МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»

Завідувач кафедри

_____________ Д. Є. Бобилєв   Реєстраційний № _________

«___» _____________ 2022 р.   «___» _____________ 2022 р.

Генерація числових рядів з використанням взаємовписаних послідовностей квадратів та трикутників в межах квадрата з параметром *a*=1

Магістерська робота студента
фізико-математичного факультету
групи МІм-17
освітньо-кваліфікаційний рівень «магістр»
спеціальності:
014.04 середня освіта (Математика)
Громова Єгора Анатолійовича
Науковий керівник:
Кандидат технічних наук, професор
Корольський Володимир Вікторович
Оцінка:
Національна шкала_______________________
Шкала ECTS____ Кількість балів __________
Голова ЕК ________   ______________________
(підпис)   (прізвище, ініціали)
Члени ЕК ________   ______________________
(підпис)   (прізвище, ініціали)
________   ______________________
(підпис)   (прізвище, ініціали)
________   ______________________
(підпис)   (прізвище, ініціали)
________   ______________________
(підпис)   (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Розділ «Ряди» є одним з основних при вивченні фундаментальної дисципліни «Математичний аналіз». За допомогою рядів розв'язуються важливі задачі, як в межах теорії математичного аналізу, так і задачі практичного змісту. За допомогою рядів в математиці з'явилась можливість наближених обчислень ірраціональних чисел, алгебраїчних і диференціальних рівнянь, обчислення інтегралів, тощо.

Протягом історії розвитку теорії числових рядів приділяли значну увагу математики різних країн світу. Більш значні результати в системному загальному дослідженні рядів мають такі видатні математик, а саме:

Г. Лейбниць [1], І. Ньютон [6], Л. Ейлер [6], О. Коші [14], Ж.Л. Д'аламбер [4], Р. Бернулі [6], П. Менголі [6] та інші.

Проаналізувавши літературу різних років, та авторів [5], [7], [8], [11], [12], [22], [25], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [39] можна сказати, що в більшості підручників, посібниках та збірниках саме з математичного аналізу наявні відомості по основам теорії числових рядів. Набір задач для дослідження рядів на збіжність має певний стандартний зміст і потребує для розв'язання лише використання класичних ознак (Д'аламбера, Коші). В збірниках відсутні задачі по створенню рядів з реалізацією наочності їх членів і наочних прикладів їх збіжності. Не пропонуються задачі по дослідженню швидкості зростання частинних сум збіжних рядів до їх сум. Але, в останні роки проблемі використання принципу наочності при вивченні числових рядів присвячений ряд публікацій авторів: В.В. Корольський [18] [19] [20], С.С. Габ [9] [10], В.Д. Бобирь [2] [3], А.М. Христюк [2] [3], в яких використовуються геометричні інтерпретації членів числових рядів за допомогою різних геометричних об'єктів.

Тема розглядаємої кваліфікаційної роботи є продовженням досліджень генерації числових рядів за допомогою геометричних інтерпретацій з метою усунення вказаних вищих зауважень, пов’язаних з вивченням розділу «Числові ряди», тому є досить актуальною.

Мета дослідження: Побудова (генерація) числових рядів з лінійною, квадратурною і кубатурною геометричною інтерпретацією членів рядів. Дослідження одержаних рядів на збіжність.

Об’єкт дослідження: Числові знакододатні ряди.

Предмет дослідження: Генерація числових рядів, членами яких є величини параметрів різних геометричних об’єктів послідовностей взаємовписаних квадратів, прямокутників та трикутників.

Завдання роботи:

- Дослідити основні етапи розвитку теорії числових знакододатних рядів;
- Виконати аналіз теоретичних основ числових рядів у відомих навчально-методичних джерелах;
- Створити числові ряди пов’язані з параметрами послідовностей геометричних об’єктів лінійних, квадратурних та кубаторних характеристик;
- Дослідити створені ряди на збіжність.

Методи дослідження:

- Аналіз відомостей про історію розвитку числових рядів
- Побудова числових рядів з застосуванням геометричних інтерпретацій їх членів, емпіричний пошук загальних членів рядів
- Використання міжпредметних зв’язків дисциплін: шкільного курсу геометрії, аналітичної геометрії і математичного аналізу.

Наукова новизна: Запропоновані методи генерації числових рядів і їх класифікація.

Практичне значення роботи: Одержані числові знакододатні ряди різної геометричної інтерпретації, які пропонуються для використання на шкільних факультативах і при вивченні розділу «Числові ряди» на фізико-математичних факультетах при вивченні дисципліни «Математичний аналіз».

Апробація роботи: Одержані ряди використовуються для подальших досліджень в студентській проблемній групі «Геометрична інтерпретація числових рядів», і при вивченні розділу «Числові ряди» студентами ФМФ.

Структура роботи: Робота складається зі вступу, двох розділів, списку використаних джерел, що містить 41 найменування. Основний текст представлено на 60 сторінках. Повний обсяг роботи 67 сторінок. Кваліфікаційна робота виконувалася за планом науково-дослідної діяльності студентської проблемної групи «геометрична інтерпретація числових рядів» (науковий керівник, професор Корольський В.В.).

РОЗДІЛ 1. ІСТОРИЧНА ДОВІДКА ТА ОСНОВИ ТЕОРІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ.

1.1. Історична довідка розвитку числових рядів

Історія розвитку математики завжди була і полі зору дослідників. Значна кількість досліджень історії математики сприймається в цілому з точки зору наукознавства. В той же час існує значна кількість праць присвячених окремим розділам, одним з основних розділів математичного аналізу є розділ «Числові ряди».

«Теорія нескінченних числових рядів є дуже цікавою частиною математики, яка має численні практичні застосування. Саме тому треба знати історію її розвитку» [21] [с.117 Крюков М.М. До історії розвитку і становлення теорії нескінченних числових рядів / М.М. Крюков, Т.С. Клецька // Математичне модулювання- 2013, - №6 -с. 117 -120].

Історія розвитку теорії числових рядів має стародавні корені. Математична нескінченість, як стверджують дослідники історії розвитку математики, з'явилися в давньо-грецькій або еллінській культурі в VIII-VI ст. до н.е. як принципово новий елемент мислення [1].

Також відомо, що і у стародавньому Єгипті використовували дроби, послідовність яких складала числовий ряд. Єгиптяни вміли по своєму виражати частку «m:n». В цьому вони користувалися еквівалентними дробами, тобто долями одиниці виду $\frac{1}{n}$, які записувалися у вигляді $\bar{n}$ (риска «-» означала: «1 поділити на число n») [40] [с.25 Юшкевич А.П. Історія математики стародавніх часів до початку XIX століття: в т 3т. Т.1/ Андрей Павлович Юшкевич. – М: Наука, 1970. -353с].

Розвиток числових рядів та їх застосування відмічаються також в Китаї. Математики Китаю складали так звані «магічні квадрати»: квадрати за таким розподіленням чисел n^2, де $n \in N$, в квадратній таблиці, відповідно до якої суми чисел в кожному стовпчику і кожному рядку однакові і дорівнювали значенню $\frac{n}{2}(n^2+1)$. Зокрема встановлено, що питання розглядалось і роботах Яна Хуєя (1275 рік) [6] [40].

Знаходженням сум рядів займався Шень Куо (XI ст). В роботі // «Міркування Мєн-Сі» він підрахував кількість предметів, які складають n-кульову ступінчату усічену піраміду, в якій сторони прямокутних шарів послідовно зростає на одиницю. Фактично в цьому випадку ми маємо приклад геометричної інтерпретації числового ряду. Але слід відмітити, що перед умовами цієї задачі повинні бути правила знаходження сум арифметичної прогресії і ряду квадратів чисел множини N. Тому не випадково в XIII ст. Чжу Ши-цзе сумує, які виникають при множенні чисел n, n^2,n^3 з членами зростаючої або спадної прогресії [40] [41].

В роботі Чжу Ши-цзе (1303 р.) демонструється таблиця (рис.1.1):

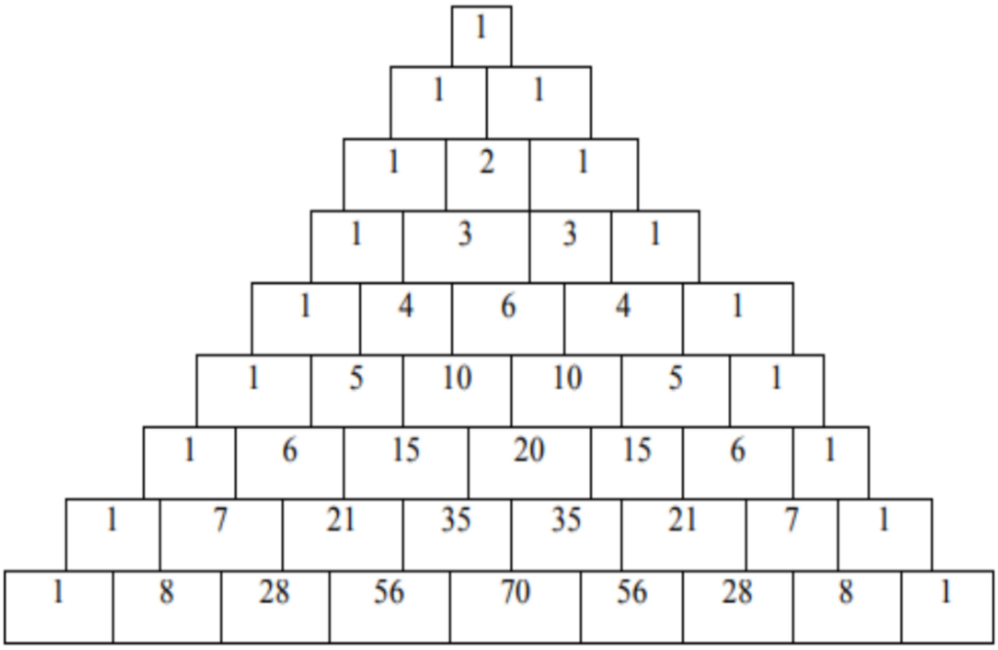


Рис. 1.1 Арифметичний трикутник Чжу Ши-цзе

Трикутник на рис. 1.1. містить біномінальні коефіцієнти до восьмої степені бінома І. Ньютона, формулу якого він знайшов у 1665 році. У даному випадку ми знов маємо геометричну інтерпретацію числового ряду. Тобто в епоху Чжу Ши-цзе формула бінома І. Ньютона не була відома, але її суть китайський математик спостерігав за допомогою геометричної інтерпретації.

Значний внесок в розвиток теорії рядів зробили математики Індії. Зразки досліджень, пов’язаних зі знаходженням сум арифметичних та геометричних прогресій демонструються вже в «Ведах». А також це стосується результатів, досягнутих: Найраною (знаходження суми членів арифметичної прогресії); Магавірою (знаходження суми членів геометричної прогресії); Аріабахтою (знаходження сум рядів чисел n, n^2, n^3) ; Нілакантою (використовування ряду для обчислення числа *П*).

В анонімному трактаті «Каранападджати» («Техніка обчислень»), також написаному в Індії у XV-XVI ст., приводяться правила обчислення тригонометричних функцій за допомогою рядів. [1] [40] [41]

З початку XVII століття в Європі почала розвиватися теорія числових рядів на основі сприйняття числового ряду як важливого, суто математичного, поняття. Дослідниками історії розвитку математики вважається, що європеєць П'єтро Менголі (1626-1686) став першим дослідником нескінченних рядів у загальному вигляді. Варто відмітити, що саме П'єтро Менголі навів приклад ряду, збіжність якого наочно доводиться за допомогою геометричної інтерпретації членів ряду. Він розглянув квадрат з параметром (стороною) рівним 1 та площа якого, зрозуміло, також дорівнює 1 (рис. 1.2.)

