3}}$$

Перетворимо праву частину рівняння, враховуючи область допустимих значень, тобто $x \neq \frac{3}{2} + 3k$ де $k \in Z$.

Зробимо заміну, що $\frac{\pi x}{3} = t$, тоді $4sint + 4sin2t - \frac{8tgt}{1+tg^2t} = 4sint + 4sin2t - 8sint \cdot cost = 4sint + 4sin2t - 4sin2t = 4sint$

Тоді вихідне рівняння зводиться до більш простого вигляду:

$$|5-6x| = 4sin\frac{\pi x}{3}$$

Розв’яжемо рівняння графічно, побудувавши графіки функцій, що представляють ліву та праву частини рівняння (рис.1.1).

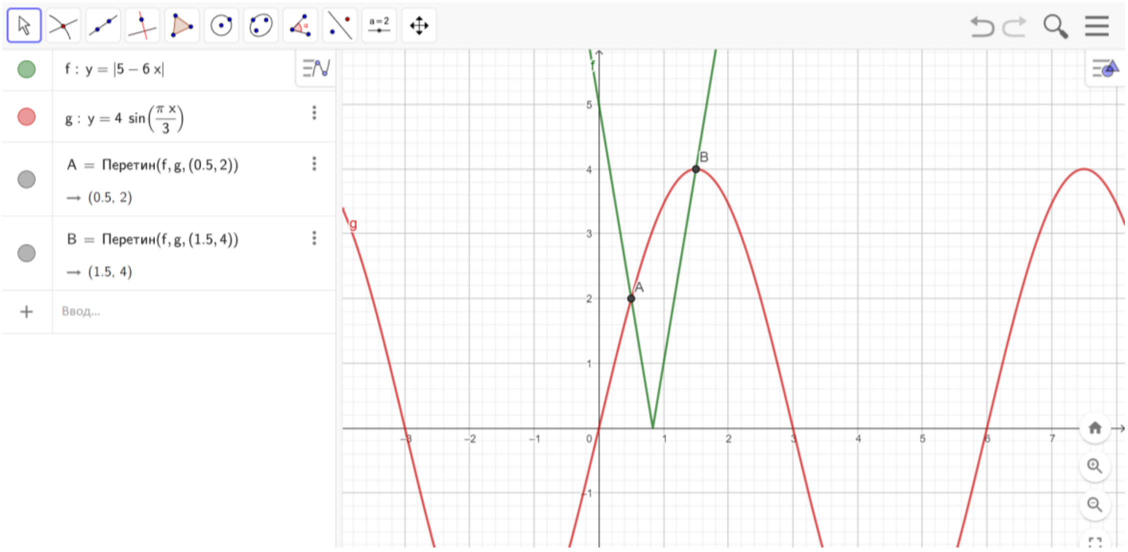


Рис. 1.1. Графік функції $|5-6x| = 4sin\frac{\pi x}{3}$

З рис.1.1. видно, що графіки перетинаються у двох точках із абсцисами $x = \frac{1}{2}$ і $x = \frac{3}{2}$, але значення $x = \frac{3}{2}$ не задовольняє області допустимих значень, отже, рівняння має єдиний корінь $x = \frac{1}{2}$.

Зупинимося на деяких штучних прийомах розв'язання тригонометричних рівнянь. Одним з таких прийомів є прийом розв'язання тригонометричних рівнянь, що базується на використанні зв'язку між виразами $sinx + cosx$ або $sinx - cosx$ і $sinx \cdot cosx$

Якщо $sinx + cosx = t$, то $sinx \cdot cosx = \frac{t^2-1}{2}$.

Аналогічно, якщо $sinx - cosx = t$, то $sinx \cdot cosx = \frac{t^2+1}{2}$

Тому при розв'язуванні тригонометричних рівнянь, в яких ліва і права частини містять вирази $sinx \pm cosx$ і $sinx \cdot cosx$, доцільно застосувати підстановку $sinx \cdot cosx = t$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $sin^3x - cos^3x = 1$.

Розкладаючи ліву частину рівняння на множники, отримаємо

$(sinx - cosx) \cdot (sin^2x + sinxcosx + cos^2x) = 1$ або $(sinx - cosx) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}sin2x\right) = 1$

Застосовуючи підстановку $sinx - cosx = t$, отримаємо $t(1 + \frac{1}{2}(1 - t^2))$=0 або $t^3 - 3t + 2 = 0$.

Отримане кубічне рівняння розв'яжемо, розклавши на множники за допомогою групування:

$t^3 - 2t - t + 2 = 0$ або $(t^3 - t) - (2t - 2) = 0$. Тоді $t(t^2 - 1) - 2(t - 1) = 0$ або $(t - 1)(t^2 + t - 2) = 0$, звідки $t = -2$ та $t = 1$.

Повертаючись до змінної t, приходимо до сукупності рівнянь

$sinx - cosx = 1$ або $sinx - cosx = -2$.

Оскільки $|sinx - cosx| \leq \sqrt{2}$, то друге з рівнянь розв'язків не має, а розв'язками першого рівняння є:

$$x = \pi + 2\pi k, k\epsilon Z\ i\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\ \epsilon\ Z$$

В основі розв'язання деяких тригонометричних рівнянь лежить так званий прийом згортання (багаторазове застосування формули синуса подвійного аргументу). Розглянемо деякі приклади.

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$cosx \cdot cos2x \cdot cos4x \cdot cos8x = \frac{1}{8}cos15x$$

Ліва частина рівняння є діленням косинусів, аргументи яких підпорядковуються наступній залежності: кожен наступний аргумент вдвічі більший за попередній. Його можна спростити, використовуючи прийом згортання.

У цьому прикладі він полягає у множенні на $8sinx$ і скористаємося кілька разів формулою синуса подвійного аргументу. Тоді ділення у лівій частині «згорнеться».

$8sinx \cdot cosx \cdot cos2x \cdot cos4x \cdot cos8x = sinx \cdot cos15x$

$4sin2x \cdot cos2x \cdot cos4x \cdot cos8x = \frac{1}{2}(sin16x - sin14x)$

$4sin4x \cdot cos4x \cdot cos8x = sin16x - sin14x$

$2sin8x \cdot cos8x = sin16x - sin14x$

$sin16x = sin16x - sin14x$

$sin14x = 0$

$14x = \pi n, n\ \epsilon\ Z$

$x = \frac{\pi n}{14}, n \in Z$

Приклад 8. Розв’язати рівняння

$$cos\frac{\pi x}{15} \cdot cos\frac{2\pi x}{15} \cdot cos\frac{4\pi x}{15} \cdot cos\frac{8\pi x}{15} = 0{,}0625$$

Застосовуючи вказаний вище прийом, отримаємо:

$$16sin\frac{\pi x}{15} \cdot cos\frac{\pi x}{15} \cdot cos\frac{2\pi x}{15} \cdot cos\frac{4\pi x}{15} \cdot cos\frac{8\pi x}{15} = sin\frac{\pi x}{15}$$

Тоді, $sin\frac{16\pi x}{15} = sin\frac{\pi x}{15}$. Останнє рівняння зводиться до сукупності найпростіших рівнянь $sin\frac{\pi x}{2} = 0$ або $cos\frac{17\pi x}{30} = 0$, які розв’язуються без проблем.

Отже, під час навчання учнів розв’язуванню тригонометричних рівнянь вчителю необхідно формувати різні прийоми.

1.3. Вивчення тригонометричних функцій під час дистанційного навчання

Сьогодні освіта відіграє важливу роль у житті сучасного суспільства. В даний час різні види та типи навчання досить актуальні. Щодня в житті людини приходить щось нове, що допомагає у повсякденному житті. У вік інформаційного суспільства складно знайти людину, яка б не знала і не чула про Інтернет.

У людства існують величезні можливості, яких раніше не було завдяки Інтернету. Так людина за допомогою Інтернету може спілкуватися з людьми, які знаходяться у різних куточках планети, передавати інформацію на відстані, робити покупки з дому та багато іншого. Також завдяки Інтернету з’являються нові освітні можливості: можна здобувати знання в Інтернеті, знаходити людей, які зможуть навчити чогось нового, здобути освіту за кордоном, не виходячи з дому.

Таким чином, Інтернет проник у всі сфери людського життя і сферу освіти не пройшов стороною. У сучасній школі поруч із традиційними формами, методами та засобами навчання активно використовуються сучасні педагогічні та інформаційні технології.

У сучасному світі актуальним та неминучим стає використання інформаційних технологій у навчальному процесі. На даний момент практично немає жодного навчального закладу, який не звертав увагу на можливість реалізації освітніх програм із застосуванням електронного навчання та дистанційних освітніх технологій. Інформатизація освітнього процесу призводить до необхідності створення електронних середовищ навчання.

Під електронним навчанням розуміється організація освітньої діяльності із застосуванням інформації, що містить у базах даних та інформації, яка використовується при реалізації освітніх програм, що забезпечують її обробку, інформаційних технологій, технічних засобів, а також інформаційно-телекомунікаційних мереж, що забезпечують передачу по лініях зв’язку зазначеної інформації, взаємодію учнів та педагогічних працівників. Під дистанційними освітніми технологіями розуміються освітні технології, реалізовані переважно із застосуванням інформаційно-телекомунікаційних мереж при опосередкованій (з відривом) взаємодії учнів і педагогічних працівників [7].

Сучасний рівень розвитку інформаційних та комунікаційних технологій закладає реальний фундамент для створення глобальної системи дистанційного навчання – однією з перспективних та ефективних систем підготовки учнів. Під дистанційною освітою розуміється система освітніх послуг, що надаються суспільству в країні та за кордоном за допомогою спеціалізованого інформаційно-освітнього середовища на будь-якій відстані від освітньої установи.

Дистанційна освіта та дистанційне навчання – нові явища у педагогіці. Тому важливо визначити зміст цих понять з погляду їх тлумачення.

Дистанційна освіта – це форма освіти, що забезпечує використання новітніх технічних засобів та інформаційних технологій для доставки навчальних матеріалів та інформації безпосередньо споживачеві незалежно від його розташування [15].

Отже, дистанційна освіта – це система, у якій реалізується процес дистанційного навчання та здійснюється індивідуумом досягнення та підтвердження освітнього цензу.

Існують різні трактування поняття «навчання» у педагогіці. Наприклад, Бондар А.А. [4] визначає навчання як цілеспрямований педагогічний процес організації та стимулювання активної навчально-пізнавальної діяльності учнів з оволодіння науковими та прикладними знаннями, навичками та вміннями, розвитку мислення, творчих здібностей, особистісних якостей, необхідних для здійснення професійної діяльності.

Навчання, на думку Дацук В.В. [8], являє собою процес між викладачами та учнями, що протікає в рамках педагогічної системи. Дистанційне навчання – це нова організація освітнього процесу, що базується на принципі самостійного навчання школярів.

Дистанційна освіта відповідає основним вимогам суспільства – це надання знань усім громадянам незалежно від місця їх проживання і безперервно продовжується протягом усього життя.

Таким чином, дистанційне навчання - це організація освітнього процесу, в основі якого знаходиться самостійне навчання школярів.

Дистанційне навчання – це така методика, коли вчитель і учні використовують для навчальної та освітньої діяльності інформаційні технології, будучи розділені один від іншого як у просторі, так і у часі [31]

Особливостями дистанційного навчання можуть бути характерні йому риси [3]:

1. Гнучкість. Учні у системі дистанційного навчання працюють у зручному собі режимі (за місцем, часом і темпом занять), регулярно не відвідують заняття.

2. Модульність. В основі дистанційного навчання знаходиться модульний принцип – можливість із набору непов’язаних навчальних курсів формувати навчальний план, який буде як індивідуальний, так і груповий.

3. Паралельність. Навчання може здійснюватись із безпосередньою професійною діяльністю або навчанням в іншому навчальному закладі.

4. Асинхронність. Навчання відбувається за зручним графіком та розкладом. Засобами асинхронної взаємодії між учителем та учнями є електронна пошта та комп'ютерна мережа.

5. Нова роль викладача. На вчителя покладається коригування дистанційного курсу, що викладається, модернізація навчального процесу, складання індивідуального навчального плану, консультування учнів, підвищувати творчу активність та кваліфікацію відповідно до нововведень та інновацій.

6. Охоплення. Одночасне використання одного навчального матеріалу декількома учнями одночасно. Взаємодія учнів один з одним та з викладачами через різні мережі зв'язку.

У будь-якій діяльності успішне досягнення цілей залежить від використаних у ній правильно вибраних методів діяльності. Метод діяльності – це спосіб здійснення діяльності, що веде до досягнення поставленої мети. Таким чином, правильно, підібраний метод приведе найкоротшим шляхом до задуманих результатів.

У педагогіці існує чимало трактувань поняття «метод навчання». Метод навчання – це спосіб взаємозалежної діяльності вчителя та учнів, спрямований на досягнення завдань навчального процесу. Метод навчання, інакше кажучи, механізм реалізації поставлених цілей та завдань, серцевина навчально-освітнього процесу [4].

Сутність методів навчання представляється у вигляді системи послідовних дій вчителя та учнів, орієнтованої на засвоєння змісту освіти, на розвиток здібностей учнів, на оволодіння засобами самоосвіти та самонавчання. Інакше кажучи, способи навчання – це методи педагогічно єдиної організації навчально-пізнавальної діяльності учнів.

Розглянемо методи дистанційного навчання [7]:

1. Метод навчання, що здійснюється у взаємозв’язку учня з учителем. Викладачем здійснюється створення або відбір освітніх ресурсів: аудіо- та відеоматеріали, підручники та навчальні посібники на друкованій та електронній основі.

2. Метод індивідуалізованого навчання. Навчання індивідуально використовуючи такі засоби, як телефон, голосова та електронна пошта, факс.

3. Метод викладу навчального матеріалу викладачем. Традиційні заняття доповнені електронними, які поширюються за допомогою комп’ютерних мереж.

4. Метод активної та ефективної взаємодії всіх учасників освітнього процесу. Використання дослідницьких та проблемних способів навчання. Вчитель створює проблему, координує учня, керує його діяльністю та розробляє план роботи.

5. Метод проектної діяльності. Учні самостійно планують організацію та контроль своєї діяльності, розробляють проекти, продукти, явища.

6. Метод проблемного навчання. Перед учнями ставиться проблемне завдання, на розв’язання якого необхідний теоретичний і практичний інтерес.

7. Дослідницький метод. Перед учнями постає актуальна мета, продумана структура, яку необхідно самостійно розвивати.

Для освоєння змісту освіти учні використовують різноманітні форми організації навчання. Формою організації навчання називається така конструкція процесу навчання, що є внутрішньою організацією змісту, яким є процес взаємодії вчителя з учнями під час роботи над навчальним матеріалом [17].

Основні форми дистанційного навчання [7]: дистанційні евристичні олімпіади; дистанційні проекти; дистанційні курси; наукові дослідження. Розглянуті форми допомагають розвивати творчі, дослідницькі, креативні здібності в учнів.

Форми та методи навчання безпосередньо пов’язані із засобами навчання. Засоби навчання відображають зміст навчання, контроль та управління навчально-пізнавальною діяльністю школярів [14].

Основні засоби дистанційного навчання [7]: книги (як у паперовій, так і в електронній формі), комп’ютерні навчальні системи, аудіо та відео матеріали, мережеві навчальні матеріали, лабораторні дистанційні практикуми, тренажери, електронні бібліотеки, дидактичні матеріали на основі експертних навчальних систем та на основі інформаційних систем.

Отже, форми, методи та засоби дистанційного навчання трохи відрізняються від традиційних, але вони також успішно впливають на навчально-пізнавальний та освітній процес.

