МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри
__________ Д.Є. Бобилєв   Реєстраційний №___________
(підпис)
«__»_______________2021 р.   «___»______________2021р.

РОЗВИТОК УМІНЬ УЧНІВ ДОВОДИТИ ЧИСЛОВІ НЕРІВНОСТІ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм-16
ступінь вищої освіти магістр
спеціальності: 014.04 Середня освіта (Математика)
Босько Надії Сергіївни
Керівник: канд. пед. наук, доцент
Бобилєв Дмитро Євгенович
Оцінка:
Національна шкала ____________________
Шкала ECTS____ Кількість балів_______
Голова ЕК __________ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
Члени ЕК __________ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
__________ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
__________ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
__________ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Змістова лінія «Нерівності» охоплює значну частину шкільного курсу алгебри та має вагоме практичне значення. Змістове багатство цієї лінії, способів та прийомів розв’язання, методів доведення нерівностей відкриває широкі можливості для її застосування в різних розділах математики, а не лише при вивченні ряду тем шкільного курсу алгебри. За допомогою нерівностей та їх систем розв’язуються також важливі прикладні задачі [13].

Вивчення нерівностей та їх систем в ШКМ відбувається поступово і пов’язане з такими видами діяльності:

- розв’язування нерівностей;
- розв’язування систем нерівностей;
- доведення нерівностей.

Аналіз навчальної, науково-методичної літератури показує, що велика увага приділяється першому і другому видам діяльності, а доведення нерівностей розглядається менш детально. На нашу думку, саме при профільному навчанні математики слід приділити увагу доведенню числових нерівностей, адже такий вид діяльності розвиває інтелектуальні навички такі, як критичне та творче мислення. Тому ми обрали темою нашої роботи – «Розвиток умінь учнів доводити числові нерівності в профільної школи».

Можна навести такі основні напрямки розгортання лінії нерівностей в ШКМ:

а) Прикладна спрямованість лінії нерівностей розкривається при розв'язанні текстових задач, вивченні можливостей використання алгебраїчного методу та можливостей використання методів математичного моделювання [24].

б) Теоретико-математична спрямованість лінії нерівностей полягає у дослідженні та вивченні деяких важливих типів нерівностей та їх систем, засвоєнні та опрацюванні відповідних понять і методів [57].

в) Рівняння та нерівності тісно пов’язані із іншими розділами математики.

г) Дуже часто нерівності зустрічаються серед завдань математичних олімпіад та конкурсів, а також у завданнях ЗНО.

Ознайомившись з науковою літературою, зокрема, роботами Комова М.П. [32], Солтан Г.Н. [60], Мельникова Ю. Б. [41], Паюл М. В. [46], Шахмейстера А. Х. [68] присвяченими доведенню і розв’язуванню нерівностей, робимо висновок, що окремим питанням методики навчання нерівностей та їх систем в ШКМ присвячено чимало досліджень. Проте, незважаючи на значний позитивний досвід у розробці методик вивчення теми «Нерівності», як показує практика, учні старшої школи не в повній мірі володіють основними знаннями та уміннями доведення нерівностей. Тому перед вчителем стоїть завдання – формувати в учнів вміння доводити числові нерівності.

Мета дослідження: розробити методику розвитку компонентів алгебраїчної культури учнів профільної школи при вивченні числових нерівностей.

Об’єкт дослідження: процес навчання алгебри і початків аналізу у профільній школі.

Предмет дослідження: методичні особливості навчання учнів доведеню основних типів числових нерівностей.

Відповідно до мети дослідження сформулювано наступні **завдання:**

1) провести аналіз психолого-педагогічної, навчальної і методичної літератури з метою порівняння різних методичних прийомів вивчення теми.

2) вивчити різні трактовки понять «математична культура учня» і «алгебраїчна культура учня», представлені в психолого-педагогічній та методичній літературі;

3) провести логіко-дидактичний аналіз навчального матеріалу курсу алгебри з теми «Числові нерівності»;

4) Розробити методичні рекомендації щодо формування алгебраїчної культури учнів при вивченні числових нерівностей;

5) Розробити методику навчання учнів доведенню числових нерівностей.

6) Розробити спецкурс, спрямований на розвиток умінь учнів доводити числові нерівності у профільній школі.

Методи дослідження, обрані для реалізації поставлених завдань:

- *теоретичні*: вивчення і аналіз психолого-педагогічної, навчальної та методичної літератури з теми, узагальнення;
- *емпіричні:* вивчення педагогічного досвіду, спостереження, порівняння.

Практичне значення магістерської роботи полягає в тому, що її матеріали можуть бути використані вчителями математики, студентами-практикантами при підготовці до проведення уроків чи факультативних занять, учнями з профільним рівнем навчання математики та студентами фізико-математичного факультету під час самостійної роботи.

Апробації дослідження:

- Публікація статті на тему «Методичні прийоми попередження помилок при вивченні теми «Нерівності, системи нерівностей» в основній школі» у електронному збірнику № 7 Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка «Наукові записки молодих учених» [69].
- Участь у Всеукраїнській науково-практичній конференції «Проблеми розвитку професійних компетентностей вчителів природничо-математичного напрямку», яка проходила 17 – 18 листопада 2021 року.
- Публікація тез «Розвиток умінь учнів доводити числові нерівності в курсі математики профільної школи» до збірника тез доповідей учасників Всеукраїнської науково-практичної конференції «Про-

блеми розвитку професійних компетентностей вчителів природничо-математичного напрямку».

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів, загального висновку, списку використаних джерел, що містить 69 найменувань та двох додатків. У вступі підкреслена актуальність дослідження, описана мета і завдання дослідження. Перший розділ присвячений розгляду питань організації профільного навчання математики та теоретичних основ вивчення нерівностей у шкільному курсі математики. У другому розділі описана методика формування умінь і навичок доведення числових нерівностей.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

1.1. Місце теми «Числові нерівності» у програмі шкільного курсу математики

Пропедевтика вивчення теми: «Числові нерівності» розпочинається ще в початковій школі, коли учні вчаться порівнювати кількість предметів.

В 5 класі в темі 1: «Натуральні числа», після того як вивчають, що називається натуральними числами, числом нуль, координатним променем, учні порівнюють натуральні числа. В темі 2: «Дробові числа» спочатку порівнюють звичайні дроби з однаковими знаменниками, а вже потім – десяткові дроби. А вже в 6 класі у темі 2: «Звичайні дроби» діти описують правила порівняння звичайних дробів та розв'язують вправи, що передбачають порівняння дробів. В цьому ж класі після вивчення теми 4 учні порівнюють раціональні числа [40, 43].

Левова частка вивчення числових нерівностей припадає на 9 клас [10, 28, 42]. За навчальною програмою 16 годин присвячено вивченню теми 1: «Нерівності» (Табл. 1.1). В даній темі 8 годин відведено на вивчення числових нерівностей, їх властивостей та дій над ними [62].

Таблиця 1.1

Орієнтовне календарне планування на тему: «Числові нерівності та їх властивості» у 9 класі

№ уроку	*Тема уроку*	*Тип уроку*	*Мета уроку*
Тема 1. НЕРІВНОСТІ (16 год)			
Тема 1.1 Числові нерівності та їх властивості (8 год)			
1	Числові нерівності. Доведення числових нерівностей	Засвоєння знань, вироблення вмінь	Домогтися засвоєння учнями змісту поняття числові нерівності, означення, що виражає залежність між співвідношеннями >, <, = і знаком різниці лівої та правої частин нерівності, а також виробити вміння доводити нерівності з використанням цього означення.

Продовж. табл. 1.1

2	Числові нерівності. Доведення числових нерівностей	Закріплення знань, вироблення вмінь	Домогтися засвоєння учнями змісту: додаткових нерівностей для суми взаємно обернених додатних чисел та середнього арифметичного двох невід'ємних чисел (у порівнянні з їх середнім геометричним) та доведення цих нерівностей; способу застосування доведених нерівностей при доведенні інших числових нерівностей.
3	Основні властивості числових нерівностей.	Засвоєння знань, вироблення первинних вмінь.	Домогтися засвоєння учнями змісту основних властивостей числових нерівностей та їхніх наслідків, а також способу доведення цих властивостей. Виробити вміння застосовувати набуті знання при розв'язуванні вправ на порівняння буквених виразів та на доведення відповідних нерівностей [59].
4	Основні властивості числових нерівностей.	Доповнення знань, вироблення вмінь, відпрацювання навичок.	Домогтися засвоєння учнями змісту поняття «оцінити значення виразу»; закріпити знання учнів про зміст властивостей числових нерівностей та їхніх наслідків.
5	Почленне додавання і множення нерівностей. Застосування властивостей числових нерівностей для оцінювання значення виразу.	Засвоєння знань, вироблення первинних умінь.	Домогтися засвоєння учнями змісту поняття «додати нерівності почленно» та «перемножити нерівності почленно», а також продовжити роботу з відпрацюванням навичок доведення нерівностей, порівняння виразів із використанням означення та властивостей числових нерівностей [59].
6	Почленне додавання і множення нерівностей. Застосування властивостей числових нерівностей для оцінювання значення виразу.	Закріплення знань, вироблення вмінь.	Домогтися закріплення учнями змісту: властивостей числових нерівностей і теорем про по членне додавання та множення нерівностей; наслідків їх властивостей числових нерівностей. Відпрацювати навички застосовувати набуті знання для розв'язування вправ [59].
7	Розв'язування вправ. Підсумковий урок.	Систематизація й узагальнення знань та вмінь.	Повторити, систематизувати та узагальнити знання за розділом «Числові нерівності та їх властивості».
8	Тематична контрольна робота	Контроль знань та вмінь.	Перевірити рівень знань та вмінь учнів, набутих ними під час вивчення розділу «Числові нерівності та їх властивості».

Друга тема курсу алгебри у 9–му класі «Доведення нерівностей» є продовженням і розширенням відповідної теми 8 класу (Табл. 1.2). Проте у 8 класі на меті було набуття навичок розв’язувати нерівності, а в 9 класі – їх доведення (Табл. 1.3). Треба розглянути кілька основних методів доведення нерівностей. Робота над цією темою формує в учнів евристичне мислення, навички аналізу і математичну інтуїцію [63].

Таблиця 1.2

Нерівності у курсі алгебри 8 класу

Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
Тема 4. Нерівності Числові нерівності та їх властивості. Числові проміжки. Об’єднання та переріз числових проміжків. Нерівності з однією змінною. Розв’язування лінійних нерівностей з однією змінною. *Рівносильні нерівності. Нерівність – наслідок до неї.* Системи і *сукупності* лінійних нерівностей з однією змінною. *Розв’язування лінійних нерівностей з параметром. Розв’язування рівнянь і нерівностей з модулем.*	**Описує** поняття: числова нерівність, нерівність із змінною. **Формулює** означення понять: розв’язок нерівності з однією змінною, рівносильні нерівності, нерівність – наслідок даної, розв’язок системи і сукупності кількох нерівностей з однією змінною. **Доводить** властивості числових нерівностей. **Зображує** на числовій прямій множини, задані за допомогою нерівностей. **Розв’язує** лінійні нерівності, а також системи і сукупності лінійних нерівностей з однією змінною.

Таблиця 1.3

Нерівності у курсі алгебри 9 класу

Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
Тема 2. Доведення нерівностей Основні методи доведення нерівностей. *Нерівність Коші для двох чисел та їх застосування. Нерівності між середніми величинами двох додатних чисел (середнє гармонічне, середнє геометричне, середнє арифметичне, середнє квадратичне). [Нерівність Коші-Буняковського.] Метод використання відомих нерівностей.*	**Описує** основні методи доведення нерівностей: використання означення нерівності, доведення від супротивного, використання відомої нерівності. **Доводить** нерівність Коші для двох невід’ємних чисел, нерівність для суми двох додатних взаємно обернених чисел. **Розв’язує** вправи, у яких передбачено використання основних методів доведення нерівностей.

Провівши аналіз навчальної програми з алгебри та початків аналізу профільної школи [40, 43] та розглянувши прикладну спрямованість курсу [58], можна зробити висновок, що з нерівностями учні зустрічаються як у 10 (Табл. 1.4), так і в 11 класі (Табл. 1.5). Але доведенням числових нерівностей вони займаються лише при вивченні теми «Метод математичної індукції» у 10 класі профільної школи.

Таблиця 1.4

Нерівності у курсі алгебри та початків аналізу 10 класу

Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
Тема 1. Функції, многочлени, рівняння і нерівності Рівносильні перетворення нерівностей. Метод інтервалів. Рівняння і нерівності, що містять знак модуля. Рівняння і нерівності з параметрами. Нерівність з двома змінними. Графік нерівності з двома змінними. Системи рівнянь і нерівностей. Метод математичної індукції.	***Застосовує*** властивості функцій та многочленів до розв'язування рівнянь і нерівностей. ***Описує*** зміст понять "рівняння-наслідок" і "рівносильні перетворення рівнянь та нерівностей"; ***використовує*** їх при розв'язуванні рівнянь та нерівностей. ***Розв'язує*** нерівності за допомогою методу інтервалів; рівняння і нерівності, які містять знак модуля і параметри. ***Будує*** нескладні графіки рівнянь та нерівностей з двома змінними. ***Користується*** методом математичної індукції для доведення тверджень.
Тема 2. Степенева функція Ірраціональні нерівності. Ірраціональні рівняння, нерівності з параметрами. [Системи рівнянь та нерівностей з параметрами.]	***Розв'язує*** ірраціональні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами. ***Застосовує*** властивості функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей.
Тема 4. Тригонометричні рівняння і нерівності Тригонометричні нерівності. Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами. Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції.	***Розв'язує*** тригонометричні рівняння, тригонометричні нерівності, зокрема з параметрами.

Таблиця 1.5

Нерівності у курсі алгебри і початків аналізу 11 класу

Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
Тема 1. Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування Застосування похідної для розв'язування рівнянь та доведення нерівностей.	***Застосовує*** результати дослідження функції за допомогою похідної до розв'язування рівнянь і нерівностей та до доведення нерівностей.

Продовж. табл. 1.5

Тема 2. Показникова та логарифмічна функції Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами.	***Розв'язує*** показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами.
Тема 5. Рівняння, нерівності та їх системи. Узагальнення та систематизація. Методи розв'язування нерівностей з однією змінною (рівносильні перетворення, метод інтервалів, заміна змінної, застосування властивостей функцій тощо).	***Розрізняє*** класи рівнянь, нерівностей, їх систем, методи їх розв'язування. ***Обґрунтовує*** рівносильність виконаних перетворень. ***Застосовує*** загальні методи та прийоми до розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем. ***Розв'язує*** рівняння, нерівності, системи рівнянь та нерівностей з параметрами.

1.2. Організація профільного навчання математики

Математика є універсальною та багатогранною мовою, яка широко застосовується в усіх сферах людської діяльності. На сучасному етапі розвитку суспільства різко зростає її значення. Також математика має велике значення і в розвитку особистості, в становленні її світогляду, розвитку мислення, уваги, пам'яті та інших якостей. Ці дві обставини і визначають роль математики в системі шкільної освіти, в підготовці кожного члена сучасного суспільства до повсякденного життя і трудової діяльності [45].

Поряд з розв'язанням цієї головної задачі навчання математики в середніх навчальних закладах виникає необхідність забезпечити суспільство спеціалістами різного рівня і профілю, а також створити умови для розвитку особистості у відповідності до її можливостей і потреб. А для цього необхідна профільна диференціація навчання взагалі і математики зокрема [33].

Основною задачею вивчення математики є забезпечення свідомого і міцного оволодіння учнями системою математичних знань, вмінь і навичок, необхідних у повсякденному житті, а також достатніх для вивчення суміжних дисциплін і продовження освіти [67]. Поряд з вирішенням головної задачі, оволодінням конкретними обов’язковими математичними знаннями, профільне навчання математики передбачає формування стійкого інтересу учнів до предмету, виявлення і розвиток їх математичних здібностей, підготовку до навчання у вищому учбовому закладі [31].

«Профільне навчання – вид диференційованого навчання, який передбачає врахування освітніх потреб, нахилів та здібностей учнів і створення умов для навчання старшокласників відповідно до їхнього професійного самовизначення, що забезпечується за рахунок змін у цілях, змісті та структурі організації навчання» [34].

Зміст профільної освіти і методи навчання зумовлені цілями, а цілі – якостями особистості майбутнього випускника, його моделлю, яка в свою чергу детермінується змінами соціально-економічних умов життя суспільства.

Отже, зміст профільної освіти прямо пов’язаний з формуванням стійкої системи соціально-значущих якостей особистості [16].

Метою навчання математики на профільному рівні є: забезпечення свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих навчальних закладах за спеціальностями зі значною математичною складовою [44].

Аби досягти зазначеної мети слід виконувати наступні завдання:

- формувати в учнів науковий світогляд, уявлення про ідеї та методи математики, про роль математичної освіти у пізнанні дійсності, усвідомлення математичних знань як невід’ємної складової загальної культури людини, необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві; стійкої позитивної мотивації до навчання [44];
- стимулювати оволодіння учнями математичною мовою, системою математичних знань, навичками та уміннями, потрібними у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності, достатніх для успішного оволодіння знаннями інших освітніх галузей і забезпечення мотивації потреби неперервності навчатися впродовж життя [44];
- розвивати інтелектуальний рівень особистості – розвивати логічне мислення та інтуїцію учнів, просторову уяву, пам'ять, увагу, алгоритмічну, інформаційну та графічну культуру [44];
- виховувати в учнів активну громадянську позицію та формувати позитивні риси особистості: ініціативність та творчість, пізнавальну самостійність та інтерес, потребу в самоосвіті, здатность адаптуватися до умов, що змінюються [44];
- формувати життєві компетентності учня – позитивні рис характеру (наполегливість, волю, культуру думки і поведінки, обґрунтованість суджень,

відповідальність за доручену справу тощо).

У відповідності до профілю, профільне навчання створює деяку проблему викладання математики, але навчання математики повинно здійснюватися відповідно до основних положень і принципів концепції математичної освіти в Україні, а саме:

– система математичної освіти є цілісною системою формування особистості на основі досягнень математики, психолого-педагогічної науки;

– система математичної освіти повинна бути безупинною і забезпечувати наступність в освіті між різними ланками системи освіти;

– ця система базується на основах гуманізації навчально-виховного процесу і гуманітаризації змісту освіти;

– система математичної освіти повинна реалізувати рівневу і профільну диференціацію на основі базового змісту;

– навчання математики повинно мати розвиваючий характер і прикладну спрямованість;

– у змісті навчання математики має бути виділена інваріантна базисна частина і варіативна;

– пріоритетними в організації навчання математики повинні бути активні методи навчання і сучасні технології;

– застосування інформаційних технологій навчання [45].

Реалізація профільного навчання математики повинна здійснюватися з урахуванням його мети, особливостей змісту й форми у порівнянні з навчанням математики в загальноосвітніх класах [45].

Згідно з визначенням Бурди М. І. [17], профільна диференціація навчання математики повинна:

- сформувати необхідний загальнокультурний рівень математичної підготовки школярів, який визначається вимогами суспільства й можливостями учнів;

- задовольнити потреби профільної підготовки в розвитку пізнавальних і математичних видів діяльності учнів, що характерні для даного профілю;
- формувати засобами математики професійні нахили учнів [17].

Як зазначають А. В. Фурман [64], С. В. Петренко і О. В. Мартиненко [47], профільна диференціація навчання математики передбачає:

- створення умов для свідомого вибору учнями профілю;
- досягнення всіма учнями базового рівня навчання математики;
- розробку державних стандартів з математики для різних профілів навчання;
- реалізацію прикладної спрямованості навчання математики, орієнтованої на профіль навчання як одного з головних засобів формування профільних інтересів засобами математики [64];
- відмінність змісту навчання математики в профільних класах і звичайних класах;
- реалізацію рівневої диференціації, що підсилює диференціацію навчання математики для кожного профілю;
- розмаїтість форм і видів класної та позакласної роботи;
- поглиблене вивчення математики як одного з видів профільного навчання [47].

Структуру профільного навчання математики визначає принцип поступового моделювання у навчальному процесі математичної діяльності спеціалістів відповідного профілю. Цей принцип у певній мірі може бути реалізований такою структурою змісту профільного навчання:

- адекватним профілю змістом основного курсу математики у відповідності до базового навчального плану (базова профільна математична підготовка);

- системою курсів за вибором (за рахунок варіативного компоненту), які складаються з невеликих за змістом навчальних модулів, враховують різноманіття інтересів і можливостей учнів даного профілю, які поглиблюють та розширюють основний курс математики у відповідності до профілю навчання (варіативна математична підготовка);

- організацією самостійної творчої роботи учнів, системою індивідуальних завдань, спрямованих на розвинення професійних схильностей учнів, їхнього інтересу до застосувань математики (особистісно-орієнтована математична підготовка) [45].