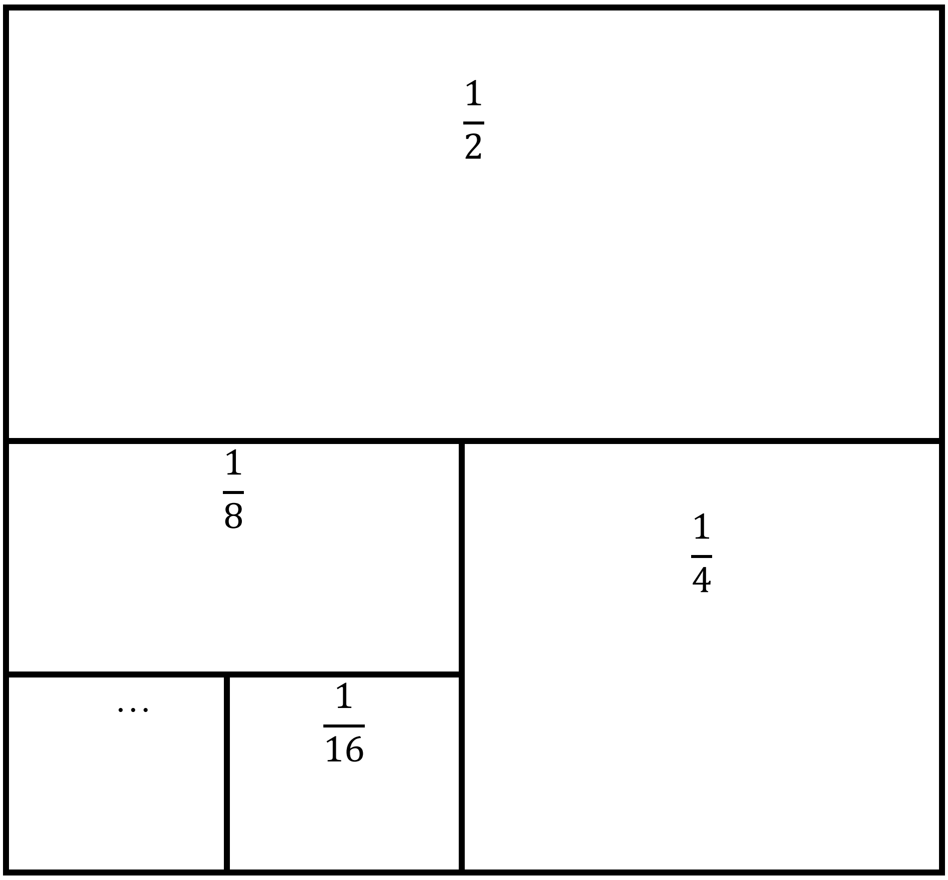


Рис. 1.2. Квадрат зі стороною 1

Поділивши квадрат навпіл, потім одну з одержаних половин знову поділили навпіл і так далі, отримав нескінченну кількість прямокутників з площами: $S_1 = \frac{1}{2}$; $S_2 = \frac{1}{4}$; $S_3 = \frac{1}{8}$; $\cdots$; $S_n = \frac{1}{2^n}$; ..., таким чином утворився ряд нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $q = \frac{1}{2}$, сума якого $s = 1$, що візуально спостерігається на рис. 1.2. В межах сучасної математики цей результат доводиться за відомою формулою[7] [32]:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \ (1)$$

Слід відмітити, що Менголі довів розбіжність гармонійного ряду близько 1650 р. Термін «гармонійний ряд» відносно ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ (2)$$

запропонував математик Броункер (1620-1684 рр).[1] [40]

Однак перше відоме доведення розбіжності ряду пов’язують з французьким математиком Орем (1350 р). Доведення Орема використовують і в сучасних підручниках з математичного аналізу. Суть його пояснюється наступним чином:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)t\cdots>$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\cdots=1+m\frac{1}{2},m\to\infty=>$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}>1+\lim_{m\to\infty}m\frac{1}{2}=\infty\ (3)$$

Зрозуміло, що основною задачею поступово стає задача, пов’язана з дослідженням рядів на збіжність. Тобто в з’ясуванні чи має ряд скінченну суму, чи його сума прямує до нескінченності.

У 1812 році німецький математик Карл Фрідріх Гаус (1777-1865) пропонує перший зразок дослідження числового ряду на збіжність. В 1821 році французький математик Огюст Луї Коші (1789-1857) встановлює основні (сучасні) засади теорії рядів. [41] З тих пір: «Рядом називають необмежену послідовність чисел одержуваних один з одного за певним законом. Нехай є сума n-перших членів, де n - будь-яке ціле число. Якщо при постійному зростанні значень n сума необмежено наближається до відомої межі S, ряд називається збіжним, а ця межа називається сумою ряду. Навпаки, якщо при необмеженому зростанні n сума не наближається ні до якої певної межі, ряд буде розбіжним і не буде мати суми» [23] [24].

З наведеного означення числового ряду можна зробити висновок:

«Числовим рядом називається нескінченна сума чисел$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, пов'язаних між собою певною закономірністю, яка відображає все разом a_n, який прийнято називати загальним членом ряду».

Приклад. Маємо числовий ряд:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots \quad (4)$$

Шляхом логічного аналізу закономірності змін величин ряду встановлюємо, що ряд (4) має загальний член вигляду:

$$a_n = \frac{n}{n+1}.$$

Таким чином ряд (4) в повному обсязі записується наступним чином:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots (5)$$

Якщо відомий вираз загального члена ряду a_n, то ряд представляють у вигляді «сігма-моделі»:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (6)$$

Наприклад, ряд (5) має наступну «сігма-модель»:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \quad (7)$$

В сучасних підручниках, де є розділи пов'язані з числовими рядами, ряди розглядаються переважно у вигляді «сігма-моделей».

В теорії числових рядів одним з основних понять є загальний член ряду. Тому, що за допомогою загальних членів рядів можна не тільки задавати ряди у вигляді (6) і розгорнутому вигляді, але й виконувати дії алгебраїчні.

Наприклад, маємо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ над якими можна виконати дії:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) \ (8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} K a_n = K \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (9)$$

Але основним призначенням загального члена числового ряду є його використання для розв’язання основної задачі в теорії і практиці застосування рядів, якою є задача дослідження рядів на збіжність то обчислення суми ряду.

За допомогою загальних членів рядів формуються необхідна і достатні ознаки збіжності рядів.

1.2. Теоретичні основи дослідження числових ряді на збіжність

1.2.1. Необхідна ознака збіжності числового ряду.

Терміни необхідна і достатня ознаки збіжності числового ряду першим почав використовувати Леонард Ейлер (1707-1783). Близько 1750 року він заявив, що необхідна та достатня ознака збіжності числового ряду полягає в виконанні умови:

$$\lim_{n\to\infty}(S_{kn} - S_n) = 0, (10)$$

де S_{kn}, S_n – частинні суми досліджуваного ряду.

Але, як було виявлено пізніше, виконання умови (10) може бути лише необхідною ознакою збіжності рядів. [6] [40].

В сучасних підручниках необхідна ознака збіжності числового ряду трактується у вигляді [12] [35]:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, (11)$$

Якщо рівність (11) має місце для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то ряд може бути збіжним, а може бути і розбіжним. У випадку, коли рівність (11) не виконується, тобто $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то відповідь однозначна – ряд розбіжний.

Суть вказаної необхідної ознаки збіжності числового ряду можна пояснити наступним чином. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний і має певну скінченну суму S, то виконується рівність:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s\ , (12)$$

де $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ (13), n-а частинна сума ряду.

Зрозуміло, що $S_n = S_{n-1} + a_n$ (14)

З рівності (14) слідує:

$$S_n - S_{n-1} = a_n =>$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n\ , (15)$$

Далі враховуємо, що поряд з рівністю (12) має місце рівність:

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S\ (16)$$

Якщо врахувати рівність (12) і (16), то з рівності (15) одержується необхідна ознака збіжності ряду у вигляді (11).

Проблема дослідження числових рядів на збіжність привертала увагу багатьох математиків з середини XVII ст. Найбільш вагомі результати в одержані достатніх ознак збіжності рядів отримали Коші, Д'аламбер, Ейлер. На це вказано в працях дослідників історії математики [1] [5] [6] [20] [21] [38] [40] [41].

1.2.2. Достатні ознаки збіжності числових знакододатних рядів.

Розглянемо достатні ознаки збіжності числових рядів, які розглядаються в більшій кількості підручників з математичного аналізу. Як правило, ознаки розглядаються у вигляді теорем [5] [7] [9] [11] [18] [20 [23] [24] [28] [31] [32] [33] [35] [39] [40] [41].

Ознаки порівняння.

- <u>Теорема 1</u> (перша ознака порівняння):

Якщо ряди (a): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і (b): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ відповідають умовам:

$\forall n \in N: a_n \leq b_n$;

Якщо ряд (b) збіжний, то збіжним буде і ряд (a).

Доведення.

За умовами теореми ряд (b) збіжний, припустимо до суми S_b, тобто:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = S_b \ (*)$$

З іншого боку за умовами за умовами теореми $\forall n \in N$:

$$s_{a_n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n = s_{b_n} =>$$

$$\lim_{n\to\infty} Sa_n \leq \lim_{n\to\infty} S_{b_n} = s_b =>$$

$$S_a \leq S_b$$

Границя ряду (a) обмежена, тобто має скінченне значення, тому ряд (a) збіжний.

Що і треба було довести.

Аналогічно доводиться Теорема 2.

- Теорема 2 (перша ознака порівняння):

$\forall n \in N: a_n \leq b_n$;

Якщо ряд (a) розбіжний, то розбіжним буде і ряд (b).

Приклад 1.

Розглянемо ряд:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (a)

Порівняємо ряд (a) з рядом геометричної прогресії:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ (b)

Ряд (b) збіжний, як ряд геометричної прогресії зі знаменником

$q = \frac{1}{2} < 1.$

З іншого $\forall n \in N$:

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Таким чином (за теоремою 1) виходить, що ряд (a) є рядом збіжним.

Приклад 2.

Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (b)

Порівняємо ряд (b) з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (a)

Ряд (a) є гармонічним рядом, який як відомо є розбіжним. З іншого боку маємо, що $\forall n \in N$: $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, тому (за теоремою 2) виходить, що ряд (b) розбіжний.

- Теорема 3 (друга ознака порівняння):

Якщо для рядів (a): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і (b): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ можливо вказати такі сталі величини: $k > 0$ і $K > 0$, що, починаючі з деякого значення n, виконується нерівність:

$$k \le \frac{a_n}{b_n} \le K, (17)$$

то ряди (a) і (b) сумісно збігаються або розбігаються.

Доведення.

З нерівності (13) слідує, що

$$Kb_n \le a_n \le Kb_n \ (18)$$

Якщо ряд (a) збіжний, то збіжним буде і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} kb_n$, а тому збіжним буде і ряд (b) (за першою ознакою порівняння).

Якщо ряд (b) збігається, то збіжним буде і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Kb_n$, звідси (за першою ознакою порівняння) збіжним буде і ряд (a).

Аналогічно доводиться сумісна розбіжність рядів (a) і (b). Якщо ряд (a) розбіжний, то розбіжним (за першою ознакою порівняння) буде і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Kb_n$, а звідси буде розбіжним і ряд (b).

З Теореми 3 важливим є наслідок:

Якщо для рядів (a) і (b) має місце рівність:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = d > 0 \ (19),$$

то ряди (a) і (b) сумісно збігаються або розбігаються.

Примітка. Для практичного використання більш зручною є друга ознака порівняння з використанням рівності (17)

Приклад 3.

Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$

Вводимо до застосування ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ і використовуємо ознаку (17), відповідно до якої обчислюємо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1.$$

Відповідь: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$ розбіжний, тому що ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - розбіжний.

Використання ознак порівняння має суттєвий недолік, який полягає у тому, що потрібно підібрати до досліджуваного ряду інший ряд, про збіжність (або розбіжність) якого заздалегідь відомо. Більш зручними для використання є наступні ознаки.

Ознака Д'аламбера.

Ознака Д'аламбера передбачає використання відношення між

$(n+1)$- м і n-м членами досліджуваного ряду і доводиться наступною теоремою.

- Теорема 4.

Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ виконуються умови:

$a_n > 0, \forall n \in N$;

Існує границя: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n} = d$, то:

Коли $d < 1$– ряд збіжний;

Коли $d > 1$– ряд розбіжний;

Доведення.

За умовами теореми має місце границя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = d \Rightarrow$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = d + \varepsilon$, нехай $d + \varepsilon = q$ і ε таке, що $q < 1$.

Тоді з нерівності $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ слідує виконання наступних нерівностей :

$$\left.\begin{array}{c} a_{n+1} < qa_n \\ a_{n+2} < qa_{n+1} < q^2 a_n \\ a_{n+3} < qa_{n+2} < q^3 a_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$a_{n+1} + a_{n+2} + (a_{n+3}) + \cdots < a_n q + a_n q^2 + a_n q^3 + \cdots \Rightarrow$$

$$a_{n+1} + a_{n+2} + (a_{n+3}) + \cdots < a_n(q + q^2 + \cdots + q^m + \cdots) \text{ (**)}$$

В правій частині нерівності (**) маємо збіжний ряд геометричної прогресії, тому що знаменник прогресії $q < 1$. Відповідно, за ознакою порівняння буде збіжним і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, який відповідає умовам теореми.

Зрозуміло, що якщо $d > 1$, то нерівність (**) перетворюється на протилежну:

$a_{n+1} + a_{n+2} + (a_{n+3}) + \cdots > a_n(q + q^2 + \cdots + q^m + \cdots)$ (***)

В правій частині маємо ряд розбіжної геометричної прогресії, тому що знаменник прогресії $q > 1$. За ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ буде розбіжним.

Приклад 4.

Дослідити на збіжність ряди:

А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$;

Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

(А): Використовуємо ознаку Д'аламбера:

Маємо $a_n = \frac{2^n}{n}$; $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$.

Обчислюємо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{n}{n+1} = 2$$

.

Відповідь : ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ розбіжний.

(Б): Використовуємо ознаку Д'аламбера:

Маємо $a_n = \frac{n!}{2^n}$; $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$

Обчислюємо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(n+1) = \infty$$

.

Відповідь: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ розбіжний.

(В): Використовуємо ознаку Д'аламбера:

Маємо $a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; $a_{n+1} = \frac{\left((n+1)!\right)^2}{2^{(n+1)^2}}$.

Обчислюємо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left((n+1)!\right)^2 2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0$$

Відповідь: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ збіжний.

Радикальна ознака Коші.

Теорема 5.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ задовольняє умовам:

$a_n > 0, \forall n \in N$;

Існує границя: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$, то:

2.1) коли $k < 1$ – ряд збіжний;

2.2) коли $k > 1$ – ряд розбіжний;

2.3) коли $k = 1$ – невизначений випадок.

Доведення.

