МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»

Завідувач кафедри

_____________ Д. Є. Бобилєв — Реєстраційний № _______

«___» _____________ 2021 р. — «___» ____________2021 р.

ГЕНЕРАЦІЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЇ $y = \frac{1}{2^{n-1}}x$ І КВАДРАТА ЗІ СТОРОНОЮ $a = 1$

Кваліфікаційна робота
студента групи МІм-16
ступінь вищої освіти магістр
спеціальності: 014.04
середня освіта (математика)
Няньчука Владислава Володимировича
Керівник:
кандидат техн. наук, професор
Корольський Володимир Вікторович
Оцінка:__________
Національна шкала___________________
Шкала ECTS____ Кількість балів ______
Голова ЕК_______ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Члени ЕК

Кривий Ріг – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Станом на 2021 рік тема геометричної інтерпретації рядів не є цілком розвинутою. Не дивлячись на те, що поняття «числовий ряд» у багатьох випадках формувалось саме за допомогою дослідження довжин, площ тощо геометричних об’єктів, на сьогодні доступна дуже мала кількість видань, які б узагальнювали цю тему.

Числові ряди у вивченні математичного аналізу відіграють цілком значну роль. За їх допомогою, наприклад, обчислюють значення функцій та інтегралів, розв’язуються задачі прикладного характеру.

За допомогою теорії рядів створюються шляхи розвитку таких галузей як економіка, інженерія, архітектура, розвиваються математика та фізика.

В процесі підготовки вчителя спеціальності Середня освіта (математика) розділ математичного аналізу «ряди» є важливою складовою для розвитку різноманітних компетентностей майбутнього педагога, тому при вивченні розділу «Ряди», на нашу думку, є важливою реалізація педагогічного принципу наочності.

Тому вибір теми, пов’язаної з дослідженням одержаних числових рядів за допомогою геометричних фігур є важливим.

Мета роботи: побудова і дослідження числових рядів, члени яких пов’язані з функцією $y = \frac{1}{2^{n-1}}x$ та квадратом зі стороною а=1.

Об’єкт дослідження: числові ряди.

Предмет дослідження: одержання числових рядів за допомогою функції $y = \frac{1}{2^{n-1}}x$ розташованих у квадраті зі стороною $a = 1$, розміщеної в системі координат Oxy.

Завдання роботи:

1) Побудувати числові ряди, членами яких є величини лінійних параметрів різноманітних геометричних фігур, побудованих за допомогою графіка функції $y = \frac{1}{2^{n-1}}x$;

2) Побудувати числові ряди з квадратурною геометричною інтерпретацією членів ряду;

3) Дослідити одержані ряди з лінійною та квадратурною геометричною інтерпретацією на збіжність;

4) Дослідити зміну значень частинних сум рядів S_n в залежності від величини n для варіацій: n=1000, n=5000, n=25000, n=100000. Відобразити характер зміни S_n в системі координат (n, S_n);

5) Дослідити умови використання одержаних результатів для формулювання олімпіадних задач для математичних класів загальноосвітніх шкіл та для проведення олімпіад серед студентів 3-4 курсів спеціальності «Середня освіта (Математика)»;

Методи дослідження:

1) Аналіз наукової літератури, пов’язаної із розділом математичного аналізу «числові ряди»;

2) Пошук алгоритмів зміни величин певних геометричних об’єктів, пов’язаних із квадратом зі стороною $a = 1$, що розташований в системі координат Oxy;

3) Чисельні експерименти, які пов’язані з розрахунком частинних сум одержаних рядів з метою аналізу залежності величини частинної суми від кількості доданків;

Наукова новизна: досліджено та обґрунтовано взаємозв’язки між величинами геометричних об’єктів з елементами числових рядів. Запропоновано дослідження числових рядів за допомогою педагогічного принципу наочності.

Практичне значення роботи:

Розроблена система числових рядів, які можуть бути використані на практичних заняттях з математичного аналізу при вивченні розділу «числові ряди» та при створенні завдань для проведення олімпіад з математики.

Апробація дослідження:

1. Участь у міжнародній науково-практичній інтернет-конференції «Розвиток освіти, науки та бізнесу: результати 2021», м. Дніпро, 7-8 грудня.

Структура магістерської роботи:

Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 48 найменувань та додатків. Основний текст викладено на 78 сторінках. Повний обсяг роботи 90 сторінок.

РОЗДІЛ І. ОСНОВНІ ЗАСАДИ ТЕОРІЇ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

1.1. Історія виникнення рядів у математиці.

Відповіді на питання про першу появу рядів в математиці немає. Дослідники історії розвитку математики стверджують, що так звана «математична нескінченість» з'явилася в давньогрецькій або елінській культурі в VIII – VI ст. до н.е.

Відомий факт, що за часів Стародавнього Єгипту існували арифметичні та геометричні прогресії. Єгиптяни мали можливість використовувати дроби, послідовність яких складала числовий ряд [22, с. 117].

У грецькій математиці використовували нескінченні суми $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, проте подавали їх як скінченні суми виду $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, замість нескінчених [22, с. 117].

У стародавньому Єгипті не оперували раціональними дробами виду $\frac{m}{n}$. Однак, представлення рівносильні ідеї загального дробу в єгиптян були, адже вони вміли по-своєму виразити частку $m\colon n$. Для цього вони використовували аліквотні дроби – долі одиниці вигляду $1/n$ [47].

Зенон Елейський, грецький філософ V ст. до н. е., був відомий своїми апоріями, в яких розмірковував про неможливість простору, руху і безлічі. «Апорії Зенона» - нерозв'язні, парадоксальні міркування стосовно того, що множинність та рух – не є суттю буття, а є єдиним та непорушним. Його метод не є методом прямого доказу, його міркування базуються на законі вилучення третього, який увів його вчитель – Парменід.

Про Зенона Елейського згадували у своїх працях такі відомі філософи як Платон, Аристотель, Плутарх, Діоген та інші. Вони писали про понад 40 апорій Зенона, проте у наші часи відомі лише декілька.

Апорії Зенона сформульовані у формі скороченого умовиводу, у ролі засновків якого були ентимеми. Діоген Лаертський стверджував, що Зенону належить така фраза: «якщо я зроблю вигляд, ніби мене сварять, я не відчую, і коли мене похвалять»: незвичним тут є апорія як форма мислення і спосіб мислення в цілому [2].

«Ахіллес» - одна з найвідоміших апорій Зенона. Аристотель прийшов до такого висновку: «найшвидший бігун не наздожене найповільнішого, позаяк потрібно, щоби перший досяг тієї точки, звідки почав рух другий; оскільки повільніший щоразу просуватиметься трохи далі, то незмінно випереджатиме» [2]. Апорія веде до думки, що необхідно трактувати шлях бігунів як нескінченність, саме за таких умов Ахіллес не зможе наздогнати черепаху, яка буде віддалятись від нього на мінімальну відстань.

Пробігши половину шляху, бігун, перш ніж опинитися у фінішу, повинен буде подолати половину відстані, що залишилася, тобто опинитися в точці, що знаходиться від пункту А на відстані, рівній всього шляху. Після цього, перш ніж потрапити в пункт В, бігун знову повинен буде спочатку пробігти половину залишився відстані, тобто дійти до "проміжного фінішу" в точці (якщо довжину всього шляху АВ ми приймемо за 1) тощо. Іншими словами, бігун повинен пробігти відстань, рівну сумі ряду [28].

Значний внесок в розвиток рядів зробили математики Індії.

Знаходження сум числових рядів цікавило багатьох індійських вчених. Так, наприклад, індійський вчений Аріабахта формулював правила знаходження суми трикутних чисел, натуральних квадратів і кубів. Інший індійський науковець, Магавира, формулював правила знаходження сум геометричної прогресії, квадратів і кубів членів геометричної прогресії. [47, с. 201].

Пошуком нескінчених сум займались й італійські науковці. Так П’єтро Менголі (Pietro Mengoli (1625 – 1668)) довів геометрично, що ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$ має суму 1. Іншими словами, квадрат, довжина сторони якого дорівнює 1 має площу 1 (рис. 1.1). Він отримав ряд геометричної прогресії, поділивши площу квадрату навпіл, потім одну з половин знову навпіл, отримуючи чверть, знову ділить її навпіл і т.д. [47].

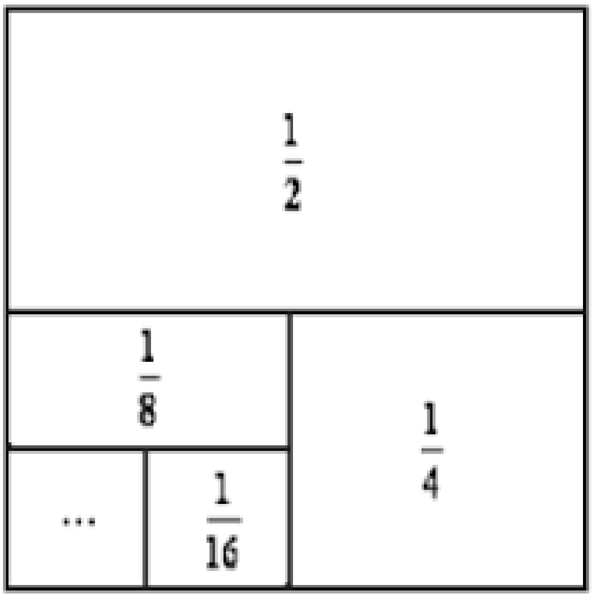

Рис. 1.1 Геометричне розкладання числового ряду

Знаходженням суми числового ряду займались і в Китаї. У праці «Рассуждениях Мэн-си» китайський вчений Шень Ко знайшов суму кількості предметів, які складають n − шарову ступінчату усічену піраміду, в якій стороні прямокутних шарів послідовно збільшуються на одиницю. Інший китацський науковець, Чжу Ши-цзе, знаходить суму рядів, які отримуються при множенні натуральних, трикутних та квадратних чисел на члени зростаючої або спадної прогресій [47, с. 175].

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Рис. 1.2 Арифметичний трикутник

Дана таблиця містить біноміальні коефіцієнти до 8-ї степені бінома - $(1+x)^8$ включно. Цей факт підтвердив Ньютон приблизно у 1665 році:

$$\begin{aligned}(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k \\ + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)(m-k)}{(k+1)!}x^{k+1} + \cdots \\ + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots3\cdot2}{(m-1)!}x^{m-1} \\ + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots3\cdot2\cdot1}{m!}x^m \qquad (1.1)\end{aligned}$$

$$A_k = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+2)(m-k+1)}{k!} \qquad (1.2)$$

Ньютон знайшов взаємозв'язок між коефіцієнтами рядів: $A_{k+1} = A_k \frac{m-k}{k+1}$, де m – степінь многочлена, k – індекс многочлена. Продовження таблиці Чжу Ши-цзе не існує, проте маємо змогу побачити закономірність, яка дозволить продовжити цю таблицю: «Сума довільних двох чисел, які стоять поряд в одному і тому ж рядку, дорівнює числу яке стоїть в наступному рядку між ними». Наприклад 1 + 2 = 3, 2 + 1 = 3, 1 + 3 = 4, 3 + 3 = 6 і т. д. Дані формули (1.1.) і (1.2.) не були виведені в епоху Чжу Ши-цзе, а взаємозв'язок між числами можна було лише спостерігати. Трикутну таблицю називають арифметичним трикутником. Відомості про арифметичний трикутник були ще у 2 ст. до н. .е у індійських математиків [27].

Ще за часів існування Евдокса та Архімеда були розв'язані задачі на знаходження об'єму піраміди (розв'язана Евдоксом), площі сегмента параболи, центру тяжіння трикутника та площі спіралі (розв'язані Архімедом). Всі задачі залежать від інтеграла $\int x^2 dx$, і їх можна привести до обчислення «сум Рімана» виду $\sum an^2$. Так, Архімед досліджував спіраль за допомогою леми, записаної у вигляді: $N^3 < 3\sum_{n=1}^{N} n^2 = N^3 + N^2 + \sum_{n=1}^{N} n < (n+1)^3$ [5, с. 169].

У 50-х роках XVII ст. англійський математик Уільям Броункер увів термін «гармонічний ряд». Ця назва виникла з тієї причини, що кожен член ряду, починаючи з другого, є середнім гармонічним суміжних членів ряду. П'єтро Менголі близько 1650 р. довів розбіжність гармонічного ряду [1, с. 163]. Але французький математик Орем зробив це значно раніше, у 1350р. саме його доведення ми можемо спостерігати у сучасних підручниках. Його ідея в тому, що Орем групує члени ряду наступним чином:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$
$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

Далі він подвоює число членів ряду, зібраних в послідовні групи, завдяки чому отримує нескінченну кількість дужок з сумами, більшими за $\frac{1}{2}$ [22, с. 119].

Однією з ідей, яка дала поштовх розвитку теорії числових рядів полягала у знаходженні раціональних виразів для деяких функцій, що дозволило б виконувати інтегрування. Часом виникала потреба у досліджені їх на збіжність для окремих значень аргументів. Однак бажання застосовувати ряд для усіх значень змінних шляхом виникнення парадоксів призупинило розвиток цього напряму. П. Варіньйон (1654 – 1722), займаючи строгу математичну позицію, звертав увагу на те, що придатний для використання ряд має неперервно зменшуватись із кожним його членом, і, як наслідок, остача такого ряду має ставати якомога меншою. [5, с. 138].

У XVII ст. Тейлор (1685 – 1731) представив один із найважливіших методів для розкладу функції в ряд. Для цього була використана інтерполяційна формулу Ньютона, яка була представлена у «Началах» [6, с. 140].

Першим зразком дослідження збіжності ряду представив Карл Фрідріх Гаус (1777 – 1865) у 1812 році. Пізніше, у 1821 році Огюстен Луї Коші (1789 – 1857) формує сучасні основні теоретичні засади теорії числових рядів. «Рядом називається необмежена послідовність чисел, що одержуються один з одного за певним законом. Нехай дано суму n перших членів числового ряду, де n – довільне ціле число. Якщо при безперервному зростанні значень кількості доданків n сума необмежено наближається до відомої межі S, ряд називається збіжним, а ця межа – сумою ряду. Навпаки, якщо при необмеженому зростанні n сума не наближається ні до якої певного межі, ряд буде розбіжним і не буде мати суми.» [26, с. 8-9].

Незабаром, математики усвідомили необхідність формулювання достатніх умов збіжності ряду. Таким чином, у 1768 р. була сформульована ознака Даламбера, пізніше Огюстен Луї Коші сформулював радикальну та інтегральну ознаку. У 1832 р. Жозеф Раабе представив достатню ознаку збіжності, яка зараз нам відома як ознака порівняння. Її ідея – порівняння даного ряду із розбіжним гармонічним рядом і зі збіжним узагальнено гармонічним рядом [22].

Потреба в дослідженні збіжності рядів стала суттєвою, коли виникла полеміка про ряди з синусами та косинусами. Ейлеру неодноразово вказували на незаконність його методу, пов’язаного з використанням теорем про степеневі суми коренів рівняння. Тому вчений шукав шляхи, які виправдають його обчислення. Сам він не створив теорію про розбіжні ряди, але його більш широке розуміння сумування ряду і методи узагальнюючого сумування були виправдані, але строго обґрунтовані та розвинені лише на рубежі XIX ст. та XX ст. Е. Чезаро, Е. Борелем, Л. Фейером та іншими [6, с. 142].

1.2. Методи дослідження числових рядів на збіжність.

Поняття числового ряду випливає з означення нескінченної числової послідовності. Через це інтерпретуємо означення числового ряду наступним чином.

Означення 1.1.

Нехай задана деяка числова послідовність $\{a_n\}$, де n – натуральне число, тобто $n \in \mathrm{N} = \{1,2, \dots, n, \dots\}$. Вираз виду:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (1.3)$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$– члени ряду, називається числовим рядом [33, с. 4].

Вираз для n -го члена ряду при довільному n називається загальним членом ряду [33, с. 4].

Означення 1.2.

Сума $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ n перших членів ряду (1.3) називається n – ю частиною сумою ряду [15, с. 6].

Означення 1.3.

Ряд з невід'ємними членами називається знакододатнім рядом [3, с. 14]. Деякі приклади знакододатних рядів:

• Ряд геометричної прогресії

$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \cdots + a \cdot q^{n-1}$, де $a \neq 0$, q − дійсне число

• Гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Означення 1.4.

Число $A \in \mathbb{R}$ називається границею числової послідовності $\boldsymbol{a_n}$, якщо для будь-якого околу $V(A)$ точки A існує такий номер N, що всі члени послідовності, номера яких більші за N, знаходяться у вказаному околі точки A [16, с. 112].

Означення 1.5.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається збіжним, якщо послідовність його частинних сум $\{S_n\}$ має скінченне значення S, тобто

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad (1.4)$$

Число S називається сумою ряду (1.3) і

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \text{ або } S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Якщо границя (1.4) є нескінченою або не існує, то ряд (1.3) розбіжний [15, с. 6].

Розглянемо приклади окремих рядів.

1. Нехай задана послідовність чисел

$$b,\ bq,\ bq^2,\ bq^3,...,bq^n,...,$$

які утворюють геометричну прогресію. Відомо, що сума **n** членів геометричної прогресії знаходиться за формулою

$$S_n = \frac{b\left(1-q^n\right)}{1-q}.$$

Якщо знаменник прогресії $|q|<1$, то прогресія спадна, і сума нескінченного числа її членів є не що інше, як ряд

$$b + bq + bq^2 + ... + bq^{n-1} + ...,$$

і знаходиться, як границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{b\left(1-q^n\right)}{1-q} = \left[|q|<1,\ \lim_{n\to\infty} q^n = 0\right] = \frac{b}{1-q} = S,$$

тобто послідовність, так званих часткових сум $S_1, S_2, S_3,..., S_n,...$ має своєю сумою число S, яке називається сумою ряду [25].

Окрім дослідження числових рядів на збіжність за допомогою границі частинних сум ряду існує й інший алгоритм.

1. Застосування необхідної ознаки збіжності ряду. Якщо необхідна умова виконується, то ряд може бути збіжним. В іншому випадку – ряд розбіжний.

2. Застосування будь-якої з достатніх умов. Якщо достатня умова виконується, то ряд збіжний, інакше – розбіжний.

Далі розглянемо важливі теореми, які дозволять досліджувати на збіжність різноманітні числові ряди. Наступні теореми будемо використовувати для дослідження одержаних рядів, побудованих за допомогою графіка функції $y = \frac{1}{2^{n-1}}x$ та квадрату зі стороною а=1, розташованому в системі координат Оху.

Необхідна умова збіжності ряду:

Теорема 1.1.

Для того щоб числовий ряд збігався, необхідно, щоб границя загального члена даного ряду при $n \to \infty$ дорівнювала нулю [17].

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{4n+1}\right)$.

Тут $U_n = \frac{5n+1}{4n+1}$. Оскільки $\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{4n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(5+\frac{1}{n}\right)}{n\left(4+\frac{1}{n}\right)} = \frac{5}{4} \neq 0$,

то даний ряд є розбіжним. [25]

Достатні умови збіжності ряду:

Теорема 1.2. (Ознака порівняння)

Нехай дано два знакододатних ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots$$

Якщо члени ряду a_n не більші за відповідні члени b_n збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $(a_n \leq b_n)$, то ряд $b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається.

Якщо члени ряду a_n більші або рівні відповідним членам b_n збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то ряд $a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається [44].

Приклад. Дослідити збіжність ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots .$

Розв'язання. 1. Оскільки $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2\cdot 2} < \frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{3\cdot 3} < \frac{1}{2\cdot 3}$, …, $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n\cdot n} < \frac{1}{(n-1)\cdot n}$, $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{(n+1)\cdot n}$, … то із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ (див. ряд (5) в 1.) за ознакою порівняння випливає збіжність ряду

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots ,$$

приписавши в останньому ряді спереду доданок 1, отримаємо початковий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, який збігається [25].

Теорема 1.3. (Ознака Даламбера)

Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$ додатні і відношення $n+1-$го члену до попереднього n-го має скінченну границю при n прямуючому до нескінченності $\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = k.$

1) Якщо $k < 1$, то ряд збіжний;

2) Якщо $k > 1$, то ряд розбіжний;

3) Якщо $k = 1$, то визначити неможливо [44].

Якщо виникає ситуація, в якій $\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = k$ і $k = 1$, то варто використати будь-яку іншу достатню умову збіжності числового ряду.

Приклади. Дослідити на збіжність ряди.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{5^n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$.

Розв'язання. 1. Згідно з ознакою Даламбера знаходимо $U_n=\frac{1}{n!}$;

$$U_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}=\frac{1}{n!\cdot(n+1)},$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!\cdot(n+1)}=0.$$

Поскільки $l<1$, то ряд збіжний.

2. $U_n=\frac{2n-1}{5^n}, U_{n+1}=\frac{2(n+1)-1}{5^{n+1}}=\frac{2n+1}{5^n\cdot 5}$, тому

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{5^n\cdot 5}\cdot\frac{5^n}{2n-1}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{5}<1.$$

Ряд збіжний.

3. $U_n=\frac{3^n\cdot n!}{n^n}, U_{n+1}=\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\frac{3\cdot 3^n\cdot(n+1)n!}{(n+1)\cdot(n+1)^n}$.

Тому

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3^n\cdot n!}{(n+1)^n}\cdot\frac{n^n}{3^n\cdot n!}=3\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{3}{e}>1$$ - ряд розбіжний [25].

