НКО—УРСР
КРИВОРІЖСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

Том I

ВИДАННЯ
КРИВОРІЖСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО ПЕДАГОГІЧНОГО ІНСТИТУТУ
КРИВИЙ РІГ 1941 ДНІПРОПЕТРОВСЬК

НКО—УРСР

КРИВОРІЖСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

Том I

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ
С. І. АЛАДКІН (голова колегії),
К. К. ФАСУЛАТІ (заст. голови),
Ф. К. КОСИК і О. П. ЗЕЛЕНСЬКИЙ

ВИДАННЯ
КРИВОРІЖСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО ПЕДАГОГІЧНОГО ІНСТИТУТУ
КРИВИЙ РІГ 1941 ДНІПРОПЕТРОВСЬК

Ф. К. КОСИК

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУНКЦІЇ ГРІНА ДЛЯ ОПЕРАТОРІВ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Нехай дано функцію Гріна $K(x;s)$ для диференціальної системи

$$\begin{cases} L(u)=0 \\ R_j(u)=0 \qquad j=1,\ 2, \ldots, n \end{cases}$$

де

$$L(u)\equiv P_0(x)\,u^{(n)}(x)+P_1(x)\,u^{(n-1)}(x)+\ldots+P_n(x)\,u(x)$$

$P_i(x)$ неперервні на $[a;b]$ функції, а P_0, крім того, відмінна від нуля для всіх x на $[a;b]$

$$R_j(u)=R_{j1}(u)+R_{j2}(u) \qquad j=1,\ 2,\ 3, \ldots, n.$$

$$R_{j1}(u)=\sum_{r=0}^{n-1}\alpha_{jr}\,u_{(a)}^{(r)}$$

$$R_{j2}(u)=\sum_{r=0}^{n-1}\beta_{jr}\,u_{(b)}^{(r)}$$

Треба визначити функцію Гріна $K^*(x;s)$ для диференціальної системи

$$\begin{aligned} L(u)&=0 \\ R_j{}^*(u)&=0 \qquad j=1,\ 2, \ldots, p \\ R_j(u)&=0 \qquad j=p+1,\ p+2, \ldots, n \end{aligned}$$

за даною функцією $K(x;s)$,
де:

$$R_j^*(u)=R_{j1}^*(u)+R_{j2}(u),$$

$$R_{j1}^*(u)=\sum_{r=0}^{n-1}\alpha_{jr}^*\,u^{(r)}(a)$$

$$R_{j2}(u)=\sum_{r=0}^{n-1}\beta_{jr}^*\,u^{(r)}(b)$$

вважаючи, що

$$A=\begin{vmatrix} R_1(u_1)\dots R_1(u_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ R_n(u_1)\dots R_n(u_n)\end{vmatrix}\neq 0 \quad \text{та} \quad A^*=\begin{vmatrix} R_1^*(u_1)\dots R_n^*(u_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ R_p^*(u_1)\dots R_p^*(u_n) \\ R_{p+1,\,2}(u_1)\dots R_{p+1,\,2}(u_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ R_{n2}(u_1)\dots R_{n2}(u_n)\end{vmatrix}\neq 0$$

де: $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_u(x)$ — фундаментальна система розв'язків рівняння $L(u)=0$.

Побудуємо ядро:

$$(^*) \qquad K^*(x;s)=\frac{1}{D_p}\begin{vmatrix} K(x;s) & y_1(x)\ y_2(x)\ y_p(x) \\ R_1^*[K(x;s)] & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & D_p \\ R_p^*[K(x;s)] & \end{vmatrix}$$

де:

$$y_i(x)=\begin{vmatrix} R_1(u_1)\dots R_1(u_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_1(x)\dots u_u(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ R_n(u_1)\dots R_n(u_n)\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n} A_{ik}u_k(x)$$

$\xrightarrow{\text{i рядок}}$

A_{ik} — алгебричне доповнення елемента $R_i(u_k)$ в детермінанті A

$$D_p=\begin{vmatrix} R_1^*(x_1)\dots R_1^*(y_p) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ R_p^*(y_1)\dots R_p^*(y_p)\end{vmatrix}$$

і доведемо, що $K^*(x;s)$ є функція Гріна для системи:

$$\begin{cases} L(u)=0 & \\ R_j^*(u)=0 & \text{для } j=1,2,\dots,p \\ R_j(u)=0 & \text{„} \quad j=p+1,\ p+2,\dots,n. \end{cases}$$