Такі особливості профільного навчання математики найбільш повно враховують індивідуальні потреби, здібності та нахили учнів, така освіта передбачає наукове вивчення дитячої природи, раціональну організацію навчання дитини [23].

Виділяються три етапи профільної диференціації в навчанні математики.

Перший етап (5 – 7 класи) – це етап формування профільних інтересів. Тут формується свідомий вибір рівня учбової діяльності (базовий, основний, поглиблений, творчий), в процесі змагань, ігрової та учбової діяльності формуються пізнавальні інтереси та мотиви пізнання учнів. На цьому етапі важливу роль відіграють різноманітні форми позакласної роботи з предмету: гуртки, турніри, конкурси, олімпіади, вечори цікавої математики тощо.

Другий етап (8 – 9 класи) – це етап становлення профільних намірів. Тут реалізується різнорівневе вивчення курсу математики за стандартними навчальними планами; приділяється посилена увага позакласній роботі учнів, організується самостійна робота учнів, що відповідає їх індивідуальним прихильностям, проводиться цілеспрямована робота щодо професіональної орієнтації учнів.

Третій етап (10 – 11 класи) – це етап безпосередньої реалізації профільного навчання математики. Він забезпечується адекватним профілю змістом основного курсу математики, системою курсів за вибором, організацією самостійної творчої роботи учнів [45].

Інваріантна частина математичної освіти в старшій школі може реалізовуватись як двома курсами "Алгебра та початки аналізу", "Геометрія", так і інтегрованим курсом "Математика". Інтегрований курс доцільний, насамперед, для загальнокультурного напрямку [23].

Вчителі математики у своїй професійній діяльності мають керуватися такими положеннями:

1) зміст математичної освіти має бути чітко зорієнтований на розвиток особистості в цілому, а також тих видів діяльності, які є специфічними для даного профілю;

2) зміст профільної математичної освіти має забезпечувати потреби профільної підготовки до математики ;

3) для підвищення ролі математики в процесі свідомого осмислення навколишнього світу необхідне доповнення традиційних змістових ліній курсу математики матеріалом, який сприяє формуванню імовірнісно-статистичних уявлень в учнів [37].

Необхідною умовою організації якісного профільного навчання є створення адекватного та раціонального навчально-методичного забезпечення, що відбиває колективний досвід роботи викладачів, методистів, учених, оскільки зміст курсу математики реалізується в комплексі навчальних засобів [47].

Структура навчально-методичного забезпечення профільного навчання математики складається з:

– нормативного комплексу (програма і робоча програма);

– навчального комплексу (підручник, дидактичні матеріали, набори навчальних тестів, збірники задач, наочні прилади);
– загально-методичного комплекту (посібники для вчителів);
– методичного комплекту (матеріали розроблені викладачем);
– системи контролю (тексти тематичних, підсумкових контрольних робіт, набори контролюючих тестів) [47].

Профільне навчання математики вимагає використання специфічних форм та методів навчання. Можливість їх застосування зумовлена наявністю більш розширених мотивів учнів профільних класів та шкіл до навчання порівняно із загальноосвітніми навчальними закладами, що проводять навчання математики на рівні стандарту. Невід’ємною складовою профільного навчання математики є виконання кожним учнем індивідуальної роботи творчого характеру [61]. При їх виконанні поряд з реферуванням літературних джерел, теоретичним розв’язанням математичної задачі використовуються спостереження, проведення експериментів як фізичних, так і імітаційних за допомогою комп'ютерів [23].

1.3. «Числові нерівності» в профільній школі

Окремої теми «Числові нерівності» у 10 - 11 класах програмою не передбачено. Але числові нерівності є підгрунттям для подальшого вивчення більш складних видів нерівностей. Тому ми вважаємо, що вміння доводити числові нерівності допоможе учням розвивати навички доведення складніших видів нерівностей.

За програмою у 10 класі профільної школи числові нерівності зустрічаються у темі 1: «Функції, многочлени, рівняння і нерівності», а в 11 класі [4, 6] темі 1: «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» та в темі 4: «Рівняння, нерівності та їх системи. Узагальнення та систематизація».

Із доведенням числових нерівностей учні зустрічаються лише при вивченні методу математичної індукції у 10 класі.

Наведемо кілька прикладів на доведення числових нерівностей із підручників профільного рівня навчання алгебри та початків аналізу, запропонованих МОН України для учнів 10 класів.

Приклад 1. Доведіть, що для будь-якого $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ *і* $\boldsymbol{n} > \mathbf{4}$ виконується нерівність $\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}} > \boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}$.

Доведення: При $\boldsymbol{n} = \mathbf{5}$ маємо правильну нерівність $\mathbf{2}^{\mathbf{5}} > \mathbf{5}^{\mathbf{2}}$.

Нехай нерівність, яку треба довести, є правильною при $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$, тобто $\mathbf{2}^{\boldsymbol{k}} > \boldsymbol{k}^{\mathbf{2}}$, де $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{k} > \mathbf{4}$. Маємо:

$$\mathbf{2} \cdot \mathbf{2}^{\boldsymbol{k}} > \mathbf{2}\boldsymbol{k}^{\mathbf{2}};$$

$$\mathbf{2}^{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}} > \mathbf{2}\boldsymbol{k}^{\mathbf{2}}.$$

Легко показати, що при $\boldsymbol{k} > \mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{2}}$, а тим більше при $\boldsymbol{k} > \mathbf{4}$, справджується нерівність $\mathbf{2}\boldsymbol{k}^{\mathbf{2}} > (\boldsymbol{k} + \mathbf{1})^{\mathbf{2}}$.

Ми показали, що при $\boldsymbol{n} = \mathbf{5}$ виконується теорема «база індукції», і при $\boldsymbol{n} > \mathbf{4}$ довели теорему «індуктивний перехід». Отже, розглядувана нерівність є правильною при будь-яких натуральних $\boldsymbol{n}$ таких, що $\boldsymbol{n > 4}$ [5, с. 52].

<u>Приклад 2.</u> Доведіть, що при будь-якому натуральному $\boldsymbol{n > 1}$

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n+1}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n+2}} + \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{2n}} > \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{24}}$$

<u>Доведення:</u> Позначимо ліву частину нерівності через $\boldsymbol{S_n}$.

1) $\boldsymbol{S_2 = \frac{7}{12} = \frac{14}{24}}$, отже, при $\boldsymbol{n = 2}$ нерівність правильна.

2) Нехай $\boldsymbol{S_k > \frac{13}{24}}$ при деякому $\boldsymbol{k}$. Доведемо, що тоді і $\boldsymbol{S_{k+1} > \frac{13}{24}}$. Маємо: $\boldsymbol{S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k}}$, $\boldsymbol{S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}}$.

Порівнюючи $\boldsymbol{S_k}$ і $\boldsymbol{S_{k+1}}$, маємо:

$$\boldsymbol{S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}},$$

тобто

$$\boldsymbol{S_{k+1} - S_k = \frac{2k+2+2k+1-4k-2}{2(k+1)(2k+1)} = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)}}.$$

При будь-якому натуральному $\boldsymbol{k}$ права частина останньої рівності додатна. Тому $\boldsymbol{S_{k+1} > S_k}$. Але $\boldsymbol{S_k > \frac{13}{24}}$, виходить і $\boldsymbol{S_{k+1} > \frac{13}{24}}$.

3) Отже, на підставі принципу математичної індукції нерівність виконується для всіх $\boldsymbol{n > 1}$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ [2, с. 68].

<u>Приклад 3.</u> Доведіть, що $\boldsymbol{2^n \geq 2n + 1}$ при $\boldsymbol{n \geq 3}$.

<u>Доведення:</u> Перевіримо, чи виконуються умови 1 і 2.

1) Якщо $\boldsymbol{n = 3}$, нерівність набуває вигляду $\boldsymbol{2^3 \geq 2 \cdot 3 + 1}$ або $\boldsymbol{8 \geq 7}$.

Тому при $\boldsymbol{n = 3}$ твердження виконується.

2) Нехай ця нерівність правильна при $\boldsymbol{n = k}$, тобто $\boldsymbol{2^k \geq 2k + 1}$, де $\boldsymbol{k \geq 3}$. Доведемо, що тоді має місце нерівність $\boldsymbol{2^{k+1} \geq 2(k+1) + 1}$.

Оскільки $\boldsymbol{2^k \geq 2}$ при довільному натуральному $\boldsymbol{k}$, то, додавши нерівності $\boldsymbol{2^k \geq 2k+1}$ і $\boldsymbol{2^k \geq 2}$, отримаємо правильну нерівність $\boldsymbol{2^k + 2^k \geq 2k + 1 + 2}$ або $\boldsymbol{2^{k+1} \geq 2(k+1)+1}$.

3) Умови 1 і 2 виконуються, тому на підставі принципу математичної індукції можемо зробити висновок, що нерівність правильна для будь-якого натурального $\boldsymbol{n, n \geq 3}$ [2, с. 69].

<u>Приклад 4.</u> Довести, що для будь-якого $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+2}>\frac{13}{24}.$$

<u>Доведення:</u> 1) Якщо $\boldsymbol{n = 1}$, маємо:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{14}{24}>\frac{13}{24}.$$

2) Припустимо, що для $\boldsymbol{n = k}$ справджується нерівність:

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+2}>\frac{13}{24}. \quad (*)$$

3) Запишемо нерівність для $\boldsymbol{n = k+1}$:

$$\frac{1}{k+3}+\frac{1}{k+4}+\cdots+\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2(k+1)+1}+\frac{1}{2(k+1)+2}>\frac{13}{24}.$$

Доведемо її. Для доведення, до обох частин нерівності (*), додамо суму

$$\frac{1}{2(k+1)+1}+\frac{1}{2(k+1)+2}-\frac{1}{k+2}.$$

Тоді, за властивостями числових нерівностей, отримаємо правильну нерівність:

$$\frac{1}{k+3}+\frac{1}{k+4}+\cdots+\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2(k+1)+1}+\frac{1}{2(k+1)+2}>$$
$$>\frac{13}{24}+\frac{1}{2(k+1)+1}+\frac{1}{2(k+1)+2}-\frac{1}{k+2},$$

ліва частина якої тотожно рівна лівій частині нерівності, яку треба довести, а праву частину можна спростити. Для правої частини матимемо:

$$\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{24}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{k}+\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}(\boldsymbol{k}+\mathbf{2})}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}+\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{24}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{k}+\mathbf{3}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{k}+\mathbf{4}}=$$

$$=\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{24}}+\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{2}\boldsymbol{k}+\mathbf{3})(\mathbf{2}\boldsymbol{k}+\mathbf{4})}>\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{24}}.$$

4) Отже, нерівність для $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}+\mathbf{1}$ є правильною, а тому є правильною для будь-якого $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}$ [3, с. 77].

1.4. Складові алгебраїчної культури учнів

Вивчення змісту теми «Числові нерівності» і її розширення дає великі можливості для формування і розвитку алгебраїчної культури учнів.

За визначенням М.В. Третяка [63, с. 46], «математична культура – це складна система, яку утворюють такі її складові: математична грамотність (термінологічна грамотність, математичне мовлення, обчислювальна культура, графічна культура) та навички математичного моделювання».

Під *математичною грамотністю* С. Березін [12, с. 103] розуміє «уміння правильно застосовувати математичні терміни, наявність необхідних знань і відомостей для виконання роботи (вирішення проблеми) в конкретній області, правильної математичної мови (усної та письмової), обчислювальної та графічної культури».

Протягом усього періоду вивчення теми є можливість формувати математичну грамотність учнів. Цей процес полягає у поетапній реалізації під час освітнього процесу багатьох стратегічних навчальних дій, оскільки він є багатогранним [18]. «Мета вчителів:

- вибудувати у дітей загальний математичний стиль мислення,
- формувати логіку індуктивно-дедуктивних міркувань учнів;
- привчати учнів оперувати математичними поняттями та використовувати їх властивості у практичній діяльності;
- привчати учнів до розуміння математичної мови;
- навчити користуватися математичною термінологією та буквеною символікою;
- постійно збагачувати математичний словник учнів, їх усне та письмове математичне мовлення» [13].

Формування *термінологічної грамотності* неможливе без знання учнями специфічної наукової термінології [50, с. 99]. Ознайомлення учнів із математичною термінологією теми відбувається поступово, починаючи з 9-го класу, у відповідності з навчальною програмою, але спирається на попередні знання учнів.

Так, наприклад, на початку вивчення лінійних нерівностей з однією змінною учні проводять паралелі між змістом понять «розв'язок нерівності» і «розв'язок рівняння», «рівносильні нерівності» та «рівносильні рівняння». Використання опорних понять забезпечує доступність нових знань і готовність учнів до їх сприймання [13].

Шляхом наслідування мови учителя та в процесі виконання конкретних завдань і вправ, відбувається засвоєння учнями математичної термінології. Тож, спираючись на відповідність індивідуальних і вікових особливостей учнів, сучасному вчителю варто підбирати різні форми організації навчально-пізнавальної діяльності учнів та використовувати багатий і різноманітний арсенал дидактичного матеріалу для організації таких видів діяльності, як:

- виконання системи вправ з термінологічним спрямуванням;
- виконання вправ на читання та запис математичних виразів, нерівностей та інших математичних записів;
- виконання завдань з переходу від однієї математичної моделі до іншої;
- робота над словником математичних термінів;
- робота над розумінням і застосуванням математичних термінів;
- організація учнівських усних чи письмових повідомлень з історії виникнення та розвитку математичних понять, термінів, символів [65, с. 103].

Вправи з термінологічним спрямуванням займають особливе місце серед цих видів діяльності. А їх ефективність значно підсилюється під час виконання таких вправ, які спираються на записи виучуваних термінів на дошці чи окремих аркушах [51, с. 38]. Такі вправи передбачають оперування відповідними математичними термінами і свідоме виконання завдання.

Розв'язуючи вправи з термінологічним спрямуванням, учені мають міркувати, спираючись на розуміння математичної мови, математичних термінів та символів. Важливим вмінням учнів також є вміння цілісно сприймати зміст завдання, а вже потім розв'язувати його, відтворючи попередньо засвоєні дії, висловлювати або записувати остаточну відповідь [14, с. 13].

«У зв'язку з оновленням цілей навчання математики все більше уваги приділяється розвитку компетенцій учнів, пов'язаних з розумінням та застосуванням іншомовних математичних термінів» [61, с.138]. Наприклад, в підручнику з алгебри для 10-го класу (авт. Г.П. Бевз, Н.Г. Владімірова) 2018 року на профільному рівні [10] усі необхідні для вивчення поняття теми представлені англійською мовою.

Перед вчителем ставиться ще одне завдання - навчити учнів уважно працювати з підручником, оскільки джерелом знань та зразком правильного використання математичних термінів є підручник.

Розвиток математичного мовлення учня пов'язаний з формуванням термінологічної грамотності. Тож на уроці вчителю слід приділяти увагу правильній вимові слів, грамотністі написання, правильниму стилю при побудові речень, паралельно слідкуючи за правильністю розв'язування задач [13].

Учні не завжди можуть усвідомити відповідність запису і його словесного вираження, тому для запобігання і виправлення мовних помилок в учнів, при вивченні нерівностей, буде корисним запропонувати їм завдання такого типу:

1. Зробити запис (під диктовку вчителя) певного математичного терміна і поставити наголос.
2. Переформулювати (письмово або усно) деяку теорему.
3. Сформулювати твердження, обернене до даного.
4. Заперечити дане твердження [25, с. 91].

Розвиток математичного мовлення учнів можна здійснювати за допомогою таких форм роботи, як взаємоперевірка самостійних робіт навчаючого характеру, контроль знань учнів за схемою «запитання – відповідь», робота класу, що супроводжується коментуванням одного з учнів, математичний диктант тощо [15, с. 212].

Навчання учнів інтерпретувати (перекладати) будь-яку ситуацію чи задачу на математичну мову символів та розв’язувати її математичними засобами є головним завданням математичної освіти. А під час розв’язування задач методом математичного моделювання створюються сприятливі умови для розвитку алгебраїчної культури учнів [54]. Для перекладу умови задачі, записаної формалізованою мовою, учень повинен знати символи та вміти їх читати. Щоб виконати інтерпретацію задачі, учень повинен знати різні варіанти запису та володіти спеціальними мовними конструкціями, тому що одні й ті самі символи можуть мати різну інтерпретацію залежно від змісту математичного речення.Тому корисним буде здійснення переходів від зображення до образу, від словесного опису до символу і, навпаки, від символу до поняття (терміну) [13].

Оволодіння учнем математичною мовою значною мірою залежить від цілеспрямованого керівництва процесом розвитку усної та письмової математичної мови на уроці з боку вчителя, що сприяє свідомому розумінню учнем суті та змісту понять, походження нових термінів, знаків, [54, с. 109].

Обчислювальна культура учнів. Зрозуміло, що в математиці надзвичайно велику роль відіграють обчислення. І тема «Числові нерівності» не є виключенням. Правильно організована вчителем обчислювальна діяльність на уроці, сформовану індивідуальні особливості дитини, рівень її підготовки сприяють ефективному формуванню обчислювальних умінь і навичок учнів.

Вміння учня робити усні та письмові обчислення, раціонально організувати хід обчислень, переконуватися в правильності отриманих результатів свідчить про рівень його обчислювальної культури. Разом з тим, учень при виконанні обчислень повинен усвідомлювати правильність та доцільність кожної виконаної дії, постійно контролювати себе, співвідносячи виконувані операції зі зразком – системою операцій [41, с. 100].

Для того щоб розвивати обчислювальну культуру, вчитель має підбирати завдання для учнів таким чином, щоб вони були різноманітні (варіативні) за формулюванням, неоднозначні у розв’язках, а також, щоб вони могли виявляти різноманітні залежності та закономірності.

Усні вправи - однин із засобів, які сприяють якнайкращому засвоєнню математики. Спираючись на це, вчитель має організовувати проведення математичних диктантів або інших видів самостійної роботи, за яких учні, виконуючи обчислення в умі, записують лише остаточну відповідь.

Одним із головних критеріїв математичної культури учня є вміння, не роблячи громіздких обчислень, оцінювати результат обчислень, так як воно грунтується на вмінні застосовувати теоретичний матеріал в найрізноманітніших, нестандартних ситуаціях, а не лише на знанні конкретного теоретичного матеріалу [48, с. 211].

Вивчаючи курс алгебри, учні засвоюють необхідні математичні знання, вміння та навички. «Завдання вчителя – не лише сформувати в учнів ті чи інші математичні поняття, постійно сприймати нову інформацію (символічну, графічну, схематичну, словесну тощо), осмислювати її, порівнювати з раніше сформованими уявленнями, поняттями, розрізняти істотні й неістотні ознаки, виділяти головне, зіставляти відоме й невідоме, узагальнювати,класифікувати та зводити в систему здобуті знання, використовувати їх у різних ситуаціях, але й навчити їх вільно відтворювати здобуті знання усно й письмово, за допомогою буквеної символіки та термінів тощо» [50].

Про наявність в учнів культури алгебраїчних обчислень свідчать такі ознаки:

- усвідомлене знання і розуміння законів арифметичних дій;
- володіння алгоритмами основних операцій над числами;
- вміння ефективно поєднувати різні види обчислень;
- вміння застосувати раціональні прийоми обчислень [26].

Висновки до розділу 1

Провівши логіко-дидактичний аналіз навчального матеріалу курсу алгебри з теми «Числові нерівності», ми можемо зробити висновок, що вона є наскрізною у всіх класах, оскільки зустрічається при вивченні інших тем.

З доведенням числових нерівностей школярі найбільш глибоко знайомляться в 9 класі у темі 2 «Доведення нерівностей». При стандартному рівні навчання у 10 – 11 класах учні не мають справу з доведенням нерівностей, а під час профільного вивчення математики, зустрічаються з доведенням числових нерівностей лише у 10 класі, вивчаючи метод математичної індукції.

Вивчаючи організацію профільного навчання математики, ми розглянули всі його етапи впровадження у освітній процес навчального закладу. Також визначили, що профільне навчання математики сприяє формуванню стійкого інтересу учнів до предмету, розвиває їх математичні здібності та здійснюєпідготовку до навчання у закладах вищої освіти.

Проаналізувавши зміст і сутність понять «математична культура учня» і «алгебраїчна культура учня», представлених в психолого-педагогічній та методичній літературі, ми з’ясували, що ці навички є важливими як для учня, так і для вчителя, який має навчити та прищепити вихованцям правильні якості [26, 50].

