МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри
_________ ________________
«___» _____________ 20___ р.

Реєстраційний № _______
«___» _____________ 20___

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ЗНАНЬ УЧНІВ ПРИ ВИВЧЕННІ МЕТОДУ КООРДИНАТ

Кваліфікаційна робота студентки групи МІм-17
ступінь вищої освіти «магістр»
спеціальності: 014.04 середня освіта Математика (Інформатика)
Головань Анастасії Валеріївни
Науковий керівник:
кандидат педагогічних наук, доцент
Черних Лариса Олександрівна
Оцінка:
Національна шкала __________________
Шкала ECTS _____ Кількість балів _____
Голова ЕК _________ ________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
Члени ЕК _________ ________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ ________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ ________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_________ ________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Математика є універсальним методом пізнання. Видатний математик Норберт Вінер вважав, що найвище призначення математики полягає в тому, щоб знаходити прихований порядок в хаосі, що оточує нас. Тому правильний підхід до упорядкування знань учнів у процесі навчання математики, допомагає впоратися з розмаїттям інформації, що вивчається. Реалізувати такий підхід можна за допомогою таких прийомів розумової діяльності як узагальнення та систематизація знань.

Під час опанування математичних знань здійснюється розвиток навиків логічно мислити, аналізувати, узагальнювати, міркувати, знаходити шляхи вирішення тих чи інших завдань. Узагальнення та систематизація знань учнів є невід'ємною частиною процесу навчання. При грамотній організації вона дозволяє вчителю оцінити одержані знання учнів, їх вміння та навички, вчасно побачити слабкі місця у викладанні та засвоєнні теми та заповнити ці прогалини. Видатний педагог Я. А. Коменський вважав [29], що всі наші знання мають впорядковуватися так: нові повинні ґрунтуватися на попередніх, а попередні повинні закріплятися новими знаннями. Також над питанням узагальнення працювали Л. С. Виготський [12], В. В. Давидов [19]. Вони опрацьовували та розробляли теоретичні положення про сутність узагальнення та його види, вивчали значущість узагальнення в розумовому розвитку учнів.
В. А. Далінгер [20, 21, 22] зумів описати основи методики проведення узагальнюючих повторень, подати їх класифікацію, опрацьовував проблему введення даного підходу в школі та недостатнє використання його на практиці.

Реформи освіти та стрімкий розвиток науково-технічного прогресу обумовив зростання обсягу матеріалу, що вивчається в школах, але це не передбачало збільшення кількості годин, потрібних на опанування нового матеріалу тем. Тому час вивчення кожної теми все зменшується і постає проблема необхідності проведення уроків узагальнення та систематизації.

В шкільних програмах з математики приділяють незначну увагу розв'язуванню задач методом координат. Програма зазначає, що «важливе значення для підготовки учнів до систематичного вивчення алгебри, геометрії та інших предметів мають початкові відомості про метод координат, які дістають учні 5-6 класів: зображення чисел на координатній прямій, прямокутна система координат на площині, виконання відповідних побудов» [35]. Тобто на першому етапі відбувається засвоєння понятійного апарату. Далі він застосовується для введення понять ліній, їх рівнянь та графіків функцій, як в курсі алгебри, так і в геометрії. Оскільки змістовна ціль даних предметів різна і розмежована часом, то учні не бачать зв'язку між ними і не можуть повноцінно засвоїти головну суть методу. Останнім кроком є розкриття основних етапів координатного методу та безпосереднє використання при розв'язуванні задач чи доведенні теорем.

Метод координат має своє місце не тільки в геометрії, а й в інших шкільних дисциплінах. На прикладі даного методу можна ілюструвати міжпредметні зв'язки з алгеброю, географією, фізикою та астрономією, використовуючи задачі практичного змісту.

Освітні програми не передбачають систематичного застосування цього методу для розв'язання геометричних задач, а також для доведення теорем. Аналіз підручників показав, що автори приділяють увагу переважно теоретичній частині вивчення методу координат, тобто формулам та твердженням, подаючи для закріплення прості та типові задачі.

Головне завдання при вивченні даної теми полягає у розвитку в учнів просторових уявлень, графічної обізнаності, вміння використовувати алгебраїчний апарат для розв'язання геометричних задач; формуванні уміння застосовувати вивчені алгоритми дій, порівнювати, класифікувати та узагальнювати навчальний матеріал. Значущість та дидактичний потенціал уроків даної тематики важко переоцінити. В результаті аналізу науково-методичної, психолого-педагогічної та дидактичної літератури можна дійти висновку, що питання узагальнення та систематизації присутнє в багатьох наукових роботах, проте прикладів уроків, що базуються на діяльнісному підході, методичних рекомендацій, опису методів та прийомів для застосування їх на практиці розроблено в недостатній кількості.

Відсутність чіткої методики проведення уроків-узагальнення з теми «Метод координат», а також певні труднощі при підготовці та організації уроків узагальнення та систематизації знань обумовлюють **актуальність даної роботи**.

Мета дослідження: розробити методику узагальнення і систематизації знань учнів при вивченні теми «Метод координат».

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі **завдання**:

1. Дослідити історичні етапи розвитку координатного методу.
2. Розкрити педагогічні засади узагальнення та систематизації знань учнів.
3. Розробити пропедевтичний курс вивчення методу координат.
4. Скласти доцільні системи задач, що відповідають різним етапам вивчення координатного методу в школі.

Об'єкт дослідження: процес навчання учнів методу координат в основній і старшій школі.

Предмет дослідження: методичні особливості узагальнення та систематизації знань учнів при вивченні координатного методу.

Методи дослідження: *теоретичні*—аналіз та узагальнення інформації з науково-методичної, психолого-педагогічної літератури щодо проблеми дослідження, порівняння підручників з математики відносно способу подання методу координат, історичний метод, уточнення змісту основних понять теми «Метод координат»; *емпіричні*—спостереження за процесом навчання учнів та діяльністю вчителів, проведення бесід з учителями та учнями, аналіз педагогічного досвіду вчителів математики з навчання методу координат.

Практичне значення полягає в тому, що розроблені методичні рекомендації можуть бути використані вчителями математики в їхній практичній професійній діяльності, учнями основної та старшої школи для самостійного та додаткового ознайомлення з темою «Метод координат». Робота може слугувати для узагальнення та систематизації знань студентів у

ЗВО при вивченні методу координат в курсі аналітичної геометрії, а також використовуватися студентами при опрацюванні питань з методики навчання математики та у процесі виробничої педагогічної практики у закладах середньої освіти.

Структура та обсяг роботи: робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 55 найменувань та двох додатків.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРИТИЧНІ ЗАСАДИ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ УЧНІВ ПРИ ВИВЧЕННІ МЕТОДУ КООРДИНАТ

1.1. Історичні відомості з теми «Метод координат»

Ще в далеку давнину зародилася ідея зображати числа у вигляді точок, яким приписували числові значення. Перші згадки про координати, пов’язані з астрономією та географією, з’явилися у роботах давньогрецьких учених Ератосфена (ІІІ ст. до н.е.) і Гіппарха (ІІ ст. до н.е.). Вони запропонували покрити Землю, зображену на картах, паралелями та меридіанами та ввести поняття географічних координат. Однак, першим, хто склав географічну карту, вважають давньогрецького вченого Анаксімандра Мілетського (близько 610 до н. е. — 546 до н. е.). Він визначав широту та довготу об’єктів, застосовуючи прямокутні проекції. Через деякий час поняття географічних координат було видозмінено для інших систем координат точок на площині та в просторі.

Математик александрійської школи Аполлоній довів понад 300 теорем та почав визначати лінії другого порядку (еліпс, гіперболу, параболу), фактично користуючись прямокутними координатами. Також саме він увів до вживання такі терміни як асимптота, абсциса, ордината, апліката.

Французький філософ та математик Н. Орезм (1323 – 1382) покривав площину прямокутною сіткою і у такий спосіб вивчав геометричні фігури, досліджуючи співвідношення лінійних розмірів у двох взаємно перпендикулярних напрямах, що відповідають сучасним поняттям абсциси і ординати [5, с. 82].

Частішого використання в геометрії на площині координати набувають в 17 столітті. Найбільше розкрито можливості даного методу було завдяки працям Р. Декарта та П. Ферма.

Метод, який запропонував Ферма у 1629 році, полягав у встановленні взаємно однозначної відповідності між точками площини і парами чисел $(x; y)$. Його система координат мала вигляд однієї прямої і початкової точки, тобто вісі абсцис та початку координат. Положення будь-якої точки на деякій кривій визначалося відстанями A і B (сучасна абсциса *x* точки P та сучасна ордината *y* точки P).

У своїй праці «Вступ до вивчення плоских і просторових місць» П'єр Ферма описав рівняння кривих 2-го порядку та показав метод перетворення рівнянь шляхом паралельного перенесення і повороту осей, зводивши їх до простого вигляду.

Р. Декарт теж використовував одну фіксовану вісь (абсцис), проте точки мали додатні і від'ємні ординати. Саме так він зрівнював значення додатних і від'ємних чисел. Виникла ідея зіставлення алгебраїчного рівняння з двома невідомими і лінії на площині: у рівнянні він запропонував змінну *x* вважати абсцисою точки, а значення *y*, що відповідає йому, - її ординатою. Тоді, безперервно змінюючи значення *x* і знаходячи відповідні йому значення *y*, матимемо множину точок площини, координати *x* і *y* яких задовольняють рівнянню. Ця множина точок і є якась лінія на площині. Отже, рівнянню з двома змінними відповідає у вибраній системі координат цілком визначена лінія на площині. І, навпаки, лінію на площині як множину точок, визначену певною геометричною умовою, можна задати рівнянням, яке виражає аналітично цю саму умову за допомогою координат її точок [54].

Таблиця 1.1.

Хронологія оприлюднення методу координат

Автор	Рік оприлюднення	Назва роботи
П. Ферма	1636	У листі до Ж. Роберваля «Вступ до теорії плоских і просторових місць».
	1679	У зібранні робіт «Різні твори», яке видав син – Самуїл Ферма.
Р. Декарт	1637	«Геометрія» (додаток до роботи «Міркування про метод»).

Праці Декарта доповнювались роботами таких математиків, як Ф. Деборн, Ф. Скоотен, Дж. Валліс, І. Ньютон та Й. Бернуллі [5].

"Геометрія" Декарта ще не була справжньою аналітичною геометрією. Декарт в ній розглядав по суті тільки одну пряму з фіксованою точкою відліку на ній і вивчав властивості кривих ліній відносно цієї прямої. Однак це було вже великим кроком уперед. Ідея вимірювання абсциси на деякій фіксованій прямій і визначення положення точки на прямій здається нам тепер досить простою, але ніхто до Декарта і Ферма до цього не додумався.

"Геометрія" Декарта в основному є алгебраїчною працею, але в ній чітко виражена ідея аналітичної геометрії - алгебраїчний спосіб дослідження геометричних об'єктів за допомогою методу координат [54].

Вперше використовувати поняття двох координат точки на площині почав Г. Крамер у 1750 році, ввівши термін «вісь ординат». Термін «вісь абсцис» було введено І. Барроу у 1670 році.

Поняття «абсциса», «ордината» і «апліката» мають давнє походження, але в сучасному розумінні вони вперше прозвучали в роботах Готфріда Вільгельма Лейбніца в кінці 17 століття. Йому також належить термін «координата», який показував рівноправність двох вісей х та у.

Ще одним здобутком Р.Декарта є математична символіка, якою ми зараз користуємося: коефіцієнти(відомі) позначаємо першими літерами латинського алфавіту – $a, b, c,$ а невідомі останніми літерами – x, y, z.

Таблиця 1.2.

Персоналізація та хронологія введення позначень

№	Автор	Рік	Позначення
1	Ф. Лагір	1679	x, y, v
2	І. Бернуллі	1715	x, y, z
3	Л. Ейлер	1728	t, x, y
4	Л. Гессе	1844	x_1, x_2, x_3

Досить довго метод координат використовувався для розв'язання задач на площині, хоча Декарт і Ферма висували припущення про великі можливості даного методу в тривимірному просторі.

Ісаак Ньютон теж був одним з великих математиків, хто розвивав та вдосконалював застосування методу координат. Чимало його робіт містять розв'язання різних геометричних задач саме за допомогою координат. Також ним було класифіковано криві 3-го порядку та визначено багато характеристик кривих 2-го порядку, а саме: вершини, центр, діаметр, вісь симетрії, асимптота тощо.

У 1715 році одним з перших, хто поклав початок вивченню координат у просторі став швейцарський математик І. Бернуллі. Він охарактеризував просторові координати x, y, z через перпендикуляри на три взаємно перпендикулярні площини. Приблизно у той самий час інші математики починають записувати рівняння деяких поверхонь через просторові координати.

А. К. Клеро вводить третю координату (сучасну вісь аплікат). В роботі "Дослідження ліній двоякої кривини" (1731), він подає приклад таких рівнянь: $xx + yy + zz = aa$; $yy + zz = ax$; $\sqrt{yy + zz} = \frac{n}{m}x$, що показують зв'язок між рівнянням з трьома змінними та деякою поверхнею. Також до його здобутків належить першість при виведенні рівняння площини.

Систематичний виклад аналітичної геометрії в просторі вперше дав Л. Ейлер у другому томі "Вступу в аналіз" (1748), який по праву вважається першим курсом аналітичної геометрії в сучасному розумінні. Ця книга складається з двох частин, перша з яких присвячена аналітичній геометрії на площині, а друга - в просторі.

Математика припинила бути статичною: функції та змінні величини, які ними описувалися, стали основою розвитку нової математики – математики змінних величин, апарат якої дозволяв вирішувати багато раніше невирішених задач. Математика навчилася самостійно ставити перед собою нові питання, узагальнюючи старі. В зв’язку з швидкісним розвитком цивілізації виникають все нові та цікаві задачі. Досить часто поставлене завдання несе за собою народження нового, ще невідомого математичного апарату.

Історія виникнення методу координат є досить пізнавальною. Вона пов’язує праці всіх людей, які зробили внесок в розвиток даного методу та аналітичної геометрії в цілому.

Систематично виділяючи час на уроці для ознайомлення учнів з історичними відомостями, вчитель вирішує низку педагогічних завдань:

1) пробуджує інтерес до вивчення математики і навчання в цілому;
2) формує критичне ставлення до фактів, наукове мислення, чіткість логічних міркувань;
3) сприяє гуманістичному вихованню та повазі до вчених;
4) розвиває духовні цінності людини.

Це дає змогу розуміти, що математика є невід’ємною частиною загальнолюдської культури.

Історичні екскурси дозволяють учням сформувати розуміння розвитку науки і техніки протягом історії людства, як саме формувалась цивілізація. В процесі таких відступів учень має змогу розвивати свій науковий світогляд, пізнавати фундамент сучасної науки.

Реальні приклади допомагають учням прийти до тієї думки, що математика як наука завдячує своєму розвитку саме спільній роботі людства протягом поколінь. Рушійним фактором розвитку науки та постановки все нових питань є реалізація зростаючих потреб людства. По мірі надходження нагальних завдань практики створювалися математичні методи їх вирішення.

Ознайомлення учнів з історією розвитку науки, зокрема історією розвитку математики, дозволяє їм усвідомити гуманістичну функцію й те, що історія науки повинна сприяти її гуманізації. В. Г. Бевз, розглядаючи історію математики як інтеграційну основу навчання предметів математичного циклу, зазначає: «Історичний підхід у навчанні служить сильним і дієвим засобом у боротьбі з догматизмом і формалізмом, сприяє свідомому засвоєнню математичних знань і формуванню творчої особистості» [4].

Втілити принцип історизму при проведенні уроку не означає мимохідь сказати про декілька прізвищ вчених. Вчитель повинен зуміти відобразити у своїй розповіді історично обумовлений процес появи та розвитку деяких математичних понять, методів, так щоб учні проявляли ще більший інтерес до вивчення теми.

Зміст і обсяг інформації визначає виключно вчитель, в залежності від типу уроку, темпів засвоєння матеріалу, кількості годин, виділених на тему.

1.2. Функції, види, етапи та принципи узагальнення та систематизації

Сутність процесу узагальнення може бути розкрита з філософської, психологічної та педагогічної точки зору. В філософії під узагальненням розуміють логічний прийом, що допомагає установити загальні властивості і ознаки предметів; логічний процес переходу від окремого до загального. В психології узагальнення – це характеристика пізнавального процесу, що відокремлює стійкі властивості предметів та їх відношення. Л. С. Виготський в своїй психологічній теорії тлумачить узагальнення, як деякий особливий спосіб відображення дійсності в свідомості людини [12]. В методичних посібниках з методики навчання математики під узагальненням розуміють операцію виділення загальних властивостей, що належать тільки одному класу предметів.

В. А. Далінгер в своїй роботі [21] розглядає узагальнення як прийом систематизації математичних знань і вмінь. Систематизація – це процес зведення здобутих знань в єдину наукову систему, встановлення їхньої єдності [47, с. 41]. Систематизація знань учнів має на меті виявлення успіхів при засвоєнні теми, шляхів підвищення результативності, вказівки на слабкі місця та прогалини, створення умов для подальшого зацікавлення учнів до активної діяльності.

Узагальнення і систематизація знань досягаються різними шляхами, засобами, методами. Важливо, щоб в основі їх були виявлення і осмислення учнями головного, істотних понять та їх відношень і взаємозв'язків з іншими, уже засвоєними поняттями, ідеями, а не ілюстрація вчителем готових знань.

Учні мають усвідомлювати, що розрізнені відомості і є передусім причиною труднощів при вивченні математики, а це призводить до нерозуміння суті і, отже, до втрати інтересу до предмету. Згрупований та систематизований матеріал легше і міцніше запам'ятовується, ним зручно користуватися в найрізноманітніших ситуаціях.

Як переконує досвід, систематичний виклад матеріалу підручника з наступним повторенням не забезпечує необхідного рівня системи математичних знань. Для цього потрібна чітка організація цілеспрямованої діяльності учнів на кожному уроці, причому виняткову роль відіграє самостійне логічне упорядкування ними навчального матеріалу. Слід врахувати, що осмислена самостійна систематизація знань потребує певного їх фундаменту і певного рівня розумового розвитку. На формування цієї важливої бази і має бути насамперед спрямована діяльність школярів [52].

Функції узагальнення та систематизації

Визначення якості освіти, тобто необхідних знань, умінь та навичок визначених навчальною програмою з математики – є підґрунтям для проведення узагальнення та систематизації знань учнів. Також воно формує відповідальність за виконану роботу та прояв ініціативності під час навчання.

Контролююча функція полягає у визначенні рівня знань і вмінь учнів , рівня їх інтелектуального розвитку, у з'ясуванні степені оволодіння методами пізнавальної діяльності.

Процес систематизації визначає початковий рівень для подальшого розвитку знань,умінь і навичок. Заплановані результати порівнюються з одержаними, визначається дієвість обраних методів, прийомів і форм навчання обраних учителем.

Навчальна функція систематизації полягає в покращенні сприйняття всієї інформації, що вивчалась упродовж теми. Учні пов'язують всі поняття, означення, формули, алгоритми в єдину «картинку» і вчаться використовувати набуті знання в різних ситуаціях.

Інформація, яку отримує вчитель після систематизації знань учнів, дає змогу побачити кількість та характер помилок, недоліки, прогалини в знаннях учнів, з'ясувати причини недостатньо якісного засвоєння матеріалу. Так розкривається суть діагностичної функції.

Прогностична функція має на меті отримання прогностичної інформації про процес навчання. Вчитель, прогнозуючи хід певної частини навчального процесу робить висновки про достатнє чи недостатнє опанування знань та вмінь учнів, щоб впоратися з наступним матеріалом. Саме прогнозування дає можливість зробити висновки для подальшого планування та реалізації навчального матеріалу.

Систематизація допомагає у розвитку пам'яті, уваги, логічного мислення, стимулює їх пізнавальну активність – таке значення розвиваючої функції.

Орієнтація щодо навчальних успіхів і невдач теж є однією з важливих аспектів систематизації. Оголошуючи виявлені помилки та невдачі учнів, вчитель дає їм змогу зрозуміти напрям, в якому вони повинні рухатися, щоб покращувати знання. Систематизація допомагає учням краще пізнати себе та оцінити свої сили.

Важливим є питання виховання відповідального ставлення до навчання, дисципліни, порядності та чесності. Дана функція стимулює учнів більш серйозно відноситись до навчання, регулярно виконувати домашні завдання, не соромитись питати, коли не зрозуміло. Паралельно з цим відбувається виховання сили волі, терпіння, працелюбності, наполегливості.

Класифікація видів узагальнення

В методиці навчання математики немає єдиної класифікації видів узагальнення. Д. П. Горський [16] запропонував таку класифікацію способів узагальнення, що є найвідомішою:

1. Узагальнення що відбувається в наслідок зміни конкретних висловлювань подальшими пропозиціями зі змінними. (Знайомство з поняттями координатної вісі та системи координат після наведення окремих прикладів).

2. Узагальнення за допомогою ознайомлення учнів з новими термінами, операціями, твердженнями. (Введення понять «відрізок», «пряма», «промінь», «довжина відрізка»).

3. Узагальнення через аналіз сенсу деяких виразів, що з'являються під час еволюції науки. (Означення поняття кута між прямими, що перетинаються, між прямою і площиною).

4. Узагальнення шляхом відображення тверджень властивих одній області знань на іншу. (Коло, пряма, гіпербола, парабола мають як геометричні так і алгебраїчні представлення).

5. Узагальнення в наслідок індуктивного процесу, тобто переходу від понять, гіпотез, частинного значення, до загальних закономірностей. (Видозміна формул в двовимірному просторі на трьохвимірний).

6. Узагальнення через поєднання двох і більше понять задля формування одного більш загального. (Доведення важливого факту, що графіком лінійної функції є пряма та її властивість щодо точок перетину з колом).

Етапи узагальнення та систематизації

Узагальнення та систематизація споріднені між собою поняття, адже чим об'ємніше узагальнення, тим більше відображено між ними зв'язків і відношень, тим ще більша сфера знань об'єднується в систему.