Теорема 1.4. (Радикальна ознака Коші)

Якщо для ряду $a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ з додатними членами існує границя кореня n-го порядку $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k$, то при $k<1$ ряд збіжний, а при $k>1$ – розбіжний [44].

Теорема 1.5. (Інтегральна ознака Коші)

Нехай задано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots$, при цьому *f(x)* додатна, неперервна і монотонно спадна функція від $x \in [1; \infty]$.

1) Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збіжний, якщо невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ приймає скінченне значення;

2) Ряд розбіжний, коли інтеграл розбіжний. Під збіжністю інтегралу слід розуміти його обмеженість, тобто $\lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx \neq \infty$ [44].

Приклад. Дослідити збіжність ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ - узагальнений гармонічний ряд.

Розв'язання. 1. Для знаходження функції $f(x)$ замінимо у формулі загального члена U_n дискретну змінну n неперервною змінною x, отримаємо

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}.$$

Нехай $\underline{\alpha = 1}$, отримаємо гармонічний ряд, $f(x) = \frac{1}{x}$, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty} =$ $= \lim_{n\to\infty} \ln x - \ln 1 = \infty$ - інтеграл розбіжний, отже, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - розбіжний.

Нехай $\underline{\alpha > 1}$. Тоді $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{(\alpha-1)\cdot x^{\alpha-1}}\Big|_1^{\infty} =$ $= -\frac{1}{\alpha-1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha-1}$ - інтеграл збіжний, а отже, узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ - теж збіжний.

Нехай $\alpha < 1$. Тоді $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^{\infty} = [1-\alpha > 0] = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \infty$ - інтеграл розбіжний. Узагальнений ряд при $\alpha < 1$ - розбіжний [25].

При дослідженні числових рядів на збіжність часто доводиться спочатку перетворити «сігма-модель» ряду з метою виділити інший ряд під знаком суми, збіжність або розбіжність якого доведено раніше. Це пришвидшить процес дослідження рядів на збіжність. З цією метою розглянемо наступні властивості збіжних числових рядів:

1. Відкидання чи зміна скінченного числа членів ряду не впливає на його збіжність (розбіжність) [41, с. 260].

Дійсно, нехай ряд

$$\underbrace{U_1 + U_2 + \ldots + U_N}_{=A} + U_{N+1} + U_{N+2} + \ldots + U_{N+n} + \ldots \qquad (1)$$

є збіжним. Нехай в ньому сума N перших доданків $U_1 + U_2 + \ldots + U_N = A$. Відкинувши в (1) N перших доданків, отримаємо ряд

$$U_{N+1} + U_{N+2} + \ldots + U_{N+n} + \ldots \qquad (2)$$

Якщо часткова сума ряду (1)

$$S_{N+n} = U_1 + U_2 + \ldots + U_N + U_{N+1} + \ldots + U_{N+n},$$

а часткова сума ряду (2)

$$\sigma_n = U_{N+1} + U_{N+2} + \ldots + U_{N+n},$$

то ці суми пов’язані між собою $S_{N+n} = A + \sigma_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_{N+n} = A + \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$.

Останнє означає, що із збіжності ряду (1) випливає збіжність ряду (2), і навпаки [25].

Наслідок 1.1. Якщо з ряду відкинути кінцеве число його членів, то його збіжність не порушується; якщо вихідний ряд збіжний, то сума отриманого ряду буде менше суми початкового ряду на суму викинутих членів [7, с. 49]. Деякі математичні поняття з’явилися окремо по відношенню до теорії рядів, але застосовуються до рядів, в певному сенсі, і є інструментами для їх подальшого дослідження. В цьому разі має місце наступна теорема [7, с. 47 - 48]:

Приєднаємо до числа членів деякого ряду в якості нових членів довільну (може бути, нескінченну) кількість нулів, розмістивши їх між старими членами ряду довільним чином. У цьому випадку новий ряд буде збіжний тоді і тільки тоді, коли збіжний старий ряд, і сума нового ряду дорівнюватиме сумі старого.

Примітка 1.1. Про збіжність ряду судять по його членам. Однак, як було тільки що виявлено, збіжність ряду не залежить від будь-якого кінцевого числа членів ряду. Тому для встановлення збіжності (або розбіжність) ряду не обов'язково враховувати всі його члени. Досить обмежитися членами, починаючи з деякого місця або починаючи з деякого номера n [7, с. 49].

2. Якщо члени ряду помножити на деяку константу С, його збіжність не порушиться, сума множиться на С [10, с. 623].

3. Два збіжних ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з сумами $S1$ та $S2$ можна почленно додавати. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = S_1 + S_2$ [24, с. 20].

Наслідок 1.2. (теорема про віднімання рядів)

Якщо ряди:

$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$

і

$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \cdots$

Збіжні і мають суми s і t, то збігається ряд:

$u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + \cdots + u_n - v_n + \cdots$

і сума його дорівнює $s - t$ [12].

4. Якщо ряд збіжний, то його члени можна групувати за порядком їх послідовності. Отриманий ряд збігається і його сума дорівнює сумі вихідного ряду [30, с. 519].

1.3. Геометрична інтерпретація числових рядів

Геометрична інтерпретація – це спосіб представлення досліджуваного об’єкта в наочній формі, яка дозволяє помітити його властивості та містить інформацію, яка не спостерігається при аналітичному його записі. Такий спосіб дослідження теорії рядів може бути досить ефективним при розв’язуванні задач як прикладного так і теоретичного характеру, а також для можливості реалізації принципу наочності в дидактиці, зокрема, при вивченні розділу «Числові ряди» в рамках курсу «Математичний аналіз» [11].

Враховуючи попередні приклади легко бачити, що геометрична інтерпретація числових рядів в давні часи сприяла створенню поняття числового ряду у майбутньому. Таким чином італійський математик П’єтро Менголі у XVII ст. довів розбіжність гармонічного ряду за допомогою геометричної інтерпретації членів ряду як площ квадратів. Він дослідив квадрат зі стороною, рівною 1, потім поділив площу цього квадрату навпіл, цю половину знову поділив навпіл і т.д. (рис. 1.1)

Так отримався ряд виду

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots \text{або} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$$

З іншого боку даний числовий ряд являє собою геометричну прогресію, де перший член прогресії $a_1=1$, а знаменник $q=\frac{1}{2}$.

Більшість числових рядів можна інтерпретувати геометрично, що дасть змогу при проведенні занять з теми «числові ряди» використовувати принцип наочності. Розглянемо декілька прикладів інтерпретації числових рядів.

Приклад 1.

Нехай дано гармонічний ряд:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

Геометричну інтерпретацію членів гармонічного ряду можна реалізувати за допомогою площ геометричних фігур, вписаних в квадрат зі стороною, яка дорівнює 1[19].

Спочатку розглянемо множину прямокутників, вписаних у квадрат з одиничною стороною, які представлені на рис. 1.3 [19].

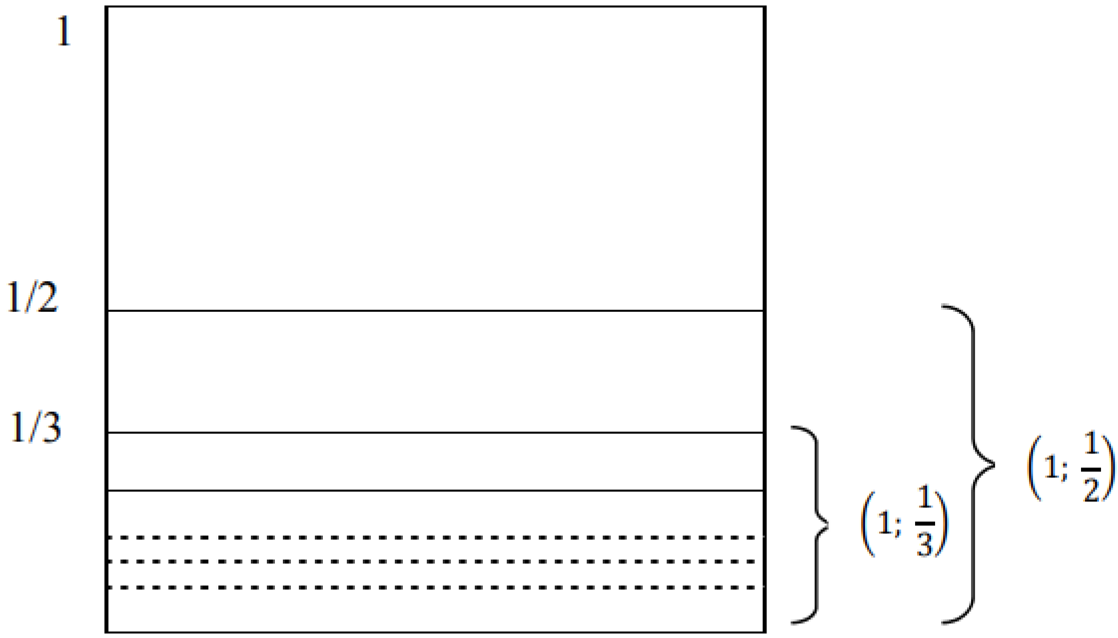

Рис. 1.3 множина прямокутників, вписаних у квадрат зі стороною 1

Відповідно до рис. 1.3 розглянемо нескінченну множину прямокутників, включно з квадратом, в який вони вписані (рис. 1.5).

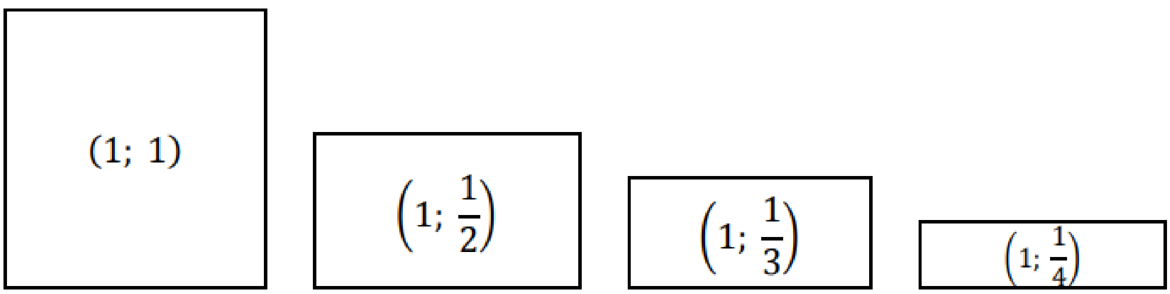

Рис. 1.4 Множина прямокутників з параметрами $\left(1;\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}$

Враховуючи, що n → ∞, розглядаємо нескінченну суму доданків, кожен з яких дорівнює площі відповідного прямокутника (рис. 1.4).

$$S(1;1)+S\left(1;\frac{1}{2}\right)+S\left(1;\frac{1}{3}\right)+\cdots+S\left(1;\frac{1}{n}\right)+\cdots$$

Сума площ еквівалентна сумі членів гармонічного ряду , тому що $\forall n \in \mathbb{N}, n=\overline{1,\infty}$ виконується рівність

$$S\left(1;\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$$

Розглянута геометрична інтерпретація членів гармонічного ряду дає можливість наочно побачити, що зі зростанням n до ∞, площа $S\left(1;\frac{1}{n}\right)$ прямує до 0 [19].

Побудову і дослідження числових рядів, пов’язаних з елементами квадрата «танграм» розглядала у своїй магістерській роботі Комарова А. А. під керівництвом кандидата технічних наук, професора Корольського В. В. Розглянемо один зі способів генерації числових рядів за допомогою квадрату «танграм», а саме генерацію числових рядів за допомогою танграмів та описаних кіл.

Розглянемо танграм T=ABCD (рис. 1.5). Навколо цього танграма опишемо коло K = коло(M; AM). В квадрат KLMN, який є елементом танграма T, впишемо танграм $T_1 = A_1B_1C_1D_1$, навколо якого в свою чергу також опишемо коло K_1 = коло(M_1; A_1M_1). Припускаємо, що дана процедура виконується нескінченну кількість разів [18].

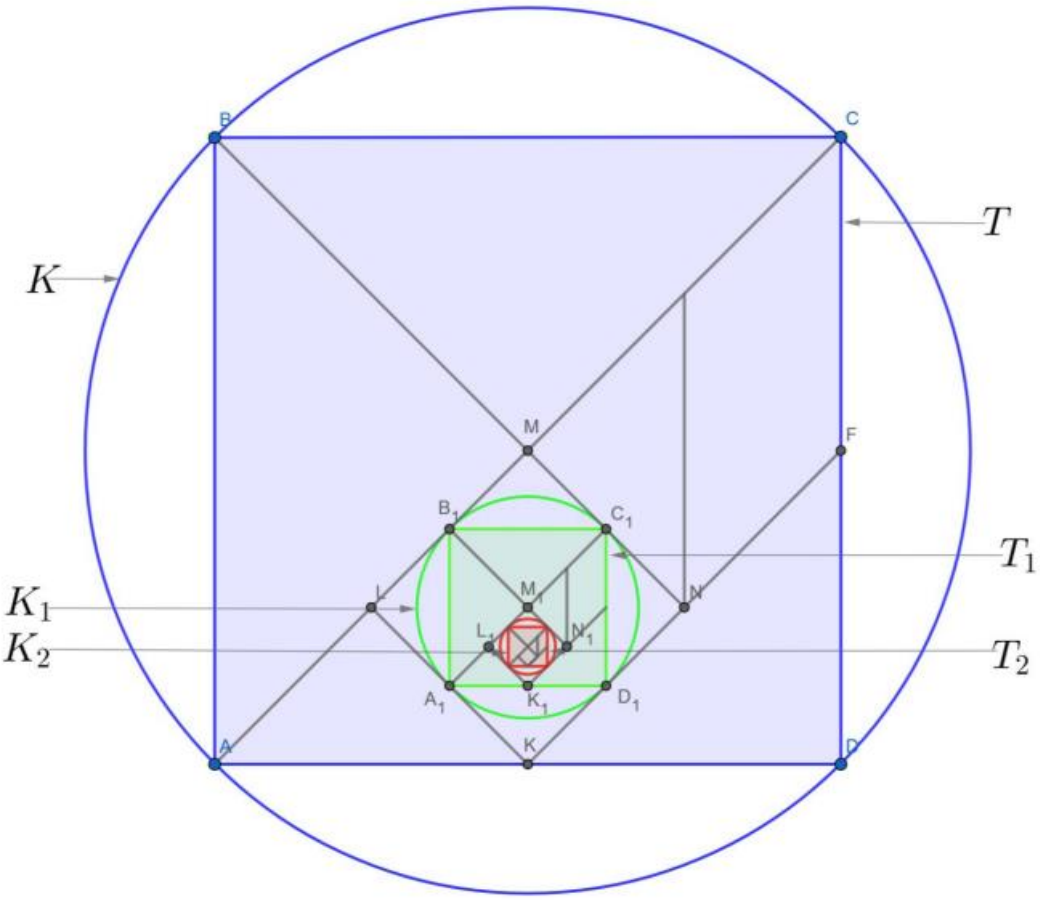

Рис. 1.5. Кола, описані навколо танграмів

Завдання полягало у побудові наступних рядів:

1. Ряду сторін танграмів Tn.

2. Ряду діагоналей танграмів Tn.

3. Ряду площ танграмів Tn.

4. Ряду радіусів описаних кіл Kn.

5. Ряду діаметрів описаних кіл Kn.

6. Ряду довжин описаних кіл Kn.

7. Ряду площ описаних кіл Kn.

8. Ряду відношень відповідних сторін танграмів Tn до радіусів описаних кіл K .

9. Ряду відношень відповідних радіусів описаних кіл Kn до довжин сторін танграмів Tn.

10. Ряду відношень відповідних площ кіл Kn до площ танграмів Tn [18].

Генерацію числових рядів за допомогою квадрату розглядала Романова А. М. у своїй дипломній роботі під керівництвом кандидата технічних наук, професора Корольського В. В.

Нехай навколо квадрата описано квадрат таким чином, що вершини першого квадрата лежать на серединах сторін другого квадрата, в свою чергу навколо другого квадрат аналогічно побудований третій квадрат і т.д (рис. 1.6) [34].

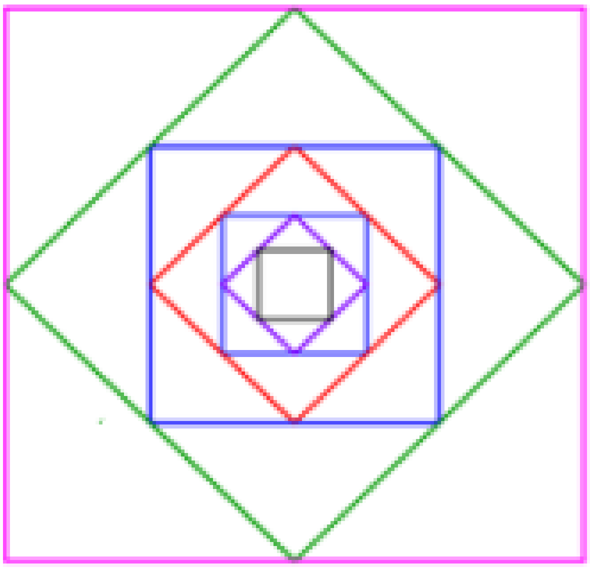

Рис. 1.6. Вписані квадрати

З умови цієї задачі ми можемо згенерувати такі задачі:

1. Побудова ряду значень сторін квадрата.

2. Побудова ряду значень площ квадрата.

3. Побудова ряду периметрів квадратів [34].

Геометричну інтерпретацію числових рядів, що пов'язані з геометричною прогресією наводила у своїй кваліфікаційній роботі Габ С. С. під керівництвом кандидата технічних наук, професора Корольського В. В.

Лінійну, квадратурну та куботурну інтерпретацію числових рядів можна розглянути за допомогою великої кількості геометричних об'єктів. Розглянемо приклади числових рядів пов'язаних з нескінченно спадною геометричною прогресією, знаменники якої відповідно дорівнюють: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; для таких геометричних об'єктів як квадрат та куб [11].

Приклад 2.9. Розглянемо квадрат зі стороною $a_1 = 1$. Розіб'ємо сторону даного квадрату навпів, отримаємо квадрат зі стороною $a_2 = \frac{1}{2}$. Продовжимо даний процес для всіх наступних квадратів, зі сторонами, які вдвічі менші за сторони попередніх квадратів. На подальших кроках міркувань запишемо:

$a_3 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$; $a_4 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$; $a_k = \frac{1}{2^n}$; ... .

Отримаємо послідовність вкладених квадратів (рис. 1.7) зі сторонами:

1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2^2}$; $\frac{1}{2^3}$; ... $\frac{1}{2^n}$; ... , та послідовність вкладених кубів (рис. 1.8.):

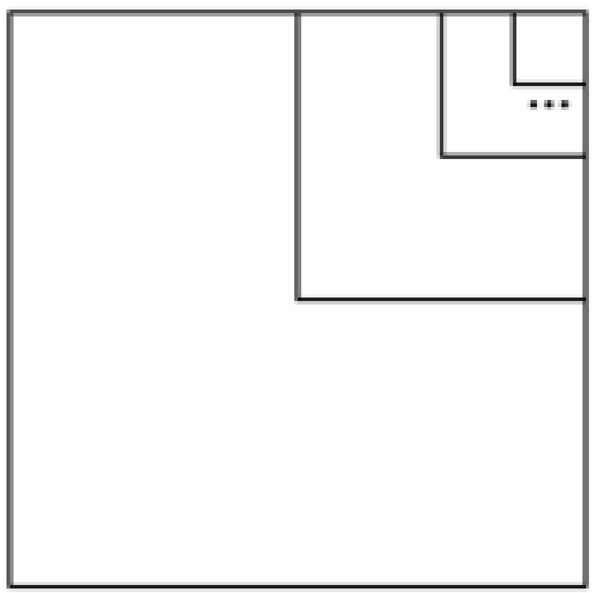

Рис. 1.7. вкладені квадрати

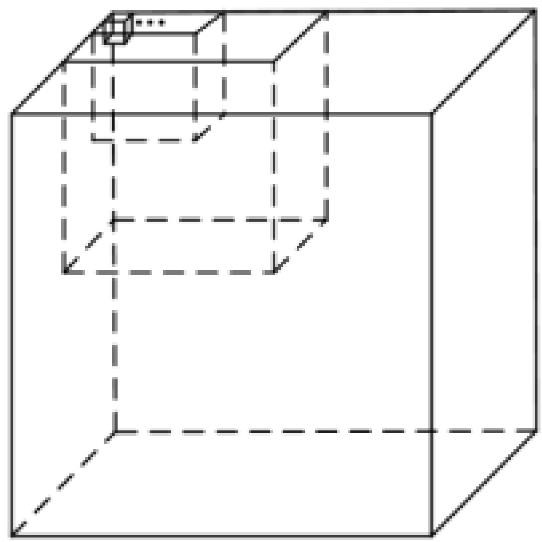

Рис. 1.8. вкладені куби

Знайдемо суму членів послідовності та отримаємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

який є одним із варіантів представлення лінійної геометричної інтерпретації числового ряду [8].