Зокрема, велику роль у формуванні різних складових математичної компетентності при вивченні теми «Доведення числових нерівностей» відіграє застосування елементів технологій проблемного навчання, використання ІКТ, прикладних задач та методу проєктів [27].

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ У ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

2.1. Основні поняття та властивості числових нерівностей

Поле дійсних чисел має властивість упорядкованості, тобто для довільних дійсних чисел a та b має місце одне і тільки одне з трьох співвідношень: $a > b$, $a = b$ або $a < b$. Причому:

- запис $a > b$ означає, що різниця $a - b$ додатна ***(число*** $\boldsymbol{a}$ ***більше за число*** $\mathbf{b}$***);***
- запис $a < b$ означає, що різниця $a - b$ від'ємна ***(число*** $\boldsymbol{a}$ ***менше за число*** $\mathbf{b}$***);***

Два алгебраїчні вирази, з'єднані між собою знаками: «>» (більше), «<» (менше), «≥» (більше-рівно), «≤» (менше-рівно), утворюють **нерівність** [8, с.10].

Нерівності, з'єднані знаками «>» або «<», називаються **строгими**, а з'єднані знаками «≥» або «≤» - **нестрогими.** Нерівності $a > b$ та $c > d$ називаються нерівностями **однакового смислу**, а нерівності $a > b$ та $c < d$ – **протилежного смислу.**

Основні властивості числових нерівностей

1°. Якщо $\boldsymbol{a > b}$, то $\boldsymbol{b < a}$.

<u>Доведення:</u> Нехай $a > b$. Це означає, що $a - b = 0 \Leftrightarrow -(b - a) > 0$, тобто різниця $b - a$ – від'ємна. Тоді за визначенням число b менше за число a, тобто $b < a$.

2°. Якщо $\boldsymbol{a > b}$ і $\boldsymbol{b > c}$, то $\boldsymbol{a > c}$ (властивість транзитивності).

<u>Доведення.</u> Якщо $a > b$, то $a - b > 0$; $b > c$, то $b - c > 0$. Розглянемо різницю $a - c = (a - b) + (b - c) > 0$, оскільки $a - b > 0$ І $b - c > 0$. Таким чином, $a - c > 0$, тобто $a > c$, що й треба було довести.

3°. Якщо $\boldsymbol{a > b}$ і $\boldsymbol{c}$ – довільне дійсне число, то $\boldsymbol{a + c > b + c}$.

Доведення: Якщо $a > b$, то $a - b > 0 \Leftrightarrow a - b + c - c > 0 \Leftrightarrow (a + c) - (b + c) > 0 \Leftrightarrow a + c > b + c$, що й треба було довести.

4°. Якщо $a > b$ і $c > 0$, то $ac > bc$.

Доведення: Якщо $a > b$, то $a - b > 0 \Leftrightarrow (a - b) \cdot c > 0$, оскільки добуток двох додатних чисел є число додатне. Таким чином, $ac - bc > 0 \Leftrightarrow ac > bc$, що й треба було довести.

5°. Якщо $a > b$ і $c < 0$, то $ac < bc$.

Доведення: Якщо $a > b$, то $a - b > 0 \Leftrightarrow (a - b) \cdot c < 0$, оскільки добуток додатного числа на від'ємне є число від'ємне. Таким чином, $ac - bc < 0 \Leftrightarrow ac < bc$, що й треба було довести.

6°. Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$.

Доведення: Якщо $a > b$, то $a - b > 0$; $c > d \Leftrightarrow c - d > 0$. Тоді сума $(a - b) + (c - d) > 0$, оскільки сума двох додатних чисел є число додатне. Таким чином, $(a - b) + (c - d) > 0 \Leftrightarrow (a + c) - (b + d) > 0 \Leftrightarrow a + c > b + d$, що й треба було довести.

7°. Якщо $a > b$ і $c > d$, де $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$, то $ac > bd$.

Доведення: Оскільки $c > 0$ і $a > b$, тому $ac > bc$; оскільки $b > 0$ і $c > d$, тому $bc > bd$. Таким чином, $ac > bc$ і $bc > bd$. За властивістю 2°, $ac > bd$, що й треба було довести.

8°. Якщо $a > b$ і $c < d$, то $a - c > b - d$.

Доведення: Якщо $a > b$, то $a - b > 0$; $c < d \Leftrightarrow c - d < 0 \Leftrightarrow d - c > 0$. Тоді сума $(a - b) + (d - c) > 0$, оскільки сума двох додатних чисел є число додатне. Тоді, $(a - b) + (d - c) > 0 \Leftrightarrow (a - c) - (b - d) > 0 \Leftrightarrow a - c > b - d$, що й треба було довести.

9°. Якщо $a > b > 0, n \in \mathbb{N}$, то $a^n > b^n$.

Доведення: Розглянемо різницю $a^n - b^n = (a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + +b^{n-1})$. Оскільки $a > b > 0$, то в правій частині одержаної рівності обидва співмножники – додатні, а це означає, що $a^n - b^n > 0 \Leftrightarrow a^n > b^n$, що й треба було довести.

10°. Якщо $\boldsymbol{a > b > 0, n} \in \mathbb{N}$, то $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} > \sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$.

Доведення: Доведемо цю властивість від супротивного. Припустимо, що $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$, тоді за властивістю 9°, маємо $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n < \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \Leftrightarrow a < b$, що суперечить умові. Таким чином, $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, що й треба було довести.

11°. Якщо $\boldsymbol{a > b}$, причому $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ одного знаку, то $\boldsymbol{\frac{1}{a} < \frac{1}{b}}$.

Доведення: Оскільки a і b одного знаку, то $ab > 0$. Дійсно, якщо $a > 0$ і $b > 0$, то $a \cdot b > 0 \cdot 0 \Leftrightarrow ab > 0$; якщо $a < 0$ і $b < 0$, то згідно з властивістю 5°, маємо $0 \cdot b < a \cdot b \Leftrightarrow ab > 0$. Оскільки і $a - b > 0$, то $\frac{a-b}{ab} > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, що й треба було довести.

12°. Якщо $\boldsymbol{a > b > 0}$ і $\boldsymbol{0 < c < d}$, то $\boldsymbol{\frac{a}{c} > \frac{b}{d}}$.

Доведення: Дійсно, $c < d \Leftrightarrow \frac{1}{c} > \frac{1}{d}$. Перемножимо почленно нерівності $a > b$ і $\frac{1}{c} > \frac{1}{d}$. Згідно з властивістю 7°, одержимо $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$, що й треба було довести [56, с. 106].

2.2. Основні методи доведення нерівностей

Задачі на доведення числових нерівностей відрізняються різноманітністю і варіативністю методів і прийомів їх розв’язання. Іноді потрібний результат можна одержати, виходячи з визначення основних властивостей нерівностей; іноді корисним виявляється використання деякої відомої класичної нерівності. Особливо велику роль у математиці відіграють нерівності, що зв’язують між собою різні середні величини [56, с.87]. Деякі нерівності можна довести за допомогою методу математичної індукції або за допомогою аналізу та оцінювання лівої і правої частин нерівності.

При доведенні нерівностей в основному застосовують один з двох підходів:

1. Нерівність, яку необхідно довести, послідовно замінюють рівносильною, поки не отримають очевидну нерівність. При цьому на кожному кроці потрібно перевіряти еквівалентність переходу.

2. Виходять із очевидної або відомої нерівності й послідовно замінюють її нерівностями-наслідками, в результаті чого одержують потрібну нерівність. При використанні цього підходу, звичайно, виникають питання: яку нерівність брати за вихідну; як її перетворювати, щоб прийти до потрібної нерівності. Для відповіді на них можна зробити ті перетворення даної нерівності, які приводять нас до очевидної чи відомої нерівності. Тільки цей етап розв’язання задачі треба розглядати не як доведення, а як пошук доведення, як спробу знайти правильний шлях. Якщо в результаті цього пошуку, тобто цих перетворень, прийдемо до очевидно вірної нерівності, то можна взяти цю нерівність і здійснити над нею всі ті перетворення, що й під час пошуку, тільки у зворотному порядку, слідкуючи за їх еквівалентністю [8, с.12].

Серед основних методів, які застосовуються при доведенні числових нерівностей, можна виділити наступні:

1. Застосування властивостей числових нерівностей.
2. Виділення суми чи добутку виразів одного знаку.
3. Застосування класичних нерівностей (Коші, Коші-Буняковського,

Бернуллі, Ієнсова).

4. Метод доведення від «супротивного».
5. Принцип повної та неповної математичної індукції.
6. Аналіз та оцінювання лівої і правої частин нерівності, «посилення» нерівності.
7. Застосування векторів та властивостей скалярного добутку.
8. Застосування властивостей функції, таких як обмеженість, монотонність, опуклість.
9. Застосування гаометричної інтерпретації нерівностей.
10. Використання симетрії виразів і застосування основних симетричних многочленів.
11. Суперпозиція вказаних прийомів та методів.

Розглянемо детальніше деякі з них.

2.2.1. Виділення суми чи добутку числових виразів одного знаку

Основна ідея цього підходу полягає у розгляді різниці між лівою і правою частинами нерівності та представленні її за допомогою тотожних перетворень у вигляді суми чи добутку числових виразів одного знаку. Зауважимо, що для того щоб реалізувати цю ідею використовуються методи групування, формули скороченого множення, виділення «повного квадрату» та інші штучні прийоми [55, с.67].

Розглянемо даний метод на прикладах.

Зауваження! *Якщо в задачі на доведення нерівності не вказується множина значень змінних, що входять доцієї нерівності, то це означає що її справедливість необхідно довести для всіх дійсних значень змінних.*

Приклад 1. Довести нерівність: $(a+b)^2 \geq 4ab$.

Доведення: Перепишемо нерівність у вигляді $(a+b)^2 - 4ab \geq 0$ і розглянемо вираз у її лівій частині: $(a+b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab =$ $= a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0$. Знак рівності матимемо, якщо $a = b$ ■.

Приклад 2. Доведіть нерівність: $\frac{a^2}{1+a^4} \leq \frac{1}{2}$.

Доведення: Оскільки $1 + a^4 > 0$, то необхідно довести, що $a^4 + 1 \geq 2a^2$. Але остання нерівність очевидна, оскільки $a^4 - 2a^2 + 1 == (a^2 - 1)^2 \geq 0$ ■.

Приклад 3. Довести $\frac{2}{a+a^2} \geq 3$ при $a > 0$.

Доведення: Оскільки $\frac{2}{a} + a^2 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{2}{a} + a^2 - 3 \geq 0$, то для доведення одержаної нерівності при $a > 0$ розглянемо вираз у її лівій частині і покажемо, що він невід'ємний при $a > 0$. Дійсно :

$$\frac{2}{a} + a^2 - 3 = \frac{2 + a^3 - 3a}{a} = \frac{a^3 - 3a + 2}{a}.$$

Розкладемо на множникм вираз, що міститься в чисельнику одержаного дробу. Оскільки очевидний корінь цього виразу $a = 1$, то можна легко знайти інші його корені, поділивши $a^3 - 3a + 2$ на $a - 1$ (наприклад, «кутком»), і розв'язавши одержане квадратне рівняння. Отже, матимемо $a_2 = -2$ і $a_3 = 1$. Таким чином, корінь $a = 1$ має кратність два, а вираз перепишемо так:

$$\frac{a^3 - 3a + 2}{a} = \frac{(a-1)^2(a+2)}{a}.$$

Звідси випливає, що при всіх значеннях аргументу $a > 0$ вираз набуває лише невід'ємних значень (оскільки при $a > 0$ чисельник невід'ємний, а знаменник – додатний), а звідси випливає справедливість заданої в умові нерівності ■ [53, с. 297].

Приклад 4. Довести нерівність: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$.

Доведення: Розглянемо різницю між лівою та правою частинами нерівності і покажемо, що вона невід'ємна.

Дійсно, $a^2 + b^2 + c^2 - 2a(b + c) = a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 ==$ $(a - b)^2 + (a - c)^2 \geq 0$, що й треба було показати ■.

Зауважимо, що знак рівності має місце у випадку, коли $a = b = c$.

Приклад 5. Довести нерівність: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.

Доведення: Помноживши попередньо обидві частини нерівності на 2, як і в попередньому прикладі розглянемо різницю між ними:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0 \blacksquare.$$

Зауважимо, що нерівність $\boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac}$ *має назву* ***«нерівність трьох квадратів»*** *і часто використовується як допоміжна при доведенні інших нерівностей* [7, с.89].

Приклад 6. Довести, що при $a \geq 0$ справджується нерівність:

$$2a^3 + 2a^2 + 1 > a.$$

Доведення: Замінимо задану в умові нерівність на рівносильну:

$$2a^3 + 2a^2 + 1 > a \Leftrightarrow 2a^3 + 2a^2 + 1 - a > 0.$$

Розглянемо вираз у її лівій частині, перетворивши його таким чином: $2a^3 + a^2 + a + a^2 - 2a + 1 = a(2a^2 + a + 1) + (a-1)^2$. Оскільки вираз $2a^2 + a + 1$ додатний при всіх значеннях a (його дискримінант – від'ємний), а, отже, $a(2a^2 + a + 1) \geq 0$ і $(a-1)^2 \geq 0$, причому обидва доданки не можуть одночасно дорівнювати нулю, то сума $a(2a^2 + a + 1) + (a-1)^2 > 0$. Звідси одержимо потрібну нерівність:

$$2a^3 + 2a^2 - a + 1 > 0 \ \Leftrightarrow \ 2a^3 + 2a^2 + 1 > a \ \blacksquare.$$

2.2.2. Класичні нерівності та їх застосування

Класичні нерівності є могутнім джерелом різноманітних нерівностей, з одного боку, а з іншого — вони часто,використовуються для доведення багатьох нерівностей. Деякі з них особливо багаті наслідками [36]. Саме застосування відомих класичних нерівностей дозволяє розв'язати переважну більшість задач на доведення нерівностей.

Використання нерівності $\left|a + \frac{1}{a}\right| \geq 2$

Доведемо нерівність $\left|a + \frac{1}{a}\right| \geq 2$, яку з урахуванням властивостей абсолютної величини запишемо наступним чином: $\left[\begin{array}{l} a + \frac{1}{a} \leq -2, \text{якщо } a < 0; \\ a + \frac{1}{a} \geq 2, \text{якщо } a > 0. \end{array}\right.$

Дійсно, нехай $a > 0$, тоді необхідно довести, що $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Розглянемо різницю $a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2-2a+1}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0$, причому знак рівності матиме місце лише у випадку, якщо $a = 1$.

Аналогічно доводиться нерівність, якщо $a < 0$.

Розглянемо застосування вказаної нерівності для доведення конкретних нерівностей.

Приклад 7. Довести нерівність $a^2 + \frac{1}{a^2+1} \geq 1$.

Доведення: Для доведення нерівності перепишемо її у такому вигляді: $(a^2+1) + \frac{1}{a^2+1} \geq 2$, яка очевидна, оскільки $a^2 + 1 > 0$ ■.

Приклад 8. Довести нерівність $\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2$.

Доведення: Перетворимо ліву частину нерівності наступним чином:

$$\frac{a^2+2+1}{\sqrt{a^2+2}} = \sqrt{a^2+2} + \frac{1}{\sqrt{a^2+2}} > 2 \ ■.$$

Приклад 9. Довести нерівність $\frac{b^2}{1+b^4} \leq \frac{1}{2}$.

Доведення: При $b = 0$ маємо очевидну нерівність. Нехай $b \neq 0$. Поділивши чисельник і знаменник дробу в лівій частині нерівності на b^2, одержимо:

$$\frac{b^2}{1+b^4} = \frac{1}{\frac{1}{b^2} + b^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Знак рівності матиме місце, якщо $b = \pm 1$ ■.

Приклад 10. Довести нерівність $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$, якщо a, b, c – додатні числа.

Доведення: Розглянемо ліву частину нерівності, в якій після ділення в кожному дробі чисельника на знаменник одержимо:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{a}{c} + + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} =$$

$$= \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$$

Що й треба було довести ■.

<u>Приклад 11.</u> Довести нерівність $2c^3 + 2c^2 + 1 \geq c$, якщо $c \geq 0$.

<u>*Доведення:*</u> Якщо $c = 0$, то нерівність очевидна. Нехай $c > 0$, тоді перепишемо вираз у лівій частині таким чином: $2c^3 + c^2 + c + c^2 + 1 \geq 2c$. Поділивши на $c > 0$, одержимо: $2c^2 + c + 1 + c + \frac{1}{c} \geq 2$, що справедливо, бо $2c^2 + c + 1 > 0$ і $c + \frac{1}{c} \geq 2$ ■.

<u>Приклад 12.</u> Довести нерівність $12ab - 4a^2b - a - 4ab^2 - 4b \leq 0$, якщо $a \geq 0, b \geq 0$.

<u>*Доведення:*</u> При $a = 0$ і $b = 0$ нерівність очевидна. Розглянемо задану нерівність при $a > 0$ і $b > 0$. Для цього запишемо рівносильну їй, поділивши обидві частини нерівності на $2ab > 0$: $6 - 2a - \frac{1}{2b} - 2b - \frac{2}{a} \leq 0$ або ж $2a + \frac{2}{a} + 2b + \frac{1}{ab} \geq 6$. Розглянемо вираз у лівій частині нерівності:

$$2a + \frac{2}{a} + 2b + \frac{1}{2b} = 2\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(2b + \frac{1}{2b}\right) \geq 2 \cdot 2 + 2 = 6 \blacksquare.$$

Використання нерівності «трьох крадратів»

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac}.$$

<u>Приклад 13.</u> Довести, що якщо a, b, c – додатні числа, то справджується нерівність:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq a + b + c.$$

<u>*Доведення:*</u> Запишемо очевидні перетворення лівої частини нерівності з урахуванням нерівності «трьох квадратів»:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq \sqrt{\frac{ab}{c}} \cdot \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} \cdot \sqrt{\frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{ac}{b}} \cdot \sqrt{\frac{ab}{c}} = a + b + c \blacksquare.$$

<u>Приклад 14.</u> Довести, що якщо $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$, то справджується нерівність: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$.

Доведення: Перетворимо ліву частину нерівності, двічі застосувавши нерівність «трьох квадратів»: $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac = \left(\sqrt{ab}\right)^2 + \left(\sqrt{bc}\right)^2 + \left(\sqrt{ac}\right)^2 \geq \sqrt{ab^2c} + \sqrt{abc^2} + \sqrt{a^2bc} = \sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$ ■.

Приклад 15. Довести, що якщо a, b, c – невід'ємні числа, то справджується нерівність: $7a + 4b + 7c \geq 5\sqrt{ab} + 5\sqrt{bc} + 7\sqrt{ac}$.

Доведення: Використаємо нерівність «трьох квадратів» для виразу в лівій частині вихідної нерівності $7a + 4b + 7c \geq \sqrt{28ab} + \sqrt{28bc} + 7\sqrt{ac}$. Оскільки a, b, c – невід'ємні числа, $\sqrt{28ab} \geq 5\sqrt{ab}$ і $\sqrt{28bc} \geq 5\sqrt{bc}$, то $7a + 4b + 7c \geq \sqrt{28ab} + \sqrt{28bc} + 7\sqrt{ac} \geq 5\sqrt{ab} + 5\sqrt{bc} + 7\sqrt{ac}$ ■.

Приклад 16. Довести, що якщо a, b, c – сторони деякого трикутника, S – його площа, p – півпериметр, то $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2p\sqrt{2S}$.

Доведення: Оскільки для площі трикутника справедливі формули: $2S = ab = bc = ac$, то $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac = \left(\sqrt{ab}\right)^2 + \left(\sqrt{bc}\right)^2 + \left(\sqrt{ac}\right)^2 \geq \sqrt{ab^2c} + \sqrt{abc^2} + \sqrt{a^2bc} = a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} = a\sqrt{2S} + b\sqrt{2S} + c\sqrt{2S} = \sqrt{2S}(a+b+c) = 2p\sqrt{2S}$ ■.

Нерівність Коші та її використання

Однією з найбільш уживаних при розв'язанні задач на доведення числових нерівностей є нерівність Коші, згідно з якою середнє арифметичне деяких невід'ємних чисел не менше за їх середнє геометричне, причому рівність має місце лише у випадку рівності цих чисел.

У загальному вигляді вона має такий вигляд:

$$\boldsymbol{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}},$$

де $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \ldots, a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$

Розглянемо часткові випадки нерівності Коші при $n = 2, n = 3, n = 4$.

Приклад 17. Довести, що для невід'ємних чисел a і b справджується нерівність:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$

Доведення: Розглянемо різницю між правою та лівою частинами нерівності. Маємо:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{a \cdot b} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0 \, .$$

Отже, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ■.