На закінчення відзначимо, що дистанційне навчання дозволяє застосовувати такі інформаційні технології, які створюють процес освіти для учнів найбільш цікавим, пізнавальним та захоплюючим. У зв’язку з цим у учня підвищується прагнення до самоосвіти, працьовитості, творчої та інтелектуальної діяльності та вміння вдосконалювати навички роботи за комп’ютером.

Під дистанційним курсом розуміється навчально-методичний посібник для учнів, що є путівником з навчальної дисципліни. Також дистанційним курсом можна назвати покрокову інструкцію з освоєння будь-якої предметної галузі знань.

Будь-який курс повинен складатися із структурних елементів чи блоків [11]:

1. Мотиваційний блок. Мотивація важлива складова дистанційного курсу, яка має бути присутня протягом усього процесу навчання.

2. Інструктивний блок. Інструкції, методичні вказівки, розклад навчального процесу повинні мати конкретну інформацію, щоб учні могли покластися на неї в процесі навчання.

3. Інформаційний блок. Друковані підручник та навчальні посібники, електронні навчальні та методичні посібники, завдання для виконання

практичних робіт, список додаткової та основної літератури, словник чи глосарій. Методичні посібники повинні допомагати учням самостійно дати раду в навчальному матеріалі.

4. Контролюючий блок. Контроль знань учнів, можливо здійснення самоконтролю.

5. Комунікативний та консультативний блоки. Взаємодія всіх учасників курсу. Проведення консультацій, які можуть бути індивідуальними та груповими, відбуватиметься в реальному часі (чати, відеоконференції) або у відкладеному (через електронну пошту) в часі.

Дистанційні курси розробляються на основі програмних продуктів, які допомагають відобразити його зміст на різних Інтернет-платформах. Розробка курсів з педагогічного боку нагадує етап проектування. Проектування в педагогіці – значить, створення технології, використання якої призведе до досягнення поставленої мети та розвитку всіх учасників такої діяльності.

Педагогічне проектування – це попередня розробка найважливіших компонентів майбутньої діяльності учнів та педагогів. Виходить, що створення дистанційного курсу – це приклад проекту. Щоб сформулювати проект, необхідно спланувати свою діяльність. Мета планування – це організація взаємодії всіх складових елементів та забезпечення досягнення поставленої мети [18].

Вирізняють етапи педагогічного проектування, які можна віднести до етапів створення дистанційного курсу:

1. Моделювання. Створення моделі – розробка головної ідеї та шляхів її реалізації.

2. Проектування. Створення проекту – робота зі створення моделі доводиться до її застосування.

3. Конструювання. Конструювання – деталізація моделі, конкретизація та наближення до умов діяльності.

Дистанційний курс містить:

1) інструкцію навчального курсу, навчальний план;

2) навчальну інформацію у формі лекцій та практичних робіт;

3) методичні рекомендації практичних робіт;

4) інформаційні ресурси (навчальна та довідкова література);

5) контрольно-вимірювальні матеріали (тестові завдання).

Таким чином, розробка дистанційного курсу – процес складний та трудомісткий. Загалом дистанційне навчання є продуктивним способом взаємодії викладача та учнів.

Тема «Ров’язання тригонометричних функцій» є одним із найскладніших розділів тригонометрії, якій приділяється досить мало часу. У зв’язку з цим виникає необхідність у розробці даної теми з методичного боку таким чином, щоб учні відчували менше труднощів під час її вивчення.

Модель освітнього курсу, що містить знання з дисципліни математики, будується на основі програми з математики. Орієнтовна програма середньої (повної) загальної освіти з математики складена на основі компонента державного стандарту середньої (повної) загальної освіти. Програма конкретизує зміст предметних тем освітнього стандарту та дає зразковий розподіл навчального годинника за розділами курсу [20].

Програма виконує дві основні функції:

1. Інформаційно-методична функція дозволяє всім учасникам освітнього процесу отримати уявлення про цілі, зміст, загальну стратегію навчання, виховання та розвитку, учнів засобами даного навчального предмета.

2. Організаційно-плануюча функція передбачає виділення етапів навчання, структурування навчального матеріалу, визначення його кількісних та якісних характеристик на кожному з етапів, у тому числі для змістовного наповнення проміжної атестації учнів. Тема «Розв’язання тригонометричних функцій» входить у величезний спектр тем шкільного курсу математики, які містяться в такій змістовно – методичній лінії, як лінія рівнянь та нерівностей. Дана лінія розглядає питання формування понять рівнянь та нерівностей, загальних та спеціальних методів їх розв’язування, взаємозв’язку вивчення

рівнянь та нерівностей з числовою, функціональною та іншими лініями шкільної математики.

Існує три основні напрямки розгортання лінії функцій у шкільному курсі [27]:

1. Прикладна спрямованість лінії функцій розкривається головним чином щодо алгебраїчного методу розв'язання текстових задач. Цей метод широко застосовується у шкільній математиці, оскільки він пов'язаний із навчанням прийомам, що використовуються у додатках математики.

Прикладне значення функцій та її систем орієнтується у тому, що є основною частиною математичних засобів, а що у математичному моделюванні;

2. Теоретична та математична спрямованість лінії функцій розкривається у двох аспектах: перше, у вивченні найважливіших класів функцій та її систем і, друге, у вивченні узагальнених понять і методів, які стосуються цієї лінії загалом. Класи функцій пов'язані з найпростішими та одночасно найважливішими математичними моделями. Використання узагальнених понять і методів дозволяє логічно впорядкувати вивчення лінії загалом, оскільки вони описують те загальне, що у процесах і прийомах рішення, які стосуються окремих класів функцій, систем. У свою чергу, ці загальні поняття та методи спираються на основні логічні поняття: невідоме, рівність, рівносильність, логічне слідування, які також мають бути розкриті у лінії функцій.

Лінія функцій тісно пов'язана також із функціональною лінією. Один із найважливіших таких зв'язків – додаток методів, розроблюваних у лінії до вивчення функції. З іншого боку, функціональна лінія істотно впливає як утримання лінії функцій, і стиль її вивчення. Зокрема, функціональні уявлення є основою залучення графічної наочності до розв'язання та дослідження функцій та їх систем.

Також існує взаємозв'язок лінії функцій з алгоритмічною лінією. Вплив алгоритмічної лінії на лінію функцій полягає, насамперед, у можливості використання її понять для опису алгоритмів розв'язання функцій та систем різних класів.

Особливо слід зазначити зв'язок лінії з теорією тотожних перетворень. Остання набуває нового змісту і сенсу при вивченні рівносильних перетворень рівнянь і нерівностей. У свою чергу, володіння змістом лінії функцій дозволяє розширити список здійсненних перетворень.

Тема «Розв'язання тригонометричних функцій» є об'єктивно важкою для сприйняття та осмислення учнями 10-11 класів. Тому дуже важливо послідовно, від простого до складного, формувати розуміння алгоритму та виробляти стійку навичку розв'язання тригонометричних функцій.

На основі бесід з вчителями, аналізу методичної літератури [31] були виявлені такі причини труднощів учнів:

• велика кількість формул, які необхідно знати та пам'ятати;

• відсутність стандартних прийомів тотожних перетворень тригонометричних виразів;

• формування навичок тотожних перетворень тригонометричних виразів потребує спеціальної підготовки, що здійснюється у процесі розв'язання досить великої кількості завдань.

Отже, проблема засвоєння учнів тригонометричних функцій полягає над запам'ятовуванні різноманітних формул, а організації вчителем плану, яким необхідно рухатися їх розв'язання.

При розв'язанні тригонометричних функцій важливо розуміти суть питань «Що означає розв'язати тригонометричну функцію?». Щоб правильно розв'язати функцію, потрібно вміти проводити тотожні перетворення виразів, що входять до нього, вміти безпомилково обчислювати, знати які способи розв'язання функцій у яких випадках доцільніше застосовувати.

Очевидно, що функції, що вивчаються у старшій школі, освоюються учнями гірше, тому що на їх розгляд відводиться незначна кількість годин. А для їх розв'язання учневі необхідно володіти комплексом умінь, отриманих в основній школі та новими знаннями, пов'язаними з кожним із нових видів функцій. Такий обсяг вправ, що пропонується в підручниках з алгебри та початків аналізу для 10-11 класів [4], явно недостатній для формування вміння розв'язувати тригонометричні функції. Таким чином, за будь-якого підходу до вивчення тригонометрії, роль вивчення функцій незмірно велика, незалежно від місця їх вивчення.

Для розробки дистанційних курсів існують спеціальні програмні продукти та системи, що дозволяють представляти їх вміст до Інтернету. Такі засоби реально полегшують створення матеріалів для дистанційних курсів, але основні проблеми при проектуванні курсів виникають не з вибором відповідного інструментального засобу, а з написанням та підбором навчального матеріалу, проектуванням адекватних засобів перевірки та оцінки знань, продумуванням мотиваційної основи курсу. Питання вибору інструментарію тут є вторинним.

Процес розробки дистанційного курсу складається з методичного наповнення та дизайну курсу. У методичному заповненні основний етап – етап педагогічного проектування. Педагогічні проектування – це попередня розробка основних деталей майбутньої діяльності учнів та педагогів [30].

У дистанційному навчанні форма представлення навчальних матеріалів набуває особливого значення, тому тут проектування є актуальним, ніж у стандартному навчально-освітньому процесі. Конструювання курсу «Тригонометричні функції» проходило у кілька етапів:

1 етап. Визначення цільової аудиторії.

Пропонований курс «Тригонометричні функції» призначений для учнів, які зможуть застосовувати отримані знання та вміння для підготовки до державної підсумкової атестації. Користувачами курсу є учні старших класів загальноосвітньої школи.

2 етап. Формулювання цілей, завдань та результатів навчання. Цілі дистанційного курсу:

1. Формування базових знань у сфері тригонометрію у старшокласників.

2. Оволодіння прийомами та методами розв’язання тригонометричних функцій.

Завдання дистанційного курсу:

1. Розвиток у учнів алгоритмічного мислення.

2. Систематизація прийомів та методів розв’язання тригонометричних функцій.

3. Уміння формулювати основні поняття курсу та застосування їх на практиці.

В результаті освоєння курсу учні мають:

- знати основні визначення та поняття теми «Тригонометричні функції»;
- вміти розв’язувати тригонометричні функцій;
- володіти методами розв’язання тригонометричних функцій.

3 етап. Відбір змісту.

Навчальний матеріал вибирався за критеріями доступності та легкості у сприйнятті, а також мотивації учнів самостійно шукати відповіді на питання, для успішного засвоєння курсу та залученості.

4 етап. Навчально-тематичний план курсу.

Введення нових технологій вносить радикальні зміни у систему освіти: раніше її центром був учитель, а тепер – учень. Це дає можливість кожному учню навчатися у відповідному йому темпі і тому рівні, що відповідає його здібностям.

Досягнення необхідних результатів, розвиток мотивації вимагають застосування особистісно-орієнтованого підходу. Сучасний вчитель має становити індивідуальні навчальні програми, формувати кожному за дитини конкретну траєкторію. У разі застосування дистанційних освітніх технологій стає вимогою часу.

Вивчення предмета математики потребує особливого підходу. Особливо, якщо учень пропустив серію уроків з поважної причини чи має гуманітарний склад розуму, у разі йому буває недостатньо часу освоїти і зрозуміти ту чи іншу тему під час уроку. Швидко та результативно вирішити проблему математичної неуспішності допомагає дистанційне навчання.

Дистанційне навчання – це процес здобуття знань на відстані за допомогою сучасних технологій, головну роль серед яких сьогодні грає Інтернет. Саме з розвитком Інтернету пов'язують широке поширення дистанційної освіти. Дистанційні освітні технології дозволяють використовувати дистанційне навчання найчастіше поза класом, але іноді на самому уроці.

Вважається, що тригонометрія – це не лише один із найцікавіших розділів математики, а й дуже важкий. При спрощенні тригонометричних виразів необхідно не тільки добре знати тригонометричні формули, але й володіти навичками перетворення виразів алгебри: правилами розкриття дужок і укладення в дужки, формулами скороченого множення і т.п. Саме недостатнє знання формул алгебри часто призводить до нерозуміння подальшого матеріалу, що викликає труднощі у вивченні математики в цілому.

Вперше знайомство з тригонометричними функціями та її перетвореннями, починається у курсі геометрії щодо прямокутного трикутника. Поняття синуса, косинуса та тангенсу гострих кутів трикутника вводиться через відношення сторін цього трикутника. Далі в курсі алгебра узагальнюються визначення тригонометричних функцій довільного кута та вводиться поняття котангенс кута, а також доводяться основні тригонометричні формули. Уміння «виділяти» ці формули надалі допомагає у перетворенні тригонометричних виразів тригонометричних функцій.

Основні тригонометричні функції:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$$

використовуються для тотожних перетворень тригонометричних виразів.

Таке навчання дає учневі впевненість у собі, можливість подолання складності, сприяє сприятливої емоційно-психологічної атмосфері на уроках, розвиває логіку, пам’ять, мислення.

Форми дистанційного навчання різноманітні:

- уроки у режимі реального часу з використанням сервісів Zoom, Google Meet, Skype, WhatsApp, Viber, соціальних мереж;

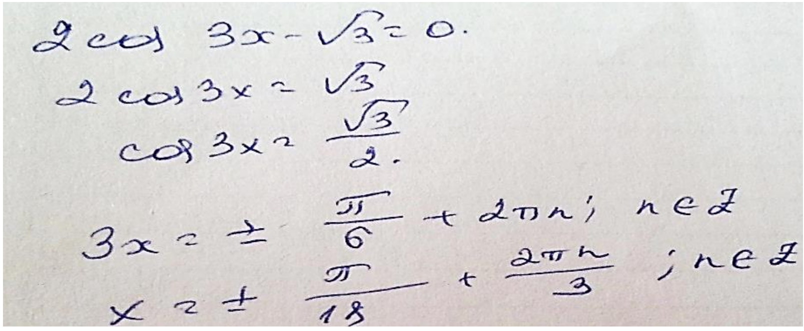


Рис. 1.2. Учні надсилають свої роботи на перевірку

- вивчення Інтернет-ресурсів, рекомендованих учителем;
- інформація на електронних носіях тощо.

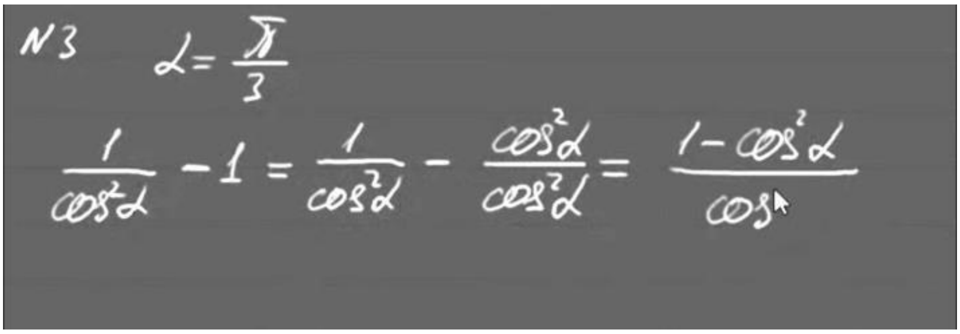


Рис. 1.3. Відео-уроки

Для контролю та перевірки можна виконати тест (створений наприклад, за допомогою сервісу Google Forms), як домашнє завдання або контроль знань на уроці. Після виконання тесту учень отримує оцінку та роботу над помилками, а в завантаженому файлі Excel з’являється список усіх учнів та їх результати.

Використання дистанційного навчання дозволяє створити умови для продуктивної творчої діяльності учнів. При цьому вчитель отримує можливість провести додаткові консультації з тими учнями, які мають труднощі з відвідуванням навчальних закладів. Йдеться про дітей із обмеженими можливостями здоров’я.