Нехай $k < 1$, тоді відповідно да означення границі можемо записати: $\sqrt[n]{a_n} = k + \varepsilon$, де ε візьмемо таким, що $k + \varepsilon = q < 1$ (*)

Використовуючи нерівність (*) одержуємо нерівність: $a_n < q^n\ \forall n \in N$.

Далі розглянемо нерівність:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m + \cdots < q + q^2 + q^3 + \cdots \ (**)$$

В правій частині нерівності (**) маємо збіжний ряд геометричної прогресії зі знаменником $q < 1$, тому за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ буде збіжним.

Нехай $k > 1$. В цьому випадку нерівність (*) перетворюється на протилежну:

$k + \varepsilon = q > 1$, тому протилежною буде і нерівність (**):

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m + \cdots > q + q^2 + q^3 + \cdots$$

В цьому випадку в правій частині нерівності (**) будемо мати розбіжний ряд геометричної прогресії зі знаменником $q > 1$. Тому за ознакою порівняння буде розбіжним і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Приклад 5.

Дослідити на збіжність ряди:

А) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{8n-1}\right)^n$;

Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{12n-1}{9n+2}\right)^{4n}$.

Розв'язання:

(А): $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{8n-1}\right)^n$

Обчислюємо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{8n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{8n-1} = \frac{1}{8} < 1$$

З цього слідує, за умовами теореми 5, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{8n-1}\right)^n$ є збіжним, оскільки його границя має значення < 1.

Відповідь: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{8n-1}\right)^n$ збіжний.

(Б):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{12n-1}{9n+2}\right)^{4n}$$

Обчислюємо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{12n-1}{9n+2}\right)^{4n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{12n-1}{9n+2}\right)^4 > 1$$

З цього слідує, за умовами теореми 5, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{12n-1}{9n+2}\right)^{4n}$ є розбіжним, оскільки його границя має значення > 1.

Відповідь: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{12n-1}{9n+2}\right)^{4n}$ розбіжний.

Інтегральна ознака Коші.

- Теорема 6.

Якщо члени знакододатнього ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ можуть бути представлені як числові значення деякої неперервної монотонно спадної на проміжку $[1; +\infty]$ функції $f(x)$ так, що

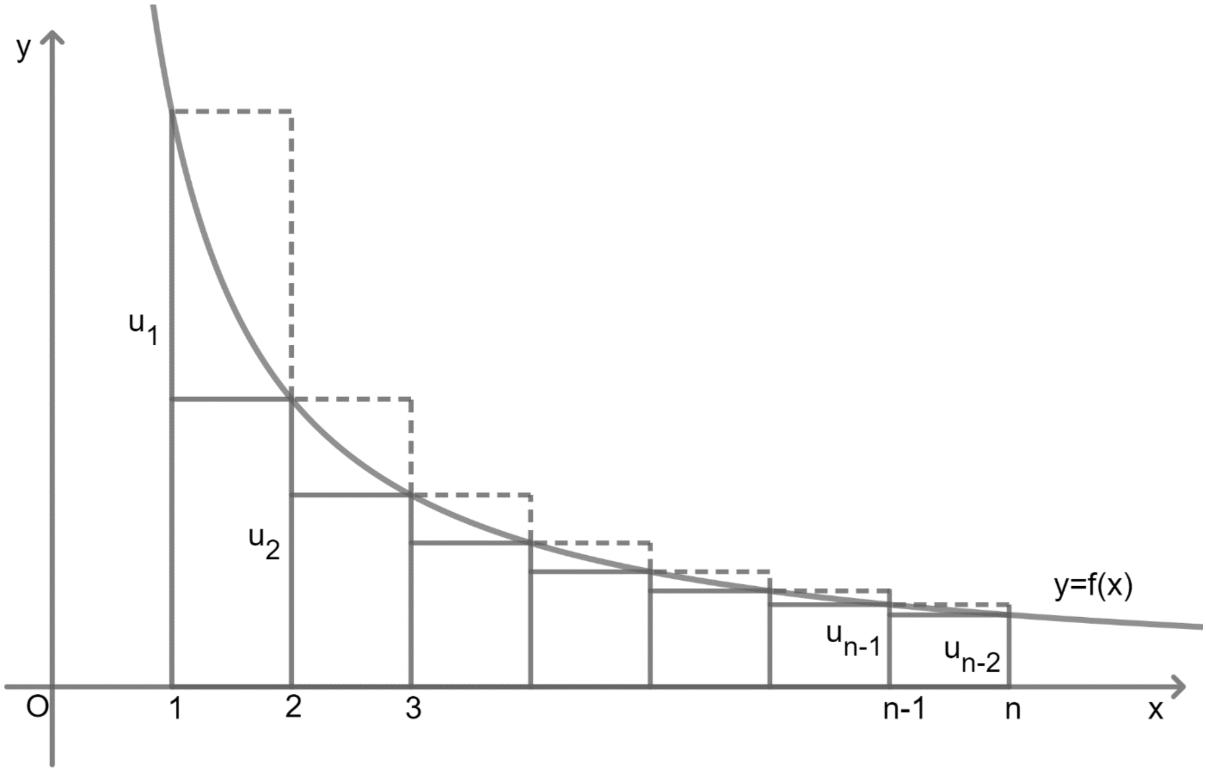
$u_1 = f(1), u_2 = f(2), \cdots, u_n = f(n)$ ... , то :

Якщо інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;

Якщо інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Доведення.

Розглянемо криволінійну трапецію, що обмежена зверху графіком функції $y = f(x)$, основою якої служить відрізок вісі Ox від x=1 до x=n (рис. 1.3).



Побудуємо вхідні і вихідні прямокутники, основами яких служать відрізки [1;2], [2;3], … . Враховуючи геометричний зміст визначеного інтеграла, записуємо:

$$f(1)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + \cdots + f(n)\cdot 1 < \int\limits_1^n f(x)\,dx <$$

$$< f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \cdots + +f(n-1)\cdot n$$

Або з урахуванням, що $u_1 = f(1), u_2 = f(2), \cdots, u_n = f(n) \ldots$, то отримаємо:

$$u_2 + u_3 + \cdots + u_n < \int_1^n f(x)\,dx < u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1}$$

Але, оскільки часткова сума S_n ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ дорівнює $S_n = u_2 + u_3 + \cdots + +u_n$, то отримаємо:

$$S_n - u_1 < \int_1^n f(x)\,dx < S_n - u_n$$

Випадок 1.

Невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ збіжний, тобто $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = A$. Оскільки

$\int_1^n f(x)\,dx < \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = A$, то маємо $S_n - u_1 < A$, тобто $S_n < u_1 + A$.

Так як послідовність часткових сум монотонно зростає і обмежена вгорі, то за ознакою існування границі, ця послідовність має границю. Відповідно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ буде збіжним.

Випадок 2.

Невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ розбіжний, тоді $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.

І інтеграли $\int_1^n f(x)\,dx$ необмежено зростають при $n \to \infty$. Враховуємо, що $s_n > \int_1^n f(x)\,dx + u_n$.

Приклад 6.

Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot ln}$.

Скористуємося інтегральною ознакою Коші. Функція $f(x) = \frac{1}{n \cdot ln}$ задовольняє вимогам теореми. Тоді знайдемо інтеграл:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot ln\,x} = ln|ln\,x||_2^{\infty} = \infty$$

Оскільки невласний інтеграл $= \infty$, він є розбіжним, а значить, ряд з загальним членом $u_n = \frac{1}{x\,ln\,x}$ розбіжний.

Приклад 7.

Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2+1}$.

Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Розглянемо відповідний невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{6}{n^2+1} dn = 6arctg\,n|_1^{+\infty} = 6\,arctg\,\infty - 6\,arctg\,1 = 6 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

Оскільки невласний інтеграл $\neq \infty$, то він є збіжним, а значить, і даний ряд теж є збіжним.

Розглянуті достатні ознаки збіжності знакододатних рядів використовуються в процесі вивчення дисципліни «Математичний аналіз» на фізико-математичних факультетах. Але ці ознаки не дають можливості знаходити суми збіжних рядів.

В межах нашого дослідження, за умовами, які передбачають використання ряду геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, можливі обчислення сум одержаних рядів, члени яких пов'язані з числовими параметрами геометричних об'єктів, вписаних в квадрат зі стороною 1. Тобто є можливість обчислювати суму ряду за формулою:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \,, (18)$$

Де

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \ (19)$$

Формула (19) є основною в змісті Розділу 2 нашого дослідження.

Висновки до РОЗДІЛУ 1

Історія розвитку математики показує велику зацікавленість математиків нескінченними сумами доданків, починаючі зі стародавніх часів.

Математика нескінченних сум з’явилась в часи давньогрецької (еллінської) культури в VIII-VI ст. до н.е. як принципово новий елемент мислення. Свій розвиток числові ряди мали в цивілізаціях Єгипту, Китаю, Індії.

Більш системний розвиток основ теорії числових рядів почався з початку XVII століття в Європі. Вважається, що європеєць П’єтро Менголі (1626-1686) став першим дослідником нескінченних рядів у загальному вигляді.

Починаючи з праць значно відомого Леонарда Ейлера (1707-1783) з’явились поняття необхідної і достатньої ознаки збіжності ряду.

Значний вклад в розвиток достатніх ознак збіжності внесли математики Д’аламбер, Коші, Гаус, Крамер, Раабе. В підручниках з математичного аналізу в значній мірі представлені ознаки Д’аламбера і Коші.

РОЗДІЛ 2. ГЕНЕРАЦІЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ВЗАЄМОВПИСАНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ КВАДРАТІВ ТА ТРИКУТНИКІВ

Для генерації рядів, члени яких пов’язані з лінійною, квадратурною або кубатурною інтерпретацією, будемо використовувати квадрат зі стороною а=1 і величини параметрів геометричних об’єктів, розташованих в квадраті.

Суть геометричних об’єктів представлена на рис. 2.1.

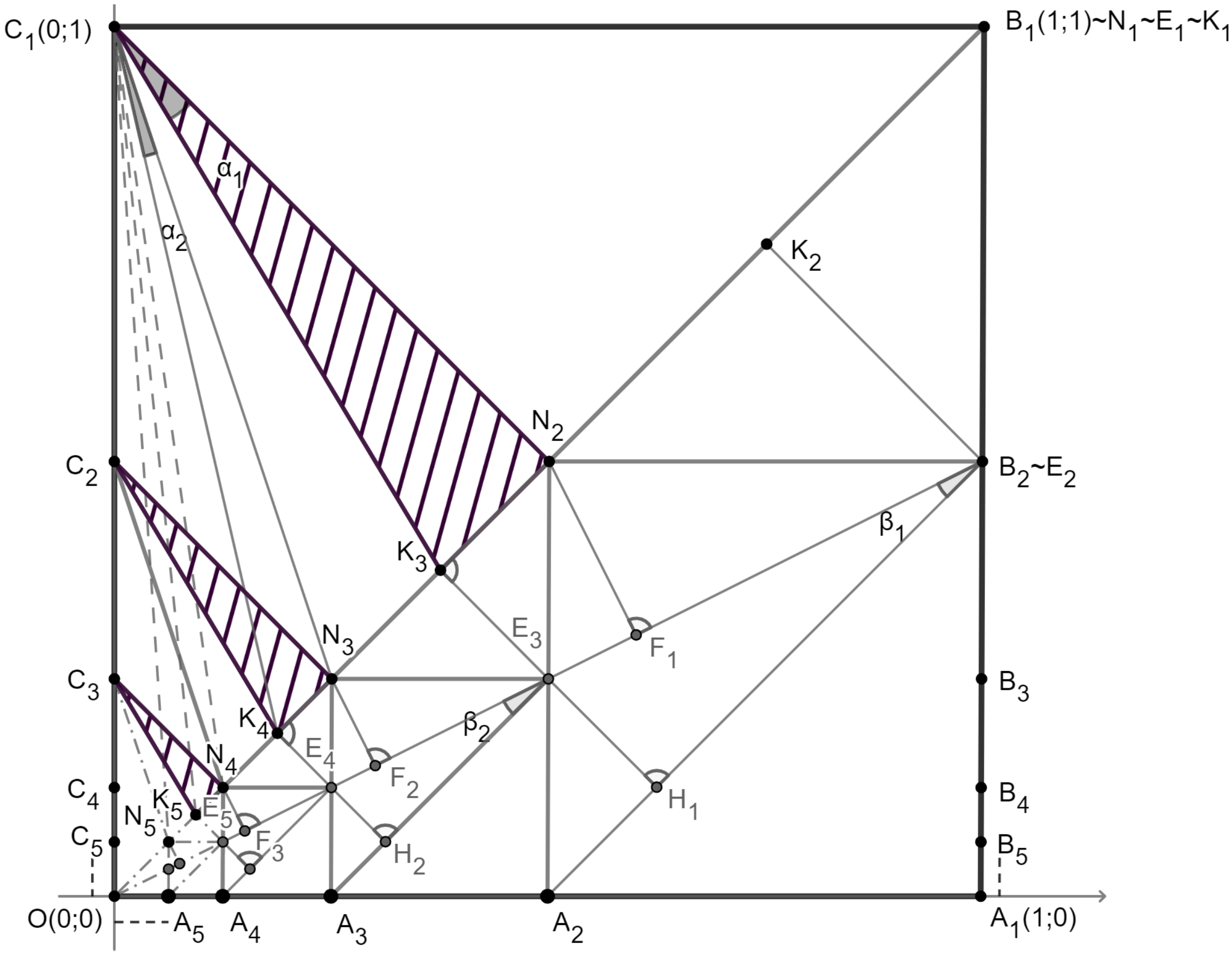


Рис. 2.1.