Приклад 18. Довести, що для невід'ємних чисел a, b, c, і d справджується нерівність:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot d} \, .$$

Доведення: Оскільки $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$ і $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{c \cdot d}$, то :

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot d} \text{ ■}.$$

Зауважимо, що рівність буде тоді і тільки тоді, коли $a = b = c = d$.

Приклад 19. Довести, що для невід'ємних чисел a, b, і c справджується нерівність:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \, .$$

Доведення: Скористаємося результатами попереднього прикладу, розглянувши числа a, b, c і $d = \frac{a+b+c}{3}$.

$$d = \frac{a+b+c}{3} = \frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} = \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot d},$$

тобто:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{a+b+c}{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geq a \cdot b \cdot c \cdot \frac{a+b+c}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq a\cdot b\cdot c \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}\ \blacksquare.$$

<u>Приклад 20.</u> Довести, що для додатних чисел a, b, c справджується нерівність :

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{a+c}{a^2+c^2} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

<u>Доведення:</u> Скориставшись нерівністю Коші для кожного з доданків у лівій частині заданої в умові нерівності, одержимо таке:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{a+c}{a^2+c^2} \leq \frac{a+b}{2ab}+\frac{b+c}{2bc}+\frac{a+c}{2ac}$$
$$=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Отже,

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{a+c}{a^2+c^2} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ \blacksquare.$$

<u>Приклад 21.</u> Довести, що для доданних чисел a, b, c справджується нерівність :

$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{a+c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

<u>Доведення:</u> Скориставшись нерівністю Коші для лівої частини нерівності:

$$\frac{\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{a+c}}{3} \geq 2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a+b}\cdot\frac{1}{b+c}\cdot\frac{1}{a+c}} = \frac{2}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)}}.$$

Скористаємося нерівністю Коші для трьох додатних чисел у вигляді:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \frac{3}{x+y+z}.$$

Замінивши $x=a+b$, $y=b+c$, $z=a+c$, одержимо:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)}} \geq \frac{6}{(a+b)+(b+c)+(a+c)} = \frac{3}{a+b+c}.$$

Отже, маємо:

$$\frac{\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{a+c}}{3} \geq \frac{3}{a+b+c}.$$

Звідки одержимо задану в умові нерівність:

$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{a+c} \geq \frac{9}{a+b+c} \ ■.$$

Приклад 22. Довести, що якщо $a+b+c+d=1$ і числа a, b, c, d не менші за $-\frac{1}{4}$, то вірна нерівність:

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1} \leq 6 .$$

Доведення: Скористаємося нерівністю Коші для кожного з доданків у лівій частині нерівності: $\sqrt{4a+1} = \sqrt{(4a+1)\cdot 1} \leq \frac{(4a+1)+1}{2} = 2a+1$, $\sqrt{4b+1} \leq 2b+1$, $\sqrt{4c+1} \leq 2c+1$, $\sqrt{4d+1} \leq 2d+1$. Додамо почленно одержані нерівності:

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1} \leq 2(a+b+c+d)+4=6.$$

Отже, отримуємо потрібну нерівність:

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1} \leq 6 \ ■.$$

Інші класичні нерівності

Як уже було відмічено, у математиці велику роль відіграють нерівності, які пов'язують різні середні величини. Наведемо визначення таких величин і основні класичні нерівності в доповнення до розглянутих вище.

Найбільш відомими середніми величинами є *середнє степеневе* (часткові випадки – *середнє арифметичне* і *середнє квадратичне*), *середнє гармонічне* та *середнє геометричне.*

Середнім степеневим *порядку m дійсних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ називають число*

$$S_m = \left(\frac{a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Якщо $m = 1$, *то число*

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

називають ***середнім арифметичним*** *чисел* $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Якщо $m = 2$, *то одержимо* ***середнє квадратне*** *чисел* $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$Q = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Середнім гармонічним *дійсних чисел* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *називають число*

$$H = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Середнім геометричним *невід'ємних чисел* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *називають число*

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

На ряду з розглянутою нерівністю Коші, якв порівнює середнє арифметичне і середнє геометричне невід'ємних чисел, справедливі також наступні твердження [30]:

1) Середнє гармонічне додатних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ не більше за середнє геометричне цих чисел, тобто:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Причому рівність має місце лише за умови, що $a_1 = a_2, = \cdots = a_n$.

Дійсно, з нерівності Коші для додатних чисел $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ матимемо:

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}}.$$

Звідки одержимо потрібну нерівність.

2) Середнє арифметичне чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ не більше за середнє квадратичне цих чисел, тобто:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}},$$

причому рівність має місце лише за умови, що $a_1 = a_2, = \dots = a_n$.

Приклад 23. Довести, що для довільних чисел a_1, a_2, a_3 і b_1, b_2, b_3 справджується нерівність:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

Доведення: Припустимо, що не всі з чисел a_1, a_2, a_3 дорівнюють нулю (ав противному випадку нерівність – очевидна). Розглянемо функцію $f(x) = (a_1 x - b_1)^2 + (a_2 b + b_2)^2 + (a_3 x - b_3)^2 \geq 0$, яку можна подати у вигляді:

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)x^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)x + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

З цього представлення видно, що $\boldsymbol{f(x)}$ – квадратична функція, яка при всіх значеннях $\boldsymbol{x}$ невід'ємна. А звідси випливає, що її дискримінант $\boldsymbol{D \leq 0}$. Таким чином, маємо: $\boldsymbol{\frac{D}{4} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 - \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) \leq 0}$, звідси й одержуємо потрібну нерівність $\boldsymbol{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + +b_2^2 + b_3^2\right)}$ ■ [21, с.176].

Зауважимо, що нерівність з прикладу 23 – це частковий випадок **нерівності Коші-Буняковського**, яка для довільних чисел $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n}$ і $\boldsymbol{b_1, b_2, \dots, b_n}$ виглядає так:

$$\boldsymbol{(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq \left(a_1^2 + \dots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \dots + b_n^2\right)}.$$

Знак рівності має місце, якщо $\boldsymbol{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}}$.

Якщо в нерівності Коші-Буняковського покласти $\boldsymbol{b_1 = \dots = b_n = 1}$, то можна отримати ще **нерівність-наслідок з нерівності Коші-Буняковського**, яка часто використовується при доведенні інших нерівностей:

$$(a_1 + \cdots + a_n)^2 \le n(a_1^2 + \cdots + a_n^2),$$

в якій знак рівності матиме місце тоді і тільки тоді, коли $a_1 = \cdots = a_n$.

Нерівність Чебишева має такий вигляд:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \le \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n},$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n$ і $b_1, b_2, \dots, b_n$ – дві неспадні (або незростаючі) послідовності чисел.

Нерівність Бернуллі. Якщо $x \ge -1$, то для довільного $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність $(1 + x)^n \ge 1 + nx$ [19, с.257].

2.2.3. Метод математичної індукції

Для ширшого класу задач на доведення нерівностей, які залежать від натурального числа n досить часто застосовується метод математичної індукції, в основі якого лежить **принцип повної математичної індукції,** згідно з яким твердження $A(n)$ справедливе для довільного $n \in \mathbb{N}$, якщо:

1) воно справджується для $n = 1$;
2) з припущення його справедливості для деякого довільного $n = k$ випливає справедливість твердження для $n = k + 1$.

Розглянемо особливості використання методу математичної індукції на прикладах.

<u>Приклад 24.</u> Довести, що при довільному $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність:

$$\lg(n + 1) > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \cdots + \lg n}{n}.$$

<u>Доведення:</u> Перевіримо справедливість нерівності при $n = 1$:

$$\lg(1 + 1) > \frac{\lg 1}{1} \Leftrightarrow \lg 2 > 0.$$

Припустимо, що нерівність виконується при $n = k$, тобто:

$$\lg(k+1) > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \dots + \lg k}{k}.$$

Доведемо нерівність при $n = k + 1$, тобто що:

$$\lg(k+2) > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \dots + \lg k + \lg(k+1)}{k+1}.$$

Додавши до обох частин нерівності $\lg(k+1) > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \dots + \lg k}{k}$ по $\frac{\lg(k+1)}{k}$, одержимо:

$$\lg(k+1) + \frac{\lg(k+1)}{k} > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \dots + \lg k + \lg(k+1)}{k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k+1}{k}\lg(k+1) > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \dots + \lg k + \lg(k+1)}{k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg(k+1) > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \dots + \lg k + \lg(k+1)}{k+1}.$$

Але $\lg(k+2) > \lg(k+1)$, тому

$$\lg(k+2) > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \dots + \lg k + \lg(k+1)}{k+1}.$$

Що й треба було довести.

Отже, згідно з принципом математичної індукції маємо справедливість вихідної нерівності ■.

Приклад 25. Довести, що при довільному натуральному $n > 1$ справедлива нерівність:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

Доведення: Позначимо ліву частину нерівності через S_n. Тоді при $n = 2$ маємо $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$, що справедливо.

Припустимо, що при $n = k$ задана нерівність виконується, тобто $S_k > \frac{13}{24}$.

Доведемо, що при $\boldsymbol{n = k + 1}$ має місце нерівність $\boldsymbol{S_{k+1} > \frac{13}{24}}$.

$$\boldsymbol{S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k}};$$

$$\boldsymbol{S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}}.$$

$$\boldsymbol{S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2(2k+1)(k+1)} > 0}.$$

Отже, $\boldsymbol{S_{k+1} > S_k > \frac{13}{24}}$.

Таким чином, всі твердження принципу математичної індукції справедливі, і вихідна нерівність виконується при довільних натуральних $\boldsymbol{n}$, більших за 1 ■.

Приклад 26. Довести, що при довільному натуральному $\boldsymbol{n > 1}$ справедлива нерівність:

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}}.$$

Доведення: При $\boldsymbol{n = 2}$ нерівність справедлива, оскільки $\boldsymbol{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}}$.

Припустимо, що нерівність виконується при $\boldsymbol{n = k}$, тобто:

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}}. \quad \boldsymbol{(1)}$$

Доведемо, що нерівність буде справедлива й для $\boldsymbol{n = k + 1}$, тобто що

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}}.$$

Для цього до обох частин нерівності (1) додамо вираз $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}$:

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}}.$$

Покажемо, що $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$, тобто $\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$. Помножимо обидві частини нерівності на вираз $\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$: $\frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}>k+1-k$ або ж $1+\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}>1$, що очевидно.

Отже, нерівність $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$ вірна.

Згідно з принципом математичної індукції маємо справедливість вихідної нерівності ■.

Приклад 27. Довести, що для довільного дійсного числа $a\geq -1$ і довільного $n\in\mathbb{N}$ справедлива нерівність: $(1+a)^n\geq 1+na$ *(нерівність Бернуллі).*

Доведення: При $n=1$ нерівність виконується (має місце рівність).

Припустимо, що при $n=k$ нерівність також справедлива, тобто $(1+a)^k\geq 1+ka$.

Базуючись на цьому припущенні, доведемо істинність нерівності для $n=k+1$, тобто що $(1+a)^{k+1}\geq 1+(k+1)a$. Дійсно:

$$(1+a)^{k+1}=(1+a)^k(1+a)\geq(1+ka)(1+a)=$$

$$=1+(k+1)a+ka^2\geq 1+(k+1)a.$$

Звідси матимемо $(1+a)^{k+1}\geq 1+(k+1)a$, що й треба було довести.

Таким чином, згідно з принципом математичної індукції нерівність $(1+a)^n\geq 1+na$ справедлива для всіх $n\in\mathbb{N}$ ■.

Приклад 28. Довести, що якщо a і b – катети прямокутного трикутника, а c – гіпотенуза, то для всіх $n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}$ справедлива нерівність:

$$a^n+b^n\leq c^n.$$

Доведення: При $n=2$ твердження справедливе, оскільки за теоремою Піфагора маємо рівність: $a^2+b^2=c^2$.

Нехай $\boldsymbol{a^k + b^k \leq c^k}$ при $\boldsymbol{k > 2}$.

Доведемо справедливість твердження при $\boldsymbol{n = k + 1}$, тобто нерівність $\boldsymbol{a^{k+1} + b^{k+1} \leq c^{k+1}}$. Розглянемо вираз у лівій частині нерівності, перетворивши його так:

$$\boldsymbol{a^{k+1} + b^{k+1} = a \cdot a^k + b \cdot b^k < c \cdot a^k + c \cdot b^k = c\left(a^k + b^k\right) \leq c \cdot c^k = c^{k+1}}.$$

Таким чином, на основі принципу математичної індукції можна стверджувати, що нерівність $\boldsymbol{a^n + b^n \leq c^n}$ справедлива для всіх натуральних чисел $\boldsymbol{n \geq 2}$ ■.

2.2.4. Метод аналізу та оцінок

Зауважимо, що елементи аналізу нерівностей завжди присутні при застосуванні більшості методів їх доведення. Але в цьому підпункті закцентуємо увагу на основних ідеях та особливостях їх реалізації, що лежать в основі деяких специфічних штучних прийомів, які дозволяють розв'язати нестандартні задачі на доведення нерівностей. Необхідно також відмітити, що використання цього підходу вимагає творчого підходу, аналітичних здібностей та уміння робити правильні логічні висновки [19].

Один зі способів полягає у розбивці області значень змінних, що входять до нерівності, на перні проміжки і доведенні числові нерівності на кожному з цих проміжків. Розглянемо приклади, які ілюструють застосування вказаного способу.

<u>Приклад 29.</u> Довести, що для довільного дійсного числа $\boldsymbol{x}$ справедлива нерівність $\boldsymbol{x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0}$.

<u>Доведення:</u> Розіб'ємо числову вісь на проміжки $\boldsymbol{x \leq 0}$, $\boldsymbol{0 < x < 1}$ та $\boldsymbol{x \geq 1}$ і доведемо справедливість даної нерівності на кожному з цих проміжків.

Якщо $\boldsymbol{x \leq 0}$, то всі парні степені $\boldsymbol{x}$ – невід'ємні, а $\boldsymbol{-x^9 - x \geq 0}$. Отже, ліва частина набуває додатних значень.

При $\boldsymbol{0 < x < 1}$ перетворимо ліву частину так: $\boldsymbol{x^{12} + x^4\left(1 - x^5\right) + 1 - x}$.

Якщо $\boldsymbol{x \geq 1}$, то запишемо ліву частину нерівності наступним чином: $\boldsymbol{x^9(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) + 1}$. Вирази в дужках набувають невід'ємних значень, а тому вся ліва частина додатна.

Таким чином, у кожному з випадків вихідна нерівність – справедлива, отже, вона виконується для всіх $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ ■.

Приклад 30. Довести, що при невід'ємних значеннях $\boldsymbol{a}$ справджується нерівність $\boldsymbol{2a^3 + 2a^2 + 1 > a}$.

Доведення: Якщо $\boldsymbol{0 \leq a \leq 1}$, то матимемо очевидну нерівність

$\boldsymbol{2a^3 + 2a^2 > a - 1}$, оскільки $\boldsymbol{a - 1 < 0}$, а $\boldsymbol{2a^3 + 2a^2 \geq 0}$.

Нехай $\boldsymbol{a \geq 1}$, тоді зробимо наступні оцінки:

$\boldsymbol{2a^3 + 2a^2 + 1 > 2a^2 > a^2 \geq a}$, тобто $\boldsymbol{2a^3 + 2a^2 + 1 > a}$.

Об'єднуючи два випадки, можна зробити висновок, що при $\boldsymbol{a \geq 0}$ вихідна нерівність справедлива ■.

Приклад 31. Нехай $\boldsymbol{a, b, c}$ – додатні дійсні числа, причому $\boldsymbol{c > 1}$, $\boldsymbol{\sqrt{a} + 1 \geq b}$. Довести, що $\boldsymbol{ac + \frac{c}{c-1} > b}$.

Доведення: Розглянемо вираз, що міститься в лівій частині нерівності, яку необхідно довести, і перетворимо його наступним чином:

$$\boldsymbol{ac + \frac{c}{c-1} = ac + \frac{c}{c-1} - \sqrt{a} - 1 + \sqrt{a} + 1 \geq ac + \frac{c}{c-1} - \sqrt{a} - 1 + b > b,}$$

оскільки вираз $\boldsymbol{ac + \frac{c}{c-1} - \sqrt{a} - 1 > 0}$.

Дійсно, розглянувши цей вираз як квадратний відносно $\boldsymbol{\sqrt{a} = y}$, матимемо:

$$\boldsymbol{ca + \frac{c}{c-1} - \sqrt{a} - 1 = cy^2 - y + \frac{c}{c-1} - 1 = cy^2 - y + \frac{1}{c-1}}.$$

Його дискримінант $\boldsymbol{D = 1 - \frac{4c}{c-1} = \frac{-3c-1}{c-1}}$ від'ємний, оскільки $\boldsymbol{c > 1}$. А це означає, що квадратний тричлен $\boldsymbol{ca + \frac{c}{c-1} - \sqrt{a} - 1 = cy^2 - y + \frac{1}{c-1}}$ набуває лише додатних значень. Отже, потрібна нерівність доведена ■.

Одним із методів доведення нерівностей полягає в "посиленні" нерівності, тобто замість запропонованої нерівності доводять "посилену", з якої на основі властивості транзитивності випливає справедливість потрібної нерівності.

Нехай, наприклад, необхідно довести нерівність $\boldsymbol{A < B}$, де $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ – деякі вирази. Якщо вдається підібрати такий вираз $\boldsymbol{M}$, що $\boldsymbol{A < M}$ і одночасно $\boldsymbol{M < B}$, то потрібна нерівність $\boldsymbol{A < B}$ буде таким чином доведена [11, с. 72].

<u>Приклад 32.</u> Довести, що при $\boldsymbol{n \geq 2}$ виконується нерівність:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}.$$

<u>Доведення:</u> Для доданків лівої частини нерівності зробимо наступну оцінку:

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3}, \ldots, \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1) \cdot n}.$$

Справедлива така тотожність:

$$\frac{1}{(k-1) \cdot k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Враховуючи це, матимемо:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{(n-1) \cdot n} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Нерівність доведена ■.

<u>Приклад 33.</u> Довести, що при $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}.$$

<u>Доведення:</u> Для кожного доданку (окрім першого) в лівій частині нерівності запишемо очевидні нерівності:

$$\frac{1}{2^3} < \frac{1}{2^3 - 2}, \quad \frac{1}{3^3} < \frac{1}{3^3 - 3}, \ldots, \quad \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n^3 - n}.$$

Додавши їх почленно, одержимо:

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < 1 + \frac{1}{2^3 - 2} + \frac{1}{3^3 - 3} + \cdots + \frac{1}{n^3 - n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)}.$$

Легко переконатися, що

$$\frac{1}{(k-1) \cdot k \cdot (k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)}\right).$$

Таким чином, матимемо:

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$== 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{n(n+1)}\right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Отже,

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{5}{4} \quad \blacksquare.$$

<u>Приклад 34.</u> Довести, що при $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$ справедлива нерівність:

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

<u>*Доведення:*</u> “Посилимо” вираз у лівій частині нерівності, додавши нескінченну кількість доданків:

$$\sqrt{\boldsymbol{a}+\sqrt{\boldsymbol{a}+\sqrt{\boldsymbol{a}+\cdots+\sqrt{\boldsymbol{a}}}}}<\sqrt{\boldsymbol{a}+\sqrt{\boldsymbol{a}+\sqrt{\boldsymbol{a}+\sqrt{\boldsymbol{a}+\cdots}}}}.$$

Позначимо $\sqrt{\boldsymbol{a}+\sqrt{\boldsymbol{a}+\sqrt{\boldsymbol{a}+\cdots}}}=\boldsymbol{x}$, тоді, піднісши до квадрату обидві частини цієї рівності, одержимо співвідношення $\boldsymbol{a}+\sqrt{\boldsymbol{a}+\sqrt{\boldsymbol{a}+\sqrt{\boldsymbol{a}+\ldots}}}=\boldsymbol{x}^{2}$. Але $\sqrt{\boldsymbol{a}+\sqrt{\boldsymbol{a}+\sqrt{\boldsymbol{a}+\cdots}}}=\boldsymbol{x}$, тому маємо таке рівняння для знаходження $\boldsymbol{x}$:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{2}\Leftrightarrow \boldsymbol{x}^{2}-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. Звідси, оскільки $\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}$, одержимо:

$$\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{1}+\sqrt{\boldsymbol{1}+\boldsymbol{4a}}}{\boldsymbol{2}}.$$

Тому,

$$\sqrt{\boldsymbol{a}+\sqrt{\boldsymbol{a}+\sqrt{\boldsymbol{a}+\cdots+\sqrt{\boldsymbol{a}}}}}<\sqrt{\boldsymbol{a}+\sqrt{\boldsymbol{a}+\sqrt{\boldsymbol{a}+\sqrt{\boldsymbol{a}+\cdots}}}}=\frac{\boldsymbol{1}+\sqrt{\boldsymbol{1}+\boldsymbol{4a}}}{\boldsymbol{2}}\ \blacksquare.$$

<u>***Приклад 35.***</u> Довести, що

$$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{10}\sqrt{\boldsymbol{2}}}<\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\cdot\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{4}}\cdot\frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{6}}\cdot\ldots\cdot\frac{\boldsymbol{99}}{\boldsymbol{100}}<\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{10}}.$$

<u>*Доведення:*</u> Доведемо спочатку нерівність

$$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{10}\sqrt{\boldsymbol{2}}}<\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\cdot\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{4}}\cdot\frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{6}}\cdot\ldots\cdot\frac{\boldsymbol{99}}{\boldsymbol{100}}.$$

Перемноживши очевидні нерівності

$$\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{4}}>\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}},\quad \frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{6}}>\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{5}},\quad \frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{8}}>\frac{\boldsymbol{6}}{\boldsymbol{7}},\quad \ldots,\quad \frac{\boldsymbol{99}}{\boldsymbol{100}}<\frac{\boldsymbol{98}}{\boldsymbol{99}},$$

одержимо

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}>\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{99},$$

звідки після множення обох частин нерівності на $\frac{1}{2}$ матимемо:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}>\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{99}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{97}\cdot\frac{100}{99}\cdot\frac{1}{100}.$$

Позначимо:

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100},$$

тоді

$$x>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{100}.$$

Звідси одержимо:

$$x^2>\frac{1}{200}\Leftrightarrow x>\frac{1}{10\sqrt{2}}.$$

Доведемо тепер нерівність

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

Для цього скористаємося наступними оцінками:

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3},\ \ \frac{3}{4}<\frac{4}{5},\ \ \frac{5}{6}<\frac{6}{7},\ \ \ldots,\ \ \frac{99}{100}<\frac{100}{101}.$$

Перемноживши ці нерівності, матимемо

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}.$$

Позначаючи

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100},$$

отримаємо

$$x < \frac{1}{101x},$$

звідки

$$x < \frac{1}{\sqrt{101}} < \frac{1}{10} \ \blacksquare.$$

2.2.5. Метод доведення нерівностей “від супротивного”

Суть методу полягає у припущенні хибності заданої нерівності хоча б для одного набору змінних, що входять у неї. Тобто припускають, що справедлива нерівність протилежного знаку. Потім, використовуючи властивості нерівностей, виконують рівносильні перетворення цієї нерівності. Якщо в результаті цих перетворень одержимо неправильну нерівність, то це означає, що припущення про справедливість нерівності протилежного знаку – невірна, а тому справедлива вихідна нерівність.