Одна з особливостей використання дистанційного навчання в тому, що учня завжди має можливість доопрацювати виконані індивідуальні завдання. Якщо він недостатньо добре його виконав, то вчитель може повернути на доопрацювання, вказавши на помилки та недоліки, які слід виправити.

Звичайно, дистанційне навчання має свої позитивні та негативні сторони. Позитивні сторони використання дистанційного навчання:

- індивідуальний темп навчання. Сам учень може встановити швидкість освоєння цієї теми в залежності від його особистих потреб та можливостей.
- миттєвий обмін текстовими повідомленнями, можна створювати чати з великою кількістю учасників освітнього процесу або відповідати на запитання індивідуально. Можна передавати невеликі файли у вигляді фотографій, текстових документів, презентацій (невеликого об'єму), скріншоту сторінки екрана.
- голосове спілкування, тобто. можна спілкуватися у реальному часі. Це може бути дуже зручно, коли потрібно пояснити учневі проблемний йому матеріал, провести корекцію у тому чи іншому питанні з математики, вказати на помилки та недоліки у створених завданнях.

Негативні сторони. Діти з неблагополучних сімей не мають доступу до Інтернету. Найголовнішим недоліком є відсутність живого спілкування, без якого неможливе формування повноцінної особистості.

Отже, перевагою дистанційного навчання є те, що місце проживання ролі не грає. Важливою умовою успішності дистанційного навчання є прийняття та підтримка батьками цього виду навчання. Необхідно, щоб батьки допомогли технічно організувати навчальний процес.

Висновки до I розділу

Оволодіння основами математичної культури допомагає кожному учневі розвивати навчально-пізнавальну мотивацію, мислення, творчі здібності; успішно оволодівати дійовими математичними знаннями та вміннями. Це сприяє застосуванню знань при вивченні інших предметів, в житті, продовженні освіти, можливості отримання або зміни професії, враховує вікові та індивідуальні особливості, напрями розвитку суспільства, його культури.

Шкільний курс алгебри та геометрії містить широкі можливості розвитку таких важливих компонентів математичної культури учнів як алгоритмічну, логічну, графічну, культуру перетворень, культуру побудови креслення, обчислювальну культуру, математичну мову.

Тригонометричні функції часто виступають математичними моделями реальних процесів, тому вивчення теми «Тригонометричні функції» має носити прикладний характер.

Вивчення математичної та навчально-методичної літератури дозволило нам систематизувати відомості про різні види тригонометричних рівнянь та нерівностей і способів їх розв’язання.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КУЛЬТУРИ СТАРШОКЛАСНИКІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

2.1. Методика формувань умінь і навичок при розв'язанні тригонометричних рівнянь

У процесі формування у школярів умінь розв'язувати тригонометричні рівняння рекомендується виділити три етапи:

1) підготовчий;

2) формування умінь розв'язувати найпростіші тригонометричні рівняння;

3) введення тригонометричних рівнянь інших видів та встановлення прийомів їх розв'язання.

Мета підготовчого етапу у тому, щоб, по-перше, розпочати формування в школярів вміння використовувати тригонометричне коло чи графік функції для розв'язання рівняння; по-друге, познайомити учнів із застосуванням властивостей тригонометричних функцій для розв'язання рівнянь виду $sin\, x = 1, cos\, x = 1, tgx = 0$ і тому подібне; по-третє, спеціально звернути увагу школярів на застосування різних прийомів перетворень виразів під час розв'язання тригонометричних рівнянь.

Реалізувати цей етап рекомендується у процесі систематизації знань школярів про властивості тригонометричних функцій. Основним засобом можуть бути завдання, які запропоновані учням і які виконуються або під керівництвом вчителя, або самостійно. Наведемо приклади таких завдань:

1) знайти всі числа відрізка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, для яких вірне $sin\, \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos\, \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ і тому подібне,

2) позначити на одиничному колі точки P_t, для яких відповідні значення t задовольняють рівність $sin\, t = \frac{1}{2}; tgt = -\sqrt{3}$ і тому подібне,

3) використовуючи графік функції $y = cos\, x$, вказати множину чисел, для яких вірно $cos\, \alpha = -\frac{1}{2}; cos\, \alpha = -\frac{8}{7}; cos\, \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

4) розв'язати рівняння:

а) $cos\,x = 1$,

б) $cos\,3\,x = cos^2\,x + sin^2\,x$,

в) $sin\,2\,x\,cos\,3\,x - cos\,2\,x\,sin\,3\,x = 1$,

г) $\frac{\sqrt{3}}{2}cos\,2\,x + \frac{1}{2}sin\,x = 1$,

д) $1 + cos\,2\,x - cos^2\,x = 1$,

5) розв'язати рівняння:

а) $sin\,x\,cos\,2\,x = 0$,

б) $(1 - sin\,x)tgx = 0$,

в) $2\,cos^2\,x - \frac{1}{2}sin\,4\,x = 1$.

Звернімо увагу на два останні завдання. У основі розв'язання запропонованих рівнянь, зазвичай, – застосування означень синуса, косинуса числа (чи таких властивостей тригонометричних функцій, як наявність коренів, наявність екстремумів у функцій синус і косинус). Виконання п'ятого завдання передбачає розв'язання сукупностей тригонометричних рівнянь виду, що розглядається (наприклад, останнє рівняння перетворюється наступним чином: $1 + cos\,2\,x - sin\,2\,x\,cos\,2\,x = 1,\quad cos\,2\,x(1 - sin\,2\,x) = 0$, тобто маємо сукупність рівнянь $cos\,2\,x = 0$ або $sin\,2\,x = 1$. Слід спеціально звернути увагу учнів на мету перетворень тригонометричних виразів при розв'язанні запропонованих рівнянь: заміна даного виразу, що тотожно йому рівним і залежить від однієї тригонометричної функції, або перетворення виразу у лінійні множники щодо тригонометричних функцій.

Реалізація другого етапу навчання школярів розв'язанню тригонометричних рівнянь, на якому відбувається формування умінь розв'язувати найпростіші рівняння, передбачає введення понять «арксинус числа», «арккосинус числа» і так далі, отримання загальних формул розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь, формування умінь ілюстрування рівнянь за допомогою графіка відповідної функції чи тригонометричного кола. В даний час поняття арксинусу, арккосинусу числа і так далі вводяться без звернення до функції, яка є зворотною стосовно функцій синус, косинус і так далі. Як основу запровадження зазначених понять використовується так звана теорема про корені. Зазначена теорема застосовується й у введення способу розв’язання найпростіших тригонометричних рівнянь. Це вимагає виділяти в процесі отримання формул, що задають безліч їх розв’язків, кілька пунктів:

1) розглядається проміжок, довжина якого дорівнює найменшому додатному періоду функції, представленої в лівій частині рівняння і на якому визначено поняття арксинусу, арккосинусу чи арктангенсу числа (залежно від запропонованого рівняння); якщо ця функція – синус чи косинус, то проміжок розбивається на два);

2) це рівняння розв’язується на кожному проміжку; основою розв’язання служить теорема про корінь, що конкретизується для відповідної тригонометричної функції;

3) на основі властивості періодичності аналізованої тригонометричної функції робиться висновок про те, що числа $\alpha + 2\pi k$ або $\alpha + \pi k, k \in Z$ (тут α – розв’язання рівняння, яке належить виділеним проміжкам) є розв’язками даного рівняння; цей висновок використовують для отримання формули розв’язків.

Рекомендуємо запропонувати учням інший спосіб отримання формули розв’язків найпростішого тригонометричного рівняння. Розкриємо його суть, звернувшись до розв’язання рівняння $\sin x = a$ ($a \in R$ і $|a| \leq 1$).

Так як $|a| \leq 1$, то дане рівняння обов’язково має розв’язок, одне з яких належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Позначимо його α. Тоді $sin\,\alpha = a$ ($\alpha = arcsin\,a$). З урахуванням прийнятих позначень дане рівняння приводимо до вигляду: $sin\,x - sin\,\alpha = 0$. Перетворимо ліву частину рівняння на добуток: $2\,sin\frac{x-\alpha}{2} \cdot cos\frac{x+\alpha}{2} = 0$; це дає можливість замінити дане рівняння рівносильною сукупністю найпростіших тригонометричних рівнянь. $sin\frac{x-\alpha}{2} = 0$ або $cos\frac{x+\alpha}{2} = 0$. Використовуючи властивість функцій синус та косинус (множина коренів), отримуємо: $\frac{x-\alpha}{2} = \pi k, k \in Z$ або $\frac{x+\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. Тепер лишилось виразити змінну x через $\alpha = arcsin\, a$ ($x = arcsin\, a + 2\pi k, k \in Z$ або $x = \pi - arcsin\, a + 2\pi n, n \in Z$) і записати загальну формулу для знаходження розв'язків рівняння.

Запропонуємо рекомендації, пов'язані з методикою організації діяльності учнів на другому етапі навчання розв'язання тригонометричних рівнянь. При цьому орієнтуватимемося на використання другого способу отримання загальної формули розв'язку найпростішого тригонометричного рівняння.

По-перше, мотивувати доцільність отримання загального прийому розв'язку найпростіших тригонометричних рівнянь можна, звернувшись, наприклад, до рівнянь $\sqrt{2}\, sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + cos\frac{x}{2}$, $1 + cos\, 8\, x = cos\, 4\, x$. Використовуючи знання та вміння, набуті на підготовчому етапі, учні приведуть запропоновані рівняння до виду $sin\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos\, 4\, x \cdot \left(cos\, 4\, x - \frac{1}{2}\right) = 0$, але це може ускладнити процес розв'язання при знаходженні множини розв'язків кожного з отриманих рівнянь. Вказані труднощі можна уникнути, якщо звернутися до відповідної ілюстрації (розв'язати рівняння графічно або за допомогою тригонометричного кола), але і в цьому випадку залишається відкритим питання: чи не можна отримати загальні формули для запису множин розв'язків тригонометричних рівнянь виду $\sin x = a$, $\cos x = a$ ($a \neq 0$ і $|a| \neq 1$), $tgx = a$ ($a \neq 0$), які дадуть можливість відразу фіксувати потрібні множини.

По-друге, слід звернути увагу учнів, що отримання загальних формул для запису розв'язків рівнянь зазначеного виду передбачає означення понять арксинуса, арккосинуса числа тощо. Вводити ці поняття має вчитель на уроці, демонструючи школярам застосування теореми про корені до кожної з тригонометричних функцій на певній множині. При цьому доцільно звернутися до графічного способу розв'язання задачі про знаходження розв'язків рівняння виду $sinx = a$, $cosx = a$, $tgx = a$ на проміжках $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $[0;\pi]$ і $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ відповідно (розв'язати таке завдання учні можуть самостійно).

По-третє, слід провести роботу з формування у учнів умінь знаходити значення виразів виду $arcsin\,a$, $arccos\,a$, $arctga$ при даних значеннях a. З цією метою корисно запропонувати учням завдання типу

1) Розрахувати: $arcsin\left(-\frac{1}{2}\right), arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), arctg(1), arccos\left(\frac{5}{4}\right)$.

2) Знайти значення виразу:

$cos\big(arctg(-1)\big)$, $sin\left(arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$, $sin\left(arccos\frac{3}{5}\right)$ і тому подібне.

Вчитель повинен звернути увагу учнів на спосіб виконання кожного із завдань, дати відповідний зразок. У першому випадку спосіб задається наступним приписом: потрібно знайти таке дійсне число α, яке задовольняє двом умовам (зазначимо ці умови, маючи на увазі приклад $arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$: це число належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; синус числа, яке шукають, рівний $-\frac{1}{2}$, тобто $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ і $sin\,\alpha = -\frac{1}{2}$. Спосіб виконання другого завдання полягає на застосуванні понять «арксинус числа», «арккосинус числа» і тригонометричних тотожностей. Особливу увагу слід звернути на виконання останнього прикладу цього завдання.

По-четверте, доцільно провести роботу з актуалізації в учнів прийомів перетворення суми (різниці) тригонометричних функцій на добуток, звернути увагу школярів на роль цих прийомів під час розв'язання тригонометричних рівнянь. Організувати таку роботу можна через самостійне виконання учнями запропонованих вчителем завдань, серед яких виділимо такі:

1) Розкласти на множники: $sin\,x - sin\,3\,x,\ tg5x + tg2x,\ sin\,x + cos\,3\,x$.

2) Розв'язати рівняння: $cos\,x - cos\,3\,x = 0,\ tg5x = tg2x,\ cos\,3\,x = sin\,x$. Виконання учнями наведених завдань слід зазначити висновком про той прийом, який лежить в основі розв'язання даних рівнянь: привести рівняння до виду $f(x) - g(x) = 0$, розкласти ліву частину на множники, скористатися умовою рівності нулю виразу та замінити рівняння рівносильною сукупністю

рівнянь, кожне із рівнянь сукупності розв'язати, використовуючи факт про безліч коренів відповідної тригонометричної функції.

По-п'яте, розпочати роботу з введення способу розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь слід з постановки питання: за яких значень параметра a рівняння виду $sinx = a$ ($cosx = a$, $tgx = a$, $a \in R$) має (не має) дійсного розв'язку та чому. Зауважимо, що в практиці навчання, школярам достатньо роз'яснити суть такого способу для одного із рівнянь, наприклад, $sinx = a$, $|a| \leq 1$. При цьому треба лише звернути увагу учнів на те, що ми замінимо число значенням функції синус деякого аргументу, то це рівняння зводиться до рівняння, спосіб розв'язання якого вже відомий. Тому, по суті, більшість роботи, пов'язаної з отриманням формули розв'язків рівняння, що розглядається, може бути виконана учнями самостійно. Вчитель виступає у ролі консультанта та допомагає школярам зробити узагальнення. Отримання формул, що задають безліч розв'язків рівнянь $cosx = a$, $tgx = a$, доцільно подати учням для самостійної роботи.

По-шосте, від учнів не рекомендується вимагати обов'язкової ілюстрації розв'язання кожного найпростішого тригонометричного рівняння за допомогою графіка або тригонометричного кола. Але звернути увагу на її доцільність слід (особливо на застосування кола), тому що в подальшому при розв'язанні тригонометричних нерівностей відповідна ілюстрація служить дуже зручним засобом фіксації множини розв'язків даної нерівності.

Подальше формування у учнів умінь розв'язувати найпростіші тригонометричні рівняння здійснюється переважно у процесі самостійного розв'язання школярами рівнянь, серед яких – рівняння, які зводяться до найпростіших чи його сукупностей після виконання перетворень тригонометричних виразів. До списку запропонованих для учнів рівнянь рекомендуємо включити такі, що зводяться до вигляду:

а) $sin\,5\,x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $cos\left(2x - \frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}$;

в) $tg(5+4x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $sin^2 x = \frac{1}{4}$;

г) $|cos\, 2\, x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Аналогічні завдання можуть бути засобом контролю над сформованістю в учнів умінь розв’язувати найпростіші тригонометричні рівняння.

У зв’язку з реалізацією третього етапу процесу формування у старшокласників умінь розв’язувати тригонометричні рівняння зробимо лише два зауваження.

По-перше, знайомство учнів із прийомами розв’язання тригонометричних рівнянь, які не є найпростішими, доцільно здійснювати за такою схемою: звернення до конкретного тригонометричного рівняння = типовому представнику певного виду → спільний пошук (вчитель-учні) прийому розв’язання → самостійне перенесення знайденого прийому на інші рівняння цього ж виду → узагальнення-висновок про характеристики рівнянь аналізованого виду та загальний прийом розв’язання цих рівнянь.

