МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»

Завідувач кафедри

_____________ Д. Є. Бобилєв Реєстраційний № _________

«___» _____________ 2021 р. «___» _____________ 2021 р.

РОЗВИТОК УМІНЬ УЧНІВ ЗАСТОСОВУВАТИ ПОХІДНУ НА ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТТЯХ З МАТЕМАТИКИ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

Кваліфікаційна робота студентки
фізико-математичного факультету
групи МІм-16
освітньо-кваліфікаційний рівень *магістр*
спеціальності: 014.04 середня освіта
(Математика)
Птиці Оксани Андріївни
Науковий керівник:
кандидат педагогічних наук, доцент
Бобилєв Дмитро Євгенович

Оцінка:
Національна шкала_______________________
Шкала ECTS____ Кількість балів __________
Голова ЕК _______ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
Члени ЕК _____________________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_______ ______________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_______ ______________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_______ ______________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Математична розвиває уяву та інтуїцію, формує навички логічного та алгоритмічного мислення. Саме тому математика завжди буде одним із основних предметів вшколі. При виборі рівня математичної підготовки учням необхідно враховувати свої здібності та потреби, самовизначення щодо майбутньої спеціальності. Тому учні, які готуються до природничо-наукових чи математичних професій повинні мати можливість навчатися у класах профільного математичного рівня. Крім забезпечення освоєння учнями концепцією точних знань та вмінь – головною проблемою навчання математики у школі, те що «поглиблене вивчення математики в навчальному процесі передбачає формування у учнів сталого інтересу до предмета, виявлення та розвиток їх математичних здібностей, орієнтацію на професії, суттєвим чином пов'язані з математикою» [14 с.24].

У шкільному курсі математики вивчається тема «Похідна та її застосування», яка є однією з найбільш значущих тем шкільного курсу математичного аналізу Адже саме за допомогою похідної проводиться дослідження функцій, які здебільшого описують реальні процеси, що відбуваються в природі.

Переходячи в 10 клас, учні починають вивчати новий для них розділ математики – "Початки аналізу". Математичний аналіз – одна з гілок математики, що утворилася у XVIII столітті. Вона включає в себе два основних розділи: диференціальне та інтегральне числення. Аналіз зіграв величезну роль у розвитку науки – виник потужний, універсальний метод дослідження функцій, що використовується при розв’язанні різноманітних прикладних задач.

Диференціальне числення без перебільшення можна назвати найважливішою темою курсу математики старшої школи. У рамках цієї теми розглядається похідна функції, техніка диференціювання, основні застосування похідної.

Застосування похідної у різних розділах математики та багатьох інших науках дуже широке та різноманітне. Однак особливе значення має обмежене коло питань, пов'язаних із використанням похідних для дослідження поведінки функцій: проміжки монотонності функції, найбільші та найменші значення, максимуми та мінімуми функції.

Актуальність теми полягає в необхідності більш ґрунтовного дослідження застосування похідної при розв'язування прикладних задач на факультативних заняттях.

Мета дослідження: розробити факультативний курс спрямований на розвиток вмінь учнів профільної школи застосовувати похідну при розв'язуванні прикладних задач, розуміти її геометричний і механічний зміст.

Об'єкт дослідження: навчання алгебри і початків аналізу на факультативних заняттях у профільній школі.

Предмет дослідження: методика навчання теми «Похідна та її застосування» на факультативних заняттях для учнів профільної школи.

Мета роботи конкретизується в таких **завданнях:**

1) Проаналізувати навчально-методичну літературу на тему «Похідна та її застосування».
2) Провести логіко-математичний аналіз теми «Похідна та її застосування».
3) Розглянути особливості проведення факультативних завдань з математики.
4) Розробити систему рівневих завдань для вивчення теми «Похідна та її застосування».
5) Розробити факультативний курс, який спрямований на розвиток умінь учнів профільної школи застосовувати похідну.

У роботі використано такі методи дослідження: аналіз наукової та методичної літератури на тему дослідження; узагальнення та систематизація математичної літератури з даної теми.

Структура та обсяг роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів, загальних висновків, списку використаних джерел і додатків. Зміст кваліфікаційної роботи викладено на 52 сторінках. Повний обсяг роботи – 81 сторінка.

РОЗДІЛ 1.
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ НА ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТТЯХ З МАТЕМАТИКИ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

1.1. Основні поняття похідної функції. Аналіз навчальної літератури

Похідна – це основне поняття диференціального числення, що характеризує швидкість зміни функції. Похідною функції у точці називається відношення приросту функції до приросту аргументу, за умови, що останній прямує до нуля. Ряд задач диференціального числення був розв'язаний ще в давнину. Відкриттю похідної та основ диференціального числення передували роботи французьких математиків П'єра Ферма (1601-1665), який у 1629 році запропонував способи знаходження найбільших і найменших значень функцій, проведення дотичних до довільних кривих, що фактично спиралися на застосування похідних, а також Рене Декарт (1596-1650), який розробив метод координат і основи аналітичної геометрії.

Основне поняття диференціального числення – поняття похідної – виникло в XVII ст. у зв'язку з необхідністю розв'язування ряду задач з фізики, механіки і математики, у першу чергу наступних двох: визначення швидкості прямолінійного нерівномірного руху і побудови дотичної[34] до плоскої кривої.

Перша з цих задач була уперше розв'язана І. Ньютоном. Функцію він називав флюентою, тобто поточною величиною (від латинського fluere – текти), похідну ж – флюксією (від того ж fluere). Ньютон позначав функції останніми літерами латинського алфавіту x, y, z, а їх флюксії, тобто похідні від флюент за часом – відповідно тими ж літерами з крапкою над ними[34], наприклад $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z},$ тощо. Таку символіку він застосував під час роботи над «Міркуваннями над квадратурами кривих» (приблизно 1690 р.), а у друці вона з'явилася у листах Ньютона до Валліса у 1693 р. У ранніх працях Ньютона використовуються лише флюксії першого порядку, флюксії вищих порядків з'являються у 90-х роках [4].

Актуальні на той час так звані «обернені задачі на дотичні» (тобто задачі відшукання кривих за відомими властивостями їх дотичних) були одними з перших, що зводилися до розв'язання диференціальних рівнянь. Наведемо простий приклад такої задачі.

Нехай на площині з декартовою прямокутною системою координат xOy потрібно знайти криву, в кожній точці якої кутовий коефіцієнт дотичної пропорційний із коефіцієнтом k ординаті точки дотику. Якщо таку криву шукати у вигляді графіка деякої диференційованої функції $y = y(x), x \in \mathbb{R}$, то, врахувавши геометричний зміст похідної, умову задачі можна подати у вигляді співвідношення $\frac{dy}{dx} = ky$, яке являє собою одне з найпростіших і водночас дуже важливе диференціальне рівняння. Легко переконатись в тому, що його задовольняє кожна функція вигляду $y = ce^{kx}$, де c – довільне дійсне число. Цей факт було виявлено Р. Декартом ще в 1639 році [17].

Для доказу свого правила Ньютон, використовуючи в основному теорему Ферма, розглядає нескінченно малий приріст часу dt, що він позначав знаком x_0, відмінним від нуля. Вираз x_0, що позначається нині і називається диференціалом (dt), Ньютон називав моментом. Ньютон прийшов до поняття похідної, виходячи з питань механіки. Свої результати в цій області він виклав у трактаті «Метод флюксій і нескінченних рядів», що був складений близько в 1671 р. Припускають, що Ньютон відкрив свій метод флюксій ще в середині 60-х років XVII ст., однак вищезгаданий його трактат був опублікований посмертно лише в 1736 р[34].

Лейбніц і його послідовники – брати Бернуллі, Лопіталь та інші трактували диференціали як нескінченно малі різниці звичайних кінцевих величин, як тоді говорили – «реальних» величин «нижчої» математики.

Із самого початку XVII ст. чимало вчених, у тому числі Торрічеллі, Вівіані, Роберваль, Барроу, намагалися[20] побудувати дотичну до кривої, використовуючи кінематичні міркування.

Перший загальний спосіб побудови дотичної до алгебраїчної кривої був викладений у «Геометрії» Декарта. Більш загальним і важливим для розвитку диференціального числення був метод побудови дотичних Ферма. Ґрунтуючись на результатах Ферма і деяких інших висновках, Лейбніц значно повніше своїх попередників розв'язав задачу, про яку йде мова, створивши відповідний алгоритм. У нього задача знаходження $\mathrm{t}g\,\varphi$, тобто кутового коефіцієнта дотичної в точці M, до плоскої кривої, що задається функцією $y = f(x)$ зводиться до знаходження похідної функції y по незалежній змінній x при даному її значенні (або в даній точці) $x = x_1$[34].

Позначення похідної запропоноване Лейбніцом було одним з найперших. Воно широко використовується дотепер. Якщо вираз $y = f(x)$ розглядається як функціональна залежність між залежною і незалежною змінними, тоді перша похідна позначається як:[29] $\frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}f(x)$.

Офіційною датою народження диференціального обчислення можна вважати травень 1684 року, коли Лейбніц опублікував першу статтю «Новий метод максимумів і мінімумів …». Ця стаття в стислій і малодоступній формі викладала принципи нового методу, названого диференціальним численням.

Термін «похідна» ввів у 1797 році французький математик Жозеф Луї Лагранж (1736-1813). Він ввів і[39] сучасне позначення похідної y' і $f'(x)$. До Лагранжа похідну за пропозицією Лейбніца називали диференціальним коефіцієнтом. Сам термін «похідна» уперше зустрічається у француза Луї Арбогаста в його праці «Дериваційне обчислення», опублікованої у Парижі в 1800 році. Цим терміном відразу ж став користуватись і Лагранж, а згодом цей термін швидко ввійшов у загальне користування [12,36].

Ейлер в роботі «Диференціальне числення» (1755 рік) розрізняв локальний екстремум і найбільші та найменші значення функції на певному відрізку. Він перший почав використовувати грецьку букву[11] Δ для позначення приросту аргументу $\Delta_x = x_2 - x_1$ і приросту функції $\Delta_y = y_2 - y_1$.

Популярний у XVII ст. кінематичний спосіб побудови різноманітних кривих, що спирався на поняття миттєвої швидкості (механічного еквівалента похідної), теж був важливим джерелом виникнення диференціальних рівнянь. Як приклад наведемо запропоновану Р. Декартом кінематичну інтерпретацію кривих із попередньої задачі. Нехай точка Р рухається в площині так, що швидкість її абсциси є величиною сталою, рівною для певної одиниці, а миттєва швидкість ординати в кожен момент часу t пропорційна з коефіцієнтом k, самій ординаті. Очевидно, що функції *x(1)* та *y(1),* які визначають залежність координат точки Р від часу, мають задовольняти систему рівнянь вигляду: $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = ky$.

Перше з виписаних співвідношень становить задачу про первісну функції $f(t) = 1$. Його розв'язки вичерпуються функціями $x = t + c_1$, де стала c_1 пробігає множину дійсних чисел. Друге рівняння, як нам уже відомо, задовольняє кожна функція $y = c_2e^{kt}, c_2 \in \mathbb{R}$. Унаслідок вилучення параметра t дістаємо залежність $y = c_2e^{k(xc_1)}$, або $y = ce^{kx}$, якщо ввести позначення $\mathrm{c} = \mathrm{c}_2e^{kc_1}$.

Цікаво відзначити, що на описаному вище законі руху точки Р фактично ґрунтувався запропонований ДЖ. Непером принцип укладання таблиць логарифмів [17].

Можна ввести й інші приклади, що доводять, яку велику роль грає поняття похідної в науці і техніці: прискорення – є похідна від швидкості за часом, теплоємність тіла – є похідна від кількості тепла до температури, швидкість радіоактивного розпаду – є похідна від маси радіоактивної речовини за часом[34] і тому подібне.

Отже, Ньютон прийшов до поняття похідної, розв'язуючи задачу про миттєву швидкість, а Лейбніц – розглядаючи геометричну задачу про проведення дотичної до кривої. Вивчення властивостей і способів обчислення похідних і їхнє застосування до дослідження функцій складає головний предмет диференціального[34] числення. Створення диференціального числення (разом з інтегральним) відкрило нову епоху у розвитку математики. З цим пов’язані такі дисципліни як теорія рядів, теорія диференціальних рівнянь та багато інших. Методи математичного аналізу знайшли використання у всіх розділах математики[11].