Знайдемо площі розглянутих вкладених квадратів за формулою $S = a^2$, отримаємо:

$S_1 = a_1^2 = 1^2 = 1$; $S_2 = a_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$; ... $Sn = a_n^2 = \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{2^{2n}}$ ...;

Знайдемо суму членів послідовності та отримаємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}$$

Розглянутий ряд демонструє один із варіантів представлення квадратурної геометричної інтерпретації. Покажемо кубатурну геометричну інтерпретацію числового ряду. По аналогії, будемо розглядати послідовність вкладених кубів, сторони яких є вдвічі меншими від попередньої ітерації, і відповідно мають вид:

$$a_1 = 1;\ a_2 = \frac{1}{2}\ ;\ a_3 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}\ ;\ \dots\ ;\ a_k = \frac{1}{2^n}\ ;\ \dots$$

Знайдемо об'єми для вкладених кубів за формулою: $V = a^3$, і отримаємо наступні результати:

$$V_1 = a_1^3 = 1^3 = 1;\ V_2 = a_1^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3}\ ;\ V_3 = a_3^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{2^6}\ ;\ \dots\ V_k = a_k^3 = \left(\frac{1}{2^n}\right)^3 = \frac{1}{2^{3n}}\ ;\dots$$

Знайдемо суму членів послідовності та отримаємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}}$ [8].

Висновки до розділу 1.

1. Проаналізувавши наукову літературу з теми «числові ряди» вітчизняних та зарубіжних авторів можна прийти до висновку, що точна дата виникнення числових рядів нам невідома, як і періодизація їх розвитку. Проте слід акцентувати на тому, що у стародавньому Єгипті та Греції вже існували певні поняття арифметичної і геометричної прогресії, проте не у звичному нам вигляді. А отже і початкові відомості про числові ряди існували у V ст. до н.е.

2. Формуванням теорії рядів у свої часи займались такі вчені: Ейлер, Гаус, Броункер, Кестнер, Менгорі, Коші, Даламбер тощо.

У XVIII-XIX ст. виникла необхідність формулювання достатніх умов збіжності рядів для подальшого їх дослідження, що і суттєво вплинуло на розвиток теорії рядів.

3. Наведено основні поняття теорії числових рядів. Розглянуті наступні важливі теореми: необхідна умова збіжності ряду, ознака порівняння (достатня умова), ознака Даламбера, радикальна ознака Коші, інтегральна ознака Коші. Наведено приклади використання вищезазначених теорем.

4. Було розглянуто приклади геометричної інтерпретації числових рядів.

РОЗДІЛ 2. ГЕНЕРАЦІЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

2.1. Генерація рядів із лінійною геометричною інтерпретацією за допомогою функції $y = \frac{1}{2^{n-1}}x$ і квадрата зі стороною a=*1*.

Розглянемо квадрат $OA_1B_1C_1$ зі стороною $a = 1$, побудований в системі координат Оху. Сторони квадрата розбиваються на відрізки $|B_n\ B_{n+1}|$ і відповідно $|A_n\ A_{n+1}|$ за допомогою функції $y = \frac{1}{2^{n-1}}x$ точками $(1; \frac{1}{2^{n-1}})$ і відповідно точками $(\frac{1}{2^{n-1}}; 0)$.

Геометрична інтерпретація числових рядів дає змогу наочно продемонструвати та пояснити як формуються ряди. Маючи квадрат зі стороною а=1, що розміщений у системі координат Оху, функцію $y = \frac{1}{2^{n-1}}x$ та допоміжні точки, що лежать у площині квадрату, маємо змогу побудувати сігма-моделі деяких числових рядів із лінійною геометричною інтерпретацією, дослідити одержані ряди на збіжність, знайти частинні суми для варіацій n=1000, n=5000, n=25000, n=100000 та показати за допомогою графіків динаміку зміни частинних сум в залежності від величини параметра n.

Генерувати числові ряди із лінійною геометричною інтерпретацією будемо за допомогою побудови додаткових елементів, що лежать у межах квадрату за стороною $a = 1$(Рис. 2.1).

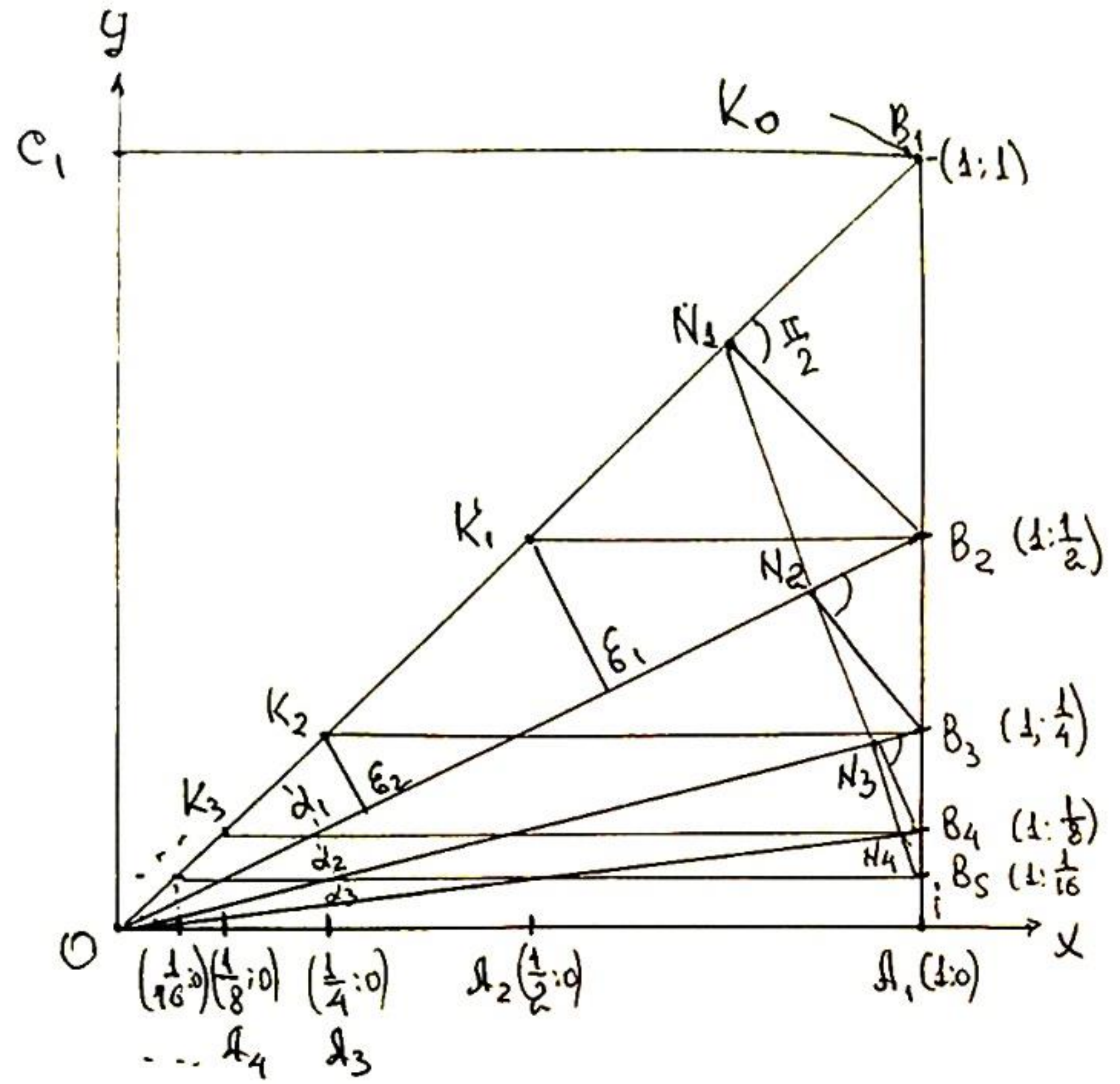

Рис. 2.1. Квадрат зі стороною а=1.

Складемо наступні числові ряди:

1. Ряд довжин відрізків $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{|B_n B_{n+1}|}$ (Рис. 2.1.1).

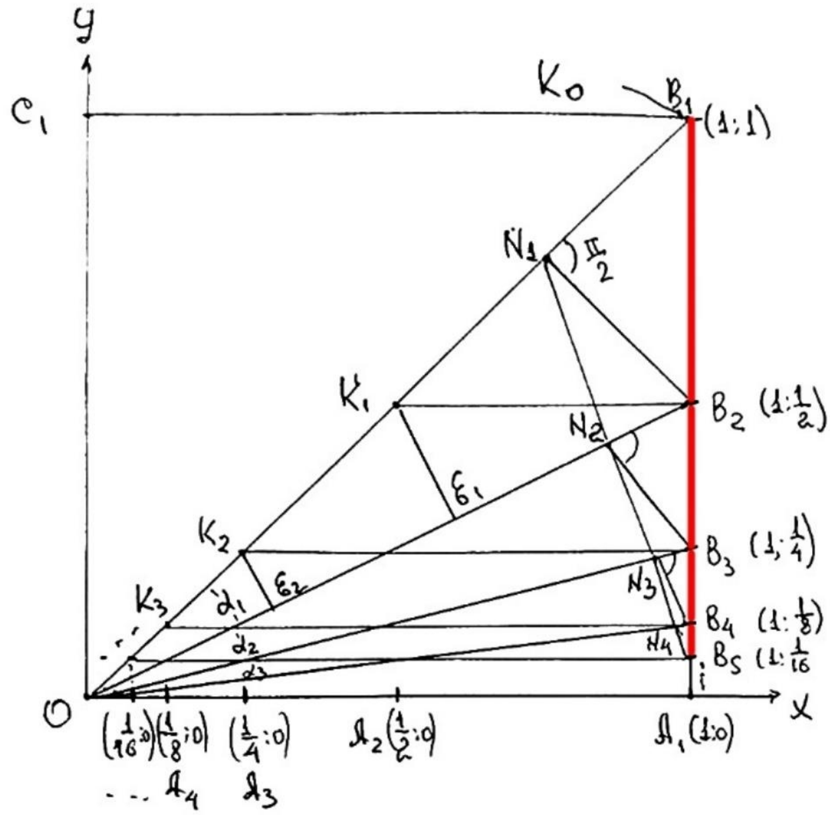

Рис. 2.1.1. Відрізки виду B_nB_{n+1}

Точки B_n та B_{n+1} є точками розбиття сторони A_1B_1 квадрата $OA_1B_1C_1$. Виходячи з того, що кожна точка задана своїми координатами, будемо знаходити довжину відрізків, що утворились за допомогою формули відстані між двома точками: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

$$|B_1B_2| = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2};$$

$$|B_2B_3| = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2};$$

$$|B_3B_4| = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3};$$

Отримаємо числову послідовність $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$ в якій кожне наступне число більше попереднього у $\frac{1}{2}$ разів.

Отже маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ (1)$$

Дослідимо одержаний ряд на збіжність.

Перевіримо виконання необхідної умови:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \left[\frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty}\right] = 0;$$

Необхідна умова виконується, отже ряд може бути збіжним.

Використаємо достатню умову збіжності ряду, а саме ознаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$k = \frac{1}{2} < 1.$$

Оскільки k<1, то за ознакою Даламбера ряд збіжний.

Частинні суми для різних варіацій n будемо шукати за допомогою програми-алгоритму, написаної мовою програмування С. Додамо до заданих варіацій n для наступні значення: n=2, n=5, n=10 для більшої точності (Додаток А). Після запуску алгоритму одразу отримуємо частинні суми ряду для n=2, n=5, n=10, n=1000, n=5000, n=25000, n=100000 (рис. 2.2).

```
n=2; s=0.750000
n=5; s=0.968750
n=10; s=0.999023
n=1000; s=1.000000
n=5000; s=1.000000
n=25000; s=1.000000
n=100000; s=1.000000
```

Рис. 2.2. Результат виконання програми-алгоритму пошуку частинних сум заданого ряду.

Побудуємо графік залежності частинних сум від значення n (Рис. 2.3).

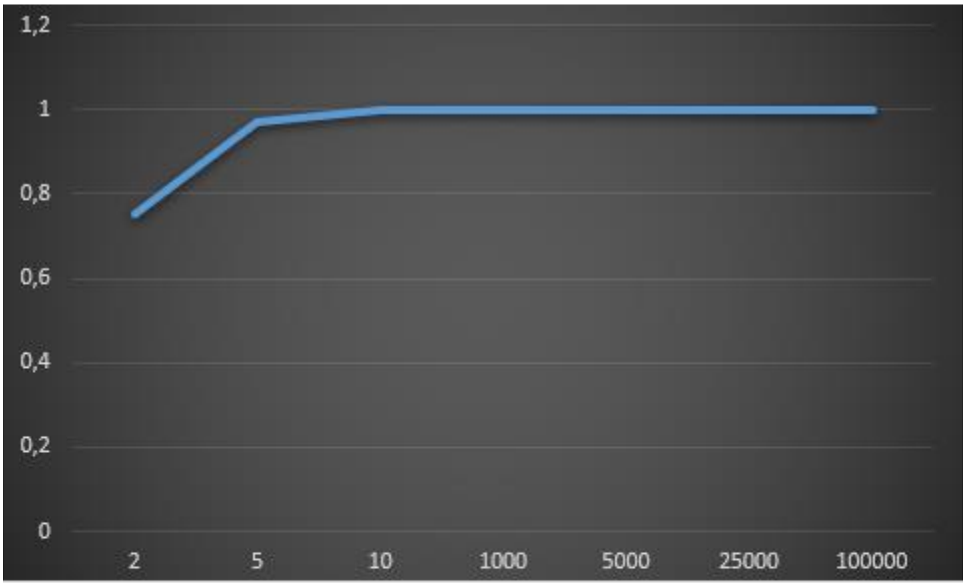

Рис. 2.3. Графік залежності S_n від n

В залежності від зростання кількості членів ряду n зростає значення частинної суми S_n, при цьому S_n прямує до 1. Отже чим більше значення n, тим ближче до одиниці буде значення S_n. За означенням суми ряду можна зробити висновок, що число 1, до якого прямує послідовність частинних сум заданого ряду і буде сумою ряду S.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Зрозуміло, що при цьому значення членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ з кожним наступним значенням n зменшується, оскільки $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \left[\frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty}\right] = 0.$

2. Ряд довжин відрізків $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{|OB_n|}$ (Рис. 2.1.2).

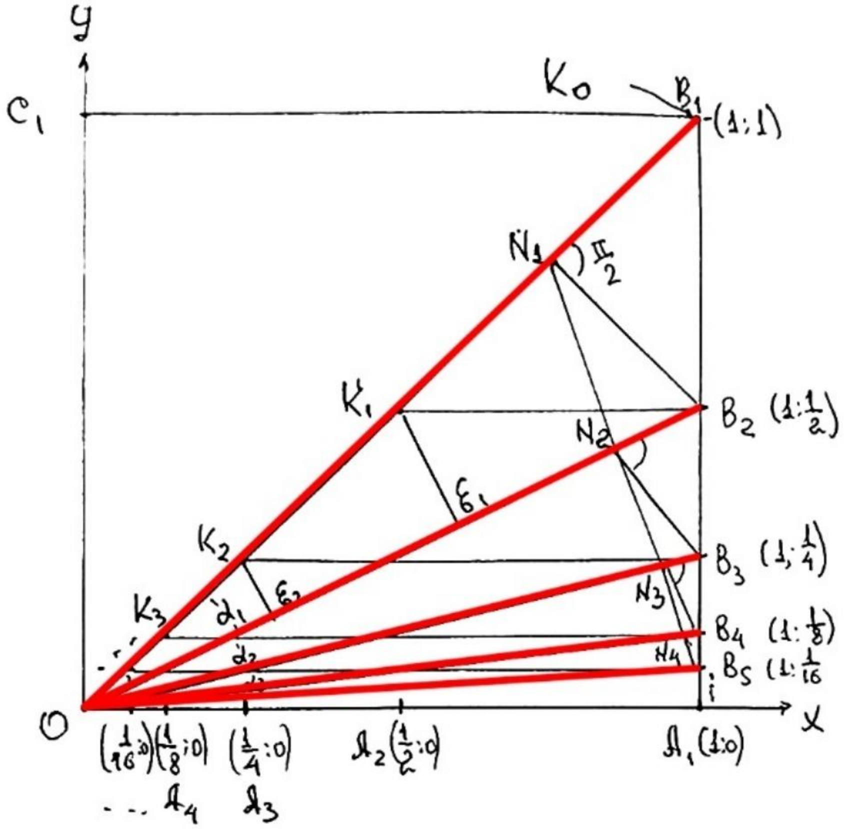

Рис. 2.1.2. Відрізки виду OB_n

По аналогії зі складанням попереднього числового ряду використаємо формулу відстані між двома точками: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

$$|OB_1| = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2};$$

$$|OB_2| = \sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{1+2^2}}{2};$$

$$|OB_3| = \sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{1}{4} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{1+2^4}}{2^2};$$

$$|OB_4| = \sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{1}{8} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{65}{64}} = \frac{\sqrt{65}}{8} = \frac{\sqrt{1+2^6}}{2^3};$$

Отримаємо числову послідовність:

$$\sqrt{2}, \qquad \frac{\sqrt{1+2^2}}{2}, \qquad \frac{\sqrt{1+2^4}}{2^2}, \qquad \frac{\sqrt{1+2^6}}{2^3}, \dots$$

Шуканий ряд має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+2^{2n-2}}}{2^{n-1}} \ (2)$$

Дослідимо отриманий ряд на збіжність.

Необхідна умова:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+2^{2n-2}}}{2^{n-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2^{2n-1}\left(\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2}\right)}}{\frac{2^n}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\sqrt{\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2}}}{2^n \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\sqrt{0+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\right] = \sqrt{2} \approx 1{,}4;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+2^{2n-2}}}{2^{n-1}} \approx 1{,}4 \neq 0.$$

Необхідна умова збіжності для ряду не виконується. Ряд розбіжний.

3. Ряд довжин відрізків $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{|K_n B_{n+1}|}$ (рис. 2.1.3).

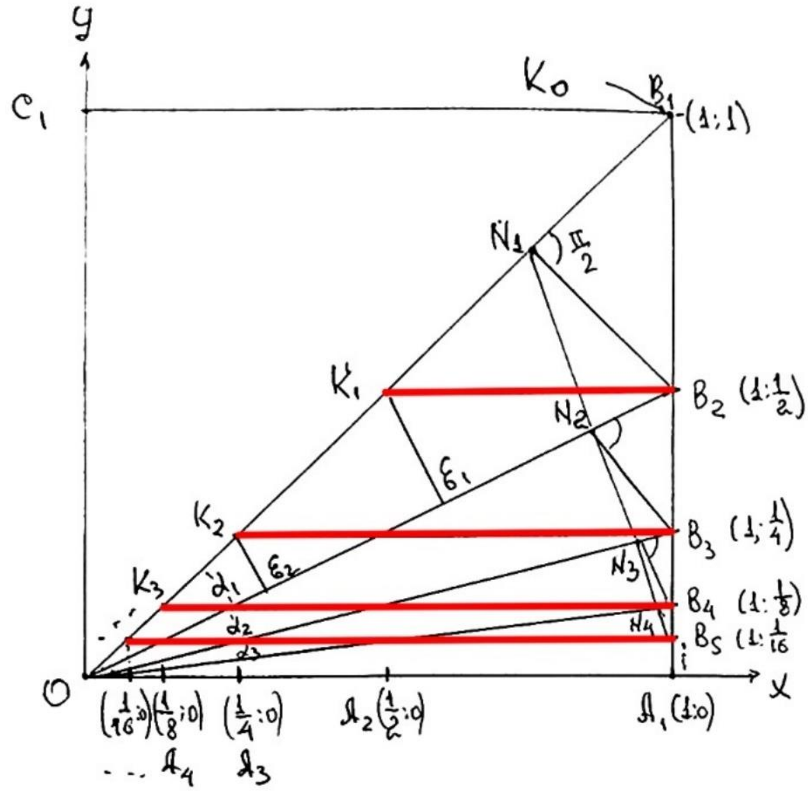

Рис. 2.1.3. Відрізки виду $K_n B_{n+1}$

Розглянемо трикутник $K_1B_2B_1$: $\angle K_1B_2B_1 = 90°$. Оскільки OB_1 – діагональ квадрата $OA_1B_1C_1$, то $\angle K_1B_1B_2 = 45°$. Отже за сумою кутів трикутника $\angle B_1K_1B_2 = 180° - 90° - 45° = 45°$.

Маємо $\angle B_1K_1B_2 = \angle K_1B_1B_2 = 45°$, тому $\Delta\, K_1B_2B_1$ – рівнобедрений, а отже $K_1B_2 = \ B_1B_2 = \ \frac{1}{2}$.

Аналогічно $K_2B_3 = \ B_2B_3 = \ \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$, $K_3B_4 = \ B_3B_4 = \ \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$.

Отримаємо числову послідовність $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots$ в якій кожне наступне число більше попереднього у $\frac{1}{2}$ разів.

Отже маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad (3)$$

Аналогічно до ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{|B_nB_{n+1}|}$ робимо висновок, що ряд збіжний. Його сума буде дорівнювати 1.