По-друге, щоб, з одного боку, систематизувати знання учнів про прийоми розв’язання тригонометричних рівнянь, а з іншого, продемонструвати достатню «умовність» віднесення ряду рівнянь до певного виду, рекомендуємо спеціально показати школярам можливість застосування різних прийомів розв’язання до одного і того ж рівняння. Для цього доцільно звернутися до складного рівняння, встановити всі ті прийоми, які можуть бути реалізовані в процесі його розв’язання, акцентувати увагу учнів на їх особливостях, виділити прийом, який у ситуації виявляється найбільш раціональним.

Складним тригонометричним рівнянням є наприклад, $sin\, x + 5 = 7\, cos\, x$.

Це рівняння може бути приведено:

1) до виду однорідного щодо $sin\frac{x}{2}$ і $cos\frac{x}{2}$

$$\left(6\, sin^2\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2} - cos^2\frac{x}{2} = 0\right)$$

2) до квадратного щодо $tg\frac{x}{2}$ за допомогою універсальної підстановки

$\left(6tg^2\frac{x}{2}+tg\frac{x}{2}-1=0\right)$;

3) до найпростішого тригонометричного вигляду

$cos\left(x+arccos\frac{7}{\sqrt{50}}\right)=\frac{5}{\sqrt{50}}$ після застосування введення допоміжної змінної.

Порівняння прийомів розв'язування рівняння у кожному із зазначених випадків свідчить, що найбільш раціональним є приведення даного рівняння до найпростішого тригонометричного, оскільки процес розв'язання складається з найменшої кількості операцій, виконання кожної з цих операцій не може порушити рівносильність вихідного та отриманого рівнянь, запис відповіді більш компактна.

На закінчення наведемо приклади тригонометричних рівнянь, які рекомендуємо запропонувати учням для самостійного розв'язання:

- I групу складають тригонометричні рівняння, спосіб розв'язання яких заснований на означенні та деяких властивостях тригонометричних функцій.

а) $cos\,x\cdot tgx=1$;

б) $cos\,x-sin\,x=3$;

в) $sin\,3\,x=2+sin\,x$;

г) $sin\,x=a+\frac{1}{a},\ a\neq 0$

- II групу складають найпростіші тригонометричні рівняння, спосіб розв'язання яких заснований на означенні тригонометричних функцій та поняттях арксинусу, арккосинусу та арктангенсу числа.

а) $2\,cos\frac{x+60^0}{2}+\sqrt{3=0}$;

б) $3tg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}=0$;

в) $3\,sin(x-3)=\sqrt{10}$;

г) $\frac{\pi}{7}-sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=0$;

- III група завдань об'єднує тригонометричні рівняння, розв'язання яких вимагатиме виконання тотожних перетворень тригонометричних та алгебраїчних виразів для приведення даного рівняння до одного з відомих видів.

а) $cos^2(x+\pi)+cos\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)+2=0$;

б) $sin\frac{z}{2}cos\frac{3z}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}sin\,2\,z=sin\frac{3z}{2}cos\frac{z}{2}$;

в) $\frac{3}{sin\,x+1}=2\,sin\,x-3$;

г) $2\,sin^2\,t+sin\,t\,cos\,t-3\,cos^2\,t=0$;

д) $sin^3\,x\,cos\,3\,x+cos^3\,x\,sin\,3\,x=0$.

2.2. Методика формувань математичної культури при розв’язанні тригонометричних нерівностей

У процесі формування у школярів умінь розв’язувати тригонометричні нерівності, також можна виділити 3 етапи.

1) підготовчий;

2) формування умінь розв’язувати найпростіші тригонометричні нерівності;

3) розв’язування тригонометричних нерівностей інших видів.

Мета підготовчого етапу полягає в тому, що необхідно сформувати у школярів уміння використовувати тригонометричне коло або графік для розв’язання нерівностей, а саме:

- вміння розв’язувати найпростіші нерівності виду $sin\ x > 1$, $sin\ x < -1$, $cos\ x > 1$, $cos\ x < -1$ за допомогою властивостей функцій синус та косинус;

- вміння складати подвійні нерівності для дуг числового кола чи дуг графіків функцій;

- вміння виконувати різні перетворення тригонометричних виразів.

Реалізувати цей етап рекомендується у процесі систематизації знань школярів про властивості тригонометричних функцій. Основним засобом можуть служити завдання, які запропоновані учням і виконані або під керівництвом вчителя, або самостійно, а також напрацьовані навички при розв’язанні тригонометричних рівнянь.

Наведемо приклади таких завдань:

1. Позначте на одиничному колі точку P_α, якщо

$\alpha = \frac{\pi}{6}, \quad \alpha = -\frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{3\pi}{2}, \quad \alpha = 2\pi, \quad \alpha = \frac{5\pi}{4}.$

2. У якій чверті координатної площини розташована точка P_α, якщо α дорівнює: $\frac{3\pi}{8}, -\frac{2\pi}{5}, \frac{7\pi}{4}, -2{,}3\pi, \frac{17\pi}{5}$

3. Позначте на тригонометричному колі точки P_α, якщо:

а) $sin\, \alpha = \frac{1}{2}$;

б) $cos\, \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $sin\, \alpha = -\frac{1}{2}$;

г) $cos\, \alpha = -1$;

г) $tg\alpha = -1$;

д) $tg\alpha = \frac{1}{2}$.

4. Наведіть вираз до тригонометричних функцій I чверті.

а) $cos\frac{7\pi}{3}$;

б) $sin\frac{9\pi}{4}$;

в) $cos\frac{4\pi}{5}$.

5. Дана дуга *MP*. *M* – середина I чверті, *P* – середина II чверті.

Обмежити значення змінної *t* для (скласти подвійну нерівність):

а) дуги *MP*;

б) дуги *PM*.

6. Записати подвійну нерівність для виділених ділянок графіка:

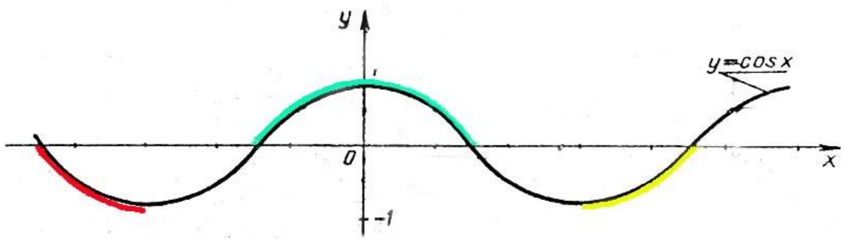


Рис. 2.1. Графік функції $y = cosx$

7. Розв’яжіть нерівності $sinx > 1, sinx < -1, cos\, x > 1, cosx < -1$

8. Перетворити вираз $sin5xcos4x - cos5xsin4x$

Звернімо увагу на завдання 5 і 6. Звичайно, саме воно лежить в основі розв’язання найпростішої тригонометричної нерівності.

На першому кроці складаємо «ядро» запису нерівності (це, власне, головне, чого слід навчити школярів); для заданої дуги MP отримаємо $\frac{\pi}{4} < \ t \ < \frac{3\pi}{4}$. На другому кроці складаємо загальний запис:

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k < t \ < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Якщо ж йдеться про дугу PM, то при записі «ядра» потрібно врахувати, що точка $A(0)$ лежить усередині дуги, а тому до початку дуги нам доводиться рухатися по колу. Отже, ядро аналітичного запису дуги PM має вигляд $-\frac{5\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$, а загальний запис має вигляд: $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z.$

При розв’язанні завдання 7 слід особливо звернути увагу на властивості тригонометричних функцій.

На другому етапі навчання розв’язання тригонометричних нерівностей можна запропонувати такі рекомендації, пов’язані з методикою організації діяльності учнів. При цьому будемо орієнтуватися на вміння, що вже є у учнів, працювати з тригонометричним колом або графіком, сформовані під час розв’язання найпростіших тригонометричних рівнянь.

По-перше, мотивувати доцільність отримання загального прийому розв’язання найпростіших тригонометричних нерівностей можна, звернувшись, наприклад, до нерівності виду $sin\,5\,x\,cos\,4\,x\ -\ cos\,5\,x\,sin\,4\,x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Використовуючи знання та вміння, набуті на підготовчому етапі, учні приведуть запропоновану нерівність до виду; $sin\,x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, проте можуть утруднитися у знаходженні множини розв’язків отриманої нерівності, оскільки тільки використовуючи властивості функції синуса розв’язати його неможливо. Це можна уникнути, якщо звернутися до відповідної ілюстрації (розв’язання рівняння графічно або за допомогою тригонометричного кола).

По-друге, вчитель повинен звернути увагу учнів на різні способи виконання завдання, дати відповідний зразок розв'язання нерівності як графічним способом, так і за допомогою тригонометричного кола.

Пропонуємо такі варіанти розв'язання нерівності $sin\,x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

1. Розв'язання нерівності за допомогою кола.

Розв'яжемо тригонометричну нерівність $sin\,x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

На першому занятті за розв'язанням тригонометричних нерівностей запропонуємо учням докладний алгоритм розв'язання, який у покроковому поданні вказує всі основні вміння, необхідні для розв'язання нерівності.

Крок 1. Накреслимо одиничне коло, відзначимо на осі ординат точку $\frac{\sqrt{3}}{2}$ і проведемо через неї пряму, паралельну осі абсцис. Ця пряма перетне одиничне коло у двох точках. Кожна з цих точок зображує числа, синус яких дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Крок 2. Ця пряма розділила коло на дві дуги. Виділимо ту, де зображуються числа, які мають синус більший, ніж $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Звичайно, ця дуга розташована вище проведеної прямої.

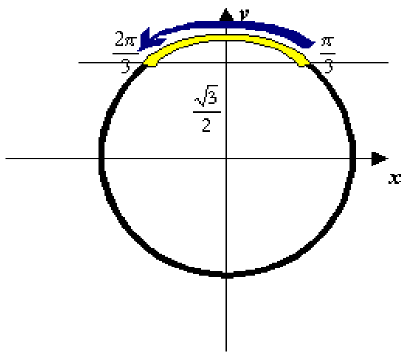


Рис. 2.2. Розв'язання нерівності з використанням кола

Крок 3. Виберемо один із кінців зазначеної дуги. Запишемо одне з чисел, яке зображується цією точкою одиничного кола $\frac{\pi}{3}$.

Крок 4. Для того щоб вибрати число, що відповідає другому кінцю виділеної дуги, «пройдемо» цією дугою з названого кінця до іншого. При цьому нагадаємо, що при русі проти годинникової стрілки числа, які ми проходитимемо, збільшуються (при русі в протилежному напрямку числа б зменшувалися). Запишемо число, яке зображується на одиничному колі другим кінцем зазначеної дуги $\frac{2\pi}{3}$.

Таким чином, ми бачимо, що нерівність $sin\,x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ задовольняють числа, котрим справедлива нерівність $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$. Ми розв'язали нерівність для чисел, що розташовані на одному періоді функції синус. Тому всі розв'язки нерівності можуть бути записані у вигляді $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

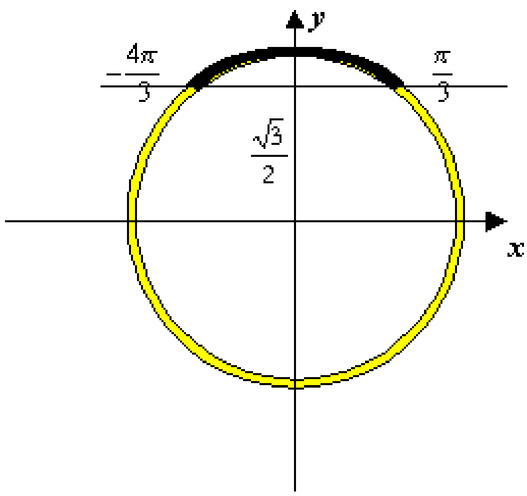


Рис. 2.3. Розв'язання нерівності

Звернути увагу учнів на те, що при розв'язанні нерівностей для функції косинус, пряму проводимо паралельно осі ординат.

1. Графічний спосіб розв'язання нерівності.

Будуємо графіки $y = sin\,x$ та $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, враховуючи що $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$

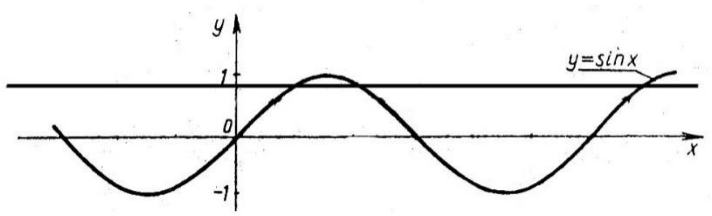


Рис. 2.4. Графік функції $y = sinx$ та $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Потім записуємо рівняння $sin\,x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ та його розв'язок $x_0 = \frac{\pi}{3}, x_1 = -\frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{7\pi}{3}$ яке було знайдене за допомогою формул $x_0 = arcsin\,a$, $x_1 = -arcsin\,a + \pi, x_2 = arcsin\,a + 2\pi$. (надаючи n значення 0; 1; 2, знаходимо три корені складеного рівняння). Значення x_0, x_1, x_2 є трьома послідовними абсцисами точок перетину графіків $y = sin\, x$ і $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Очевидно, що завжди на інтервалі $(x_0; x_1)$ виконується нерівність $sin\, x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, а на інтервалі $(x_1; x_2)$ – нерівність $sin\, x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Нас цікавить перший випадок, і тоді додавши до кінців цього проміжку число, кратне періоду синуса, отримаємо розв'язання нерівності $sin\, x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ у виді: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$;

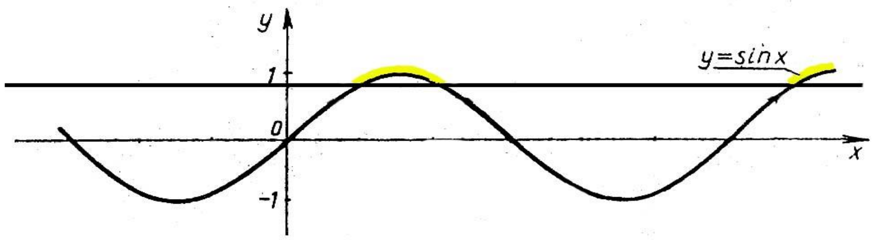


Рис. 2.5. Розв'язання нерівності $sin\, x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Щоб розв'язати нерівність $sin\, x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, треба скласти відповідне рівняння та розв'язати його. З отриманої формули знайти коріння x_0 і x_1, та записати відповідь нерівності у вигляді: $x_0 + 2\pi n < x < x_1 + 2\pi n, n \in Z$.

По-третє, тригонометрична нерівність має безліч коренів, що наочно підтверджується під час розв'язання її графічним способом.

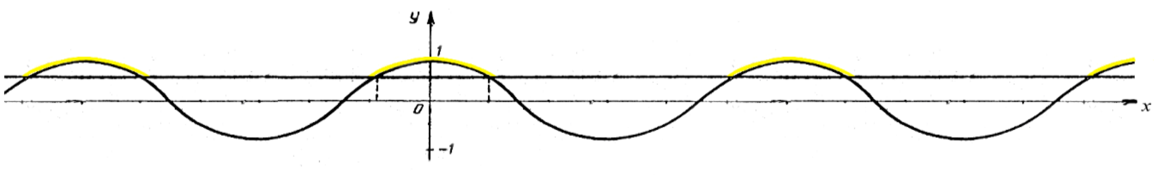


Рис. 2.6. Продовження розв'язання нерівності $sin\, x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Необхідно продемонструвати учням, що графік, який є розв'язком нерівності, повторюється через один і той же проміжок, що дорівнює періоду тригонометричної функції. Також можна розглянути аналогічну ілюстрацію для графіка функції синус.

По-четверте, доцільно провести роботу з актуалізації в учнів прийомів перетворення суми (різниці) тригонометричних функцій у добуток, звернути увагу школярів на роль цих прийомів під час розв'язання тригонометричних нерівностей.