1. Насамперед покажемо, що коли

$$A\neq 0 \quad \text{та} \quad A^*\neq 0, \quad \text{то} \quad D_p\neq 0.$$

Справді, детермінант D_p, підставивши в нього вираз для $y_i(x)$, можна написати в такому вигляді:

$$D_p = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} A_{1k} R_1^*(u_k) & \ldots & \sum_{k=1}^{n} A_{pk} R_1^*(u_k) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \sum_{k=1}^{n} A_{pk} R_p^*(u_k) & \ldots & \sum_{k=1}^{n} A_{pk} R_p^*(u_k) \end{vmatrix}$$

Але цей вираз можна дістати, перемноживши два детермінанти:

$$A^{p-1} = \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ A_{p1} & \ldots & A_{pn} \\ \frac{A_{p+1,1}}{A} & \ldots & \frac{A_{p+1,n}}{A} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{A_{n1}}{A} & \ldots & \frac{A_{nn}}{A} \end{vmatrix} \quad \text{та} \quad A^* = \begin{vmatrix} R_1^*(u_1) & \ldots & R_1^*(u_n) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ R_p^*(u_1) & \ldots & R_p^*(u_n) \\ R_{p+1}(u_1) & \ldots & R_{p+1}(u_n) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ R_n(u_1) & \ldots & R_n(u_n) \end{vmatrix}$$

бо, перемножаючи рядок на рядок і беручи до уваги відому властивість детермінантів

$$\sum_{k=1}^{n} A_{\alpha k} a_{\beta k} = \begin{cases} 0 & \text{для } \alpha \neq \beta \\ A & \;\;\text{„}\;\; \alpha = \beta \end{cases} \quad \text{де: } A = |a_{\beta k}|$$

матимемо

$$A_{p-1} \cdot A^* = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} A_{1k} R_1^*(u_k) \ldots \sum_{k=1}^{n} A_{pk} R^*(u_k); & \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{n} A_{p+1,k} R_1^*(u_k) \ldots \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{n} A_{nk} R_1^*(u_k) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \sum_{k=1}^{n} A_{1k} R_p^*(u_k) \ldots \sum_{k=1}^{n} A_{pk} R_p^*(u_k); & \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{n} A_{p+1,k} R_p^*(u_k) \ldots \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{n} A_{nk} R_p^*(u_k) \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \end{vmatrix}$$

або

$$A^{p-1} \cdot A^* = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} A_{1k} R^*(u_k) & \ldots & \sum_{k=1}^{n} A_{pk} R_1^*(u_k) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \sum_{n=1}^{n} A_{1k} R_p^*(u_k) & \ldots & \sum_{k=1}^{n} A_{pk} R_p^*(u_k) \end{vmatrix}$$

2*

Отже:

$$A^{p-1} \cdot A^* = D_p$$

і тому, коли

$$A \neq 0 \quad \text{та} \quad A^* \neq 0,$$

то і

$$D_p \neq 0.$$

2. Щоб довести, що ядро $K^*(x; s)$ має першу й другу властивості функції Гріна, напишемо його в такому вигляді:

$$K^*(x;s) = K(x;s) + \frac{1}{D_p} \begin{vmatrix} 0 & y_1(x) \ldots y_p(x) \\ R_1^*(K) & \\ \ldots & D_p \\ R_p^*(K) & \end{vmatrix}$$

а через те, що

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} u_k(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

є неперервні, разом із своїми n першими похідними, розв'язками диференціального рівняння $L(u) = 0$, то

$$y_i^{(m)}(s+0) = y_i^{(m)}(s-0) = y_{i\,(s)}^{(m)} \quad \text{для } s \subset [a; b] \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ m = 0, 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

Виходить, що

$$K_{mo}^*(s+0; s = K_{mo}(s+0; s) + \frac{1}{D_p} \begin{vmatrix} 0 & y^{(m)}(s) \ldots y_p^{(m)}(s) \\ R_1^*(K) & \\ \ldots & D_p \\ R_p^*(K) & \end{vmatrix}$$

та

$$K_{mo}^*(s-0; s) = K_{mo}(s-0; s) + \frac{1}{D_p} \begin{vmatrix} 0 & y^{(m)}(s) \ldots y_p^{(m)}(s) \\ R_1^*(K) & \\ \ldots & D_p \\ R_p^*(K) & \end{vmatrix},$$