Узагальнення та систематизація знань за призначенням та місцем в навчальному процесі буде поділятися на такі етапи (за визначенням В. П. Іржавцевої [25]):

1. Початкові узагальнення — найпростіші узагальнення, які робить учень під час сприйняття та осмислення навчального матеріалу. Цей процес допомагає сформувати основні уявлення про предмети і явища. Як

приклад такого узагальнення при вивченні теми «Метод координат» може виступати означення координатної прямої.

2. Локальні або понятійні — узагальнення, що відбувається під час подачі нових понять, коли учень проходить стадію осмислення знань. Навчання, спрямоване на засвоєння понять, має відбуватись за допомогою розкриття причино-наслідкових і інших зв'язків в об'єктах, що підлягають вивченню. Наприклад, при означенні поняття координатної площини застосовуються раніше набуті знання.
3. Міжпонятійні або поурочні узагальнення полягають в визначенні головних та спільних ознак і властивостей, в процесі переходу від менш загальних до більш загальних понять, в групуванні набутих знань і виявленні зв'язків між елементами, структуруванні інформації в певній послідовності. Це може бути задача на побудову прямої чи кола за поданим загальним рівнянням.
4. Тематичні узагальнення мають на меті допомогти учневі засвоїти цілу систему або низку понять, що вивчалися упродовж деякого періоду (інтервалу) і які є основою розділу певної теми.
5. Підсумкове узагальнення застосовується для закріплення зв'язків між окремими групами знань , що були набуті в процесі навчання цілого курсу, формування єдиної системи знань з різних галузей науки. Даний етап характерно проводиться в кінці навчання курсу.
6. Міжпредметні узагальнення і систематизації знань відбуваються між спорідненими групами предметів (предмети природничо-математичного чи філологічного циклу) на спеціальних уроках.

Принципи систематизації

В. С. Крамор [32, с. 18] виділяє такі принципи систематизації: цілеспрямованість, об'єктивність, всебічність, регулярність, індивідуальність.

Цілеспрямованість. Точне визначення цілі кожної форми, методу чи способу систематизації. Для успішної систематизації потрібно точно вияснити що саме буде перевірятись, які висновки слідують з результатів тієї чи іншої форми, який результат був поставлений і чи досягнувся він.

Об'єктивність. Допомагає усунути випадки помилкової оцінки, що викривляє справжній рівень знань учнів і не забезпечує належного виконання виховної функції систематизації. Об'єктивність систематизації потребує чіткої постановки цілей навчання, зрозумілості відбору об'єктів та сенсу систематизації, потребує володіння знаннями щодо методів обробки, аналізу та оцінювання результатів.

Всебічність. Під час систематизації знань відбувається осмислення великого об'єму матеріалу. За даного принципу має відбуватися опанування певних основ теми, засвоєння матеріалу по окремим частинам, вивчення окремих і істотних фактів, тверджень, теорем, алгоритмів. Саме через великий обсяг охопленого матеріалу стає важливою доцільна методика розробки завдань.

Регулярність. Полягає в поєднанні поступової систематизації з навчальним процесом.

Індивідуальність. Визначення та врахування рівня знань, умінь, навичок кожного учня.

1.3. Дидактичні особливості проведення уроків узагальнення та систематизації знань учнів

Вивчаючи педагогічний досвід проведення уроків узагальнення та систематизації знань, ми дійшли висновку, що учителів нерідко спіткають труднощі при підготовці та проведенні таких уроків. Досить часто уроки систематизації і узагальнення знань зводяться лише до уроків-повторень. Актуалізація опорних знань проходить у вигляді повторення минулого уроку, без встановлення зв'язку з темою даного уроку. Не приділяється достатньо часу на формування єдиної системи знань та системності розуміння учнями пройденого матеріалу.

Розглянемо структурні компоненти уроку узагальнення та систематизації знань учнів.

Структура уроку

1. Самовизначення — на початку уроку вчитель мотивує учнів, створює спокійну атмосферу в класі. Етап може відбувається з використанням таких прийомів, як епіграф уроку, цитата, приказка чи привітання упродовж 1-2 хвилин.
2. Актуалізація знань та визначення труднощів. Цей етап має на меті визначити основні проблеми, що виникли при вивченні теми. Можуть використовуватися декілька завдань різного типу. Головне, щоб вони відображали всі засвоєні вміння і були націлені на використання всіх отриманих знань з пройденої теми. Тривалість: 5-7 хвилин.

Надамо перелік певних прийомів, що можуть стати у пригоді на даному етапі:

1) Асоціативний ряд. Наприклад, запропонувати асоціації, що виникають в учнів за даною темою.
2) Швидкі опитування. Доцільно вдаватися до різних видів питань.
3) Знаходження помилок. Прикладом може слугувати таке завдання-знайти помилки в означеннях, формулах чи теоремах.
4) Тестування. Необхідно грамотно скласти тест, що буде містити не шаблонні питання з варіантом відповіді, а логічні питання на зіставлення понять, тверджень чи формул.
5) Проблемне питання. При використанні цього типу уроку бажано ставити проблемні питання, що були обговорені, але мають деякі нез'ясовані моменти або уточнення в учнів.

3. Створення навчальної задачі та її розв'язання. Учитель має направляти учнів до обміркування своїх помилок, поставити за мету занотувати виявлену проблему та запропонувати її вирішення. Тобто учень та вчитель мають пройти такий порядок дій: знайти проблему, визначити тему, в якою вона пов'язана, знайти спосіб її вирішення: роз'яснення чи

повторення теоретичного матеріалу, певних означень, формул чи суджень.

4. Втілення визначеного плану, проекту. Даний етап проводять в залежності від обраної форми уроку та вже використаних прийомів. Тобто учень або групи учнів, за схожістю проблем, мають зрозуміти, на скільки дієвий план та чи вдасться вирішити обраним способом проблему. Зазначимо, що 3-4 етап уроку можна провести за допомогою роботи з підручником, використовуючи різні методи роботи з текстом. Прикладом може слугувати написання тез, опорних конспектів, цікавих питань, поєднання роботи з текстом і створення графіків, схем, таблиць.
5. Закріплення знань. Вчитель подає завдання, що направлені на узагальнення отриманих знань та застосування їх на практиці. Як приклад, задача, що може бути розв’язана, якщо переформулювати вивчене правило для іншої ситуації.
6. Самостійна робота та перевірка. Варіанти та форми роботи обираються в залежності від рівня знань учнів та складності поточної теми. Можна використовувати такі прийоми, як складання алгоритмів, робота з картками, міні-проєкти, задачі на знаходження помилок і т.д. Завершується даний етап самостійною перевіркою учнів своїх робіт за визначеним шаблоном.
7. Самоконтроль та оцінка. Учитель пропонує роботу в парах з наступною перевіркою робіт одне одного та виставленням оцінок.
8. Рефлексія навчальної діяльності. На завершальному етапі уроку учні мають оцінити свої зусилля та успіхи впродовж уроку.

   На практиці уроки узагальнення та систематизації можуть бути різними за структурою та формою проведення з залежності від рівня підготовки класу, складності теми, вікових особливостей.

Форми систематизації

Систематизацію знань учнів можна проводити в різній формі. В педагогічній літературі частіше всього виділяють такі основні форми систематизації: усна, практична та письмово-графічна форма роботи.

Усна форма проведення систематизації може мати різний вигляд, в залежності від поставленої мети, самого матеріалу (його об'єму, ступеня складності), кількості учнів та рівня їх знань. За допомогою різних форм і видів усної роботи можна: швидко активізувати розумову діяльність учнів, зробити фронтальну перевірку, контролювати виконання домашніх завдань, дізнатися про готовність учнів сприймати новий матеріал, виявити достатність опанування знань попередніх уроків. Це визначає об'ємність узагальнення, яке буде проводити вчитель - лише по знаннях набутих впродовж 2-3х уроків чи перевірку цілих розділів і тем курсу.

Усна форма роботи – представляє простий алгоритм: постановку питання від учителя та відповідь учня. Вкрай важливим є вірно складене питання. Його якість характеризується чіткістю формулювання, вкладеним в нього змістом, типом розумової діяльності учнів, при відповіді на питання. Також потрібно зважати на індивідуальні особливості кожного учня.

Узагальнення знань за допомогою усної форми має свої переваги, а саме контакт між учеником і вчителем. Це дає можливість слідкувати за розвитком думок, скоригувати знання, розвивати навик математичного мовлення, навчити логічно мислити, робити висновки, пояснювати свої дії, правильно використовувати термінологію.

З методологічного боку труднощі виникають з: вибором матеріалу за змістом, формою постановки питань, їх кількістю, втратою уваги класу під час відповіді одного учня. Тому вчитель має ретельно відбирати матеріал, завчасно формулювати питання та проговорювати вимоги до відповідей учнів.

На уроках математики усна форма перевірки знань може приймати вигляд фронтальної або індивідуальної.

Фронтальне опитування або бесіда передбачає швидкий контроль якості знань, що проводиться для усього класу. Як правило, це одне або декілька питань, які допоможуть вчителю зрозуміти ступінь опанування матеріалу і готовності до вивчення нових тем. Така форма застосовується також для перевірки домашніх завдань та поступової систематизації знань учнів.

Індивідуальне опитування характеризується змістовною та розгорнутою відповіддю учня на оцінку. Учень повинен не просто розказати матеріал минулого уроку, а й показати своє розуміння тієї чи іншої теми, навести власні приклади. Дана форма дає змогу вчителю оцінити рівень знань конкретних учнів, логічність, послідовність та повноту їх відповіді, здатність логічно мислити та грамотно відтворювати свої думки.

Але така перевірка знань має свої недоліки, адже вчитель повинен завчасно вирішити яких саме учнів він запитає, скільки часу це буде тривати і найголовніше, що під час опитування буде робити увесь клас. Саме тому потрібно організувати роботу для всіх, як приклад, попросити уважно слухати відповідь товариша, доповнити або виправити її за бажанням.

При постановці питання вчитель має враховувати те, що перевірятися мають знання, які є фундаментальними для подальшого освоєння дисципліни або які учням складно зрозуміти . При чому вчитель повинен застосовувати різні типи питань, які задіюють пам'ять (відтворення знань, що були засвоєні раніше) та сприяють мисленню (аналіз інформації, її зіставлення та узагальнення). Дуже важливо задавати питання другого типу, які в дидактиці називаються проблемними, адже вони спонукають учня вчитись використовувати набуті знання, а не просто відтворювати.

Методика проведення усного узагальнення може бути така: спочатку сформувати основне питання(тему для відповіді), звертаючись до всього класу, потім задати питання одному учневі і дати йому можливість підготуватися для відповіді. Після цього поставити інше питання, також звертаючись до усього класу і сформувати питання для наступного учня. Коли кожен отримав своє завдання, починає відповідати той, хто вже підготувався. Під час його відповіді інші ще готуються. Завдяки виділеному часу на підготовку учні зможуть ефективніше узагальнити та систематизувати свої знання.

Щоб оцінити рівень знань учнів учитель задає два-три питання. Перше і основне питання формується в залежності від загального розвитку учня (наприклад, назвати усі випадки взаємного розміщення двох прямих у просторі або ж критерій паралельності/перпендикулярності прямих у системі координат). В якості наступного питання може виступити відтворення формули або алгоритму при застосуванні координатного методу. Також можуть задаватися уточнюючі та додаткові питання. Вони можуть допомогти згадати інформацію, яку учень не назвав чи спонукати його краще вивчити матеріал.

Не менш важливими умовами якісної усної відповіді є сприятлива атмосфера у класі, де учні не заважають один одному відповідати.

Письмово-графічна форма робіт, на наш погляд, є найбільш зручним методом систематизації знань учнів в математиці. Основні переваги такі: витрачається менше часу, зручність перевірки знань великої кількості учнів, неупередженість перевірки результатів. Така форма вчить учнів класифікувати вивчений матеріал, вчитись застосовувати набуті знання на практиці для розв'язування задач, формує вміння узагальнювати інформацію, розвиває абстрактне мислення. Сюди можна віднести складання таблиць, схем, графіків, самостійні та контрольні роботи, тести, математичні диктанти.

Використовуючи цю форму вчитель має звернути увагу на такі моменти: підготовка завдань, безпосереднє проведення та аналіз робіт. Підготовка зводиться до постановки мети, добору матеріалу, що має систематизувати та узагальнити знання учнів та розробку самого завдання. При проведенні учням пояснюються правила її оформлення, виконання завдань та відведений час. Аналіз відповідей має відбуватись за визначеними правилами. Саме вони допоможуть виявити характерні проблеми учнів та їх успіхи, погано засвоєні моменти теми та способи їх вирішення.

В узагальненні і систематизації знань особливу роль відіграють графічні зображення, які є опорою абстрактних міркувань, своєрідним засобом що надає математичній ситуації виразності, чіткості, конкретності, заощаджує час і полегшує розумову діяльність учнів.

Графічні зображення розвантажують від читання громіздких словесних описань, одноманітних записів, дають змогу швидко збагнути суть задачі, встановити необхідні зв'язки і відношення для його розв'язання, а також побачити зв'язки і відношення між поняттями, закономірностями, явищами. Осмислити суть систематизації знань допомагають учням спеціальні картки-завдання, правила-орієнтири, алгоритми, узагальнюючі схеми, таблиці тощо.

Систематизуючі таблиці виконують ілюстративні, інформаційні, довідкові. навчальні та виховні функції. Використовуючи їх, зручно ілюструвати узагальнення окремих факторів, властивостей, послідовність кроків (дій), міркувань (побудов), розглядати всі можливі випадки розв'язувань, простежувати зв'язки, залежності, закономірності [52].

Задля більшої наочності вчитель може розмежовувати інформацію кольорами, щоб учні звернули увагу на відмінності, зацікавились та змогли ефективніше вивчити матеріал за допомогою зорової пам'яті. Яскрава подача може суттєво покращити сприйняття великої кількості понять, тверджень, формул.

Таблиця 1.3.

Узагальнююча таблиця формул з теми «Метод координат» для основної школи

<table>
<tr><td>1.</td><td>Точки A та B лежать на площині</td><td>$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом</td><td>$y = kx + b, k = \tan\alpha,$
α- кут між прямою і додатним напрямком осі OX<table><tr><td>α- гострий</td><td>якщо $k > 0$</td></tr><tr><td>α- тупий</td><td>якщо $k < 0$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Прямі A_1A_2 та B_1B_2 паралельні</td><td>$A_1A_2\colon\ k_1x + b_1,\ B_1B_2\colon\ k_2x + b_2$
$k_1 = k_2\ , b_1 \neq b_2$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Прямі A_1A_2 та B_1B_2 перпендикулярні</td><td>$A_1A_2\colon k_1x + b_1,\ B_1B_2\colon k_2x + b_2$
$k_1 \cdot k_2 = -1$</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 1.3.

5.	Загальне рівняння прямої	$Ax + By + C = 0$, де A, B, C – деякі числа відмінні від нуля. Якщо $A = 0$ – пряма паралельна осі OX Якщо $B = 0$ – пряма паралельна осі OY Якщо $C = 0$ – пряма проходить через початок координат
6.	Рівняння прямої, що проходить через 2 задані точки $A_1(x_1; y_1), A_2(x_2y_2)$	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$
7.	Відстань від точки $B(x; y)$ до прямої A_1A_2	$A_1A_2: \ Ax + By + C = 0$; $\frac{\lvert Ax + By + C \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
8.	Координати точки $B(x; y)$, яка ділить відрізок у відношенні $\frac{A_1B}{BA_2} = \lambda$	$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$; $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$
9.	Відстань між точками $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$	$\lvert A_1A_2 \rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
10.	Рівняння кола радіуса R з центром у точці $Q(a;b)$	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Можна запропонувати учням заповнювати її поступово в процесі вивчення теми. Або зробити самостійну роботу на основі такої таблиці, де учням потрібно буде заповнити пропущену інформацію. Таким чином вчитель зможе зробити висновок про успішність засвоєння знань.

Вдалий добір завдань, самостійне оформлення таблиць, схем, алгоритмів уточнює, коригує і поглиблює знання школярів, сприяє розширенню їхніх пізнавальних можливостей, збагаченню уяви, реалізації творчих здібностей, формуванню наукової картини світу [52].

Ознайомившись з особливостями роботи з даними двома методами, можна дійти висновку, що для кращого результату їх можна використовувати разом. Як приклад, можна розділити клас на три команди. Перша команда буде відповідати на питання з теорії: «що таке метод координат», «як називають числа, що визначають положення точки», «що таке координата точки та координатна вісь», «скільки координат задають положення точки на прямій, площині чи у просторі». Друга команда має написати на дошці формули на знаходження: координати середини відрізка, відстані між точками, рівняння кола, прямої і т.д. Третя команда має побудувати пряму чи коло, за рівнянням, яке записане на дошці. Таким чином учні узагальнюють та систематизують знання набуті на попередніх уроках.

Форма практичних робіт на теперішній час є досить актуальною, адже для підвищення ефективності навчання необхідно сприяти виробленню практичних вмінь і навичок, особливо геометричного змісту. Суть таких робіт полягає в самостійному виконанні завдань. Працюючи самостійно або в групі учень проводить вимірювання, отримує нові дані, для розв’язання поставленого питання, а також узагальнює та систематизує вже пройдений матеріал. Такі типи завдань допомагають розпізнати в чому полягають зв’язки між різними розділами математики.

Учитель повинен чітко сформулювати вимоги до виконання роботи, надати пояснення, алгоритм, приклад та часові обмеження на виконання. Даний метод систематизації дозволить учням поглянути на формули та твердження з іншого боку, які з об’єкту примусового опанування стають єдиним засобом для вирішення поставленого завдання.

Можна запропонувати такі приклади завдань.

Завдання 1. Обчислення периметра трикутника з вершинами на серединах сторін трикутника із заданими координатами та порівняння з результатами вимірів побудованих трикутників на координатній площині.

Завдання 2. Порівняння лінійних розмірів фігур та арифметичних обчислень за формулами.

Завдання 3. До стіни вертикально приставлено драбину. На середній сходинці драбини сидить кішка. Хлопець починає рухати драбину так, що один її кінець переміщується прямолінійно по землі, а інший — вертикально вниз уздовж стіни. По якій траєкторії рухатиметься кішка, якщо вона весь час сидітиме посередині драбини? Застосуйте для розв'язування метод координат [23].

Або ж задачі на вимірювання місцевості. Учні зацікавлено будуть міркувати над тим, як знайти відстань до деякого предмета і між двома віддаленими точками висоти дерева, наприклад. Також це можуть бути побудови на місцевості, коли якісь елементи фігур недоступні.

Отже, можна дійти висновку, що кожна із форм має свої переваги та недоліки. Для найкращого результату узагальнення та систематизації знань потрібно використовувати комплекс методів і поєднання різних форм. Правильне використання запобігає механічному «заучуванню» та забезпечує встановлення зв'язку між інформацією, що сприймається впродовж вивчення теми, допомагає вчитись застосовувати свої знання.

Методи навчально-пізнавальної діяльності

Уроки узагальнення знань мають базуватися на принципах діяльнісного підходу, розвивального навчання.

За характером навчально-пізнавальної діяльності учнів З. І. Слєпкань [47] виділяє такі методи навчальної діяльності, що можуть використовуватися:

1. Пояснювально-ілюстративний метод використовується при введенні нових математичних понять, вивченні аксіом, теорем.

Наприклад, курс геометрії 7 класу включає два важливі розділи для розуміння методу координат. Перший це «Найпростіші геометричні фігури та їх властивості», в якому розглядаються фундаментальні означення, які не розкриваються за допомогою інших понять. Учні приходять до розуміння цих понять через ряд аксіом, які висвітлюють властивості об'єктів. Та другий – «Коло і круг. Геометричні побудови». Вивчення матеріалу доповнюється таким поняттям як геометричне місце точок. Учням пояснюється, що геометрична фігура може розглядатися як множина точок, що має деякі властивості.

2. Репродуктивний метод підходить для закріплення нової інформації, перевірки домашньої роботи. Учні мають розв'язувати задачі за зразком,

відтворювати формулювання та доведення теорем чи означення математичних понять.

Під час вивчення методу координат в курсі геометрії 9 класу вводяться такі основні формули: координати точки, координати середини відрізка, координати відрізка, довжина відрізка, тощо. При введенні цих формул доцільно використовувати даний метод, так як доведення із застосуванням системи координат учням ще не звичні.

3. Проблемний виклад – передбачає визначення проблеми під час пояснення навчального матеріалу та способів її усунення. Саме постановка проблем активує цікавість, уважність до сприймання інформації.

Наприклад, виводячи критерії паралельності та перпендикулярності прямих, вчитель може на якомусь кроці висунути проблему та пояснити подальші дії для її усунення.

4. Частково-пошуковий метод – полягає у самостійній пошуковій діяльності учня в поєднанні з роз’ясненнями вчителя. Саме за допомогою вірно поставлених питань, учні вчаться знаходити інформацію, формулювати означення понять, розбирати доведення теорем або способи розв’язання задач.

Як зразок, вчитель може запропонувати вивести рівняння прямої, що проходить через початок координат маючи формулу для рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

5. Дослідницький метод – застосовується для самостійної роботи учнів над розв’язанням пізнавальної або практично спрямованої задачі. Прикладами можуть слугувати задачі на доведення. Вчителю краще обрати саме ті теореми, доведення яких проводилось іншим способом і залучити учнів до міркувань, як же можна виконати доведення послуговуючись методом координат.

1.4. Аналіз навчального матеріалу з теми «Метод координат» в шкільних підручниках з геометрії

Проаналізуємо навчальний матеріал з теми «Метод координат», представлений в підручниках з геометрії для 9 класу Г. В. Апостолової [1] та

А. Г. Мерзляка [39]. Зазначимо, що послідовність викладу матеріалу щодо вивчення методу координат в цих підручниках дещо різна.

В підручнику [39] після розділів «Розв'язування трикутників» та «Правильні многокутники», розповідається про декартову систему координат на площині, завершуючи розділ вивченням методу координат.