Організувати таку роботу можна через самостійне виконання учнями запропонованих вчителем завдань, серед яких виділимо такі:

а) $tgx < \frac{tg\frac{\pi}{15}+tg\frac{4\pi}{15}}{1-tg\frac{\pi}{15}tg\frac{4\pi}{15}}$

б) $sin\,3\,x\,cos\,2\,x - cos\,3\,x\,sin\,2\,x > 1$

в) $cos5x\,cos\,3\,x + sin\,5\,x\,sin\,3\,x \leq 0$

г) $sin\,x \geq sin\frac{5\pi}{12}cos\frac{\pi}{12} + sin\frac{\pi}{12}cos\frac{5\pi}{12}$

По-п'яте, від учнів необхідно вимагати обов'язкової ілюстрації розв'язання кожної найпростішої тригонометричної нерівності за допомогою графіка або тригонометричного кола. Обов'язково слід звернути увагу на її доцільність, особливо на застосування кола, тому що при розв'язанні тригонометричних нерівностей відповідна ілюстрація є дуже зручним засобом фіксації множини розв'язків даної нерівності.

У зв'язку з реалізацією третього етапу процесу формування у школярів умінь розв'язувати тригонометричні нерівності зробимо лише два зауваження.

По-перше, знайомство учнів з прийомами розв'язання тригонометричних нерівностей, які не є найпростішими, доцільно здійснювати за такою схемою: звернення до конкретної тригонометричної нерівності → звернення до відповідного тригонометричного рівняння → спільний пошук (вчитель – учні) прийому розв'язання → самостійне перенесення знайденого прийому на інші нерівності цього виду.

По-друге, щоб систематизувати знання учнів, рекомендуємо спеціально підібрати такі нерівності розв'язання яких потребує різних перетворень, які можуть бути реалізовані в процесі розв'язання, акцентувати увагу учнів на їх особливостях. Можна запропонувати нерівності:

- $\boldsymbol{cos^2\,x + cos\,x \leq -sin^2\,x}$
- $\boldsymbol{tg\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) > \sqrt{3}}$
- $\boldsymbol{5 - 7\,sin\,x = 3\,cos^2\,x}$

Насамкінець наведемо приклади тригонометричних нерівностей, які рекомендуємо запропонувати учням для самостійного розв'язання:

1) $2\cos x + \sqrt{3} \leq 0$;

2) $\sin^2 x - 6\sin x \geq 0$;

3) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}$;

4) $\sin x > -\frac{1}{2}$;

5) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

6) $tgx > \sqrt{3}$;

7) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

8) $\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) \geq -\frac{1}{2}$;

9) $2\sin x + \sqrt{3} \leq 0$;

10) $\sqrt{2}\cos x - 1 < 0$;

11) $\sin x < \frac{1}{2}$;

12) $\cos 2x < -\frac{1}{2}$;

13) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{1}{2}$;

14) $tgx < 2$;

15) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$.

Отже, у темі «Тригонометричні нерівності» ми пропонуємо вивчати лише те, що дасть змогу школярам відчути саме специфіку тригонометричних нерівностей, розвиваючи математичну культуру.

2.3. Використання комп'ютерних технологій при розв'язанні тригонометричних рівнянь та нерівностей з поєднанням дистанційного навчання

Розвиток комп'ютерних технологій не стоїть на місці. Постійне збільшення потужностей систем, на розв'язання різноманітних професійних завдань, прискорює процес вивчення світу. У математиці комп'ютери займають перше місце, адже комп'ютер – це машина з обчисленнями, яка на базі свого процесора виробляє мільйони, а то й мільярди обчислень за короткий проміжок часу. Найпростіша обчислювальна машина – це калькулятор, який дозволяє прискорити процес обчислення для звичайної людини, наприклад бухгалтера.

Нашою метою є вивчення різноманітних ресурсів або програм, які дозволяють спростити нам процес обчислення та побудови для тригонометричних рівнянь та нерівностей. Одним з таких ресурсів є додаток DESMOS, який розміщується на сайті www.desmos.com

Сайт даного ресурсу цілком і повністю англійською, але їхній графічний калькулятор перекладено, що, безсумнівно, спрощує його використання. Також для зручності у ресурсу є мобільний додаток для смартфонів.

Інтерфейс калькулятора досить простий та зручний у використанні. Є вікно для написання формул, також є клавіатура, яка дозволяє набирати функцію, а серцем є поле для графіка (рис. 2.7).

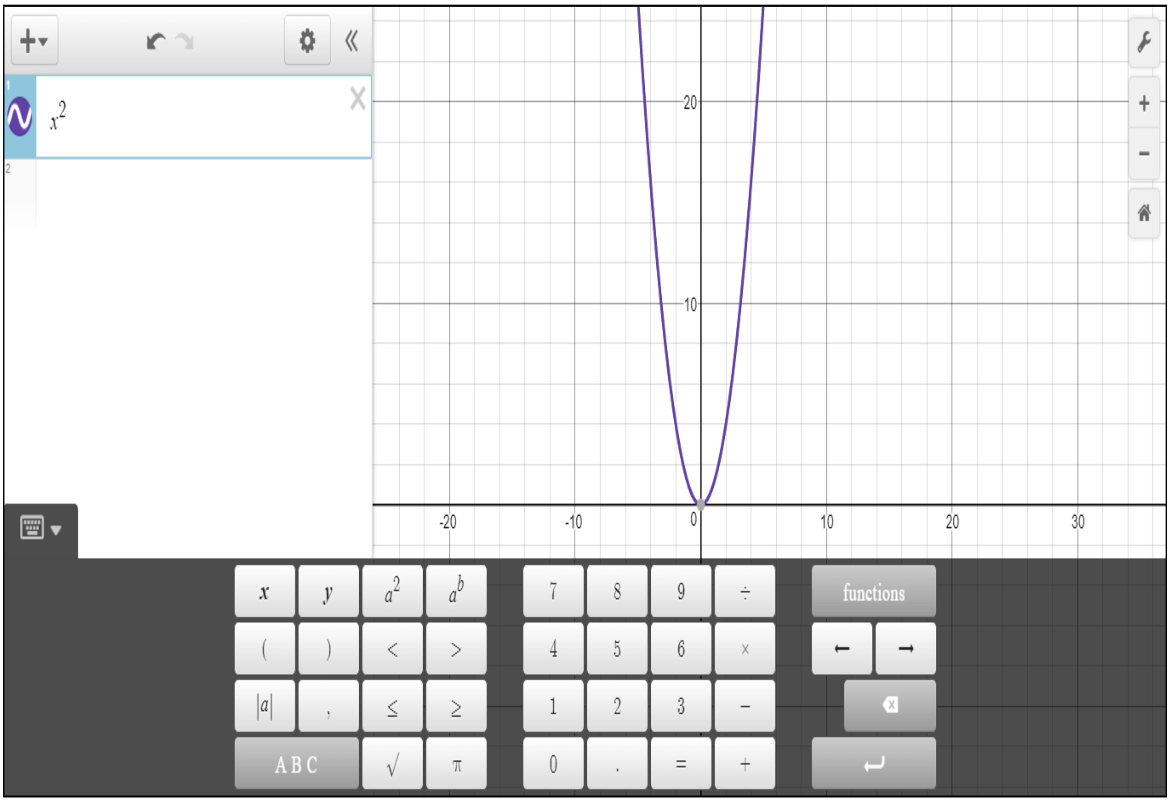


Рис. 2.7. Вид програми

Слід зазначити, що функцій може бути кілька. Таблиця зліва дозволяє додати додаткові функції. Щоб подивитись координати будь-якої точки до тисячних, потрібно лише натиснути на лінію графіка, і калькулятор у круглих дужках покаже потрібне значення.

Представлений вище ресурс допомагає розв’язувати рівняння і нерівності, оскільки, щоб побудувати графік, потрібно задати функцію.

Для наочності всі матеріали супроводжуватимуться зображеннями. Візьмемо систему, що складається з лінійних рівнянь, і знайдемо їх точку перетину:

$$\begin{cases} 4x - 5 = 0 \\ \dfrac{2}{5}y = x \end{cases}$$

Ділимо систему на два рівняння та записуємо в таблицю. Як тільки ви ввели всі дані до таблиці, у полі ПДСК відразу з’явилися дві прямі, що перетинаються. Якщо направити курсор миші на коло перетину, то можна побачити координати цієї точки до тисячних. На цьому прикладі це значення $(1{,}25;\ 3{,}125)$ (рис. 2.8).

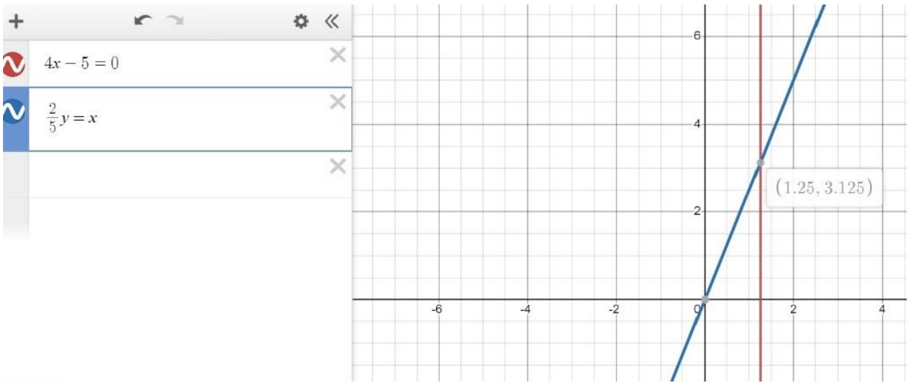


Рис. 2.8. Рівняння та точка перетину

Можливості цього ресурсу досить великі. Вони не обмежуються простими лінійними функціями. Програмний ресурс дозволяє записувати складні системи з рівнянь та нерівностей, тригонометричні та логарифмічні функції. Його використовують також до створення зображень з функцій. На головній сторінці сайту люди демонструють свої малюнки з графіків, редактор формул дозволяє завантажувати таблиці та зображення та робити нотатки та коригування.

Калькулятор має свої приклади красивих графіків і рівнянь до них. Наприклад, шаблон графіка Polar: Rose нагадує собою квітку. Для побудови графіка використовується тригонометрична нерівність, цей графік залежить від двох змінних і, які так само є в вікні редактора формул. Для зручності зміна значень цих змінних відбувається за допомогою повзунка, який можна пересувати, при них змінні набувають цілих чисел (рис. 2.9).

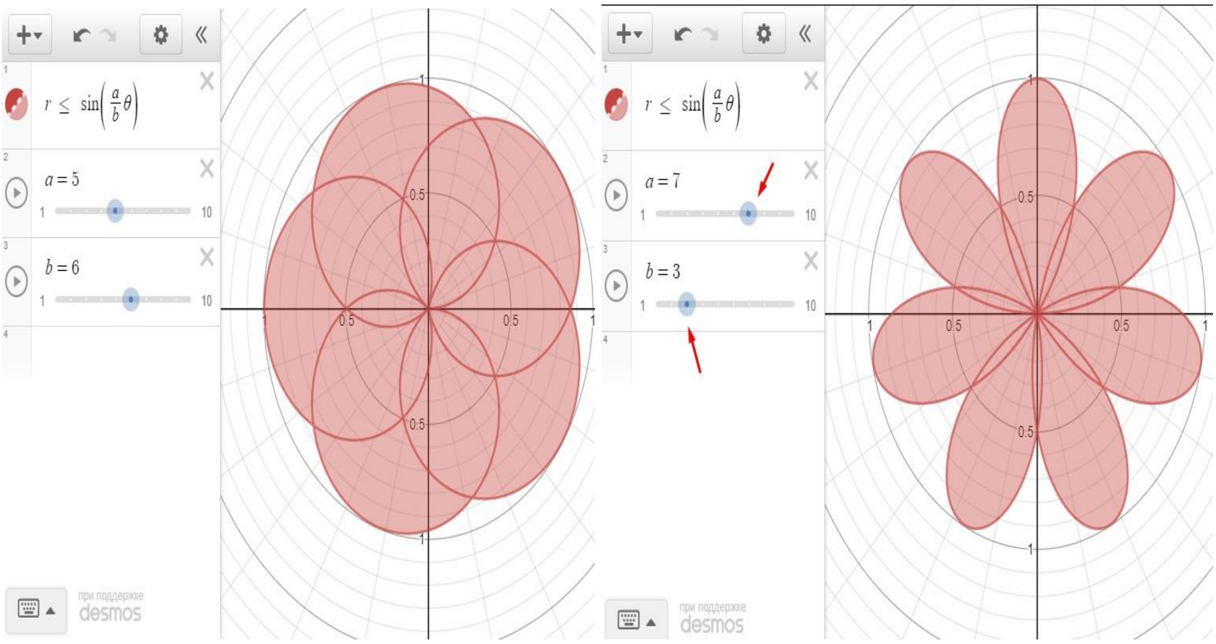


Рис. 2.9 Квітка графіка Polar: Rose

Програма дозволяє моделювати різні графіки функцій за заданими рівняннями, причому можна проводити зміни під час вивчення графіка або зміни значень змінних у ньому. Представлений додаток DESMOS формує графічну культуру учнів та дає можливість оперувати даними та графіками у графічній діяльності.

В даний час інформаційні технології проникають у всі сфери людського життя та сучасного суспільства: у сферу послуг, у процеси освіти та управління, у промислове виробництво, і навіть у такі галузі, як соціальні та гуманітарні [21]. При цьому їх впровадження породжує потребу зміни технології навчання безлічі дисциплін. І на сьогоднішній день, мова йде про абсолютно новітню концепцію викладання з власною своєрідною теоретико-методичною базою – комп'ютерною дидактикою. Поняття «комп'ютерна дидактика» вже починає зустрічатися в сучасних педагогічних науках. Під комп'ютерною дидактикою розуміємо область сучасної дидактики, яка досліджує закони, закономірності, принципи та засоби електронного навчання, які застосовуються з метою дистанційного набуття компетенцій [22]. У такій дидактиці педагог починає бути спеціалістом та аналітиком інформаційних ресурсів, розробником і конструктором напрямків, модулів, частин уроків із застосуванням інтерактивних мультимедійних інструментів. Тому повинен бути інформаційний ресурс, або інформаційна основа інноваційної комп’ютерної дидактики (ІКД), що містить як нові дидактичні технології, так і програмний інструментарій. Однією з таких інформаційних баз є інноваційний сайт «Сила знань» [24], що складається з багатьох галузей, що містять у собі тренувальні напрями згідно з різними науковими дисциплінами, а крім того, як традиційні тести, так і новітні навчальні технології.

Великий внесок у науку щодо розробки інноваційних дидактичних засобів зробили такі вчені як А.І. Архипова, С.П. Грушевський та інші. Авторами книги [6] було обґрунтовано можливість використовувати вказану технологію і для математики.

Технологія «Тест знань». Тут представлено традиційний тест, який складається з 10 питань, у кожному з яких по 4 варіанти відповіді. Деякі завдання тесту наплавлені на підготовку до ЗНО з математики, наприклад:

Яке рівняння має розв’язання $x = arcctg7 + \pi n, n\epsilon Z$

– $ctg(x) = 7$

– $tg(x) = 7$

– $ctg(x) = 14$

– $ctg(x) = -7$

2. Який окремий випадок рівняння $cos(x) = a$ має розв’язання $x = 2\pi k, k\epsilon Z$

– $cos(x) = 1$

– $cos(x) = 0$

– $cos(x) = 2$

– $cos(x) = -1$

Технологія «Формула знань». Технологія націлена на освоєння понять, означень, правил, які бувають надто великими. Суть технології в тому, щоб непросту словесну конструкцію (наприклад, означення) поділити на окремі нескладні речення, позначити їх символами, а далі з підтримкою «формули» сформувати їх вихідне означення. Технологія є величезним скупченням елементів, у тому числі з допомогою різних комбінацій проектуються тестові завдання. У технології «Формула знань» з елементів будуються висловлювання за готовими логічними формулами, в яких застосовуються всі логічні операції: кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквівалентність, заперечення. Далі, побудувавши складне висловлювання, оцінюється його істинність. У нас 14 простих висловлювань, з яких складаються складні висловлювання за готовими логічними формулами: $a \to n$, $a \vee d \vee e \vee f \to c$, $g \leftrightarrow h$, $i \leftrightarrow k$, $i \to \neg c$, $g \to c$, $a \to b$, $e \to n$, $p \leftrightarrow q$,$g \leftrightarrow q \wedge c$.