Огляд різних підходів до викладання поняття похідної в шкільних підручниках.

Наприкінці 70-х років у радянській школі була проведена реформа математичної середньої освіти. До курсу алгебри були запроваджені елементи початків аналізу, зокрема теми границі, похідної та інтеграла. Група вчених під керівництвом А. М. Колмогорова створила новий підручник. Цей підручник насправді був революційним. Він містив багато нових понять, а їх викладання вимагало нових методичних розробок відносно цих питань. Довгоочікуваний підручник А. М. Колмогорова привернув до себе увагу не тільки шкільних учителів (деякі з них не дуже зраділи необхідності перебудови викладання) та методистів, але й спеціалісті вищої школи. Було чимало критичних зауважень щодо цього підручника – основне невдоволення було в тому, що означення границі, похідної, визначеного інтеграла взяті з університетського курсу математичного аналізу. Та загалом шкільний курс – спрощений курс вищої школи. Головні, найважливіші вимоги критичних зауважень до авторів: 1) поняття границі вилучити; 2) поняття похідної та інтеграла – переробити. Серед критичних статей найбільш відома стаття академіка Л. С. Понтрягіна у журналі «Комуніст», 1980 р. №14.

Потім були видані підручники Ш. А. Алімова, М.І. Башмакова, М.І. Шкіля, Н.Я. Віленкіна та інші.

Проблема введення поняття границі стоїть не тільки серед авторів наших підручників, але й у викладачів інших країн. Зокрема, у Липмана Берса (США) у першій чверті першого тому «Математичний аналіз» впроваджується границя функції в точці, якщо розрив усувний (додається природно ще одна точка на графіку), потім вводиться неперервність функції в точці на проміжку. І лише в другому томі викладається границя послідовності. Авторам статті дуже імпонує така послідовність викладення матеріалу. Практика доводить, що традиційна для нашої школи послідовність викладання теорії границь приводить до недостатнього рівня засвоєння учнями теми «Границя послідовності» [28].

Строге математичне визначення похідної функції дається з опорою на визначення границі, яка відсутня у шкільній програмі загальноосвітніх класів, але це визначення вивчається в класах поглибленого вивчення в класах поглибленого вивчення математики, а також дана тема може бути розглянута на позакласних або факультативних заняттях.

Для вивчення шкільної математики використовується велика кількість різної літератури. Її зміст багато в чому збігається, але відрізняються обсяг та способи викладу.

Для вирішення деяких завдань із фізики, хімії та інших галузей наук виникла потреба з допомогою одного й того ж самого аналітичного процесу з даної функції $y = f(x)$ отримати нову функцію, яку називають похідною функцією (або простою похідною) цієї функції і позначають символом $y' = f'(x)$ або $\frac{dy}{dx}$.

Процес, завдяки якому з цієї функції мають нову $f(x)$ функцію $f'(x)$ називають диференціюванням функції.

Даний процес складається з трьох кроків:

1) Аргументу x приріст Δx, що визначає відповідний приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

2) Далі складається відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

3) Нехай x постійна, а $\Delta x \to 0$, тоді знайдемо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, який буде позначатися як $f'(x)$.

Означення. Похідною функції $y = f(x)$, визначеної на інтервалі $(a; b)$, у точці цього інтервалу називається границя відношення приросту функції в цій точці до відповідного приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля[14, С.88].

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Завдання 1. Знайти похідну функції: $f(x) = x^2$

Розв'язання:

$$\Delta f(x) = (x + \Delta x^2) - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Отже,

$$(x^2)' = 2x$$

Завдання №2. Довести: $\mathrm{C}' = 0$, де С – задане число.

Розв'язання:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x} = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Отже,

$$\mathrm{C}' = 0$$

Завдання 3. Довести: $x' = 1$

Розв'язання:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1$$

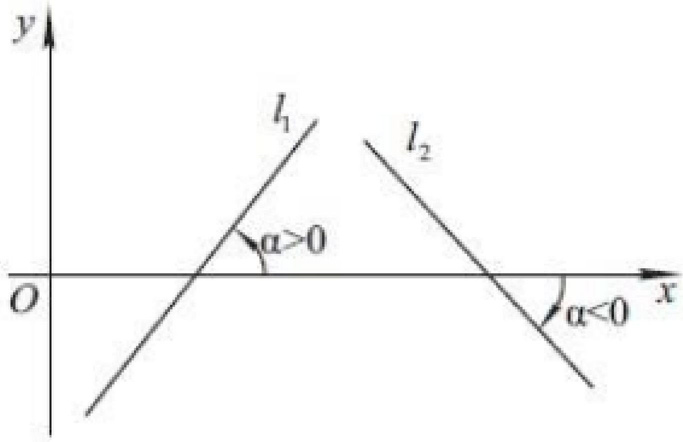
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

Отже,

$$x' = 1$$

[26, С.162]

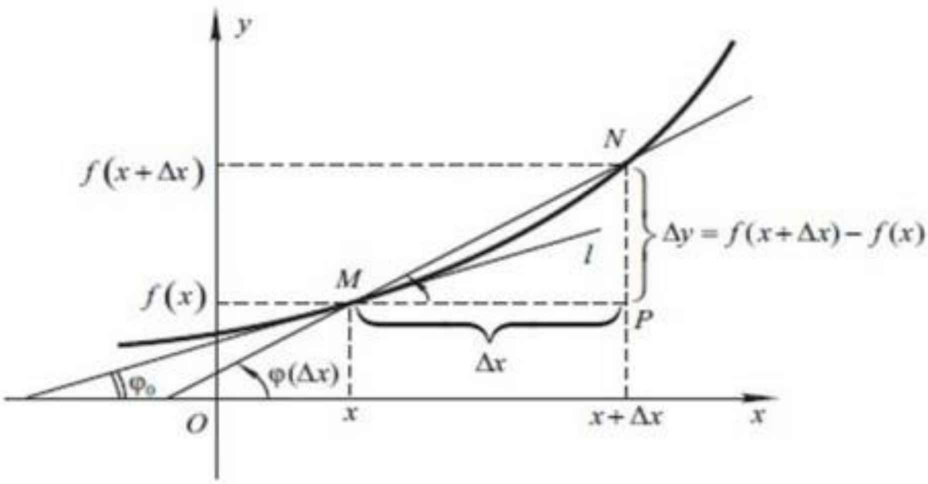
Далі буде розглянуто геометричний зміст похідної функції. Для прикладу задана прямокутна система координат і дана пряма l. Де α величина кута, на який потрібно повернути вісь O_x, щоб поєднати її додатній напрямок з одним із напрямків на прямій l, при чому $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.



Число $k = tg\alpha$ – це кутовий коефіцієнт прямої l в даній системі координат.

Далі розглядаємо графік $y = f(x)$, тобто множина точок x, $f(x)$, $x \in X$, де X – область визначення даної функції.

Пряма MN буде називатись січною по відношенню до даного графіка функції. Величина кута між даною січною MN і віссю O_x позначимо $\varphi\ \Delta x$. Далі Δx спрямуємо до нуля.



За допомогою графіка, наочно видно, що геометричний зміст похідної функції – це кутовий коефіцієнт щодо графіку функції у точці. У цьому і полягає геометричний зміст похідної.

Перейдемо до фізичного змісту похідної функції. Нехай x – час, а $y = f(x)$ – координата точки, що рухається по вісі O_y в момент часу x.

Різниця відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ називається середньою швидкістю точки на проміжку часу від моменту x до моменту $x + \Delta x$, а величина $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = v(x)$ називається миттєвою швидкістю точки в момент часу x. В такому випадку, якщо функція $y = f(x)$ похідна, то похідна $y = f'(x)$ буде характеризувати швидкість зміни змінної y (функції) щодо зміни аргументу x.[18, С.12]

Обчислення похідних від елементарних функцій зводиться до обчислення границі [8, С.225].

На початкових етапах вивчення похідної функції більшість учнів, для зручнішого запам’ятовування та зручності при вирішенні завдань в підручниках дають таблицю часто використовуваних похідних.

Таблиця похідних, в якій представлені похідні функції які найчастіше зустрічаються [32, С.12].

Таблиця 1. Таблиця основних похідних функцій.

Функція	**Похідна**
$f(x) = c$	$c' = 0$, де c - *const*
$f(x) = x^a$	$(x^a)' = ax^{a-1}$
$f(x) = e^a$	$(e^x)' = e^x$
$f(x) = a^x$	$(a^x)' = a^x \ln(a)$
$f(x) = \ln(x)$	$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$
$f(x) = \sin(x)$	$(\sin(x))' = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$(\cos(x))' = -\sin(x)$
$f(x) = tg(x)$	$\left(tg(x)\right)' = \frac{1}{cos^2 x}$

$f(x) = ctg(x)$	$\left(ctg(x)\right)' = -\frac{1}{sin^2 x}$
$f(x) = \arcsin(x)$	$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos(x)$	$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = arctg(x)$	$\left(arctg(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = arcctg(x)$	$\left(arcctg(x)\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Далі нами буде розглянута тема «Похідна функції» у шкільних навчальних посібниках для математичних та загальноосвітніх класів.

Перейдемо до останнього навчального посібника для математичного профілю під редакцією О. М. Колмогорова «Алгебра та початки математичного аналізу». У цьому підручнику все починається з поняття приросту функції. Трохи згодом розглядається дотична до графіка функції. Детально описується геометричний та механічний зміст похідної функції, після розгляду деяких завдань. Поняття границі не використовується при формулюванні визначення похідної функції. Є опис диференційованої функції та її формул, які поступово випливають із теоретичного матеріалу. В одному з параграфів розглядається поняття про неперервність функції. Також автор робить акцент на правила про граничний перехід в кінці даного параграфу.

До всіх правил і формул автор наводить докладні доведення з прикладами. Після доведення формул виводиться рівняння дотичної до графіка функції та формула Лагранжа. У додатках похідної розповідається про застосування похідної в різних галузях науки.

Потім йдуть теми:

1) Ознака зростання (спадання) функції.

За допомогою формули Лагранжа доводяться ознаки зростання та спадання функції. Є приклади, які показують застосування даних ознак.

2) Критичні точки функції, максимуми та мінімуми.

У цьому параграфі відбувається знайомство з теоремою Ферма. Потім розглядають ознаки max та min функції. Як і в підручниках аналізованих раніше даються докладні доведення всіх ознак і теорем.

3) Застосування похідної для дослідження функцій.

За допомогою прикладів проводиться дослідження функції та дається чіткий алгоритм дій.

4) Найбільше та найменше значення функції.

Вводиться конкретне правило для знаходження найбільших та найменших значень функції. Щоб знайти ці значення на деякому відрізку, який має кінцеву кількість критичних точок, достатньо обчислити всі критичні точки, в тому числі і на кінцях, потім вибрати найбільше і найменше значення. Отриманий матеріал закріплюється великою кількістю прикладів.

5) Відомості з історії.

Після вивчення логарифмічної, показникової та степеневої функцій, визначаються їх похідні. Вводиться поняття про диференціальні рівняння: диференціальні рівняння зростання та спадання функцій, гармонійні коливання, падіння тіл в атмосферному середовищі [3].

Далі розглянемо підручник Ш. А. Алімова «Алгебра та початок математичного аналізу» розділ «Похідна та її геометричний зміст», починається з задачі на миттєву швидкість, яка підводить нас до поняття похідна функції.

Оскільки визначення похідної функції нам дано, то після цього вводиться поняття функція, що диференціюється в точках і на проміжках.

Потім дається визначення та пояснення границі функції у точці. Після чого витікає поняття неперервності функції. Також у підручнику описуються приклади, що призводять до основних формул похідної функції.

Під час розгляду правил диференціювання доводиться наступне: похідна суми дорівнює сумі похідних функції та постійний множник можна виносити за знак похідної функції. До всіх правил автор наводить різні завдання в якості прикладів.

Розділ «Похідна деяких елементарних функцій» включає в себе такі похідні функції:

1) Похідна показникових функцій;
2) Похідна логарифмічних функцій;
3) Похідна тригонометричних функцій.

Потім слідує розділ «Застосування похідної для дослідження функції». Зміст розділу:

1) Зростаюча та спадна функції.