А підручник [1] розпочинається з розділу «Координатна площина» на початку курсу, але сам метод вивчається після розділу «Розв'язання трикутників». В обох підручниках послідовно викладаються навчальний матеріал про відстань між двома точками, рівняння кола, координати середини відрізка, рівняння прямої та взаємне розміщення двох прямих на координатній площині.

А. Г. Мерзляк, окрім загального рівняння прямої, знайомить учнів з рівнянням еліпса та гіперболи. Сутність координатного методу розкривається з використанням прикладів та задач на знаходження геометричного місця точок. Далі переходять до вивчення векторів. В кінці параграфів містяться сторінки з головними формулами та описанням понять даної теми, що допомагають учням у навчанні.

В підручнику Г. В. Апостолової за допомогою прикладів розв'язання кількох задач виділяється загальний план для застосування координатного методу, який наводиться у вигляді списку. Знання закріпляються вправами на доведення тверджень, теорем та знаходження або побудову геометричного місця точок. Навчання продовжується такими розділами, як «Правильні багатокутники. Довжина кола. Площа круга» та «Вектори».

Підручники геометрії 10 класу (2018 рік) авторів А. Г. Мерзляк [38], Г. П. Бевз [8] та О. С. Істер [28] профільного рівня навчання схожі між собою за темами та послідовністю викладення матеріалу. Данні книги містять в собі вступ до стереометрії, паралельність та перпендикулярність прямих і площин у просторі, координати та вектори в просторі. Для засвоєння методу координат дані підручники містять такі формули та поняття: кути між прямими та площинами, відстань між двома точками, координати середини відрізка, координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні, рівняння: площини, сфери, фігури. В останньому розділі учні доповнюють знання про вектор, отримані з 9 класу, вивчаючи це поняття у просторі. Розглядаються дії над векторами та скалярний добуток. Далі автори розглядають перетворення у просторі. В підручнику [28] можна побачити, що присутній цілий параграф з векторного та координатного методу розв'язання задач. В ньому надається достатня кількість задач різних видів та навіть показується застосування цього методу на прикладі алгебраїчної задачі, що допомагає зрозуміти учням його багатогранність. На нашу думку, метод координат в цьому підручнику висвітлено найкраще з поміж інших.

На відміну від підручників, зазначених вище, підручник геометрії О. Я. Біляніної [9] для 10 класу академічного рівня навчання включає в себе параграф, який в значному обсязі присвячується методам розв'язання задач. Приділена значна увага до роз'яснення всіх наведених прикладів на кожен метод, що надається авторами. Проаналізувавши цей підручник та підручник Є. П. Неліна [40], можна сказати, що автори значну увагу приділяють питанню про прямі та площини у просторі, але не вводять розділ щодо координат, геометричних перетворень та векторів, тому учні лише поверхнево розглядають даний метод.

Проведений аналіз підручників геометрії показав, що автори приділяють увагу переважно теоретичній частині вивчення методу координат, тобто формулам та твердженням.

Освітні програми не передбачають систематичного застосування цього методу для розв'язання алгебраїчних чи геометричних задач, а також для доведення теорем. В підручниках його подають здебільшого для використання при розв'язанні простих, типових задач, зосереджуючи увагу на векторному (графічному в алгебрі) або координатно-векторному методі.

Висновки до 1 розділу

Досліджуючи історію розвитку координатного методу, ми з’ясували, що вона є досить цікавою та пізнавальною, адже пов’язує праці всіх людей, які зробили внесок в розвиток даного методу та аналітичної геометрії в цілому. Систематично виділяючи час на уроці для ознайомлення учнів з історичними відомостями, вчитель вирішує низку педагогічних задач. Історичні екскурси допомагають учням прийти до тієї думки, що математика як наука завдячує своєму розвитку саме спільній роботі людства протягом поколінь.

Оскільки предметом нашого дослідження є методичні особливості узагальнення та систематизації знань учнів при вивченні координатного методу, то зрозуміло, що ми вивчали науково-методичну літературу, в якій описувались відповідні поняття. Зокрема, під систематизацією будемо розуміти мислительну діяльність в процесі якої об’єкти, що вивчаються, організуються в певну систему на основі вибраного принципу. Найважливіший вид систематизації – це класифікація. Систематизації передує аналіз, синтез, узагальнення, порівняння.

Методи проведення узагальнення залежать від форми проведення уроку, зокрема від усної, практичної та письмово-графічної.

Щоб порівняти різні методичні підходи до вивчення методу координат, ми аналізували різні підручники з геометрії 9-10 класів. Проведений аналіз показав, що автори приділяють увагу переважно теоретичній частині вивчення методу координат, тобто формулам та твердженням. Освітні програми не передбачають систематичного застосування цього методу для розв’язання алгебраїчних чи геометричних задач, а також для доведення теорем. В підручниках його подають здебільшого для використання при розв’язанні простих, типових задач, зосереджуючи увагу на векторному або координатно-векторному методі.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ УЧНІВ З ТЕМИ «МЕТОД КООРДИНАТ»

2.1. Пропедевтика вивчення координатного методу

При вивчені методу координат в сучасній школі перед вчителем постають такі завдання:

1. Познайомити учнів з новим методом розв’язання задач та доведення теорем.
2. Розвивати вміння використовувати алгебраїчний апарат для розв’язання геометричних задач і навпаки.
3. Показати взаємозв’язок між алгеброю та геометрією.
4. Показати універсальність методу координат.
5. Ознайомити учнів з загальним алгоритмом та прийомами для розв’язання геометричних та алгебраїчних задач.
6. Визначити, які типи задач розв’язуються даним методом.
7. Показати, як відбувається доведення теорем з використанням методу координат.
8. Розвивати обчислювальні навички, графічну обізнаність та просторові уявлення учнів.
9. Закріпити знання базових понять щодо методу координат (координатна пряма і площина, координати точки, рівняння прямої, кола, параболи, гіперболи, довжина відрізка, координати середини відрізка).

В школі вивчення координатного методу відбувається поступово. Тут можна виділити декілька етапів:

1. Засвоєння понятійного апарату (відбувається у 5-6 класах і систематизується в курсі геометрії).
2. Засвоєний понятійний апарат застосовується для введення понять ліній, їх рівнянь та графіків функцій, як в курсі алгебри, так і в геометрії. Оскільки змістовна ціль даних предметів різна і

розмежована часом, то учні не бачать зв'язку між ними і не можуть повноцінно засвоїти головну суть методу.

3. Розкриття основних етапів методу (алгебра і геометрія).
4. Використання методу у різноманітних алгебраїчних та геометричних задачах.

Зупинимося саме на перших етапах, які ведуть до формування вмінь та навичок використання метод координат.

Перший етап починається в 5 класі. Саме тоді закладаються основи теми «Метод координат». Найкраще починати вивчення цієї теми з наведення конкретних прикладів чи ілюстрації з життя. Пряму, наприклад, можна асоціювати з автомагістраллю, що не має ні початку, ні кінця. Вчитель пояснює, що якщо відкласти на прямій деяку точку, то утвориться промінь, відповідно дві точки відділяють відрізок. Вивчається лише одна координата x, для того щоб учні мали змогу краще освоїти новий матеріал та вдало закріпити його на практиці. На даному етапі ознайомлення з цією темою означення не відіграють велику роль, учні лише знайомляться з поняттями на інтуїтивному рівні. Загалом, в підручниках різних авторів зустрічаються такі поняття: «координатний промінь», «координати точки», «відрізок», «пряма», «промінь», «довжина відрізка» тощо [43].

В 6 класі вивчаються раціональні числа та дії над ними; спочатку вводять поняття додатних та від'ємних чисел, а потім переходять до поняття *координатної прямої*. З вивченням раціональних чисел діти вчаться порівнювати та наносити їх на координатну пряму. Після теми «Перпендикулярні та паралельні прямі» вводиться поняття *координатних осей, прямокутної системи координат і координатної площини*. Розвивається вміння зображати відрізки за координатами точок та знаходити точки їх перетину на координатній площині. Заключною є тема «Графіки залежностей між величинами». Поняття, що вивчались в 5 класі на інтуїтивному рівні, постають у більш широкому розумінні. Тепер кожній точці ставиться у відповідність дві координати x та y. При чому координати точки – раціональні числа, в той час як в п’ятому класі це могли бути лише додатні, цілі числа. Найкраще ця тема запам’ятовується учнями при побудові геометричних фігур або ілюстрацій будівель, тварин, інструментів тощо.

Найбільш складним є другий етап формування координатного методу. І ці труднощі пов’язані з тим, що в курсі алгебри 7 класу графіки основних функцій уводяться шляхом побудови ряду точок, координати яких обчислюються за формулою функції. У курсі геометрії рівняння прямої і кола вводяться на основі геометричних характеристичних властивостей множини точок (рівновіддаленості від двох точок – для прямої і від однієї точки – для кола). Строгих обґрунтувань у курсі алгебри того, що графік прямої пропорційності є пряма, не дається. Вперше до цього звертаються в курсі геометрії. Різні підручники цю проблему розв’язують методично по-різному: в одних використовується явно подібність, в інших — рівновіддаленість від двох точок, що в підсумку теж зводиться до подібності, у третіх для часткових випадків $k = 1$ розглядається бісектриса першого і третього координатних кутів та інші [33, с. 145].

Курс геометрії 7 класу включає два важливі розділи для розуміння методу координат. Перший – «Найпростіші геометричні фігури та їх властивості», в якому розглядаються фундаментальні поняття, зміст яких не розкриваються за допомогою інших понять. Сутність цих понять з’ясовується через ряд аксіом, які висвітлюють властивості основних об’єктів. Другий розділ – «Коло і круг. Геометричні побудови». Вивчення матеріалу доповнюється таким поняттям, як геометричне місце точок. Учням пояснюється, що геометрична фігура може розглядатися як множина точок, що має деякі властивості.

Курс алгебри починається з вивчення лінійного рівняння з однією змінною. Далі йде тема «Функції», яка розкривається через поняття залежності між величинами (залежність змінної y від змінної x). Тема «Графіки функцій» показує, що побудова графіка функції зводиться до побудови точок, координати яких знаходяться за допомогою формули , тобто аналітичного задання функції. Далі вводиться поняття лінійної функції. Учні знайомляться з її аналітичним виглядом, графіком і властивостями; вивчають поняття кутового коефіцієнту, прямої пропорційності, взаємного розташування лінійних функцій; розв'язують графічні задачі та вправи на знаходження точки перетину лінійних функцій; будують графіки функції і доповнюють таблиці за заданою формулою. Наступна тема «Системи лінійних рівнянь з двома змінними», де розглядаються різні способи розв'язання, зокрема й графічний.

Під час викладання алгебри у 8 класі вивчають поняття раціональних та квадратних рівнянь, функції $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x},$ їхні графіки та властивості. Виконують вправи на розв'язання рівнянь, знаходження відповідності між функцією та її графіком.

Третій етап полягає у тому, що курс геометрії 9 класу продовжує вивчення та розширює поняття *декартової системи координат*. Учням розповідають, що лініям площини можна ставити у відповідність рівняння з двома невідомими x і y. За допомогою цього означення знайомлять з рівнянням прямої. Показують, що знайти рівняння кола можна виразивши відстань між двома точками площини через їхні координати. Далі розглядається *знаходження відстані між двома точками та рівняння кола* $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Після вивчення *загального рівняння прямої* та взаємного розміщення прямих на координатній площині учнів знайомлять з методом координат. У класах з поглибленим вивченням математики, на заняттях математичного гуртка у звичайних класах доцільно показати розв'язання геометричних задач методом координат. Таким чином, виділити для учнів правило-орієнтир даного методу із застосуванням його на практиці.

У систематичному курсі геометрії 9 класу вивчення змістової лінії «Координати та вектори» займає одне з головних місць. Вивченню цієї теми приділяється значна кількість уроків, зокрема на вивчення теми «Координати» приділяється 6 годин. Вводяться такі основні формули: координати точки, координати середини відрізка, координати вектора, довжина відрізка, довжина вектора, скалярний добуток векторів, кут між векторами тощо. При введенні цих формул доцільний репродуктивний метод (відтворюючий), так як доведення із застосуванням системи координат учням ще не звичні. Доцільно проводити декілька самостійних робіт в процесі вивчення кожної теми, задля перевірки засвоєння теоретичного матеріалу та вдалого застосування при розв'язуванні задач учнями. По завершенню вивчення кожного розділу проводиться контрольна робота, яка визначає рівень засвоєння матеріалу, вміння користуватися набутими знаннями та вивченими формулами [48].

Курс алгебри містить такі питання як нерівності, їх розв'язання та системи лінійних нерівностей з однією змінною. Далі учні розширюють свої знання з теми «Квадратична функція» та вчаться будувати графіки функцій з використанням елементарних перетворень. Потім вивчаються квадратні нерівності, системи лінійних нерівностей з однією та двома змінними. Показується графічний спосіб розв'язання таких систем. Останньою є тема «Функція $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0,$ її графік і властивості».

В 10 класі при вивченні теми «Координати та вектори» у просторі учні дізнаються, що кожна точка тепер має 3 координати x, y та z тривимірного простору. Всі формули вивчені раніше видозмінюються під тривимірний простір, а вивчення цієї теми на профільному рівні дає учням ще два різних способи розв'язування задач алгебраїчного та геометричного змісту, а саме метод координат та метод векторів. Вводяться нові типи завдань, але мета вивчення методу залишається незмінною. Розв'язуються ті ж задачі на знаходження відстані, довжини відрізків, кутів між прямими, площинами або векторами у просторі.

2.1.1. Введення та засвоєння основних понять та теорем

З. І. Слєпкань зазначає, що засвоєння математичних понять відбувається у процесі аналітико-синтетичної діяльності учня, що спрямована на виявлення істотних загальних властивостей певного поняття й усвідомлення його неістотних властивостей, а також на застосування нового поняття до розв’язання задач [48]. У разі використання абстрактно-дедуктивного методу навчання для формування нового поняття вчитель формулює означення сам, наводить приклади об’єктів, що належать до цього поняття, виявляє істотні спільні властивості та зазначає неістотні [27]. Шкільний курс геометрії містить означу вальні поняття, первісні (неозначувальні) поняття та поняття, які вводяться описуванням на прикладах.

В останньому випадку учні частково дістають уявлення про істотні властивості поняття, але означення поняття не формулюється з дидактичних міркувань. При вивченні змістової лінії основним прикладом первісного поняття є «точка». Інші поняття вводяться описуванням або в вигляді означень.

Введення понять теми «Координати» починається відповідно з чинною програмою з введення понять «координатна пряма», «прямокутна система координат на площині», «координатна площина» у 5-6 класі. Наведемо порівняльну таблицю з уведення цих понять в різних підручниках.

Таблиця 2.1.

Різні підходи до описання поняття «координатна пряма» у 5 класі

Автори підручників	Трактовки поняття
Г.П. Бевз, В.Г. Бевз	«числова вісь»
О.С.Істер	«числова пряма»
М. В. Беденко	«числовий промінь»
А.Н.Тарасенкова	«координатний промінь»
А.Г.Мерзляк	«пряма, на якій вибрано початок відліку, одиничний відрізок і напрям»

Як можемо спостерігати, автори підручників подають різну термінологію.

Також, щодо визначення координатної площини у авторів немає єдності формулювань. Про це свідчать дані наступної таблиці.

Таблиця 2.2.

Означення поняття «координатна площина» у 9 класі

Автори підручників	Означення
Г.П. Бевз, В.Г. Бевз	«дві взаємно перпендикулярні прямі, які перетинаються у їх спільному початку координат і одиничні відрізки яких рівні»
А.Г. Мерзляк	«площина, на якій зображено дві координатні прямі (вісь абсцис та вісь ординат) зі спільним початком відліку»
М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова	«площина із уведеною на ній системою координат»
О.С. Істер	«площина, на якій задана прямокутна система координат»
Г.В. Апостолова	«площина, на якій введено декартову систему координат»

Одними з елементів теоретичних знань, з якими учні знайомляться при вивченні математики разом з означеннями понять, аксіомами та теоремами, є алгоритми. Алгоритм - послідовність, система, набір систематизованих правил виконання обчислювального процесу, що обов'язково приводить до розв'язання певного класу задач після скінченного числа операцій [51, с.208].

Алгоритм має такі властивості:

1. Об'ємність: за допомогою окремого алгоритму можна розв'язати всі задачі деякого типу.

2. Зрозумілість: при побудові алгоритму виділяють етапи, що зможе виконати кожний учень.

3. Поступовість: розв'язання задач за допомогою алгоритму в строгому порядку, в випадку зміни хоча б одного кроку розв'язання задачі стає неможливим.

4. Результат: точне розв'язання задачі за допомогою алгоритму завжди приводить до певного результату [47].

Не менш важливим є і спосіб подачі алгоритму. Зокрема, саме від вибору вчителя залежить успішність засвоєння того чи іншого алгоритму. Перший та найпоширеніший спосіб – словесний опис алгоритму. Другий – це представлення у вигляді схем, таблиць та малюнків. Третій спосіб – запис алгоритму у вигляді блок-схеми. На наш погляд для кращого засвоєння алгоритму та узагальнення знань, щодо всіх його етапів, доцільно застосовувати наочні способи подання.

Потрібно зауважити, що задачі, направлені на формування алгоритму, погано засвоюються учнями. Тому, на основі декількох задач, доцільно разом з класом виділити основні моменти, які допоможуть учням засвоїти новий матеріал.

Наведемо загальні правила застосування методу координат для розв'язання задач у формі блок-схеми рис.2.1. [48, с.311] :

1. Відокремити умови і вимоги задачі (теореми). Обрати систему координат, відносно якої перевести вимоги на мову координат і скласти рівності зі змінними.

2. Використовуючи умови задачі, перетворити рівності зі змінними і прийти до результату мовою координат.

3. Здобутий результат перевести на мову геометрії.

Рис. 2.1. Блок-схема етапів використання методу координат

Також необхідно звернути увагу учнів на те, що використання даного методу буде ефективним, якщо в умові задачі присутні відстані, координати точки, рівняння прямої, кола, параболи, кути, координати чи вектори.

Серед планіметричних задач, які доцільно розв'язувати координатним методом, слід відокремити задачу на обгрунтування залежностей між елементами.

Традиційно цей матеріал є одним з найважчих в шкільному курсі геометрії. У той же час координатний метод є одним з широко вживаних, красивих і сучасних методів розвязання задач.

Сила координатного метода полягає і в тому, що він дозволяє легко робити узагальнення, роль яких в математиці важко переоцінити. Для учнів, які володіють зазначеним методом, не важко буде розв’язання складні завдання простим шляхом [46, с.242].

2.1.2. Система задач пропедевтичного спрямування для засвоєння координатного методу в основній школі

В своєму дослідженні ми розробляли систему задач, що відповідають головним етапам вивчення методу координат. Назвемо ці етапи:

1. Підготовчий етап – полягає в опануванні основних понять та формул.
2. Мотиваційний етап зводиться до обґрунтування необхідності вивчення даного методу. Краще це робити на прикладі задачі, розв’язання якої методом координат може бути простіше, а ніж будь-яким іншим.
3. Орієнтовний етап. Його мета – висвітлити зміст методу координат, зосередивши увагу на основних компонентах, завдяки колективному аналізу розв’язання задачі.
4. Формуючий етап. Відбувається засвоєння всіх окремих операцій методу координат. Ми повинні підібрати систему задач, що формують різні компоненти методу. Це повинні бути такі приклади, в яких поступово потрібно застосовувати знання з даної теми.
5. Завершальний етап. Його суть в розв’язанні різних типів задач, в яких присутні більшість складових методу.

Наведемо систему задач для реалізації кожного з зазначених етапів.

Підготовчий етап

Задача 1. На рисунку зображено шкалу спідометра. Визначте швидкість автомобіля, якщо стрілка буде вказувати на точки A, B, C, D.

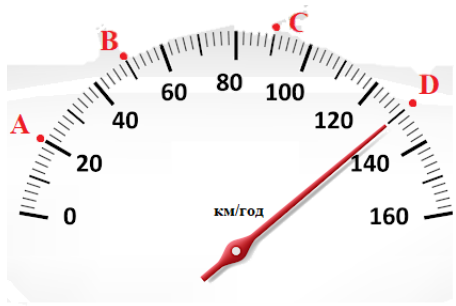


Рис. 2.2.

Розв'язання

A-20 км/год; B-50 км/год; C-90 км/год; D-130 км/год.

Задача 2. Запишіть координати точок, що зображені на рисунку.

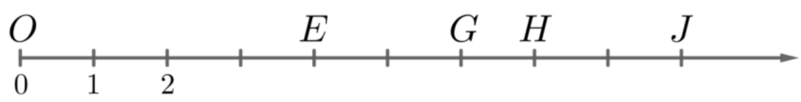


Рис. 2.3.

Розв'язання

O(0), E(4), G(6), H(7), J(9).

Задача 3. За допомогою олівця та лінійки зобразіть координатний промінь та нанесіть точки, що мають такі координати A(1), B(3), C(7), D(8), E(10). За одиничний відрізок візьміть одну клітинку.

Розв'язання

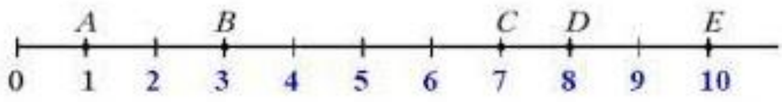


Рис. 2.4.

Задача 4. Знайти координати точок, які знаходяться справа і зліва від точки M(245) на 15 одиничних відрізків.

Розв'язання

$P(230), K(260)$.

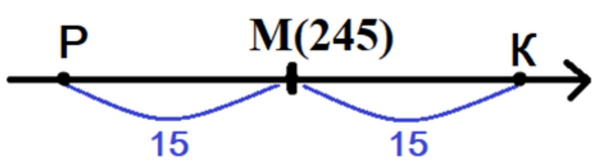


Рис. 2.5.

Задача 5. О 6 годині ранку термометр показував температуру 5°С. Яка температура була надворі о 12 годині, якщо кожні дві години температура повітря підвищувалась на 2°С.