У цій технології застосовувалися завдання на знання означень та вміння розв'язувати тригонометричні рівняння та нерівності. Таким чином, за допомогою логічних операцій та зв'язку елементарні висловлювання збираються у цілісні правила та означення. Необхідно виділити, що технологія «Формула знань» добре підготовить до ЗНО тому що безпосередньо потрібні гарні знання логіки алгебри.

Технологія «Словник знань». За допомогою даної технології учень отримує можливість проконтролювати свої теоретичні знання з теми. Словник складається з 10 основних понять тригонометрії, означення та трактування яких необхідно знати учням, які тестуються, для того щоб пройти даний тест успішно: функція, графік функції, парна функція, непарна функція, синус, косинус, найменший додатній період.

Технологія «Кросворд знань». Ця технологія є традиційною забавою, яка полягає в розгадуванні слів згідно з означеннями. До кожного слова, а їх у даній технології 13, надається текстове поняття в описовій формі, що показує якесь слово, яке буде відповідати. Якщо ця відповідь є правильною, то вона автоматично вставляється в сітку кросворду і завдяки перетинам з іншими словами спрощує виявлення відповідей на інші означення. Подібна технологія не тільки спонукає інтерес учнів і дає можливість проконтролювати конкретні знання з теми, а й виконує функції, що розвивають, і підвищує читацьку та інформаційну компетентності учнів.

Технологія «Матриця знань». Дана технологія є матрицею 4*8. Необхідно вгорі прочитати комірку і встановити до якого рядка належить ця комірка, а також прочитати в комірці приклад і встановити стовпчик, до якого відноситься приклад. За правильних відповідей на полі виникає малюнок або портрет.

Технологія «Прогалини у знаннях». У цій технології записані номери відповідей завдань. У перевірочному аркуші необхідно натиснути на комірку з номером завдання та літерою відповіді.

Таким чином, описавши конструювання комплексу технологій інноваційної комп’ютерної дидактики на прикладі теми «Тригонометричні рівняння та нерівності», що складається з: «Формули знань», «Тест знань», «Кросворд знань», «Словник знань», «Матриця знань», «Прогалини у знаннях» буде доповнено комплекс ще такими технологіями як «У пошуках знань» та «Інтелектуальна лабільність», а також підключати школярів до роботи на сайті. Дуже важливо показати актуальність цієї теми для школярів.

У ході роботи можна побачити, що за допомогою даної технології учень отримує можливість освоїти поняття, означення, правила, які бувають дуже громіздкими та складно сконструйованими, а також перевірити свої теоретичні знання з представленої теми.

Комплекс технологій інноваційної комп’ютерної дидактики на тему «Тригонометричні рівняння та нерівності» може бути спрямований на підготовку до ЗНО з математики на профільному рівні і може допомогти розв’язувати завдання швидко та ефективно. Технології надають шанс поглянути на завдання з математики з іншого боку, щоб розв’язувати завдання та готуватися до здачі ЗНО можна з цікавістю та захопленням.

З основних розділів математики, що вивчаються в школі, як показує досвід, найбільш поверхово і багато в чому формально проводиться вивчення про кругові функції, які традиційно називають тригонометрією, а особливо це стосується теми «Тригонометричні нерівності». У зв’язку з цим у роботі розглянуто методику навчання розв’язання тригонометричних нерівностей, якій передувала робота з вивчення великої кількості завдань.

Знайомство школярів із тригонометричними нерівностями відбувається у десятому класі. Важливість цієї теми полягає в наступному: при її вивченні активізуються знання, отримані раніше; з даним видом завдань учні зіштовхнуться на ЗНО; вміння працювати з тригонометричними нерівностями може бути використане при розв’язанні складніших видів завдань. Через невелику кількість годин, відведених на вивчення цієї теми, передбачається проведення низки факультативних занять. Тому пропонується таке тематичне планування:

Таблиця 2.1

Тематичне планування

Вид заняття	Тема	Години
Урок	Розв’язання найпростіших тригонометричних нерівностей	3
Факультатив	Розв’язання систем та сукупностей тригонометричних нерівностей і нерівностей, що зводяться до них	1
Факультатив	Розв’язання тригонометричних нерівностей методом інтервалів	1

Тригонометричні нерівності сильно домінують над функціональним компонентом. Можна сміливо сказати, що це тема є синтезом знань, отриманих щодо тригонометричних рівнянь, тотожних перетворень і функцій. Тому важливим етапом навчання розв’язання тригонометричних нерівностей є організація цільового повторення перед вивченням теми, що може бути проведено у вигляді ігрових моментів (наприклад, конкурсів): означення тригонометричних та зворотних тригонометричних функцій, властивості тригонометричних функцій, тригонометричні тотожності, методи розв’язування рівнянь.

Безпосереднє пояснення способів розв’язання тригонометричних нерівностей проводиться на конкретних прикладах. При цьому необхідно використовувати проблемний виклад матеріалу, частково-пошуковий, пояснювально-ілюстративний, програмовані методи навчання. Також дуже важливе місце приділяється наочності, де містяться графіки тригонометричних функцій, зображення одиничного кола, інформація, пов’язана з властивостями функцій, формули. Після закінчення пояснення кожного способу розв’язання нерівностей необхідно робити узагальнення, прагнути до алгоритму, використання методу аналогій.

Контроль за знаннями учнів рекомендується проводити, застосовуючи різнорівневі тести чи таблиці, що дозволить з’ясувати, чи можуть здійснювати учні розумові операції, тобто порівнювати і узагальнювати конкретні факти, робити загальні висновки.

Велике значення приділяється розробці уроків і факультативних занять, причому уроки розробляються для класів з поглибленим вивченням математики.

В даний час настав такий період розвитку шкільної математики, коли реально та доцільно активне використання обчислювальної техніки на уроках алгебри у старших класах. Для практичного впровадження комп’ютерів у навчальний процес потрібно розробити такі комп’ютерні програмні комплекси, застосування яких дало б відчутні переваги в порівнянні з традиційними методами навчання.

Тема «Розв’язання тригонометричних нерівностей» є одним із найскладніших розділів тригонометрії, якій приділяється досить мало часу. У зв’язку з цим виникає необхідність у розробці даної теми з методичного боку таким чином, щоб учні мали менше труднощів при її вивченні під час дистанційного навчання.

Перед вивченням будь-якої теми шкільного курсу математики необхідно ознайомитися з тематичним плануванням навчального матеріалу. Вивчивши авторську програму [20], дійшли висновку, що автор має на увазі 3 години на тиждень вивчення курсу алгебри та початків аналізу у 10 класі. За плануванням навчального матеріалу на тему «Розв’язання тригонометричних рівнянь і нерівностей» відводиться 11 годин дистанційного навчання.

Модель освітнього курсу, що містить знання з дисципліни математики, будується на основі програми з математики.

Орієнтовна програма середньої (повної) загальної освіти з математики профільний рівень складена на основі компонента державного стандарту середньої (повної) загальної освіти на профільному рівні. Програма конкретизує зміст предметних тем освітнього стандарту та дає зразковий розподіл навчального годинника за розділами курсу [24].

Програма дистанційного навчання виконує дві основні функції:

1. Інформаційно-методична функція дозволяє всім учасникам освітнього процесу отримати уявлення про цілі, зміст, загальні стратегії навчання, виховання та розвитку, учнів засобами даного навчального предмета.

2. Організаційно-плануюча функція передбачає виділення етапів навчання, структурування навчального матеріалу, визначення його кількісних та якісних характеристик на кожному з етапів, у тому числі для змістовного наповнення проміжної атестації учнів.

Тема «Розв’язання тригонометричних рівнянь і нерівностей» входить у величезний спектр тем шкільного курсу математики, які у такій змістовно-методичній лінії, як лінія рівнянь і нерівностей.

Дана лінія розглядає питання формування понять рівняння та нерівності, загальних та спеціальних методів їх розв’язання, взаємозв’язку вивчення рівнянь та нерівностей з числовою, функціональною та іншими лініями шкільної математики.

Існує три основні напрямки розгортання лінії рівнянь та нерівностей у шкільному курсі [26]:

1. Прикладна спрямованість лінії рівнянь і нерівностей розкривається головним чином щодо алгебраїчного методу розв’язання текстових завдань. Цей метод широко застосовується у шкільній математиці, оскільки він пов’язаний із навчанням прийомам, що використовуються у додатках математики.

Прикладне значення рівнянь, нерівностей та систем орієнтується у тому, що є основною частиною математичних засобів у математичному моделюванні;

2. Теоретична та математична спрямованість лінії рівнянь та нерівностей розкривається у двох аспектах: перше, у вивченні найбільш важливих класів рівнянь, нерівностей та їх систем та, друге, у вивченні узагальнених понять та методів, що належать до цієї лінії в цілому. Класи рівнянь і нерівностей пов'язані з найпростішими і одночасно найбільш важливими комп'ютерними моделями. Використання узагальнених понять і методів дозволяє логічно впорядкувати вивчення лінії загалом, оскільки вони описують те загальне, що у процесах і прийомах розв'язання, які стосуються окремих класів рівнянь, нерівностей, систем. У свою чергу, ці загальні поняття та методи спираються на основні логічні поняття: невідоме, рівність, рівносильність, логічне слідування, які також мають бути розкриті у лінії рівнянь та нерівностей;

3. Для лінії рівнянь і нерівностей характерна спрямованість встановлення зв'язків з іншим змістом курсу математики. Ця лінія тісно пов'язана з числовою лінією. Основна ідея, реалізована у процесі встановлення взаємозв'язку цих ліній, – ця ідея послідовного розширення числової системи.

Лінія рівнянь та нерівностей тісно пов'язана також із функціональною лінією. Один із найважливіших таких зв'язків – додаток методів, розроблюваних у лінії рівнянь і нерівностей, до вивчення функції. З іншого боку, функціональна лінія істотно впливає як утримання лінії рівнянь і нерівностей, і стиль її вивчення. Зокрема, функціональні уявлення є основою залучення графічної наочності до розв'язання та дослідження рівнянь, нерівностей та їх систем.

Особливо слід зазначити зв'язок лінії з теорією тотожних перетворень. Остання набуває нового змісту і сенсу при вивченні рівносильних перетворень рівнянь і нерівностей. У свою чергу, володіння змістом лінії рівнянь та нерівностей дозволяє розширити список здійсненних перетворень.

Тема «Розв'язання тригонометричних рівнянь і нерівностей» є об'єктивно важкою для сприйняття та осмислення учнями 10 класів. Тому дуже важливо послідовно, від простого до складного, формувати розуміння алгоритму та виробляти стійку навичку розв’язання тригонометричних нерівностей.

На основі розмов з вчителями, аналізу методичної літератури [34] були виявлені такі причини труднощів учнів:

• велика кількість формул, які необхідно знати та пам’ятати;

• відсутність стандартних прийомів тотожних перетворень тригонометричних виразів;

• формування навичок тотожних перетворень тригонометричних виразів потребує спеціальної підготовки, що здійснюється у процесі розв’язання досить великої кількості завдань.

Отже, проблема засвоєння учнів тригонометричних рівнянь і нерівностей полягає не в запам’ятовуванні різноманітних формул, а організації вчителем плану, яким необхідно рухатися до їх розв’язання.

При розв’язанні тригонометричних рівнянь та нерівностей важливо розуміти суть питань «Що означає розв’язати тригонометричне рівняння? Що означає розв’язати тригонометричну нерівність?». Щоб правильно розв’язати рівняння чи нерівність, потрібно вміти проводити тотожні перетворення виразів, що входять до нього, вміти безпомилково обчислювати, знати які способи розв’язання рівнянь або нерівностей у яких випадках доцільніше застосовувати.

Очевидно, що рівняння та нерівності, що вивчаються у старшій школі, засвоюються учнями гірше, тому що на їх розгляд приділяється незначна кількість годин. А для їх розв’язання учневі необхідно володіти комплексом умінь, отриманих в основній школі та новими знаннями, пов’язаними з кожним із нових видів рівнянь чи нерівностей. Такий обсяг вправ, який пропонується у підручниках з алгебри для 10 класів [25], явно недостатній для формування вміння розв’язувати тригонометричні рівняння та нерівності.

Однією з програм, яку можна використовувати під час вивчення тригонометричних функцій є «Geogebra». Основна ідея використання GeoGebra у повсякденному викладанні та навчанні полягає в тому, щоб надати учням різні математичні навички і заохочувати їх займатися математикою.

Основними особливостями Geogebra є [4]:

• безкоштовний для некомерційного використання;

• мультиплатформенність;

• чіткий і зрозумілий графічний користувач інтерфейс;

• велика база готових прикладів;

• технічна документація багатьма мовами;

• маркування об’єктів слідує математичному синтаксису;

• можливість збереження проекту в декількох форматах;

• працює з LaTeX;

• усі об’єкти в GeoGebra є динамічними;

• можливість опублікувати роботу на сайті через javascript;

• програма перекладена на багато іноземних мов.

Усе це робить GeoGebra чудовим інструментом для викладання та вивчення математики. Оскільки всі об’єкти в GeoGebra є динамічними, учні можуть бачити як графік функції змінюється, при зміні параметрів. У геометричних побудовах такі об’єкти, як точки, перерізи, кола тощо можна пересувати як завгодно. Крім того, всі побудови можна виконувати за допомогою техніки «вказівка і клацання» або вводити їх через командний рядок.

GeoGebra має чіткий та інтуїтивно зрозумілий інтерфейс, розділений на частини, що відповідають алгебрі та геометрії (рис. 2.10).

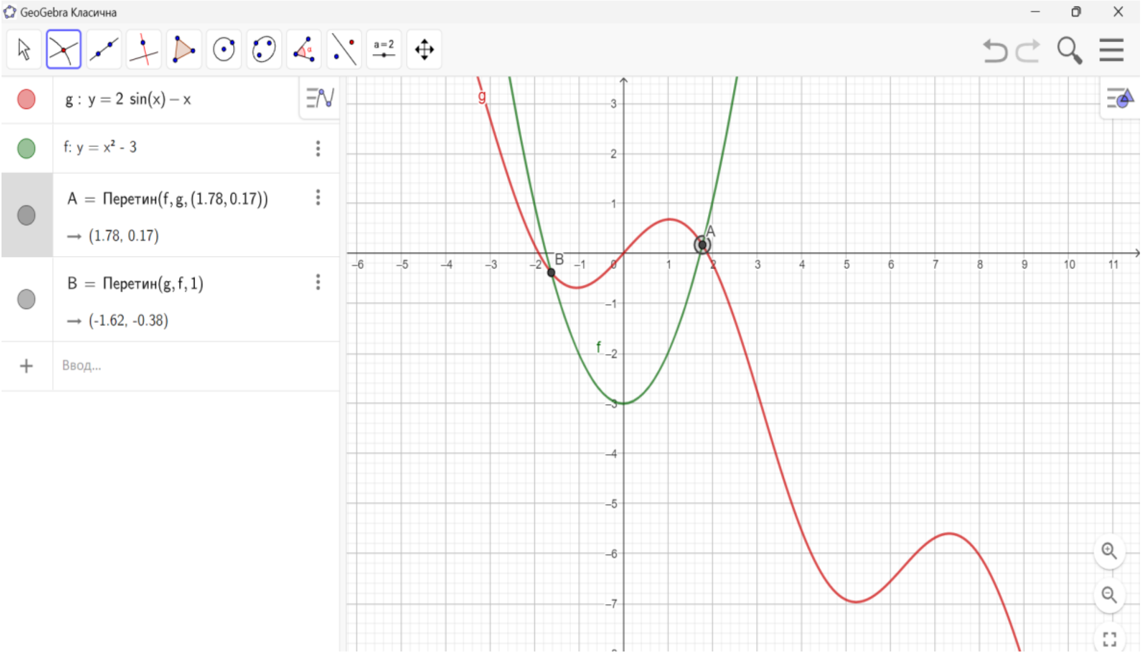


Рис. 2.10. Графік функції $y = 2sinx - x$ та $y = x^2 - 3$ у «Geogebra»

Залежно від потреби його можна вільно змінювати. Програмне забезпечення має кілька виглядів [4]:

• алгебраїчний;

• геометричний;

• електронної таблиці;

• CAS (система комп’ютерної алгебри);

• перегляд протоколу;

• командний рядок.