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

4. Ряд довжин відрізків $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{|N_nB_{n+1}|}$ (Рис. 2.1.4)

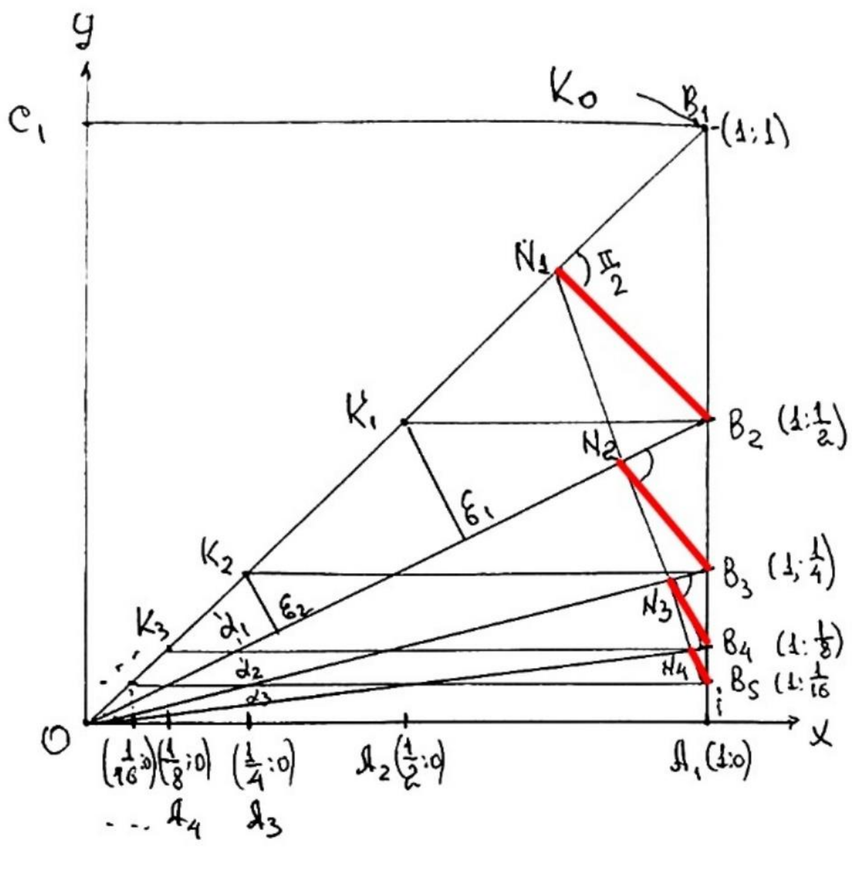

Рис. 2.1.4. Відрізки виду N_nB_{n+1}

Розглянемо трикутники виду OB_nA_1:

$$\sin\angle OB_nA_1=\frac{OA_1}{OB_n}=\frac{1}{\frac{\sqrt{1+2^{2n-2}}}{2^{n-1}}}=\frac{2^{n-1}}{\sqrt{1+2^{2n-2}}};$$

Розглянемо трикутники виду $N_nB_nB_{n+1}$:

$$\sin \angle OB_nA_1 = \frac{N_nB_{n+1}}{B_nB_{n+1}};$$

$$N_nB_{n+1} = B_nB_{n+1} \cdot \sin \angle OB_nA_1 = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2^{n-1}}{\sqrt{1+2^{2n-2}}} = \frac{1}{2\sqrt{1+2^{2n-2}}};$$

Отже ряд буде мати вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{1+2^{2n-2}}} \quad (4)$$

Дослідимо його на збіжність.

Необхідна умова збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{1+2^{2n-2}}} = \left[\frac{1}{2\sqrt{1+2^{\infty}}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0\right] = 0.$$

Ряд може бути збіжним.

За ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{1+2^{2(n+1)-2}}} \cdot 2\sqrt{1+2^{2n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+2^{2n-2}}}{\sqrt{1+2^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2^{2n}(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{4})}}{\sqrt{2^{2n}(\frac{1}{2^{2n}}+1)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\sqrt{(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{4})}}{2^n\sqrt{(\frac{1}{2^{2n}}+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{4})}}{\sqrt{(\frac{1}{2^{2n}}+1)}}$$

$$= \left[\frac{\sqrt{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{4}}}{\sqrt{\frac{1}{\infty}+1}} = \frac{\sqrt{0+\frac{1}{4}}}{\sqrt{0+1}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{1} = \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} = k;$$

$$k = \frac{1}{2} < 1.$$

За ознакою Даламбера ряд збіжний.

Знайдемо частинні суми даного ряду для варіацій n=2, n=5, n=10, n=1000, n=5000, n=25000, n=100000 за допомогою програми-алгоритму (Додаток Б).

```
n=2; s=0.577160
n=5; s=0.791635
n=10; s=0.821899
n=1000; s=0.822876
n=5000; s=0.822876
n=25000; s=0.822876
n=100000; s=0.822876
```

Рис. 2.4. Алгоритм-програма пошуку частинних сум ряду (4)

Як бачимо, для n ≥ 1000 частинні суми однакові (рис. 2.4). це пов'язано із тим, що із збільшенням значення кількості доданків n зменшується значення члена ряду. При n ≥ 1000 кожний наступний доданок настільки малий, що програма сприймає його за 0. Побудуємо графік залежності частинних сум від кількості доданків (рис. 2.5).

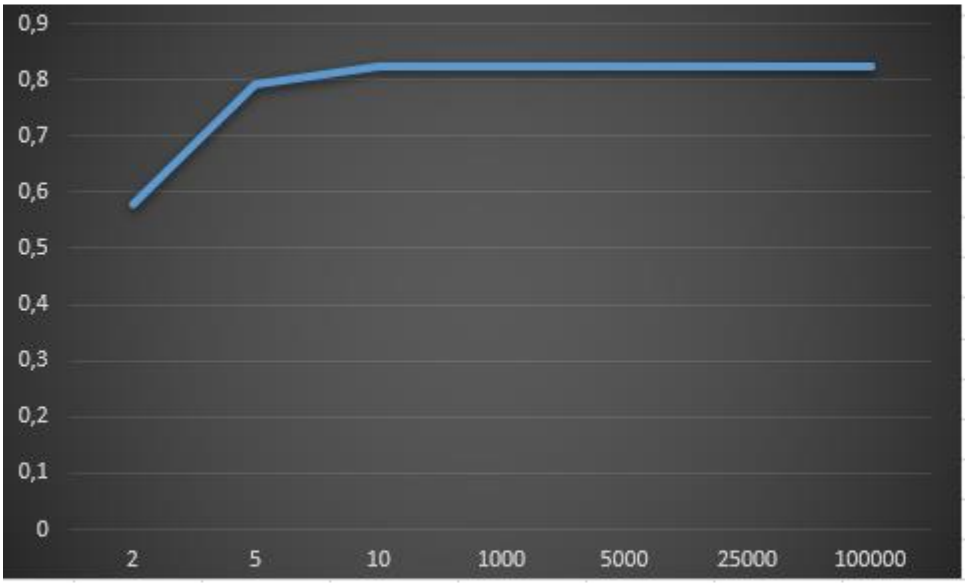

Рис 2.5. Графік залежності S_n від n для ряду (4)

Як і в попередньому випадку, послідовність частинних сум збігається до одного числа. Це число – сума збіжного ряду.

$$S \approx 0{,}823.$$

5. Ряд довжини відрізків $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{|N_n B_n|}$ (Рис. 2.1.5)

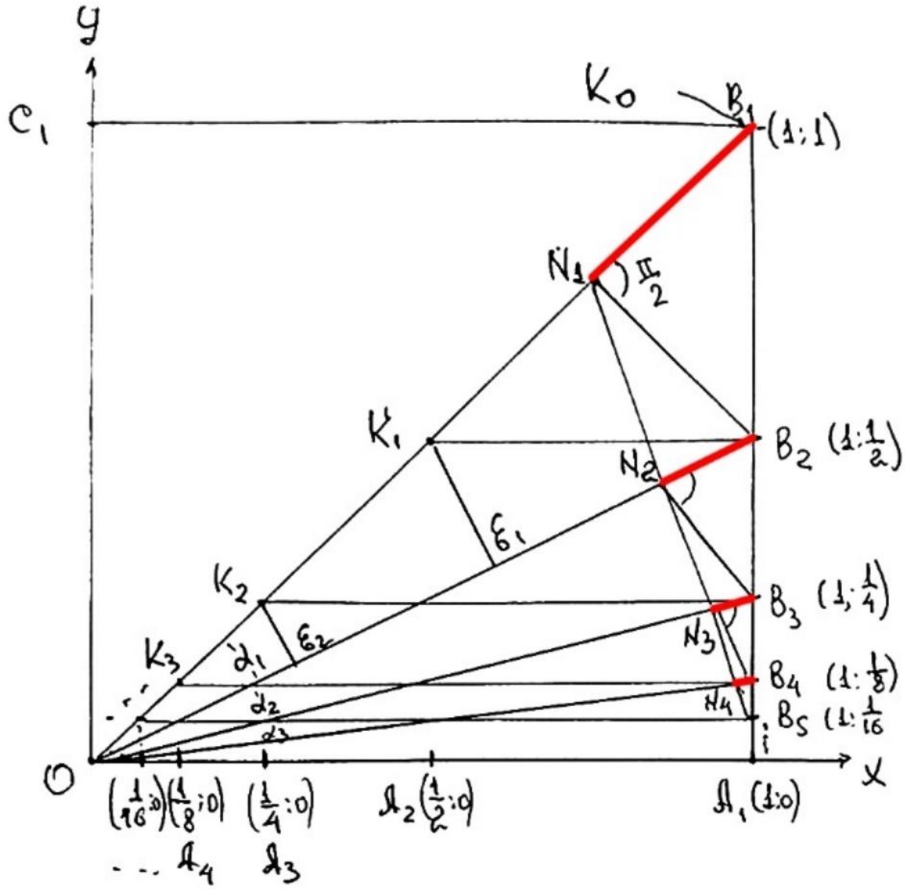

Рис. 2.1.5. Відрізки виду$N_n B_n$

Розглянемо трикутники виду OB_nA_1:

$$\cos\angle OB_nA_1 = \frac{A_1B_n}{OB_n} = \frac{\frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{\sqrt{1+2^{2n-2}}}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{2^{n-1}}{\sqrt{1+2^{2n-2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+2^{2n-2}}};$$

Розглянемо трикутники виду $N_nB_nB_{n+1}$:

$$\cos\angle OB_nA_1 = \frac{N_nB_n}{B_nB_{n+1}};$$

$$N_nB_n = B_nB_{n+1} \cdot \cos\angle OB_nA_1 = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2^{2n-2}}} = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+2^{2n-2}}};$$

Отже ряд буде мати вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+2^{2n-2}}} \quad (5)$$

Дослідимо ряд на збіжність.

Необхідна умова:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+2^{2n-2}}} = \left[\frac{1}{2^{\infty}\sqrt{1+2^{\infty}}} = \frac{1}{\infty\sqrt{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0\right] = 0.$$

Ряд може бути збіжним.

Для встановлення факту збіжності ряду застосуємо ознаку порівняння. Порівнювати будемо загальний член заданого ряду $\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+2^{2n-2}}}$ із загальним членом ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{1+2^{2n-2}}}$, збіжність якого доведено вище.

$$\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+2^{2n-2}}} \quad \text{і} \quad \frac{1}{2\sqrt{1+2^{2n-2}}};$$

Помножимо ліву і праву частину на вираз $\sqrt{1+2^{2n-2}}$, після скорочення отримаємо:

$$\frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{і} \quad \frac{1}{2};$$

Очевидно, що знаменник першого дробу більший за знаменник другого. З цього можна зробити висновок, що перший дріб менший за другий.

$$\frac{1}{2^{n-1}} \quad < \quad \frac{1}{2};$$

За ознакою порівняння, оскільки загальний член першого ряду менший за загальний член другого ряду, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+2^{2n-2}}}$ – збіжний.

Знайдемо суму для збіжного ряду (5).

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{4\sqrt{17}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+2^{2n-2}}};$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \approx 0{,}8.$$

6. Довжини відрізків $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{|ON_n|}$ (Рис 2.1.6).

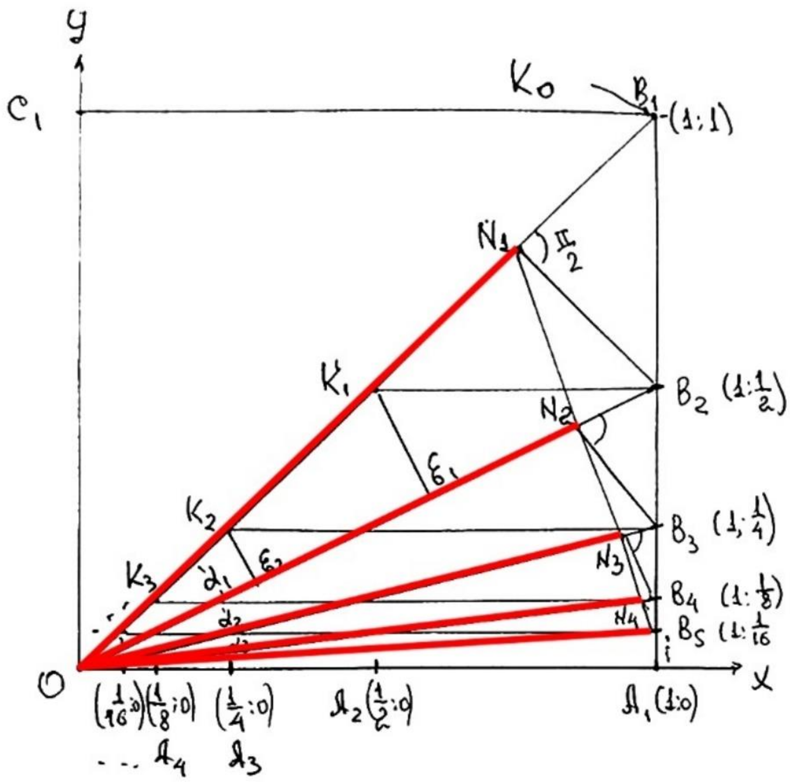

Рис. 2.1.6. Відрізки виду ON_n

Оскільки ON_n – частини відрізків OB_n, тому будемо знаходити за формулою $ON_n = OB_n - N_nB_n$;

$$ON_n = \frac{\sqrt{1+2^{2n-2}}}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+2^{2n-2}}} = \frac{1+2^{2n-2}-1}{2^{n-1}\sqrt{1+2^{2n-2}}} = \frac{2^{2n-2}}{2^{n-1}\sqrt{1+2^{2n-2}}}$$

$$= \frac{2^{n-1}}{\sqrt{1+2^{2n-2}}};$$

Отже ряд буде мати вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{\sqrt{1+2^{2n-2}}} \quad (6)$$

Одержаний ряд досліджуємо на збіжність:

Необхідна умова:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}}{\sqrt{1+2^{2n-2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{2^{2n}(\frac{1}{2^{2n}}+2^{-2})}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot \frac{1}{2}}{2^n\sqrt{(\frac{1}{2^{2n}}+2^{-2})}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(\frac{1}{2^{2n}}+2^{-2})}} = \left[\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1\right] = 1 \neq 0;$$

Ряд розбіжний.

Знайдемо частинні суми для розбіжного ряду. Для цього змінимо в програмі формулу розрахунку члена числового ряду (Додаток В).

```
n=2; S=1.601534
n=5; S=4.562007
n=10; S=9.561357
n=1000; S=511.561356
n=5000; S=-nan
n=25000; S=-nan
n=100000; S=-nan
```

Рис. 2.6. Частинні суми ряду (6)

Як бачимо для варіацій n ≥ 5000 програма не може розрахувати частинну суму ряду (рис. 2.6). Розглянемо графік залежності частинних сум від кількості членів ряду (рис. 2.7).

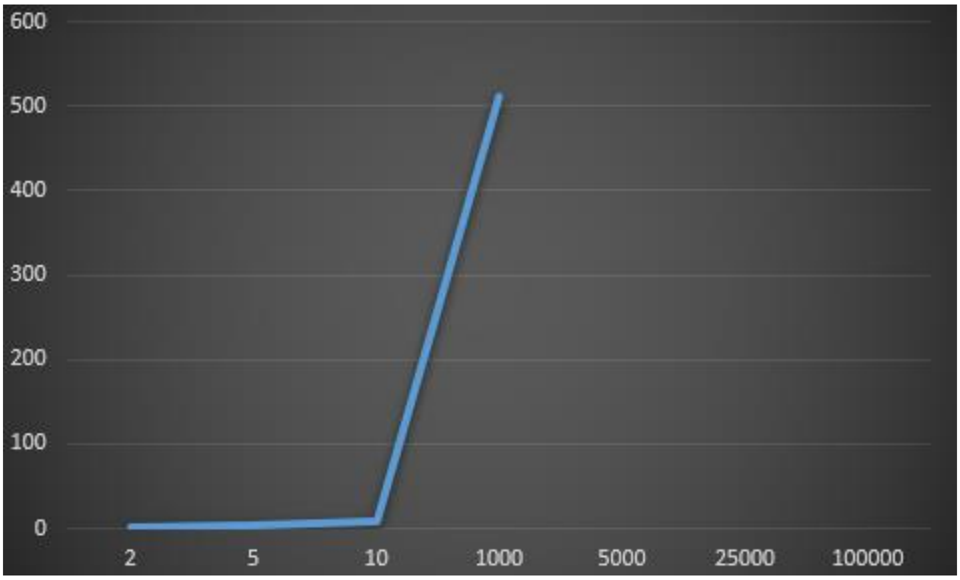

Рис. 2.7. Графік залежності S_n від n для ряду (6)

Як бачимо, послідовність частинних сум постійно зростає. Оскільки ряд розбіжний, то і сума цього ряду прямує до нескінченності.

7. Ряд довжин відрізків $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{|K_{n-1}K_n|}$ (Рис. 2.1.8).

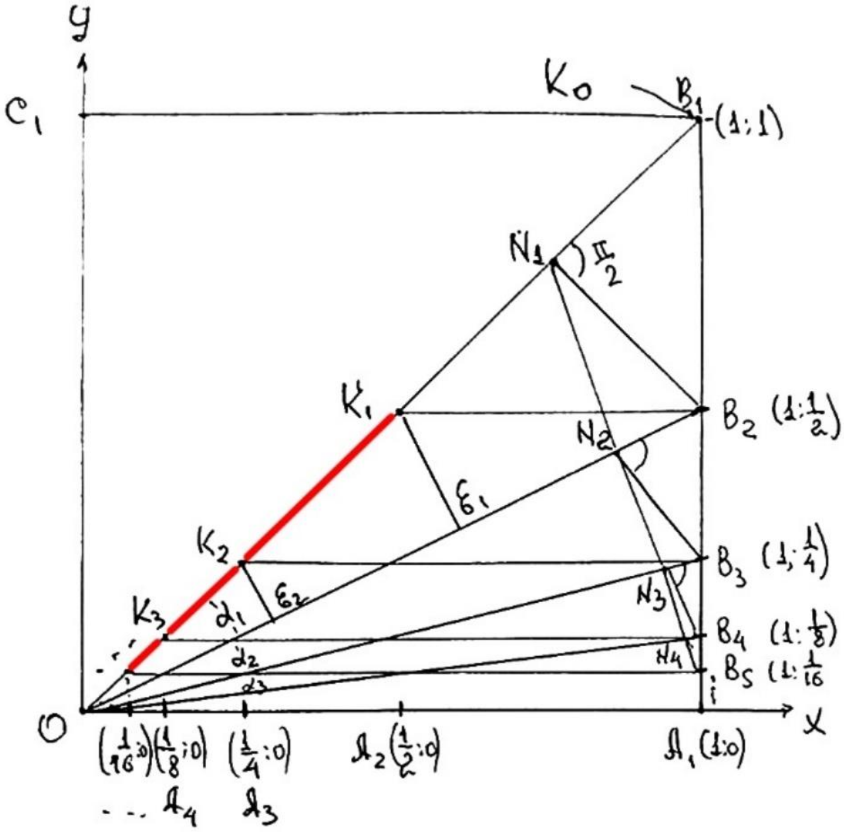

Рис. 2.1.8 Відрізки виду $K_{n-1}K_n$

Оскільки точка K_0співпадає з точкою B_1, то OK_0 – діагональ квадрата $OA_1B_1C_1$. Тоді K_1 – середина OK_0, K_2 – середина OK_1, K_3 – середина OK_2 і так далі.

Отже

$$K_0K_1 = \frac{1}{2}OK_0 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$K_1K_2 = \frac{1}{2}K_0K_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2^2};$$

$$K_2K_3 = \frac{1}{2}K_1K_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2^2} = \frac{\sqrt{2}}{2^3};$$

Отримаємо послідовність виду $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2^2}, \frac{\sqrt{2}}{2^3}, \ldots$

Отже ряд буде мати вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2^n} \quad (7)$$

За властивістю суми можемо записати цей ряд у наступному вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2^n} = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} ;$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ є збіжним, що доведено вище, то за властивістю рядів і ряд виду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2^n}$ також буде збіжним.

Знаючи суму ряду (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ знайдемо суму ряду (7). Отримаємо:

$$S = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2} \approx 1{,}4.$$

8. Довжини відрізків виду $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{|K_n \mathcal{E}_n|}$ (Рис. 2.1.9).