Розглянемо застосування цього методу на прикладах.

Приклад 36. Довести, що для довільного дійсного числа $x \neq 0$ справедлива нерівність:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2.$$

Доведення: Припустимо, що справедлива нерівність протилежного знаку, тобто

$$x^2 + \frac{1}{x^2} < 2.$$

Тоді

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2} < 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2} < 0.$$

Остання нерівність невірна, тому наше припущення також хибне. Отже, справедлива вихідна нерівність ■.

Приклад 37. Довести, що для довільних дійсних чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ справедлива нерівність $\boldsymbol{2a^2 + b^2 + 2ab - 6a + 2b + 5 \geq 0}$.

Доведення: Припустимо супротивне, тобто що існують такі дійсні числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, що $\boldsymbol{2a^2 + b^2 + 2ab - 6a + 2b + 5 < 0}$.

Перетворимо вираз у лівій частині нерівності таким чином:

$$\boldsymbol{2a^2 + b^2 + 2ab - 6a + 2b + 5 = a^2 + b^2 + 2ab - 2a + 2b + 1 + a^2 - 4a + 4}$$

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 + 2ab - 2a + 2b + 1 + a^2 - 4a + 4 < 0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{(a - b - 1)^2 + (a - 2)^2 < 0}\,.$$

Одержали неправильну нерівність. Отже, наше припущення невірне, що й доводить справедливість вихідної нерівності ■.

Приклад 38. Довести, що якщо $\boldsymbol{a, b, c, d}$ – невід’ємні дійсні числа, то $\boldsymbol{\sqrt{(a + c)(b + d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}}$.

Доведення: Припустимо протилежне, тобто що для деякого набору значень $\boldsymbol{a, b, c, d}$ справедлива нерівність $\boldsymbol{\sqrt{(a + c)(b + d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}}$.

Піднесемо обидві її частини до квадрату:

$$\boldsymbol{ab + bc + ad + cd < ab + 2\sqrt{abcd} + cd},$$

звідки

$$\boldsymbol{\frac{bc + ad}{2} < \sqrt{abcd}}.$$

А це суперечить нерівності Коші для невід’ємних чисел $\boldsymbol{bc}$ і $\boldsymbol{ad}$.

Таким чином, наше припущення невірне, тобто для довільних $\boldsymbol{a \geq 0}$, $\boldsymbol{b \geq 0}$, $\boldsymbol{c \geq 0}$, $\boldsymbol{d \geq 0}$ справедлива нерівність $\boldsymbol{\sqrt{(a + c)(b + d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}}$ ■.

2.2.6. Метод введення нових змінних

Суть цього методу полягає у використанні нових змінних з метою спрощення нерівності та зведення до відомих. Зауважимо, що вид заміни, як правило, диктується умовою задачі.

Розглянемо приклади та характерні підстановки.

Приклад 39. Довести, що якщо $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0$, то виконується нерівність:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{b+a} \geq \frac{3}{2}.$$

Доведення: Задана в умові нерівність буде рівносильна такій:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{b+a} - \frac{3}{2} \geq 0.$$

Зробимо заміну: $b + c = 2x$, $c + a = 2y$, $a + b = 2z$. Тоді, розв'язуючи ці рівняння відносно $a, b,$ і c, матимемо:

$$a = y + z - x, \qquad b = x + z - y, \qquad c = x + y - z.$$

Розглянемо ліву частину одержаної нерівності, підставившм в неї отримані вирази для $a, b,$ і c:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{b+a} - \frac{3}{2} = \frac{y+z-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} - \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1\right) - \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right) - 3\right) - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2} \cdot (2 + 2 + 2 - 3) - \frac{3}{2} = 0,$$

що й треба було довести ■.

Приклад 40. Довести, що якщо $\boldsymbol{x>0,\ y>0}$, то виконується нерівність

$$\frac{\mathbf{2}}{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}}}\le \boldsymbol{xy}.$$

Доведення: Скористаємося заміною: $\boldsymbol{x=r\cos\alpha}$, $\boldsymbol{y=r\sin\alpha}$, де $\boldsymbol{r>0}$, а $\boldsymbol{\alpha\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)}$, оскільки $\boldsymbol{x>0,\ y>0}$. Тоді задана в умові нерівність перепишеться наступним чином:

$$\frac{\mathbf{2}}{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r^2\cos^2\alpha}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r^2\sin^2\alpha}}}\le \boldsymbol{r^2\cos\alpha\sin\alpha}\ .$$

Після рівносильних перетворень, одержимо, що необхідно довести таку нерівність: $\boldsymbol{2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\le\cos\alpha\sin\alpha}$. Розглянемо різницю між лівою та правою частинами:

$$\boldsymbol{2\cos^2\alpha\sin^2\alpha-\cos\alpha\sin\alpha=\cos\alpha\sin\alpha\,(\sin2\alpha-1)\le0},$$

оскільки $\boldsymbol{\cos\alpha\sin\alpha>0}$ і $\boldsymbol{\sin2\alpha-1\le0}$. Отже, нерівність доведена ■.

Приклад 41. Довести нерівність:

$$\boldsymbol{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2}\ge\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}}.$$

Доведення: Скористаємося підстановкою у вигляді:

$$\boldsymbol{x=r_1\cos\alpha\,,\ \ y=r_1\sin\alpha}\ \ \text{і}\ \ \boldsymbol{a=r_2\cos\beta\,,\ \ b=r_2\sin\beta},$$

де $\boldsymbol{r_1>0,\ r_2>0}$. Тоді ліва частина нерівності матиме вигляд:

$$\boldsymbol{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2}=r_1+r_2}.$$

Вираз у правій частині перетворимо наступним чином:

$$\boldsymbol{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}=\sqrt{(r_1\cos\alpha+r_2\cos\beta)^2+(r_1\sin\alpha+r_2\sin\beta)^2}=}$$

$$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)} =$$

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\alpha - \beta)} \leq \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2} = r_1 + r_2.$$

Враховуючи отриманий результат, можна зробити висновок, що вихідна нерівність справедлива ■.

2.2.7. Геометрична інтерпретація числових нерівностей

При доведенні числових нерівностей, які містять одну змінну, інколи зручно скористатися їх графічним зображенням. У цьому випадку задача зводиться до побудови графіка деякої функції та визначення її обмеженності на певному проміжку або ж при всіх значеннях аргументу.

Розглянемо приклади.

Приклад 42. Довести, що при всіх допустимих значеннях x справджується нерівність:

$$-3 \leq \frac{|x|}{x} + \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-2|}{x-2} \leq 3\,.$$

Доведення: Розглянемо функцію:

$$y = \frac{|x|}{x} + \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-2|}{x-2},$$

графік якої можна побудувати скориставшись методом інтервалів. На кожному з проміжків $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$ і $(2;\ +\infty)$ ця функція є сталою (Рис. 2.1).

З графіку видно, що область значень даної функції є обмеженою числами -3 та 3. Отже, при всіх припустимих значеннях аргументу x матимемо нерівності $-3 \leq y \leq 3$, що й треба було довести ■.

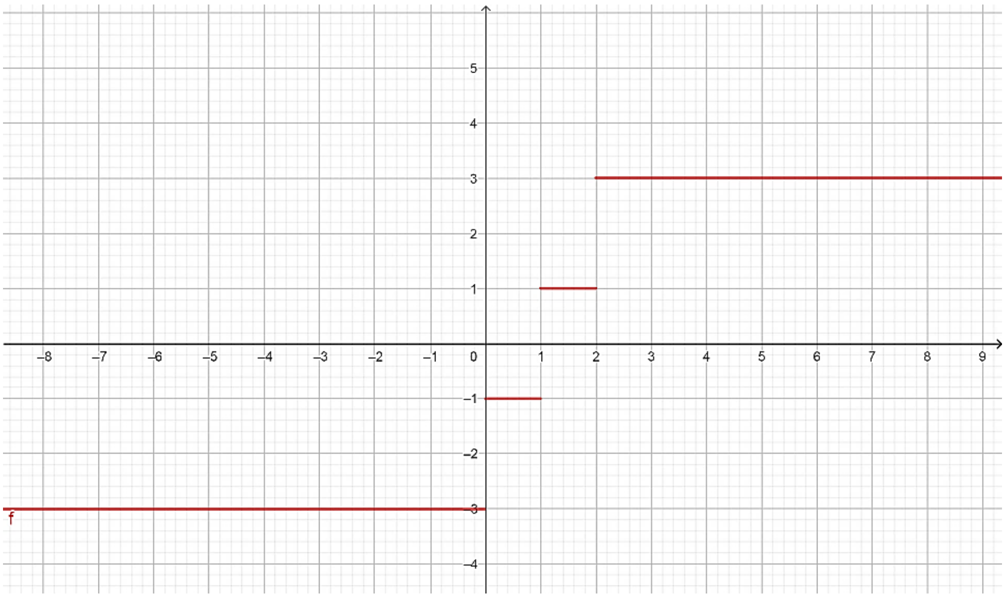

Рис. 2.1.

Приклад 43. Довести, що при довільних дійсних значеннях $\boldsymbol{x}$ справедлива нерівність:

$$\sqrt{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}}+\sqrt{(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}}}+\sqrt{(\boldsymbol{x}-\mathbf{5})^{\mathbf{2}}}\geq \mathbf{4}.$$

Доведення: Запишемо нерівність, рівносильну заданій:

$$|\boldsymbol{x}-\mathbf{1}|+|\boldsymbol{x}-\mathbf{3}|+|\boldsymbol{x}-\mathbf{5}|-\mathbf{4}\geq \mathbf{0},$$

і розглянемо функцію в її лівій частині:

$$\boldsymbol{y}=|\boldsymbol{x}-\mathbf{1}|+|\boldsymbol{x}-\mathbf{3}|+|\boldsymbol{x}-\mathbf{5}|-\mathbf{4}.$$

Скориставшись методом інтервалів, одержимо:

$$\boldsymbol{y}=\begin{cases}-\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{5}, \text{якщо } \boldsymbol{x}\leq \mathbf{1};\\ \mathbf{3}-\boldsymbol{x}, \text{якщо } \mathbf{1}<\boldsymbol{x}\leq \mathbf{3};\\ \boldsymbol{x}-\mathbf{3}, \text{якщо } \mathbf{3}<\boldsymbol{x}\leq \mathbf{5};\\ \mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{13}, \text{якщо } \boldsymbol{x}>\mathbf{5}.\end{cases}$$

З вигляду графіка функції (Рис. 2.2) можна зробити висновок, що вона набуває лише невід’ємних значень при всіх $\boldsymbol{x}\in \mathbb{R}$.

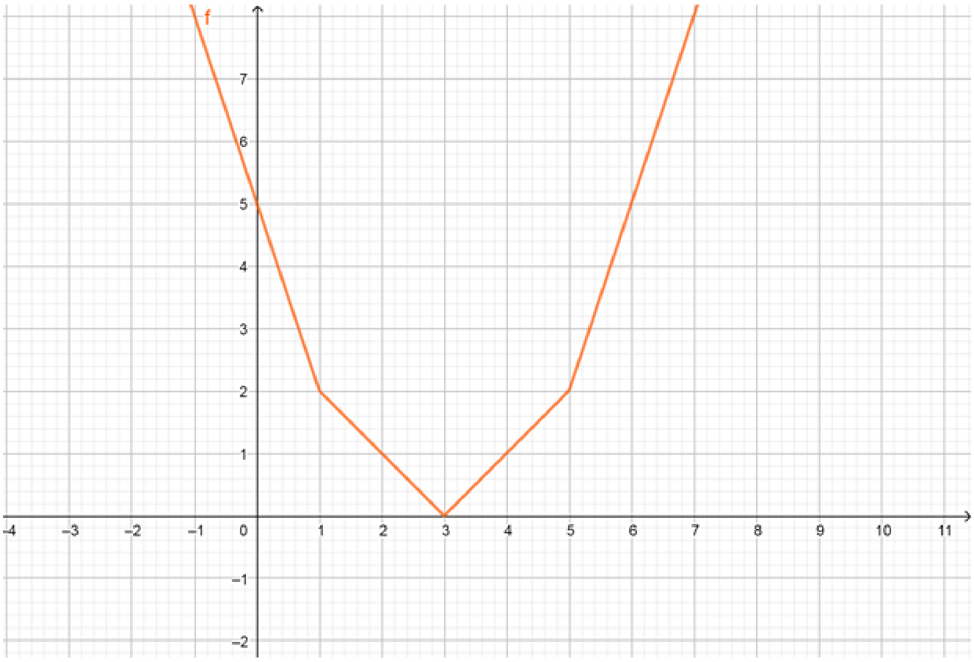

Рис. 2.2.

Отже, при всіх значеннях $\boldsymbol{x}$ справедлива нерівність $|\boldsymbol{x}-\mathbf{1}|+|\boldsymbol{x}-\mathbf{3}|+|\boldsymbol{x}-\mathbf{5}|-\mathbf{4}\geq \mathbf{0}$ ■.

Приклад 44. Довести, що при довільних дійсних значеннях $\boldsymbol{x}$ справедлива нерівність:

$$(|\boldsymbol{x}-\mathbf{1}|-\mathbf{2})(|\boldsymbol{x}+\mathbf{1}|-\mathbf{1})\geq -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}.$$

Доведення: Розглянемо функцію $\boldsymbol{y}=(|\boldsymbol{x}-\mathbf{1}|-\mathbf{2})(|\boldsymbol{x}+\mathbf{1}|-\mathbf{1})$ і побудуємо її графік (Рис. 2.3).

Точки $\boldsymbol{x}=-\mathbf{1}$ та $\boldsymbol{x}=\mathbf{1}$ розбивають область визначення на три проміжки: $(-\infty;\ -\mathbf{1}]$, $(-\mathbf{1};\mathbf{1}]$ і $(\mathbf{1};\ +\infty)$. Розглядаючи функцію на кожному з цих проміжків, одержимо тотожну їй у вигляді:

$$\boldsymbol{y}=\begin{cases}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\boldsymbol{x}+\mathbf{2}), & -\infty<\boldsymbol{x}\leq -\mathbf{1},\\ -\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1}), & -\mathbf{1}<\boldsymbol{x}\leq \mathbf{1},\\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}-\mathbf{3}), & \mathbf{1}<\boldsymbol{x}<+\infty.\end{cases}$$

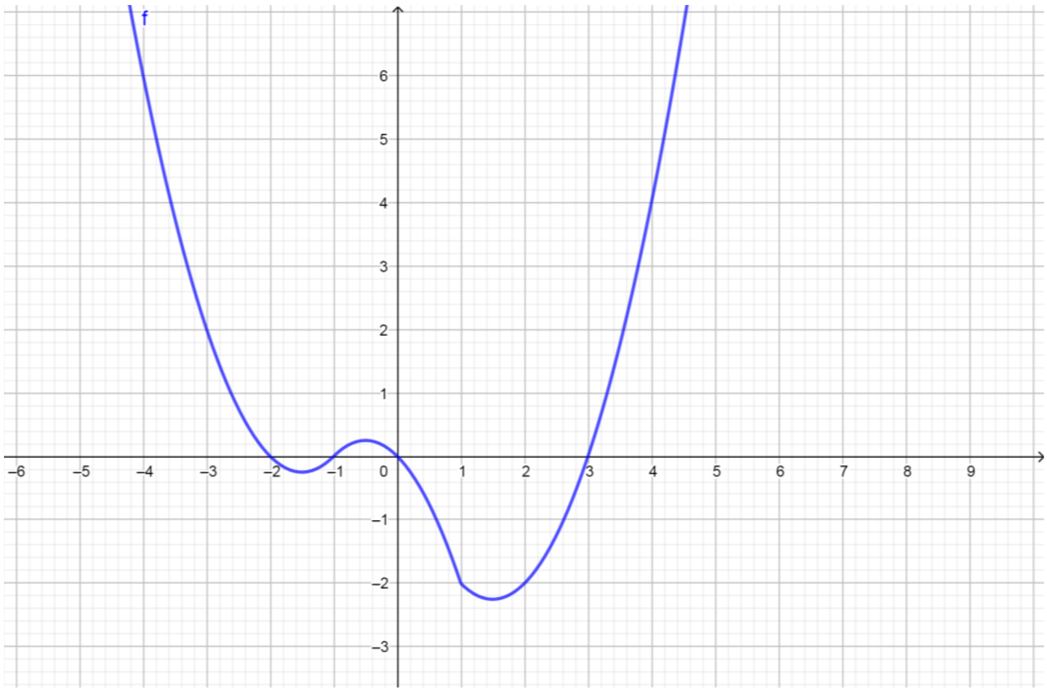

Рис. 2.3.

З графіка (Рис. 2.3) видно, що найменшого значення функція досягає на проміжку $(\mathbf{1};\ +\infty)$, де вона має вигляд $\boldsymbol{y = x(x-3)}$. Легко впевнитися, що вершина цієї параболи має координати $\left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{4}\right)$. Отже, при всіх значеннях аргументу $\boldsymbol{y} \geq -\frac{9}{4}$, тобто $(|\boldsymbol{x}-\mathbf{1}|-\mathbf{2})(|\boldsymbol{x}+\mathbf{1}|-\mathbf{1}) \geq -\frac{9}{4}$ ■.

<u>Приклад 45.</u> Довести нерівність:

$$\sqrt{(\boldsymbol{a}-\mathbf{2})^2+\boldsymbol{b}^2}+\sqrt{\boldsymbol{a}^2+(\boldsymbol{b}-\mathbf{2})^2} \geq \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}\,.$$

<u>Доведення:</u> Легко помітити, що в лівій частині нерівності міститься сума відстаней від точки $\boldsymbol{M}$ з координатами $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$ відповідно до точок $\boldsymbol{A}(\mathbf{2};\mathbf{0})$ та $\boldsymbol{B}(\mathbf{0};\mathbf{2})$ (Рис. 2.4).