Розглядається поняття зростаючої та спадної функції. Дається формулювання теореми Лагранжа. Ця теорема надалі буде використана для доказу достатньої умови зростання або спадання функції.

2) Екстремум функції.

Вивчається визначення критичних та стаціонарних точок, точок максимуму і мінімуму. Вводиться теорема Ферма, а також формулюється теорема про необхідні і достатні умови для точок максимуму та мінімуму.

3) Застосування похідної функції для побудови графіків функції.

Надається схема для дослідження функції.

4) Найбільше та найменше значення функції.

Складається алгоритм для знаходження найбільшого та найменшого значення функції.

5) Випуклість графіка функції, точки розриву.

Виводиться похідна другого порядку та формулюється поняття опуклості графіка функції. Далі визначається схема знаходження точки розриву.

Ш. А. Алімов наголошує на практичних завданнях. Під час роз'яснення теоретичного матеріалу доводяться не всі властивості та теореми, але автор дає достатню кількість розв'язаних з покроковим поясненням завдань. Після кожного параграфа є практична частина з завданнями для розв'язування учням, які спрямовані на закріплення теоретичного матеріалу та на розвиток вміння розв'язувати завдання різного рівня складності. Автор виділяє три рівні складності завдань: сірий - обов'язковий, рожевий – складний, червоний – завдання підвищеної складності [2].

У Мордковича А. Г. розділ, похідна функції починається з вивчення числової послідовності та її властивостей. Обчислюється границя послідовності. Вводиться поняття границі функції у точці та на нескінченності. Вивчається визначення приросту функції та аргументів. Наступним пунктом йде розгляд швидкості руху через завдання. Потім питання про дотичну до графіка функції. Із розв'язання задач випливає границя відношення приросту функції до приросту аргументу, але тільки якщо аргумент прямує до нуля. Все це призводить до визначення похідної функції.

У підручнику дається схема для знаходження похідної функції та не велика кількість прикладів. Пояснюється, що таке диференційована функція у точці. Автор знайомить із правилами диференціювання, але спершу даються приклади з їх застосуванням, а також фізичним та геометричним змістом похідної функції. За допомогою ММІ (метода математичної індукції) доводиться формула диференціювання для функції яка містить степінь з будь-якими натуральними показниками. Надалі визначаються похідні функції для показникової та логарифмічної функції.

Можна зазначити, що в підручнику є алгоритм для дослідження функції на монотонність та на пошук точок максимуму та мінімуму функції, а також виділяється окремий параграф для вивчення рівняння дотичної до графіку функції. Потім розглядається поняття вертикальних асимптот та теореми про сталість функції.

У цьому підручнику міститься велика кількість докладно розібраних прикладів, але теоретичного матеріалу дається мінімум. Можливо, це зроблено для того, щоб учні самостійно вивчали теми, шляхом аналізу запропонованих прикладів. Завдання різного рівня складності представлені у задачнику, який додається до підручника[25].

За редакцією А. Г. Мордковича випускаються підручники для профільних та загальноосвітніх класів. В основному теоретична частина і базового і профільного посібника збігається, але все ж таки є і деякі відмінності. У підручниках профільного рівня автором докладно розглядається числова послідовність, їй навіть присвячено окремо параграф. Також докладно розглядається визначення складної функції, після вивчення яких даються зворотні формули для диференціювання тригонометричних функцій. Відмінною рисою цього підручника є те, що в ньому міститься безліч прикладів заздалегідь розібраних автором [26].

У підручнику Віленкіна Н. Я. для профільних класів є великий теоретичний матеріал. Як і у всіх підручниках для профільного рівня автор приділяє основну увагу розв’язуванню завдань. Ні один пункт не залишається без детального розбору різних прикладів та завдань, що даються учням для самостійного розв’язання. Обов’язковою є наявність завдань підвищеної складності.

На початку курсу математичного аналізу вивчаються основні визначення та поняття границі. Окремо автор приділяє увагу та розглядає як окремий випадок границю функції на нескінченності в даній точці.

Тема «Похідна функцій». Спочатку пояснюється диференційована функція та її приріст. Після розв’язання завдань на миттєву швидкість, а потім і кутового коефіцієнта дотичної з якого витікає визначення похідної функції.

Для пояснення механічного змісту похідної функції даються приклади завдань у яких описується процес радіоактивного розпаду. Далі автор наводить завдання для знаходження лінійної щільності речовин, після чого ми приходимо до поняття геометричного змісту похідної функції. Наступним етапом є отримання рівняння дотичної до графіка функції.

Також автор показує зв’язок диференційованості та неперервності, і наводить відповідну до цього теорему.

Усі правила для диференціювання функцій даються з доведенням. Перш ніж перейти до поняття похідної вищого порядку, автор вводить означення другої похідної функції.

Коротко розглянемо зміст «Похідна функцій»:

1) Похідна та екстремуми.

Вводяться теореми про точку екстремуму та про знак приросту аргументу.

2) Найбільше та найменше значення функції на відрізку.

Дається схема для пошуку найбільших і найменших значень функції.

3) Теорема Лагранжа та її наслідки.
4) Дослідження функцій на зростання та спадання.

Достатня умова екстремуму. Доводиться теорема про зв’язок між монотонністю функції та її знаку на даному відрізку. Потім слідує теорема про достатню умову екстремуму.

У цьому параграфі також є схема дослідження графіків на опуклість, визначення точок розриву та схема побудови графіків функції.

Схема для побудови графіків функції, у якій включені точки розриву, асимптоти, дослідження на опуклість.

Наступні теми призначені для поглиблення та підвищення рівня знань учнів, оскільки зазначені у цьому підручнику зірочкою:

1. Додаток бінома Ньютона для наближених обчислень.
2. Наближене розв'язання рівнянь методом хорд і дотичних.

Визначення похідної дається через поняття границі, яке вивчається на початку курсу математичного аналізу. Після вивчення тригонометричних та логарифмічних функцій вивчаються формули для їх диференціювання.

Підручник хороший тим, що всі теореми та визначення не даються без доведення та відповідних прикладів. Усі терміни даються в строгій формі, зокрема і визначення похідної функції [7].

Помітимо, що у підручниках та у більшості посібників є дуже багато прикладів на обчислення границі функції, а на дослідження на неперервність функції значно менше. При цьому учні мають погану звичку при розв'язуванні задачі на дослідження функції на неперервність досліджувати її на розрив. Однак для школи це природно, тому що будь яка елементарна функція сприймається неперервною, і це ствердження не потребує доведення.

Зауважимо, що основною метою впровадження границі в курс середньої школи є запровадження *похідної* та *визначеного інтеграла*.

Означення похідної у А. М. Колмогорова (перших видань) та М. І. Шкіля зроблено через границю відношення приросту функції до приросту аргументу – тобто швидкість зміни функції; при цьому похідну визначають як число, до якого прямує відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $x \to x_0$.

Тема «Похідна» вивчається в 10 класі (А.М. Колмогоров, М.І.Башмаков, М.І. Шкіль). Показникова, логарифмічна та тригонометричні функції вивчаються після цієї теми, тут же знаходять їх похідні. За Ш.А. Алімовим, похідна вивчається після усіх цих функцій в 11 класі, й тому похідні цих функцій зустрічаються тільки у цьому розділі. В усіх підручниках спочатку розглядаються задачі, що приводять до поняття похідної [28].

У Нікольського вивчення теми «Похідна функція» починається з вивчення понять границі та оберненої функції. Після розгляду та розв'язання задач на миттєву швидкість, кута тангенсу, що стосується графіка функції та визначення сили струму дається визначення похідної функції. Надалі автор розглядає та дає визначення механічного та геометричного змісту похідної функції.

Доводяться теореми про суму і різницю похідної функції, похідна добутку та частки, винесення постійного множника за знак похідної, неперервність функції, що має похідну. Наводяться доведення до всіх формул диференціювання для елементарні функції.

Після визначення оберненої та складної похідної функції, слідує пункт вивчення застосування похідної. У пункті застосування похідної виводиться рівняння дотичної, розглядаються точки максимуму та мінімуму функції, з доведенням дається теорема Лагранжа і Ролля, приділяється увага вивченню властивостей зростання і спадання похідної функції, включається поняття похідної функції вищого та другого порядку, формулюється значимість застосування другої похідної для визначення увігнутості (опуклості) графіка. І обов'язково вивчається механічний та геометричний зміст другої похідної функції.

Розглядаються особливості екстремуму функції з єдиною критичною точкою, використання похідних для побудови графіків функцій (із застосуванням другої похідної).

Розв’язуються завдання на оптимізацію.

З позначкою зірочка даються завдання для знаходження асимптот і розкладання функції до ряду Тейлора[1].

З плюсів даного підручника можна виділити не малий обсяг теоретичного матеріалу, що містить додаткові та поглиблені відомості, для якіснішої підготовки учнів.

Щоб побачити всі основні відмінності змісту теми «Похідна та її застосування» була складена таблиця, в якій відображені основні теми та відзначені плюсом наявність їх у даному підручнику.

Таблиця 2. Повнота викладу теми «Похідна та її застосування» в шкільних підручниках.

Поняття, теореми, формули/Автори підручників.	Рівень стандарту			Профільний рівень		
	Ш.А. Алімов	А.Г. Мордкович	А.Н. Колмогоров	А.Г. Мордкович	Н.Я. Віленкін	С.М. Нікольський
Приріст функції		+	+	+	+	+
Означення границі	+	+		+	+	+
Означення похідної	+	+	+	+	+	+
Диференційована функція	+	+	+	+	+	+
Фізичний зміст похідної		+		+	+	+
Геометричний зміст похідної	+	+	+	+	+	+
Рівняння дотичної	+	+	+	+	+	+
Правила диференціювання	+	+	+	+	+	+
Похідні елементарних функцій	+	+	+	+	+	+
Диференціювання складної функції	+	+	+	+	+	+
Диференціювання обернених тригонометричних функцій				+	+	+
Дослідження функції на монотонність	+	+	+	+	+	+
Екстремуми функції	+	+	+	+	+	+

Найбільше та найменше значення функції	+	+	+	+	+	+
Теорема Лагранжа	+		+		+	+
Теорема Ферма	+		+			
Наближені обчислення значень функції			+		+	+

Загалом можна помітити, що підручники для загальноосвітніх класів і класів профільного напряму переважно схожі. Але матеріали для профільних класів все ж таки більший.

Підіб'ємо підсумок: проаналізувавши підручники для загальноосвітніх класів ми виявили, що матеріал на тему «Похідна функції» дається на наочно-інтуїтивному рівні. У кожному підручнику є свої мінуси та плюси. Наприклад у підручнику Колмогорова[3] можна відзначити гарний та найбільш повний виклад теорії автор досить докладно розглядає математичні факти, у підручнику наведено безліч вже розібраних прикладів. Не можна не відзначити наявність доведень, які відсутні у інших авторів.

У підручнику Алімова[2] коротко викладається теорія, але автор наводить великий перелік різноманітних прикладів і завдань. Тобто підручник Алімова найбільш важливий саме з практичної точки зору.

Мордкович[25,26] переважно використовує поняття границі, яке закладено в визначення похідної функції, але попри все це матеріал представляється на наочно-інтуїтивному рівні, через стислість матеріалу та невеликого розмаїття прикладів та завдань.

Головною відмінністю підручників О.Г. Мордковича,[26] С.М. Нікольського,[1] Н.Я. Віленкіна[7] для профільних класів виділено те, що тема «Похідна функції» супроводжується великою кількістю доведень, що містить додатковий матеріал і мають велику кількість завдань різного рівня складності.

Загалом основні принципи вивчення теми «Похідна та її застосування» у всіх авторів схожі, безумовно відмінності присутні.

1.2. Логіко-математичний аналіз теми «Похідна та її застосування»

Похідна — основне поняття диференційного числення, що характеризує швидкість зміни функції. Визначається як границя відношення приросту функції до приросту її аргументу коли приріст аргументу прямує до нуля (якщо така границя існує). Функцію, що має кінцеву похідну, називають диференційованою.

Визначення

Нехай в деякому околі точки[34] x_0 визначена функція f. Якщо ми візьмемо довільне число x в цьому околі, то приріст аргументу (позначається Δx) в цьому випадку визначається як $x \rightarrow x0$, а приріст функції (Δy) — як $f(x) - f(x0)$. Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то її звуть похідною функції f в точці x_0.