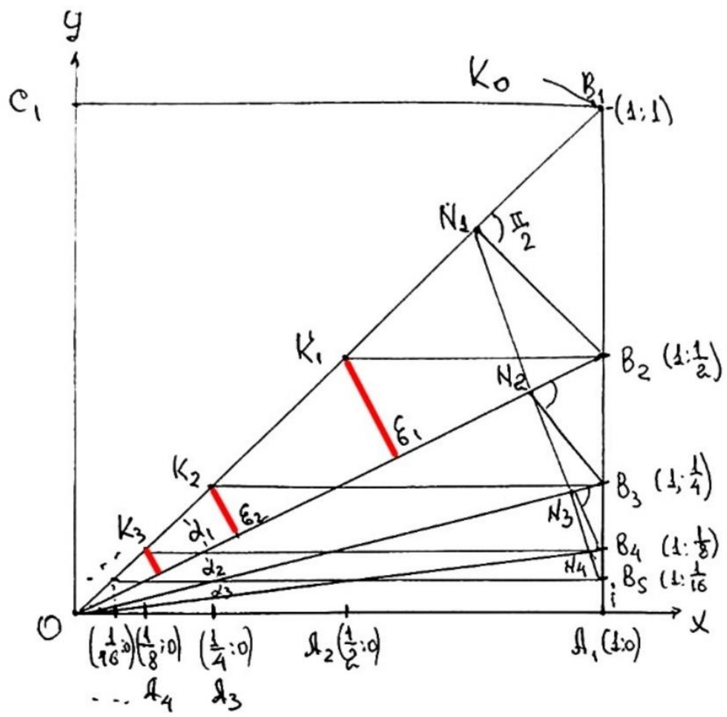

Рис. 2.1.9 відрізки виду $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{|K_n \mathcal{E}_n|}$

Розглянемо прямі $K_1\mathcal{E}_1$ та OB_2: $K_1\mathcal{E}_1 \perp OB_2$.

Оскільки прямі перпендикулярні, то їх кутові коефіцієнти зв'язані формулою:

$$k_{K_1\mathcal{E}_1} \cdot k_{OB_2} = -1;$$

Рівняння прямої OB_2 буде мати вигляд:

$$y = \frac{1}{2}x;$$

Знайдемо $k_{K_1\mathcal{E}_1}$:

$$k_{K_1\mathcal{E}_1} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2;$$

Складемо рівняння прямої $K_1\mathcal{E}_1$ як рівняння прямої, що проходить через задану точку $K_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ із заданим кутовим коефіцієнтом $k_{K_1\mathcal{E}_1} = -2$:

$$y - \frac{1}{2} = -2\left(x - \frac{1}{2}\right);$$

$$y = -2x + \frac{3}{2};$$

Координати точки $\mathcal{E}_1$ знайдемо таким чином:

$$\frac{1}{2}x = -2x + \frac{3}{2};$$

$$x = \frac{3}{5};\ \ y = -2 \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{2} = \frac{3}{10}.$$

Отже, $\mathcal{E}_1$ має такі координати: $\mathcal{E}_1\left(\frac{3}{5};\frac{3}{10}\right)$.

Знайдемо довжину відрізка $K_1\mathcal{E}_1$:

$$K_1\mathcal{E}_1 = \sqrt{\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{4}{100}} = \sqrt{\frac{5}{100}} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

Аналогічно знаходимо координати точки $\mathcal{E}_2$, отримаємо: $\mathcal{E}_2\left(\frac{3}{10};\frac{3}{20}\right)$.

$$K_2\mathcal{E}_2 = \sqrt{\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{20}-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{400}+\frac{4}{400}} = \sqrt{\frac{5}{400}} = \frac{\sqrt{5}}{20}.$$

За тим самим алгоритмом знайдемо координати точки $\mathcal{E}_3$: $\mathcal{E}_3\left(\frac{3}{20};\frac{3}{40}\right)$.

$$K_3\mathcal{E}_3 = \sqrt{\left(\frac{3}{20}-\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{40}-\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{1600}+\frac{4}{1600}} = \sqrt{\frac{5}{1600}} = \frac{\sqrt{5}}{40}.$$

Із отриманих значень складемо числову послідовність:

$$\frac{\sqrt{5}}{10},\frac{\sqrt{5}}{20},\frac{\sqrt{5}}{40},\dots \quad \text{або} \quad \frac{\sqrt{5}}{5\cdot 2},\frac{\sqrt{5}}{5\cdot 2^2},\frac{\sqrt{5}}{5\cdot 2^3},\dots,\frac{\sqrt{5}}{5\cdot 2^n}.$$

Отже, «сігма-модель» ряду буде мати вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5}}{5\cdot 2^n} \quad (8)$$

Для дослідження ряду (8) на збіжність виконаємо перетворення:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5}}{5\cdot 2^n} = \frac{\sqrt{5}}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

Виходячи з властивості рядів, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ – збіжний, то і ряд $\frac{\sqrt{5}}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ також є збіжним рядом.

Знайдемо суму цього ряду:

$$S = \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot 1 = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

9. Модуль синусів кутів $\alpha_n \sum_{n=1}^{\infty}|sin\alpha_n|$ (Рис. 2.1.10).

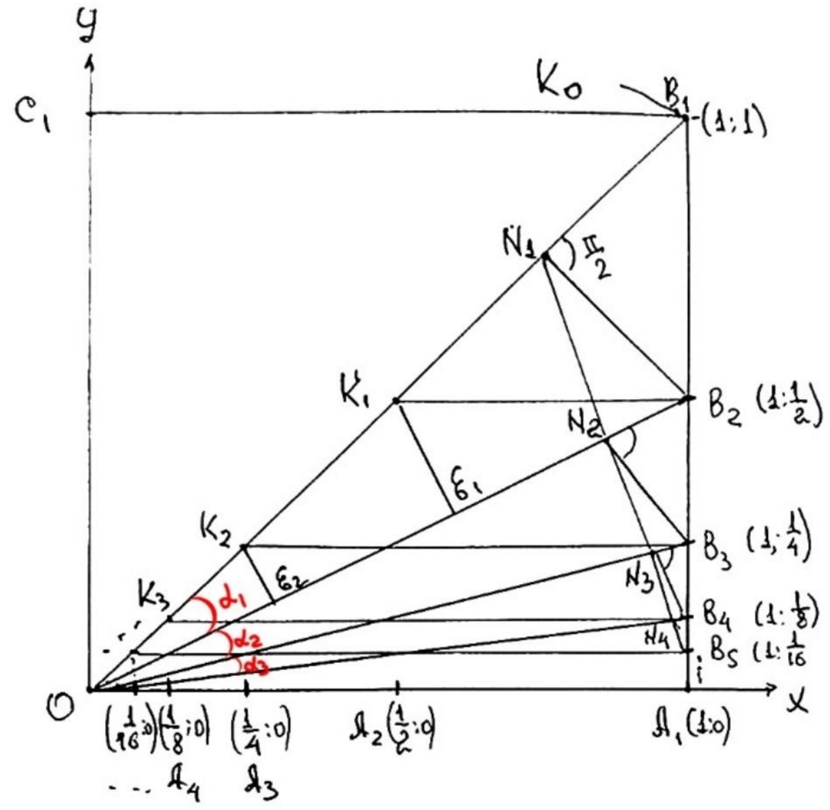

Рис. 2.1.10 Кути α_n

Розглянемо трикутники виду ON_nB_n. Оскільки відрізки виду $|N_nB_{n+1}|$є перпендикулярами до відрізків виду $|OB_n|$, то у трикутниках $< B_{n+1}N_nO = 90°$. Тобто кожен з трикутників виду ON_nB_n є прямокутним, а тому синус гострого кута будемо знаходити як відношення протилежного катета до гіпотенузи.

$$|sin\alpha_n| = \frac{|N_nB_{n+1}|}{|OB_{n+1}|} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+2^{2n-2}}}}{\frac{\sqrt{1+2^{2n}}}{2^n}} = \frac{1}{2\sqrt{1+2^{2n-2}}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{1+2^{2n}}} =$$

$$= \frac{2^n}{2\sqrt{1+2^{2n-2}}\sqrt{1+2^{2n}}} = \frac{2^n}{2\sqrt{\frac{1}{4}(4+2^{2n})}\sqrt{1+2^{2n}}} =$$

$$= \frac{2^n}{\sqrt{(4+2^{2n})}\sqrt{1+2^{2n}}};$$

Отже, ряд буде мати вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{(4+2^{2n})}\sqrt{1+2^{2n}}} \quad (9)$$

Застосуємо необхідну умову збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{\sqrt{(4+2^{2n})}\sqrt{1+2^{2n}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{\sqrt{2^{2n}\left(\frac{4}{2^{2n}}+1\right)}\sqrt{2^{2n}\left(\frac{1}{2^{2n}}+1\right)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n\sqrt{\left(\frac{4}{2^{2n}}+1\right)}\sqrt{2^{2n}\left(\frac{1}{2^{2n}}+1\right)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{4}{2^{2n}}+1\right)}\sqrt{2^{2n}\left(\frac{1}{2^{2n}}+1\right)}} = [\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{4}{2^{\infty}}+1\right)}\sqrt{2^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\infty}}+1\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(0+1)}\sqrt{\infty(0+1)}} = \frac{1}{\sqrt{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Ряд може бути збіжним.

За ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{\sqrt{(4+2^{2n+2})\sqrt{1+2^{2n+2}}}}}{\dfrac{2^{n}}{\sqrt{(4+2^{2n})\sqrt{1+2^{2n}}}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{\sqrt{(4+2^{2n+2})\sqrt{1+2^{2n+2}}}}\cdot\frac{\sqrt{(4+2^{2n})\sqrt{1+2^{2n}}}}{2^{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(4+2^{2n})\sqrt{1+2^{2n}}}}{\sqrt{(4+2^{2n+2})\sqrt{1+2^{2n+2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(4+2^{2n})\sqrt{1+2^{2n}}}}{\sqrt{(4+2^{2n+2})\sqrt{1+2^{2n+2}}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(4+2^{2n})\sqrt{1+2^{2n}}}}{\sqrt{\left(4+\frac{2^{2n}}{4}\right)\sqrt{\frac{4}{4}+\frac{2^{2n}}{4}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(4+2^{2n})\sqrt{1+2^{2n}}}}{\sqrt{\left(4+\frac{2^{2n}}{4}\right)\frac{1}{2}\sqrt{4+2^{2n}}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{1+2^{2n}}}{\sqrt{\left(4+\frac{2^{2n}}{4}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{2^{2n}\left(\frac{1}{2^{2n}}+1\right)}}{\sqrt{2^{2n}\left(\frac{4}{2^{2n}}+\frac{1}{4}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{\left(\frac{1}{2^{2n}}+1\right)}}{\sqrt{\left(\frac{4}{2^{2n}}+\frac{1}{4}\right)}}$$

$$=[\frac{4\sqrt{\left(\frac{1}{\infty}+1\right)}}{\sqrt{\left(\frac{4}{\infty}+\frac{1}{4}\right)}}=\frac{4\sqrt{1}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{2}=8.$$

$$k=8>1.$$

За ознакою Даламбера ряд розбіжний.

Знайдемо частинні суми для розбіжного ряду. Для цього змінимо в програмі формулу розрахунку члена числового ряду (Додаток Г).

```
n=2; S=0.533158
n=5; S=4.562007
n=10; S=9.561357
n=1000; S=511.561356
n=5000; S=-nan
n=25000; S=-nan
n=100000; S=-nan
```

Рис. 2.8. Частинні суми ряду (9)

Аналогічно до частинних сум ряду 6, суми ряду 10 прямують у нескінченність при прямуючому до нескінченності n (Рис. 2.8). Розглянемо графік залежності частинних сум від кількості членів ряду (Рис 2.9).

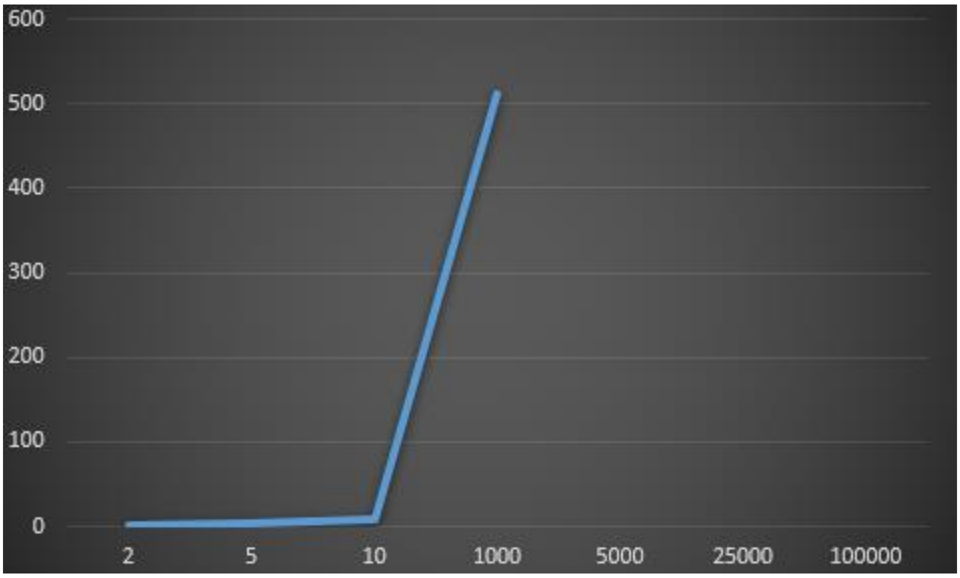

Рис. 2.9. Графік залежності S_n від n для ряду (9)

Хоча цей графік залежності S_n від n схожий на графік залежності S_n від n для ряду (6), однак прослідковується більш стрімке зростання частинної суми. Тобто за одну одиницю n частинна сума S_n зростає на більшу кількість одиниць, ніж частинна сума ряду (6).

10. Ряд довжин відрізків $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{|\mathcal{E}_n \mathcal{E}_{n+1}|}$ (рис. 2.1.11)

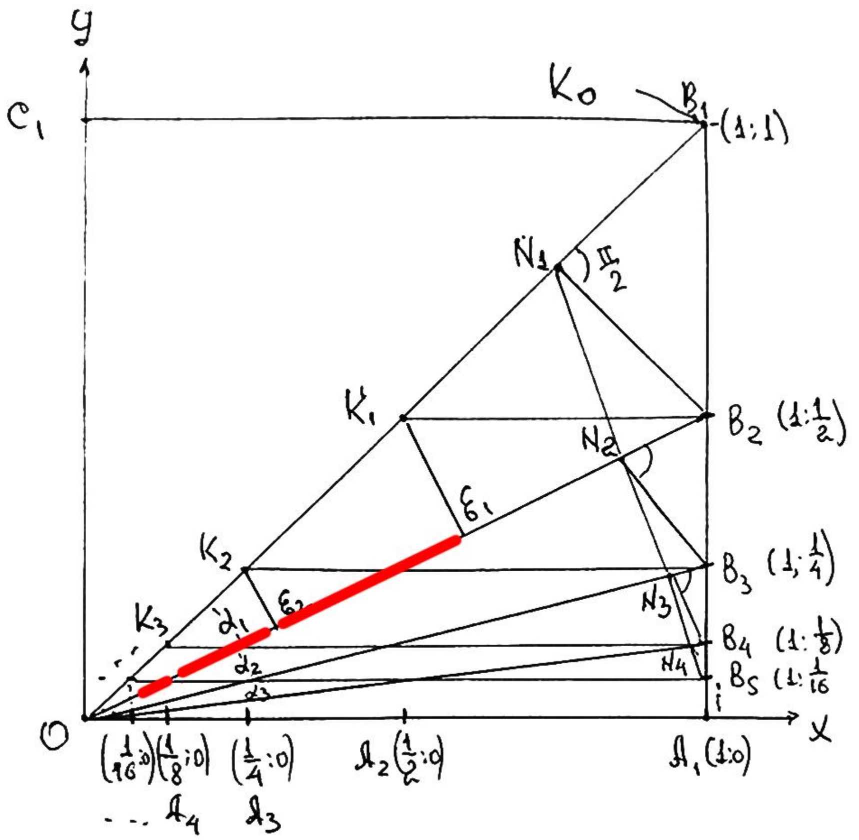

Рис. 2.1.11. Відрізки виду $\mathcal{E}_n\mathcal{E}_{n+1}$

При генерації ряду (9) отримали координати точок виду $\mathcal{E}_n$. Застосуємо їх для генерації ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{|\mathcal{E}_n\mathcal{E}_{n+1}|}$:

$$\mathcal{E}_1\left(\frac{3}{5};\frac{3}{10}\right),\mathcal{E}_2\left(\frac{3}{10};\frac{3}{20}\right),\mathcal{E}_3\left(\frac{3}{20};\frac{3}{40}\right);$$

$$\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2=\sqrt{\left(\frac{3}{10}-\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{20}-\frac{3}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{100}+\frac{9}{400}}=\sqrt{\frac{36+9}{400}}=\frac{\sqrt{45}}{20};$$

$$\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3=\sqrt{\left(\frac{3}{20}-\frac{3}{10}\right)^2+\left(\frac{3}{40}-\frac{3}{20}\right)^3}=\sqrt{\left(-\frac{3}{20}\right)^2+\left(-\frac{3}{40}\right)^2}=\frac{\sqrt{45}}{40};$$

Аналогічно знайдемо координати точки $\mathcal{E}_4$ та обчислимо довжину відрізка $\mathcal{E}_3\mathcal{E}_4$. Отримаємо:

$$\mathcal{E}_3\mathcal{E}_4 = \frac{\sqrt{45}}{80};$$

Запишемо отримані величини у вигляді послідовності:

$$\frac{\sqrt{45}}{20}, \frac{\sqrt{45}}{40}, \frac{\sqrt{45}}{80}, \dots, \frac{\sqrt{45}}{10 \cdot 2^n}$$

Отже, отримали ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{45}}{10 \cdot 2^n} \quad (10)$$

Дослідимо ряд на збіжність.

Очевидно, що ряд (10) – спадна нескінченна геометрична прогресія, отже ряд буде збіжним.

Знайдемо суму ряду (10):

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{45}}{10 \cdot 2^n} = \frac{\sqrt{45}}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\sqrt{45}}{10} \cdot 1 = \frac{\sqrt{45}}{10} = \frac{3\sqrt{5}}{10} = \frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

2.2. Генерація рядів із квадратурною геометричною інтерпретацією за допомогою функції $y = \frac{1}{2^{n-1}}x$ і квадрата зі стороною $a = 1$.

1. Площі трикутників $\sum_{n=1}^{\infty} \left| S_{\Delta O B_n B_{n+1}} \right|$ (рис. 2.2.1).

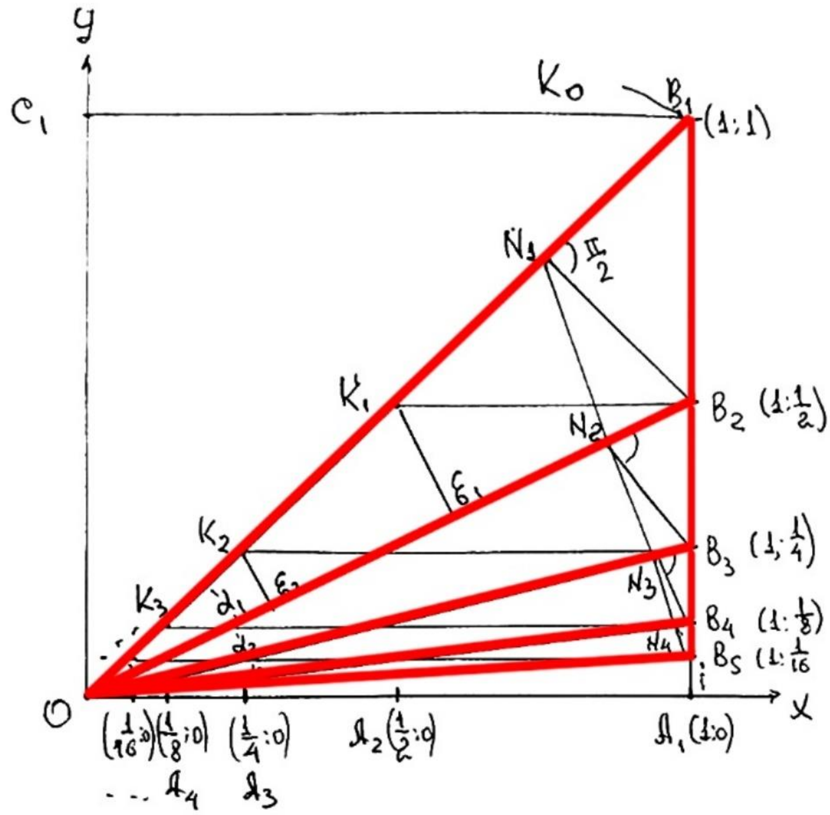

Рис. 2.2.1. Трикутники виду ΔOB_nB_{n+1}

Для знаходження площ трикутників виду $S_{\Delta OB_nB_{n+1}}$ застосуємо формулу площі трикутника $S = \frac{1}{2}ah_a$. Отримаємо:

$$S_{\Delta OB_nB_{n+1}} = \frac{1}{2}|\overline{OB_n}| \cdot |\overline{N_nB_{n+1}}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+2^{2n-2}}}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+2^{2n-2}}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Отже, «сігма-модель» ряду буде мати вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \quad (11)$$

Дослідимо його на збіжність.

Застосуємо властивість суми для перетворення «сігма-моделі»:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot 2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Виходячи з властивості рядів, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ – збіжний, то і ряд $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ також є збіжним рядом.

Знайдемо суму цього ряду:

$$S = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

2. Площі трикутників $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{\Delta K_{n-1}K_nB_{n+1}}\right|$ (рис. 2.2.2).