Всі ці вигляди пов’язані між собою, тобто це, якщо ми вводимо об’єкт в однин з перелічених вище виглядів, воно з’явиться в інших у відповідному вигляді. Наприклад, якщо ми помістимо функцію $y = sinx$, її графік з’явиться в геометричному вигляді. Всі зміни параметрів функції відразу ж відображаються на графіку.

Крім основних можливостей GeoGebra як зображення фігур, графіків функцій також можна обчислювати або вимірювати кути, знаходити точки перетину графіків функцій, шукати довжини, максимум і мінімум функції, похідні та інтеграли.

Очевидно, GeoGebra можна використовувати як розширений калькулятор. Він може працювати на векторах, матрицях і навіть розв’язати систему лінійних рівнянь.

Висновки до II розділу

У процесі формування умінь і навичок учнів розв’язувати тригонометричні рівняння та нерівності рекомендується виділити такі етапи: I) підготовчий; II) формування умінь розв’язувати найпростіші тригонометричні рівняння та нерівності; III) введення тригонометричних рівнянь та нерівностей інших видів та встановлення прийомів їх розв’язання.

Існує велика кількість програмних засобів, які можуть бути використані при вивченні теми «Тригонометричні функції». Одним з завдань вчителя полягає в тому, щоб розробити ефективну та доцільну методику їх використання у навчальному процесі.

ВИСНОВКИ

Сучасна шкільна математична освіта покликана виховати грамотну та компетентну особистість, здатну реалізувати свій потенціал у виробничій та творчій діяльності у дорослому житті, зокрема розвиток у школярів вміння створювати та використовувати нескладні математичні моделі (навички математичного моделювання). Проведене дослідження дає змогу зробити наступні висновки.

Процес розвитку математичної культури школярів дуже складний та різноплановий. Проведене вивчення і аналіз навчальної та методичної літератури показав, що єдиного трактування щодо даного поняття та його складових не існує.

До поняття математичної культури відноситимемо: алгоритмічну, логічну, графічну, культуру перетворень, культуру побудови креслення, обчислювальну культуру, математичну мову. Ключовим завданням математичної освіти є навчити учня інтерпретувати будь-яку подію чи ситуацію мовою символів та розв'язання її математичними засобами.

Основними тригонометричними рівняннями, що вивчаються в курсі алгебри і початків аналізу середньої школи є рівняння, у процесі розв'язання яких використовуються властивості тригонометричних функцій, найпростіші та зведені до них тригонометричні рівняння після виконання тотожних перетворень, тригонометричні рівняння, що зводяться до алгебраїчних щодо будь-якої тригонометричної функції, рівняння виду $a\, sinx + b\, cosx = c$, де a, b, c є R, $a \neq 0, b \neq 0$ та зведені до них, однорідні щодо синуса та косинуса одного і того ж аргументу, тригонометричні рівняння, спосіб розв'язання яких зводиться до застосування штучних прийомів, таким чином розвиваючи математичну культуру учнів.

Окрема увага в роботі приділялась методичним особливостям застосування програмних засобів «DESMOS» та «Geogebra» при вивченні теми «Тригонометричні функції». Оскільки їх використання забезпечує комп'ютерну підтримку уроків алгебри при розв’язуванні арифметичних, фізичних і інших задач У процесі такого роду діяльності учень використовує теоретичні знання для розв’язання практичних задач.

Всі завдання дослідження виконано.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Асмолов А. Г., Семенов А. Л., Уваров А. Ю. Українська школа та нові інформаційні технології: погляд у наступне десятиліття. Київ : НексПрінт, 2010. 95 с.

2. Бабанський Ю. К. Педагогіка. 2-ге вид. Київ : Просвітництво, 2018. 479 с.

3. Боброва І. І. Методика використання електронних навчально-методичних комплексів як спосіб початку дистанційного навчання. *Інформатика та освіта.* 2019. № 2. С. 15–17.

4. Бондар А. А. Застосування інтерактивного середовища GeoGebra при вирішенні геометричних завдань на побудову. Навчання в сучасній школі: збірник методичних розробок з природничих, математичних і технологічних дисциплін. Київ : Київський державний педагогічний університет, 2019. С. 11–18.

5. Бормотова А. Г., Мамалига Р. Ф. З досвіду проектування уроку математики з використанням моделі «перевернутий клас». *Актуальні питання викладання математики, інформатики та інформаційних технологій: міжвузівська збірка наукових праць.* Київ : Київський державний педагогічний університет, 2018. С. 188–195.

6. Виготський Л. С. Психологія. Київ : ЕКСМО-Прес, 2020. 1008 с.

7. Галіцина І. М., Половнікова Н. Л. Мобільне навчання як нова технологія в освіті. *Освітні технології та суспільство.* 2011. № 1. С. 241–252.

8. Дацук В. В., Ковшова Ю. М. Контроль засвоєння знань учнями під час навчання математики із застосуванням Google-класу та електронного освітнього ресурсу Matific. *Молодь XXI століття: освіта, наука, інновації:* матеріали VII Всеукраїнської студентської науково-практичної конференції з міжнародною участю (м. Дніпро, 19-21 грудня 2018 р.). Дніпро: НДПУ, 2018. С. 191–192.

9. Збірник завдань з математики для вступників до вузів. Навчальний

посібник / за ред. М. І. Сканаві. Київ : Вища школа, 2012.

10. Ізотова А. С. Проблема розвитку просторового мислення учнів 5-6 класів. Актуальні проблеми математичної освіти у школі та вузі. Київ : Національний педагогічний університет, 2015. С. 91–93.

11. Кара-Сал Н. М. Використання властивостей функцій під час вирішення математичних завдань. Навчально-методичний посібник з практикуму вирішення математичних завдань. Київ : ТДІПК та ПКК Уряду України, 2017.

12. Каспарінський П. О. Організація використання аудіовізуальних записів синхронних занять у процесі дистанційного навчання. *XXI Всеукраїнська наукова конференція «Науковий сервіс у мережі Інтернет».* URL: https://keldysh.ua/abrau/2019/proc.pdf

13. Коробова Т. М., Овчарова Л. А. Застосування Web 2.0 технологій під час уроків математики для формування основних математичних компетенцій за умов ДОС. *Школа як платформа для успішної соціалізації учнів лише на рівні професійної освіти :* матеріали IV регіональної науково-практичної (очно-заочної) конференції. Одеса: Одеський державний технічний університет, 2017. С. 333–337.

14. Лапчик М. П. Інформатика та технологія: компоненти педагогічної освіти. *Інформатика та освіта.* 2012. № 1. С. 3–6.

15. Лернер І. Я. Дидактичні засади методів навчання. Дніпро : Педагогіка, 2011. 186 с.

16. Ліпатнікова І. Г. Зміст математичної освіти в контексті реалізації концепції математичної освіти державного стандарту загальної освіти. *Актуальні питання викладання математики, інформатики та інформаційних технологій.* 2015. № 1. С. 5–13.

17. Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням алгебри : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів Харків : Гімназія, 2016. 384 с.

18. Мітіна А. С. Проблема формування обчислювальної культури учнів за

допомогою організації усної роботи на уроках математики у 5 класах. *Актуальні питання математичної освіти: стан, проблеми та перспективи розвитку.* Суми : Сумський державний педагогічний університет, 2019. С. 82–87.

19. Новіков М. Ю. Навчання інформатиці у школі з урахуванням мобільних технологій : автореф. дис. канд. пед. наук : 13.00.04. Запоріжжя, 2019. 24 с.

20. Новіков М. Ю. Навчання інформатиці у школі на основі мобільних технологій : дис. канд. пед. наук : 13.00.04. Запоріжжя, 2019. 166 с.

21. Петрова В. І. Використання сервісу Google Диска у створенні методичних матеріалів під час роботи з обдарованими дітьми з математики. *Вчитель створює націю.* Збірник матеріалів IV міжнародної науково-практичної конференції. Харків : Харків. державний педагогічний університет, 2019. С. 400–403.

22. Підкасистий П. І. Самостійна пізнавальна діяльність школярів у навчанні. Вінниця : Педагогіка, 2010. 240 с.

23. Позднякова Н. В., Колесникова О. І. Дидактичний потенціал мобільних технологій у навчанні школярів математики на щаблі основної загальної освіти. *Психолого-педагогічний журнал ГАУДЕАМУС.* 2019. № 3(41). С. 19–26.

24. Пруднікова Т. А., Покакалова Т. А. Зарубіжний досвід застосування інформаційно-комунікаційних технологій для підвищення навчальної мотивації. *Сучасна зарубіжна психологія.* 2019. № 2. С. 67–82.

25. Роганова І. І. Використання мобільних додатків на уроках алгебри у 8 класі. *Міжнародний журнал гуманітарних та природничих наук.* 2018. № 11-1. С. 103–106.

26. Семенова І. М., Слєпухін А. В. Визначення та дидактична конструкція методики використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі. *Педагогічна освіта в Україні.* 2012. № 2. С. 184–189.

27. Семенова І. М., Слєпухін А. В. Класифікація та проектування методів

навчання з використанням інформаційно-комунікаційних технологій. *Освіта та наука.* 2013. № 5(104). С. 95 113.

28. Старіченко Б. Є. Педагогічний підхід до оцінки результативності використання ІКТ у вирішенні освітніх завдань. *Педагогічна освіта в Україні.* 2018. № 8. С. 153–162.

29. Старіченко Б. Є. Професійний стандарт та ІКТ-компетенції педагога. *Педагогічна освіта в Україні.* 2015. № 7. С. 6-15.

30. Старостіна А. Є., Винокурова С. З. Формування математичних понять у шкільному курсі математики (на прикладі вивчення теми «Квадратні рівняння»). *Навчання та виховання: методика та практика 2016/2017 навчального року.* Київ : Товариство з обмеженою відповідальністю «Центр розвитку наукового співробітництва», 2017. С. 99–103.

31. Стратегія розвитку інформаційного суспільства в Україні, схвалена розпорядженням Кабінету Міністрів України від 15 травня 2013 р. № 386-р. URL: https://www.kmu.gov.ua/npas/246420577

32. Тализіна Н. Ф. Управління процесом засвоєння знань. Миколаїв, 2014. 234 с.

33. Теорія та методика навчання математики: загальна методика: навч. посібник / за ред. Є. А. Суховієнко, З. П. Самігулліна, С. А. Севостьянова, Є. М. Ерентраут. Тернопіль : Вид-во «Освіта», 2010. 65 с.

34. Терешковець Н. В. Використання можливостей месенджерів у досягненні нової якості освіти. *Методист.* 2018. № 10. С. 28–31.

35. Фабрикантова Є. В., Полянська Є. Є. Сучасні інформаційні технології освіти: навчальний посібник для студентів педагогічних вузів. Одеса : Вид-во ОДПУ, 2017. 84 с.

36. Чиріна О. В. Особливості розвитку логічного мислення учнів 5-6 класів. *Науково-методичний журнал «Концепт».* 2015. Т. 10. С. 66–70.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Тема: Властивості тригонометричних функцій

Мета:

- *Навчальна:* розглянути поняття області визначення та множини значень тригонометричних функцій; навчити знаходити знаки тригонометричних функцій довільних кутів; розглянути поняття парності тригонометричних функцій; розглянути поняття періодичності тригонометричних функцій, поняття найменшого періоду.
- *Розвиваюча:* розвивати вміння знаходити область визначення та множину значень тригонометричних функцій; розвивати вміння знаходити значення тригонометричних функцій використовуючи парність і непарність тригонометричних функцій; розвивати вміння знаходити значення тригонометричних функцій кутів, що більші за $360°$, використовуючи періодичність тригонометричних функцій;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

- Які ви знаєте тригонометричні функції?

$y = \sin x$ Синус

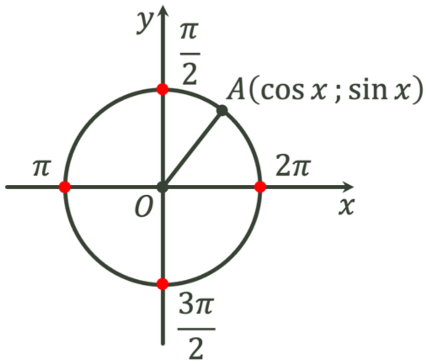
$y = \cos x$ Косинус

$y = \operatorname{tg} x$ Тангенс

$y = \operatorname{ctg} x$ Котангенс

III. Вивчення нового матеріалу

Область визначення



- Якого значення може набувати кут «x» у радіанах?

  (Будь-якого)

$\boldsymbol{D(\sin x) = R}$ $\boldsymbol{D(\cos x) = R}$

- В яких точках значення $\operatorname{tg} x$ не існує?

$$\boldsymbol{D(\operatorname{tg} x):\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}}$$

- В яких точках значення $\operatorname{ctg} x$ не існує?

$$\boldsymbol{D(\operatorname{ctg} x):\ x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Приклад **Знайдіть область визначення функції $\boldsymbol{y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$**

$$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$\boldsymbol{D(y)}$:

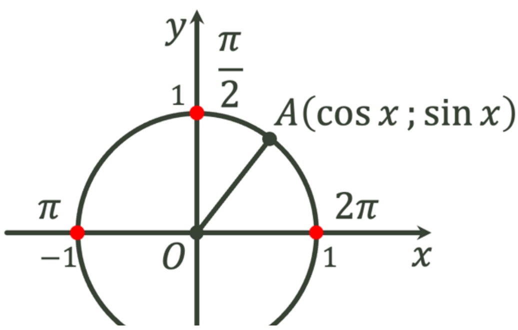
$$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\ |\cdot 2$$

$$\boldsymbol{x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}}$$

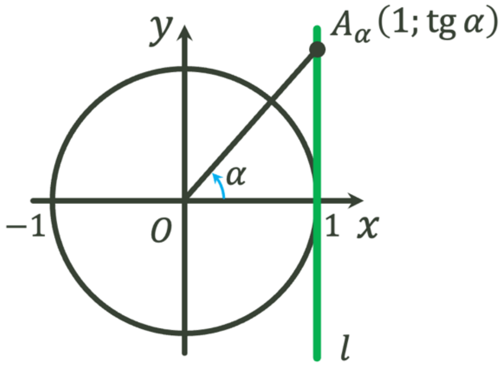
(Множина всіх дійсних чисел, крім чисел $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$)

Множина значень

- Яким може бути найбільше і найменше значення синуса і косинуса?