Візуально видно, що координати точок A_n, B_n, C_n змінюються за законом геометричної прогресії зі знаменником $q = \frac{1}{2}$:

т. $A_n\left(\frac{1}{2^{n-1}};0\right)$, т. $B_n\left(1;\frac{1}{2^{n-1}}\right)$, т. $C_n\left(0;\frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

В квадраті $0A, B_1C_1$ розташовані послідовності наступного виду:

1. $\{|\overline{A_nA_{n+1}}|_{n=1}^{\infty}\}$
2. $\{|\overline{B_nB_{n+1}}|_{n=1}^{\infty}\}$
3. $\{|\overline{N_nN_{n+1}}|_{n=1}^{\infty}\}$
4. $\{|\overline{\varepsilon_{n+1}K_{n+1}}|_{n=1}^{\infty}\}$
5. $\{|\overline{N_{n+1}C_n}|_{n=1}^{\infty}\}$
6. $\{|\overline{K_{n+2}C_n}|_{n=1}^{\infty}\}$
7. $\{|\overline{K_nK_{n+1}}|_{n=1}^{\infty}\}$
8. $\{|\overline{N_{n+1}F_n}|_{n=1}^{\infty}\}$
9. $\{|\overline{\varepsilon_{n+2}H_n}|_{n=1}^{\infty}\}$
10. $\{|\overline{A_{n+1}\varepsilon_{n+1}}|_{n=1}^{\infty}\}$
11. $\{|\overline{\varepsilon_{n+1}H_n}|_{n=1}^{\infty}\}$
12. $\{|\overline{A_{n+1}H_n}|_{n=1}^{\infty}\}$

Члени послідовностей є довжинами відповідних відрізків прямих, тобто мають лінійну геометричну інтерпретацію.

Ряди з квадратурною геометричною інтерпретацією пов'язані з використанням послідовностей площ наступного виду (див рис 2.1.):

1. $\left\{S_{\Delta N_{n+1}K_{n+2}\varepsilon_{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$
2. $\left\{S_{\Delta A_nA_{n+1}\varepsilon_{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$
3. $\left\{S_{\Delta A_nA_{n+1}N_{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$
4. $\left\{S_{\Delta N_nN_{n+1}\varepsilon_{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$
5. $\left\{S_{A_nA_{n+1}N_{n+1}\,N_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
6. $\left\{S_{\Delta N_{n+1}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$
7. $\left\{S_{\Delta N_{n+1}C_n\varepsilon_{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$
8. $\left\{S_{\Delta N_{n+1}C_1K_{n+2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$
9. $\left\{S_{\Delta N_{n+1}F_n\varepsilon_{n+2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

і т.п. (див рис. 2.1.)

Ряди з кубатурною геометричною інтерпретацією пов’язані з послідовностями об’ємів v_n тіл обертання навколо осі ОХ відрізків прямих, розташованих в квадраті:

1. $\overline{N_n N_{n+1}}$;
2. $\overline{A_{n+1}\varepsilon_{n+1}}$;
3. $\overline{\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}}$;
4. $\overline{N_{n+1}C_n}$;
5. $\overline{K_{n+2}C_n}$;
6. $\overline{N_{n+1}C_1}$;
7. $\overline{K_{n+2}C_1}$;
8. $\overline{\varepsilon_{n+2}H_n}$;
9. $\overline{N_{n+1}K_{n+2}}$.

і т.п. (див. рис. 2.1.)

2.1. Генерація рядів з лінійною геометричною інтерпретацією їх членів.

Завдання. Знайти і дослідити на збіжність ряди наступного виду (рис. 2.1.):

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{B_n B_{n+1}}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{N_n N_{n+1}}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varepsilon_{n+1} K_{n+1}}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{N_{n+1} C_n}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{K_{n+2} C_n}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varepsilon_{n+1} C_n}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{N_n K_{n+1}}$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{K_n K_{n+1}}$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{N_{n+1} K_{n+2}}$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{N_{n+1} F_n}$;
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varepsilon_{n+2} H_n}$;
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{A_{n+1} \varepsilon_{n+1}}$;
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varepsilon_{n+2} H_n}$;
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{A_{n+1} H_n}$;
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varepsilon_{n+1} \varepsilon_{n+2}}$.

Розв'язання.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{B_n B_{n+1}}$

Для одержання загального члена ряду використаємо координати точки $B_n\left(1; \frac{1}{1^{n-1}}\right)$ і точки $B_{n+1}\left(\frac{1}{2^n}\right)$

Зрозуміло, що відповідно до рис 2.1.:

$$|\overline{B_n B_{n+1}}| = \left|\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right| = \frac{2}{2^n} - \frac{1}{2^n} 1 = \frac{1}{2^n}$$

Таким чином одержуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{B_n B_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ (I)}$$

Примітка: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{A}_n \mathrm{A}_{n+1}}$ є рядом виду (I)

Ряд (I) є рядом геометричної прогресії з параметрами: $a = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$.

Ряд збіжний, тому що $q < 1$ і має суму S:

$$\mathrm{S} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{S_n} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{\mathrm{n}}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \ (*)$$

Рівність (*) добре візуалізується на рис. 2.1.:

Дійсно:

$$|\overline{B_1 B_2}| + |\overline{B_2 B_3}| + \cdots + |\overline{B_n n_{n+1}}| \to |\overline{A_1 B_1}| = 1$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{N_n N_{n+1}}$

Для знаходження $N_n N_{n+1}$ використаємо два способи:

Перший спосіб:

Застосуємо відому з аналітичної геометрії формулу обчислення відстані між двома точками:

т. $A_1(x_1; y_1)$ і т. $A_2(x_2; y_2)$ [28, 29]

$$|\overline{A_1 A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ (*)$$

В нашому випадку маємо т. $N_n\left(\frac{1}{2^{n-1}}; \frac{1}{2^{n-1}}\right)$, т. $N_{n+1}\left(\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^n}\right)$.

Далі за формулою (*) одержуємо:

$$|\overline{N_n N_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{\Pi-1}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2\left(\frac{1}{2}n - \frac{2}{2^n}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

Одержуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2^n} \text{ (II)}$$

Ряд (II) збіжний до суми $S = \sqrt{2}$ (див рис 2.1.).

Другий спосіб:

Використаємо послідовність трикутників $\{\Delta N_n N_{n+1} \varepsilon_{n+1}\}$ і теорему Піфагора.

Послідовно обчислюємо:

$$|N_1 N_2| = \sqrt{|\overline{N_1 \varepsilon_2}|^2 + |\overline{N_2 \varepsilon_2}|^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|N_2 N_3| = \sqrt{|\overline{N_2 \varepsilon_3}|^2 + |\overline{N_3 \varepsilon_3}|^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

і т.д…: $|\overline{N_n N_{n+1}}| = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$, що підтверджує наявність ряду (II).

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2^n}$ збіжний

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varepsilon_{n+1} K_{n+1}}$;

$$\left|\overline{\varepsilon_{n+1} k_{n+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2^{n+1}} - \frac{2}{2^4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2 \cdot 2^n} - \frac{1}{2^2}\right)^2} = \frac{1}{2^n}\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Одержуємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2^n} \quad (III)$$

Ряд (III) збіжний до суми $s = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ряд (III) можна одержати за допомогою використання рис. 2.1. Візуально спостерігаємо, що $\forall n \in N$: $|\overline{\varepsilon_{n+1} K_{n+1}}| = \frac{1}{2} |\overline{N_n N_{n+1}}|$. Тому використовуючи ряд (**) одержуємо ряд (***). Також можна використати спосіб, пов'язаний з використанням теореми Піфагора.

Перший і другий спосіб можна використовувати на заняттях і для олімпіадних задач в умовах ЗСШ.

Але є спосіб (третій), який варто рекомендувати студентам спеціальності "математика", починаючи з ІІ-го курсу. Тобто, після вивчення курсу аналітичної геометрії і розділу математичного аналізу «Застосування визначених інтегралів в геометрії». Мова йде про використання формули обчислення довжини ліній, які задаються певною неперервною функцією $y = f(x)$, $x \in [a;b]$. [7, 12, 28]

$$l[a;b] = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'_{(x)}\right]^2}\, dx \ (I)$$

В умовах розглядаємих задач рівнянням функції $y = f(x)$ є рівняння прямої, що з'єднує дві точки. Розглянемо цей спосіб на прикладі знаходження ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{N_{n+1}C_n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{N_{n+1}C_n}$:

Для знаходження рівняння прямої $N_{n+1}C_n$ використаємо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки [з курсу аналітичної геометрії]:

$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ (II)

Відповідно до координат точок $N_{n+1}\left(\frac{1}{2^n};\frac{1}{2^n}\right), C_n\left(0;\frac{1}{2^n}\right)$ і рівняння (I) одержуємо:

$$\frac{y-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}} = \frac{x-\frac{1}{2^n}}{0-\frac{1}{2^n}} \Rightarrow \frac{y-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{x-\frac{1}{2^n}}{-\frac{1}{2^n}} \Rightarrow y-\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} - x \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{2^{n-1}} - x \text{ (III)}$$

Використовуючи формули (III) і (I) одержуємо:

$$|\overline{N_{n+1}C_n}| = \int_0^{\frac{1}{2^n}} \sqrt{1+\left(\left(\frac{1}{2^{n-1}}-x\right)^1\right)^2}\,dx = \int_d^{\frac{1}{2^n}} \sqrt{1+1}\,dx = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2^n} \text{ (IV)}$$

Для перевірки використаємо спосіб з координатами точок $N_{n+1}; C_n$.

$$|\overline{N_{n+1}C_n}| = \sqrt{\left(0-\frac{1}{2^n}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2^n}\right)^2+\left(\frac{2}{2^n}-\frac{1}{2^r}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

Ряд (IV) збіжний до суми $S=\sqrt{2}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{K_{n+2}C_n}$

Для знаходження ряду використаємо два способи:

Знайдемо рівняння прямих $\overline{K_{n+2}C_n}$ і використаємо формулу (I)

т. $K_{n+2}\left(\frac{3}{2^{n+1}};\frac{3}{2^{n+1}}\right)$, т. $c_n\left(0;\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

Складаємо рівняння прямої у вигляді (II):

$$\frac{y-\frac{3}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{3}{2^{n+1}}} = \frac{x-\frac{3}{2^{n+1}}}{0-\frac{3}{2^{n+1}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y-\frac{3}{2\cdot 2^n}}{\frac{2}{2^n}-\frac{3}{2\cdot 2^n}} = \frac{2^{n+1}x-3}{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-\frac{3}{2\cdot 2^n} = \frac{1}{2^n}\left(2-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{(-3)}(2^{n+1}x-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2\cdot 2^n}+\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2^n}\frac{1}{2}(2^{n+1}x-3) = \frac{3}{2\cdot 2^n}+\frac{1}{2\cdot 2^n}-\frac{1}{6}\frac{1}{2^n}2^{n+1}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{2^n} - \frac{1}{3}x$$

$$|\overline{k_{n+2}C_n}| = \int_0^{\frac{3}{2^{nt}}} \sqrt[1]{1 + \frac{1}{9}}dx = \frac{\sqrt{10}}{3}\frac{3}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{10}}{2^{n+1}}$$

Маємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}|K_{n+2}C_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{10}}{2}\frac{1}{2^n}$ (V)

Використаємо формулу (II) відстані між двома точками:

$$|\overline{k_{n+2}C_n}| = \sqrt{\left(0 - \frac{3}{2^{n+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{3}{2^{n+1}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{2^{2(n+1)}} + \left(\frac{1}{2^n}\left(2 - \frac{3}{2}\right)\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{2^{2(n+1)}} + \frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{4}} = \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{9}{2^2} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}\frac{1}{2^n}$$

Ряд (V) збігається до суми $S = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\varepsilon_{n+1}C_n}$

Використаємо формулу (II):

$$|\overline{\varepsilon_{n+1}C_n}| = \sqrt{\left(0 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{2^{2n}} + \left(\frac{2}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}}} = \sqrt{\frac{5}{2^{2n}}} = \sqrt{5}\frac{1}{2^n};$$

Маємо ряд наступного виду: $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{5}\frac{1}{2^n}$ (VI)

Ряд (VI) збігається до суми $S = \sqrt{5}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{N_nK_{n+1}}$;

Для одержання ряду використаємо координати точок N_n і K_{n+1} :

т. $N\left(\frac{1}{2^{n-1}};\frac{1}{2^{n-1}}\right)$; т. $K_{n+1}\left(\frac{3}{2^{n+1}};\frac{3}{2^{n+1}}\right)$

$$|\overline{N_n k_{n+1}}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2+\left(\frac{3}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2^n}\left(\frac{3}{2}-2\right)\right)^2+\left(\frac{1}{2^n}\left(\frac{3}{2}-2\right)\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$$

Одержано ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ (VII)

Ряд (VII) збіжний до суми $S=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Візуально за рисунком 2.1 можна побачити, що:

$$|\overline{N_1K_2}|+|\overline{N_2K_3}|+|\overline{N_3K_4}|+\cdots+|\overline{N_nK_{n+1}}| = \frac{1}{2}\overline{|0N_1|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{K_nK_{n+1}}$

Застосовуємо координати точок $K_n,\ K_{n+1}$

$K_1(1;1); K_2\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2};\frac{1+\frac{1}{2}}{2}\right)\sim\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right); K_3\left(\frac{3}{8};\frac{3}{8}\right);$

$$K_4\left(\frac{3}{16};\frac{3}{16}\right);\cdots;\ K_{n+1}\left(\frac{3}{2^{n+1}};\frac{3}{2^{n+1}}\right);\ K_{n+2}\left(\frac{3}{2^{n+2}};\frac{3}{2^{n+2}}\right)$$

Послідовно обчислюємо:

$$|\overline{K_{n+1}K_{n+2}}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2^{n+1}}-\frac{3}{2^{n+2}}\right)^2+\left(\frac{3}{2^{n+1}}-\frac{3}{2^{n+2}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3^2}{(2^{n+2})^2}+\frac{3^2}{(2^{n+2})^2}} = \frac{3}{2^{n+2}}\sqrt{2}$$

Маємо ряд, який записується наступним чином:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{2^{n+2}}\right)$ (VIII)

$$S = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4} \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot 1 = \sqrt{2}$$

Ряд (VIII) збіжний і має суму $\sqrt{2}$, що візуально спостерігається на рис. 2.1.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{N_{n+1}K_{n+2}}$ – це ряд (VII). Але для його знаходження використаємо інший спосіб.