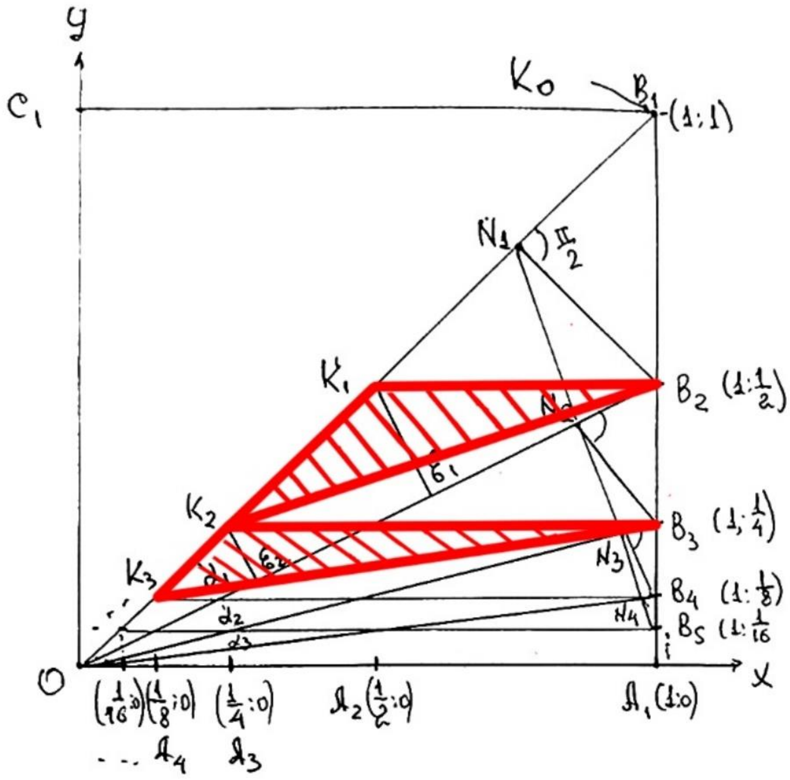

Рис. 2.2.2. Трикутники виду $\Delta K_{n-1}K_nB_{n+1}$

По аналогії із попереднім рядом формулу $S=\frac{1}{2}ah_a$ використаємо для знаходження площі трикутників виду $K_{n-1}K_nB_{n+1}$.

$$S_{\Delta K_{n-1}K_nB_{n+1}} = \frac{1}{2}\left|\overline{K_nB_{n+1}}\right|\cdot\left|\overline{B_nB_{n+1}}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Отже, «сігма-модель» ряду буде мати вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} \quad (12)$$

Дослідимо ряд на збіжність.

Запишемо перших три члени цього ряду у вигляді послідовності:

$$\frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^5}, \frac{1}{2^7}, \dots \quad \text{або} \quad \frac{1}{8}, \frac{1}{8 \cdot 2^2}, \frac{1}{8 \cdot 2^4}, \dots$$

Очевидно, що даний ряд – це спадна геометрична прогресія, в якій перший член $a_1 = \frac{1}{8}$, а знаменник прогресії $q = \frac{1}{2^2}$. Таким чином можемо зробити висновок, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}}$ – збіжний (так як спадна геометрична прогресія є збіжною).

Знайдемо частинні суми ряду (12). Для цього застосуємо програму-алгоритм, написану мовою програмування С (Додаток Д). Отримаємо наступні значення (рис. 2.8).

```
n=2; S=0.1562500000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
n=5; S=0.1665039062500000000000000000000000000000000000000000000000000000
n=10; S=0.1666665077209472656250000000000000000000000000000000000000000000
n=1000; S=0.1666666666666666666576316485626207963832712266594171524047851562
n=5000; S=0.1666666666666666666576316485626207963832712266594171524047851562
n=25000; S=0.1666666666666666666576316485626207963832712266594171524047851562
n=100000; S=0.1666666666666666666576316485626207963832712266594171524047851562
```

Рис. 2.8. Частинні суми ряду (12)

Як бачимо, зберігається динаміка збіжного ряду. Частинна сума ряду неперервно зростає до загальної суми ряду. Розглянемо графік залежності частинної суми від значення n (рис. 2.9).

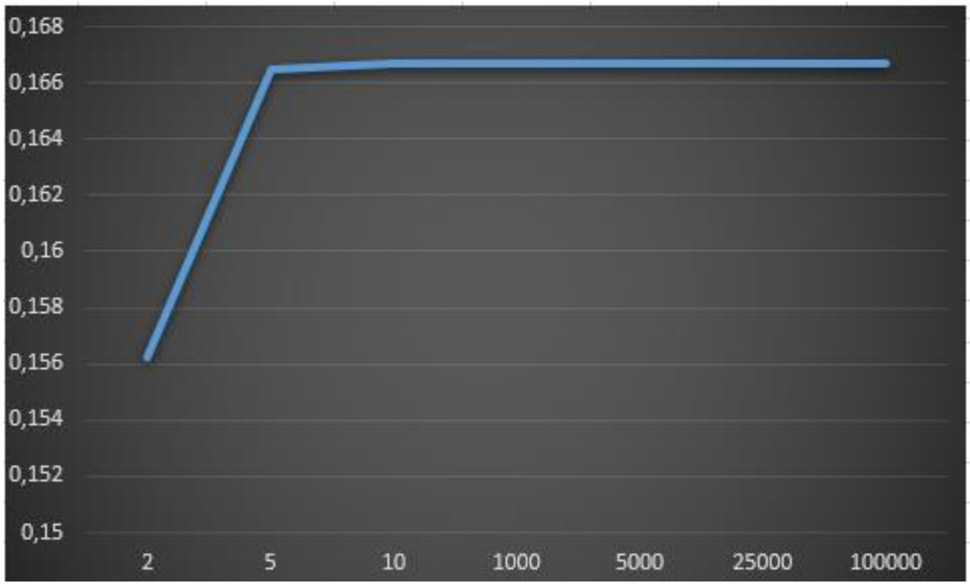

Рис. 2.9. Графік залежності частинних сум від кількості доданків ряду (12)

Дійсно, у збіжних рядів послідовність частинних сум зростає до певного значення. Починаючи з наступного, кожен доданок настільки малий, що сприймається як 0 і не суттєво впливає на загальну суму ряду. Таким чином можемо визначити загальну суму.

$$S \approx 0.166667.$$

3. Площі трикутників $\sum_{n=1}^{\infty} \left| S_{\Delta O N_n N_{n+1}} \right|$ (Рис. 2.2.3)

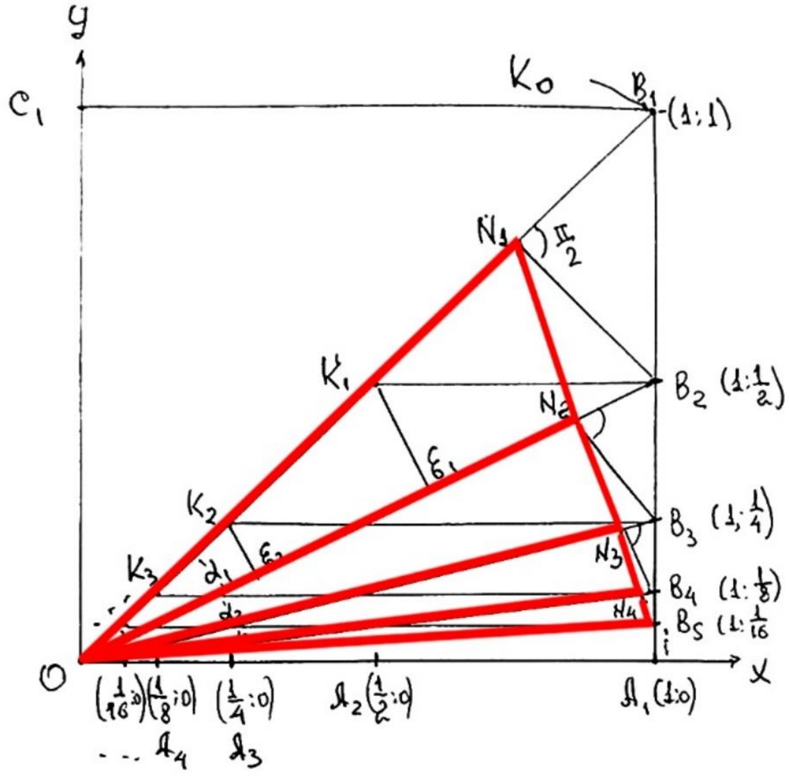

Рис. 2.2.3. Трикутники виду ΔON_nN_{n+1}

Для знаходження площ трикутників виду ON_nN_{n+1} використаємо формулу $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$. Використаємо знайдені раніше загальні члени рядів, що характеризують сторони трикутника. В якості кута використовуємо раніше знайдений ряд – інтерпретацію синусів кутів виду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{(4+2^{2n})}\sqrt{1+2^{2n}}}$.

$$S_{\Delta ON_nN_{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot|\overline{ON_n}|\cdot|\overline{ON_{n+1}}|\sin\alpha_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^{n-1}}{\sqrt{1+2^{2n-2}}}\cdot\frac{2^n}{\sqrt{1+2^{2n}}}\times$$

$$\times\frac{2^n}{2\sqrt{1+2^{2n-2}}\sqrt{1+2^{2n}}} = \frac{2^{3n-1}}{2^2(1+2^{2n-2})(1+2^{2n})} = \frac{2^{3n-3}}{(1+2^{2n-2})(1+2^{2n})}$$

Отже, «сігма-модель» ряду буде мати вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n-3}}{(1+2^{2n-2})(1+2^{2n})} \quad (13).$$

Дослідимо одержаний ряд на збіжність.

Необхідна умова:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{3n-3}}{(1+2^{2n-2})(1+2^{2n})}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{3n}}{2^3}}{2^{2n-2}\left(\frac{1}{2^{2n-2}}+1\right)2^{2n}\left(\frac{1}{2^{2n}}+1\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{3n}}{2^{4n+1}\left(\frac{1}{2^{2n-2}}+1\right)\left(\frac{1}{2^{2n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{-n-1}}{\left(\frac{1}{2^{2n-2}}+1\right)\left(\frac{1}{2^{2n}}+1\right)}$$

$$=\left[\frac{2^{-\infty}}{(0+1)(0+1)}=\frac{\frac{1}{2^{\infty}}}{2}=\frac{1}{\infty}=0\right]=0.$$

Ряд може бути збіжним.

За ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{3n}}{(1+2^{2n})(1+2^{2n+2})}}{\frac{2^{3n-3}}{(1+2^{2n-2})(1+2^{2n})}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{3n}}{(1+2^{2n})(1+2^{2n+2})}\cdot\frac{(1+2^{2n-2})(1+2^{2n})}{2^{3n-3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^3(1+2^{2n-2})}{(1+2^{2n+2})}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2^3\cdot 2^{2n-2}(\frac{1}{2^{2n-2}}+1)}{2^{2n+2}\left(\frac{1}{2^{2n+2}}+1\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{-1}\cdot(\frac{1}{2^{2n-2}}+1)}{\left(\frac{1}{2^{2n+2}}+1\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{1}{2^{2n-2}}+1)}{2\left(\frac{1}{2^{2n+2}}+1\right)}=\left[\frac{(0+1)}{2(0+1)}=\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}.$$

$$k=\frac{1}{2}<1.$$

За ознакою Даламбера ряд збіжний.

Знайдемо частинні суми ряду за допомогою програми-алгоритму (Додаток Е). В цьому випадку використовуємо варіації n=20, n=50, n=300, n=1000, n=5000, n=25000, n=100000 (рис. 2.10).

```
n=20; S=0.313848
n=50; S=0.313849
n=100; S=0.313849
n=1000; S=-nan
n=5000; S=-nan
n=25000; S=-nan
n=100000; S=-nan
```

Рис. 2.10. Частинні суми ряду (13)

Хоч ряд і не є розбіжним, але оскільки кожен наступний член ряду менший за попередній, то для n ≥ 1000 вже не розраховується. Це відбувається через те, що більше половини доданків мають дуже мале значення, близьке до 0. Тому загальною сумою ряду варто вважати останнє числове значення частинної суми. Розглянемо графік залежності S_n від n (рис. 2.11).

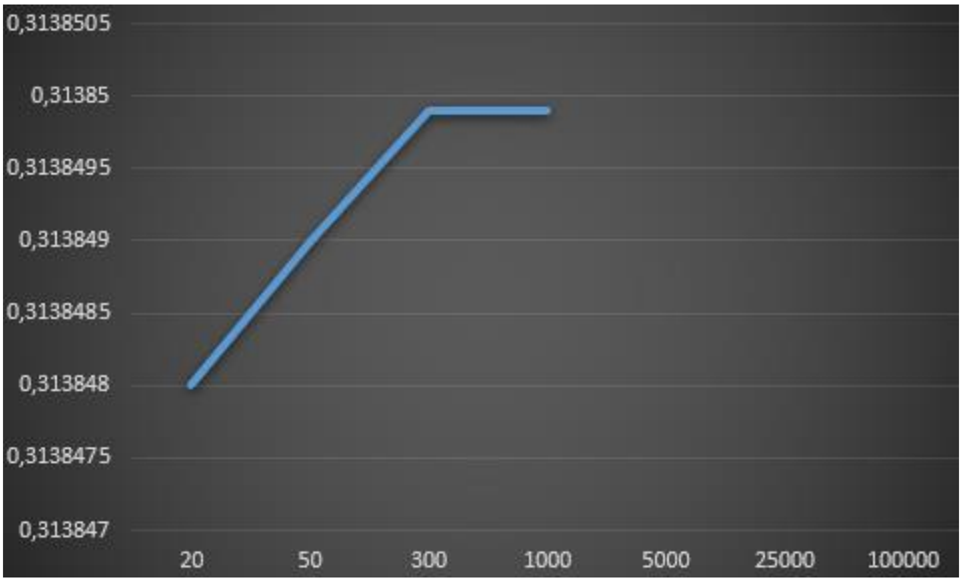

Рис. 2.11 Графік залежності S_n від n для ряду (13)

Як бачимо, починаючи з певного номера n приріст настільки незначний, що програма не сприймає відповідні члени ряду. Отже, оскільки частинні суми збігаються до певного значення, це значення і буде загальною сумою ряду.

$$S \approx 0.313849.$$

4. Площі трикутників $\sum_{n=1}^{\infty} \left| S_{\Delta K_n \mathrm{E}_n O} \right|$ (Рис. 2.2.4)

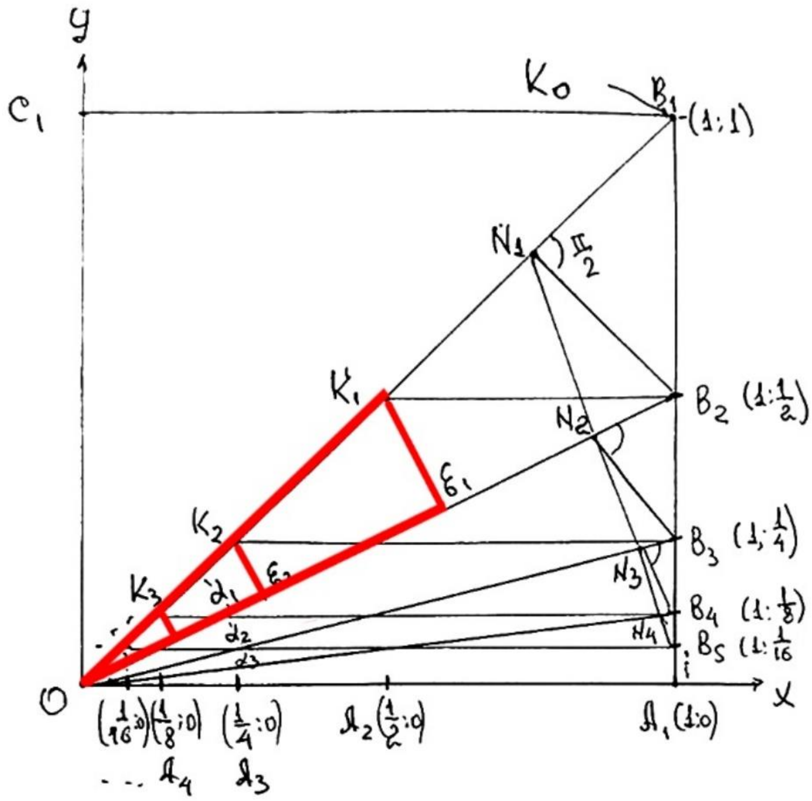

Рис. 2.2.4 Трикутники виду $\Delta K_n \mathrm{E}_n O$

Розглянемо трикутник $\Delta K_1 \mathcal{E}_1 O$, він прямокутний, отже його площу знайдемо за формулою $S_{\Delta K_1 \mathcal{E}_1 O} = \frac{1}{2} K_1 \mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_1 O$

$$K_1 \mathcal{E}_1 = \frac{\sqrt{5}}{10};\ \mathcal{E}_1 O = \sqrt{\left(0 - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(0 - \frac{3}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{9}{100}} = \sqrt{\frac{45}{100}} = \frac{\sqrt{45}}{10};$$

Знаходимо площу трикутника $S_{\Delta K_1 \mathcal{E}_1 O} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{\sqrt{45}}{10} = \frac{\sqrt{225}}{200} = \frac{15}{200} = \frac{3}{40}$.

Аналогічно знаходимо площу $\Delta K_2 \mathcal{E}_2 O$: $S_{\Delta K_2 \mathcal{E}_2 O} = \frac{1}{2} K_2 \mathcal{E}_2 \cdot \mathcal{E}_2 O$.

$$K_2 \mathcal{E}_2 = \frac{\sqrt{5}}{20};\ \mathcal{E}_2 O = \sqrt{\left(0 - \frac{3}{10}\right)^2 + \left(0 - \frac{3}{20}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{9}{400}} = \sqrt{\frac{45}{400}} = \frac{\sqrt{45}}{20};$$

$$S_{\Delta K_2 \mathcal{E}_2 O} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{20} \cdot \frac{\sqrt{45}}{20} = \frac{\sqrt{225}}{800} = \frac{15}{800} = \frac{3}{160}.$$

Знаходимо площу трикутника $\Delta K_3\mathcal{E}_3 O$: $S_{\Delta K_3\mathcal{E}_3 O} = \frac{1}{2} K_3\mathcal{E}_3 \cdot \mathcal{E}_3 O$

$K_3\mathcal{E}_3 = \frac{\sqrt{5}}{40}$; $\mathcal{E}_2 O = \sqrt{\left(0-\frac{3}{20}\right)^2 + \left(0-\frac{3}{40}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{400}+\frac{9}{1600}} = \sqrt{\frac{45}{1600}} = \frac{\sqrt{45}}{40}$;

$$S_{\Delta K_3\mathcal{E}_3 O} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{40}\cdot\frac{\sqrt{45}}{40} = \frac{\sqrt{225}}{3200} = \frac{15}{3200} = \frac{3}{640}$$

Із отриманих результатів складемо числову послідовність:

$$\frac{3}{40};\frac{3}{160};\frac{3}{640};\dots;\frac{3}{2\cdot 10};\frac{3}{2^2\cdot 10};\frac{3}{2^3\cdot 10};\dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n\cdot 10} = \frac{3}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \quad (14)$$

Дослідимо ряд на збіжність.

Із складеної числової послідовності добре видно, що ряд (14) – це нескінченна спадна геометрична прогресія. З цього робимо висновок, що даний ряд – збіжний.

Суму ряду знайдемо за формулою суми геометричної прогресії

$$S = \frac{\frac{3}{20}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{20}:\frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

5. Площі чотирикутників $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{K_nB_{n+1}B_{n+2}K_{n+1}}\right|$ (Рис. 2.2.5).

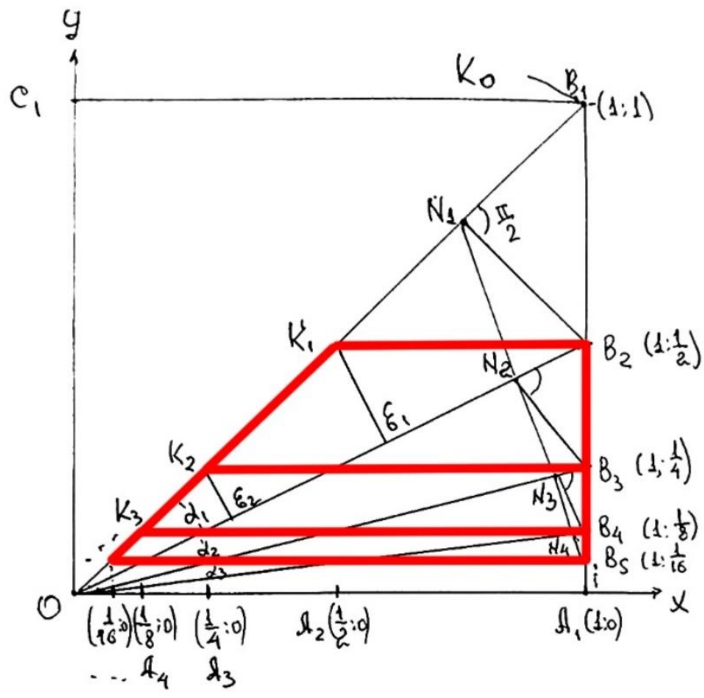

Рис. 2.2.5. Чотирикутники виду $K_nB_{n+1}B_{n+2}K_{n+1}$

Розглянемо чотирикутник $K_1B_2B_3K_2$.

Відрізок K_1B_2 паралельний відрізку K_2B_3, а відрізок K_1B_2 перпендикулярний відрізку B_2B_3. Отже, зрозуміло, що $K_1B_2B_3K_2$ – прямокутна трапеція.