Розв’язання

Якщо уважно почитати умову, то зрозуміємо, що за годину температура повітря зростала на 1°С, отже за 6 годин, вона зросла на 6°С.

5+6=11°С - було надворі о 12 годині.

Задача 6. Намалюйте координатну пряму та зобразіть на ній такі точки А(-4) та В(6). Знайдіть на прямій точку, яка буде серединою відрізка АВ та запишіть її координату.

Розв’язання

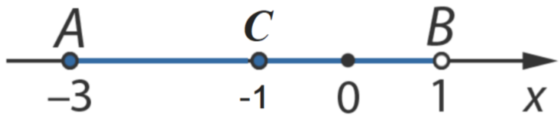


Рис. 2.6.

Задача 7. Знайдіть координати точок та послідовно сполучіть їх разом.

(10;0); (11;1); (10;2); (11;3); (7;4); (6;5); (4;4); (3;6); (2;6); (2;7); (0;8); (-1;8); (-3;7); (-4;5); (-6;6); (-11;6); (-13:5); (-13;2); (-14;0); (-16;2); (-14;-3); (-11;-3); (-10;-4); (-7;-2); (-5;-3); (-5;-4); (-3;-5); (-5;-5); (-5;-7); (-6; -8); (-5;-9); (-3;-8); (-2;-6); (0;-5); (1;-6); (2;-6); (1;-7); (2;-8); (3;-8); (3;-10); (4;-10); (5;-8); (6;-8); (7;-7); (5;-7); (3;-6); (5;-5); (9;-2); (9;-1); (10;0). Що за малюнок отримано?

Розв’язання

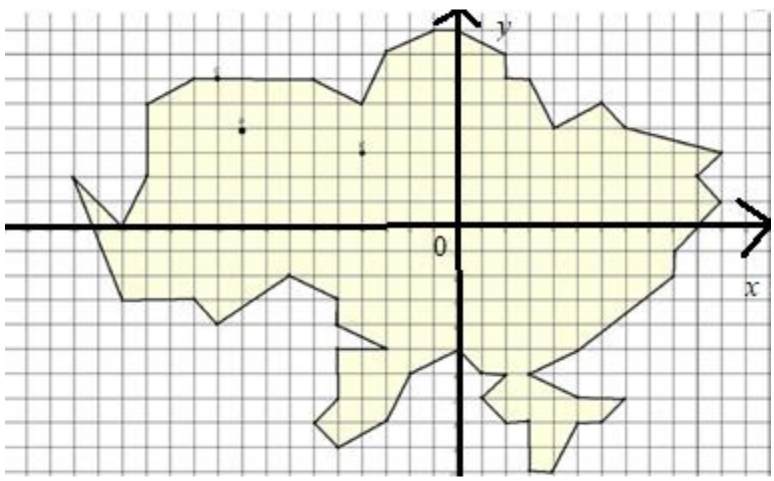


Рис. 2.7.

Задача 8. Дано ABCD- прямокутник з координатами вершин $A(-6;6)$, $C(3;-2)$, $D(-6;-2)$. Знайти координати точки B. Провести діагоналі прямокутника і записати координати точки перетину діагоналей. Знайти периметр та площу.

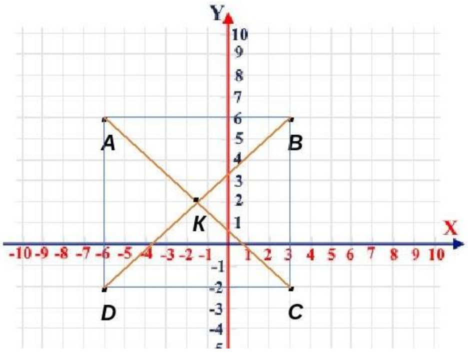


Рис. 2.8.

Розв'язання

$B(3;6)$, $K(-1{,}5;\ 2)$

$P = 2 \cdot (4 + 4{,}5) = 2 \cdot 8{,}5 = 17$ см.

$S = 4 \cdot 4{,}5 = 18$ см^2.

Задача 9. На координатній площині побудована крива. Знайдіть ординати точок лінії, якщо абсциси дорівнюють 4; 2; -4.

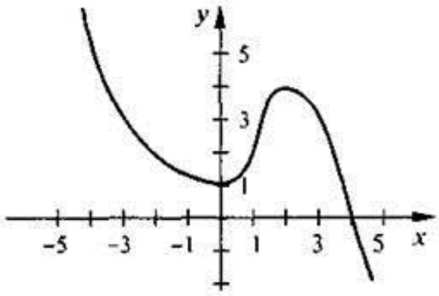


Рис. 2.9.

Розв'язання

$A(4;0), B(2;4), C(-4;5)$.

Задача 10. На координатній площині зобразіть трикутник ABC, якщо $A(-3;-1)$, $B(1;3)$, $C(3;-3)$. Знайдіть координати точок перетину сторін з осями координат.

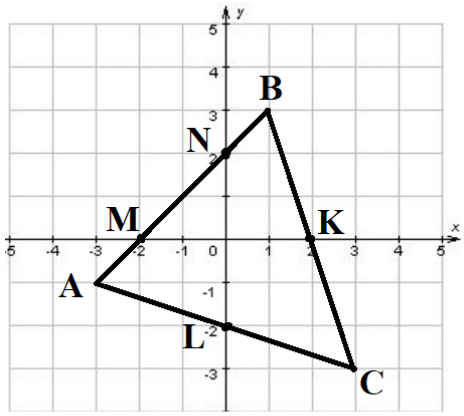


Рис. 2.10.

Розв'язання

$M(-2;0), N(0;2), K(2;0), L(0;-2)$.

Мотиваційний етап

Розглянемо та порівняємо два способи доведення теореми про середню лінію трикутника.

Таблиця 2.3.

Способи доведення теореми про середню лінію трикутника

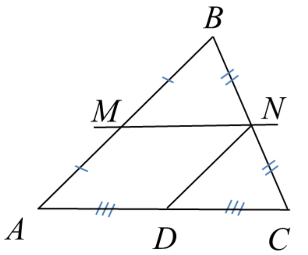
<table>
<tr><td colspan="2">«Середня лінія трикутника паралельна одній з його сторін та дорівнює її половині».</td></tr>
<tr><td>1 спосіб. Застосовуючи теорему Фалеса</td><td>2 спосіб. Застосовуючи метод координат</td></tr>
<tr><td>

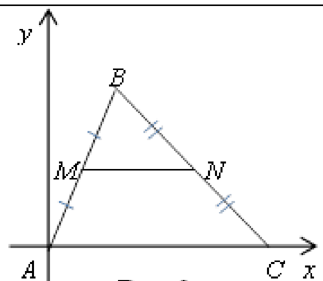
Рис. 1</td><td>

Рис.2</td></tr>
<tr><td>Нехай M – середина AB, N – середина BC (Рис.1).
Через точку N проведемо пряму, паралельну AC.
Так як $BN=CN$, то за теоремою Фалеса ця пряма пройде через точку M. Тобто вона містить середню лінію MN.
Отже $MN \parallel AC$.
Проведемо середню лінію ND.
Бачимо, що $ND \parallel MA$ та $ND \parallel BA$,
тоді очевидно, що $AMND$ – паралелограм
(його протилежні сторони паралельні).
Звідки $AD=MN$ (як протилежні сторони паралелограма), але $AD=DC$. Тому отримуємо, що $MN = \frac{1}{2}AC$.
Теорему доведено.</td><td>Розташуємо трикутник, так як на рисунку 2.
Тоді A$(0;0)$; $B(x_1;y_1)$; $C(x_2;0)$,
M – середина AB, N – середина BC.
Знайдемо координати точок M та N:
$x_M = \frac{x_B + x_A}{2} = \frac{x_1}{2}$;
$y_M = \frac{y_B + y_A}{2} = \frac{y_1}{2}$; $M\left(\frac{x_1}{2};\frac{y_1}{2}\right)$
$x_N = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y_M = \frac{b}{2}$, $N\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1}{2}\right)$
Оскільки ординати точок M і N рівні, то середня лінія паралельна осі абсцис.
А оскільки основа трикутника лежить на осі абсцис, то $MN \parallel AC$. Знайдемо AC та MN:
$AC = \sqrt{(x_2-0)^2+0^2} = x_2$;
$MN = \sqrt{\frac{{x_2}^2}{4}} = \frac{x_2}{2}$.
Отримали, що $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2}AC$ отже, теорему доведено.</td></tr>
</table>

Доведення першим способом потребує володіння такими відомостями з геометрії:

- поняття трикутника та його властивості;
- поняття паралелограма та його властивості;
- властивості паралельних прямих;
- теорема Фалеса.

Теми «Трикутники», «Паралельні прямі та їх властивості» учні вивчають у 7 класі. Поняття паралелограма та його властивостей, теорему Фалеса проходять у 8 класі. Таким чином, якщо учні недостатньо засвоїли матеріал попередніх років, то в них можуть виникнути труднощі при використанні цього способу для доведення теореми про середню лінію трикутника. Лише поступове та систематичне вивчення геометрії – ключ до її опанування.

Другий спосіб доведення потребує наступних знань та вмінь:

- вдалий вибір системи координат;
- знаходження координат середини відрізка;
- знаходження відстані між точками;
- проведення алгебраїчних перетворень.

Як можемо спостерігати, більшість з цих питань вивчаються в розділі «Декартова прямокутна система координат» в 9 класі. Учні при доведенні менше спираються на раніше вивчений матеріал, отож засвоїти основи методу координат зможуть, як сильні учні, так і слабші.

Орієнтовний етап

Аналіз діяльності при використанні координат в конкретних ситуаціях дозволяє виділити в її структурі основні дії (компоненти), які визначають зміст вправ на засвоєння координатного методу. На наш погляд вивчення даного методу потрібно проводити з використанням схем та таблиць, що допоможуть узагальнити та систематизувати знання учнів. Важливо наголосити на тому, що блок-схеми, наприклад, допомагають наглядно побачити зв’язки між тим, що нам відомо і тим, що треба знайти. Розв'язання наступної задачі представимо у вигляді схеми з фіксацією основних етапів розв'язання.

Задача 11. Дано 2 точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок M таких, що

$2AM^2 - BM^2 = 2AB^2$ [39, с. 114].

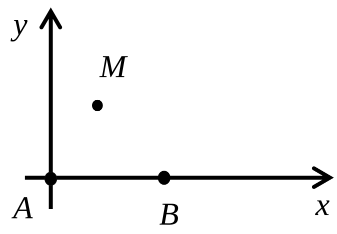


Рис. 2.11.

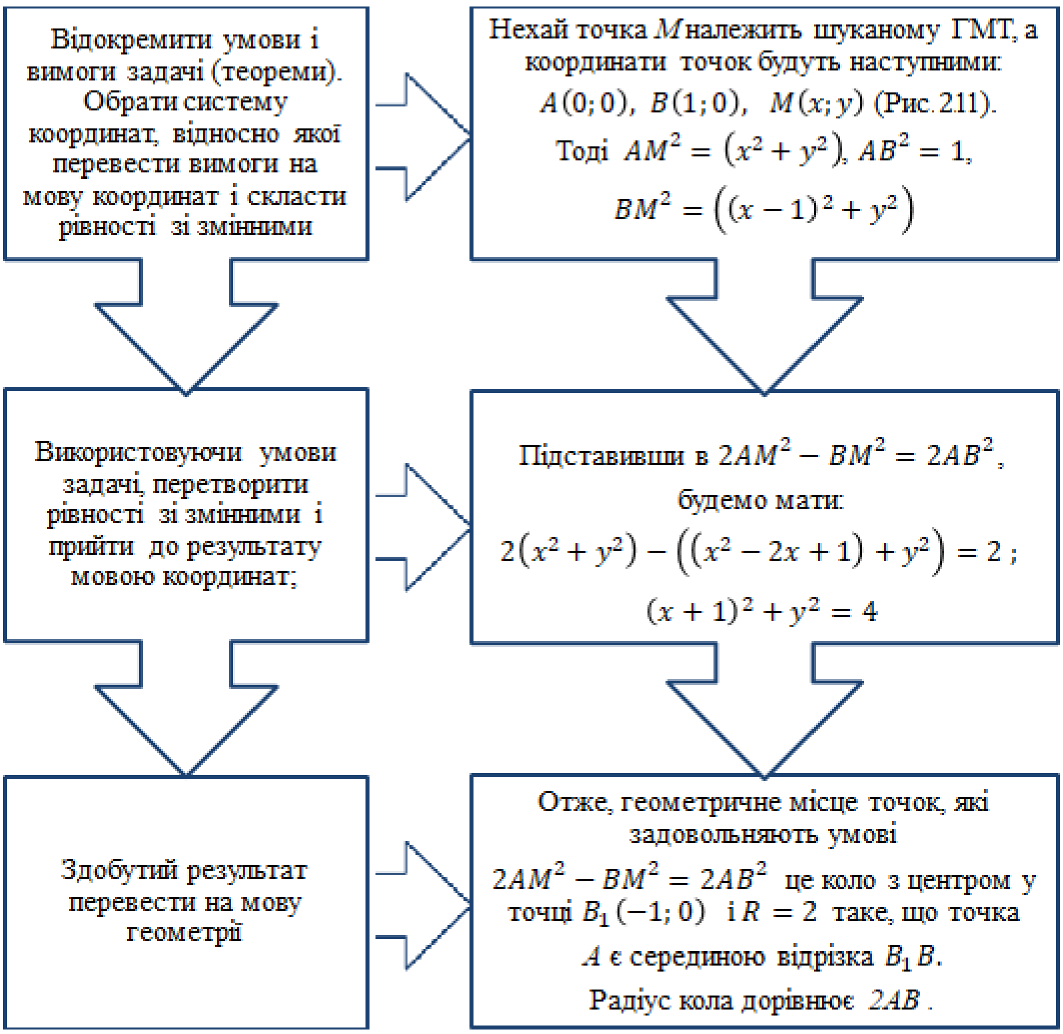


Рис. 2.12. Схема розв'язання задачі методом координат

Слід відмітити, що розв'язок задачі не залежить від вибору системи координат. Але від вдалого її вибору залежить раціональний шлях розв'язання задачі, легкість одержання необхідного результату. Тому, перш ніж вводити систему координат, необхідно глибоко проаналізувати зміст задачі, встановити, координати яких точок площини чи простору треба визначити, рівняння якої лінії треба скласти, і подумати, в якій з вибраних систем координат можна розв'язати задачу з найменшою затратою часу і розумових сил. Загальних рекомендацій тут немає. Кожна задача вимагає індивідуального підходу [11].

Формуючий етап

На формуючому етапі засвоєння методу координат учні повинні володіти наступними вміннями, що представлені у вигляді схеми 2.13. [3].

Рис. 2.13. Перелік вмінь для використання координатного методу

Саме за допомогою цих вмінь учень може виразити залежність між геометричними фігурами та алгебраїчними співвідношеннями і навпаки.

Потрібно розвивати вміння учнів за рівнянням бачити точний геометричний образ фігури та уявляти його, як об'єкт в координатній площині, а також вміти тлумачити отримані результати.

Задача 12. Знайдіть координати вектора $\vec{a}+\vec{b}$, якщо

а) $\vec{a}(1;4)$, $\vec{b}(7;3)$, б) $\vec{a}(-2;1)$, $\vec{b}(9;-4)$.

Розв'язання

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$; $\vec{a}(x_1;y_1),\vec{b}(x_2;y_2)$; $\vec{c}(x_1+x_2;y_1+y_2)$

а) $\vec{c}(1+7;4+3)$; $\vec{c}(8;7)$;

б) $\vec{c}(-2+9;1+(-4))$; $\vec{c}(7;-3)$.

Задача 13. Дано три точки M(-2;5), N(1;3), K(4;-7). Знайдіть:

а) координати середини відрізків MK і MN;

б) довжину відрізків MK і MN.

Розв'язання

а) Якщо $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$, то середина відрізка A_1A_2

має координати $\frac{x_1+x_2}{2}$; $\frac{y_1+y_2}{2}$;

Нехай P –середина відрізка MK, Q-середина відрізка MN. Тоді:

$P\left(\frac{-2+4}{2};\frac{5-7}{2}\right)$; $P(1;-1)$;

$Q\left(\frac{-2+1}{2};\frac{5+3}{2}\right)$; $Q\left(-\frac{1}{2};4\right)$;

б) Якщо $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$, то $|A_1A_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$;

$|MK|=\sqrt{(4-(-2))^2+(-7-5)^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$;

$|MN|=\sqrt{(1-(-2))^2+(3-5)^2}=\sqrt{13}$.

Задача 14. Чи всі наведені рівняння є рівняннями кола? Якщо так, вкажіть координати центру та радіус.

а) $(x-5)^2+(y+6)^2=16$;

б) $x^2+(y-2)^2=1$;

в) $y^2+x^2-8x+6y+40=0$;

г) $y^2+x^2-6x+4y-23=0$.

Розв'язання

Загальне рівняння кола з центром у точці $M(a;b)$ та радіусом r:

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

а) $(x-5)^2+(y+6)^2=16$ – так, координати центру $(5;-6)$, радіус 4.

б) $x^2 + (y-2)^2 = 1$ – так, координати центру $(0; 2)$, радіус 1.

в) $y^2 + x^2 - 8x + 6y + 40 = 0.$

Виділимо квадрати двочленів у лівій частині даного рівняння:

$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) - 16 - 9 + 40 = 0.$

$(x-4)^2 + (y+3)^2 = -15$ – не є рівнянням кола, оскільки сума двох квадратів не може бути від'ємним числом.

г) $y^2 + x^2 - 6x + 4y - 23 = 0.$

Виділимо квадрати двочленів у лівій частині даного рівняння:

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) - 9 - 4 - 23 = 0.$

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 36$ – так, координати центру $(3; -2)$, радіус 6.

Задача15. Складіть рівняння прямих, що проходять через задані точки:

а) A(-1;7), B(6;2);

б) A(0;3), B(4;9).

Розв'язання

Рівняння прямої, що проходить через 2 задані точки $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

а) $\frac{\mathrm{x}+1}{6+1} = \frac{y-7}{2-7}$;

$(x+1) \cdot (2-7) = (y-7) \cdot (6+1);$

$-5 \cdot (x+1) - 7 \cdot (y-7) = 0;$

$-5x - 5 - 7y + 49 = 0;$

$-5x - 7y + 44 = 0;$

б) $\frac{x+0}{4-0} = \frac{y-3}{9-3};$

$x \cdot (9-3) = (y-3) \cdot 4;$

$6x - 4y + 12 = 0$.

Задача 16. Дано квадрат зі стороною a. Виберіть систему координат: 1) щоб три вершини квадрата знаходились на осях координат; 2) щоб всі вершини квадрата знаходились на осях координат. Запишіть координати вершин квадрата і точки перетину його діагоналей [3].

Завершальний етап

Задача 17. Дано трикутник ABC з координатами вершин: $A(-2;3)$, $B(3;5)$, $C(-1;-5)$. Знайдіть:

а) довжини сторін трикутника ;

б) довжину медіани, проведеної до сторони BC ;

в) координати вектора $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Розв'язання

а) $|AB|=\sqrt{(3-(-2))^2+(5-3)^2}=\sqrt{29}$;

$|BC|=\sqrt{(-1-3)^2+(-5-3)^2}=4\sqrt{5}$;

$|CA|=\sqrt{(-1-(-2))^2+(-5-3)^2}=\sqrt{65}$

б) Нехай $K(x;y)$ − середина відрізка *BC*, тоді $x=\frac{3-1}{2}=1$, $y=\frac{5-5}{2}=0$

Отже *K(1;0)*. Медіаною до сторони BC є відрізок AK. Знайдемо його довжину:

$|AK|=\sqrt{(1-(-2))^2+(0-3)^2}=3\sqrt{2}$;

в) $\overrightarrow{AB}(3-(-2);5-3)$; $\overrightarrow{AB}(5;1)$;

$\overrightarrow{AC}(-1-(-2);-5-3)$; $\overrightarrow{AC}(1;-8)$;

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{m}$;

$\vec{m}(6;-7)$

Задача 18. Дано ромб, діагоналі якого дорівнюють *2a* та $2b$. Знайдіть множину всіх точок, для яких виконується: $AM^2+DM^2=BM^2+CM^2$.

Розв'язання

1) Оберемо систему координат як показано на рис. 2.14.

2) Визначаємо координати точок: A(-a; 0), B(0; b), $C(a$; 0), D(0; -b).

3) Знайдемо відстань від довільної точки $M(x;y)$ до кожної вершини ромба.

$AM^2=(x+a)^2+y^2$,

$BM^2=x^2+(y-b)^2$,

$CM^2=(x-a)^2+y^2$,

$DM^2=x^2+(y+b)^2$

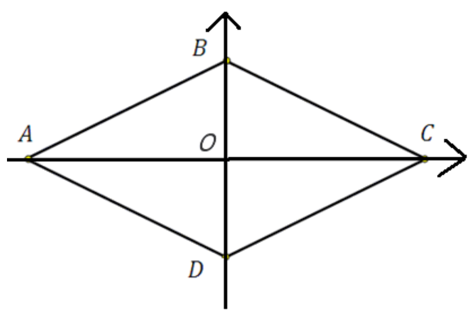


Рис. 2.14.

4) Перепишемо умову, використовуючи отримані рівності:

$$(x + a)^2 + y^2 + x^2 + (y + b)^2 = x^2 + (y - b)^2 + (x - a)^2 + y^2$$

(вміння перекладати задачу с геометричної мови на аналітичну)

5) Розкривши дужки (провівши алгебраїчні перетворення) отримаємо:

$$2ax + 2yb = -2yb - 2xa; \ ax + yb = 0;$$

$y = -\frac{a}{b}x$ (вміння виконувати алгебраїчні перетворення)

6) Отже, отримали рівняння прямої, що проходить через початок координат. В нашому випадку пряма проходить через точку перетину діагоналей ромба, а також є перпендикулярною до сторони ромба (вміння бачити за рівнянням конкретний геометричний образ).

Задача 19. На площині розміщені точки А та В. Знайти геометричне місце точок М, в двічі рівновіддалених від А, ніж від В.