де:

$$K_{pq}(x; s) = \frac{\partial^{p+q} K(x; s)}{\partial x^p \partial s^q}$$

Тоді

$$K_{mo}^*(s+0; s) - K_{mo}^*(s-0; s) = K_{mo}(s+0; s) - K_{mo}(s-0; s)$$

Але $K(x; s)$ є функція Гріна, тому

$$K_{mo}(s+0; s) - K_{mo}(s-0; s) = \begin{cases} 0 & \text{для } m = 0, 1, 2, \ldots (n-2) \\ \dfrac{1}{P_0(s)} & \text{,,} \quad m = n-1 \end{cases}$$

і виходить:

$$K^*_{mo}(s+0; s) - K^*_{mo}(s-0; s) = \begin{cases} 0 & \text{для } m = 0, 1, 2, \ldots (n-2) \\ \dfrac{1}{P_0(s)} & \text{,,} \quad m = n-1. \end{cases}$$

3. $K^*(x; s)$ задовольняє граничні умови:

$$R^*_j(u) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots p)$$

Справді, зробивши операцію R^*_j над функцією $K^*(x; s)$, матимемо:

$$R^*_j\left[K^*(x; s)\right] = \frac{1}{D_p} \begin{vmatrix} R^*_j\left[K(x; s)\right] & R^*_j(y_1) \ldots R^*_j(y_p) \\ \hline R^*_1\left[K(x; s)\right] & R^*_1(y_1) \ldots R^*_1(y_p) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ R^*_p\left[K(x; s)\right] & R^*_p(y_1) \ldots R^*_p(y_p) \end{vmatrix}$$

тобто в першому рядку детермінанта матимемо елементи, що дорівнюють елементам $j+1$-го рядка. Виходить:

$$R^*_j\left[K^*(x; s)\right] = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, p)$$

що й доводить наше твердження.

4. $K^*(x; s)$ задовольняє також граничні умови:

$$R_j(u) = 0 \qquad (j = p+1, p+2, \ldots, n)$$

Через те, що операція R_j, зроблена над функцією $y_i(x)$, дає в i-ому рядку детермінанта y_i елементи, рівні елементам j-го рядка, то

$$R_j(y_i) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots p \\ j = p+1, p+2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

і в наслідок того, що $K(x; s)$ — функція Гріна відповідає граничним умовам

$$R_j(u) = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

то

$$R_j\left[K(x; s)\right] = 0 \qquad \text{для } j = p+1, p+2, \ldots n.$$

Виходить, що, зробивши операцію R_j $(j=p+1,\ p+2, \ldots n)$ над функцією $K^*(x;\ s)$, матимемо детермінант

$$R_j\left[K^*(x;\ s)\right]=\frac{1}{D_p}\left|\begin{array}{c|c} R_j\left[K(x;\ s)\right] & R_j(y_1)\ \ldots\ R_j(y_p) \\ \hline R_1^*\left[K(x;\ s)\right] & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & D_p \\ R_p^*\left[K(x;\ s)\right] & \end{array}\right|$$

в якому всі елементи 1-го рядка дорівнюють нулеві.

Отже

$$R_j\left[K^*(x;\ s)\right]=0 \qquad (j=p+1,\ p+2, \ldots, n)$$

5. Залишається показати, що $K^*(x;\ s)$ зсередини $[a;\ s)$ та $(s;\ b]$ задовольняє рівнянню $L(u)=0$.

Справді, через те, що функції $y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x)$ є розв'язки рівняння

$$L(u)=0 \qquad \text{в } (a;\ b),$$

то

$$L(y_i)=0 \qquad (i=1,\ 2, \ldots, p)$$

$K(x;\ s)$, будучи функцією Гріна оператора $L(u)$ зсередини $[a;\ s)$ і $(s;\ b]$, задовольняє рівняння $L(u)=0$.

Виходить, що, зробивши операцію L над функцією K^*, матимемо детермінант

$$L(K^*)=\frac{1}{D_p}\left|\begin{array}{c|c} L(K^*) & L(y_1)\ \ldots\ L(y_p) \\ \hline R_1^*(K^*) & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & D_p \\ R_p^*(K^*) & \end{array}\right|$$

в якому всі елементи 1-го рядка дорівнюють нулеві.

Отже,

$$L(K^*)=0$$

зсередини $[a;\ s)$ та $(s;\ b]$.