Площу трапецій виду $S_{K_nB_{n+1}B_{n+2}K_{n+1}}$знайдемо за формулою площі трапеції $S = \frac{a+b}{2}h$

$$S_{K_nB_{n+1}B_{n+2}K_{n+1}} = \frac{|\overline{K_nB_{n+1}}| + |\overline{K_{n+1}B_{n+2}}|}{2} \cdot |\overline{B_nB_{n+1}}| = \frac{\frac{1}{2^n} + \frac{3}{2^{n+1}}}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{5}{2^{n+1}}}{2^{2n+1}} = \frac{5}{2^{3n+2}}$$

Отже, «сігма-модель» ряду має наступний вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^{3n+2}} \quad (15)$$

Дослідимо ряд на збіжність.

Запишемо перші три члена ряду у вигляді числової послідовності:

$$\frac{5}{2^5}, \frac{5}{2^8}, \frac{5}{2^{11}}, \dots \quad \text{або} \quad \frac{5}{2^5}, \frac{5}{2^5 \cdot 2^3}, \frac{5}{2^5 \cdot 2^6}, \dots$$

Легко бачити, що отримана послідовність – спадна геометрична прогресія із першим членом $a_1 = \frac{5}{2^5}$ і знаменником $q = \frac{1}{2^3}$. Спадна прогресія є збіжним числовим рядом.

Знайдемо суму ряду за допомогою формули суми геометричної прогресії:

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{5}{2^5}}{1 - \frac{1}{2^3}} = \frac{\frac{5}{2^5}}{\frac{7}{2^3}} = \frac{5}{2^5} \cdot \frac{2^3}{7} = \frac{5}{4 \cdot 7} = \frac{5}{28}.$$

17. Площі трикутників $\sum_{n=1}^{\infty} S_{\Delta N_n B_n B_{n+1}}$ (Рис. 2.2.6)

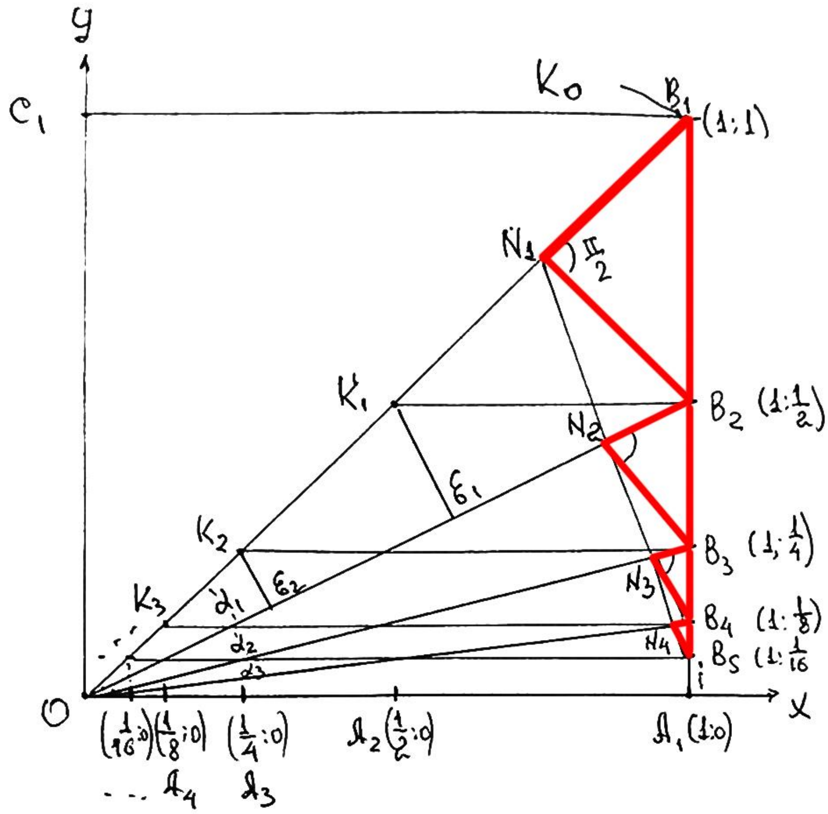

Рис. 2.2.6 Трикутники виду $N_n B_n B_{n+1}$.

Кожен із трикутників виду $N_nB_nB_{n+1}$ – прямокутник трикутник, катетами якого є N_nB_n та N_nB_{n+1}. Для знаходження площ таких трикутників застосуємо формулу площі прямокутного трикутника:

$S = \frac{1}{2}ab$, де $a, b -$ катети прямокутного трикутника.

Виведемо сігма-модель ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}N_nB_n \cdot N_nB_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+2^{2n-2}}}\cdot\frac{1}{2^n\sqrt{1+2^{2n}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+2^{2n-2}}\,2^{2n-1}\sqrt{1+2^{2n}}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}\sqrt{(1+2^{2n})(1+2^{2n-2})}} \quad (16);$$

Дослідимо ряд на збіжність.

Необхідна умова:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{2n-1}\sqrt{(1+2^{2n})(1+2^{2n-2})}} = \left[\frac{1}{\infty} = 0\right] = 0.$$

Ряд може бути збіжним.

Застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{2n-1}\sqrt{(1+2^{2n})(1+2^{2n-2})}}\cdot\frac{2^{2n+1}\sqrt{(1+2^{2n+2})(1+2^{2n})}}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2^2\sqrt{(1+2^{2n+2})}}{\sqrt{(1+2^{2n-2})}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^2\sqrt{2^{2n}(\frac{1}{2^{2n}}+2^2)}}{\sqrt{2^{2n}(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^2})}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2^2\sqrt{(\frac{1}{2^{2n}}+2^2)}}{\sqrt{(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^2})}} = \left[\frac{4\sqrt{0+4}}{\sqrt{0+\frac{1}{4}}} = \frac{4\cdot 2}{\frac{1}{2}} = 8\cdot 2\right] = 16 > 1$$

Отриманий ряд розбіжний за ознакою Даламбера.

2.3. Генерація числових рядів за допомогою відношення $\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

Одним із способів генерації числових рядів є алгоритм, де за допомогою ділення кожного попереднього члена відомого ряду на наступний член відомого ряду формується нова числова послідовність. При додаванні отриманих членів послідовності сформуємо новий числовий ряд.

1. Сформуємо числовий ряд за допомогою ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+2^{2n-2}}}{2^{n-1}}$:

$$a_n = \frac{\sqrt{1+2^{2n-2}}}{2^{n-1}};\ a_{n+1} = \frac{\sqrt{1+2^{2n}}}{2^{n}};$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{\sqrt{1+2^{2n-2}}}{2^{n-1}}}{\frac{\sqrt{1+2^{2n}}}{2^{n}}} = \frac{\sqrt{1+2^{2n-2}}}{2^{n-1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{1+2^{2n}}} = 2\sqrt{\frac{1+2^{2n-2}}{1+2^{2n}}};$$

Отже, отримаємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\sqrt{\frac{1+2^{2n-2}}{1+2^{2n}}}\ (17)$$

Дослідимо одержаний ряд на збіжність.

Необхідна умова:

$$\lim_{n\to\infty} 2\sqrt{\frac{1+2^{2n-2}}{1+2^{2n}}} = 2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+2^{2n-2}}{1+2^{2n}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2^{2n}\left(\frac{1}{2^{2n}}+2^{-2}\right)}{2^{2n}\left(\frac{1}{2^{2n}}+1\right)}}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2^{2n}}+2^{-2}\right)}{\left(\frac{1}{2^{2n}}+1\right)}} = \left[2\cdot\sqrt{\frac{0+\frac{1}{4}}{0+1}}\right] = 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \neq 0.$$

Ряд розбігається.

Зауважимо, що ряд (2), за допомогою членів якого формували ряд (17), також розбіжний.

2. Для формування наступного числового ряду використаємо ряд (4): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{1+2^{2n-2}}}$.

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{1+2^{2n-2}}};\ a_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{1+2^{2n}}}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+2^{2n-2}}}}{\frac{1}{2\sqrt{1+2^{2n}}}} = \frac{1}{2\sqrt{1+2^{2n-2}}} \cdot \frac{2\sqrt{1+2^{2n}}}{1} = \sqrt{\frac{1+2^{2n}}{1+2^{2n-2}}}$$

Отже, «сігма-модель» ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1+2^{2n}}{1+2^{2n-2}}} \quad (18)$$

Дослідимо на збіжність.

Необхідна умова:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1+2^{2n}}{1+2^{2n-2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2^{2n}\left(\frac{1}{2^{2n}}+1\right)}{2^{2n}(\frac{1}{2^{2n}}+2^{-2})}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2^{2n}}+1\right)}{(\frac{1}{2^{2n}}+2^{-2})}}$$

$$= [\sqrt{\frac{0+1}{0+\frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{1}}{4}} = \sqrt{4} = 2 \neq 0.$$

Одержаний ряд розбігається.

Варто акцентувати, що на відміну від ряду (17) для формування ряду (18) були використані члени ряду (4), збіжність якого було доведено вище. Отже, із збіжного ряду шляхом ділення попереднього члена на наступний отримали ряд розбіжний.

3. Для формування наступного ряду використаємо ряд (13) із квадратурною геометричною інтерпретацією виду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-3}}{(1+2^{2n-2})(1+2^{2n})}$.

$$a_n = \frac{2^{3n-3}}{(1+2^{2n-2})(1+2^{2n})};\ a_{n+1} = \frac{2^{3n}}{(1+2^{2n+1})(1+2^{2n})};$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{2^{3n-3}}{(1+2^{2n-2})(1+2^{2n})}}{\frac{2^{3n}}{(1+2^{2n+1})(1+2^{2n})}} = \frac{2^{3n-3}}{(1+2^{2n-2})(1+2^{2n})} \cdot \frac{(1+2^{2n+1})(1+2^{2n})}{2^{3n}} = \frac{1+2^{2n+1}}{2^3(1+2^{2n-2})}.$$

«Сігма-модель» отриманого ряду має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{2n+1}}{2^3(1+2^{2n-2})} \quad (19)$$

Дослідимо отриманий ряд на збіжність.

Необхідна умова:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^{2n+1}}{2^3(1+2^{2n-2})} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{2^3} \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\left(\frac{1}{2^{2n}}+2\right)}{2^{2n}\left(\frac{1}{2^{2n}}+2^{-2}\right)} = \frac{1}{2^3} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2^{2n}}+2\right)}{\left(\frac{1}{2^{2n}}+2^{-2}\right)}$$

$$= \left[\frac{1}{2^3} \cdot \frac{0+2}{0+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2^3} \cdot 8\right] = 1 \neq 0.$$

Границя загального члена при $n \to \infty$ не дорівнює 0, отже даний ряд розбігається.

2.4. Генерація рядів із кубатурною геометричною інтерпретацією за допомогою функції $y = \frac{1}{2^{n-1}}x$ і квадрата зі стороною $a = 1$.

Для генерації рядів із кубатурною геометричною інтерпретацією використаємо обертання вже відомих нам відрізків, що лежать усередині квадрату зі стороною а=1 і почнемо обертати їх навколо вісі Ох. Для пошуку об’ємів отриманих геометричних фігур будемо застосовувати наступну формулу:

$$V = \pi \int_0^1 f^2(x)dx \quad (2.4.1)$$

Сума послідовності об’ємів одержаних фігур і буде числовим рядом із кубатурною геометричною інтерпретацією.

1. Ряд об’ємів фігур, які створюються обертанням прямих $\overline{OB_n}$ навколо вісі Ох.

Розглянемо відрізок OB_1. Всі точки відрізка належать графіку функції y=x.

За допомогою формули (2.4.1) знайдемо об’єм V_1 геометричної фігури, яка утворюється при обертанні цього відрізка навколо вісі Ох.

$$V_1 = \pi \int_0^1 f^2(x)dx = \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{3}\pi;$$

Знайдемо об’єм V_2 геометричної фігури, яка утворюється при обертанні відрізка OB_2 навколо вісі Ох. Враховуємо, що всі точки даного відрізка належать графіку функції $y = \frac{1}{2}x$.

$$V_2 = \pi \int_0^1 f^2(x)dx = \pi \int_0^1 \frac{x^2}{4}\,dx = \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{12}\pi;$$

Знайдемо об’єм V_2 геометричної фігури, яка утворюється при обертанні відрізка OB_3 навколо вісі Ох. Враховуємо, що всі точки даного відрізка належать графіку функції $y = \frac{1}{4}x$.

$$V_3 = \pi \int_0^1 f^2(x)dx = \pi \int_0^1 \frac{x}{16}^2\,dx = \pi \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \pi \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{48}\pi;$$

Із отриманих величин складемо числову послідовність:

$$\frac{1}{3}\pi, \quad \frac{1}{12}\pi, \quad \frac{1}{48}\pi, \ldots \text{ або } \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{3 \cdot 4}, \quad \frac{\pi}{3 \cdot 16}, \ldots, \frac{\pi}{3 \cdot 2^{2n-2}}, \ldots$$

Отже, сігма-модель ряду буде мати вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{3 \cdot 2^{2n-2}} = \frac{\pi}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-2}} \ (19)$$

Дослідимо отриманий ряд на збіжність.

Запишемо перші три члена ряду (19):

$$\frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{3 \cdot 4}, \quad \frac{\pi}{3 \cdot 16}, \dots \text{ або } \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{3 \cdot 2^2}, \quad \frac{\pi}{3 \cdot 2^4}, \dots$$

Очевидно, що отриманий ряд – це спадна геометрична прогресія із знаменником $q = \frac{1}{2^2}$ і першим членом $b_1 = \frac{\pi}{3}$. Тому ряд $\frac{\pi}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-2}}$ – збіжний.

Знайдемо суму ряду (19) за допомогою формули суми геометричної прогресії.

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{\pi}{3}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4\pi}{9}.$$

2. Для генерації наступного числового ряду добудуємо точку $\omega_1 \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$. Будувати ряд будемо із об'ємів фігур, що утворюються обертанням навколо вісі Ox наступних відрізків: $C_1B_1, K_1B_2, \omega_1B_3, \dots$

$$C_1B_1 \colon y = 1;\ K_1B_2 \colon y = \frac{1}{2}; \omega_1B_3 \colon y = \frac{1}{4};\ \omega_2B_4 \colon y = \frac{1}{8}.$$

Знайдемо відповідні об'єми:

$$V_1 = \pi \int_0^1 dx = \pi(1-0) = \pi;$$

$$V_2 = \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} dx = \pi \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4};$$

$$V_3 = \pi \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{4} dx = \pi \cdot \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\pi}{16};$$

$$V_4 = \pi \int_{\frac{1}{8}}^{1} \frac{1}{8} dx = \pi \cdot \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{8}\right) = \pi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7\pi}{64};$$

Запишемо отримані величини у вигляді послідовності:

$$\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{16}, \frac{7\pi}{64}, \dots$$

Якщо виключити перший член послідовності, то отримаємо послідовність виду:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{16}, \frac{7\pi}{64}, \dots, \frac{(2^n - 1)\pi}{2^{2n}}, \dots$$

Отримаємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n - 1)\pi}{2^{2n}} \quad (20)$$

Дослідимо одержаний ряд на збіжність.

Необхідна умова:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n - 1)\pi}{2^{2n}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pi \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n - 1)}{2^{2n}} = \pi \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(1 - \frac{1}{2^n})}{2^{2n}}$$

$$= \pi \lim_{n\to\infty} \frac{(1 - \frac{1}{2^n})}{2^n} = \left[\pi \cdot \frac{1-0}{\infty} = \frac{\pi}{\infty} = 0\right] = 0;$$

Ряд може бути збіжним.

За ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(2^{n+1}-1)\pi}{2^{2n+2}}}{\dfrac{(2^n-1)\pi}{2^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^{n+1}-1)\pi}{2^{2n+2}}\cdot\frac{2^{2n}}{(2^n-1)\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^{n+1}-1)}{2^2(2^n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\left(2-\frac{1}{2^n}\right)}{2^2\cdot 2^n\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{2^n}\right)}{2^2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}=\left[\frac{2-0}{4(1-0)}=\frac{2}{4}\right]=\frac{1}{2}$$

$$<1.$$

За ознакою Даламбера ряд збіжний.

Знайдемо частинні суми збіжного ряду (рис. 2.4.1) за допомогою програми алгоритму (Додаток Ж).

```
n=2; S=1.373750
n=5; S=1.996230
n=10; S=2.090268
n=1000; S=2.093333
n=5000; S=-nan
n=25000; S=-nan
n=100000; S=-nan
```

Рис. 2.4.1. Частинні суми ряду (20)

Розглянемо графік залежності частинних сум одержаного ряду від кількості доданків (Рис. 2.4.2).

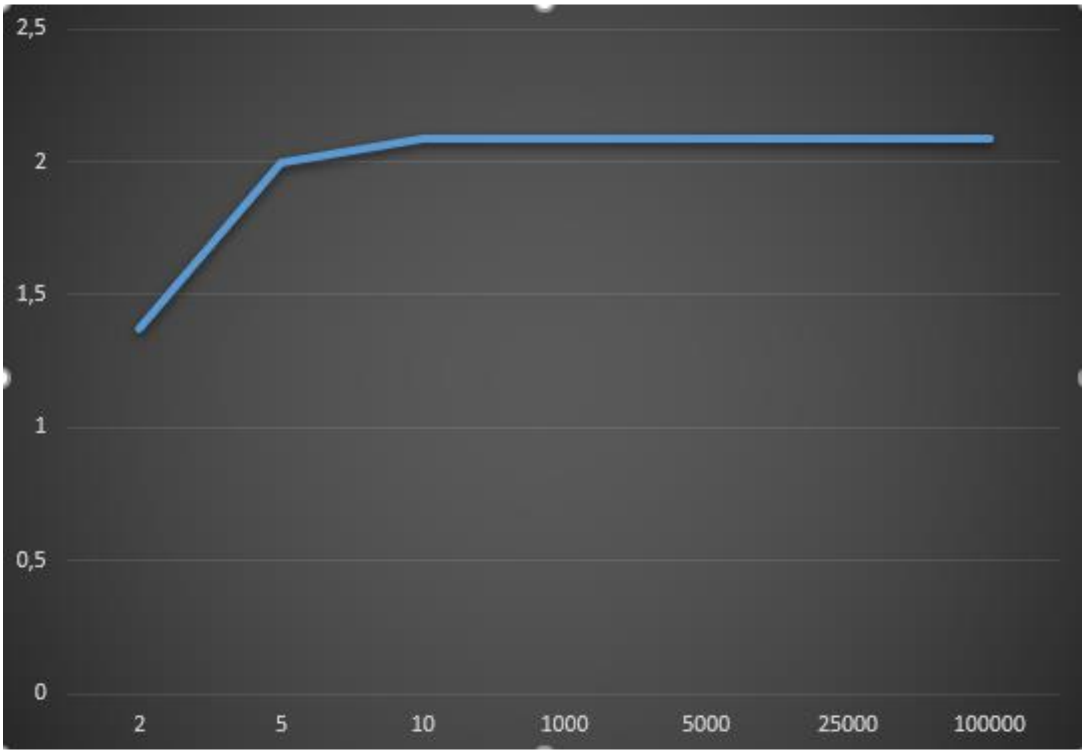

Рис. 2.4.2. Залежність частинних сум від кількості доданків ряду (20)

Із рис. 2.4.1 і 2.4.2 можемо зробити висновок, що частинні суми ряду (20) збігаються до значення, яке і є сумою даного ряду.

$$S \approx 2{,}0933.$$

Висновки до розділу 2

1) Із розв'язаних задач видно, що при дослідженні різноманітних геометричних об'єктів, що лежать у квадраті зі стороною $a = 1$, за допомогою графіків функцій виду $y = \frac{1}{2^{n-1}}x$ можна отримати досить велику кількість числових рядів.

2) Побудовано 20 числових рядів, з яких: 10 з лінійною геометричною інтерпретацією, 5 із квадратурною геометричною інтерпретацією, 3 ряда за допомогою відношення $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, 2 ряда із кубатурною геометричною інтерпретацією.

3) Виведені алгоритми пошуку числових рядів, запису їх у вигляді «сігма-моделей». Одержані ряди можна використовувати при вивченні розділу «ряди» математичного аналізу та для складання олімпіадних задач з математики.

4) Одержані ряди було досліджено на збіжність із використанням необхідних та достатніх умов.

5) Було досліджено залежність частинних сум деяких збіжних і розбіжних числових рядів від кількості доданків. Побудовано та проаналізовано відповідні графіки залежності S_n від n.

6) Для реалізації педагогічного принципу наочності варто використовувати сучасні ІКТ, зокрема можливості табличного процесора Microsoft Excel.

ВИСНОВКИ

1. З аналізу наукової літератури вітчизняних та зарубіжних науковців добре видно, що точної дати виникнення числових рядів немає, однак у стародавньому Єгипті та Греції вже з'явилися зачатки цієї теми, зокрема існувало поняття арифметичної та геометричної прогресій, але не у звичному нам вигляді.

2. Формуванням теорії рядів у свої часи займались такі вчені: Ейлер, Гаус, Броункер, Кестнер, Менгорі, Коші, Даламбер тощо.

Стрімкий розвиток числових рядів розпочався у XVII ст. У XVIII-XIX ст. виникла необхідність формулювання достатніх умов збіжності рядів для подальшого їх дослідження, що суттєво вплинуло на розвиток теорії рядів. Зокрема у цей період сформульовано низку важливих теорем дослідження числових рядів, таких як ознака Даламбера, радикальна та інтегральна ознака Коші тощо.