Похідною даної функції називається функція, що в будь-якій точці області визначення дорівнює похідній в цій точці.

Позначення

Похідна позначається як $f'(x)$, що вимовляється «еф-штрих від ікс».

Функція, що має кінцеву похідну в точці x, зветься диференційованою в точці x.

Похідна також позначається, як відношення диференціалів $\frac{df}{dx}$. В фізиці для позначення похідних по часу використовують крапку над змінною,[10] наприклад $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$.

Приклад знаходження похідної за визначенням.

Нехай є функція $y = c$, де c — деяка константа. Тоді при будь-якому x_0 та при будь-якому Δx зміна (приріст) функції дорівнюватиме нулю, отже і похідна такої функції дорівнюватиме нулю[15].

Похідні вищих порядків

Поняття похідної довільного порядку задається рекурентною:

- похідна нульового порядку — сама функція ;

- похідна n-го порядку для натурального n, що більше 0, — похідна функції (n−1)-го порядку.

Іноді замість «похідна n-го порядку» говорять «n-а похідна».

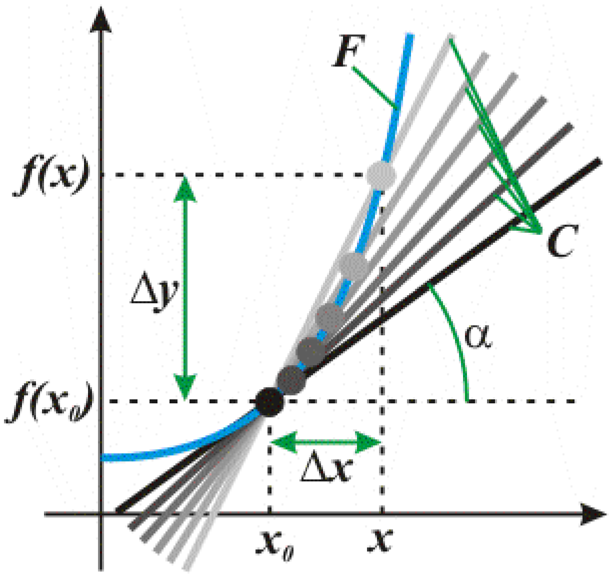
Похідна n-го порядку функції f зазвичай позначається як $f^{(n)}(x)$:

- якщо n мале (1, 2, 3) — то використовується відповідна кількість рисок, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, вимовляється як «еф-штрих від ікс»; про другу — «еф-два-штрихи від ікс» тощо.

- Зрідка можна зустріти історичне позначення похідної за допомогою римської системи числення (перша похідна: $f^{I}(x)$, друга:$f^{II}(x)$, шістнадцята: $f^{XVI}(x)$).

- В фізиці також зустрічається позначення похідної другого порядку по часу у вигляді двох крапок над змінною: $\ddot{q}$ [34].

Геометричний зміст похідної



Геометричний зміст похідної. На графіку функції вибирається абсциса x_0 та обчислюється відповідна ордината $f(x_0)$. В околі точки x_0 вибирається довільна точка x. Через відповідні точки на графіку функції F проводиться січна (перша світло-сіра лінія C). Відстань $\Delta x = x - x_0$ прямує до нуля, в результаті січна переходить у дотичну (лінії, що поступово темніють C). Тангенс кута α нахилу цієї дотичної - це і є похідна у точці x_0.

Значення похідної $f'(x_0)$ функції f у точці x_0 дорівнює значенню кутового коефіцієнту дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0.

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $M(x_0, y_0)$ має вигляд: $y = f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$[35].

Екстремуми функції

Точка x_0 називається точкою локального максимуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-яких досить малих $|\Delta x| \neq 0$ виконується нерівність: $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$

Точка x_0 називається точкою локального мінімуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-яких досить малих $|\Delta x| \neq 0$ виконується нерівність:

$f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$

Точки максимуму і мінімуму називаються точками екстремуму функції $y = f(x)$, а значення функції в екстремальних точках – її екстремальними значеннями.

Необхідну ознаку локального екстремуму дає така теорема:[34]

Теорема 1. *Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум, то або $f'(x_0) = 0$, або $f'(x_0)$ не існує.*

Проте виявляється, що цього недостатньо, бо може $f'(x_0) = 0$, а функція $y = f(x)$ в цій точці екстремуму не має.

Точки, в яких функція $y = f(x)$ визначена та неперервна, і в цих точках $f'(x_0) = 0$ або не існує, називаються критичними для функції.

Проте не в кожній критичній точці функція $y = f(x)$ має екстремум. Тому потрібні достатні ознаки існування екстремуму для функції f. Їх дають такі теореми:

Теорема 2. *Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в деякому інтервалі, який містить критичну точку x_0, і диференційована у всіх точках цього інтервалу (за винятком, можливо, самої точки x_0).*[34]

Якщо для $x < x_0$ $f'(x) > 0$, а для $x_0 < x$ $f'(x) < 0$, то для $x = x_0$ функція $y = f(x)$ має максимум.

Якщо для $x < x_0$ $f'(x) < 0$ *, а для* $x_0 < x$ $f'(x) > 0$ *, то для x= x_0 функція* $y = f(x)$ *має мінімум.*

Теорема 3. *Нехай функція* $y = f(x)$ *два рази диференційована в околі точки x_0 і* $f'(x_0) = 0$ *. Тоді в точці x= x_0 функція має локальний максимум, якщо* $f''(x) < 0$ *, і локальний мінімум, якщо* $f''(x) > 0$.

Якщо ж $f''(x) = 0$*, то точка x= x_0 може й не бути точкою екстремуму.*

Звідси випливає такий план знаходження екстремальних точок:

1. знаходять критичні точки функції $y = f(x)$, тобто точки , в яких $f'(x) = 0$, або $f'(x)$ не існує;

2. знаходять другу похідну $f''(x)$ і обчислюють значення другої похідної в цих точках.

Якщо значення другої похідної в критичній точці від'ємне, то така точка є точкою максимуму, а якщо значення другої похідної додатне, то точка є точкою мінімуму.

Якщо $f''(x) = 0$ в критичній точці, то нічого конкретного сказати не можна, бо в цій точці може бути екстремум, а може й не бути.

Розглянемо тепер дослідження функції на екстремум на конкретних прикладах[5. С 26].

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію:

$f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x - 10$

Розв'язання. Функція $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x - 10$визначена і диференційована на R. Знайдемо її похідну:

$f'(x) = 12x^2 + 12x - 24$

Знайдемо нулі похідної:

$x^2 + x - 2 = 0$

$x_1 = -2,\ x_2 = 1$

Отже, функція f має дві критичні точки $x_1 = -2,\ x_2 = 1$.

Оскільки похідна є квадратним тричленом з додатним коефіцієнтом при x^2, то на інтервалах $(-\infty;-2),(1;+\infty)$ $f'(x) > 0$, а на інтервалі $(-2;1)$ $f'(x) < 0$.

Похідна неперервна на R і при переході через критичну точку змінює знак на протилежний.

Оскільки при переході через критичну точку $x = -2$ похідна змінює знак з плюса на мінус, то в цій точці функція має локальний максимум.

$f_{max}(x) = f(-2) = -32 + 24 + 24 - 10 = 6$

При переході через точку $x = 1$ похідна змінює знак з мінуса на плюс. Тому в цій точці функція f має локальний мінімум.

$f_{min}(x) = f(1) = 4 + 6 - 24 - 10 = -24$[15]

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію

$$f(x) = 2 + \sqrt{\frac{x^3}{x-6}}$$

Розв’язання. Функція $f(x) = 2 + \sqrt{\frac{x^3}{x-6}}$ визначена. Знайдемо її похідну:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-6}}} \times \frac{3x^2(x-6) - x^3}{(x-6)^2} = \frac{2x^3 - 18x^2}{2(x-6)\sqrt{\frac{x^3}{x-6}}}$$

Критична точка $x = 9$. при переході через цю точку похідна змінює знак з мінуса на плюс. Отже, в цій точці функція f має локальний мінімум:

$$f_{min}(x) = f(9) = 2 + \sqrt{\frac{729}{3}} = 2 + \sqrt{243}$$

Крім того, похідна дорівнює нулю в точці $x = 0$. оскільки справа від цієї точки(до $x < 6$) функція не визначена, то в точці $x = 0$ функція набуває найменшого значення $f(0) = 2$.[38]

Приклад 3. Дослідити на екстремум функцію

$f(x) = (x + 1)e^{-5x}$

Розв'язання. Функція $f(x) = (x+1)e^{-5x}$ визначена і диференційована на R. Її похідна $f'(x) = e^{-5x} - 5(x+1)e^{-5x} = e^{-5x}(1-5x-5) = e^{-5x}(-5x-4)$ дорівнює нулю при $x = -\frac{4}{5}$.

Ця критична точка розбиває числову пряму на два інтервали знакосталості похідної $f'(x)$:

$$\left(-\infty; -\frac{4}{5}\right), \left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$$

Оскільки на інтервалі $\left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$ $f'(x) < 0$, то функція f в точці $x = -\frac{4}{5}$ має локальний максимум.

Його значення $f_{max}(x) = f\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5}e^4$.[13]

Зростання та спадання функції

Дослідження функції на зростання та спадання ґрунтується на теоремі математичного аналізу.

Теорема. *Нехай функція неперервна на проміжку* $[a;b]$ *і диференційована в інтервалі* $(a;b)$ *для того, щоб функція f була зростаючою(спадною) на проміжку* $[a;b]$ *необхідно і достатньо виконання двох умов:*

1. $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0) \forall x \in (a, \acute{a})$

2. *рівність* $f'(x) = 0$ *не повинна виконуватися ні в жодному інтервалі, що міститься в* $[a;b]$.

Як наслідок цієї теореми можна використовувати таку теорему (достатня ознака строгої монотонності):

Теорема. *Нехай функція f неперервна на проміжку* $[a;b]$*і диференційована в інтервалі*$(a;b)$. *Якщо*$\forall x \in (a;b)$ $f'(x) > 0$ $f'(x) < 0$, *то f зростає(спадає) на* $[a;b]$

Тому для знаходження проміжків зростання та спадання диференційованої функції f діють у такий спосіб:

1. Знаходять:

а) область визначення функції f, якщо вона наперед не задана;

б) похідну $f'(x)$ даної функції f;

в) точки, в яких похідна дорівнює нулю, для чого розв'язують рівняння $f'(x) = 0$, а також точки, в яких функція визначена, але похідна $f'(x)$ не існує, їх називають критичними точками.

2. Визначають знак похідної $f'(x)$ на конкретному інтервалі,
достатньо обчислити її значення для будь-якого значення аргументу, що належить цьому інтервалу[34].

Приклад 1. Знайти проміжки зростання та спадання функції

$f(x) = \frac{7}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + 3$

Розв'язання. Функція визначена і диференційована на множині R.
Знайдемо її похідну

$f'(x) = 7x^2 - 5x - 2.$

Нулями похідної є $x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{7}$.

Оскільки похідна неперервна, то вона зберігає знак на інтервалах $\left(-\infty; -\frac{2}{7}\right), \left(-\frac{2}{7}; 1\right), (1; +\infty)$. Оскільки похідна задана квадратним тричленом з додатним коефіцієнтом при x^2, то вона набуває додатних значень поза коренями, тобто$f'(x) > 0$ на інтервалах $\left(-\infty; -\frac{2}{7}\right), (1; +\infty)$ і від'ємних між коренями, тобто $f'(x) < 0$ на інтервалі $\left(-\frac{2}{7}; 1\right)$.

Отже , на інтервалах $\left(-\infty; -\frac{2}{7}\right), (1; +\infty)$ функція f зростає, а на інтервалі $\left(-\frac{2}{7}; 1\right)$– спадає.[15]

Приклад 2. Довести, що функція $f(x) = arctgx - arctg3x - 2e^{\frac{1}{2}x}$ спадає на R.

Розв'язання. Дана функція визначена і диференційована на R.
Знайдемо похідну

$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} - \frac{3}{1+9x^2} - e^{\frac{1}{2}x}$.