Зрозуміло, що якщо $\boldsymbol{M}$ не лежить на відрізку $\boldsymbol{AB}$, то ця сума завжди більша за довжину $\boldsymbol{AB} = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$. У випадку, коли $\boldsymbol{M}$ лежить на $\boldsymbol{AB}$ матимемо $\boldsymbol{AM}+\boldsymbol{MB} = \boldsymbol{AB} = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$. Отже, у загальному випадку $\boldsymbol{AM}+\boldsymbol{MB} \geq \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$, що й доводить потрібну нерівність ■.

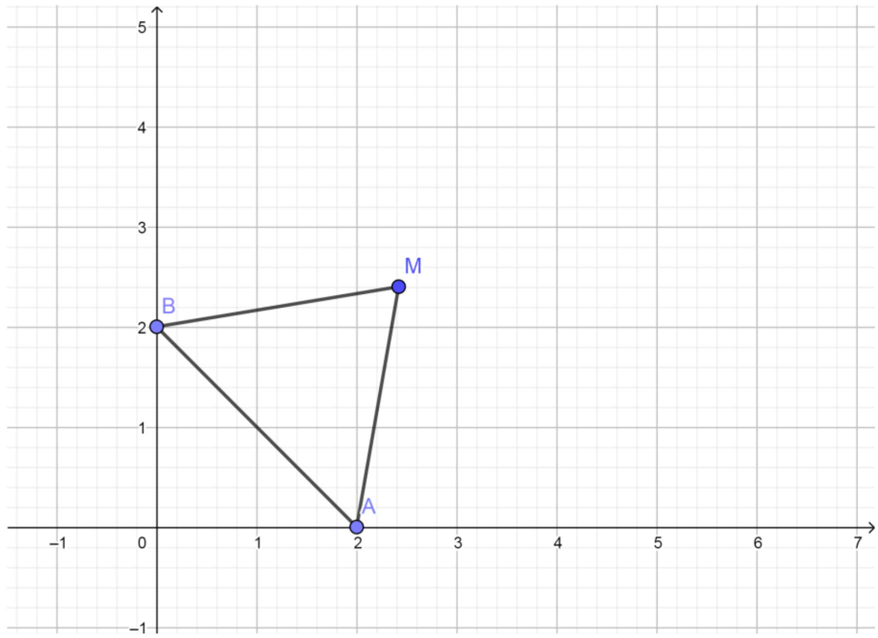

Рис. 2.4.

Приклад 46. Довести нерівність: $\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}} \le |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.

Доведення: Розглянемо на площині точку $\boldsymbol{M}$ з координатами $(|\boldsymbol{a}|;\ |\boldsymbol{b}|)$ (Рис. 2.5).

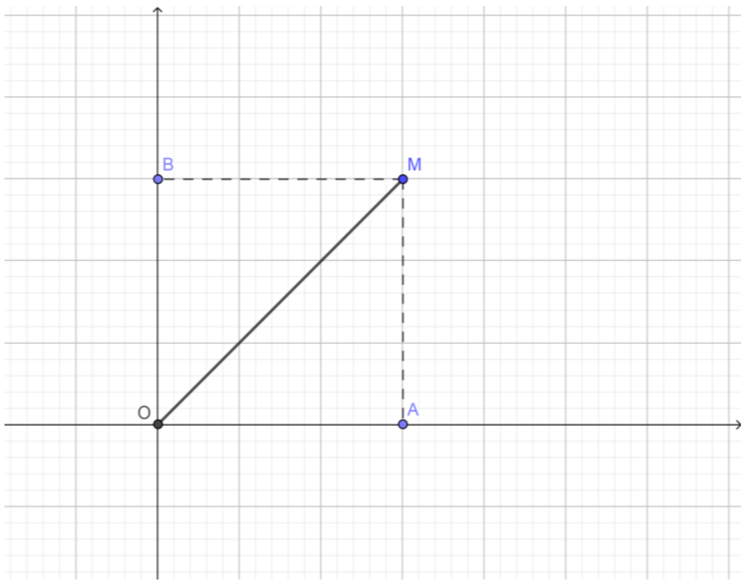

Рис. 2.5.

Тоді довжина відрізка $\boldsymbol{OM}$ (Рис.4) дорівнюватиме $\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}}$. З прямокутного $\Delta\boldsymbol{OMA}$ випливає, що $\boldsymbol{OM}$ – його гіпотенуза, а $\boldsymbol{OA} = |\boldsymbol{a}|$ і $\boldsymbol{MA} = |\boldsymbol{b}|$ – катети. Тоді з нерівності трикутника маємо $\boldsymbol{OM} < \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{MA}$. Знак рівності має місце, у випадку, якщо $\boldsymbol{a}$ або $\boldsymbol{b}$ дорівнюють нулю ■.

2.3. Розробка спецкурсу за вибором

Спецкурс за вибором з математики

«Доведення числових нерівностей»

Програма курсу призначена для учнів 10-11 класів. У програмі розкриваються цілі та завдання курсу, його тематичний план та зміст.

Матеріал спецкурсу містить теми, які або зовсім не розглядаються в шкільному курсі, або розглядаються в дуже стислому вигляді.

Спецкурс розрахований на 34 години та призначений для розв’язання вправ різного рівня складності та спрямований на поглиблене вивчення питань, що розширюють кругозір, розкривають прикладні аспекти математики. Наводяться методи доведення нерівностей, які для школярів вважаються завданнями підвищеної складності, які потребують нестандартних методів міркувань.

Мета спецкурсу – розвиток умінь учнів профільної школи доводити числові нерівності.

Завдання спецкурсу:

- познайомити учнів із різними методами доведення числових нерівностей;

- проілюструвати широкі можливості використання добре засвоєних знань;

- прищепити навички використовувати нестандартні способи міркувань під час доведення нерівностей.

Практична реалізація знань, отриманих після проходження курсу можлива в галузі вищої математики, дані теми знайдуть своє застосування при здобутті знань у вищих навчальних закладах.

Навчальний процес передбачає теоретичну частину у вигляді лекційного матеріалу, практичну частину у вигляді завдань прикладного характеру, самостійні роботи, спрямовані на перевірку засвоєння отриманих знань.

Під час проведення курсу використовується пояснювально-ілюстративний, частково пошуковий, дослідницький методи навчання. При цьому можуть бути використані такі форми уроку, як лекція, практикум, дискусія та різні форми контролю: самоконтроль, взаємоконтроль, контроль вчителя.

На уроках можна використовувати роботу біля дошки, яка охоплює більшу частину учнів. Ця форма роботи розвиває точну лаконічну мову, здатність працювати в швидкому темпі, швидко збиратися думками та приймати рішення. Можна використовувати коментовані вправи, коли один із учнів пояснює вголос хід виконання завдання. При цьому немає механічного списування з дошки, а має місце процес повторення [9, с.217].

Дидактичний процес складається з 3-х взаємопов'язаних ланок:

1. мотивація учнів

2. навчально-пізнавальна діяльність учнів

3. управління цією діяльністю.

Мотивація формується вчителем за допомогою математичної суворості, цікавості, проблемних завдань.

Крім мотивації необхідно, щоб учні виконували ті дії, які ведуть до засвоєння навчального матеріалу. Без вирішення завдань не може бути засвоєння та розвитку вмінь і навичок.

На різних етапах засвоєння завдання виконують різні функції. На першому етапі вони служать для створення навчальної мотивації, на другому вони вводяться для розкриття діяльності, яка підлягає засвоєнню, на всіх наступних - виступають як засіб засвоєння цієї діяльності.

Головна закономірність процесу засвоєння в тому, що пізнавальна діяльність та введені в неї знання набувають розумової форми не відразу, а поетапно. З урахуванням цієї поетапності підвищується можливість досягнення мети навчання усіма учнями.

Вправи займають велике місце у навчальному процесі та виступають способом цілеспрямованого розвитку учня доводити числові нерівності.

Вправа – це:

• носій засобів цілеспрямованого формування знань, умінь, навичок;

• спосіб організації та управління навчально-пізнавальною діяльністю учня;

• одна із форм реалізації методів навчання;

• засіб зв'язку теорії та практики.

Підібравши систему вправ на заняття (Додаток Б), вчитель почуватиме себе впевнено під час проведення заняття (Додаток А).

Вивчення спецкурсу починається із повідомлення учням плану роботи: кількості уроків на тему, короткий зміст, які види уроків будуть застосовуватися щодо теми, на яких уроках проводитимуться перевірочні роботи. Це робиться для того, щоб підготувати учнів до роботи, зробити їх активними учасниками процесу навчання, привчає їх до планування своєї діяльності, вміння бачити кінцеву мету роботи.

Робота спецкурсу будується на **принципах:**

- науковість;
- доступність;
- варіативність;
- самоконтроль.

Розглянемо орієнтовне календарно-тематичне планування, за яким можна проводити спецкурс для учнів профільної школи (Табл. 2.1)

Таблиця 2.1.

ОРІЄНТОВНЕ КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧНЕ ПЛАНУВАННЯ КУРСУ

№ заняття	Тема заняття	Кільк. годин
1	Числові нерівності. Властивості числових нерівностей.	1
2	Додавання і множення числових нерівностей. Оцінювання значення виразу.	1
3	Застосування властивостей числових нерівностей для доведення числових нерівностей.	1
4-5	Доведення числових нерівностей шляхом виділення суми чи добутку виразів одного знаку.	2
6-7	Доведення числових нерівностей методом «від супротивного»	2
8-9	Принцип повної та неповної математичної індукції.	2
10-12	Доведення числових нерівностей ММІ.	3
13	Самостійна робота №1	1
14-15	Метод аналізу та оцінок. Використання методу аналізу та оцінок для доведення числових нерівностей.	2
16-17	Метод «підсилення» нерівностей та його застосування.	2
18-19	Зведення нерівностей до відомих методом введення нових змінних.	2
20-21	Застосування класичних нерівностей до доведення числових нерівностей.	2
22-23	Застосування векторів та властивостей скалярного добутку.	2
24	Самостійна робота №2.	1
25-26	Доведення числових нерівностей шляхом використання симетрії виразів.	2
27-28	Застосування монотонності функцій.	2
29-30	Застосування опуклості функції. Нерівність Єнсена.	2
31-32	Геометрична інтерпретація нерівностей.	2
33	Самостійна робота №3.	1
34	Підсумкове заняття.	1

2.4. Використання ІКТ на заняттях спецкурсу «Доведення числових нерівностей»

Оскільки доведення нерівностей – це неалгоритмізована процедура, то не існує програмних засобів, за допомогою яких можна було б проводити доведення нерівностей. Але сучасне навчання стає комп’ютерно-орієнтованим, а іноді проходить у дистанційному форматі.

Під час проходження спецкурсу «Доведення числових нерівностей» учнями 10 – 11 класів математичного профілю для вчителя є можливість впроваджувати інформаційно-комунікаційні технології навчання. Серед них можуть бути: інтерактивна дошка, сервіси для введення та розв’язання математичних задач (Mathway, Photomath, MalMath, Mathpix та ін.), віртуальні дошки (в Google Jamboard, Zoom Whiteboard та ін.), сервіси для комп’ютерного тестування за математичними текстами (Classtime, Google Forms, Kahoot та ін.), програми для побудови графіків функцій (GeoGebra, Desmos, Photomath та ін.). Для створення якісного роздаткового демонстраційного матеріалу слід скористатися зручностями текстових редакторів (LaTex, Microsoft Word, Swift Calcs та ін.) або застосунками для створення та відтворення презентацій (Microsoft PowerPoint, Google Презентації, Keynote та ін.)

Розглянемо застосування деяких з них.

Якщо в навчальному закладі наявна інтерактивна дошка, то на заняттях із спецкурсу її слід використовувати як інформаційно-комунікаційну технологію.

Можливості звичайної дошки і відео-проектора поєднує в собі інтерактивна дошка, на якій можна писати спеціальними маркерами або проектувати будь-яке зображення. «Інтерактивна дошка - це сенсорний екран, приєднаний до комп'ютера, зображення з якого передає на дошку проектор. Досить тільки доторкнутися до поверхні дошки, щоб почати роботу на комп'ютері. Вона реалізує один з найважливіших принципів навчання – наочність» [39].

Інтерактивна дошка поєднує в собі проекційні технології з сенсорним пристроєм, тому така дошка не просто відображає те, що відбувається на комп'ютері, а дозволяє управляти процесом презентації, вносити поправки і корективи, робити кольором позначки і коментарі, зберігати матеріали уроку для подальшого використання та редагування [22].

Панель інструментів інтерактивної дошки містить інструменти, що дозволяють:

- працювати зі сторінками - перейти до попередньої, перейти до наступної, вставити нову сторінку;
- зберегти сторінки та файли;
- вставити те, що попередньо скопіювали в буфер;
- скасувати попередню дію;
- видалити попередньо виділений об'єкт;
- затемнити сторінку, тобто вставити шторку, що закриває всю сторінку або її частину.

У арсеналі для роботи є такі інструменти, як:

- *"Перо"* використовується як просто олівець чи крейда, якими можна малювати та писати все, що завгодно.
- *"Ластик".* Усе, що намальовано й написано пером, можна ним стерти.
- *"Лінія"*, за допомогою якого проводимо прямі лінії.
- *"Фігури"* - дозволяє вставити на сторінку фігури різних видів. При цьому існує можливість їх редагування.
- *Колір контуру й заливання*. Можна виділити будь-яку фігуру, що намальована інструментами "Лінія", "Фігура", та за допомогою цього значка змінити кольори їх заливання. [49]

Сервіси для введення та розв’язання математичних задач також доцільно використовувати на заняттях спецкурсу. Наприклад, сервіс Mathway надає учням інструменти, необхідні для розуміння та вирішення математичних завдань (Рис. 2.6).

Рис. 2.6.

Після запуску програми користувачам одразу доступні для користування всі її функції та інструменти. Крім того, Mathway пропонує розширений словник загальновживаних термінів, правил, формул і теорем, доповнений значеннями та короткими ілюстраціями. Учні можуть переглядати весь словник в алфавітному порядку, або вручну шукати потрібний термін на екрані глосарію.

Сервіс Photomath схожий на Mathway, має зручний та зрозумілий інтерфейс для використання на мобільному телефоні, оскільки не доступний на комп’ютері (Рис. 2.7).

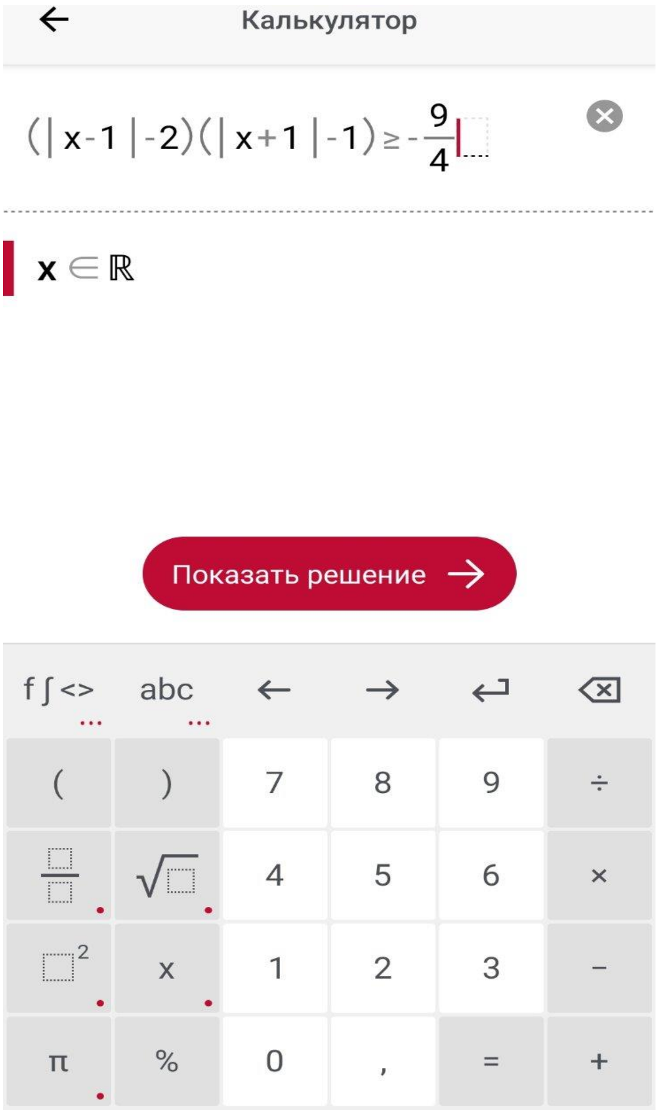

Рис. 2.7.

На заняттях спецкурсу такі сервіси стануть у нагоді на етапах доведення числових нерівностей, де необхідно знайти розв'язки певних завдань. Використання цих сервісів слугуватиме для заощадження часу на заняттях.

Використання віртуальних дошок для навчання набуло популярності внаслідок впровадження дистанційного навчання у закладах освіти. На заняттях спецкурсу під час дистанційного навчання можна застосовувати, наприклад, Google Jamboard - віртуальну дошку для колективного користування (Рис. 2.8).

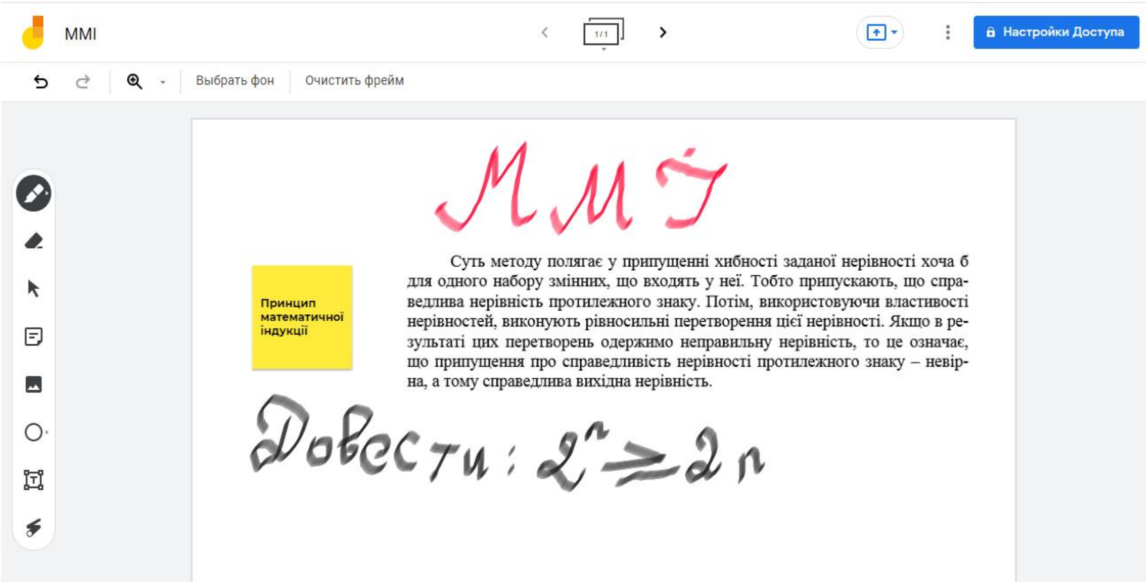

Рис. 2.8.

Створити або відкрити дошку Jamboard можна прямо під час проведення заняття у Google Meet. Для цього треба виконати декілька кроків:

1) Праворуч внизу натисніть “Дії’’, потім “Інтерактивна дошка”.

2) Виберіть один із варіантів:

- Щоб створити нову дошку, виберіть Почати роботу з дошкою.
- Щоб відкрити файл Jam зі свого диска, спільного диска або комп'ютера, натисніть Вибрати на Диску.

При роботі з інтерактивною дошкою під час зустрічі у Google Meet діють такі правила доступу [29]:

- Учасники, які приєднались через запрошення з календаря і перебувають в одній організації з тими, хто запустив інтерактивну дошку, автоматично отримують права на редагування Jam-файлу.
- Учасники, які приєднались без запрошення з календаря, але перебувають в одній організації з тим, хто запустив інтерактивну дошку, автоматично отримують права на редагування, якщо ви поділилися Jam-файлом після їхнього підключення до зустрічі.

- Тим, хто приєднається до зустрічі після того, як ви поділилися дошкою, доступ до Jam-файлу потрібно буде надавати вручну.
- Учасникам, які не перебувають в одній організації з тими, хто запустив інтерактивну дошку, необхідно надати доступ. У Jam-файлі натисніть Поділитися, потім вкажіть адреси електронної пошти, а потім натисніть Готово.

Також велика кількість освітніх закладів для дистанційного навчання у сервісі Zoom використовують вбудовану віртуальну дошку Whiteboard (“Білу дошку”) - інструмент, на якому разом можна писати, малювати, коментувати (Рис. 2.9).