3. Наведено основні поняття теорії числових рядів. Розглянуті наступні важливі теореми: необхідна умова збіжності ряду, ознака порівняння, ознака Даламбера, радикальна ознака Коші, інтегральна ознака Коші. Наведено приклади використання вищезазначених теорем для дослідження числових рядів на збіжність.

4. Було розглянуто приклади геометричної інтерпретації числових рядів. Числові ряди можуть бути згенеровані за допомогою їх геометричних моделей. Ряд може складатись із довжин відрізків, площ та об'ємів геометричних фігур тощо.

4. Згенеровано низку числових рядів із величин різноманітних геометричних об'єктів, що лежать у квадраті зі стороною $a = 1$, за допомогою графіків функцій виду $y = \frac{1}{2^{n-1}}x$ із лінійною, квадратурною та кубатурною геометричною інтерпретацією.

5. Одержані числові ряди можуть використовуватись для проведення практичних занять з математичного аналізу при вивченні розділу «числові ряди» та при складанні завдань для проведення олімпіад з математики.

6. Одержані числові ряді було досліджено на збіжність із використанням необхідної та достатніх умов, таких як ознака Даламбера, ознака порівняння тощо. Для реалізації педагогічного принципу наочності було побудовано графіки залежності частинних сум деяких рядів від кількості доданків.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Александрова Н. В. История математических терминов, понятий, значений : Словарь – справочник / Н. В. Александрова. – 3- е изд., испр. – Москва : Изд-во ЛКИ, 2008. – 248 с.

2. Апорії Зенона. URL: https://vue.gov.ua/%D0%90%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%97_%D0%97%D0%B5%D0%BD%D0%BE%D0%BD%D0%B0 (дата звернення: 03.10.2021).

3. Барбаумов В. Е., Попова Н. В. Числовые и функциональные ряды. Учебное пособие. – М.: Изд-во Рос. экон. акад., 2010. – 97с.

4. Белый Е. К. Математика не для ЕГЭ. Прогрессии : учеб. пособие для абитуриентов и студентов первого курса / Е. К. Белый. – Петрозаводск : ПетрГУ, 2016. – 132 с.

5. Бурбаки Н. Очерки по истории математики / Н. Бурбаки ; пер. с фр. И. Г. Башмакова. – Москва : Изд-тво иностранной литературы, 1963. – 292 с.

6. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Генрих Вилейтнер ; пер. с нем. А. П. Юшкевич. – Москва : Гос. изд-тво физ-мат. лит-ры, 1960. – 469 с.

7. Виноградова И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу: Пособие для университетов, пед. вузов / Под. ред. И. А., Виноградова С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. В 2 ч. 3-е изд., испр. М. 2001 г.

8. Власова Е. А. Ряды / Е. А. Власова. – 3-е изд., испр. – Москва : МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2006. – 616 с.

9. Воробьев Н. Н. Теория рядов / Н. Н. Воробьев. – 4-е изд., перераб. И доп.. – Москва : Наука, 1979. – 408 с.

10. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский − 12-е изд.−М.: Наука, 1977.

11. Габ С. С. Геометрична інтерпретація рядів : кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр, спеціальності 014.04 середня освіта

(математика) / С. С. Габ ; наук. керівник В. В. Корольський. – Кривий Ріг, 2018. – 100 с.

12. Горячев А. П. Числовые и функциональные ряды / А. П. Горячев. – Москва : МИФИ, 2007. – 264 с.

13. Гурьянова К. Н. Математический анализ : учебн. пособие / К. Н. Гурьянова, У. А. Алексеева, В. В. Бояршинов. – Екатеринбург : Урал. федер. ун-т, 2014. – 332 с.

14. Жалдак М. І. Математичний аналіз функції : навч. посібник / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, С. Я. Деканов. – Київ : НПУ, 2007. – 429 с.

15. Замятин В. Н. Числовые и функциональные ряды : учебнометодическое пособие / В. Н. Замятин, С. М. Шаова. – Майкоп : АГУ, 2010. – 69 с.

16. Зорич В. А. Математический анализ. / В. А. Зорич . Часть II. −Изд. 4-е, испр.− М.: МЦНМО, 2002.−794с.

17. Камынин Л.И. Курс математического анализа. В 2-х томах. М.: Изд-во МГУ. Том 2: 1995 г.− 624 с.

18. Комарова А. А. Побудова і дослідження числових рядів, пов’язаних з елементами квадрата «танграм» : кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр, спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) / А. А. Комарова ; наук. керівник - В. В. Корольський. – Кривий Ріг, 2020. – 100 с.

19. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числових рядів / В. В. Корольський. // Новітні комп’ютерні технології : наук.-метод. зб / редкол. : С. О. Семеріков [та ін.] . – Кривий Ріг, 2017. – Том XV. – С. 57–63.

20. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії / В. В. Корольський. // Новітні комп’ютерні технології : наук.-метод. зб / редкол. : С. О. Семеріков [та ін.] . – Кривий Ріг, 2018. – Том XVI. – С. 59–66.

21. Корольський В. В. Числові ряди, які пов’язані з параметрами додекаедра / В. В. Корольський, С. С. Габ // Вісник міжнародного

дослідницького центру «Людина : мова, культура, пізнання» : науковий журнал / за ред.. В. В. Корольського. – Кривий Ріг, 2018. – Том 42. – С. 39–45.

22. Крюков М. М. До історії розвитку і становлення теорії нескінченних числових рядів / М. М. Крюков, Т. С. Клецька // Математичне моделювання. – 2013. – № 6. – С. 117 – 120.

23. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев. – 2-е вид., стер. – Москва : Дрофа, 2004. – 720 с. 28.

24. Кузьмина С. С. Числовые ряды : учебн. пособие / С. С. Кузьмина, О. Я. Шевалдина. – Екатеринбург : ГОУ ВПО УГТУ – УПИ, 2005. – 161 с.

25. Липовик В. В. Вища математика для економістів. Навчальний посібник – Кривий Ріг, 2003, 263 с.

26. Ляшко, И.И. Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента. Том 2. Ряды: Учебное пособие [Электронный ресурс] / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай. − М.: ЛКИ, 2012. − 224 с. – Режим доступу: http://alleng.org/d/math/math21.htm

27. Маркушевич А. И. Ряды. Элементарный очерк / Алексей Иванович Маркушевич. – Москва – Ленинград : Изд-во НКТПСССР, 1936. – 103 с.

28. Математичні ряди. URL https://knowledge.allbest.ru/mathematics/2c0a65625a3ad79b4d53a88521306d27_0.html (дата звернення: 03.10.2021).

29. Матяш В. И. Ряды. Курс лекций : учебн. пособие / В. И. Матяш. – 2-е изд., испр. и дополн. – Москва : МГТУ «МАМИ», 2007. – 150 с.

30. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. − М.: Наука, 2008. − 640 с.

31. Никонорова С. П. Числовые и функциональные ряды : учеб. пособие / С. П. Никонорова. – Ульяновск : УВАУ ГА(И), 2010. – 78 с.

32. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. Т.2 / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1985. – 560 с.

33. Плужникова Е. Л. Математический анализ. Ряды : учебн. пособ. / Е. Л. Плужникова, Б. Г. Разумейко. – Москва : Издательский дом «МИСис», 2011. – 141 с.

34. Романова А. М. Генерація числових рядів та дослідження їх на збіжність : кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр, спеціальності 014.04 середня освіта (математика) / А. М. Романова ; наук. керівник - В. В. Корольський. – Кривий Ріг, 2019. – 90 с.

35. Рудой Е. М. Математический анализ. Числовые и функциональные ряды : учебн. пособие / Е. М. Рудой. – Новосибирск : НГПУ, 2010. – 198 с.

36. Ряди : учебное пособие для студентов-заочников 3 курса фізикоматематических факультетов педагогических институтов / Н. Я. Виленкин, В. В. Цукерман, М. А. Доброхотова, А. Н. Сафонов. – Москва : Просвещение, 1982. – 160 с.

37. Суконник Я. Арифметико-геометрическая прогрессия / Я. Суконник // Квант. – 1975. – №1. – С. 36 – 39.

38. Тарасенко В. Компьютерная графика. Треугольник Серпинского / Владислав Тарасенко [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://grafika.me/node/42. – Заглавие с экрана.

39. Трофимов В. К. Теория рядов : учебно пособие / В. К. Трофимов, Т. С. Мурзина, Т.Э. Захарова. – Новосибирск : СибГУТИ, 2013. – 145 с.

40. Трубецков Д. И. Фракталы и время (от Ричардсона и Мандельброта до Поллока). Фрактальная геометрия / Д. И. Трубецков, Е. Г. Трубецкова. – Москва : Рос. академ. Наук, 2017. – 148.

41. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 810 с.

42. Харди Г. Расходящиеся ряды / Г. Харди ; пер. с англ. Д. А. Райкова. – Москва : Изд-тво иностранной литературы, 1951. – 498 с.

43. Цейтен Г. Г. История математики в XVI и XVII веках / Г. Г. Цейтен ; пер. с нем. П. Новиков. – Москва –Ленинград : ОНТИ, 1938. – 456 с.

44. Числові ряди з додатними членами. Достатні ознаки збіжності. URL: https://yukhym.com/uk/ryadi-ta-jikh-zbizhnist/dostatni-oznaki-zbizhnosti-chislovikh-ryadiv-z-dodatnimi-chlenami.html (дата звернення: 03.10.2021).

45. Числовые и функциональные ряды : учебное пособие / Т. Н. Титова, Т. А. Мацеевич, Е. Е. Ассеева, А. Н. Серова. – Москва : Изд-во Моск. гос. строит. ун-т, 2016. – 123 с.

46. Юшкевич А. П. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия : в 3 т. Т. 1 / Андрей Павлович Юшкевич. – Москва : Наука, 1970. – 353 с.

47. Юшкевич А. П. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия : в 3 т. Т. 1 / Андрей Павлович Юшкевич. – Москва : Наука, 1970. – 353 с

48. Юшкевич А. П. История математики. Математика XVIII столетия : в3 т. Т. 3 / Андрей Павлович Юшкевич. – Москва : Наука, 1972. – 496 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
int main()
{
   int i;  double A[100000],s1=0, s2=0, s3=0, s4=0, s5=0, s6=0, s7=0;
for(i=1;i<=2;i++)
{    A[i]=1/(pow(2,i));    s1+=A[i];}
printf ("n=2; S=%f\n", s1);
for(i=1;i<=5;i++)
{    A[i]=1/(pow(2,i));    s2+=A[i];}
printf ("n=5; S=%f\n", s2);
for(i=1;i<=10;i++)
{    A[i]=1/(pow(2,i));    s3+=A[i]; }
printf ("n=10; S=%f\n", s3);
for(i=1;i<=1000;i++)
{    A[i]=1/(pow(2,i));    s4+=A[i];}
printf ("n=1000; S=%f\n", s4);
for(i=1;i<=5000;i++)
{    A[i]=1/(pow(2,i));    s5+=A[i];}
printf ("n=5000; S=%f\n", s5);
for(i=1;i<=25000;i++)
{    A[i]=1/(pow(2,i));    s6+=A[i];}
printf ("n=25000; S=%f\n", s6);
for(i=1;i<=100000;i++)
{    A[i]=1/(pow(2,i));    s7+=A[i]; }
printf ("n=100000; S=%f\n", s7);
 return 0;}
```

Додаток Б

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
int main()
{
   int i;
   long double A[100001],s1=0, s2=0, s3=0, s4=0, s5=0, s6=0, s7=0;
for(i=1;i<=2;i++)
{    A[i]=1/(2*sqrt(1+pow(2,(2*i-2))));
   s1+=A[i];}
printf ("n=2; S=%Lf\n", s1);
for(i=1;i<=5;i++)
{     A[i]=1/(2*sqrt(1+pow(2,(2*i-2))));    s2+=A[i];}
printf ("n=5; S=%Lf\n", s2);
for(i=1;i<=10;i++)
{     A[i]=1/(2*sqrt(1+pow(2,(2*i-2))));    s3+=A[i];}
printf ("n=10; S=%Lf\n", s3);
for(i=1;i<=1000;i++)
{     A[i]=1/(2*sqrt(1+pow(2,(2*i-2))));    s4+=A[i];}
printf ("n=1000; S=%Lf\n", s4);
for(i=1;i<=5000;i++)
{     A[i]=1/(2*sqrt(1+pow(2,(2*i-2))));    s5+=A[i];}
printf ("n=5000; S=%Lf\n", s5);
for(i=1;i<=25000;i++)
{     A[i]=1/(2*sqrt(1+pow(2,(2*i-2))));    s6+=A[i];}
printf ("n=25000; S=%Lf\n", s6);
for(i=1;i<=100000;i++)
{     A[i]=1/(2*sqrt(1+pow(2,(2*i-2))));    s7+=A[i];}
printf ("n=100000; S=%Lf\n", s7);
   return 0;
}
```

Додаток В

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
int main()
{
   int i;
   long double A[100001],s1=0, s2=0, s3=0, s4=0, s5=0, s6=0, s7=0;
for(i=1;i<=2;i++)
{   A[i]=pow(2,i-1)/(sqrt(1+pow(2,(2*i-2))));   s1+=A[i];}
printf ("n=2; S=%Lf\n", s1);
for(i=1;i<=5;i++)
{    A[i]=pow(2,i-1)/(sqrt(1+pow(2,(2*i-2))));   s2+=A[i];}
printf ("n=5; S=%Lf\n", s2);
for(i=1;i<=10;i++)
{    A[i]=pow(2,i-1)/(sqrt(1+pow(2,(2*i-2))));   s3+=A[i];}
printf ("n=10; S=%Lf\n", s3);
for(i=1;i<=1000;i++)
{    A[i]=pow(2,i-1)/(sqrt(1+pow(2,(2*i-2))));   s4+=A[i];}
printf ("n=1000; S=%Lf\n", s4);
for(i=1;i<=5000;i++)
{    A[i]=pow(2,i-1)/(sqrt(1+pow(2,(2*i-2))));   s5+=A[i];}
printf ("n=5000; S=%Lf\n", s5);
for(i=1;i<=25000;i++)
{    A[i]=pow(2,i-1)/(sqrt(1+pow(2,(2*i-2))));   s6+=A[i];}
printf ("n=25000; S=%Lf\n", s6);
for(i=1;i<=100000;i++)
{    A[i]=(pow(2,i-1))/(sqrt(1+pow(2,(2*i-2))));   s7+=A[i];}
printf ("n=100000; S=%Lf\n", s7);
   return 0;
}
```

Додаток Г

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
int main()
{
   int i;
   long double A[100001],s1=0, s2=0, s3=0, s4=0, s5=0, s6=0, s7=0;

for(i=1;i<=2;i++)
{A[i]=pow(2,i)/((sqrt(4+(pow(2,(2*i)))))*(sqrt(1+(pow(2,(2*i)))))); s1+=A[i];}
printf ("n=2; S=%Lf\n", s1);
for(i=1;i<=5;i++)
{A[i]=pow(2,i)/((sqrt(4+(pow(2,(2*i)))))*(sqrt(1+(pow(2,(2*i)))))); s2+=A[i];}
printf ("n=5; S=%Lf\n", s2);
for(i=1;i<=10;i++)
{A[i]=pow(2,i)/((sqrt(4+(pow(2,(2*i)))))*(sqrt(1+(pow(2,(2*i)))))); s3+=A[i];}
printf ("n=10; S=%Lf\n", s3);
for(i=1;i<=1000;i++)
{ A[i]=pow(2,i)/((sqrt(4+(pow(2,(2*i)))))*(sqrt(1+(pow(2,(2*i)))))); s4+=A[i];}
printf ("n=1000; S=%Lf\n", s4);
for(i=1;i<=5000;i++)
{ A[i]=pow(2,i)/((sqrt(4+(pow(2,(2*i)))))*(sqrt(1+(pow(2,(2*i)))))); s5+=A[i];}
printf ("n=5000; S=%Lf\n", s5);
for(i=1;i<=25000;i++)
{A[i]=pow(2,i)/((sqrt(4+(pow(2,(2*i)))))*(sqrt(1+(pow(2,(2*i)))))); s6+=A[i];}
printf ("n=25000; S=%Lf\n", s6);
for(i=1;i<=100000;i++)
{A[i]=pow(2,i)/((sqrt(4+(pow(2,(2*i)))))*(sqrt(1+(pow(2,(2*i)))))); s7+=A[i];}
printf ("n=100000; S=%Lf\n", s7);
   return 0;
}
```

Додаток Д

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
int main()
{
    int i;
    long double A[100001],s1=0, s2=0, s3=0, s4=0, s5=0, s6=0, s7=0;

for(i=1;i<=2;i++)
{    A[i]=1/(pow(2, 2*i+1));    s1+=A[i];}
printf ("n=2; S=%0.64Lf\n", s1);
for(i=1;i<=5;i++)
{     A[i]=1/(pow(2, 2*i+1));    s2+=A[i];}
printf ("n=5; S=%0.64Lf\n", s2);
for(i=1;i<=10;i++)
{     A[i]=1/(pow(2, 2*i+1));    s3+=A[i];}
printf ("n=10; S=%0.64Lf\n", s3);
for(i=1;i<=1000;i++)
{     A[i]=1/(pow(2, 2*i+1));    s4+=A[i];}
printf ("n=1000; S=%0.64Lf\n", s4);
for(i=1;i<=5000;i++)
{     A[i]=1/(pow(2, 2*i+1));    s5+=A[i];}
printf ("n=5000; S=%0.64Lf\n", s5);
for(i=1;i<=25000;i++)
{     A[i]=1/(pow(2, 2*i+1));    s6+=A[i];}
printf ("n=25000; S=%0.64Lf\n", s6);
for(i=1;i<=100000;i++)
{    A[i]=1/(pow(2, 2*i+1));    s7+=A[i];}
printf ("n=100000; S=%0.64Lf\n", s7);
    return 0;
}
```

Додаток Е

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
int main()
{
   int i;
   long double A[100001],s1=0, s2=0, s3=0, s4=0, s5=0, s6=0, s7=0;

for(i=1;i<=20;i++)
{    A[i]=(pow(2, 3*i-3))/((1+pow(2, 2*i-2))*(1+pow(2, 2*i)));        s1+=A[i];}
printf ("n=20; S=%Lf\n", s1);
for(i=1;i<=50;i++)
{     A[i]=(pow(2, 3*i-3))/((1+pow(2, 2*i-2))*(1+pow(2, 2*i)));    s2+=A[i];}
printf ("n=50; S=%Lf\n", s2);
for(i=1;i<=300;i++)
{    A[i]=(pow(2, 3*i-3))/((1+pow(2, 2*i-2))*(1+pow(2, 2*i))); s3+=A[i];}
printf ("n=300; S=%Lf\n", s3);
for(i=1;i<=1000;i++)
{    A[i]=(pow(2, 3*i-3))/((1+pow(2, 2*i-2))*(1+pow(2, 2*i)));     s4+=A[i];}
printf ("n=1000; S=%Lf\n", s4);
for(i=1;i<=5000;i++)
{     A[i]=(pow(2, 3*i-3))/((1+pow(2, 2*i-2))*(1+pow(2, 2*i)));    s5+=A[i];}
printf ("n=5000; S=%Lf\n", s5);
for(i=1;i<=25000;i++)
{     A[i]=(pow(2, 3*i-3))/((1+pow(2, 2*i-2))*(1+pow(2, 2*i)));    s6+=A[i];}
printf ("n=25000; S=%Lf\n", s6);
for(i=1;i<=100000;i++)
{    A[i]=(pow(2, 3*i-3))/((1+pow(2, 2*i-2))*(1+pow(2, 2*i)));    s7+=A[i];}
printf ("n=100000; S=%Lf\n", s7);
   return 0;
}
```

Додаток Ж

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
int main()
{
   int i;
   double A[100000],s1=0, s2=0, s3=0, s4=0, s5=0, s6=0, s7=0;
for(i=1;i<=2;i++)
{    A[i]=((pow(2, i)-1)*3.14)/(pow(2, 2*i));    s1+=A[i];}
printf ("n=2; S=%f\n", s1);
for(i=1;i<=5;i++)
{    A[i]=((pow(2, i)-1)*3.14)/(pow(2, 2*i));    s2+=A[i];}
printf ("n=5; S=%f\n", s2);
for(i=1;i<=10;i++)
{    A[i]=((pow(2, i)-1)*3.14)/(pow(2, 2*i));    s3+=A[i];}
printf ("n=10; S=%f\n", s3);
for(i=1;i<=1000;i++)
{   A[i]=((pow(2, i)-1)*3.14)/(pow(2, 2*i));    s4+=A[i];}
printf ("n=1000; S=%f\n", s4);
for(i=1;i<=5000;i++)
{    A[i]=((pow(2, i)-1)*3.14)/(pow(2, 2*i));    s5+=A[i];}
printf ("n=5000; S=%f\n", s5);
for(i=1;i<=25000;i++)
{    A[i]=((pow(2, i)-1)*3.14)/(pow(2, 2*i));    s6+=A[i];}
printf ("n=25000; S=%f\n", s6);
for(i=1;i<=100000;i++)
{    A[i]=((pow(2, i)-1)*3.14)/(pow(2, 2*i));    s7+=A[i];}
printf ("n=100000; S=%f\n", s7);

 return 0;}
```