Оскільки для $\forall\ x\ \in R\ \ f'(x) < 0$, то дана функція f спадає на R.[13]

Найбільше та найменше значення функції

Нехай дано функцію$y = f(x)$, яка неперервна на відрізку $[a; b]$диференційована в інтервалі $(a; b)$, за винятком можливо скінченого числа точок, де вона не існує. Необхідно ж знайти найбільше та найменше значення функції на цьому відрізку. А як відомо з математичного аналізу, функція, яка неперервна на відрізку, набуває на ньому свого найбільшого і найменшого значення.

Наприклад, кут трикутника може змінюватися лише від 0 до π, швидкість тіла доводиться розглядати в проміжку часу від t_0 до t_1 та інше. Тому й необхідно досліджувати поведінку функції на конкретному проміжку $[a; b]$ або на його кінцях, то чинять так:

1. знаходять критичні точки в інтервалі $(a; b)$ (точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує), обчислюють значення функції в цих точках;
2. знаходять значення функції на кінцях відрізка, тобто $f(a)$, $f(b)$;
3. серед усіх значень вибирають найбільше і найменше значення.

У випадку, коли функція монотонна на відрізку $[a; b]$, то найбільшого і найменшого значення вона досягає на кінцях відрізка. У цьому випадку обмежуємось обчисленням значень $f(a), f(b)$.

По-іншому складається ситуація, якщо необхідно знайти найбільше та найменше значення функції, неперервної в інтервалі $(a; b)$.

Зрозуміло, що функція у цьому випадку не може досягати найбільшого і найменшого значення на кінцях інтервалу. Наприклад, функція $f(x) = x^2 - 5x + 6$ в інтервалі $(3; 6)$ не має ні найбільшого, ні найменшого значення у внутрішніх точках інтервалу. У цьому випадку чинять так:

1. знаходять критичні точки, що належать цьому інтервалу, і обчислюють значення функції в цих точках;

2. знаходять ліву та праву границі відповідно в точках a і b , тобто $\lim_{x\to a+0} f(x)$, $\lim_{x\to b-0} f(x)$. Якщо ці границі існують, то їх порівнюють із значеннями функції в критичних точках. Якщо виявиться, що значення в критичних точках більші(менші) за знайдені границі, то це і буде найбільшим(найменшим) значенням функції на інтервалі[41].

Приклад 1. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку $[a;b]$

$$f(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-3}$$

Розв’язання. На даному відрізку функція визначена і неперервна, диференційована в інтервалі$(-2;2)$. Знайдемо похідну, критичні точки:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x-3)^2}$$

$$(x-3)^2 = (x+3)^2$$

$$x = 0$$

Знайдемо значення функції в критичній точці і на кінцях відрізка:$f(0) = \frac{2}{3}$, $f(-2) = \frac{6}{5}$, $f(2) = \frac{6}{5}$

Отже,

$$\min_{[-2;2]} f(x) = f(0) = \frac{2}{3}$$

$$\max_{[-2;2]} f(x) = f(-2) = f(2) = \frac{6}{5}[16]$$

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку $[a;b]$

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + 4x^2$$

Розв’язання. Функція визначена і неперервна на відрізку$[-1;1]$, диференційна в інтервалі $(-1;1)$. Тому вона набуває на даному відрізку найбільшого і найменшого значення. Знайдемо критичні точки даної функції. Для цього знайдемо похідну

$$f'(x) = x^4 + 8x$$

і прирівняємо її до нуля:

$x^4 + 8x = 0$

$x = 0, x = -2.$

Отже, на інтервалі $(-1; 1)$ функція має лише одну критичну точку $x = 0$. знайдемо значення функції в цій точці $f(0) = 0$.

Обчислимо значення функції на кінцях відрізка

$f(-1) = -\frac{1}{5} + 4 = 3\frac{4}{5}$ $\qquad$ $f(-1) = \frac{1}{5} + 4 = 4\frac{1}{5}$.

Отже,

$\min\limits_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 0$

$\max\limits_{[-1;1]} f(x) = f(1) = 4\frac{1}{5}$[16]

Властивості похідної:

Постійний множник виноситься за знак похідної:

$\frac{d}{dx}[a \times f(x)] = a \times \frac{d}{dx}[f(x)]$.

Приклад: $\frac{d}{dx}(3x^2) = 3 \times \frac{d}{dx}(x^2) = 3 \times 2 \times x = 6x$.

2)Похідна від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх похідних:

$\frac{d}{dx}[f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)] = \frac{d}{dx}[f_1(x)] + \frac{d}{dx}[f_2(x)] + \frac{d}{dx}[f_3(x)]$.

Приклад: $\frac{d}{dx}(0.3 \times x^3 + 2 \times x^2 - 0.8 \times x) = 0.9x^2 + 4x + 0.8$.

3) Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків кожної з функцій на похідну іншої функції:

$\frac{d}{dx}[f_1(x) \times f_2(x)] = f_1(x) \times \frac{d}{dx} f_2(x) + f_2(x) \times \frac{d}{dx} f_1(x)$.

Приклад:$\frac{d}{dx}(x \times sinx) = x \times \frac{d}{dx}(sinx) + sinx \times \frac{d}{dx}(x) = x \times cosx +$

$+sinx$ [34].

<u>Правила диференціювання</u>

Теорема: *Якщо функції* $u(x)$ *і* $v(x)$ *мають похідні у всіх точках інтервалу* $(a;\ b)$, *то*

$\big(u(x) \pm v(x)\big)' = u'(x) \pm v'(x)$

для любого х є $(a;\ b)$. *Коротше,* $(u \pm v)' = u' \pm v'$

Доведення: Суму функцій $u(x) + v(x)$, де $x \epsilon\ (a;\ b)$, яка представляє собою нову функцію, позначимо через $f(x)$ і знайдемо похідну цієї функції,

Нехай x_0 – деяка точка інтервалу $(a;\ b)$.

Тоді, $f^{'}(x_0) = \lim \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\big(u(x)+v(x)\big)-(u(x_0)+v(x_0))}{x\to x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} + \lim\limits_{x\to x_0} \frac{v(x)-v(x_0)}{x\to x_0} = u^{'}(x_0) + v^{'}(x_0)$.

Також, $f'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$

Так як x_0 – допустима точка інтервалу $(a;\ b)$, то маємо:

$f'(x) = \big(u(x) + v(x)\big)' = u'(x) + v'(x)$

Випадок добутку розглядається аналогічно. **Теорема доведена**[41]**.**

Наприклад.

а) $(x^2 + x + 5)' = (x^2)' + (x - 5)' = 2x + 1;$

б) $\big(x^3 + \sqrt{x}\big)' = (x^3)' + \big(\sqrt{x}\big)' = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}};$

в) $(x^2 + 4x + 15)' = (x^2)' + (4x + 15)' = 2x + 4.$

Зауваження. Методом математичної індукції доводиться справедливість формули $(u_1(x)\ +\ u_2\ (x)\ + \cdots)$ кінцевого числа складених[13].

Теорема. *Якщо функції* $u(x)$ *і* $v(x)$ *мають похідні у всіх точках інтервалу* $(a;\ b)$, *то* $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ *для любого* х є $(a;\ b)$. *Коротше,* $(uv)' = u'v + uv'$.

Доведення. Позначимо похідні $u(x)v(x)$ через $f(x)$ х є $(a;\ b)$, і найдемо похідну цієї функції, виходячи із визначення.

Нехай x_0 – деяка точка інтервалу $(a;\ b)$. Тоді

$$f'(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0}$$

Навіть так як

$$u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0) = \big(u(x) - u(x_0)\big)v(x) + u(x_0)(v(x) - v(x_0))$$

то

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} v(x) + u(x_0) \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}\right)$$

$$f'(x_0) = v(x_0)u'(x_0) + u(x_0)v'(x_0).$$

Так як x_0 – вільна точка інтервалу (a; b), то маємо

$$f'(x) = (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x).$$

Теорема доведена[34].

Приклад.

а) $$((x+5)(x-8))' = (x+5)'(x-8) + (x-8)'(x+5) = \\ 1 \cdot (x-8) + 1 \cdot (x+5) = 2x - 3;$$

б) $$(x^2(2x-7))' = (x^2)'(2x-7) + x^2(2x-7)' =$$

$$= 2x(2x-7) + x^2 \cdot 2 = 6x^2 - 14x;$$

в) $$(\sqrt{x}(5-3x))' = (\sqrt{x})'(5-3x) + \sqrt{x}(5-3x)' = \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}(5-3x) + \sqrt{x}(-3) = \frac{5-3x-6x}{2\sqrt{x}} = \frac{5-9}{2\sqrt{x}}.$$

Наслідок. Постійний множник можна виносити за знак похідної:

$$(af(x))' = af'(x).$$

Доведення. Застосувавши множник можна виносити за знак теорему про похідну, де а – число, отримаємо:

$$(af(x))' = (a)'f(x) + af'(x) = af(x) + af'(x) = af'(x).$$[16]

Приклади.

а) $$\left(\frac{x^2}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^2)' = \frac{2}{3}x;$$

б) $$\left(\frac{x^3}{3} + 5x\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' + (5x)' = \frac{1}{3}(x^3)' + 5(x)' = x^2 + 5.$$[16]

Похідна частки двох функцій .

Теорема. *Якщо функції* $u(x)$ *і* $v(x)$ *мають похідні у всіх точках інтервалу (a; b), причому* $v(x) \neq 0$ *для любого x є (a; b), то*

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

для любого x є (a; b)

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Доведення. Позначимо тимчасово $\frac{u(x)}{v(x)}$ через $f(x)$ и знайдемо $f'(x)$, використовуючи визначення похідної.

Нехай x_0 – деяка точка інтервалу (a; b).

Тоді,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x)}{v(x)v(x_0)(x - x_0)} = \frac{1}{v^2(x_0)} \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x)}{x - x_0}.$$

Навіть, так як

$u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x) = (u(x) - u(x_0))v(x_0) + u(x_0)(v(x_0) - v(x)),$ то

$$f'(x_0) = \frac{1}{v^2(x_0)} \lim_{x \to x_0} \left(\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} v(x_0) - u(x_0) \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}\right.$$

і послідовно

$$f'(x_0) = \frac{v(x_0)u'(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

Так як x_0 – вільна точка інтервалу (a; b), то в останній формулі x_0 можна замінити на x. Теорема доведена[41].

Приклади.

а)
$$\left(\frac{1+9x}{x+1}\right)' = \frac{(x+1)(1+9x)' - (1+9x)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)\cdot 9 - (1+9x)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{8}{(x+1)^2};$$

б)
$$\left(\frac{x^3}{4-x}\right)' = \frac{(4-x)(x^3)' - x^3(4-x')}{(4-x)^2} = \frac{(4-x)3x^2 - x^3(-1)}{(4-x)^2} = \frac{12x^2 - 2x^3}{(4-x)^2}.$$ [41]

1.3. Методика організації факультативних занять з математики.

Підготовка сучасної високоосвіченої людини, здатної до творчості, є одним з першочергових державних завдань. Виникла потреба докорінно змінити зміст, форми і методи навчальної діяльності учнів, змінити так, щоб ця діяльність якнайкраще розвивала і формувала творчі здібності особистості. Звідси постає проблема навчання учнів методів проблемного навчання. Метод проблемного навчання ефективно реалізується на факультативних заняттях. Факультативи з математики не є формою позакласної роботи. Це одна з форм диференційованого навчання математики, мета якого – поглиблення і розширення знань учнів, розвиток їхніх математичних здібностей і стійкого зацікавлення математикою [21, С.36].

Відмінність факультативів від гуртків полягає передусім в тому, що гуртки передбачають наявність в учнів початкової зацікавленості до математики, яку вони мають розвивати, а умови факультативів – стійкої зацікавленості[40. С.44].

Факультативні заняття в 7-10 класах (за старою нумерацією) було введено восени 1967 р. Крім згаданої вище мети тоді їм відводилась важлива роль своєрідної педагогічної лабораторії для опрацювання, уточнення й «обкатування» матеріалу, який пізніше мав увійти до обов'язкової програми.