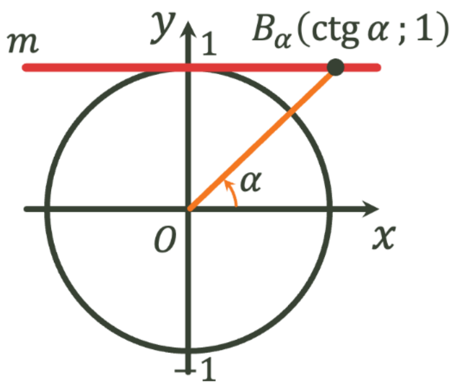


$\boldsymbol{E(\sin x) = [-1; 1]}$ $\boldsymbol{E(\cos x) = [-1; 1]}$



Ордината т. A_α дорівнює тангенсу кута a

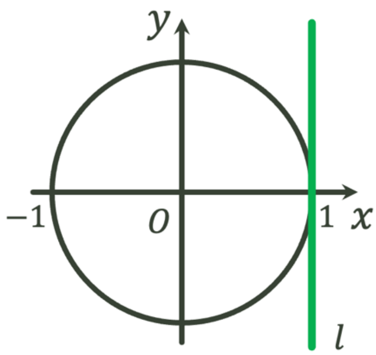
$\boldsymbol{E(\operatorname{tg} x) = R}$



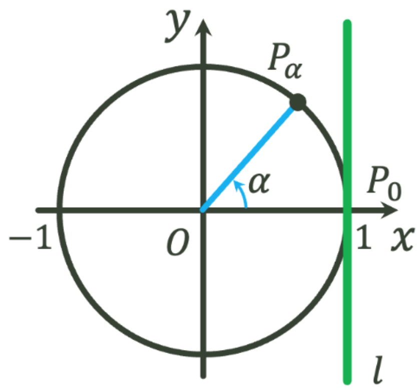
Абсциса т. B_α дорівнює котангенсу кута a

$\boldsymbol{E(\operatorname{ctg} x) = R}$

Чому ордината т. A_α дорівнює тангенсу кута a?



- Побудуємо пряму l, що проходить через точку $(1; 0)$ перпендикулярно до осі абсцис

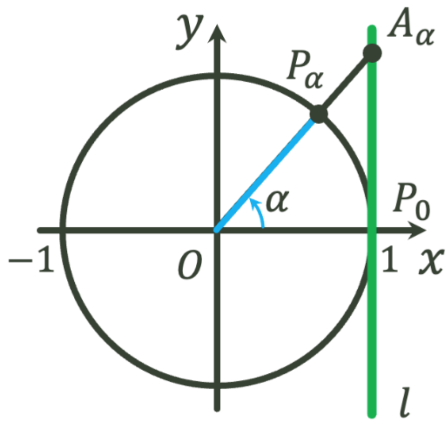


- При повороті на кут α початковий радіус OP_0 переходить у радіус OP_α

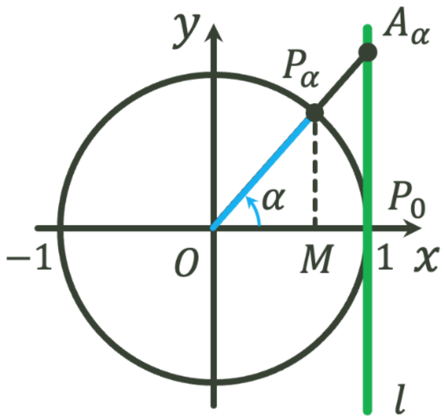
  $P_\alpha(x; y)$

  $x = \cos\alpha$

  $y = \sin\alpha$



- Пряма $OP_\alpha \cap l = A_\alpha$



- Побудуємо $P_\alpha M \perp Ox$, тоді:

  $\Delta OP_\alpha M \sim \Delta OA_\alpha P_0$

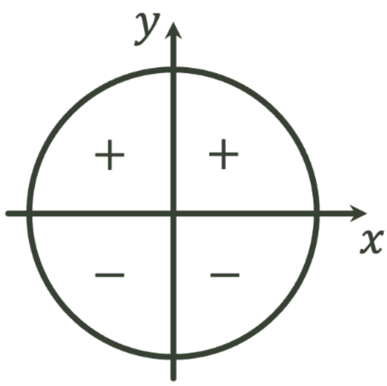
$$\frac{P_\alpha M}{OM} = \frac{A_\alpha P_0}{OP_0} \to \frac{x}{y} = \frac{A_\alpha P_0}{1} \to \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = A_\alpha P_0, \text{ отже } A_\alpha P_0 = \operatorname{tg}\alpha.$$

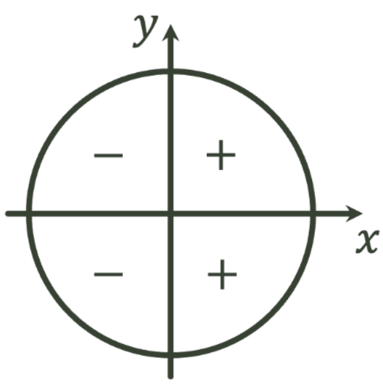
Тобто ордината точки A_α дорівнює тангенсу кута α.

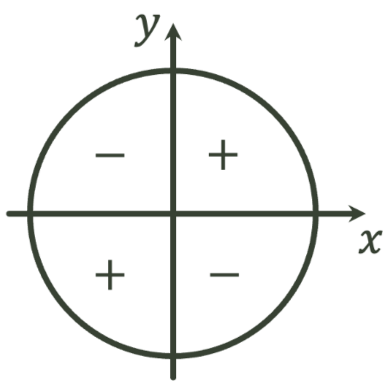
- Проаналізуйте, в яких координатних чвертях значення тригонометричних функцій буде додатним, а в яких – від'ємним?

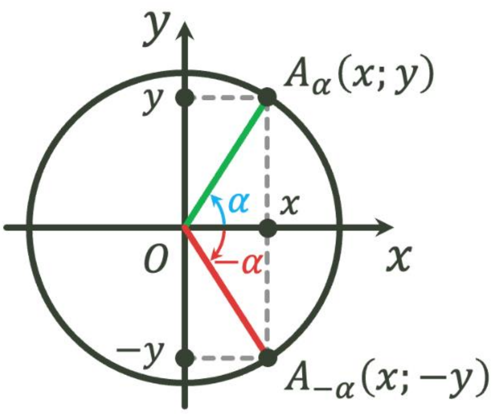
  (Координати по абсцисі – це значення косинуса, координати по ординаті одиничного кола – значення синуса)

$\mathbf{\sin\alpha}$ $\mathbf{\cos\alpha}$ $\mathbf{tg\,\alpha}$, $\mathbf{ctg\,\alpha}$









Точки A_α і $A_{-\alpha}$ симетричні, так як при повороті на кут α початковий радіус одиничного кола переходить у точку OA_α, а на кут $-\alpha$ – у радіус $OA_{-\alpha}$, отже абсциси точок A_α і $A_{-\alpha}$ будуть однаковими, а ординати – різними. Отже:

$$\mathbf{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$$

$$\mathbf{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha}$$

$$\mathbf{tg(-\alpha) = -tg\,\alpha}$$

$$\mathbf{ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha}$$

- Які з даних функцій є парними, а які – непарними?

  Косинус – парна функція.

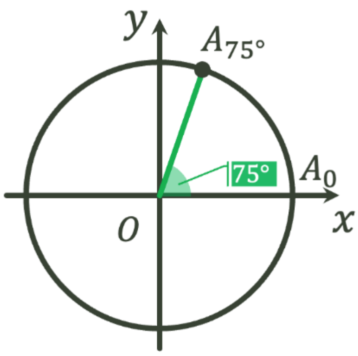
  Синус, тангенс і котангенс – непарні функції.

Приклад

$$\cos(-45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

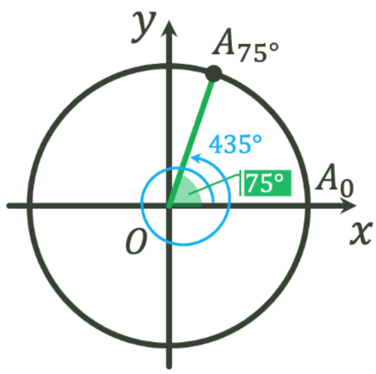
$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

Періоди синуса і косинуса



- При повороті на кут $75°$ початковий радіус OA_0 переходить у радіус $OA_{75°}$. На який кут, відмінний від $75°$ потрібно повернути радіус OA_0, щоб отримати цей самий радіус $OA_{75°}$?

Цей самий радіус $OA_{75°}$ можна отримати якщо повернути початковий радіус OA_0 на кут $435°$, тобто на один повний оберт $+75°$. Отже ***при зміні кута на ціле число обертів*** ($360°$ *або* 2π *радіан)* ***значення тригонометричних функцій синуса і косинуса змінюватися не будуть.***



Всі функції, що мають таку властивість, називаються *періодичними.*

Кожна періодична функція має безліч періодів. Наприклад, функції синус і косинус мають періоди $2\pi, 4\pi, 6\pi$ ...

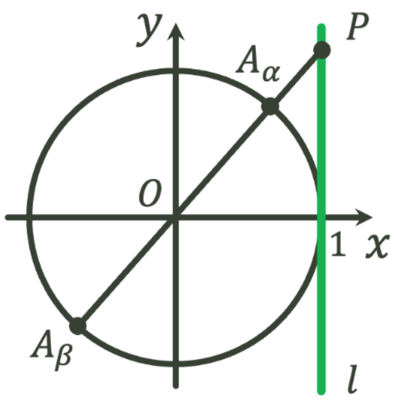
2π – *<u>найменший період</u>* синуса і косинуса.

$$\boldsymbol{\sin(\alpha + 360°k) = \sin\alpha} \qquad \boldsymbol{\cos(\alpha + 360°k) = \cos\alpha}$$

$$\boldsymbol{\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha} \qquad \boldsymbol{\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha}$$

Періоди тангенса і котангенса

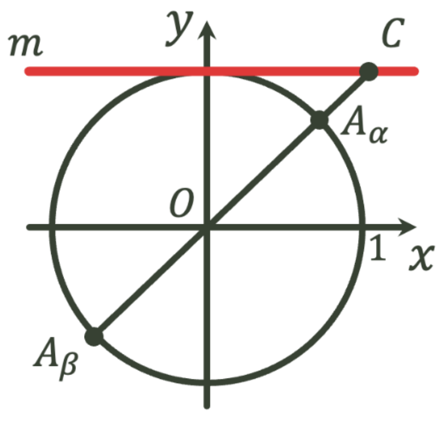
- Чи буде число 2π періодом тангеса і котангенса?
  (Так)



- Чи буде число 2π найменшим періодом тангенса і котангенса?

Розглянемо радіуси OA_α і OA_β, що утворються внаслідок повороту початкового радіуса на кути α і β. Точки O, A_α і A_β лежать на одній прямій, отже прямі OA_α та OA_β перетинають вісь тангенсів в одній точці – точці P. Отже два різні кути мають мають одне значення. Тому тангенс при зміні кута на ціле число півобертів не буде змінювати свого значення.

Аналогічно можна показати, що котангес не буде змінювати свого значення при повороті на ціле число півобертів.



π – *<u>найменший період</u>* тангенса і котангенса

$$\mathbf{tg}(\alpha + 180°k) = \mathbf{tg}\,\alpha \qquad \mathbf{ctg}(\alpha + 180°k) = \mathbf{ctg}\,\alpha$$

$$\mathbf{tg}(\alpha + \pi k) = \mathbf{tg}\,\alpha \qquad \mathbf{ctg}(\alpha + \pi k) = \mathbf{ctg}\,\alpha$$

Приклад

$$\cos(390°) = \cos(30° + 360°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Розв'язування завдань

Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \dfrac{1}{\sin x - 1}$

2) $y = \mathrm{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

3) $y = \sqrt{\cos x}$

4) $y = \sin\sqrt{x}$

Розв'язання:

1) $y = \dfrac{1}{\sin x - 1}$

$\sin x - 1 \neq 0$

$\sin x \neq 1$

Нам потрібно виключити всі точки, в яких $\sin x = 1$, тому:

$\boldsymbol{D(y)}$: $\boldsymbol{x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k} \in \mathbb{Z}$

2) $y = \mathrm{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\boldsymbol{D(y)}$:

$$x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\boldsymbol{x \neq \frac{2\pi + \pi}{4} + \pi k,\ k} \in \mathbb{Z}$$

3) $y = \sqrt{\cos x}$

Дана функція буде мати зміст, якщо $\cos x \geq 0$

Нам вже відомо, що $\cos x > 0$ у I і IV координтних чвертях, тобто на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Також косинус має період 2π, тому проміжок на якому значення $\cos x > 0$:

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$$

$\cos x = 0$ в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Областю визначення буде об'днання двох даних проміжків.

$\boldsymbol{D(y)}$:

$$\boldsymbol{x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}}$$

4) $y = \sin\sqrt{x}$

Дана фукнція буде мати зміст, якщо $x \geq 0$.

Так як $D(\sin x) = R$, то:

$$\boldsymbol{D(\sin\sqrt{x}): x \in [0; +\infty)}$$

Знайдіть множину значень функції:

1) $y = 2 + \sin x$

2) $y = 4\sin x - 5$

3) $y = \frac{1}{2}\cos x$

4) $y = \cos^2 x + 1$

Розв'язання:

1) $y = 2 + \sin x$

$\boldsymbol{E(y)}$: $-1 \leq \sin x \leq 1$

$1 \leq \sin x + 2 \leq 3$

$\boldsymbol{x \in [1; 3]}$

2) $y = 4\sin x - 5$

$\boldsymbol{E(y)}$: $-1 \leq \sin x \leq 1$

$-4 \leq 4\sin x \leq 4$

$-9 \leq 4\sin x - 5 \leq -1$

$\boldsymbol{x \in [-9; -1]}$

3) $y = \frac{1}{2}\cos x$

$\boldsymbol{E(y)}$: $\quad -1 \le \cos x \le 1$

$$-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\cos x \le \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]}$$

4) $y = \cos^2 x + 1$

Значення $\cos^2 x$ може змінюватися від 0 до 1, отже значення всього виразу може змінюватися від 1 до 2.

$\boldsymbol{E(y)}$: $\quad \boldsymbol{x \in [1; 2]}$

Знайдіть значення виразу:

$$\sin(-30°) + \cos(-60°) - \frac{1}{3}\operatorname{tg}(-60°)\operatorname{ctg}(-30°)$$

Розв'язання:

$$\sin(-30°) + \cos(-60°) - \frac{1}{3}\operatorname{tg}(-60°)\operatorname{ctg}(-30°) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 3 = -\frac{3}{3} = -1$$

Відповідь: -1

Обчисліть:

1) $\sin -405°$

2) $\cos 750°$

3) $\operatorname{tg} 210°$

4) $\operatorname{ctg} -\frac{4}{3}\pi$

5) $\sin\frac{11}{6}\pi$

Розв'язання:

1) $$\sin(-405°) = -\sin 405° = -\sin(45° + 360°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) $$\cos 750° = \cos(30° + 2\cdot 360°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3) $$\operatorname{tg} 210° = \operatorname{tg}(30° + 180°) = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

4) $$\operatorname{ctg}\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

5) $$\sin\frac{11}{6}\pi = \sin\left(\frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

IV. Підсумок уроку

- Чи існує таке значення, для якого $\sin x = -0{,}4$?
- Чи існує таке значення, для якого $\cos x = 1{,}001$?
- Який знак має $\sin 187°$? Чому?
- Порівняйте з нулем вираз $\cos(-87°)$
- Порівняйте з нулем вираз $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{157\pi}{375}\right)$

Домашнє завдання

Опрацювати п.10, п.11(ст.63-65), опрацювати конспект.

Виконати № 10.3, 10.5, 10.7, 11.2, 10.15.