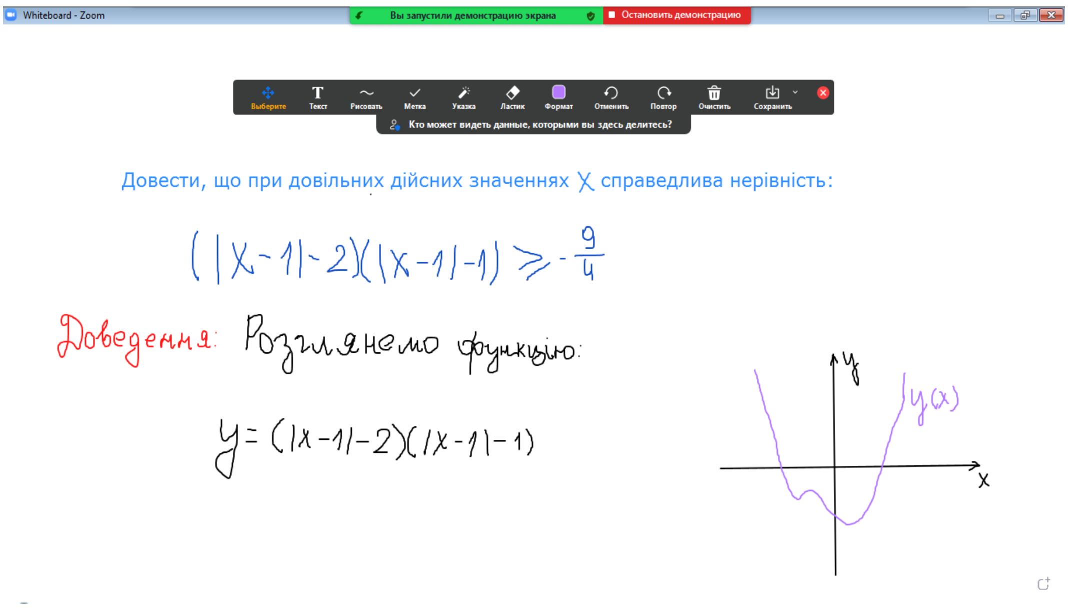

Рис. 2.9.

Між віртуальними дошками Jamboard та Writeboard існують деякі відмінності. Наприклад, якщо під час відео-зустрічі Zoom вчитель не хоче, щоб учні неконтрольовано демонстрували свої екрани, він може заборонити їм це, змінивши налаштування сесії. А при відео-зустрічі у Google Meet не можна заборонити учасникам тільки демонструвати свої екрани, можливо лише вилучити з трансляції учасника, який не дотримується регламенту демонстрації екрану [52].

Розглянемо також відмінності під час проведення дистанційних занять за допомогою відео-зустрічей у Zoom та Google Meet.

І в Zoom і в Google Meet учасники, які долучилися до трансляції за посиланням, можуть одночасно чути і бачити один одного, а також говорити в ефірі [1].

У Zoom вчитель може одним кліком вимкнути звук усім учням, залишаючи і за собою як організатором, і за ними можливість за потреби “вмикати мікрофон”. У Google Meet організатор трансляції не може вимкнути мікрофони всіх учасників одним кліком, однак може допомогти окремим учасникам вмикати чи вимикати свої мікрофони [66].

У чаті Google Meet всі повідомлення висвітлюються в загальному чаті, а на противагу йому, у чаті Zoom можна писати повідомлення у спільний чат або ж обмінюватися індивідуальними повідомленнями.

Після запису відео-зустрічі в Zoom в папці зі збереженими файлами можна знайти не лише відео заняття, але й текстовий документ зі всіма повідомленнями, які учасники надсилали у спільний чат. У Google Meet такого збереження не передбачено, є можливість зробити хіба що знімок з екрану із повідомленнями чату і надіслати його учасникам трансляції [1].

В Zoom є функція Breakout Rooms для розділення учнів на групи, а в Google Meet такої немає змоги.

Як працює групова робота в Zoom? Під час заняття учням можна поставити кілька запитань або дати декілька завдань на доведення числових нерівностей і запропонувати обговорити їх у менших групах – як під час групової роботи у класі. Щоб ця функція спрацювала, треба перевірити налаштування і, за потреби, увімкнути у своєму профілі Zoom опцію Breakout Rooms, інакше вона просто не відображатиметься у вікні демонстрації. Ділити учнів на групи під час проведення заняття можна автоматично або вручну – відповідні налаштування з’являються після натискання на іконку груп. Вчитель може налаштувати час роботи в групах, а також дозволити або заборонити учням у будьякий час повертатися у головну кімнату заняття. Вчитель (організатор відео-зустрічі) може заходити у ті кімнати, де учні працюють у групах, і відстежувати їхніх прогрес, а може залишатися у головній кімнаті й консультувати тих учнів, у яких виникають труднощі з роботою в групах [1].

Серед сервісів комп’ютерного тестування найпоширенішими є: Classtime, Google Forms та Kahoot. Інтерфейси цих сервісів зручні та зрозумілі у використанні. На заняттях із спецкурсу «Доведення числових нерівностей» тестування у цих сервісах можна проводити для оцінювання рівня теоретичних знань. Під час вивчення перших тем спецкурсу, також є можливість у тестах запропонувати учням приклади не складних завдань з перших трьох тем курсу.

Під час вивчення теми спецкурсу «Геометрична інтерпретація числових нерівностей» зручно буде скористатися застосунками для побудови графіків функцій, наприклад: GeoGebra, Desmos або Photomath.

GeoGebra є зручною та якісною програмою динамічної математики для всіх рівнів освіти, яка об'єднує геометрію, алгебру, таблиці, графіки, статистику та обчислення в одному простому у використанні пакеті [35].

Достатньо лише ввести функцію у строку вводу, як одразу автоматично будується її графік, який ми можемо збільшувати або зменшувати, змінювати значення сталих, використовувати різні кольори та розміри ліній (Рис. 2.10).

Також в одній системі координат можна побудувати декілька графіків.

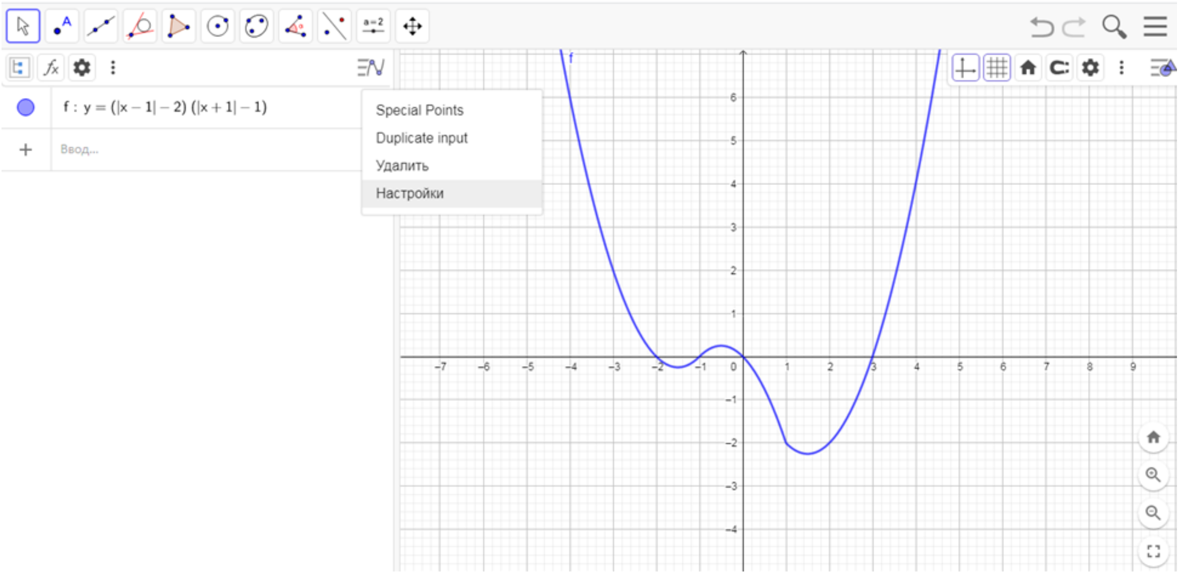

Рис. 2.10.

Отже, інформаційно-комунікаційні технології навчання стануть у нагоді на уроках математики, факультативних заняттях, безпосередньо на заняттях зі спецкурсу «Доведення числових нерівностей». Вони допоможуть полегшити співпрацю вчителя та учнів при дистанційному навчанні, унаочнити складні графіки функцій, перевірити теоретичні знання та продемонструвати практичні навички, а також зацікавити учнів якісним демонстраційним матеріалом.

Висновки до розділу 2

Проаналізувавши навчальну і методичну літературу, ми виділили таку особливість у вивченні теми «Доведення числових нерівності»: навички доведення нерівностей формуються на менш високому рівні, ніж розв'язування нерівностей відповідних класів.

Вивчаючи основні методи доведення числових нерівностей, ми розглянули низку прикладів, яка допоможе учням розвинути вміння доводити числові нерівності.

Для більш глибокого та розширеного вивчення даної теми у профільній школі ми розробили спецкурс за вибором, який спрямований на розвиток умінь учнів доводити числові нерівності.

Під час сучасного комп'ютеро-орієнтованого навчання ми пропонуємо на заняттях зі спецкурсу «Доведення числових нерівностей» використовувати інформаційно-комунікаційні технології навчання, які можуть полегшити підготовку вчителя до заняття, а також безпосередній виклад змісту тем занять, покращити та пришвидчити усвідомлене сприйняття учнями теми, шляхом наочностей.

ВИСНОВКИ

В результаті аналізу навчальної та науково-методичної літератури з теми дослідження ми систематизували теоретичні відомості, пов'язані з особливостями вивчення числових нерівностей та їх доведення в шкільному курсі математики та в курсі алгебри профільної школи. Нами було проведено логіко-дидактичний аналіз курсу алгебри теми «Числові нерівності».

Вивчаючи різні трактовки понять «математична культура учня» і «алгебраїчна культура учня», представлені в психолого-педагогічній та методичній літературі, ми визначили, що формуванню обчислювальної і термінологічної культури при вивченні доведення нерівностей, згідно з розробленою нами особистісно-розвивальною моделлю навчального процесу, сприяють такі чинники:

- добір учителем завдань, які передбачають для учнів самостійний пошук розв'язку;
- надання учням можливості обрання варіанту завдання чи шляху розв'язання задач;
- проведення доведень різними методамм та визначення раціональнішого шляху.

Ми визначили методику навчання учнів доведенню числових нерівностей, яка грунтується на проведенні практичних занять.

Розробили спецкурс, спрямований на розвиток умінь учнів доводити числові нерівності у профільній школі. А також розглянули програмне забезпечення, яке стане у нагоді вчителю і учням під час проходження цього курсу.

Дослідивши можливості використання програмних засобів при вивченні спецкурсу за вибором, ми з'ясували, що застосування програмних засобів забезпечує диференціацію навчання і підвищення його результативності, сприяє розвитку пізнавальної активності та графічної культури учнів. Застосовувати елементи ІКТ можна на різних етапах заняття.

Визначивши, що розвиток умінь учнів доводити числові нерівності полягає у набутті навичок, шляхом розв'язання великої кількості задач на доведення числових нерівностей різними методами. Тому нами було розроблено збірку завдань для кожного методу доведення і розроблено розгорнуту методичну розробку одного із занять спецкурсу.

Поставлена мета досягнута, завдання виконані повністю. Проведене дослідження не вичерпує всіх проблем удосконалення математичної підготовки учнів профільної школи, і дослідження, сфокусовані на удосконалення методики навчання теми «Доведення числових нерівностей» є перспективними.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Zoom vs Google Meet: відеозв'язок під час карантину. URL: http://ceit-blog.ucu.edu.ua/ed-tech/zoom-vs-meet-videozv-yazok-pid-chas-karantynu/

2. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2018. – 336 с.

3. Алгебра і початки аналізу: (профіл. рівень): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ: Генеза, 2018. – 448 с.: іл.

4. Алгебра і початки аналізу: (профіл. рівень): підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ: Генеза, 2019. – 416 с.: іл.

5. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2018. – 400 с.: іл.

6. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2019. – 352 с.: іл.

7. Алгебраїчний тренажер: посібник для школярів та абітурієнтів / А.Г. Мерзляк, Д.А. Мерзляк, Д.А. Номіроський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – 3-тє вид. – Х.: Гімназія, 2016. – 272 с.: іл.

8. Балан В. Г., Лавренюк В. І., Шарова Л. І. Числові нерівності на вступних іспитах: Навч. посібн. – К.: Альфа, 2005. – 104 с.

9. Бантова М.А. Методика викладання математики / М. А. Бантова, Т. В. Бельтюкова. – К.: Генеза, 2008. – 335 с.

10. Бевз Г. П. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвітн. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. – 272 с.

11. Бевз Г. П. Нерівності / Г. П. Бевз // Математика в школі. – 2009. – 165с.

12. Березін С.О.. Деякі аспекти формування математичної грамотності учнів/ С.О. Березін // *Матеріали Всеук. наук.-метод. конф. «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання математики»*, 3–4 грудня 2009 р, м. Суми. – Суми: Вид-во СумДПУ імені АС. Макаренка. – 2009. – С. 103–105.

13. Бесхлібна О. С. Методика вивчення нерівностей та їх систем в курсі математики середньої школи: квал. роб./ Криворізький державний педагогічний університет. Кривий Ріг, 2018. 120 с.

14. Биджиев Д.У. Организационно-педагогические условия формирования математической культуры у студентов университета – будущих учителей: автореф. дис. канд. пед. наук / Д.У. Биджиев. – Владикавказ, 2005. – 22 с.

15. Білюнас А.В. Апробація та експериментальна перевірка основних результатів дисертаційного дослідження проблеми формування математичної культури учнів старшої школи / А.В. Білюнас // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології: наук. журн.. – Суми: СумДПУ імені А. С. Макаренка. – 2014. – № 5 (39). – С. 208–215.

16. Біляк Б., Дуда О. Профільне навчання в загальноосвітніх навчальних закладах // Директор школи, ліцею, гімназії. – 2003. – № 4. – С. 44-47.

17. Бурда М. І. Структура і зміст профільного навчання математики / М. І. Бурда // Математика в школі. – 2007. – №7. – С.3-6

18. Бухлова Н.В. Формування здатності особистості до самонавчання / Н.В. Бухлова // Педагогічна скарбниця. – 2002. – № 1. – С. 47– 49.

19. Вавилов В.В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства / В.В. Вавилов. – М.: Наука, 1988. – С. 52–53.

20. Валєєв К. Г. Математика на вступних випробуваннях: Навч. посіб. / К. Г. Валєєв, І.А. Джалладова. – К.: КНЕУ, 2006. - 396с.

21. Гече Ф.Е. Збірник конкурсних завдань з математики./ Гече Ф.Е. – Ужгород: В-во «Shark», 2015. – 238с.

22. Гутор О. М. Інтерактивна дошка на уроках математики. URL: https://mathbloggutor.blogspot.com/p/blog-page_66.html

23. Диференціація та стандартизація математичної освіти в загальноосвітніх навчально-виховних закладах та вищих навчальних закладах першого та другого рівнів акредитації. URL: www.home.skif.net

24. Дунець Л.; Дунець, О. Формування професійних інтересів у майбутніх фахівців. *Рідна школа,* 2001, 1: 48-49.

25. Жменька А.Б. Встретиться с математическим моделированием / А. Б. Жменька. – М.: Знание, 1991. – 160 с.

26. Захарова Т.Г. Формирование математической культуры в условиях профессиональной подготовки студентов вуза: автореф. дис. канд. пед. наук / Т.Г. Захарова. – Саратов, 2005. – 24 с.

27. Зимова І. В. Формування елементарної математичної компетентності / Л.І. Зайцева. – К.: МП «Око», 2005. – 215 с.

28. Істер О.С. Алгебра, 9 клас / О.С. Істер, О.В. Єргіна. – Х.: Вид. група «Основа», 2018. – 340 с.

29. Капіносов А.М. Основи технології навчання. Проектуємо урок математики / А.М. Капіносов. – Х.: Вид. група «Основа», 2006. – 140 с.

30. Карлащук А.Ю. Формування дослідницьких умінь школярів у процесі розв’язування математичних задач з параметрами / А.Ю. Карлащук. – К.: Вища школа, 2001. – 19 с.

31. Колягин Ю. М., Ткачёва М. В., Фёдорова Н. Е. Профильная дифференциация обучения математике // Математика в школе. – 1990. – № 4. – С. 21-27.

32. Комов М.П. Неравенства / М.П. Комов. – М.: Наука, 1974. – 72 с.

33. Концепція профільного навчання в старшій школі (з коментарями та запитаннями) // Підруч. для директора. – 2003. – №11-12. – С.4-12.

34. Концепція профільного навчання в старшій школі / Освіта України. – 2003. – № 42-43. – С. 8-9.

35. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп’ютером: посібник для вчителів і студентів [за ред. М. І. Жалдака] / Т.Г. Крамаренко. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. – 272 с.

36. Кушнір В.А. Інноваційні методи навчання математики / Науковометодичний посібник. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 148 с.

37. Лев А. Я. Інтегрований підхід на уроках математики URL: https://naurok.com.ua/integrovaniy-pidhid-na-urokah-matematiki-31492.html

38. Маркова І.С. Інтерактивні технології на уроках математики: навч.-метод. посібник / І.С. Маркова. – Х.: Вид. група «Основа», 2007. – 126 с.

39. Маркова І.С. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика: метод проектів. Комп’ютерні технології. Розвивальне навчання / І.С. Маркова. – Х.: Вид. група «Тріада», 2007. – 171 с.

40. Математика. Навчальна програма. Рівень стандарту – Електронний ресурс. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna- serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

41. Мельников Ю.Б. Формирование математической культуры как средство повышения компетентности / Ю.Б. Мельников // Современное образование. – 2017. – № 1. – С. 99–111.

42. Мерзляк А.Г. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвітн. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.П. Полонський, М.С. Якір. – Х: Гімназія, 2017. – 272 с.

43. Навчальна програма з математики для учнів 10 -11 класів загальноосвітніх навчальних закладів Профільний рівень. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx

44. Особенности изучения математики в профильных классах в современных условиях. URL: https://allref.com.ua/uk/skachaty/Osoblivosti_vivchennya_matematiki_u_profil-nih_klasah_v_suchasnih_umovah

45. Особливості вивчення математики в профільних класах у сучасних умовах URL: https://res.in.ua/diplomna-robota-osoblivosti-vivchennya-matematiki-v-profilenih.html?page=2

46. Паюл М. В. Методика изучения уравнений и неравенств в 6-8 классах: дис. канд. пед. наук / М. В. Паюл. – Киев, 1985. – 198 с.

47. Петренко С. В., Мартиненко О. В. Особливості навчання математики в профільній школі / *Діяльність навчального закладу як умова розбудови освітнього простору регіону.* Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції. – Чернігів: РВВЧДПУ, 2004. – С. 63-66.

48. Подласый И.П. Самостоятельная познавательная деятельность школьников в обучении: Теоретико экспериментальное исследование / И.П. Подласый. – М.: Педагогика, 1980. – 240 с.

49. Пометун О.І. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Наук. - метод. пос./ Пометун О.І., Пироженко Л.В. – К.: Вид-во А.С.К.,2003. – 206с.

50. Прядко Н.О. Формування математичної грамотності учнів старшої школи/ Н.О. Прядко // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Педагогічні науки. – 2013. – Вип. 109. – С. 98–100.

51. Путилова Е. В. Формирование математической культуры студентов педагогических вузов как общедидактическая задача: дисс. канд.пед.наук: 13.00.01 / Е.В. Путилова. – М.: РГБ, 2004. – 184 с.

52. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ / С.А. Раков. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.

53. Роганін О.М. Математика: навч. посіб./ О.М.Роганін.- К.-Х.:2020 - 402с. – (Серія «Грунтовна підготовка до ЗНО за 100 днів»).

54. Розанова Н.Д. Культура математичного мовлення учнів / Н.Д. Розанова. – Львів: Світ, 2003. – 176 с.

55. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе / Г.И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.

56. Слєпкань З.І. Методика навчання математики / З.І. Слєпкань. – К.: «Зодіак-ЕКО», 2000. – 182 с.

57. Соколенко К. Вивчення деяких способів доведення нерівностей в ШКМ. *Електронний журнал «Наукові записки молодих учених».* URL: file:///C:/Users/User/Downloads/1754-3089-1-PB.pdf

58. Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри та початків аналізу / Л.О. Соколенко. – Чернігів: Сіверянська думка, 2002. – 128 с.

59. Соколенко Л.О. Теоретико-множинні аспекти шкільного курсу математики / Л.О. Соколенко // Матеріали міжнародної науково- методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО-2015), м. Черкаси, 4-5 червня. – Ч.: ЧНУ ім. Б. Хмельницького. – 2015. – С.211– 212.