Перша програма факультативних занять передбачала заняття двох видів: 1) важливі із загальноосвітнього погляду додаткові розділи і питання, що межують з темами обов'язкової програми, і такі, які розкривають застосування математики; 2) спеціальні факультативні курси: «Обчислювальна математика», «Програмування», «Векторні простори і лінійне програмування». Ці курси передбачали наявність досить розвиненої цікавості учнів до вивчення вибраних розділів математики, їх рекомендувалося проводити там, де є спеціалісти (учителі шкіл, працівники обчислювальних центрів, науково-дослідних установ, вищих навчальних закладів).

Першу програму факультативів було опубліковано в 1967 р. Розрахована вона на стару шкільну програму. Тому провідне місце в ній займали теми, які мали увійти до нової програми: у 8 класі - «Множини і операції над ними» (10 год), «Нескінченні множини» (10 год), «Геометричні перетворення» (20 год); у 9 класі - «Похідна» (36 год), «Принцип математичної індукції» (10 год); у 10 класі - «Інтеграл» (12 год), «Початки теорії ймовірностей» (18 год) [27]та інші, з яких учитель крім обов'язкових міг вибрати доцільну, на його погляд, у конкретних умовах.

З упровадженням в життя нових шкільних програм змінювались і програми факультативних занять. У 9 класі з'явилась тема «Комплексні числа» і пов'язана з нею тема «Алгебраїчні рівняння вищих степенів», яку потім було перенесено до 10 класу. У 10 класі з'явилась тема «Диференціальні рівняння та їхні значення в природознавстві»[27].

Спеціальні курси факультативів не знайшли широкого застосування передусім через відсутність фахівців, а також тому, що учням середньої школи ще важко обрати для вивчення яку-небудь широку спеціальну галузь математики.

В історії існування факультативів розрізняють два етапи. Перший, перехідний етап (1967 - 1976 рр.) і другий, новий етап (від 1976 р.), коли було розроблено новий зміст факультативів після введення нової шкільної програми.

Нині факультативне навчання математики в 7-11 класах має поглиблювати знання учнів, здобуті ними під час вивчення основного курсу, а також розвивати логічне мислення, цікавість до математики, творчі здібності.

Факультативний курс складається з двох розділів: «За сторінками підручників математики» і «Математична мозаїка».

Теми першого розділу безпосередньо стосуються основного курсу, поглиблюють його, систематизують і доповнюють навчальний матеріал, а також мають на меті підготовку до вступу до ВНЗ. Особливу увагу приділено розв'язуванню задач підвищеної складності[40].

Методика організації та проведення факультативів. Факультативні курси розраховані на тих учнів, які мають достатню підготовку з математики, однак, як виняток, можна дозволити відвідувати факультатив і тим, хто ще не досяг високих оцінок, але має потенціальні можливості для цього. Залучати до факультативів і гуртків доцільно, розв'язуючи на звичайних уроках цікаві задачі і вирішуючи проблеми, що потребують розширення знань і умінь. Учням пропонують розширити їх на факультативних заняттях.

Не можна механічно переносити методи, прийоми, організаційні форми і засоби навчання математики в звичайних класах на факультативне навчання. Враховуючи, що учні на факультативних заняттях мають більші можливості для навчання та стійку цікавість[40] до математики, тут мають переважати методи проблемного навчання (проблемний виклад, евристичні бесіди, дослідницький метод). Більше часу слід присвятити самостійній роботі. Окремі вчителі поділяють виконання завдань дослідницького характеру на кілька етапів. Спочатку учні вивчають потрібну літературу, потім шукають алгоритм розв'язування задачі або проблеми, а на заняттях звітують про результати своїх пошуків. Розроблений алгоритм можна втілити в програму для персонального комп'ютера або калькулятора.

На факультативних заняттях є можливість для прискореного вивчення частини теоретичного матеріалу завдяки самостійній роботі. Ефективним є застосування лекційно-практичної системи навчання, в якій належне місце відводиться семінарам. На семінарах учні готують повідомлення про цікаві застосування математичних методів, способи розв'язування нестандартних задач, наводять історичні довідки тощо[40].

Важливою проблемою є взаємозв'язок факультативних занять з вивченням обов'язкового курсу, погодженість у часі та змісті вивчення тих чи інших питань[21].

Досвід свідчить, що більшу частку запланованого до вивчення матеріалу потрібно перенести безпосередньо на заняття в класі, а домашні завдання звести до мінімуму і пропонувати лише для того, щоб учні були підготовленими до наступного заняття. Творчі завдання, які потребують значного часу, не є обов'язковими для всіх учнів факультативу, однак виконання їх слід всіляко схвалювати[40].

Система оцінювання має бути досить гнучкою, не копіювати застосованої в обов'язковому курсі. Заохочуючи учнів, які працюють у факультативі, в жодному разі не можна залякувати їх негативними оцінками і відштовхувати від роботи, яку вони обрали за власним бажанням [37, С.103].

Основне завдання факультативних занять: враховуючи інтереси і схильності учнів, розширити і поглибити знання по предмету, забезпечити засвоєння ними програмного матеріалу, ознайомити школярів з деякими загальними ідеями сучасної математики, розкрити додатки математики на практиці [21,С. 46].

Факультативні заняття грають велику роль у вдосконаленні шкільної, зокрема математичної освіти. Вони дозволяють проводити пошук і експериментальну перевірку нового змісту, нових методів навчання, в широких межах варіювати об’єм складності матеріалу, що вивчається.

ВИСНОВОК ДО І РОЗДІЛУ

Похідна функції є універсальним та потужним апаратом дослідження, застосування похідних у найрізноманітніших розділах математики та багатьох інших науках досить ширше та різноманітніше, тому дана тема займає найважливіше місце у курсі шкільної математика. Завдання застосування похідної зустрічаються в Зовнішньому незалежному оцінюванні з математики, фізики та інформатики.

У ході аналізу навчально-методичної літератури було розглянуто зміст підручників на тему «Похідна та її застосування». В результаті цього були проведені систематизація та узагальнення теоретичного матеріалу, який послужив основою для складання алгоритмів розв'язання завдань.

У теоретичній частині були розглянуті означення, правила диференціювання, теореми, пов'язані з похідною у шкільному курсі математики, складено таблицю похідних елементарних функцій.

Був розроблений логіко-математичний аналіз теми «Похідна та її застосування», в ході якого ми розглянули основні теоретичні відомості та рекомендації до вивчення теми «Похідна та її застосування» на профільному рівні.

РОЗДІЛ 2.

МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПОХІДНА» НА ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТТЯХ З МАТЕМАТИКИ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

2.1. Розробка факультативного курсу «Похідна та її застосування в шкільному курсі математики» в профільній школі.

Пояснювальна записка.

Цей факультативний курс розроблено на тему: “Похідна в шкільному курсі математики”. Він являє собою систему занять, призначених для роботи з учнями старших класів загальноосвітніх шкіл, а також може бути використаний для вивчення студентами педагогічних університетів, що навчаються на математичних факультетах, і просто людей, які захоплюються математикою. Факультативний курс покликаний допомогти всім бажаючим поповнити та поглибити свої знання у галузі математичного аналізу. Цей факультативний курс складається з 10 занять. Після вивчення даного курсу учні повинні навчитися знаходити похідні функції, вирішувати завдання на екстремум за допомогою похідної, знаходити рівняння дотичної, досліджувати функції. Для того щоб математичні поняття, теореми, закони, правила стали б предметом навчальної діяльності учнів, необхідно подати їх у вигляді завдань, які спрямовували б і систематизували їх активність.

Тематичне планування.

№	Тема	Кількість годин
1.	Поняття похідної.	**1**
2.	Похідна основних функцій. Основні правила диференціювання.	**1**
3.	Похідна складної функції.	**1**
4.	Дотична до графіка функції.	**1**

5.	Наближене обчислення за допомогою похідної.	**1**
6.	Ознака зростання та спадання функції.	**1**
7.	Критичні точки функції, максимум та мінімум.	**1**
8.	Застосування похідної для дослідження функцій.	**1**
9.	Найбільше та найменше значення функції.	**1**
10.	Текстові задачі на екстремум, які вирішуються за допомогою похідної.	**1**
	Всього	**10**

Матеріал до занять.

Заняття №1.

Тема: Поняття похідної.

Мета:

- **навчальна:** розглянути поняття похідної функції;
- **розвивальна:** розширити кругозір учнів;
- **виховна:** формування математичної грамотності.

Тип заняття: вивчення нового матеріалу.

Вид заняття: практикум.

Матеріал до заняття.

Нехай ми маємо функцію $y = f(x)$, визначену на деякому проміжку. При кожному значенні аргументу x з цього проміжку функція $y = f(x)$ має певне значення.

Нехай аргумент x отримав деякий приріст Δx. Тоді функція отримає деякий приріст Δy. Таким чином:

- призначенні аргументу x будемо мати $y = f(x)$;

- при значенні аргументу $x + \Delta x$ будемо мати $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Знайдемо приріст функції Δy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Знайдемо границю цього відношення при $\Delta x \to 0$. Якщо границя існує, то її називають похідною функції $f(x)$ і позначають $f'(x)$. Таким чином, за означенням, $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ або $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Задача 1. Дано функцію $y = x^2$, знайти її похідну y'.

Розв'язання:

При значенні аргументу, рівному x, маємо $y = x^2$. При значенні аргументу, рівному $x + \Delta x$, маємо $y + \Delta y = f(x + \Delta x)^2$. Знаходимо приріст функції:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Складаємо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Переходячи до границі, знайдемо похідну від даної функції:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x .$$

Отже, похідна від функції $y = x^2$ в довільній точці дорівнює $y' = 2x$[15].

Задача 2. Дано функцію $y = \frac{1}{x}$, знайти її похідну y'.

Розв'язання:

Розмірковуючи так само, як і в попередньому прикладі, отримуємо:

$$y = \frac{1}{x}, y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x},$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)},$$

$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\frac{1}{x(x+\Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}$.[16]

Задача 3. Дано функцію $y = \cos x$, знайти її похідну y'.

Розв'язання:

Дамо аргументу x приріст Δx, тоді

$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$,

$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{x - \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} =$

$-2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$,

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$,

$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = -\lim_{\Delta x \to 0} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$,

Враховуючи, що $\sin x$ є неперервною функцією, то одержимо:

$y' = -\sin x$.[15]

Задача 4. Дано функцію $y = sin\, x$, знайти її похідну y'.

Розв'язання:

Дамо аргументу x приріст Δx, тоді

$y + \Delta y = sin(x + \Delta x)$,

$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$,

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$,

$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$,

Але так як,

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$,

то

$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x) = \cos x$.[15]

Заняття №2.

Тема: Похідна основних функцій. Основні правила диференціювання.

Мета:

- **навчальна:** розглянути таблицю похідних основних елементарних функцій та правила диференціювання;
- **розвивальна:** поглибити знання з теми;;
- **виховна:** формування математичної грамотності.

Тип заняття: комбінований.

Вид заняття: практикум.

Матеріал до заняття.

Вкажемо спочатку похідні основних елементарних функцій:

1) Похідна функції $y = x^n$, де n – довільне дійсне число дорівнює $y' = nx^{n-1}$;
2) Функція $y = a^x$ має похідну $y' = a^x \ln a$, при чому якщо дана функція $y = e^x$, то її похідна дорівнює $y' = e^x$;
3) Похідна логарифмічної функції $y = \log_a x$ дорівнює $y' = \frac{1}{x \ln a}$, при чому, похідна функції $e = \ln x$ дорівнює $y' = \frac{1}{x}$;
4) Похідні тригонометричних функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$ дорівнюють відповідно $y' = \cos x$ та $y' = -\sin x$;
5) Похідні тригонометричних функцій $y = tg\ x$ та $y = ctg\ x$ дорівнюють відповідно $y' = \frac{1}{cos^2 x}$ та $y' = -\frac{1}{sin^2 x}$. [8]

Доведення першої формули виходить за межі шкільного курсу математики. Наступні дві формули доводяться за правилом диференціювання складної функції. Похідні синуса та косинуса були знайдені нами раніше. Останні дві формули доведемо нижче, як розглянемо правила диференціювання.

Основні правила диференціювання:

1) Похідна сталої дорівнює нулю, тобто $(C)' = 0$, де $C - const$;
2) Константу можна виносити за знак похідної, тобто $\left(Cf(x)\right)' = Cf'(x)$, $C - const$;
3) Похідна суми дорівнює сумі похідних, тобто $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$;
4) Похідна частки :
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g\prime(x)}{g^2(x)}$, $g(x) \neq 0$.