Врахуємо те, що трикутники послідовності $\{\Delta N_{n+1}C_1K_{n+2}\}$ – прямокутні. Крім того відомі ряди:

$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{N_{n+1}C_n}$ (IV); $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{K_{n+2}C_n}$ (V), де $|\overline{N_{n+1}C_n}| = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$; $|\overline{K_{n+2}C_n}| = \frac{\sqrt{10}}{2}\frac{1}{2^n}$;

Сказане дає можливість знаходити катет $|\overline{N_{n+1}K_{n+1}}|$ за теоремою Піфагора:

$$\sqrt{|\overline{K_{n+2}C_n}|^2 - |\overline{N_{n+1}C_n}|^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\frac{1}{2^n}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2^n}\right)^2} = \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{10}{4} - 2} = \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$$

Маємо ряд (IX): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$. (IX) ~ (VII)

Аналогічно до ряду (VII), ряд (IX) збіжний до суми $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$, що візуально спостерігається на рис. 2.1.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{N_{n+1}F_n}$

Координати точки F_n не відомі. Тому для знаходження $|N_{n+1}F_n|$ використаємо послідовне обчислення:

$|\overline{N_2F_1}|, |\overline{N_3F_2}|, \dots, |\overline{N_{n+1}F_n}|$, що дасть можливість знайти загальний член ряду $|\overline{N_{n+1}F_n}|$.

$|\overline{N_2F_1}|$: Для знаходження $|\overline{N_2F_1}|$ використаємо наступні дії:

Враховуємо, що $\overline{N_2F_1} \perp \overline{\varepsilon_2\varepsilon_3}$;

Припускаємо, що $|\overline{F_1\varepsilon_3}| = x$, тоді $|\overline{\varepsilon_2F_1}| = |\overline{\varepsilon_2\varepsilon_3}| - x$ (*) , де

$$|\overline{\varepsilon_2\varepsilon_3}| = \sqrt{(|\overline{N_2\varepsilon_2}|)^2 + \left(\left|\overline{N_2\xi_3}\right|\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}\ (**)$$

Одержуємо $|\overline{\varepsilon_2 F_1}| = \frac{\sqrt{5}}{4} - x$ (***)

Для знаходження x використовуємо рівняння:

$$|\overline{F_1 N_2}| = \sqrt{|\overline{N_2\varepsilon_3}|^2 - |\overline{\varepsilon_3 F_1}|^2} = \sqrt{\frac{1}{16} - x^2} =$$

$$= \sqrt{|\overline{N_2\varepsilon_2}|^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{4} - x\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{\sqrt{5}}{4} - x\right)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{16} - x^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{\sqrt{5}}{4} - x\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{5}{16} + \frac{\sqrt{5}}{2}x - x^2 =$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{5}}{2}x - x^2 \Rightarrow \frac{1}{16} = -\frac{1}{1b} + \frac{\sqrt{5}}{2}x \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}x = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{20}(****)$$

Шляхом використання рівностей (*),(***) і (****) і $\Delta N_2 F \varepsilon_3$ обчислюємо $|\overline{N_2 F_1}|$:

$$|\overline{N_2 F_1}| = \sqrt{|\overline{N_2\varepsilon_3}|^2 - |\overline{\varepsilon_3 F_1}|^2} = \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{5}{400}} = \sqrt{\frac{20}{400}} = \frac{2\sqrt{5}}{2O} = \frac{\sqrt{5}}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\overline{N_2 F_1}| = \frac{\sqrt{5}}{2 \cdot 5}$$

Аналогічно знаходимо $|\overline{N_3 F_2}| = \frac{\sqrt{5}}{2^2 \cdot 5}$ і т.д.

Одержимо ряд (X):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2^n}\ (X)$$

Ряд (X) можна одержати іншими способами. Наприклад, за допомогою площ послідовності трикутників: $\Delta\varepsilon_{n+1}N_{n+1}\varepsilon_{n+2}$

$$S_1 = S_{\Delta\varepsilon_2 N_2 \varepsilon_3} = \frac{1}{2}|\overline{N_2\varepsilon_3}| \cdot |\overline{N_2\varepsilon_2}| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}\ (*)$$

З іншого боку маємо:

$$S_1 = \frac{1}{2}|\overline{F_1N_2}| \cdot |\overline{\varepsilon_2\varepsilon_3}| = \frac{1}{2}|\overline{F_1N_2}|\sqrt{|\overline{N_2\varepsilon_3}|^2 + |\overline{N_2\varepsilon_2}|^2} = \frac{1}{2}|\overline{F_1N_2}|\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{4}|\overline{F_1N_2}|\ (**)$$

Праві частини рівностей (*) і (**) тотожні, тому:

$$|\overline{F_1N_2}| = \frac{1}{16} : \frac{\sqrt{5}}{8} = \frac{8}{16\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2\cdot 5}$$

Обчислимо $S_2 = S_{\Delta\varepsilon_3 N_3 \varepsilon_4}$:

$$S_2 = \frac{1}{2}|\overline{N_3\varepsilon_3}| \cdot |\overline{N_3\varepsilon_4}| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{64}\ (*)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}|\overline{F_2N_3}| \cdot |\overline{\varepsilon_3\varepsilon_4}| = \frac{1}{2}|\overline{F_2N_3}|\sqrt{|\overline{N_3\varepsilon_3}|^2 + |\overline{N_3\varepsilon_4}|^2} =$$

$$= \frac{1}{2}|\overline{F_2N_3}|\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{8}|\overline{F_2N_3}|\ (**)$$

З рівностей (*) і (**) одержимо:

$$\frac{1}{2}|\overline{F_2N_3}|\frac{\sqrt{5}}{8} = \frac{1}{64} \Rightarrow |\overline{F_2N_3}| = \frac{\sqrt{5}}{2^2\cdot 5}$$

і т.д

Ряд (X) збіжний до суми $S = \frac{\sqrt{5}}{5}$, що візуально спостерігається на рис. 2.1.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varepsilon_{n+2}H_n}$

Для знаходження $|\overline{\varepsilon_{n+2}H_n}|$ використаємо спосіб застосований при знаходженні ряду (10):

Обчислимо площі послідовності трикутників: $\{\Delta\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}A_{n+1}\}$

$$s_1 = S_{\Delta_{\varepsilon_2 \varepsilon_3 A_2}} = S_{\Delta \sum_2 N_2 A_2} - S_{\Delta \varepsilon_2 \varepsilon_3 N_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = \frac{1}{24} \ (*)$$

З іншого боку:

$$S_1 = \frac{1}{2} |\overline{\varepsilon_3 H_1}| \cdot |\overline{\varepsilon_2 A_2}| = \frac{1}{2} |\overline{\varepsilon_3 H_1}| \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} |\overline{\varepsilon_3 H_1}| \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} |\overline{\varepsilon_3 H_1}| \ (**)$$

Використовуємо праві частини рівностей (*) і (**) і одержуємо:

$$|\overline{\varepsilon_3 H_1}| = \frac{1}{2^4} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2^2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2^3}$$

$$S_2 = S_{\Delta \varepsilon_3 \varepsilon_4 A_3} = s_{\Delta \varepsilon_3 N_3 A_3} - s_{\Delta \varepsilon_3 \varepsilon_4 N_3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{32} - \frac{1}{64} = \frac{1}{64} \ (**)$$

Маємо рівність:

$$\frac{\sqrt{2}}{8} |\overline{\varepsilon_4 H_2}| = \frac{1}{64} \Rightarrow |\overline{\varepsilon_4 H_2}| = \frac{1}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2^4}$$

Таким чином можна передбачити, що:

$$|\overline{\varepsilon_{n+2} H_4}| = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+2}}$$

Одержуємо ряд (XI):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Ряд (XI) збіжний до суми $S = \frac{\sqrt{2}}{4}$, що візуально спостерігається на рис. 2.1.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{A_{n+1} \varepsilon_{n+1}}$

Даний ряд є рядом довжин діагоналей $|\overline{A_{n+1}\varepsilon_{n+1}}|$ послідовності квадратів $A_nA_{n+1}N_{n+1}\varepsilon_{n+1}$, тому можемо стверджувати, що:

Таким чином одержуємо ряд (XII):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\frac{1}{2^n}\ \text{(XII)}$$

Зрозуміло, що ряд (XII) збігається до суми $S=\sqrt{2}$, що добре візуалізується на рис 2.1.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\varepsilon_{n+2}H_n}$

Для одержання ряду (XIII) використаємо ряди (XII) і (III).

Якщо проаналізувати рис 2.1., то можна прийти до висновків:

Пряма $\overline{O\varepsilon_2}$ є бісектрисою кута ε_1OA_1

Пряма $\overline{O\varepsilon_2}$ розподіляє навпіл катети $|\overline{N_{n+1}A_{n+1}}|$ послідовності прямокутних трикутників $\Delta\varepsilon_{n+1}N_{n+1}A_{n+1}$.

$\overline{\varepsilon_{n+1}K_{n+1}}\perp\overline{O\varepsilon_1}$; $\overline{\varepsilon_{n+1}H_4}\perp\overline{\varepsilon_{n+1}A_{n+1}}$.

За вказаними умовами (1-3) можна зробити висновок:

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\varepsilon_{n+2}H_n}$ є рядом (III), тобто:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\varepsilon_{n+2}H_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2^n}\ \text{(XIII)}$$

Для перевірки сказаного обчислимо довжини $|\overline{\varepsilon_3K_3}|$ і $|\overline{\varepsilon_3H_1}|$:

$$|\overline{\varepsilon_3K_3}|=\sqrt{\left(\frac{3}{2^3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2^3}-\frac{1}{2^2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{-2^3}\right)^2+\left(\frac{1}{2^3}\right)^2}=\sqrt{2\cdot\frac{1}{2^6}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2^5}}=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2^3}$$

Значення $|\overline{\varepsilon_3H_1}|$ обчислюємо за допомогою координат т. $\varepsilon_3\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ і рівняння прямої $\overline{\varepsilon_2A_2}$:

$$\overline{\varepsilon_2 A_2}: \frac{y-0}{\frac{1}{2}-0} = \frac{x-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow y = x - \frac{1}{2} \Rightarrow y - x + \frac{1}{2} = 0 \ (*)$$

Далі використаємо формулу обчислення відстані «d» від заданої точки $M(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$.

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| (**)$$

Відповідно до рівняння (*) і координат точки $\varepsilon_3\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ обчислюємо:

$$|\overline{\varepsilon_3 H_1}| = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Отже, аналогічно до ряду (III), ряд (XIII) збіжний до суми $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{A_{n+1} H_n}$

Для знаходження $|\overline{A_{n+1} H_n}|$ використаємо ряд (XIII) і послідовність трикутників (прямокутних(див рис. 2.1.)) $\Delta A_{n+1} H_n \varepsilon_{n+2}$

$$\Delta A_2 H_1 \varepsilon_3: |\overline{A_2 H_1}| = \sqrt{|\overline{A_2 \varepsilon_3}|^2 - |\overline{\varepsilon_3 H_1}|^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{32}} = \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2^3}$$

$$\Delta A_3 H_2 \varepsilon_4: |\overline{A_3 H_2}| = \sqrt{|\overline{A_3 \varepsilon_4}|^2 - |\overline{\varepsilon_4 H_2}|^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{16}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{64} - \frac{1}{256}} = \frac{\sqrt{2}}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2^4}$$

……………………………………………………………………

$$\Delta A_{n+1} H_n \varepsilon_{n+2}: |\overline{A_{n+1} H_4}| = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{2^n}$$

Одержуємо ряд (XIV):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{2^n} \, (XIV)$$

Ряд (XII) збігається до суми $S = \frac{\sqrt{2}}{4}$, що добре візуалізується на рис 2.1.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}}$

Використаємо координати точки $\varepsilon_{n+1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}; \frac{1}{2^n}\right)$ і точки $\varepsilon_{n+2}\left(\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n+1}}\right)$:

$$|\overline{\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{1}{2^n}$$

Одержуємо ряд (XV):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{1}{2^n} \; (XV)$$

Ряд (XV) збігається до суми S:

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2} \; (XV)$$

2.2. Генерація рядів з квадратичною геометрчною інтерпретацією

Завдання. Знайти і дослідити ряди наступного виду (рис. 2.1.):

1. $\sum_{n=1}^{\infty}|S\Delta N_{n+1}C_nK_{n+2}|$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}|SA_nA_{n+1}N_{n+1}\varepsilon_{n+1}|$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}|S\Delta N_nN_{n+1}\varepsilon_{n+1}|$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty}|SA_nA_{n+1}N_{n+1}N_n|$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty}|S\Delta A_{n+1}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}|$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty}|S\Delta\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}N_{n+1}|$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty}|S\Delta A_{n+1}H_n\varepsilon_{n+2}|$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty}|S\Delta N_{n+2}K_{n+2}C_1|$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty}|S\Delta N_{n+1}N_{n+2}C_1|$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty}|S\Delta N_{n+1}N_{n+2}C_n|$;
11. $\sum_{n=1}^{\infty}|S\Delta\varepsilon_{n+1}H_n\varepsilon_{n+2}|$.