60. Солтан Г.Н. Методика обучения доказательству в курсе математики средней школы: автореф. дис. канд. пед. наук / Г.Н. Солтан. – Минск, 1983. – 165 с.

61. Титаренко О.М. Алгоритмічна культура як складова математичної культури учня / О.М. Титаренко. – Х.: Торсінг Плюс, 2005. – 368 с.

62. Ткаченко О. Д. Методика вивчення числових нерівностей та їх властивостей в ШКМ. URL: https://naurok.com.ua/metodika-vivchennya-chislovih-nerivnostey-i-h-vlastivostey-u-shkilnomu-kursi-matematiki-42157.html

63. Третяк М.В. До питання про математичну культуру / М.В. Третяк. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. – 352 с.

64. Фурман А.В.Системна диференціація навчання: концепція, теорія, технологія / А.В.Фурман // Освіта і управління. – 1997. - №2.

65. Худяков В. Н. Формирование математической культуры учащихся начального профильного образования: дис. д-ра пед. наук / В.Н. Худяков.Магнитогорск, 2001. – 388 с.

66. Цифрові технології наукових досліджень в галузі психології. URL: https://olyynik45.blogspot.com/p/7.html?m=0

67. Шаран О. Ідея профілізації в системі профільної математичної освіти / Олександра Шаран // Математика в школі. – 2011. – №5. – С.37-40.

68. Шахмейстер А. Х. Уравнения и неравенства / А. Х. Шахмейстер. – М.: Издательство МЦНМО, 2008. – 264 с.

69. Шахно Н. С. Методичні прийоми попередження помилок при вивченні теми «Нерівності, системи нерівностей» в основній школі. *Електронний журнал «Наукові записки молодих учених».* 2021. №7. URL: https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1795/pdf.

ДОДАТКИ

Додаток А

Методична розробка заняття спецкурсу за вибором

Заняття №22

Тема: «Застосування векторів та властивостей скалярного добутку»

Мета:

- **навчальна:** навчити застосовувати вектори та властивості скалярного добутку для доведення числових нерівностей;
- **розвивальна:** розвивати уміння учнів доводити числові нерівності, застосовуючи вектори та скалярний добуток;
- **виховна:** виховувати математичну компетентність, алгебраїчну та математичну культуру учнів.

Тип заняття: вивчення нового матеріалу.

Вид заняття: лекція.

Виклад матеріалу:

При розв'язуванні задач на доведення числових нерівностей досить ефективним може бути метод, що базується на застосуванні векторів та властивостей, які випливають з їх скалярного добутку.

Нехай задано два вектори $\vec{x}$ та $\vec{y}$. З визначення їх скалярного добутку маємо: $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{x}$ і $\vec{y}$, а $|\vec{x}|$ і $|\vec{y}|$ – відповідно довжини цих векторів. Звідси, оскільки $|\cos\varphi| \leq 1$, одержимо нерівність:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \quad (\text{A}.1)$$

причому знак рівності має місце тільки у випадку, коли $|\cos\varphi| = 1$, тобто вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ співнапрямлені.

Неважко довести, що $(\vec{x}-\vec{y})^2=(\vec{x})^2-2\cdot\vec{x}\cdot\vec{y}+(\vec{y})^2\geq 0$, звідки можна одержати ще одну важливу нерівність:

$$(\vec{x})^2+(\vec{y})^2\geq 2\cdot\vec{x}\cdot\vec{y}. \quad (\mathrm{A}.2)$$

Розглянемо на площині два вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$, які задані координатами: $\vec{x}=(a_1,a_2)$ і $\vec{y}=(b_1,b_2)$. Тоді нерівність $\vec{x}\cdot\vec{y}\leq|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$ матиме такий вигляд:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2\leq|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2} \text{ або}$$

$$(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2)^2\leq\left(a_1^2+a_2^2\right)\cdot\left(b_1^2+b_2^2\right), \quad (\mathrm{A}.3)$$

а нерівність (А.2) виглядатиме так:

$$\left(a_1^2+a_2^2\right)+\left(b_1^2+b_2^2\right)\geq 2(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2). \quad (\mathrm{A}.4)$$

Зауважимо, що формула (А.3) представляє частковий випадок нерівності Коші-Буняковського, яка була розглянута на попередніх заняттях. Для доведення цієї нерівності у загальному випадку досить розглянути скалярний добуток векторів $\vec{x}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ і $\vec{y}=(b_1,b_2,\dots,b_n)$. *[Довести самостійно, як домашнє завдання].*

Основна ідея, яка лежить в основі застосування засобів векторної алгебри при доведенні нерівностей, полягає у виборі векторів (їх координат) для розгляду з використанням формул (А.1) – (А.4).

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Довести нерівність $a^2+\frac{9}{a^2}\geq 6$, якщо $a\neq 0$.

Доведення: Розглянемо вектори

$$\vec{x}=\left(|a|,\frac{3}{|a|}\right) \text{ і } \vec{y}=\left(\frac{3}{|a|},|a|\right).$$

Тоді матимемо:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=|a|\cdot\frac{3}{|a|}+\frac{3}{|a|}\cdot|a|=6,$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{a^2 + \frac{9}{a^2}} \text{ і } |\vec{y}| = \sqrt{\frac{9}{a^2} + a^2}\,.$$

Згідно з нерівністю (А.1) маємо: $\vec{x} \cdot \vec{y} \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$, тобто:

$$6 \leq \sqrt{a^2 + \frac{9}{a^2}} \cdot \sqrt{\frac{9}{a^2} + a^2} = a^2 + \frac{9}{a^2}\,.$$

Що й треба було довести ■.

Приклад 2. Довести нерівність:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Доведення: Розглянемо вектори $\vec{x} = (a; b; c)$ та $\vec{y} = (b; c; a)$. Оскільки $\vec{x} \cdot \vec{y} = ab + bc + ca$ і $|\vec{x}| \cdot |\vec{y}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + a^2} = a^2 + b^2 + c^2$ то з урахуванням нерівності (А.1), доводжувана нерівність стає очевидною ■.

Приклад 3. Довести, що якщо $a > 0, b > 0$ і $c > 0$, то виконується нерівність:

$$(a^3 + b^3 + c^3) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq (a + b + c)^2.$$

Доведення: Розглянемо вектори $|\vec{x}| = \left(\sqrt{a^3};\ \sqrt{b^3};\ \sqrt{c^3}\right)$ і

$$|\vec{y}| = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}; \frac{1}{\sqrt{b}}; \frac{1}{\sqrt{c}}\right).$$

Тоді матимемо:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sqrt{a^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{c^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} = a + b + c;$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{\left(\sqrt{a^3}\right)^2 + \left(\sqrt{b^3}\right)^2 + \left(\sqrt{c^3}\right)^2} = \sqrt{a^3 + b^2 + c^3}\,,$$

$$|\vec{y}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Згідно з нерівністю (А.1) маємо: $\vec{x} \cdot \vec{y} \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$, тобто:

$$a + b + c \leq \sqrt{a^3 + b^2 + c^3} \cdot \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Піднісши обидві частини нерівності до квадрату, прийдемо до справедливості доводжуваної нерівності.

$$(a + b + c)^2 \leq (a^3 + b^3 + c^3) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \blacksquare.$$

Домашнє завдання: Довести, що якщо a, b і c – додатні числа, то виконується нерівність:

$$a + b + c \leq \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}.$$

Додаток Б

Збірка завдань для спецкурсу за вибором

«Доведення числових нерівностей»

Тема №1. Числові нерівності. Властивості числових нерівностей.

1) Відомо, що $\boldsymbol{m > 2,5}$ і $\boldsymbol{n > 1,2}$. Порівняйте:

a) $\boldsymbol{\frac{1}{m}}$ і $\boldsymbol{\frac{1}{n}}$; b) $\boldsymbol{m - 10n}$ і $\boldsymbol{2m}$; c) $\boldsymbol{m^2}$ і $\boldsymbol{2n}$;

d) $\boldsymbol{n^3}$ і $\boldsymbol{1}$; e) $\boldsymbol{(m+n)^2}$ і $\boldsymbol{25}$; f) $\boldsymbol{(m+1,5)(10n-3)}$ і $\boldsymbol{35}$.

2) Відомо, що $\boldsymbol{a < b,\ b > m,\ m < a,\ m > c,\ 0 > c,\ mc < 0}$. Розташуйте в порядку зростання числа: $\boldsymbol{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{m}}$.

3) Нехай $\boldsymbol{x}$ – довільне число. Порівняйте з нулем значення виразу $\boldsymbol{2x^2 + 3}$.

4) Порівняйте числа $\boldsymbol{\frac{13}{56}}$ і $\boldsymbol{\frac{17}{73}}$.

5) Оберіть правильну рівність для $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$, якщо $\boldsymbol{y - 7 = x + 1}$.

6) Відомо, що $\boldsymbol{a < -10,\ b > 11,\ c < b,\ ac < 0}$. Зобразіть числа $\boldsymbol{a, b, c}$ на координатній площині. Розташуйте в порядку спадання числа $\boldsymbol{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{5}}$. Скільки розв'язків має задача?

7) Чи правильна нерівність $\boldsymbol{(b-1)(b-3) < (b-2)^2}$.

Тема №2. Додавання і множення числових нерівностей. Оцінювання значення виразу.

1) Виконайте додавання нерівностей:

a) $\boldsymbol{a < 3}$ і $\boldsymbol{n < 6}$; b) $\boldsymbol{x \geq 2\sqrt{5}}$ і $\boldsymbol{y \leq 3\sqrt{5}}$;

c) $\boldsymbol{x < 32 - \sqrt{3}}$ і $\boldsymbol{y \leq 32 + \sqrt{3}}$; d) $\boldsymbol{-10 < b < 8}$ і $\boldsymbol{-12 < x \leq 3}$.

2) Перемножте почленно нерівності:

a) $\mathbf{12 > -16}$ і $\mathbf{-23 > -26}$; b) $\mathbf{0{,}16 < 1{,}5}$ і $\mathbf{0{,}05 < 0{,}3}$;

c) $\mathbf{1{,}4 > 0{,}5}$ і $\mathbf{1{,}05 > 0{,}12}$; d) $\boldsymbol{-10 < b < 8}$ і $\boldsymbol{-12 < x \le 3}$

3) Відомо, що $\boldsymbol{-2 \le m \le 5}$. Оцініть значення виразу:

a) $\boldsymbol{5m}$; b) $\boldsymbol{-\frac{1}{3}m}$; c) $\boldsymbol{\frac{m}{2} + (-4)}$;

d) $\boldsymbol{m - 7}$; e) $\boldsymbol{2m + 3}$; f) $\boldsymbol{1 - 10m}$.

4) Відомо, що $\boldsymbol{3 < x < 9,\ 3 < y < 7}$. Оцініть значення виразу:

a) $\boldsymbol{x + y}$; b) $\boldsymbol{xy}$; c) $\boldsymbol{-x - y}$;

d) $\boldsymbol{{}^{1}/_{x}}$; e) $\boldsymbol{{}^{y}/_{x}}$; f) $\boldsymbol{2x - 3y}$.

5) Дано прямокутник зі сторонами $\boldsymbol{a}$ см і $\boldsymbol{b}$ см, в якому $\boldsymbol{1{,}5 < a < 3,\ 2{,}4 < b < 4{,}5}$. Оцініть:

a) площу прямокутника; b) периметр прямокутника.

Тема №3. Застосування властивостей числових нерівностей для доведення числових нерівностей.

1. Доведіть нерівності застосовуючи властивості числових нерівностей:

1) $\boldsymbol{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2,\ a > 0, b > 0}$; 2) $\boldsymbol{\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}}$;

3) $\boldsymbol{\frac{b^2+5}{2} > \sqrt{b^2 + 4}}$; 4) $\boldsymbol{a + 9 \ge 6\sqrt{a}}$;

5) $\boldsymbol{\frac{a+5}{2} \ge \sqrt{5a}}$; 6) $\boldsymbol{\frac{a+4b}{4} \ge \sqrt{a}b}$.

Тема №4. Доведення числових нерівностей шляхом виділення суми чи добутку виразів одного знаку.

1. Довести нерівності:

1) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(a + b + c) - 3$;

2) $a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 \geq 0$;

3) $a^4 - 2a^3b + 2a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 \geq 0$;

4) $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$;

5) $a^{12} + a^{10} + a^8 + a^4 + a^2 + 1 \geq 6a^6$;

6) $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1)$;

7) $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2$;

8) $4a^2 - 4a - 4b^2 + b^4 + 5 \geq 0$.

Тема №5 Доведення числових нерівностей методом «від супротивного».

1. Довести, що для довільних $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$ виконується нерівність: $\sqrt{(a + c)(b + d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.
2. Довести, що для довільних $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ виконується нерівність:
$$\frac{a + b + c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}.$$
3. Довести, що при $a \neq b$ і $ab > 0$ виконується нерівність:
$$\sqrt{a}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 1\right) + \sqrt{b}\left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1\right) > 0.$$
4. Довести, що для всіх дійсних значень x виконується нерівність:
$$(x - 6)(x^2 - 5x + 4) + x^2 + 73 \geq 10x.$$
5. Довести, що якщо $a + b \geq 0$, то $ab(a + b) \leq a^3 + b^3$.

Тема №6. Принцип повної та неповної математичної індукції. Доведення числових нерівностей ММІ.

1. Доведіть нерівності:

1) $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}} > \mathbf{1}+\boldsymbol{nx}$, при $\boldsymbol{n} > \mathbf{2}$ і $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$;

2) $(\mathbf{1}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}})^{\boldsymbol{m}} > \mathbf{1}+\boldsymbol{ma}+\frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{m}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}\cdot\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}$ при $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$;

3) $\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}^{\mathbf{2}}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}^{\mathbf{2}}}+\cdots+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}} < \mathbf{1{,}7}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$, при $\boldsymbol{n} > \mathbf{2}$;

4) $\sqrt{\mathbf{1}}+\sqrt{\mathbf{2}}+\cdots+\sqrt{\boldsymbol{n}} > \boldsymbol{n}$, при $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{2}$;

5) $\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} \geq (\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}$, при $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{3}$;

6) $\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}+\mathbf{2}} > \mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{5}$ для $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$;

7) $\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}} \geq \boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}$ для $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{4}$;

8) $\mathbf{3}^{\boldsymbol{n}} > \mathbf{2}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}$ для $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{4}$;

9) $\mathbf{1}\cdot\mathbf{2}\cdot\mathbf{3}\cdot\ldots\cdot\boldsymbol{n} \geq \mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$ для $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{4}$;

10) $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}!}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}!}+\cdots+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}!} \leq \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$ для $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$;

11) $(\mathbf{1}-\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{na}}$ для $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{a} > \mathbf{0}$;

12) $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}+\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{4}}+\cdots+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{4}}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{2}}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}} \geq \boldsymbol{n}+\mathbf{1}$ для $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{x} > \mathbf{0}$.

Тема №7. Метод аналізу та оцінок, «посилення» нерівностей.

1. Довести, що для довільного дійсного числа $\boldsymbol{x}$ справедливі нерівності:

1) $\boldsymbol{x}^{\mathbf{8}}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{7}}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{5}}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{1} > \mathbf{0}$;

2) $\boldsymbol{x}^{\mathbf{8}}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{5}}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{x}+\mathbf{1} > \mathbf{0}$;

3) $\boldsymbol{x}^{\mathbf{10}}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{7}}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{1} > \mathbf{0}$;

4) $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2000}}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{1999}}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{1998}}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{999}}+\mathbf{1} > \mathbf{0}$.

2. Довести, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ справедливі нерівності:

1) $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$;

2) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$;

3) $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{n^2-1} < \frac{3n}{4n-1}$.

3. Довести, що якщо $k > -6$, то $\frac{k}{(k+7)^2+(k+7)^3} < \frac{1}{k+6} - \frac{1}{k+7}$.

4. Довести нерівність $(a+b)^8 \geq 64a^2b^2(a^4+b^4)$ при $a \geq 0, b \geq 0$.

Тема №8. Зведення нерівностей до відомих методом введення нових змінних.

1. Довести, що якщо $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0$, то виконується нерівність:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{b+a} \geq \frac{3}{2}.$$

2. Довести, що якщо $x > 0,\ y > 0$, то виконується нерівність

$$\frac{2}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}} \leq xy.$$

3. Довести нерівність: $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}$.

Тема №9. Застосування класичних нерівностей до доведення числових нерівностей.

1. Довести нерівності:

1) $x^3 - 2x^2 - x + 1 > 0$, якщо $x \geq 0$;

2) $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1 \geq 0$;

3) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}>2$;

4) $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ca(c+a-2b)\geq 0$, якщо $a>0, b>0,\ c>0$;

5) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq abc(a+b+c)$;

6) $4a^4+b^2+9\geq 2a^2b+6a^2+3b$;

7) $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$, якщо $a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0$;

8) $(a+b)(a+2)(b+2)\geq 16ab$, якщо $a\geq 0, b\geq 0$;

9) $(27a^2+2)(8b^2+3)\geq 144ab$, якщо $a\geq 0, b\geq 0$

Тема №10. Застосування векторів та властивостей скалярного добутку.

1. Довести, що для довільних дійсних чисел a, b, c, d справджуються нерівності:

1) $(a+b+c)^2\leq 2(a^2+b^2+c^2)$;

2) $a^2+\frac{9}{a^2}\geq 6$, якщо $a\neq 0$;

3) $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$;

4) $(a^3+b^3+c^3)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq (a+b+c)^2$, якщо $a>0, b>0$ і $c>0$;

5) $(a+b+c+d)^2\leq 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

Тема №11. Доведення числових нерівностей шляхом використання симетрії виразів.

1. Довести, що при довільних дійсних a, b і c справедливі нерівності:

1) $\boldsymbol{a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b}$;

2) $\boldsymbol{a^2 + b^2 + 2c^2 \geq 2c(a + b)}$;

3) $\boldsymbol{8(a^4 + b^4) \geq (a + b)^4}$;

4) $\boldsymbol{(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2}$;

5) $\boldsymbol{2a^2 - 3ab + 2b^2 \geq 0}$;

6) $\boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ac + bc - ab)}$;

7) $\boldsymbol{a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 \geq 4}$;

8) $\boldsymbol{(a^2 + b^2)(a^8 + b^8) \geq (a^4 + b^4)(a^6 + b^6)}$

Тема №12. Застосування монотонності функцій.

1. Довести без калькулятора числові нерівності:

   1) $\boldsymbol{1{,}999^{2{,}001} < 2{,}001^{1{,}999}}$;

   2) $\boldsymbol{\sqrt[4]{\frac{100}{111}} < \sqrt[4]{\frac{121}{133}}}$.

2. Довести нерівності:

   1) $\boldsymbol{x^2 - x^3 < \frac{1}{6}}$;

   2) $\boldsymbol{x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x}$ при $\boldsymbol{x > 0}$.

Тема №14. Застосування опуклості функції. Нерівність Єнсена.

1. Довести, що якщо $\boldsymbol{a > 0, b > 0}$, то справедливі нерівності:

   1) $\boldsymbol{\frac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\frac{a+b}{a}\right)^4}$;

   2) $\boldsymbol{\sqrt[3]{4(a + b)} \geq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$;

3) $\boldsymbol{a \ln a + b \ln b \geq (a+b) \ln \frac{a+b}{2}}$;

4) $\boldsymbol{\frac{\ln a + \ln b}{2} \leq \sqrt{\ln \frac{a+b}{2}}}$.

2. Довести без калькулятора нерівності:

1) $\boldsymbol{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{11} + \sqrt[3]{13} < 8}$;

2) $\boldsymbol{3 + \sqrt{2} + \sqrt{5} < 4\sqrt{3}}$.

Тема №15. Геометрична інтерпретація нерівностей.

1. Довести, що при всіх допустимих $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ справедливі нерівності:

1) $\boldsymbol{-4 \leq |x+2| - |x-1| + \frac{|x|}{x} \leq 4}$;

2) $\boldsymbol{-4 \leq |x| - |x+3| - \frac{|x-2|}{x-2} \leq 4}$;

3) $\boldsymbol{-2 \leq |x-2| - 2|x+1| + |x+2| \leq 4}$;

4) $\boldsymbol{\left|x^2 - 1\right| + \left|x^2 - 4\right| \geq 3}$;

5) $\boldsymbol{-3 \leq \left|x^2 - 4\right| - \left|x^2 - 1\right| \geq 3}$;

6) $\boldsymbol{|x| + |x+1| - |x-2| \geq 1}$.

2. Довести нерівності:

1) $\boldsymbol{\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2} \geq 5}$;

2) $\boldsymbol{\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} \geq 5}$.