Розв'язання

1. Оберемо систему координат так, щоб початок координат збігався з точкою А, а додатна піввісь абсцис співпадала з АВ.
2. За одиничний відрізок оберемо відрізок АВ. Тоді точки матимуть наступні координати: $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, М(x; y).
3. Умова $\rho(\text{A}; \text{M}) = 2\rho(\text{B;M})$ в координатах буде мати наступний вигляд: $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$.
4. Якщо піднесемо ліву та праву частини рівняння до квадрату та виконаємо перетворення, то отримаємо: $3x^2 - 8x + 4 + 3y^2 = 0$.

   Можемо подати дане рівняння у такому вигляді: $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

   5. Отже, шукане геометричне місце точок – це коло з центром у точці $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$ та радіусом $\frac{2}{3}$.

2.2. Узагальнення та систематизація знань та вмінь учнів при вивчені координатного методу в старшій школі

2.2.1. Методичні особливості застосування аналогії при узагальненні знань з координатного методу

Одним з найбільш зручних та зрозумілих методів пізнання є аналогія. Аналогією, називається умовивід, в якому на основі схожості предметів за одними ознаками робиться висновок про схожість цих предметів за іншими ознаками [30].

Завдяки їй учні вчаться самостійно міркувати, осмислювати навчальний матеріал, узагальнювати та систематизувати набуті знання. Джордж Пойя вважав, що випадки, в яких застосовується аналогія є невичерпними за своєю різноманітністю.

Використання даного методичного прийому дає можливість значно легше та краще засвоїти навчальний матеріал, адже він забезпечує перенесення з певної системи знань і умінь від невідомого об’єкту до відомого.

Д. П. Горський стверджував, що аналогія дає змогу отримати нові знання, для того, щоб розтлумачити незрозуміле, подати абстрактне в доступній формі. Разом з цим, аналогія може слугувати методом розв’язання задач шляхом зведення їх до раніше розв’язаних.

Потрібно зауважити, що поняття аналогії може досліджуватися в декількох напрямках, наприклад, як поняття відношення подібності між об’єктами або явищами, як форма логічного висновку або метод пізнання.
В методиці математики аналогія виступає також і як дидактичний прийом. Використання аналогії як методу навчання при вивченні нових понять, при повторенні матеріалу, при відшуканні способу розв’язування ряду задач, при складанні нових задач [30].

Аналогією як методом пізнання досить зручно користуватись при вивченні курсу стереометрії декартових координат, геометричних перетворень на площині і в просторі. Суть полягає у переведенні понять, формул, властивостей фігур із площини у простір. Або ж при розв'язанні стереометричних задач ми можемо користуватися знаннями, щодо властивостей фігур на площині або вже відомими способами діяльності. Це допомагає прослідковувати внутрішньо предметні зв'язки геометрії, адже стереометрія є логічним продовженням курсу планіметрії. Під перетворенням мається на увазі діяльність, під час якої відбувається узагальнення знань, вмінь та способів діяльності учнів за допомогою порівняння навчального матеріалу.

Наведемо основні вміння, що потрібні для застосування методу аналогії при розв'язанні задач стереометрії:

1. Формулювати планіметричні або стереометричні задачі, аналогічні до наведених.
2. Відокремлювати умову та вимогу задачі.
3. Складати таблицю-перекладач понять та формул.
4. Порівнювати основну задачу з допоміжною.
5. Розкладати по крокам спосіб розв'язання допоміжної задачі , щоб в подальшому використати алгоритм розв'язання до наведеної задачі.
6. Виконувати перенесення способу розв'язання планіметричної задачі на розв'язання стереометричної задачі.

Для успішного засвоєння знань вчителі можуть, використовуючи аналогію, складати стереометричні задачі на основі планіметричних. Зазначимо, що досить вдалими є міркування П. К. Магомедбекова щодо використання аналогії при складанні і розв'язуванні задач: «Виходячи із структури умов задач, найлегше складати стереометричні задачі, аналогічні різним планіметричним. При цьому відомо, що майже для кожної планіметричної задачі завжди можна (у загальному вигляді) скласти стереометричну задачу, і до того ж не одну». [34, с.164].

Доцільно аналогічні задачі планіметрії і стереометрії пропонувати учням розглядати у порівнянні. Учні при цьому не тільки повторюють, раніше вивчений матеріал, а й використовують його як базу для розвитку нових умінь та навичок. Вони навчаються бачити глибокі зв'язки між різними розділами геометрії, переносити раніше сформовані знання, уміння та навички у нові умови [30].

На одному із занять вчитель може запропонувати учням деяку задачу. Але її розв'язанню має передувати розв'язання іншої – допоміжної задачі, яка буде менш складною, хоча розв'язання обох задач мають ґрунтуватися на одному принципі. Після опрацювання допоміжної задачі, учні мають здійснити уявне перенесення кроків розв'язання легшої задачі з курсу планіметрії на складнішу, що в курсі стереометрії. Для цього важливо здійснити узагальнення набутих знань з одного курсу щоб відобразити знання та вміння набуті при роботі з площиною на роботу у просторі. Успішність використання аналогії обумовлюється тим, що учні можуть співвіднести умови та хід розв'язання основної задачі та задачі-підказки.

Для успішного узагальнення та систематизації набутих знань вчитель має проводити роботу з розвитку логічного міркування учнів. Ми вважаємо, що для виконання цієї мети учителю слід практикувати самостійні виведення формул, тим самим залучати учнів до самостійного міркування.

На наш погляд найбільшої ефективності урок узагальнення та систематизації знань набуває з використанням таблиць, схем або логічних ланцюжків. Те ж саме можна сказати про ефективність застосування прийому аналогії на уроках математики. Учні самостійно опрацьовують поданий матеріал та розбивають його на блоки, встановивши певну логіку, тобто з'ясувавши логічні зв'язки між блоками та їх елементами.

Як методичний прийом ми використовуємо аналогію в тому, що залучаємо учнів до того, щоб вони помітили наявні закономірності, спочатку пропонуємо їм самим запропонувати відповідні формули для курсу стереометрії, на рівні здогадки та використання прийому аналогії.

Розглянемо для прикладу фрагмент уроку в 10 класі, на якому розглядається застосування прийому аналогії (див. Додаток А).

На етапі повторення учитель пропонує учням розв'язати такі дві задачі на використання методу координат на площині.

Задача 1А. Дано дві точки $M(-2;5), N(1;3)$ на площині. Знайдіть:

а) координати середини відрізка MN;

б) довжину відрізка MN;

в) координати вектора MN.

Задача 1Б. На площині розміщено трикутник АВС з координатами його вершин*:* $\mathrm{A}(-2;3)$, $\mathrm{B}(3;5)$, $\mathrm{C}(-1;-5)$. Запишіть рівняння медіани проведеної до сторони ВС.

Далі вчитель формулює завдання: на слайді представлена частина таблиці на знання формул методу координат на площині та у просторі; спробуйте заповнити таблицю самостійно. Вчитель контролює процес виконання завдання і відповідає на можливі питання.

Таблиця 2.4.

Співвідношення між формулами планіметрії та стереометрії з теми «Метод координат»

№	Формули планіметрії	Формули стереометрії
1.	Відстань між точками $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	Відстань між точками $A_1(x_1;y_1;z_1), A_2(x_2;y_2;z_2)$ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$
2.	Координати $(x;y)$ середини відрізка з кінцями $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$ $x=\frac{x_1+x_2}{2}$; $y=\frac{y_1+y_2}{2}$;	Координати $(x;y;z)$ середини відрізка з кінцями $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$ **(Місце для формули)**
3.	Відстань від точки $B(x;y)$ до прямої A_1A_2: $Ax+By+C=0$; $d=\frac{\lvert Ax+By+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$	Відстань від точки $B(x;y;z)$ до площини α : $Ax+By+Cz+D=0$; **(Місце для формули)**
4.	Рівняння кола радіуса R з центром в точці $Q(a;b)$ $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$	Рівняння сфери радіуса R з центром в точці $Q(a;b;c)$ **(Місце для формули)**
5.	Рівняння прямої на площині, що проходить через 2 задані точки $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$ $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$	Рівняння прямої у просторі, що проходить через 2 задані точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$ **(Місце для формули)**
6.	Загальне рівняння прямої на площині, де A, B, C – деякі числа відмінні від нуля. $Ax+By+C=0$,	Система, що визначає рівняння прямої як лінію перетину двох непаралельних площин. **(Місце для формули)**

Продовж. табл. 2.4.

7.	Загальне рівняння прямої, перпендикулярної вектору $\vec{n}(a;b)$ $ax+by+c=0$	Загальне рівняння площини, перпендикулярної вектору $\vec{n}(a;b;c)$ **(Місце для формули)**
8.	$A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$ координати вектора: $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$, модуль вектора: $\lvert\overrightarrow{A_1A_2}\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	$A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$ координати вектора: **(Місце для формули)** модуль вектора: **(Місце для формули)**
9.	Додавання векторів $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ $\vec{a}(x_1;y_1),\vec{b}(x_2;y_2)$; $\vec{c}(x_1+x_2;y_1+y_2)$	Додавання векторів $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ $\vec{a}(x_1;y_1;z_1),\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$; **(Місце для формули)**
10.	Множення вектора $\vec{a}(x_1;y_1)$ на число μ: $\mu\vec{a}(\mu x_1;\mu y_1)$	Множення вектора $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ на число μ: **(Місце для формули)**

Після заповнення таблиці, представленої на попередньому слайді, буде показано правильний варіант її заповнення.

Таблиця 2.5.

Співвідношення між формулами планіметрії та стереометрії

№	Формули планіметрії	Формули стереометрії
1.	Відстань між точками $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	Відстань між точками $A_1(x_1;y_1;z_1), A_2(x_2;y_2;z_2)$ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$
2.	Координати $(x;y)$ середини відрізка з кінцями $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$ $x=\frac{x_1+x_2}{2}$; $y=\frac{y_1+y_2}{2}$;	Координати $(x;y;z)$ середини відрізка з кінцями $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$ $x=\frac{x_1+x_2}{2}$; $y=\frac{y_1+y_2}{2}$; $z=\frac{z_1+z_2}{2}$
3.	Відстань від точки $B(x;y)$ до прямої A_1A_2: $Ax+By+C=0$; $d=\frac{\lvert Ax+By+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$	Відстань від точки $B(x;y;z)$ до площини α : $Ax+By+Cz+D=0$; $d=\frac{\lvert Ax+By+Cz+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
4.	Рівняння кола радіуса R з центром в точці $Q(a;b)$ $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$	Рівняння сфери радіуса R з центром в точці $Q(a;b;c)$ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$
5.	Рівняння прямої на площині, що проходить через 2 задані точки $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$ $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$	Рівняння прямої у просторі, що проходить через 2 задані точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$ $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

Продовж. табл. 2.5.

6.	Загальне рівняння прямої на площині, де A, B, C – деякі числа відмінні від нуля. $Ax + By + C = 0$,	Система, що визначає рівняння прямої як лінію перетину двох непаралельних площин $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$
7.	Загальне рівняння прямої, перпендикулярної вектору $\vec{n}(a;b)$ $ax + by + c = 0$	Загальне рівняння площини, перпендикулярної вектору $\vec{n}(a;b;c)$ $ax + by + cz + d = 0$
8.	$A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$ координати вектора: $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$, модуль вектора: $\overrightarrow{\lvert A_1A_2 \rvert} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$ координати вектора: $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, модуль вектора: $\overrightarrow{\lvert A_1A_2 \rvert} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
9.	Додавання векторів $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ $\vec{a}(x_1;y_1), \vec{b}(x_2;y_2)$; $\vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$	Додавання векторів $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ $\vec{a}(x_1;y_1;z_1), \vec{b}(x_2;y_2;z_2)$; $\vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$
10.	Множення вектора $\vec{a}(x_1;y_1)$ на число μ: $\mu\vec{a}(\mu x_1; \mu y_1)$	Множення вектора $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ на число μ: $\mu\vec{a}(\mu x_1; \mu y_1; \mu z_1)$

Відбувається обговорення завдання. До учнів ставляться такі запитання:

- За яким принципом ви виконували узагальнення ?
- Чи вдалося вам зрозуміти принцип аналогії? Та чи завжди він працює?

Виконані вправи дають можливість учням пригадати та систематизувати знання, набуті в процесі вивчення курсу планіметрії. Тепер доцільно буде запропонувати учням аналогічні стереометричні задачі.

Задача 2А. Дано дві точки $M(6;-2;8)$, $N(4;4;-1)$ у просторі. Знайдіть:

а) координати середини відрізка MN;

б) довжину відрізка MN;

в) координати вектора MN.

Задача 2Б. У просторі розміщено трикутник ABC з координатами його вершин: $\mathrm{A}(-1;4;7)$, $\mathrm{B}(0;2;-3)$, $\mathrm{C}(6;-4;7)$. Запишіть рівняння медіани, проведеної до сторони BC.

Вивчення методу координат у просторі дозволяє виробити в учнів чітке уявлення про метод аналогії і про його властивості. Це - раціональність застосування, доступність у розумінні, масовість (широка сфера використання), результативність. В процесі навчання аналогію можна розглядати як спосіб розширення знань учнів [30].

Необхідно виховувати в учнів звичку свідомо залучати аналогію під час пошуку способів розв'язання задач. Що зручніше буде втілювати, якщо подавати задачі групами, тобто класифікуючи їх або подаючи за окремими темами.

Успішне проведення класифікації типів задач взагалі неможливе без використання елементів методу аналогії.

В залежності від мети, задачі можуть поділятися на типи по-різному: залежно від видів фігур, про які в них йдеться, методів розв’язання чи формул, які застосовуються.

Головною ознакою об'єднання задач в один тип є аналогія. Якщо вчитель пропонує розв'язувати завдання, що пов’язані та систематизовані за певними ознаками, то учні досить успішно та швидко зможуть зрозуміти ці методи та прийоми.

2.2.2. Система задач на узагальнення та систематизацію знань учнів з теми «Метод координат» в основній і старшій школі

Метод координат в задачах на доведення

Оволодіння комплексом математичних знань і умінь передбачає оволодіння доведеннями, бо важливе місце в системі математичних знань займають теореми. Формування алгоритмічного, евристичного, абстрактного мислення головним чином відбувається в процесі доведень.

Даний тип задач навчає учнів послідовно та логічно мислити, обґрунтовувати математичні факти, аналізувати умову та складати план доведення задачі.

Задача 20. Довести, що у паралелограмі сума квадратів сторін дорівнює сумі квадратів його діагоналей [10, с. 110].

Доведення

Нам потрібно перевірити чи виконується: $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.

Нехай *ABCD* паралелограм. Введемо систему координат як показано на рис. 2.15.

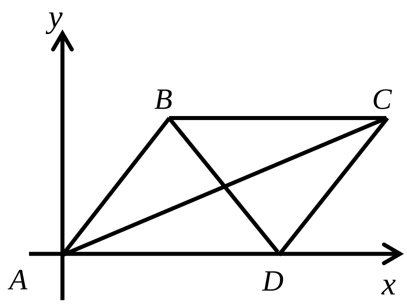


Рис. 2.15.

Тоді точки A, B та C матимуть наступні координати:

$\mathrm{A}(0;0)$; $B(x_1;y_1)$; $C(x_2;y_1)$, тоді $D(x_2-x_1;0)$.

Знайдемо квадрати довжини сторін:

$AB^2=(x_1-0)^2+(y_1-0)^2=x_1{}^2+y_1{}^2$,

$AD^2=(x_2-x_1-0)^2+(0-0)^2=(x_2-x_1)^2$,

$AC^2=(x_2-0)^2+(y_1-0)^2=x_2{}^2+y_1{}^2$,

$\mathrm{BD}^2=(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_1)^2+(0-\mathrm{y}_1)^2=(\mathrm{x}_2-2\mathrm{x}_1)^2+\mathrm{y}_1^2$;

Підставимо отримані значення у рівність $\mathrm{AC}^2+BD^2=2(\mathrm{A}B^2+\mathrm{A}D^2)$:

$x_2{}^2+y_1{}^2+(x_2-2x_1)^2+y_1^2=2(x_1{}^2+y_1{}^2+(x_2-x_1)^2)$,

$x_2{}^2+y_1{}^2+x_2{}^2-4x_1x_2+4x_1{}^2+y_1^2=2x_1{}^2+2y_1{}^2+2x_2{}^2-4x_1x_2+2x_1{}^2$,

$2x_2{}^2+2y_1{}^2-4x_1x_2+4x_1{}^2=2x_2{}^2+2y_1{}^2-4x_1x_2+4x_1{}^2$.

Що і потрібно було довести.

Задача 21. Довести, що чотирикутник *ABCD* є ромбом, якщо $\mathrm{A}(5;6;7), B(7;1;5), C(3;2;1), D(1;7;3)$.

Доведення

Спочатку перевіримо, чи є даний чотирикутник *ABCD* паралелограмом.

Відшукаємо координати середини діагоналей *AC* та *BD*, адже чотирикутник є паралелограмом, якщо його діагоналі в точці перетину діляться навпіл. Нехай точка *M* - це середина *AC*, а точка *L* - середина *BD*.

$$M\colon x=\frac{5+3}{2}=4;\ y=\frac{6+2}{2}=4;\ z=\frac{7+1}{2}=4\ .$$

$$L\colon\ x=\frac{7+1}{2}=4;\ y=\frac{7+1}{2}=4;\ z=\frac{5+3}{2}=4\ .$$

Отже $M=L$, тому можемо стверджувати, що *ABCD* – паралелограм.

Перевіримо чи є рівними дві сусідні сторони:

$AB=\sqrt{(7-5)^2+(1-6)^2+(5-7)^2}=\sqrt{33}$,

$\mathrm{BC} = \sqrt{(3-7)^2 + (2-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{33}$.

$AB = BC$, тому *ABCD* є ромбом, що і потрібно було довести.

Задача 22. Доведіть, що координати точки перетину діагоналей паралелограма дорівнюють середнім арифметичним відповідних координат вершин паралелограма [10, с. 93].

Доведення:

Нехай $ABCD$ – паралелограм з координатами вершин $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$; $C(x_C; y_C)$; $D(x_D; y_D)$. Та нехай точка *O* – середина діагоналей *AC* та *BD* (Рис. 2.16.).

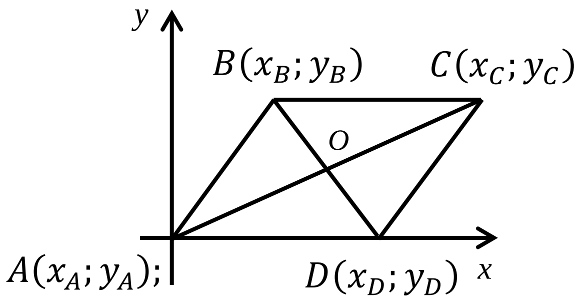


Рис. 2.16.

Знайдемо координати точки $O(x_O; y_O)$ в діагоналі *AC* та *BD*.

AC: $x = \frac{x_A + x_C}{2}$; $y = \frac{y_A + y_C}{2}$,

BD: $x = \frac{x_B + x_D}{2}$; $y = \frac{y_B + y_D}{2}$;

Додамо абсциси та ординати отриманих точок:

$2x = \frac{x_A + x_C}{2} + \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{x_A + x_C + x_B + x_D}{2}$,

тоді $x = \frac{x_A + x_C + x_B + x_D}{4}$;

Аналогічно $2y = \frac{y_A + y_C}{2} + \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{y_A + y_C + y_B + y_D}{2}$,

тоді $y = \frac{y_A + y_C + y_B + y_D}{4}$.

Отримали, що координати перетину діагоналей є середнім арифметичним відповідних координат вершин паралелограма. Що й треба було довести.

Задачі на встановлення залежностей між елементами геометричних фігур

Задача 23. Нехай задано трикутник з координатами своїх вершин $\mathrm{A}_1(x_1; y_1; z_1)$; $A_2(x_2; y_2; z_2)$; $A_3(x_3; y_3; z_3)$, M – точка перетину його медіан. Знайти координати точки *M*.

Розв’язання:

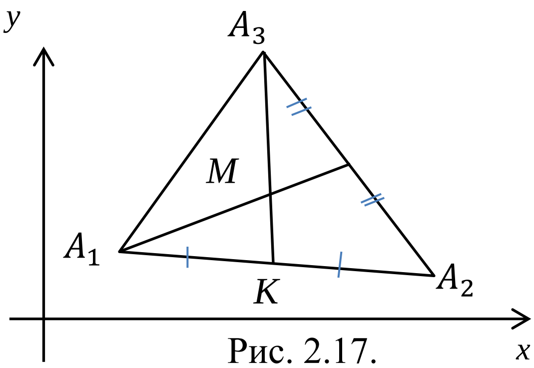


Рис. 2.17.

1) Нехай $K(x_K; y_K; z_K)$ середина A_1A_2 (Рис. 2.17.). Тоді $x_K = \frac{x_1+x_2}{2}$;

$y_K = \frac{y_1 + y_2}{2}$; $z_K = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

2) Оскільки M – точка перетину медіан трикутника $A_1A_2A_3$, то $\frac{A_3M}{MK} = 2$.

Тому $x_M = \frac{x_3+2\cdot\frac{x_1+x_2}{2}}{3} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$.

Аналогічно, $y_M = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, z_M = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}$.

Відповідь: $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$.

Задача 24. Знайдіть всі можливі значення точки $C(a; a)$ рівнобедреного трикутника *ABC*, якщо $A(-7; 3)$, $B(-5; 2)$ та $AB = BC$.

Розв’язання

Знайдемо довжини сторін AB і BC :

$AB^2 = (-5 + 7)^2 + (2 + 3)^2 = 29;$

$BC^2 = (a + 5)^2 + (a - 2)^2$.

Щоб відшукати значення точки *C* прирівняємо ці сторони, адже трикутник має бути рівнобедреним:

$(a + 5)^2 + (a - 2)^2 = 29;$

Знайдемо корені квадратного рівняння

$a^2 + 10a + 25 + a^2 - 4a + 4 - 29 = 0;$

$2a^2 + 6a = 0;$

$2a(a + 3) = 0;$

$a = 0 , a = -3$.