Доведення цих властивостей наводити не будемо, відзначимо лише, що вони доводяться виходячи з визначення похідної функції.[9]

Задача 1. Знайти похідну функції $y = x^3 + \cos x - \ln x$

Розв'язання:

На підставі таблиці похідних, а також правил диференціювання знаходимо, що

$y' = (x^3)' + (\cos x)' - (\ln x)' = 3x^2 - \sin x - \frac{1}{x}$.[9]

Задача 2. Знайти похідну функції $y = tg\ x$.

Розв'язання: Як відомо $tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Тоді за правилом диференціювання частки, маємо:

$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)\prime \cos\ x - (\cos x)\prime \sin\ x}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$.[15]

Задача 3. Знайти значення похідної функції $f(x) = x^2 - 3x + e^x + \frac{3-x}{2+x}$ при *x=0.*

Розв'язання:

Знайдемо похідну даної функції:

$f'(x) = 2x - 3 + e^x - \frac{5}{(2+x)^2}$.

Тепер знайдемо значення похідної при *x=0.*

$f'(x) = 2 \cdot 0 - 3 + e^0 - \frac{5}{(2+0)^2} = -\frac{13}{4}$.[13]

Задача 4. Розв'яжіть нерівність $f'(x) > 0$, якщо $f(x) = 2^x - (8\ln 2)x$.

Розв’язання:

Знайдемо похідну даної функції:

$f'(x) = 2^x \ln 2 - 8 \ln 2;$

Тепер розв’яжемо нерівність :

$2^x \ln 2 - 8 \ln 2 > 0,$

$2^x > 8 \Longrightarrow x > 3.$

Відповідь: $(3; +\infty)$.[14]

2.2. Методика навчанню розв'язування задач на тему «Доведення нерівностей за допомогою похідної»

Розглянемо, як при доведенні нерівностей можна використовувати похідну. Суть цього прийому полягає в наступному.

Нехай на певному проміжку *x є [a,b]* із області визначення функцій f та g потрібно довести нерівність $f(x)\geq g(x)$. Введемо в розгляд функцію $u(x) = f(x) - g(x)$. Нехай похідна $u'(x)$має на відрізку, що розглядається, єдиний корінь x_0, це значення є точкою мінімуму функції u, а також виконується нерівність $u(x_0) = f(x_0) - g(x_0) \geq 0$. Тоді цього достатньо, щоб стверджувати, що на проміжку *[a,b]* виконується нерівність $f(x)\geq g(x)$.

Даний прийом можна використовувати і при доведенні числових нерівностей. Для цього спочатку вводять у розгляд деяку функцію, яка приймає задані числові значення у певних точках, після чого приступають до реалізації описаної вище схеми.

Наведемо приклади таких доведень.[9]

Задача 1. Довести нерівність$e^x \geq 1 + \ln(x+1)$

Доведення. ОДЗ: $x > -1$. Очевидно, що при $x = 0$ми отримуємо рівність. Розглянемо функцію $f(x) = e^x - 1 - \ln(x+1)$. Її похідна $f'(x) = e^x - \frac{1}{1+x}$ дорівнює 0 в точці$x = 0$ і монотонно зростає (останнє випливає з того, що її похідна $e^x + \frac{1}{(1+x^2)}$ додатна). Таким чином, для функції $f(x)$точка $x = 0$ є точкою екстремуму, а саме точкою мінімуму. Тому для всіх x, що належать ОДЗ, виконується нерівність $f(x) \geq f(0) = 0$, що і потрібно було довести.

Зауважимо, що розв′язане рівняння $e^x = 1 + \ln(x+1)$ з єдиним коренем $x = 0$ та нерівність $e^x > 1 + \ln(x+1)$ з розв′язками$x \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.[9]

Задача 2.При$x > 0$ виконується нерівність $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$. Довести.

Доведення. Розглянемо функцію$y(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$. Знайшовши $y'(x) = e^x - 1 - x$ та $y''(x) = e^x - 1$, бачимо, що друга похідна перетворюється в 0 у точці $x = 0$ і при переході через цю точку змінює знак із «-» на «+». Це означає, що для функції $y'(x)$ точка $x = 0$ є точкою мінімуму і $y'(0) = 0$. Таким чином, $y'(x) \geq 0$ на всій числовій осі. Звідси випливає, що функція $y(x)$ монотонно зростає. Оскільки $y(0) = 0$, то при $x > 0$ маємо $y(x) > 0$. Нерівність доведена.

Отримано наступні результати:

рівняння $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ має єдиний корінь $x = 0$;

нерівність $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ має розв′язки$x \in (0, +\infty)$.

розв'язками нерівності $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ є проміжок $x \in (-\infty; 0)$.[13]

Задача 3.Довести, що при $x > -1$ для всіх натуральних nвиконується нерівність$(1 + x)^n \geq 1 + nx$(нерівність Бернуллі).

*Доведення.*При $n = 1$ нерівність вірна. Нехай $n > 1$. Розглянемо функцію $f(x) = (1 + x)^n - 1 - nx$. Її похідна $f'(x) = n(1 + x)^{n-1} - n$ перетворюється в нуль у єдиній точці $x = 0$, яка, як легко бачити, є точкою мінімуму. Тому для всіх $x > -1$ виконується нерівність $f(x) \geq f(0)$, тобто $(1 + x)^n - 1 - nx \geq 0$. З одержаного співвідношення випливає нерівність Бернуллі.[13]

Задача 4.Довести, що при $ab \geq 0$ виконується нерівність $(a + b)^4 \geq a^4 + b^4$

Доведення. Розглянемо тільки випадок $a \geq 0, b \geq 0$, оскільки при $a \leq 0$, $b \leq 0$перепозначення змінних aна$-a$ та bна$-b$приведе нас до аналогічних міркувань. При $a = 0$ маємо очевидну рівність. Нехай $a > 0$. Введемо заміну $b = x$та розглянемо функцію $f(x) = (x + a)^4 - x^4 - a^4$, $x \geq 0$.Очевидно, що похідна $f'(x) = 4(a + x)^3 - 4x^3$не перетворюється в нуль у жодній точці і, оскільки $f(a) = (a + a)^4 - a^4 - a^4 = 14a^4 > 0$ та $f(0) = 0$, то$f(x)$, монотонно зростаючи, не може приймати від'ємних значень. Тому $f(x) = (x+a)^4 - x^4 - a^4 \geq 0$, що доводить задану нерівність.[19]

Задача 5. Довести нерівність $a^2 - b^2 \geq ab$.

Доведення. Нехай $b = x$. Розглянемо функцію $f(x) = x^2 - ax + a^2$. Ї похідна $f'(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x} - \mathrm{a}$

Перетворюється в нуль у точці$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3a^2}{4} \geq 0$.Оскільки $f(x) \geq f\left(\frac{a}{2}\right) \geq 0$, то $x^2 - ax + a^2 \geq 0$,що фактично і потрібно було довести. Рівність виконується при $a = b = 0$.[15]

Задача 6. Довести, що для всіх дійсних x виконується нерівність $e^x \geq 1 + x$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = e^x - 1 - x$. Маємо $f(x) = e^x - 1$. Рівність похідної нулю досягається при $x = 0$. Очевидно, що знайдене значення є точкою мінімуму. Для значень $x \neq 0$ буде виконуватися нерівність $f(x) = e^x - 1 - x > f(0) = 0$.Рівність виконується при $x = 0$.[15]

Задача 7. Довести, що для всіх дійсних x виконується нерівність $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) \geq \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Похідна $f'^{(x)} = x - \sin x$ приймає значення 0 в єдиній точці $x = 0$. Очевидно, що це значення є точкою мінімуму. Тому для значень $x \neq 0$ буде виконуватися нерівність $f(x) \geq \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0$. Рівність досягає при $x = 0$.[16]

Задача 8. Довести. Що $2^n > n^2$ для всіх натуральних $n \geq 5$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = 2^x - x^2$ та знайдемо її похідну.Маємо $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x$.Оскільки$f'(-1) = \frac{\ln 2}{2} + 2 > 0, f'(2) = 4\ln 2 - 4,\ f'(4) = 16\ln 2 - 8 = 8(\ln 4 - 1) > 0$,то на проміжках [-1;2], [2;4] похідна має принаймні по одному кореню. Більше коренів рівняння $f'(x) = 0$ мати не може. Справді, рівняння $f''(x) = 2^x \ln^2 2 - 2 = 0$ має єдиний корінь (оскільки $f''(0) = \ln^2 2 - 2 < \ln^2 e - 2 < 0$і $2^x \ln^2 2 - 2 > 0$для достатньо великих x). Тому функція $f'(x)$ має єдину точку екстремуму – а саме тому мінімуму, а рівняння $f'(x) = 0$ у нашому випадку має тільки два корені. Таким чином обгрунтовано, що похідна$f'(x)$на проміжку (4: +∞) приймає додатні значення і функція $f'(x)$ зростає. Отже, $f(x) = 2^x - x^2 > f(4) = 0$. Нерівність $2^x - x^2 = 0$ на проміжку $x\epsilon(4; +\infty)$виконується для довільних x, тому і для всіх натуральних n, вибраних у цій множині.[15]

Задача 9. Довести нерівність $a^8 - a^5 + a^2 - a + 1 > 0$.

Доведення. Зробимо наступні перетворення:

$a^8 - a^5 + a^2 - a + 1 = a^5(a^3 - 1) + a^2 - a + 1 = (a^2 - a + 1)(a^6 - a^5 1)$

Перший множник отриманого виразу приймає тільки додатні значення. Покажемо, що і другий множник теж завжди додатний. Для цього розглянемо функцію $f(x) = x^6 - x^5 + 1$. Її похідна $f'(x) = 6x^5 - 5x^4$ перетворюється в нуль в точках $x = 0$ та $x = \frac{5}{6}$. Легко переконатися. Що при $x = 0$ екстремуму нема, а точках x $= \frac{5}{6}$ є точкою мінімуму. Оскільки $f\left(\frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 + 1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} > 0$,то функція приймає тільки додатні значення.[9]

Задача 10. Порівняти числа$\sqrt[2012]{2012}$ та$\sqrt[2013]{2013}$.

Розв'язання. Порівняємо натуральні логарифми цих чисел, тобто числа $\frac{\ln 2012}{2012}$ та$\frac{\ln 2013}{2013}$, що рівносильне поставленій задачі, оскільки функція $\ln$ x монотонно зростає на своїй області визначення. Для цього розглянемо проміжки її монотонності. Очевидно, що похідна $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ перетворюється в нуль у точці$x = e$. Легко встановити, що це точка максимуму і що на проміжку$x \in (e; +\infty)$функція монотонно спадає. Оскільки цьому проміжку належать числа 2012 та 2013, то більшу з них відповідає менше значення функції. Тому $\frac{\ln 2012}{2012} > \frac{\ln 2013}{2013}$ і $\sqrt[2012]{2012} > \sqrt[2013]{2013}$.[41]

Задача 11. Довести, що при $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$виконується нерівність $\frac{tgx}{tgy} < \frac{x}{y}$.

Доведення. Доведемо нерівність $\frac{tgx}{x} < \frac{tgy}{y}$,яка на вказаному проміжку рівносильна заданій. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{tgx}{x}$ на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ та доведемо, що на ньому вона зростає. Для цього достатньо показати, що $f'(x) > 0$. Маємо

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{cos^2 x} - tg}{x^2} = \frac{x - \sin x \cdot \cos x}{x^2 \cdot cos^2 x}$$

Оскільки знаменник похідної на вказаному проміжку додатний, то покажемо, що додатний є також чисельник, тобто, що виконується нерівність $x - \sin x \cdot \cos x > 0$.А це випливаєз нерівності $2x > \sin 2x$для$x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ та $2x \geq \frac{\pi}{2} > 1 \geq \sin 2x$ при $x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$. Отже, $f'(x) > 0$ і функція $f(x) = \frac{tgx}{x}$ зростає на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Тому $\frac{tgx}{x} < \frac{tgy}{y}$ для $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ або $\frac{tgx}{tgy} < \frac{x}{y}$. [42]

2.3. Методика навчанню розв’язування задач на тему «Доведення тотожностей за допомогою похідної»

Для доведення тотожностей диференціальними методами будемо користуватися такою теоремою.