Ф. К. Косик—ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Резюме

В статье дается решение задачи по данной функции Грина $K(x,s)$ оператора $L(u)=P_0(x)\overset{(n)}{u(x)}+P_1(x)\overset{(n-1)}{u(x)}+\ldots+P_n(x)u(x)$, соответствующей граничным условиям

$$R_j(u)=R_{j1}(u)+R_{j2}(u)=0 \quad (j=1,2,\ldots,n)$$

построить функцию Грина $K^*(x,s)$ оператора $L(u)$, соответствующую граничным условиям

$$R_j^*(u)=R_{j2}^*(u)+R_{j2}^*(u)=0 \quad \text{для } j=1,2,\ldots,p,$$

$$R_j(u)=R_{j1}(u)+R_{j2}(u)=0 \quad \text{для } j=p+1,p+2,\ldots n$$

где:

$$R_{j1}(u)=\sum_{r=0}^{n-1}\alpha_{jr}\overset{(r)}{u(a)}$$

$$R_{j2}(u)=\sum_{r=0}^{n-1}\beta_{jr}\overset{(r)}{u(b)}$$

$$R_{j1}^*(u)=\sum_{r=0}^{u-1}\alpha_{jr}^*\overset{(r)}{u(a)}$$

$$R_{j2}^*(u)=\sum_{r=0}^{n-1}\beta_{jr}^*\overset{(r)}{u(b)}$$

$K^*_{(x,s)}$ определяется через данную функцию $K(x,s)$ по формуле

$$K^*_{(x,s)}=\frac{1}{D_p}\left|\begin{array}{c|c} K(x,s) & y_1(x)\ldots y_p(x) \\ \hline R_1^*[K(x,s)] & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & D_p \\ R_p^*[K(x,s)] & \end{array}\right|$$

где:

$$D_p=\begin{vmatrix} R_1^*(y_1)\ldots R_1^*(y_p) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ R_p^*(y_1)\ldots R_p^*(y_p)\end{vmatrix},\quad y_i(x)=\begin{vmatrix} R_1(u_1)\ldots R_1(u_n) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ R_{i-1}(u_1)\ldots R_{i-1}(u_n) \\ u_1(x)\ldots u_n(x) \\ R_{i+1}(u_1)\ldots R_{i+1}(u_n) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ R_n(u_1)\ldots R_n(u_n)\end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \longleftarrow j\text{-ая строка} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

F. K. *Kossik*—UMFORMUNG DER FUNKTION GREENS FÜR DEN OPERATOR DER HÖHEREN ORDNUNG

Resumee

In dem Artikel gibt man uns die Lösung der Aufgabe nach des gegebenen Funktion Greens $K(x, s)$ des Operators $L(u) = P_0(x)\,u^{(n)}_{(x)} + P_1(x)u^{(-1)}(x) + \ldots + P_n(x)u_x(x)$ die den Randbedingungen entspricht

$$R_j(u) = R_{j1}(u) + R_{j2}(u) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

die Funktion Greens aufzustellen $K^*(x, s)$ des Operators $L(u)$, die den Randbedingungen entspricht:

$$R^*_j(u) = R^*_{j1}(u) + R^*_{j2}(u) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, p$$

$$R_j(u) = R_{j1}(u) + R_{j2}(u) = 0 \quad j = p+1, p+2, \ldots, n$$

wo

$$R_{j1}(u) = \sum_{r=0}^{n-1} \alpha_{jr} \overset{(r)}{u}(a)$$

$$R_{j2}(u) = \sum_{r=0}^{n-1} \beta_{jr} \overset{(r)}{u}(b)$$

$$R^*_{j1}(u) = \sum_{r=0}^{n-1} L^*_{jr} \overset{(r)}{u}(a)$$

$$y^*_{j2}(u) = \sum_{r=0}^{n-1} \beta^*_{jr} \overset{(r)}{u}(b).$$

$K^*(x, s)$ wird durch die gegebene Funktion bestimmt $K(x, s)$ nach der Formel

$$K^*(x, s) = \frac{1}{D_p} \begin{vmatrix} K(x, s) & y_1(x) \ldots y_p(x) \\ R^*_1[k(x, s)] & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & D_p \\ R^*_p[k(x, s)] & \end{vmatrix}$$

wo

$$D_p = \begin{vmatrix} R^*_1(y_1) \ldots R^*_1(y_p) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ R^*_p(y_1) \ldots R^*_p(y_p) \end{vmatrix},$$

$$y_j(x) = \begin{vmatrix} R_1(u_1) \ldots R_1(u_n) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u_1(x) \ldots u_n(x) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ R_n(u_1) \ldots R_n(u_n) \end{vmatrix} \longleftarrow j\text{-ste Zeile},$$