Відповідь: отримали 2 точки що задовольнять умову задачі $C_1(0; 0)$, $C_2(-3; -3)$.

Задача 25. Знайти точку K, що лежить на прямій $y = x + 1$ та рівновіддалена від точок $A(-5; 3)$, $B(2; -2)$.

Розв'язання

Нехай точка K має координати $K(x; y)$, а оскільки вона повинна лежати на прямій $y = x + 1$, то її координати можна записати так: $K(x; x + 1)$.

Знайдемо квадрати відстаней від точок A та B до точки K :

$AK^2 = (x + 5)^2 + \big((x + 1) - 3\big)^2$,

$BK^2 = (x - 2)^2 + \big((x + 1) + 2\big)^2$,

За умовою $AK = BK$, а отже $AK^2 = BK^2$.

$(x + 5)^2 + \big((x + 1) - 3\big)^2 = (x - 2)^2 + \big((x + 1) + 2\big)^2$,

$2x^2 + 6x + 29 = 2x^2 + 2x + 13$,

$4x = -16$,

$x = -4$, $y = -3$.

Відповідь: $K(-4; -3)$.

Задача 26. У площині *yOz* знайти координати точки N, яка є рівновіддаленою від точок $A_1(2; 0; 2)$, $A_2(0; 3; -1)$, $A_3(2; -2; 0)$ (Рис. 2.18.).

Розв'язання

Оскільки точку N ми будемо шукати в площині *yOz*, то її координати можна записати так $N(0; y; z)$.

Розпишемо квадрати відстаней з шуканою точкою:

$A_1N^2 = 4 + y^2 + (z - 2)^2$,

$A_2N^2 = (y - 3)^2 + (z - 1)^2$,

$A_3N^2 = 4 + (y + 2)^2 + z^2$.

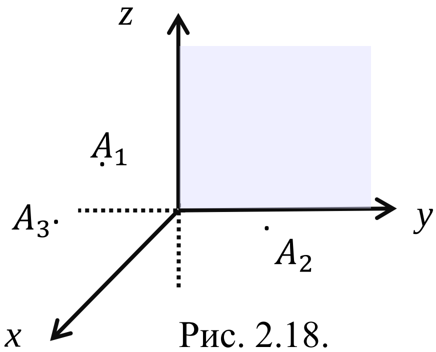


Рис. 2.18.

Прирівняємо $A_2N^2 = A_1N^2$ та $A_3N^2 = A_1N^2$, одержимо систему з двома невідомими:

$$\begin{cases} (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 4 + y^2 + (z - 2)^2, \\ 4 + (y + 2)^2 + z^2 = 4 + y^2 + (z - 2)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 6y + 9 + z^2 + 2z + 1 = 2^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4\,, \\ 4 + y^2 + 4y + 4 + z^2 = 4 + y^2 + z^2 - 4z + 4\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6y + 6z = -2, \\ 4y + 4z = 0; \end{cases}$$

З системи отримаємо $y = \frac{1}{6}$, $z = -\frac{1}{6}$. Отже шукана точка $N(0;\ \frac{1}{6};\ -\frac{1}{6})$.

Відповідь: $N(0;\ \frac{1}{6};\ -\frac{1}{6})$.

Задача 27. Дано прямокутний трикутник *ABC*. Знайти довжини медіан, якщо: *AC*=8, *CB*=10.

Розв’язання

Розташуємо трикутник *ABC* так, щоб вершина прямого кута знаходилася в початку координат, а його катети лежали на координатних осях (Рис. 2.19.).

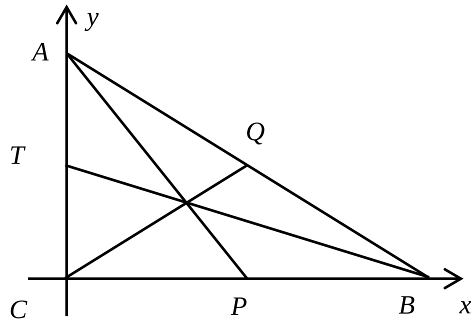


Рис. 2.19.

Тоді координати його вершин будуть такими: $A(0;8),\ B(10;0),\ C(0;0)$.

Нехай медіанами трикутника *ABC* будуть: AP, BT, CQ. Тоді координати середини катетів $P(5;0),\ T(0;4),\ Q(5;4)$, оскільки QT і QP – середні лінії трикутника *ABC*.

Знайдемо довжини медіан:

$AP = \sqrt{(5-0)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{89}$,

$BT = \sqrt{(0-10)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{116}$,

$CQ = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$.

Відповідь: $\sqrt{89}$; $\sqrt{116}$; $\sqrt{41}$.

Задача 28. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b. Знайдіть відстань між центрами вписаного і описаного кіл цього трикутника .

Дано: $\angle C = 90^\circ,\ CB = a,\ AC = b,\ AO = OB,\ I -$ центр.

Знайти: *OI*.

Розв'язання:

Розмістимо початок координат у точці C, а осі координат спрямуємо вздовж катетів трикутника (Рис. 2.20.).

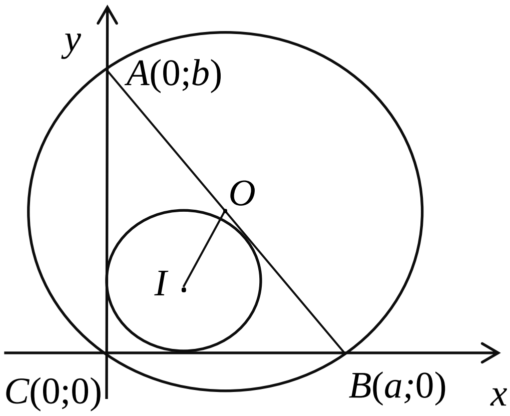


Рис. 2.20.

Тоді $A(0;b),\ B(a;0),\ C(0;0),\ I(r;r)$.

$O(x_0;y_0)$ – середина відрізка AB,

отже $x_0 = \frac{a}{2}$, $y_0 = \frac{b}{2}$.

Враховуючи, що в прямокутному трикутнику $r = \frac{a+b-c}{2}$ і $c = \sqrt{a^2+b^2}$,

знайдемо відстань між точками $I(r;r)$, $O(x_0;y_0)$:

$$OI^2 = (r-x_0)^2 + (r-y_0)^2 = 2r^2 - 2r(x_0+y_0) + x_0^2 + y_0^2 =$$

$$= 2r(r - x_0 - y_0) + x_0^2 + y_0^2 = (a+b-c)\left(-\frac{c}{2}\right) + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} =$$

$$= \frac{c^2}{2} + \frac{1}{4}(a^2+b^2) - \frac{a+b}{2}c = \frac{3}{4}c^2 - \frac{a+b}{2}c.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}\sqrt{3(a^2+b^2)^2 - 2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}$ [1, с.78].

Задача 29. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка E – середина A_1B_1, точка F – середина B_1C_1. Знайти кут між площинами AD_1E і D_1FC.

Розв'язання

1) Уведемо систему координат із початком у точці $A(0;0;0)$ так, щоб грані куба належали координатним площинам (Рис. 2.21.).

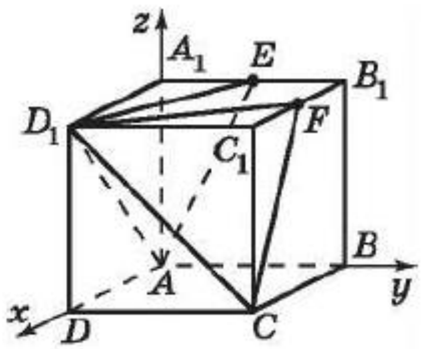


Рис. 2.21.

2) Тоді маємо координати необхідних нам точок:

$A(0;0;0),\ D_1(1;0;1), E(0;0{,}5;1)$,

$F(0{,}5;1;1), C(1;1;0)$.

3) Складаємо рівняння площини $AD_1E : x + 2y - z = 0$.

Складаємо рівняння площини D_1FC: $2x + y - z - 3 = 0$.

4) Позначимо через φ кут між площинами AD_1E і D_1FC.

За формулою кута між площинами маємо:

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 2 + 2\cdot 1 - 1\cdot 1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Отже, $\varphi = 60^\circ$.

Відповідь: $\varphi = 60^\circ$ [8, с. 311].

Задача 30. Площина проходить через точки M, N і K куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причому $M \in AA_1$, $N \in B_1C_1$, $K \in CD$, $AM: MA_1 = 1: 2$, $B_1N: NC_1 = 3: 2$, $CK = KD$. У якому відношенні ця площина ділить ребро AD?

Розв'язання

Розмістимо систему координат відносно даного куба, як показано на рис. 2.22. , і позначимо AB $= 1$. Дані точки мають такі координати:

$$M\left(1; 0; \frac{1}{3}\right), N\left(0; \frac{3}{5}; 1\right), K\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right).$$

Площину, яка проходить через ці точки можна задати рівнянням: $ax + by + cz + d = 0$. Якщо підставимо в це рівняння координати названих точок, дістанемо систему:

$$\begin{cases} a + \frac{1}{3}c + d = 0, \\ \frac{3}{5}b + c + d = 0, \\ \frac{1}{2}a + b + d = 0. \end{cases}$$

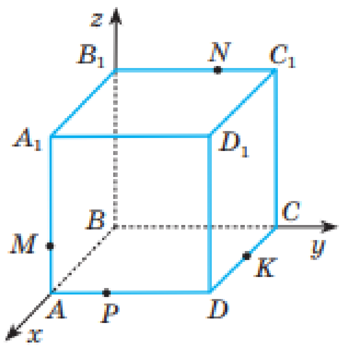


Рис. 2.22.

Звідси $a = 26,\ b = 20,\ c = 21,\ d = -33$. Отже, січній площині відповідає рівняння $26x + 20y + 21z - 33 = 0$.

Точка $P(1; y; 0)$ лежить на січній площині.

Отже, $26x + 20y + 21z - 33 = 0$, звідки $y = \frac{7}{20}$. Якщо $AP = \frac{7}{20}$, то $PD = \frac{13}{20}$.

Отже, $AP: PB = 7: 13$.

Відповідь: $AP: PB = 7: 13$ [8, с.195].

Задача 31. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром 4. Точки T, E – середини ребер B_1C_1 та CD відповідно; точка K – середина грані $A_1B_1C_1D_1$, точка P – середина грані $ABCD$. Знайти кут між прямими TE та KP.

Розв'язання

1) Введемо систему координат так, щоб вершина B лежала в початку координат, а ребра AB, BB_1 та BC лежали на координатних осях (Рис. 2.23.).

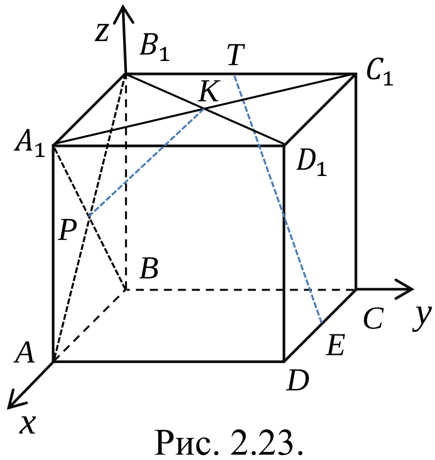


Рис. 2.23.

2) Знайдемо координати необхідних точок:
$P(2;0;2), K(2;2;4), T(0;2;4), E(2;4;0)$.

3) Запишемо координати векторів $\overrightarrow{\mathrm{TE}}$ та $\overrightarrow{\mathrm{KP}}$
$\overrightarrow{\mathrm{TE}}(0-2;2-4;4-0)$, $\overrightarrow{\mathrm{TE}}(-2;-2;4)$;
$\overrightarrow{\mathrm{KP}}(2-2;2-0;4-2)$, $\overrightarrow{\mathrm{KP}}(0;2;2)$.

4) Знайдемо довжини векторів:
$\left|\overrightarrow{\mathrm{TE}}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$,
$\left|\overrightarrow{\mathrm{KP}}\right| = \sqrt{0^2+2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;

5) Нехай кут між прямими дорівнює φ. Підставимо відомі значення в формулу для знаходження кута між прямими :

$$cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1+y_1+z_1} \cdot \sqrt{x_2+y_2+z_2}},$$

$$cos\varphi = \frac{|-2 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 2|}{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{12}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

Отже, $\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Відповідь: 30°.

Задачі на знаходження рівнянь геометричних фігур

Метод координат є особливо ефективним у тих випадках, коли потрібно знайти фігуру, усім точкам якої притаманна задана властивість, тобто знайти ГМТ [38, с.111]. Розглянемо приклади розв'язання такого типу задач методом координат:

Задача 32. Знайдіть рівняння кола, що проходить через точки $A(4;1)$, $B(11;8)$ та дотикається до осі $0x$.

Розв’язання

Очевидно, що шукане коло лежить над віссю $0x$. При цьому воно дотикається до осі $0x$. Тоді ордината центра кола дорівнює його радіусу: $b = r$. Тому рівняння шуканого кола має вигляд:

$(x-a)^2 + (y-r)^2 = r^2,$ або $(x-a)^2 + y^2 - 2ry = 0.$

Підставляючи в це рівняння послідовно координати точок A і B, дістанемо рівності:

$(4-a)^2 + 1 - 2r = 0$, $(11-a)^2 + 64 - 16r = 0.$

Звідси, $a_1 = 7, a_2 = -1,\ b_1 = r_1 = 5,\ b_2 = r_2 = 13.$

Отже існують два кола, що задовольняють умову задачі:

$(x-7)^2 + (y-5)^2 = 25$ і $(x+1)^2 + (y-13)^2 = 169.$

Відповідь: $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 25$ і $(x+1)^2 + (y-13)^2 = 169.$

Задача 33. Задано пряму MK та координати кінців відрізка $M(-4;-5)$, $K(6;5)$. Знайти рівняння прямої, що перпендикулярна до MK та перетинає її у точці N такій, що $\frac{MN}{NK} = \frac{3}{2}$.

Розв’язання

1) За допомогою формул для поділу відрізка в заданому відношенні знайдемо координати точки N, якщо $\lambda = \frac{3}{2}$.

$$x_N = \frac{x_M + \lambda x_K}{1+\lambda},\ y_N = \frac{y_M + \lambda y_K}{1+\lambda},$$

$$x_N = \frac{-4 + \frac{3}{2}\cdot 6}{1+\frac{3}{2}} = 2,\ y_N = \frac{-5 + \frac{3}{2}\cdot 1}{1+\frac{3}{2}} = 1,$$

Отже координати точки $N(2;1)$.

2) За допомогою формули рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, знайдемо рівняння прямої MK:

$$\frac{x-2}{6-2} = \frac{y+5}{1+5}\,, \qquad \frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{6}\,,$$

$$y = \frac{3}{2}x - 8\,.$$

Оскільки шукана пряма повинна бути перпендикулярною до MK, то її кутовий коефіцієнт дорівнює $-\frac{2}{3}$.

3) Підставивши в рівняння прямої із заданим кутовим коефіцієнтом точку N, отримаємо:

$$y = -\frac{2}{3}\cdot(x-2) + 1 = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}\,.$$

Відповідь: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

Задача 34. Скласти рівняння сфери з діаметром AB, якщо $A(-2;3;-4)$, $B(-8;7;8)$.

Розв’язання

1) Нехай точка Q – центр сфери та середина AB. Тоді

$$x_Q = \frac{-2-8}{2} = -5\,; \;\; y_Q = \frac{3+7}{2} = 5\,; \;\; z_Q = \frac{-4+8}{2} = 2.$$

Отже, $Q(-5;5;2)$.

2) $r = AQ = \sqrt{(-5+2)^2 + (5-3)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7.$

3) Маємо рівняння сфери: $(x+5)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 7^2$.

Відповідь: $(x+5)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 7^2$ [28, с. 299].

Задача 35. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $K(1;2;-1)$, $L(0;1;-4), M(4;0;-2)$.

Розв’язання

1) Запишемо загальне рівняння площини: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Оскільки точки K, M, L задовольняють це рівняння, матимемо систему

$$\begin{cases} A + 2B - C + D = 0, & (1) \\ 0\cdot A + B - 4C + D = 0, & (2) \\ 4A + 0\cdot B - 2C + D = 0. & (3) \end{cases}$$

2) Маємо систему з трьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими. Розв'язуючи подібні задачі на знаходження рівняння площини, поставимо собі за мету виразити деякі три невідомі, наприклад A, B і C, через четверту (в даному випадку D) так, як під час розв'язування систем рівнянь в курсі алгебри.

3) Із рівнянь (2) і (3) відповідно маємо: $B = 4C - D$ і $A = \frac{1}{2}C - \frac{1}{4}D$.

Підставимо отримані вирази в рівняння (1) замість A і B:

$$\begin{cases} B = 4C - D, \\ A = \dfrac{1}{2}C - \dfrac{1}{4}D, \\ \dfrac{1}{2}C - \dfrac{1}{4}D + 2(4C - D) - C + D = 0. \end{cases}$$

З останнього рівняння системи отримаємо, що $C = \frac{1}{6}D$, тоді

$$B = 4 \cdot \frac{1}{6}D - D, B = -\frac{1}{3}D, A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}D - \frac{1}{4}D, A = -\frac{1}{6}D.$$

4) Маємо $-\frac{1}{6}Dx - \frac{1}{3}Dy + \frac{1}{6}Dz + D = 0$.

Помножимо обидві частини цього рівняння на $-\frac{D}{6}$ і отримаємо:

$x + 2y - z - 6 = 0$.

Відповідь: $x + 2y - z - 6 = 0$ [28, с. 310].

Задача 36. Дано паралелограм $ABCD$. Дві суміжні сторони паралелограма знаходяться в точках $B(-2; 5), C(6; -1)$ та відомо, що $L(2; 0)$ – точка перетину діагоналі AC та BD. Скласти рівняння прямої, що проходять по стороні AD паралелограма $ABCD$.

Розв'язання

Нехай шукані точки мають координати $A(x_A; y_A)$, $D(x_D; y_D)$. Застосуємо формулу знаходження координат середини відрізка AC та підставимо значення L та C, щоб отримати точку A.

$\frac{x_A + x_C}{2} = x_L$, $\frac{y_A + y_C}{2} = y_L$ $\frac{x_A + 6}{2} = 2$, $\frac{y_A - 1}{2} = 0$,

$x_A = -2$, $y_A = 1$.

За аналогією обчислюємо значення точки D:

$\frac{x_D-2}{2}=2$, $\frac{y_D+5}{2}=0$, $x_D=6$, $y_D=-5$.

Отже, $A(-2;1)$, $D(6;-5)$.

Рівняння прямої, що проходить по стороні *AD* матиме вигляд:

$$\frac{x+2}{6+2}=\frac{y-1}{-5-1}, \quad \frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{-6},$$

$$y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$.

Задача 37. Дано точки *A* і *B*. Знайти геометричне місце точок простору *M*, для яких $AM:BM=\sqrt{2}$.

Розв’язання

1) Уведемо просторову систему координат так, що $A(-a;0;0), B(a;0;0)$ (Рис. 2.24.).

2) Нехай $M(x;y;z)$ – точка шуканого ГМТ.

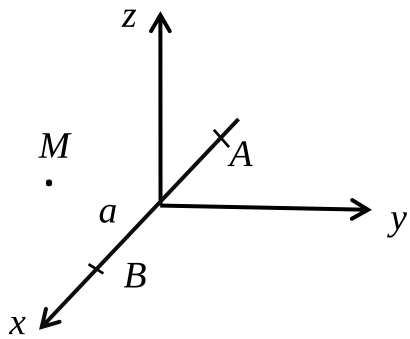


Рис. 2.24.

Маємо:

$AM=\sqrt{(x+b)^2+y^2+z^2}$,

$BM=\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}$.

3) Оскільки $\frac{AM}{BM}=\sqrt{2}$ маємо рівняння:

$$\frac{(x+a)^2+y^2+z^2}{(x-a)^2+y^2+z^2}=2.$$

Після спрощення отримаємо:

$x^2-6xy+a^2+y^2+z^2=0, (x-3a)^2+y^2+z^2=8a^2$,

$(x-3a)^2+y^2+z^2=(2\sqrt{2}a)^2$.

Це рівняння сфери із центром у точці $Q(3a;0;0)$ радіуса $2\sqrt{2}a$.

4) Тепер подамо отриманий результат, не використовуючи координат. Нехай $AB=2a$. Тоді шукане ГМТ– сфера із центром Q , що належить прямій AB, причому B – середина відрізка AQ, і радіусом $R=2\sqrt{2}a$.

Відповідь: $(x-3a)^2+y^2+z^2=(2\sqrt{2}a)^2$ [28, с.314].

Задачі на застосування методу координат в завданнях зовнішнього незалежного оцінювання

Метод координат завжди традиційно представлений в завданнях зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО). Завдання з даної теми стосуються методу координат в планіметрії та стереометрії. Серед таких задач є стандартні та нестандартні задачі: на використання формули, на розпізнавання фігури за її рівнянням, на знаходження координат точок. І тому ознайомлення старшокласників із завданнями цієї теми має особливу роль, задля якісної підготовки до проходження ЗНО. Завдання з використанням методу координат дозволяють оцінити знання та вміння учнів, степінь засвоєності навчального матеріалу. В додатку Б представлені тексти задач з відповідями зовнішнього незалежного оцінювання з теми «Метод координат» за попередні роки.

2.2.3. Використання засобів ІКТ на уроках узагальнення та систематизації

Зацікавити учнів своїм предметом сьогодні вже неможливо без використання інтерактивних методів навчання. Використання інтерактивних методів навчання в навчально-виховному процесі дозволяє вчителям здійснити свої ідеї, змотивувати учнів, залучити їх до самостійності здобування знань.

Інтерактивність - означає взаємодіяти, знаходитись в режимі бесіди або діалогу. Тобто на відміну від активних методів, інтерактивні націлені на широку взаємодію не тільки між вчителем і учнем, а насамперед між колективом класу, а також на підвищення активності учнів під час уроку.