Для генерації рядів з квадратурною геометричною інтерпретацією будемо використовувати відомі формули обчислення площ плоских фігур:

Трикутників:

$$S = \frac{1}{2}ah \ (1)$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin ab \ \ (2)$$

$$S = \tfrac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)](3),$$

Де $(x_1; y_1), (x_2; y_2); (x_3; y_3)$ – координати точок вершин трикутника.

$$S' = \int_a^b f(x)\,dx \ (4)$$

Формули (1,2) відомі зі шкільного курсу математики. Формула (3) відома з курсу «Аналітична геометрія» [23, 28].

Формула (4) вивчається в розділі математичного аналізу «Застосування визначених інтегралів в геометрії» [17, 23, 30].

1. $\sum_{n=1}^{\infty}|S\Delta N_{n+1}C_nK_{n+2}|$

Для одержання загального члена ряду використаємо:

Координати наступних точок:

$$N_{n+1}\left(\frac{1}{2^n};\frac{1}{2^n}\right), C_n\left(0;\frac{1}{2^{n+1}}\right), K_{n+2}\left(\frac{3}{2^{n+2}};\frac{3}{2^{n+2}}\right)$$

Ряди (IV) і (IX) і формулу (3):

Застосовуємо координати точок N_{n+1}, C_n, K_{n+2} і формулу (3) обчислення площі трикутників:

$$S\Delta N_{n+1}C_nK_{n+2} = \frac{1}{2}\left|\left[\left(0-\frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{3}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^n}\right)-\left(\frac{3}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{1}{2^{n-1}}--\frac{1}{2^n}\right)\right]\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left[-\frac{3}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{3}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n-1}}-\frac{1}{2^{2n}}\right]\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left[-\frac{3}{2^{2n+1}}+\frac{4}{2^{2n+1}}\right]\right| = \frac{1}{4}\frac{1}{2^{2n}}$$

$$S\Delta N_{n+1}C_nK_{n+2} = \frac{1}{2}|\overline{N_{n+1}C_n}||\overline{N_{n+1}K_{n+2}}| = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2^n}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2^n} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^{2n}}$$

Одержуємо ряд (XVI):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 2^n} \quad \text{(XVI)}$$

Ряд (XVI) має збіжний до суми $S = \frac{1}{4}$.

Розглянемо значення частинних сум S_n:

$$S_n = \frac{1}{2}|\overline{N_{n+1}C_n}||\overline{N_{n+1}K_{n+2}}|, \qquad (*)$$

Де $\overline{N_{n+1}C_n = \frac{\sqrt{2}}{2^n}}$, $N_{n+1}K_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2^n}$ (**)

Враховуючи (**) обчислюємо S_n:

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{2n}} \Rightarrow$$

$n = 1: S_1 = \frac{1}{8} = 0{,}125$

$n = 2: S_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32} = 0{,}15625$

$n = 3: S_3 = \frac{5}{32} + \frac{1}{128} = \frac{21}{128} = 0{,}1640625$

… …

Зростання до $S = 0{,}25$ має довільну швидкість. Що можна спостерігати на рис 2.1.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} |SA_n A_{n+1} N_{n+1} \varepsilon_{n+1}|$ – ряд площ послідовності квадратів $\{A_n A_{n+1} \varepsilon_{n+1}\}$.

Загальний член ряду візуально спостерігається на рис 2.1. і має вираз:

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{2^{2n}} \Rightarrow$$

Одержуємо ряд (XVII):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \text{ (XVII)}$$

Ряд (XVII) є рядом геометричної прогресії з параметрами: $a = \frac{1}{4}, q = \frac{1}{4}$. Обчислимо суму ряду S:

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Ряд (XVII) збіжний до суми $S = \frac{1}{3}$.

За допомогою ряду (XVII) досить просто (з використанням рис. 2.1.) одержується ряд площ послідовності трикутників $\{\varepsilon_{n+1} N_n N_{n+1}\}$, це ряд виду (XVII*):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^n} \text{ (XVII ∗)}$$

Ряд (XVII*) збігається до суми $S = \frac{1}{6}$.

Обчислимо суму рядів (XVII) і (XVII*):

$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ ($'$) , результат візуально видно на рис. 2.1.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} |S\Delta N_n N_{n+1} \varepsilon_{n+1}|$

Зрозуміло, що ряд (XVIII) є рядом (XVII*) (див. рис. 2.1.):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^n} \text{ (XVIII)}$$

Аналогічно до ряду (XVII*), ряд (XVIII) збігається до суми $S = \frac{1}{6}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} |SA_n A_{n+1} N_{n+1} N_n|$

Ряд (XIX) можна одержати різними способами, найпростішим з яких можна вважати знаходження за допомогою суми рядів (XVII) і (XVIII):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=}^{\infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4^n} \text{ (XIX)}$$

Ряд збігається до суми $S = \frac{1}{2}$ (див. рис. 1).

5. $\sum_{n=1}^{\infty} |S\Delta A_{n+1} \varepsilon_{n+1} \varepsilon_{n+2}|$

Для знаходження ряду (XX) використаємо три способи.

Перший спосіб.

Використаємо формулу (3) і координати точок:

$$A_{n+1}\left(\frac{1}{2^n}; 0\right), \varepsilon_{n+1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}; \frac{1}{2^n}\right), \varepsilon_{n+2}\left(\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$S\Delta A_{n+1}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2} = \frac{1}{2}\left|\left[\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{1}{2^{n+1}} - 0\right) - \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{1}{2^n} - 0\right)\right]\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{4}\frac{1}{2^{2n}}$$

Одержуємо ряд (XX):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{1}{4^n} \text{ (XX)}$$

Другий спосіб.

Використаємо формулу (1) і ряди (XIII) і (XII):

$S\Delta A_{n+1}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^n} \Rightarrow$ Одержуємо ряд (XX).

Третій спосіб.

Використаємо ряди (XVII) і ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |S\Delta\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}K_{n+1}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{1}{2^{2n}}$$

. Одержуємо:

$$S\Delta A_{n+1}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{4^n} - \frac{1}{4}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^n} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{1}{4^n} \text{ (XX)}$$

Примітка.

Якщо проаналізувати зміст рис. 2.1., то можна знайти інші способи одержання ряду (XX).

Ряд (XX) збігається до суми $s = \frac{1}{4}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} |S\Delta\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}N_{n+1}|$, цей ряд одержано як допоміжний при знаходженні ряду (XX):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{1}{4^n} \text{ (XXI)}$$

Ряд (XXI) збігається до суми $s = \frac{1}{4}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}|S\Delta A_{n+1}H_n\varepsilon_{n+2}|$

Загальний член ряду (XXII) одержимо за допомогою відомих рядів: (I) і (XI) і формули (1):

$S\Delta A_{n+1}H_n\varepsilon_{n+2} = \frac{1}{2}|\overline{A_{n+1}H_n}||\overline{\varepsilon_{n+2}H_n}|$, (*)

Де $|\overline{\varepsilon_{n+2}H_n}| = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{2^n}$ (**)

$|\overline{A_{n+1}H_n}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{2^n}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4\cdot 2^{2n}} - \frac{1}{8}\frac{1}{2^{2n}}} = \frac{\sqrt{1}}{4}\frac{1}{2^n}$ (***)

Використовуючи рівності (*), (**) і (***) одержуємо загальний член ряду (XXII):

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2^n} = \frac{1}{16}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{16}\frac{1}{4^n} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16}\frac{1}{4^n} \text{ (XXII)}$$

Ряд (XXII) збігається до суми $S = \frac{1}{16}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}|S\Delta N_{n+2}K_{n+2}C_1|$

Загальний член даного ряду найпростіше можна знайти за допомогою формули (3) і координат точок: $N_{n+2}\left(\frac{1}{2^{n+1}};\frac{1}{2^{n+1}}\right), K_{n+2}\left(\frac{3}{2^{n+2}};\frac{3}{2^{n+2}}\right), C(0;1)$

$$S\Delta N_{n+2}K_{n+2}C_1 = \frac{1}{2}\left|\left[\left(\frac{3}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(0 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{3}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right]\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left[\frac{3}{2^{n+2}} - \frac{3}{2^{2n+3}} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{3}{2^{2n+3}} - \frac{1}{2^{2n+2}}\right]\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{3}{2^{n+2}} - \frac{2}{2^{n+2}}\right| = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{2n+2}} = \frac{1}{8}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{8}\frac{1}{4^n}$$

Одержуємо ряд (XXIII):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8}\frac{1}{4^n} \text{ (XXIII)}$$

Ряд (XXIII) збіжний до суми $S = \frac{1}{8}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}|S\varDelta N_{n+1}N_{n+2}C_1|$

Загальний член ряду (XXIV) одержимо за допомогою формули (3) і координат точок: $N_{n+1}\left(\frac{1}{2^n};\frac{1}{2^n}\right), N_{n+2}\left(\frac{1}{2^{n+1}};\frac{1}{2^{n+1}}\right), C(0;1)$.

$$S\varDelta N_{n+1}N_{n+2}C_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left[\left(\frac{3}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)-\left(0-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{3}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^n}\right)\right]\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left[\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{2n+2}}-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{2n+1}}+\frac{1}{2^{2n+2}}-\frac{1}{2^{2n+1}}\right]\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|-\frac{1}{2^{n+1}}\right| = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}\frac{1}{2^n}.$$

Маємо ряд (XXIV):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\frac{1}{2^n} \text{ (XXIV)}$$

Ряд (XXIV) збіжний до суми $S=\frac{1}{4}$:

$$S = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

Виконання цієї рівності підтверджується візуально на рис 2.1.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}|S\varDelta N_{n+1}N_{n+2}C_n|$

Загальний член ряду знайдемо за допомогою рядів (II) і (IV) і формули (1):

$S\varDelta N_{n+1}N_{n+2}C_n = \frac{1}{2}|\overline{N_{n+1}N_{n+2}}||\overline{N_{n+1}C_n}|$, (*) де

відповідно до ряду (II) маємо: $|\overline{N_{n+1}N_{n+2}}| = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ (**);

відповідно до ряду (IV) маємо: $|\overline{N_{n+1}C_n}| = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$ (***)

Враховуючи рівності (**) і (***) за рівністю (*) одержуємо загальний член ряду (XXV):

$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}\frac{\sqrt{2}}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2}\frac{1}{4^n}$ ⇒ одержуємо ряд (XXV):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{4^n}\text{ (XXV)}$$

Ряд збігається до суми S:

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}|S\Delta\varepsilon_{n+1}H_n\varepsilon_{n+2}|$

Використовуючи рис. 2.1., бачимо, що $\forall n\in N$:

$$S\Delta\varepsilon_{n+1}H_n\varepsilon_{n+2}=S\Delta A_{n+1}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}-S\Delta A_{n+1}H_n\varepsilon_{n+2}(*)$$

В рівності (*) доданок перший відповідає ряду (XX), а другий відповідає ряду (XXII). Тому, використовуючи загальні члені рядів (XX) і (XXII) одержуємо загальний член ряду (XXVI):

$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4^n}-\frac{1}{16}\frac{1}{4^n}=\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{4^n}\Rightarrow$ одержимо ряд (XXVI):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{4^n}\text{ (XXVI)}$$

Ряд (XXVI) збігається до суми $S=\frac{1}{16}$.

2.3. Генерація рядів з кубаторною геометричною інтерпретацією.

Завдання полягає у тому, щоб за допомогою елементів квадрата (рис. 2.1.) знайти ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n \quad (1)$$

де V_n- об'єм певного тіла обертання елемента квадрата навколо осі OX.

У випадках, коли створюється циліндр або конус для знаходження загального члена ряду V_n будемо використовувати, відомі з елементарної геометрії, формули обчислення об'ємів тіл.

В інших, більш складних тілах обертання, будемо застосовувати загальну формулу обчислення об'ємів тіл обертання:

$$V_n = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx \quad (2)$$

Одержання рядів виду (1) будемо у вигляді розв'язання окремих наступних задач.

Задача 1. Визначити ряд з загальним членом V_n, який відображає величини об'ємів тіл обертання навколо осі OX послідовності прямих $N_{n+1}\varepsilon_{n+1}$ (рис. 2.1.)