Комп'ютерні технології навчання гарантують краще запам'ятовування матеріалу, завдяки наочності подання, швидкий темп сприймання, можливість цікавого та результативного узагальнення раніше вивченого матеріалу.

Якщо вчитель проводить такий «сучасний» урок, то він втілює особистісно-зорієнтований підхід до навчання; формує в учнів вміння та бажання самостійно навчатися, аналізувати, порівнювати, удосконалюється комп'ютерна грамотність.

LearningApps – це онлайн-сервіс для підтримки процесів навчання та викладання за допомогою невеликих інтерактивних модулів. Ці модулі можуть використовуватись безпосередньо як навчальні ресурси або для самостійної роботи. Метою роботи є створення загальнодоступної бібліотеки незалежних блоків, придатних для повторного використання та змін. Блоки (вони називаються Вправами) не включені в жодні конкретні сценарії чи програми, тому вони не розглядаються як цілісні уроки чи завдання, натомість їх можна використати у будь-якому доречному методичному сценарії. Це конструктор для розробки інтерактивних завдань за різними предметними дисциплінами для застосування на уроках і в позакласній роботі [24, 45].

Вправи розташовані у вигляді плиток із зображеннями, які надають коротку інформацію про тип вправи та її назву при наведенні миші. За видом всі завдання розбиваються на категорії: створи пару, розподіл, послідовність, заповнення, просте упорядкування, вікторина, пазл та інші. Користувач або вчитель має змогу переглянути шаблон з будь-якої групи завдань, перш ніж створити свою навчальну розробку.

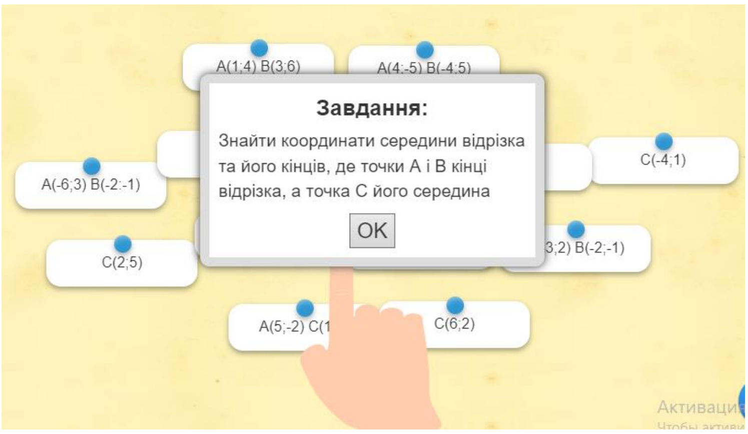


Рис. 2.25. Приклад завдання на знаходження відповідності

Переваги використання сервісу полягають у тому, що вчитель може активно та доступно працювати із класом, для виконання вправ, відправлення домашніх завдань. Коли учні надсилають гіперпосилання, вчитель отримує змогу перевіряти виконання завдань. Створити вправу у середовищі LearningApps легко та захоплююче, адже це робиться на основі існуючих шаблонів.

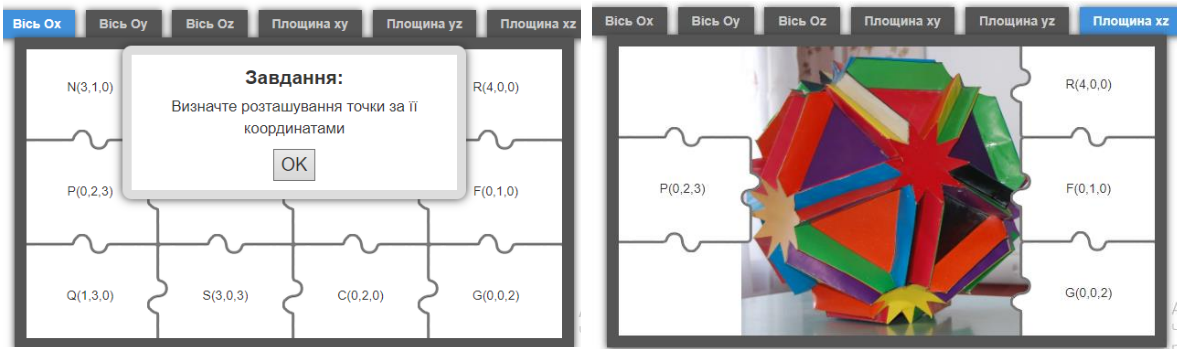


Рис. 2.26. Приклад завдання у вигляді пазлу

Сервіс надає широкі можливості для впровадження інтерактивних технологій на уроках математики. Розробки користувачів знаходяться у вільному доступу для всіх бажаючих. Сервіс також має функції додавання ілюстративних відео- та аудіо-матеріалів. Використання даного сервісу дозволяє полегшити та урізноманітнити навчальний процес, зробити запам’ятовування і повторення у вигляді захопливої гри. При такому виді навчання здійснюється принцип наочності, адже завдання образні, яскраві та цікаві для учнів.

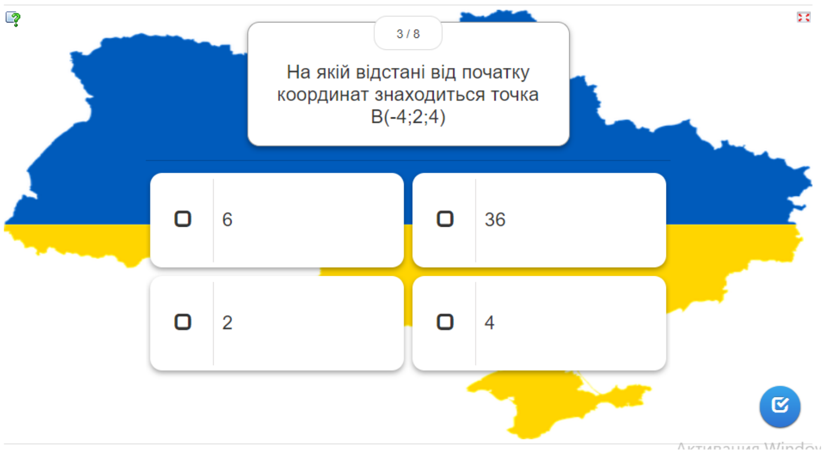


Рис. 2.27. Приклад завдання - вікторини у середовищі LearningApps

Таким чином, використання можливостей сервісу LearningApps.org дозволяє різнобічно й цілеспрямовано формувати в учнів освітні компетентності та більш ефективно досягати запланованих результатів завдяки включенню кожного учня в пізнавальну, творчу навчальну діяльність [17].

Наведемо таблицю з вправами, що допоможуть при узагальненні та систематизації знань учнів при вивченні методу координат:

Таблиця 2.6.

Рекомендаційні вправи з теми «Метод координат»

№	Тема	Посилання
1.	Відстань між точками простору	https://learningapps.org/9794108
2.	Прямокутні координати в просторі	https://learningapps.org/6698253
3.	Координати середини відрізка	https://learningapps.org/4041947
4.	Координати та вектори у просторі	https://learningapps.org/13681875
5.	Декартові координати на площині	https://learningapps.org/3849894
6.	Система координат на площині	https://learningapps.org/3851406
7.	Положення точки у просторі	https://learningapps.org/3851906

В наш час відбувається активне застосування інформаційно-комунікаційних технологій в школі. Одним із засобів надання рівного доступу до якісної освіти є мережні технології, які стали важливою складовою процесу навчання. Вчителі та учні не тільки використовують інформацію з Інтернету, а й безперервно збагачують глобальну мережу різноманітними інформаційними ресурсами.

Використання онлайн сервісів, хмарних технологій, дистанційних платформ для навчання дозволяють зробити процес навчання ефективним, цікавим, динамічним. Технології в сфері освіти в наш час невпинно розвиваються, тому здобувачі освіти мають постійно адаптуватися до нових вимог, зміни форм та методик контролю та оцінювання якості знань.

Висновки до 2 розділу

На основі аналізу навчально-методичної літератури та власного досвіду ми розробили пропедевтичний курс вивчення методу координат. Початкові відомості про метод учні отримують у 5-6 класах: зображення чисел на координатній прямій, прямокутна система координат на площині, виконання відповідних побудов. Тобто на першому етапі відбувається засвоєння понятійного апарату. Далі він застосовується для введення понять ліній, їх рівнянь та графіків функцій, як в курсі алгебри, так і в геометрії. Оскільки змістовна ціль даних предметів різна і розмежована часом, то учні не бачать зв'язку між ними і не можуть повноцінно засвоїти головну суть методу. Останнім кроком є розкриття основних етапів координатного методу та безпосереднє використання при розв'язуванні задач чи доведенні теорем.

З'ясовано, що в процесі навчання координатного методу вчитель має закріплювати понятійний апарат, основні вміння та навички; демонструвати внутрішньо предметні та міжпредметні зв'язки; використовувати схеми, таблиці, рисунки; приділити особливу увагу системі вправ на засвоєння окремих етапів математичного моделювання. Для кожного етапу нами була створена система вправ, що допомагає закріпити отримані знання та вміння. Ми з'ясували, що використання методу буде більш ефективним, якщо узагальнювати та систематизувати знання учнів системами вправ на закріплення набутих знань та вмінь після кожного пройденого етапу навчання.

Розглядаючи можливості прийому аналогії, ми переконались в доцільності його застосування при вивчені методу координат в 10-11 класі. На прикладі розробленого конспекту-уроку показали дієвість даного прийому на уроках узагальнення та систематизації. Ми виявили, що доцільно аналогічні задачі планіметрії і стереометрії пропонувати учням розглядати у порівнянні. Учні при цьому не тільки повторюють, раніше вивчений матеріал, а й використовують його як базу для розвитку нових умінь та навичок. Вони навчаються бачити глибокі зв'язки між різними розділами геометрії, переносити раніше сформовані знання, уміння та навички у нові умови.

ВИСНОВКИ

Узагальнення та систематизація знань учнів є однією з головних умов підвищення якості навчання. Вчитель математики при роботі з учнями має зосереджувати увагу не тільки на використанні відомих прийомів, а і створювати власні методи та способи узагальнення знань.

Професійне володіння вчителем різноманітними методами, засобами узагальнення та систематизації знань учнів сприяє підвищенню зацікавленості до предмету, попереджує прогалини в знаннях, підвищує рівень підготовки до уроку.

Під час написання роботи був проведений аналіз психолого-педагогічної та навчально-методичної літератури з питання проведення узагальнення та систематизації знань учнів на уроках. Були визначені різні тлумачення даних понять, виявлена їх роль та функції у навчанні. Виявлені результати говорять про те, що проблема є досить актуальною, адже велика кількість формул, законів, фактів, тверджень та правил, що вивчаються в школі досить важко засвоюються учнями. Проведення узагальнення та систематизації знань позбавляє учнів від необхідності запам’ятовувати увесь матеріал як набір фактів.

В процесі дослідження історичного розвитку методу координат ми з’ясували доцільність історичних екскурсів на уроках математики. Втілення принципу історизму дозволяє учням розвивати свій науковий світогляд, пізнавати фундамент сучасної науки.

Розробляючи педагогічні засади систематизації та узагальнення в процесі навчання, ми виділили та описали цілі, функції, види та принципи узагальнення та систематизації. В результаті дослідження з’ясовано, що удосконалити традиційну методику навчання теми «Метод координат» можна за допомогою використання прийому аналогії, комп’ютерних засобів, схем, таблиць.

Під час дослідження були проаналізовані шкільні підручники з геометрії, що допомогло виявити головні етапи засвоєння методу координат. Для кожного етапу були розроблені системи задач, які можна використовувати на уроках узагальнення та систематизації з теми «Метод координат». Вони допомагають засвоїти основні поняття теми, вчать коректному використанню математичних формул, сприяють розвитку алгоритмічного мислення та просторової уяви, навчають використанню аналогій в процесі міркувань.

В роботі наведено приклад використання прийому аналогії при вивченні координатного методу у 10-11 класах. Також показані можливості використання сервісу LearningApps для різнобічного формування в учнів освітніх компетентностей, включення кожного учня в пізнавальну, творчу навчальну діяльність.

Враховуючи вище сказане, маємо зазначити, що узагальнення знань учнями є невід'ємним етапом процесу навчання, важливим компонентом засвоєння та закріплення знань. Виявлено, що узагальнення знань мають базуватися на принципах діяльнісного підходу, розвивального навчання, тоді згрупований матеріал легше та надійніше запам'ятовується.

Зважаючи на отримані результати, можна зробити висновок, що в процесі дослідження були вирішені всі поставлені завдання і мета даної роботи досягнута.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Апостолова Г. В. Геометрія: дворівневий підручник для 9 кл. загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Генеза, 2009. 304 с.
2. Атанасян Л. С. Метод координат на плоскости. Уравнение множества точек. Сборник задач по геометрии : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. Москва: Просвещение, 1973. С. 25–50.
3. Бевз В. Г. Практикум з методики навчання математики. Основна школа. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. 267 с.
4. Бевз В. Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: Монографія. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2005. 360 с.
5. Бевз В. Г. Метод координат і його вивчення в школі. Didactics of mathematics: Problems and Investigations. 2010. № 34. С. 82-86.
6. Бевз Г. П. Методи навчання математики. Харків: Видавнича група «Основа», 2003. 96 с.
7. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посібник. 3-тє вид., перероб. і доп. Київ: Вища школа, 1989. 367 с.
8. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владіміров В. М., Владімірова Н. Г. Геометрія. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої школи. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 272 с.
9. Біляніна О. Я., Білянін Г. І., Швець В. О. Геометрія. Академічний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої школи. Київ: Генеза, 2010. 256 с.
10. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Зодіак-ЕКО, 2009. 240 с.
11. Возняк О. Г. Метод координат у геометричних задачах. Навч. посібник. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2013. 64 с.
12. Выготский Л. С. Избранные психологические исследования. Москва: Изд-во АПН РСФСР, 1956. 520 с.

13. Габович И., Горнштейн П. Вооружившись методом координат. Квант. 1978. № 11. С. 42–47.
14. Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г, Кириллов А. А. Метод координат. Москва: Наука, 1966. 80 с.
15. Гордієнко І. В. Метод аналогії у вивченні шкільного курсу стереометрії : автореф. дис. канд. пед. наук :13.00.02. Київ, 2003. 20 с.
16. Горский Д. П. Обобщение и познание. Москва: Мысль, 1985. 208 с.
17. Грідіна О. О. Використання онлайнового сервісу Learningapps.org для узагальнюючого повторення теми «Рівняння». Тези доповідей IX міжнародноїнауково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2021). Черкаси: вид. від ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2021. С. 136-137.
18. Грохольська А. Декартові координати на площині та в просторі на кодопозитивах. Математика в школі. 2006. №2. С. 17-23.
19. Давыдов В. В. Виды обобщения в обучении (логико-психологические проблемы построения учебных предметов). Москва: Педагогика, 1972. 424 с.
20. Далингер В. А. Деятельностный подход к обучению математике в школе – требование новых образовательных стандартов. Международный журнал экспериментального образования. 2014. № 11-2. С. 55-56.
21. Далингер В. А. Методика обобщающих повторений при обучении математике: пособие для учителей и студентов. Омск: ОГПИ, 1992. 88 с.
22. Далингер В. А., Кабирова Ж. М. Деятельностный метод как средство достижения новых результатов школьного образования. Современные наукоемкие технологии. 2014. № 4. С. 150-153.
23. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Єршов С. В. Геометрія: підруч. для 9 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2017. 256 с.

24. Занкович Н. М. Використання сервісу LearningApps при вивченні математики. URL: https://naurok.com.ua/metodichniy-posibnik-vikoristannya-servisu-learningapps-pri-vivchenni-matematiki-19885.html
25. Иржавцева В. П., Федченко Л. Я. Систематизация и обобщение знаний учащихся в процессе изучения математики: пособие для учителя / Под ред. Н. Л. Коломинского. Киев: Радянська школа, 1988. 205 с.
26. Иржавцева В. П., Федченко Л. Я. Систематизация и обобщение знаний учащихся в процессе обучения математике. Киев: Радянська школа, 1989. 192 с.
27. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. Москва: Наука, 1981. 232 с.
28. Істер О. С. Геометрія: підручн. для 10 кл. Профільний рівень. Київ: Генеза, 2018. 240 с.
29. Коменский Я. А. Избранные педагогические сочинения: в двух томах / Под ред. А. И. Пискунова и др. Москва: Педагогика, 1982. Т.1. 656 с.
30. Корнейчук І. В. Аналогія у розв'язуванні стереометричних задач. Didactics of mathematics: Problems and Investigations. 2006. №25. С. 238-243.
31. Крайзман М. Л. Розв'язування геометричних задач методом координат: посібник для самоосвіти вчителів. Київ: Радяньска. школа, 1983. 127с.
32. Крамор В. С. О совершенствовании методов обучения математики: сборник статей /Сост. В. С. Крамор Москва: Просвещение, 1978. 160 с.
33. Кушнір В. А., Ріжняк Р. Я. Практикум з методики навчання математики: навчальний посібник. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2013. 224 с.
34. Магомедбеков П. К. Очерки преподавания геометрии в школе. Махачкала: Дагучпедгиз, 1970. 194с.
35. Математика. Навчальна програма для учнів 5 — 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. URL: https://docs.google.com/document/preview?hgd=1&id=1iM_xCzAP_Pq-Td3xSZAcqQvP5oi9bj3TsPjIz9OXe1U

36. Матяш О. І., Савченко М. В. Використання прийому аналогій у навчанні стереометрії у старшій школі. Вінниця: Вінницький державний педагогічний університет, 2013. 41 с.
37. Медяник А. Г. Учителеві про шкільний курс геометрії: кн. для вчителя. Київ: Радянська школа, 1988. 156с.
38. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої школи. Харків : Гімназія, 2018. 240 с.
39. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: підручн. для 9 кл. з поглибленим вивченням. Харків: Гімназія, 2017. 240 с.
40. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 240 с.
41. Неліна О.Є. Систематизація та узагальнення знань і вмінь учнів з алгебри як засіб активізації їх пізнавальної діяльності: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. Київ, 2003. 241 с.
42. Пойа Д. Математическое открытие. Москва: Наука, 1970. 452 с.
43. Понтрягін Л. С. Метод координат. Москва: Наука, 1978. 128 с.
44. Практикум з методики навчання математики. Основна школа: навчальний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / За ред. В. О. Швеця. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. 267 с.
45. Середовище LearningApps. URL: https://learningapps.org
46. Сидорякина В. В., Аксайская Л. Н., Кумакова Е. А. Специфика использования метода координат при решении стереометрических задач в средней школе. Вестник Таганрогского государственного педагогического института. 2017. №2. С. 241-245.
47. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. 240 с.

48. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підручник для студентів математичних спеціальностей пед. навчальних закладів. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.
49. Смогоржевський О. С. Метод координат. Київ: Радянська школа, 1959. 40 с.
50. Стеценко П. Є. Курс вищої математики для технікумів, інститутів: навч.-метод. посіб. Київ: Генеза, 2002. 312 с.
51. Українська радянська енциклопедія. Том 1/Ред. М. Бажан, 2-е видання. Київ: Голов. ред. УРЕ, 1977. 542 с.
52. Уроки узагальнення та систематизації знань. Реферат. URL:.https://ru.osvita.ua/vnz/reports/pedagog/14807/
53. Федченко Л. Я. Методика організації узагальнення і систематизації знань і вмінь учнів при навчанні математики: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. Київ, 1998. 179 с.
54. Ядренко М. Й., Дороговцев А. Я. Метод координат. Київ: Вища школа, 1972. 96 с.
55. Яковець В. П., Боровик В. Н., Ваврикович Л. В. Аналітична геометрія: навчальний посібник. Київ: Вища школа, 2003. 463 с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Конспект уроку з геометрії на тему «Метод координат у просторі»
11 клас (рівень стандарту)

Мета уроку:

- навчальна: узагальнити й систематизувати знання учнів з теми «Метод координат»; удосконалити вміння використовувати формули даної теми;
- розвивальна: розвивати просторову уяву, увагу, логічне мислення, пам'ять учнів, формувати вміння робити висновки по аналогії;
- виховна: формувати науковий світогляд учнів, сприяти усвідомленню важливості математики як універсальної мови науки.

Тип уроку: узагальнення й систематизація знань, вмінь, навичок.

Методи навчання: пояснювально-ілюстративний метод.

Форми навчання: фронтальна, індивідуальна.

Наочність та обладнання: комп'ютер, проектор, презентація, дошка, крейда.

ХІД УРОКУ

I. Організаційний етап.

Вчитель перевіряє присутніх, налаштовує робочу атмосферу у класі.

II. Перевірка виконання домашнього завдання.

Аналогічне завдання домашньої роботи було розв'язане на попередньому уроці, тому вчитель пропонує учням влаштувати взаємоперевірку з сусідом по парті, називаючи правильні відповіді.

III. Мотивація навчальної діяльності учнів. Повідомлення теми уроку.

Вступне слово вчителя. Кажуть, що математика – то прообраз краси світу. А єдина можливість побачити та усвідомити цю красу – розвивати свої знання та вміння, багато та наполегливо працювати.

На мою думку, однією з таких тем, де можна побачити усю виразність, красу і досконалість геометрії є тема «Метод координат в просторі», над якою ми з вами зараз попрацюємо. Сфера використання даного методу вражає: алгебра, фізика, астрономія, техніка, і т.д.

Також немало важливим є і той факт, що завдання на координати й вектори присутні на ЗНО. Тому для вас є вагома причина наполегливо працювати при вивчені даної теми.

IV. Актуалізація опорних знань.

1. Фронтальна робота з учнями.

Для актуалізації знань вчитель задає наступні питання та формує такі завдання:

1. Як задати систему координат на площині?
2. Як називаються числа, за допомогою яких визначають положення точки на площині ?
3. Скільки координат задають положення точки на площині? А у просторі?
4. Чи прослідковуються між поняттями площини та простру певна схожість?

2. Невеличка розповідь учителя:

При вивчені методу координат у просторі будемо використовувати наші знання з планіметрії і робити висновки за допомогою аналогії. Аналогією називається умовивід, в якому на основі схожості предметів за одними ознаками робиться висновок про схожість цих предметів за іншими ознаками. Використання прийому аналогії у навчальному процесі дозволяє: узагальнити, систематизувати та повторити знання; розвити здібності пошуку подібностей у деяких властивостях чи відношеннях; висувати здогадки та гіпотези, перевіряти істинності отриманих висновків.

V. Узагальнення, систематизація й застосування набутих знань, вмінь і навичок.

1. Створення схеми-алгоритму

Вчитель формує завдання: Скласти схему-алгоритм щодо послідовності виконання кроків при розв’язанні задач методом координат.

Вчитель попередньо вже приготував шаблон даної схеми за дошкою. Після того, як учні виконали завдання, вчитель показує можливий варіант схеми.

1. Відокремити умови і вимоги задачі (теореми). Обрати систему координат, відносно якої перевести вимоги на мову координат і скласти рівності зі змінними.

2. Використовуючи умови задачі, перетворити рівності зі змінними і прийти до результату мовою координат.

3. Здобутий результат перевести на мову геометрії.

Рисунок А.1.

- Чи схожі ваші схеми на ту, що зображена на дошці? Якщо ні, то чи відповідають ваші схеми тій логіці, яка наведена у схемі вчителя?
- Чим ви послуговувалися, коли складали схему-алгоритм ?

Важливо підкреслити, що в учнів кількість кроків може бути більшою, але головне зрозуміти послідовність дій алгоритму.

2. Заповнення таблиці з використанням прийому аналогії

Далі вчитель формулює завдання: на слайді представлена частина таблиці на знання формул методу координат на площині та у просторі; спробуйте заповнити таблицю самостійно. Вчитель контролює процес виконання завдання і відповідає на можливі питання.

Таблиця А.1.

Співвідношення формул планіметрії та стереометрії

№	Формули планіметрії	Формули стереометрії
1.	Відстань між точками $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	Відстань між точками $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
2.	Координати $(x; y)$ середини відрізка з кінцями $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ $x = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y = \frac{y_1+y_2}{2}$;	Координати $(x; y; z)$ середини відрізка з кінцями $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ **(Місце для формули)**
3.	Відстань від точки $B(x; y)$ до прямої A_1A_2: $Ax + By + C = 0$; $d = \frac{\lvert Ax + By + C\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$	Відстань від точки $B(x; y; z)$ до площини **α :** $Ax + By + Cz + D = 0$; **(Місце для формули)**
4.	Рівняння кола радіуса R з центром в точці $Q(a; b)$ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$	Рівняння сфери радіуса R з центром в точці $Q(a; b; c)$ **(Місце для формули)**
5.	Рівняння прямої на площині, що проходить через 2 задані точки $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	Рівняння прямої у просторі, що проходить через 2 задані точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ **(Місце для формули)**
6.	Загальне рівняння прямої на площині, де A, B, C – деякі числа відмінні від нуля. $Ax + By + C = 0$	Система, що визначає рівняння прямої як лінію перетину двох непаралельних площин. **(Місце для формули)**
7.	Загальне рівняння прямої, перпендикулярної вектору $\vec{n}(a; b)$ $ax + by + c = 0$	Загальне рівняння площини, перпендикулярної вектору $\vec{n}(a; b; c)$ **(Місце для формули)**
8.	$A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ координати вектора: $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$, модуль вектора: $\overline{\lvert A_1A_2\rvert} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ координати вектора: **(Місце для формули)** модуль вектора: **(Місце для формули)**
9.	Додавання векторів $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ $\vec{a}(x_1; y_1), \vec{b}(x_2; y_2)$ **;** $\vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$	Додавання векторів $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ $\vec{a}(x_1; y_1; z_1), \vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ **;** **(Місце для формули)**
10.	Множення вектора $\vec{a}(x_1; y_1)$ на число μ: $\mu\vec{a} = (\mu x_1; \mu y_1)$	Множення вектора $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ на число μ: **(Місце для формули)**

Після заповнення таблиці, представленої на попередньому слайді, буде показано правильний варіант її заповнення.

Таблиця А.2.

Співвідношення формул планіметрії та стереометрії

№	Формули планіметрії	Формули стереометрії
1.	Відстань між точками $A_1(x_1;y_1),\ A_2(x_2;y_2)$ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	Відстань між точками $A_1(x_1;y_1;z_1), A_2(x_2;y_2;z_2)$ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$
2.	Координати $(x;y)$ середини відрізка з кінцями $A_1(x_1;y_1),\ A_2(x_2;y_2)$ $x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2};$	Координати $(x;y;z)$ середини відрізка з кінцями $A_1(x_1;y_1;z_1),\ A_2(x_2;y_2;z_2)$ $x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2};\ z=\frac{z_1+z_2}{2}$
3.	Відстань від точки $B(x;y)$ до прямої A_1A_2: $Ax+By+C=0$; $d=\frac{\lvert Ax+By+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$	Відстань від точки $B(x;y;z)$ до площини α : $Ax+By+Cz+D=0$; $d=\frac{\lvert Ax+By+Cz+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
4.	Рівняння кола радіуса R з центром в точці $Q(a;b)$ $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$	Рівняння сфери радіуса R з центром в точці $Q(a;b;c)$ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$
5.	Рівняння прямої на площині, що проходить через 2 задані точки $A_1(x_1;y_1),\ A_2(x_2;y_2)$ $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$	Рівняння прямої у просторі, що проходить через 2 задані точки $A_1(x_1;y_1;z_1),\ A_2(x_2;y_2;z_2)$ $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$
6.	Загальне рівняння прямої на площині, де *A*, *B*, *C* – деякі числа відмінні від нуля. $Ax+By+C=0$	Система, що визначає рівняння прямої як лінію перетину двох непаралельних площин. $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$
7.	Загальне рівняння прямої, перпендикулярної вектору $\vec{n}(a;b)$ $ax+by+c=0$	Загальне рівняння площини, перпендикулярної вектору $\vec{n}(a;b;c)$ $ax+by+cz+d=0$
8.	$A_1(x_1;y_1),\ A_2(x_2;y_2)$ координати вектора: $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$, модуль вектора: $\lvert\overrightarrow{A_1A_2}\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	$A_1(x_1;y_1;z_1),\ A_2(x_2;y_2;z_2)$ координати вектора: $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2-x_1;\ y_2-y_1;z_2-z_1)$, модуль вектора: $\lvert\overrightarrow{A_1A_2}\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$
9.	Додавання векторів $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ $\vec{a}(x_1;y_1),\vec{b}(x_2;y_2)$; $\vec{c}(x_1+x_2;y_1+y_2)$	Додавання векторів $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ $\vec{a}(x_1;y_1;z_1),\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$; $\vec{c}(x_1+x_2;y_1+y_2;\ z_1+z_2)$
10.	Множення вектора $\vec{a}(x_1;y_1)$ на число μ: $\mu\vec{a}=(\mu x_1;\mu y_1)$	Множення вектора $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ на число μ: $\mu\vec{a}=(\mu x_1;\mu y_1;\mu z_1)$

Відбувається обговорення завдання. До учнів ставляться такі запитання:

- За яким принципом ви виконали узагальнення ?
- Чи вдалося вам зрозуміти принцип аналогії? Та чи завжди він працює?

3. Розв'язування завдань

Завдання 1.

Дано дві точки M(-2;5), N(1;3) на площині. Знайдіть:

а) координати середини відрізка MN;

б) довжину відрізка MN;

в) координати вектора MN.

Розв'язання

а) Нехай $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, тоді координати середини відрізка A_1A_2: $\frac{x_1+x_2}{2}$; $\frac{y_1+y_2}{2}$.

Нехай P - середина MN, тоді

$P\left(\frac{-2+1}{2}\ ;\ \frac{5+3}{2}\right); P\left(-\frac{1}{2}; 4\right);$

б) $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $|A_1A_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$;

$|MN| = \sqrt{(1-(-2))^2+(3-5)^2} = \sqrt{13};$

в) $\overrightarrow{MN}(1-(-2); 3-5)$; $\overrightarrow{MN}(3; -2)$.

Дана задача дає можливість учням пригадати та систематизувати знання набуті в процесі вивчення курсу планіметрії.

Тепер доцільно ж буде запропонувати вирішити аналогічне завдання, але вже в курсі стереометрії.

Завдання 2.

Дано дві точки $M(6; -2; 8)$, $N(4; 4; -1)$ у просторі. Знайдіть:

а) координати середини відрізка MN;

б) довжину відрізка MN;

в) координати вектора MN.

Розв'язання

а) Нехай P-середина MN, тоді

$P\left(\frac{6+4}{2}\ ;\ \frac{-2+4}{2};\ \frac{8-1}{2}\right); P(5; 1; 3{,}5);$

б) $|MN| = \sqrt{(4-6)^2 + (4-(-2))^2 + (-1-8)^2} = \sqrt{121} = 11;$

в) $\overrightarrow{MN}(6-4; 4-(-2); -1-8);\ \overrightarrow{MN}(2;\ 6; -9).$

Завдання 3.

На площині розміщено трикутник ABC з координатами його вершин: $\mathrm{A}(-2; 3)$, $\mathrm{B}(3; 5)$, $\mathrm{C}(-1; -5)$. Запишіть рівняння медіани проведеної до сторони BC;

Розв'язання

Нехай $\mathrm{K}(\mathrm{x}; \mathrm{y})$ – середина відрізка BC. $x = \frac{3-1}{2} = 1$, $y = \frac{5-5}{2} = 0.$

Отже K(1;0). Медіаною до сторони BC є відрізок AK.

Знайдемо рівняння даної медіани використовуючи формулу: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Отже матимемо: $\frac{x-(-2)}{1-(-2)} = \frac{y-3}{0-3}$.

Виконавши алгебраїчні перетворення, отримаємо рівняння прямої у загальному вигляді $x + y - 1 = 0$ або $y = -x + 1$.

Завдання 4.

У просторі розміщено трикутник ABC з координатами його вершин: $\mathrm{A}(-1; 4; 7)$, $\mathrm{B}(0; 2; -3)$, $\mathrm{C}(6; -4; 7)$. Запишіть рівняння медіани проведеної до сторони BC;

Розв'язання

Нехай $\mathrm{K}(\mathrm{x}; \mathrm{y})$ – середина відрізка BC.

$x = \frac{6-0}{2} = 3,\ y = \frac{-4-2}{2} = -3;\ z = \frac{7-(-3)}{2} = 5.$

Отже K(3;-3;5). Медіаною до сторони BC є відрізок AK.

Знайдемо рівняння даної медіани використовуючи формулу: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Отже матимемо: $\frac{x-(-1)}{3-(-1)} = \frac{y-4}{-3-4} = \frac{z-7}{5-7}$.

Виконавши алгебраїчні перетворення, отримаємо $\frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z-7}{-2}$.

VI. Підсумок уроку. Рефлексія.

Учитель**.** Діти, ви добре попрацювали .

- Що ми сьогодні зробили на уроці?(Узагальнили знання про метод координат та систематизували знання у вигляді таблиці.)
- Чим для вам був корисний даний урок?
- Що викликало труднощі?
- Яким методом пізнання ви користувалися на уроці?
- Чи переконалися ви в тому, що координатний методи важливий, корисний і багатогранний?
- Чи отримали ви задоволення від знайомства з новими задачами та їх розв'язання?

Дякую за роботу на уроці.

VII. Домашнє завдання.

Вивчити напам'ять формули з теми «Метод координат» для планіметрії та стереометрії; скласти три стереометричні задачі, що розв'язуються координатним методом.

ДОДАТОК Б

Метод координат в завданнях ЗНО

Задачі на використання методу координат в завданнях ЗНО минулих років.

Тестові завдання з вибором правильної відповіді

1. У прямокутній системі координат зображено прямокутний рівнобедрений трикутник ABC, в якому $A(-3;5)$ і $B(4;5)$ (див. рисунок). Знайдіть координати точки C. (ЗНО 2010, II сесія)

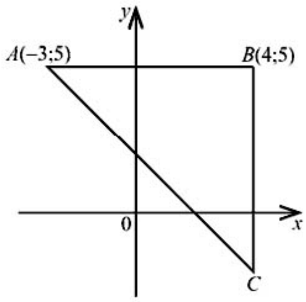


Рис. Б. 1.

А	Б	В	Г	Д
(4;-3)	(4;-2)	(5;-3)	(-2;4)	(4;1)

Відповідь: Б

2. Яка з наведених точок належить осі $0z$ прямокутної системи координат у просторі? (ЗНО 2012, I сесія)

А	Б	В	Г	Д
M(0;-3;0)	N(3;0;-3)	K(-3;0;0)	L(-3;3;0)	F(0;0;-3)

Відповідь: Д

3. Яка з наведених точок лежить у площині $0xz$ прямокутної системи координат у просторі? (ЗНО 2012, II сесія)

А	Б	В	Г	Д
(0;-3;0)	(0;4;-3)	(3;0;-4)	(-4;3;0)	(-3;3;3)

Відповідь: В

4. У координатній площині ху зображено п'ять точок: O, L, N, M, K(див. рисунок). Коло з центром в одній із цих точок дотикається до ос ординат у точці M. У якій точці знаходиться центр цього кола? (ЗНО 2013)

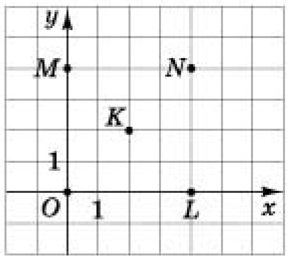


Рис. Б. 2.

А	Б	В	Г	Д
У точці L	У точці N	У точці M	У точці O	У точці K

Відповідь: Б

5. На координатній площині ху зображено коло, яке дотикається до прямих $x = 2, x = 6$ та осі x (див. рисунок). Визначте координати точки, яка є центром цього кола. (ЗНО 2014).

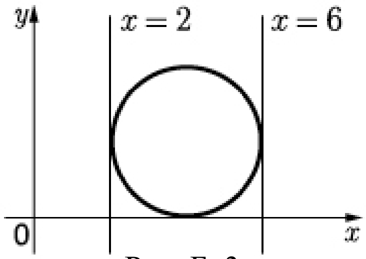


Рис. Б. 3.

А	Б	В	Г	Д
(4;1)	(6;2)	(4;4)	(2;4)	(4;2)

Відповідь: Д

6. Точка С лежить на осі *x* прямокутної системи координат і знаходиться на відстані 5 від точки *A(-2;4)*. Відрізок *AC* перетинає вісь *y*. Знайдіть координати точки *C*. (ЗНО 2014 основна сесія)

А	Б	В	Г	Д
(1;0)	(0;1)	(-5;0)	(0;0)	(3;4)

Відповідь: А

7. У прямокутній декартовій системі координат у просторі на осі z вибрано точку М (див. рисунок). Серед наведених варіантів укажіть можливі координати цієї точки. (ЗНО 2016)

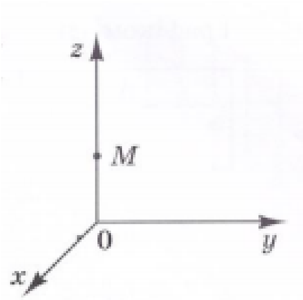


Рис. Б. 4.

А	Б	В	Г	Д
(1;0;0)	(1;1;0)	(0;0;1)	(0;0;-1)	(0;1;0)

Відповідь: В

8. У прямокутній системі координат у просторі задано сферу із центром у початку координат, якій належить точка А(0; 0; -5). Яка з наведених точок також належить цій сфері? (ЗНО 2017)

А	Б	В	Г	Д
K(5;5;0)	L(0;1;4)	M(0;0;5)	N(0;0;5)	P(5;5;5)

Відповідь: Г

9. У прямокутній системі координат у просторі задано сферу із центром у точці М. Відрізок АВ – діаметр цієї сфери. Визначте координати точки М, якщо $\mathrm{A}(2; -1; 0), \mathrm{B}(8; 3; 2)$. (ЗНО 2017, додаткова сесія)

А	Б	В	Г	Д
(10;2;2)	(6;4;2)	(3;2;1)	(5;1;4)	(5;1;1)

Відповідь: Д

Завдання на встановлення відповідності

10. На рисунку зображено прямокутну систему координат у просторі, на осях якої позначено точки K, L, M, N. Установіть відповідність між точками K, L, M, N (1-4) та їх можливими координатами (А-Д). (ЗНО 2010, ІІ сесія)

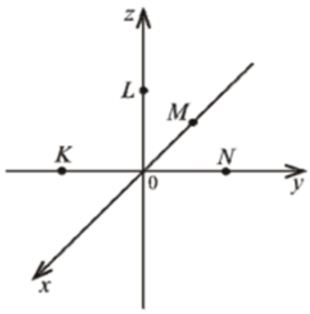


Рис. Б. 5.

Точка	*Координати точки*
1 K	А (-3;0;0)
2 L	Б (0;-3;0)
3 M	В (0;0;-3)
4 N	Г (0;0;3)
	Д (0;3;0)

Відповідь: 1-Б; 2-Г; 3-А; 4-Д.

11. У прямокутній системі координат на площині xy задано точки $O(0;0)$ і $A(6;8)$. З точки А на вісь x опущено перпендикуляр. Точка В- основа цього перпендикуляра. Установіть відповідність між величиною (1-4) та її числовим значенням (А-Д).(ЗНО 2013, І сесія).

Величина	*Числове значення*	
1.Довжина вектора OA	А	0
2. Відстань від точки А до осі x	Б	5
3. Ордината точки В	В	6
4. Довжина радіус кола описаного навколо трикутника ОАВ	Г	8
	Д	10

Відповідь: 1-Д; 2-Г; 3-А; 4-Б.

12. У прямокутній декартовій системі координат у просторі xyz задано точки $\mathrm{A}(2;0;0)$ і $\mathrm{B}(-4;2;6)$. До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження. (ЗНО 2015)

Початок речення		*Закінчення речення*	
1	Середина відрізка АВ є точка	А	(-1;1;3)
2	Проекція точки В на вісь z є точка	Б	(0;2;0)
3	Проекція точки В на площину xz є точка	В	(-4;0;6)
4	Проекцією точки В на вісь у є точка	Г	(0;0;6)
		Д	(-2;2;6)

Відповідь: 1-А; 2-Г; 3-В; 4-Б.

13. У прямокутній декартовій системі координат xyz у просторі задано точку $\mathrm{M}(1;-4;\ 8)$. Установіть відповідність між початком речення(1-4) та його закінченням(А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження. (ЗНО 2015, пробне)

Початок речення	*Закінчення речення*	
1. Відстань від точки М до площини ху дорівнює	**А**	1
2.Відстань від точки М до початку координат дорівнює	**Б**	4
3. Відстань від точки М до осі z дорівнює	**В**	$\sqrt{17}$
4. Відстань від точки М до точки $N(1;0;8)$ дорівнює	**Г**	8
	Д	9

Відповідь: 1-Г; 2-Д; 3-Б; 4-Б.

14. У прямокутній системі координат у просторі зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вершина В якого збігається з початком координат; а вершини А, С, B_1 належать осям х, у і z відповідно (див. рисунок). Вершина D_1 має координати (4; 8; 12). До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження. (ЗНО 2016, пробне)

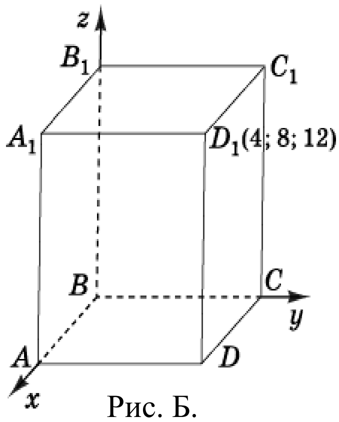


Рис. Б.

Початок речення	*Закінчення речення*
1.Серединою відрізка ВС є точка	А (0; 8; 12).
2. $\overrightarrow{BA}$ має координати	Б (4; 0; 0).
3. Точка що належить відрізку DD_1 і віддалена від точки D на 4 одиниці має координати	В (4; 8; 0).
4. Точка C_1 має координати	Г (0; 4; 0).
	Д (4; 8; 12).

Відповідь: 1-Г; 2-Б; 3-Д; 4-А.

Завдання на знаходження розв'язку

15. У прямокутній системі координат на площині задано трапецію $\mathrm{ABC}D$ $(\mathrm{A}D \parallel \mathrm{BC}, \mathrm{A}D > \mathrm{BC})$. Площа трапеції дорівнює 42. Визначте абсцису вершини D, якщо $\mathrm{A}\,(-1;\ 3), \mathrm{B}\,(1;\ 6), \mathrm{C}\,(7;\ 6)$. (ЗНО 2018, пробне)

Відповідь: 21.

16. Центр кола заданого рівнянням $x^2 - 8x + y^2 + 7 = 0$, збігається з точкою перетину діагоналей AC і BD паралелограма $ABCD$. Обчисліть площу цього паралелограма, якщо $\mathrm{A}(-4; -3)$ і $\mathrm{B}(0; 3)$. (ЗНО 2019, ІІ сесія)

Відповідь: 72.

17. У прямокутній системі координат на площині ху задано прямокутний трикутник АСВ $(\angle \mathrm{C} = 90)$. Коло з центром у точці А, задане рівнянням $(x+3)^2 + y^2 - 4y = 21$, проходить через вершину С. Сторона АС паралельна осі у, довжина сторони ВС втричі більша за довжину сторони АС. Визначте координати вершини $\mathrm{B}(\mathrm{x}_B;\ y_B)$, якщо вона лежить у першій координатній чверті. У відповідь запишіть суму $\mathrm{x}_B +\ y_B$. (ЗНО 2019)

Відповідь: 19.

18. У прямокутній системі координат xy на площині коло задано рівнянням $x^2 - 4x + y^2 + 12y = 9$. Центр O цього кола збігається з точкою перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Визначте координати вершини $C(x_C; y_C)$, якщо вектор $\overrightarrow{OA}(-1; 2)$. У відповідь запишіть добуток $x_C \cdot y_C$. (ЗНО 2020)

Відповідь: -24.