Розв'язання

За рис. 2.1. видно, що при обертанні прямих навколо осі OX створюється прямий коловий циліндр $\forall n \in N$ з радіусом основи, який дорівнює абсцисам точки ε_{n+1}, тобто має значення $\frac{1}{2^n}$.

Висота циліндра дорівнює величинам відрізків:

$$|\overline{A_n A_{n+1}}| = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

Одержуємо вираз V_n :

$$V_n = \pi \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^n} = \pi \frac{1}{2^{3n}} \ (*)$$

Одержуємо ряд (XXVII):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi \frac{1}{8^n} \text{ (XXVII)}$$

Ряд (XXVII) збіжний і має суму S:

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}\pi$$

Ряд (XXVII) можна одержати і за допомогою формули (2):

$$V_n = \pi \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} y_n^2\, dx = \left\{y_n = \frac{1}{2^n}\right\} = \pi \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 dx = \pi \frac{1}{2^{2n}}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = \pi \frac{1}{2^{3n}}$$

Задача 2. Визначити ряд величин об’ємів тіл, які створюються обертанням навколо осі OX, відрізків $\overline{O\varepsilon_{n+1}}$

Розв’язання.

З рис. 2.1. видно, що пряма $\overline{O\varepsilon_2}$, на якій розташовані відрізки $\overline{O\varepsilon_{n+1}}$ має рівняння(т. $\varepsilon_{n+1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}; \frac{1}{2^n}\right)$):

$$y = \frac{1}{2}x \ (*)$$

Використовуємо формулу (2), рівняння (*) і абсциси точки ε_{n+1} знаходимо V_n:

$$v_n = \pi \int_0^{\frac{1}{2^{n-1}}} \left(\frac{1}{2}x\right)^2 dx = \frac{1}{12}\pi \frac{1}{(2^{n-1})^3} = \frac{1}{12}\pi \frac{1}{2^{3n} \cdot 2^{-3}} = \frac{2}{3}\pi \frac{1}{8^n}$$

Одержуємо ряд (XXVIII):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3}\pi \frac{1}{8^n} \text{ (XXVIII)}$$

Примітка. Якщо $n=1$, то маємо конус з висотою 1 і радіусом основи $\frac{1}{2}$, тому:

$$v_n=\frac{1}{3}\pi\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{12}\pi$$

Такий же результат одержується за формулою (XXVIII). Дійсно:

Нехай $n=1$:

$$V_1=\frac{2}{3}\pi\frac{1}{8}=\frac{1}{12}\pi$$

Ряд збіжний до суми S:

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\pi\frac{\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2}{21}\pi$$

Задача 3. Знайти ряд об'ємів послідовності усічених конусів, що створюються шляхом обертання навколо осі OX, послідовності відрізків прямих $|\overline{N_nN_{n+1}}|$.

Розв'язання. До розв'язання задачі задіємо координати точок: $N_n\left(\frac{1}{2^{n-1}}\,i\,\frac{1}{2^{n-1}}\right), N_{n+1}\left(\frac{1}{2^n};\frac{1}{2^n}\right)$ і формулу (2), враховуючи, що т. N_n знаходиться на прямій $\overline{ON_1}$, яка має рівняння: $y=x$.

За формулою (2) одержуємо:

$$V_n=\pi\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}}x_n^2\,dx=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2^{3n-3}}-\frac{1}{2^{3n}}\right)=\frac{1}{3}\pi\frac{1}{8^n}\cdot(8-1)=\frac{7}{3}\pi\frac{1}{8^n}$$

Одержується ряд (XXIX):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{3}\pi\frac{1}{8^n}\ \text{(XXIX)}$$

Ряд (XXIX) збіжний до суми S:

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{7}{3}\pi\frac{\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{7}{8}}=\frac{1}{3}\pi$$

Те, що ряд (XXIX) має суму $S = \frac{1}{3}\pi$ можна візуально спостерігати на рис. 2.1., тому що сума об'ємів V_n дорівнює об'єму конуса, створеного усією прямою $\overline{O\varepsilon_1}$, радіус основи і висота дорівнюють 1, тому $V_k = \frac{1}{3}\pi 1^2 \cdot 1 = \frac{1}{3}\pi$.

Задача 4. Визначити ряд, членами якого є величини об'ємів, які створюються обертанням навколо осі OX послідовності відрізків прямих $\overline{\varepsilon_{n+2}H_n}$.

Розв'язання. Знаходимо рівняння послідовності прямих, на яких розташовані точки $\varepsilon_{n+2}\left(\frac{1}{2^n};\frac{1}{2^{n+1}}\right), H_n\left(\frac{3}{2^{n+1}};\frac{1}{2^{n+2}}\right)$:

$$\frac{y-\frac{1}{2^{n+2}}}{\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+2}}} = \frac{x-\frac{3}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}-\frac{3}{2^{n+1}}} \Rightarrow y-\frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^{n+2}}\cdot\frac{x-\frac{3}{2^{n+1}}}{\left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y-\frac{1}{2^{n+2}} = \frac{3}{2^{n+2}}-\frac{1}{2}x \Rightarrow y = \frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}x\ (*)$$

Застосовуємо формулу (2) і рівняння (*):

$$V_n = \pi\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{3}{2^{n+1}}}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}x\right)^2 dx = \pi\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{3}{2^{n+1}}}\left(\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{2^n}x+\frac{1}{4}x^2\right)dx =$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2^{2n}}\left(\frac{3}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{9}{2^{3n+3}}-\frac{1}{2^{3n}}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{27}{2^{3n+3}}-\frac{1}{2^{3n}}\right)\right] =$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{l}{2^{2n+1}}-\frac{9}{2^{4n+4}}+\frac{1}{2^{4n+1}}\right] = \pi\left[\frac{2}{2^{4n+1}}-\frac{9}{2^{4n+4}}\right] = \pi\frac{7}{2^{4n+4}} = \pi\frac{7}{16}\frac{1}{16^n}$$

$\Rightarrow$ Одержуємо ряд (XXX):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\pi\frac{7}{16}\frac{1}{16^n}\ \text{(XXX)}$$

Ряд збіжний до суми S:

$$S = \pi\frac{7}{16}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{15}{16}} = \frac{7}{240}\pi \approx 0{,}0916\pi$$

Задача 5. Скласти ряд величин об'ємів V_n, які створюються обертанням навколо осі OX послідовності прямих $\overline{C_n N_{n+1}}$ (рис. 2.1.)

Розв'язання. Для знаходження рівнянь послідовності прямих $C_n N_{n+1}$ скористуємось координатами т. $C_n\left(0; \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ і т. $N_{n+1}\left(\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^n}\right)$:

$$\frac{y - \frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{x - 0}{\frac{1}{2^n} - 0} \Rightarrow y - \frac{1}{2^n - 1} = \left(-\frac{1}{2^n}\right) \cdot 2^n x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2^{n-1}}(-x) = -\frac{1}{2^{n-1}} x \; (*)$$

Визначимо V_n:

$$v_n = \pi \int_0^{\frac{1}{2^n}} \left(\left(-\frac{2}{2^n}\right) x\right)^2 dx = \pi \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{2^{3n}} = \pi \frac{4}{3} \frac{1}{2^{5n}} = \pi \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(32)^n}$$

Одержуємо ряд (XXXI):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(32)^n} \quad \text{(XXXI)}$$

Ряд (XXXI) збіжний до суми S:

$$S = \pi \frac{4}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{32}\left(1 - \frac{1}{32^n}\right)}{\frac{31}{32}} = \frac{4}{93}\pi \approx 0{,}13505\pi$$

Задача 6. Скласти ряд величин об'ємів V_n, які створюються обертанням навколо осі OX послідовності прямих $\overline{C_1 N_{n+1}}$.

Розв'язання. За допомогою координат точок $C_1(0;1), N_{n+1}\left(\frac{1}{2^n};\frac{1}{2^n}\right)$ знаходимо загальне рівняння послідовності прямих $\overline{C_1N_{n+1}}$:

$$\frac{y-\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2^n}}=\frac{x-\frac{1}{2^n}}{0-\frac{1}{2^n}} \Rightarrow y-\frac{1}{2^n}=(2^n-1)\left(\frac{1}{2^n}-x\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2^n}+1-2^n x-\frac{1}{2^n}+x \Rightarrow y=x(1-2^n)+1 \ (*)$$

За допомогою формули (2) і рівності (*) знаходимо ряд V_n:

$$v_n=\pi\int_0^{\frac{1}{2^n}}\left(1+x(1-2^n)\right)^2 dx=$$

$$=\ \pi\int_0^{\frac{1}{2^n}}[1+2x(1-2^n)+x^2(1-2^n)^2]\,dx=$$

$$=\ \pi\left[\frac{1}{2^n}+(1-2^n)\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3}(1-2^n)^2\frac{1}{2^{3n}}\right]=$$

$$=\ \pi\left[\frac{2^{2n}}{2^3 n}+\frac{(1-2^n)^{2^n}}{2^{3n}}+\frac{1}{3}(1-2^n)^2\right]=$$

$$=\pi\frac{1}{2^{3n}}\left[2^{2n}+2^n-2^{2n}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}2^{n+1}+\frac{1}{s}2^{2n}\right]=$$

$$=\pi\frac{1}{2^{3n}}\left[2^n-\frac{2}{3}2^n+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}2^{2n}\right]=\pi\frac{1}{2^{3n}}\left[\frac{1}{3}2^n+\frac{1}{3}2^{2n}+\frac{1}{3}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{3}\frac{1}{2^{3n}}[1+2^n+2^{2n}]=\frac{\pi}{3}\frac{1}{2^{3n}}[1+2^n(1+2^n)]$$

Одержуємо ряд (XXXII):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3}\frac{1}{2^{3n}}[1+2^n(1+2^n)]\ \text{(XXXII)}$$

Для дослідження ряду (XXXII) представимо його у вигляді суми трьох рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{(8)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3}\cdot\frac{2^n}{2^{3n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3}\cdot\frac{2^{2n}}{2^{3n}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3}\frac{1}{8^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3}\frac{1}{2^{2n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2^n}\ (*)$$

Усі ряди в правій частині рівності (*) збіжні і мають наступні суми S_1, S_2, S_3:

$$S_1=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3}\frac{\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{8^n}\right)}{1-\frac{1}{8}}=\frac{\pi}{21}\ ;$$

$$S_2=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3}\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{9}\ ;$$

$$S_3=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6}\,.$$

Таким чином одержуємо суму S ряду (XXXII):

$$S=\frac{\pi}{21}+\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{41}{42}$$

2.4. Дослідження частинних сум одержаних рядів.

Важливою частиною числових рядів є швидкість збігання частинних сум S_n до суми ряду, якщо ряд збіжний. Важливо також досліджувати значення S_n від значення n у випадку, коли

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

Одержані числові ряди, пов'язані з геометричною прогресією зі знаменником $q = \frac{1}{2}$, тому є рядами збіжними. Базовим для одержання рядів є ряд (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Ряд (1) збігається до суми $S = 1$, яка обчислюється за допомогою відомої формули обчислення суми геометричної прогресії:

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q^n}$$

Відповідно до ряду (1) одержуємо, за вказаною формулою, значення суми S:

$$S = \lim_{n_{-s}\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1$$

Якщо проаналізувати ряди з лінійною геометричною інтерпретацією (1-15), то виходить, що суми цих рядів дорівнюють коефіцієнтам, які є множниками на $\frac{1}{2^n}$. Таким чином суми S рядів (1-15) мають значення:

$$S_1 = 1; S_2 = \sqrt{2}; S_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}; S_4 = \sqrt{2}; S_5 = \frac{\sqrt{10}}{2};$$

$$S_6 = \sqrt{5}; S_7 = \frac{\sqrt{2}}{2}; S_8 = \sqrt{2}; S_9 = \frac{\sqrt{2}}{2};\ S_{10} = \frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$S_{11} = \frac{\sqrt{2}}{4}; S_{12} = \sqrt{2}; S_{13} = \frac{\sqrt{2}}{2}; S_{14} = \frac{\sqrt{2}}{4}; S_{15} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Як бачимо, суми рядів (1-15) мають значення одного порядку. Розглянемо швидкість збігання частинних сум S_n до відповідних сум на прикладі рядів: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 14, 15. Дослідження виконаємо для значень:

$$n = 2; n = 4; n = 8; n = 16; n = 32$$

Ряд (1):

$$S_2 = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

.

$$S_4 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}9375$$

$$S_8 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256} = 0{,}996093$$

$$S_{16} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{16} = 1 - \frac{1}{65536} = \frac{65535}{65536} = 0{,}99998$$

$$S_{32} = 0{,}999999 \ldots$$

Висновок: ряд (1) дуже швидко збігається до своєї суми $S_1 = 1$.

Ряд (2):

$$S_2 = \sqrt{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \sqrt{2} \cdot 0{,}75 = 1{,}060660$$

$$S_4 = \sqrt{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) = \sqrt{2} \cdot 0{,}9375 = 1{,}325825$$

$$s_8 = \sqrt{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right) = 1{,}408688$$

$$S_{16} = \sqrt{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{16}\right) = \sqrt{2} \cdot 0{,}99998 = 1{,}413931$$

$$S_{32} = \sqrt{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{32}\right) = \sqrt{2} \cdot 0{,}99999 = 1{,}414199$$

Зрозуміло, що сума ряду $S = 1{,}414214$, тому абсолютне відхилення частинних сум S_2, S_4, S_8, S_{16} від значення S мають наступні величини:

$$\Delta_2 = 1{,}414214 - 1{,}060660 = 0{,}353554$$

$$\Delta_4 = 1{,}414214 - 1{,}325825 = 0{,}088388$$

$$\Delta_8 = 1{,}414214 - 1{,}408688 = 0{,}005525$$

$$\Delta_{16} = 1{,}414214 - 1{,}413931 = 0{,}000282$$

Таким чином, можна зробити висновок, що вже при $n = 16$ частинна сума S_{16} досягає значення $\sqrt{2}$ з точністю до четвертого знаку після коми.

Подібним чином досліджуються суми S_n для рядів (3) і (4).

Ряд (5): Сума ряду $S = \frac{\sqrt{10}}{2} = 1{,}581139$.

$$S_2 = 1{,}581139 \cdot 0{,}75 = 1{,}185854$$

$$S_4 = 1{,}581139 \cdot 0{,}9375 = 1{,}482318$$

$$S_8 = 1{,}581139 \cdot 0{,}996093 = 1{,}574961$$

$$S_{16} = 1{,}581139 \cdot 0{,}99998 = 1{,}581107$$

Аналогічно досліджуються частинні суми S_n для рядів з квадратурною і кубаторною інтерпретацією членів рядів. Результати представлені в таблиці 1 і 2.

Таблиця 1.

Ряди	S	S_n				$\Delta_n = S - S_n$
		$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$	
(16)	0,25	0,1875	0,234375	0,249023	0,249995	Δ_2 =0,0625 Δ_8 =0,000977
(17)	0,333333	0,3125	0,328125	0,332003	0,333328	Δ_2 =0,02083 Δ_8 =0,00133
(18)	0,166666	0,15625	0,166016	0,166664	0,1666665	Δ_2 =0,0104166 Δ_8 =0,0000026
(19)	0,500	0,46875	0,498047	0,499992	0,4999999	Δ_2 =0,03125 Δ_8 =0,000008
(26)	0,0625	0,058893	0,062256	0,0624990	0,06249999	Δ_2 =0,003907 Δ_8 =0,000244

Якщо порівняти суми вказаних в таблиці 1 рядів і відхилення від них частинних сум S_n, можна зробити висновок:

Чим менша сума, тим меншим буде відхилення для однакових величин n.

Наприклад, для суми $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{16}$ відповідно маємо значення Δ_2: 0,03125; 0,02083; 0,01625; 0,010416; 0,003907.

Таблиця 2.

Ряди	S	S_n				$\Delta_n = S - S_n$
		$n = 2$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$	
(27)	$\frac{1}{7}\pi$	0,140625 π	0,142822π	0,142857		Δ_2 =0,002282 Δ_8 =0,000035
(28)	$\frac{2}{21}\pi$	0,093750 π	0,95215π	0,095238		Δ_2 =0,001488 Δ_8 =0,000025
(30)	$\frac{7}{15 \cdot 16}\pi$	0,029052 π	0,029166π			Δ_2 =0,000114 Δ_8 =0,000001
(31)	$\frac{4}{93}\pi$	0,042968 π	0,0430010 π			Δ_2 =0,000042 Δ_8 =0

Для сум $\frac{1}{7}\pi, \frac{2}{21}\pi, \frac{7}{15 \cdot 16}\pi, \frac{4}{93}\pi$ відповідні відхилення від S_2 мають величини:

(27): Δ_2 =0,002282;

(28): Δ_2 =0,001488;

(30): Δ_2 =0,000114;

(31): Δ_2 =0,000042.

Для рядів з кубаторною інтерпретацією їх членів, точність обчислення суми S, в залежності від частинних сум S_n, залежать від значення S.

Висновки до РОЗДІЛУ 2

За допомогою геометричних інтерпретацій пов’язаних з послідовностями геометричних об’єктів, вписаних в квадрат зі стороною а= 1 і координат послідовностей точок на сторонах квадрата $\left(\frac{1}{2^{n-1}}; 0\right)$ і $\left(1; \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ побудовані числові ряди трьох видів :

- Ряди з лінійною геометричною інтерпретацією;
- Ряди з квадратурною геометричною інтерпретацією;
- Ряди з кубаторною геометричною інтерпретацією.

Досліджено, що одержані ряди є рядами геометричних прогресій з різними знаменниками:

$$q = \frac{1}{2}; q = \frac{1}{4}; q = \frac{1}{8}; q = \frac{1}{16}$$

Усі ряди є збіжними і мають суми, які наочно відображаються в загальних членах рядів у вигляді певних множників на вирази q^n .

Досліджено і з’ясовано, що збіжність одержаних рядів можна візуально спостерігати за допомогою відповідних елементів, розташованих в базовому квадраті геометричних інтерпретацій.

З’ясовано, що на базі елементів, вписаних в квадрат зі стороною 1 можна генерувати інші числові ряди. При цьому поле досліджень може бути поширене, якщо використовувати послідовності інших точок на сторонах квадрату, та інші геометричні об’єкти, які можуть бути вписаними в квадрат.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Белл Э. Т. Творцы математики / Э. Т. Белл. – М.: Просвещение, 1979. – 256с.
2. Бобирь В.Д. Застосування ІКТ при вивченні числових та степеневих рядів/ В.Д. Бобирь, В.В. Корольський// Крок у науку: дослідження у галузі природничо-метаматичних дисциплін та методик їх навчання: Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів і молодих учених (Чернігів, 27 листопада 2019 р.) матер. тез – Чернігів, 2019.
3. Бобирь В.Д. Реалізація дидактичного принципу наочності при вивченні числових рядів/ В.Д. Бобирь, А.М. Христюк, В.В. Корольський// Молоді вчені 2019 – від теорії до практики: X Міжнародна конференція молодих вчених (Дніпро, 7 березня 2019 р.): матер. тез. – Дніпро, 2019. – с. 249-252.
4. Боголюбов А. Н. Математики. Механики. Биографический справочник / А. Н. Боголюбов – Киев: Наукова Думка, 1983. – 639 с.
5. Бурбакін Н. Очерки по історії математики/ Бурбакін: пер. с фр. И. Г. Башмакова. – Москва: издательство инностранной литературы, 1963.. – 292с.
6. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Генрих Вилейтнер ; пер. с нем. А. П. Юшкевич. Москва : Гос. издательство физ-мат. лит-ры, 1960. – 469 с.
7. Виленкин Н.Я. Математический анализ / Н. Я. Виленкин, С.Н. Шварцбурд – Москва: Просвещение, 1969 г. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.:Наука, 1977. – 872 с.
8. Ворою́ьев Н.Н. Теория рядов / Н.Н. Воробьев. – 4-е изд., перераб. и доп.. – Москва : Наука, 1979. – 408 с.
9. Габ С.С. Числові ряди, які пов’язані з парадоксом Шварца / С.С. Габ // Актуальні аспекти фундаменталізації метематичної підготовки в

сучасних вищих навчальних закладах. Погляд студентів та молодих вчених: Всеукр. науково-практична конф. здобувачів вищої освіти та молодих вчених (Харків, 12 – 13 квітня 2018 р.) : матер. доповідей та виступів. – Харків, 2018. – с. 114 – 117.

10. Габ С.С. Геометрическая интерпритация числовых рядов, связаных с фракталами / С.С. Габ // Материалы XIV Международной научно-практической конференции молодых исследователей «Содружество наук. Барановичи- 2018» (Барановичи, 17 мая 2018 г.). – Барановичи, 2018. – с. 50 – 51.

11. Герега А.Н. Конструктивные фракталы в теории множеств: учебн. пособие / А.Н. Герега, - Одесса: «Освіта України», 2017. – 85с.

12. Дороговцев А.Я. Математический анализ: Справочное пособие / А.Я. Дороговцев – Киев: Вища школа, 1987. – 408 с.

13. Емелин А. Приближенное вычисление определенного интеграла с помощью разложения подынтегральной функции в ряд Электронный ресурс / А. Емелин. – Режим доступа: https//mathprofi.net/vychislenie_integrala_razlozheniem_v_ryad.html

14. Емелин А. Приближенные вычисления с помощью рядов Электронный ресурс / А. Емелин. – Режим доступа: https//mathprofi.net/priblizhennye_vychislenia_s_pomoshju _ryadov.html

15. Застосування рядів до наближених обчислень / НПУ ім. М.П. Драгоманова. – Режим доступу: https//vuzlit.ru/838582/vikorystannya_stepenevih_ryadiv_rozvyazuvannya_rivnyan_poshuku_neyavnih_funktsiy_znahodzhennya_granits#54

16. Зельдович Я.Б. Элементы прикладной математики / Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис – М.: Наука, 1972.- 593 с.

17. Корольський В.В. Математичний аналіз. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної / В.В. Корольський – Кр. Ріг, 2013 – 398с.

18. Корольський В.В. Лінійна, квадратурна та кубаторна геометрична інтерпритація числових рядів засобами моделювання / В.В. Корольський, С.С. Габ. // Новітні комп'ютерні технології: наук.-метод. зб/ редкол. : С.О. Семеріков та ін. . – Кривий Ріг, 2018. Том XVI. – с. 67 – 73.

19. Корольський В.В. Числові ряди, які пов'язані з параметрами додекаедра / В.В. Корольський, С.С. Габ // Вісник міжнародного дослідницького центру «Людина : мова, культура, пізнання» : науковий журнал / за ред.. В. В. Корольського. – Кривий Ріг, 2018. – Том 42. – с. 39-45.

20. Корольський В. В. Геометрична інтерпритація числового ряду арифметичної прогресії / В. В. Корольський. //Новітні комп'ютерні технології : наук. – метод. зб / редкол. : С. О. Семеріков та ін. . – Кривий Ріг, 2018. – Том XVI. – с. 59 – 66. 26.

21. Крюков М. М. До історії розвитку і становлення теорії нескінченних числових рядів / М. М. Крюков, Т. С. Клецька // Математичне моделювання. – 2013, - №6, - с. 117- 120.

22. Кудрявцев Л. О. Математический анализ: Т. 1.2 / Л. Д. Кудрявцев: «Высшая школа», 1973. – 704с.

23. Ляшко И. И. Справочное пособие по высшей математике. Т.2 : Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента. /И. И. Ляшко – М.:Едиториал УРСС, 2003. – 224 с.

24. Ляшко И. И. Справочное пособие по математическому анализу / И. И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я. Г. Гай - Киев: Вища школа, 1978. – 672 с.

25. Марков Л. Н. Высшая математика. Ч.2: Основы математического анализа и эллементы дифференциальных уравнений / Л. Н. Марков, Г. П. Размыслович – Мн.: Амалфея, 2003. – 352 с.

26. Маркушевич А.И. Ряды / А. И. Маркушевич – М.:Гестехиздат,1967. – 155 с.

27. Математический анализ. Ч. 1. / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я.Г. Гай, А. Ф. Колайда – Киев: Вища школа, 1983. – 680 с.

28. Овчинников П. П. Вища математика. Ч. 1 / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко – Київ: Техніка, 2000. – 600 с.

29. Овчинников П. Ф. Высшая математика / П. Ф. овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко – Киев: Вища школа, 1987. – 552 с.

30. Очан Ю. С. Математический анализ / Ю. С. Очан, В. Е. Шнейдер – Москва, 1961. – 884 с.

31. Маркушевич А. И. Ряды. Элементарный очерк / Алексей Иванович Маркушевич. – Москва – Ленинград : Изд-во НКТПСССР, 1936. – 103 с.

32. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчесление для вузов. Т.2 / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1985. – 560 с.

33. Сачанюк – Кавецька Н. В. Теорія рядів. Навчальний посібник. / Н. В. Сачанюк-Кавецька, Л. І. Педорченко, М. Б. Ковальчук – Вінниця: ВНТУ, 2008. – 138 с.

34. Трофимов В. К. Теория рядов: учебное пособие / В. К. Трофимов, Т. С. Мурзина, Т. Э. Захарова. – Новосибирск : Сиб ГУТИ, 2013. 145 с.

35. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интетгрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 810 с.

36. Харди Г. Расходящиеся ряды / Г. Харди; пер. с англ. Д. А. Райкова. – Москва: Изд-тво иностранной литературы, 1951. 498 с.

37. Христюк А. М. Реалізація дидактичного принципу наочності при вивченні числових рядів / В. Д. Бобирь, А. М. Христюк, // Х Міжнародна конференція молодих вчених «Молоді вчені 2019 – від теорії до практики», м. Дніпро, 7 березня 2019р. – Дніпро, 2019. 404с.

38. Цейтен Г. Г. История математики і XVI и XVII веках / Г. Г. Цейтен ; пер. с нем. П. Новиков. – Москва – Ленинград : ОНТИ, 1938. - 456 с.

39. Щоголєв С. А. Теорія рядів: навчально – методичний посібник / С. А. Щоголєв. – Одеса: «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2015. – 76 с.

40. Юшкевич А. П. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: в 3 т. Т.1 / Андрей Павлович Юшкевич. – Москва: Наука, 1970. – 353 с.

41. Юшкевич А. П. История математики. Математика XVIII столетия : в 3 т. Т. 3 / Андрей Павлович Юшкевич. – Москва : Наука, 1972. – 496 с.