Теорема. Якщо функції $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$ і мають рівні похідні всередині цього відрізка, то вони можуть відрізнятись одна від одної лише сталим доданком.

За цією теоремою пропонується <u>алгоритм для доведення тотожності</u> $f(x) = \varphi(x)$ на відрізку $[a;b]$:

1. Показати, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$.
2. Переконатися, що у всіх точках цього відрізка має місце рівність $f'(x) = \varphi'(x)$.
3. Пересвідчитися, що хоча б в одній точці x_0 відрізка $[a;b]$ маємо: $f(x_0) = \varphi(x_0)$.
4. Зробити висновок, що тотожність має місце для всіх x із відрізка $[a;b]$.[41]

Приклад 1. Довести тотожність $\sin^2 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$

Доведення Розглянемо функцію

$$f(x) = \sin^2 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \sin^2 + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}.$$

$$f'(x) = 2\sin x\cos x - \sin 2x = \sin 2x - \sin 2x = 0.$$

$f'(x) = 0$ для всіх $x \in R$, отже $f(x)$ - стала ; $f(x) = C.$

Обчислимо значення функції $f(x)$ при будь-якому значенні x, наприклад, x=0

$f(0) = \sin^2 0 + \cos(-\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3} = 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$ $f(0) = \frac{1}{4}; C = \frac{1}{4};$ тобто, тотожність $\sin^2 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$ правильна . ***Доведено*** [41]

Приклад 2. Довести тотожність $arc\sin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, якщо $-1 \le x \le 1$

Доведення. Обидві частини рівності неперервні на відрізку $[-1;1]$. Знаходимо похідну лівої і правої частин рівності:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1;1).$$

Нехай $x_0 = 0$. Маємо $arc\sin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Отже, тотожність правильна для всіх значень x із відрізка $[-1;1]$. ***Доведено*** [42]

Приклад 3 Довести тотожність $\sin^4 x + \frac{1}{2}cos 2x = \frac{1}{8}cos 4x + \frac{3}{8}$.

Доведення Розглянемо функцію: $f(x) = \sin^4 x + \frac{1}{2}cos 2x - \frac{1}{8}cos 4x - \frac{3}{8}$.

Знайдемо похідну: $f'(x) = 4\sin^3 xcosx + \frac{1}{2}(-2\sin 2x) - \frac{1}{8}(-4\sin 4x) =$

$$= 4\sin^3 xcosx + \sin 2x + \frac{1}{2}\sin 4x = 2\sin^2 x \cdot 2\sin x\cos x - \sin 2x + \frac{1}{2}\sin 4x =$$

$$= \sin 2x\left(2\sin^2 x - 1\right) + \frac{1}{2}\sin 4x = -\sin 2x\left(1 - 2\sin^2 x\right) + \frac{1}{2}\sin 4x = -\sin 2x\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 4x =$$

$$-\frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 4x = 0.$$

Оскільки $f'(x) = 0$ для всіх $x \in R$, то $f(x)$ - стала, $f(x) = \mathrm{C}$. Обчислимо значення функції $f(x)$ при будь-якому значенні x, наприклад $x = 0$.

$$f(0) = \sin^4 0 + \frac{1}{2}cos 0 - \frac{1}{8}cos 0 - \frac{3}{8} = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = 0,$$

тобто тотожність $\sin^4 x + \frac{1}{2}cos 2x = \frac{1}{8}cos 4x + \frac{3}{8}$ є правильною. ***Доведено***[16]

2.4. Методика навчанню розв'язування задач на тему «Обчислення похідної неявно заданої функції»

Розглянемо, як обчислюється неявно задана функція за допомогою похідної.

Наведемо приклади таких обчислень.

Приклад 1. Знайти похідну від неявної функції

$x^2 - 2axy + y^2 = 0$

Повторимо правило знаходження похідної від неявної функції: щоб знайти похідну від неявної функції $F(x, y) = 0$ треба диференціювати це рівняння по змінній x, розглядаючи при цьому y як функцію змінної x. Далі з отриманого рівняння потрібно виразити y'.

Функція задана неявно, тому ми прямо диференціюємо це рівняння. Обчислюємо похідну від кожного доданку.

$2a$ - це константа, тому її можна винести за дужки.

$2x - 2a(x' \cdot y + x \cdot y') + 2y \cdot y' = 0.$

Далі продиференціювали за формулою $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Примітка: так як yце функція залежна від x, то y^2(складна функція, яку потрібно помножити на похідну основи степеня).

$2x - 2a\,y - 2ax \cdot y' + 2y \cdot y' = 0$.

y' - не обчислюється, так і залишається.

Далі скорочуємо рівняння на 2, отримуємо $x - a\,y - ax \cdot y' + y \cdot y' = 0$

Наступним кроком виносимо y' за дужки, а ліву частину переносимо за знак рівності.

$y'(y - ax) = ay - x$

Останнім що ми робимо, це виражаємо y' , отримуємо:

$$y' = \frac{ay - x}{y - ax}$$

Отже, завдання виконано.[42]

Приклад 2.

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y} - xy = 0$$

Починаємо диференціювання неявної функції.

Похідна від $(\operatorname{arctg})' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{x' \cdot y - x \cdot y'}{y^2} - (x' \cdot y + x \cdot y') = 0$$

$\frac{x}{y}$диференціювали за формулою $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

xy– за формулою $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Продовжимо виконання.

$$\frac{1}{\frac{y^2 + x^2}{y^2}} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} - (y + xy') = 0$$

Скоротимо y^2, та виконаємо дії, отримаємо:

$$\frac{y - xy'}{x^2 + y^2} - y - xy' = 0$$

Далі треба виразити y', помножимо обидві частини рівняння на $x^2 + y^2$, після чого одержимо:

$$y - xy' - (x^2 + y^2) - xy'(x^2 + y^2) = 0$$

Далі згрупуємо доданки з y' та перенесемо все інше за знак рівності, отримаємо рівняння:

$$y'(x + x(x^2 + y^2)) = y - y(x^2 + y^2)$$

В лівій частині y' винесли за дужки.

Останнім кроком виражаємо y':

$$y' = \frac{y - y(x^2 + y^2)}{x + x(x^2 + y^2)}$$

Отже, завдання виконано.[41]

Приклад 3.

$$x + y - e^{x-y} = 0$$

Продиференціюємо рівняння по змінній x:

$1 + y' - e^{x-y}(x - y)' = 0$

Враховуючи, що y це функція $f(x)$то похідна від yбуде дорівнювати y'.

e^{x-y} – знаходимо як похідну складної функції $(e^u)' = e^u \cdot u'$

Далі зручно замінити e^{x-y} на $x + y$, як ми це зробимо. З нашого основного рівняння $x + y - e^{x-y} = 0$ перенесемо $-e^{x-y}$ за знак рівності, отримаємо:

$x + y = e^{x-y}$

Зробимо заміну та продовжимо диференціювання.

$1 + y' - (x + y)(1 - y') = 0$

Розкриємо дужки:

$1 + y' - (x - xy' + y - yy') = 0$

$1 + y' - x + xy' - y + yy' = 0$

Згрупуємо доданки з y' та винесемо y' за дужки, все інше перенесемо за знак рівності, одержимо рівняння:

$y'(x + y - 1) = x + y - 1$

Виразимо y':

$y' = \frac{x+y-1}{x+y+1}$ [40]

Приклад 4.

$x^3 + y^3 - 3xy = 0$

Функція задана неявно, тому ми прямо диференціюємо це рівняння. Обчислюємо похідну від кожного доданку.

$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3(y - xy') = 0$

Розглядаємо y^3як складну функцію, тому потрібно домножити на y'.

Далі розкриємо дужки та запишемо вираз:

$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3y - 3xy' = 0$

Скоротимо вираз на 3:

$x^2 + y^2 \cdot y' - y - xy' = 0$

Згрупуємо доданки зy' та винесемо y' за дужки, все інше перенесемо за знак рівності, одержимо рівняння:

$$y'(y^2 - x) = y - x^2$$

Останнім кроком виражаємо y':

$$y' = \frac{y - x^2}{(y^2 - x)}$$

Отже, завдання виконано.[31]

Приклад 5.

$x^2 + xy + y^2 = 6$

Продиференціюємо обидві частини рівняння:

$(x^2 + xy + y^2)' = (6)'$

$2x + 1 \cdot y + x \cdot y' + 2y \cdot y' = 0$

Згрупуємо доданки зy':

$x \cdot y' + 2y \cdot y' = -2x - y$

Винесемо y' за дужки, все інше перенесемо за знак рівності, одержимо рівняння:

$y'(x + 2y) = -2x - y$

Останнім кроком виражаємо y':

$$y' = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

Отже, завдання виконано.[31]

Приклад 6. Знайти похідну $y' = \frac{dy}{dx}$ від неявної функції $5x^2 + 3y - 2 = 0$.

Розв'язання. Маємо неявно задану функцію. Продиференціюємо обидві частини рівняння по x, враховуючи при цьому, що y є функцією від x: $15x^2 + 3y' = 0$ або $5x^2 + y' = 0$.

Розв'язуючи здобуте рівняння відносно y', знаходимо$y' = -5x^2$. Виражаючи із вихідного рівняння y через x і диференціюючи y як явну функцію, одержимо:

$y = \frac{2-5x^3}{3}$; $y' = \frac{1}{3}(2-5x^3)' = \frac{1}{3}(-15x^2) = -5x^2$.[38]

Приклад 7.$y = \cos(x+y)$. Знайти $y' = \frac{dy}{dx}$.

Розв'язання. Скориставшись правилом диференціювання неявної функції, матимемо $y' = -\sin(x+y)(1+y')$або $y' + y'\sin(\mathrm{x}+\mathrm{y}) == -\sin(x+y)$.

Звідси$y' = -\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$.

Слід відзначити, що розв'язання рівняння $y = \cos(\mathrm{x}+\mathrm{y})$відносно yнеможливо.[37]

Приклад 8.$x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Знайти y'.

Розв'язання. Продиференціюємо обидві частини рівняння поx, враховуючи, що yє функцією відx. Одержимо

$$3x^2 + 3y^2y' - 3a(y + xy') = 0.$$

Для знаходження y' визначаємо такі перетворення:

$x^2 + y^2y' - a(y + xy') = 0;$

$x^2 + y^2y' - ay - axy' = 0;$

$(y^2 - ax)y' = ay - x^2$, звідки $y' = \frac{ay-x^2}{y^2-ax}$. [19]

Приклад 9.Знайтиy', якщо $x^4 + y^4 = x^2y^2$.

Розв'язання. Діючи, як і в попередньому прикладі, будемо мати

$4x^3 + 4y^3y' = 2xy^2 + x^2 \cdot 2\, yy';$

$2x^3 + 2y^3y' = xy^2 + x^2yy';$

$(2y^3 - x^2y)y' = xy^2 - 2x^3;$

$y' = \frac{xy^2-2x^3}{2y^3-x^2y}$.[15]

Приклад 10.$2y\ln y = x$. Знайти y'.

Розв'язання. Диференціюючи обидві частини рівняння по x, одержимо:

$$2\left(y' \cdot \ln y + y \cdot \frac{1}{y} \cdot y'\right) = 1$$

Після спрощення матимемо:

$y' \cdot \ln y + y \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2}$;

$y'(\ln y + 1) = \dfrac{1}{2}$;

$y' = \frac{1}{2(1+\ln y)}$.[15]

Приклад 11.Знайтиy' в точці $M(1;1)$, якщо $2y = 1 - xy^3$.

Розв'язання. За правилом диференціювання неявно заданої функції маємо $2y' = y^3 + 3\,xy^3y'$.При$x = 1$ і$y = 1$одержимо$2y' = 1 + 3y'$.

Звідси $y'(1;1) = -1$.[41]

Приклад 12.Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точці $M(1;-1)$.

Розв'язання. Підставляючи значення координат даної точки до рівняння, переконаємося, що точка $M(1;-1)$ належить кривій: $1^2 = 2 \cdot 1 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^4 = 6$. Продиференціюємо рівняння кривої: $2x + 2(y^2 + 2xyy') + 12y^3y' == 0$.

Звідси$y' = -\frac{x+y^2}{2xy+6y^3}$.

Обчислимо значення y' в точці $M: f'(x_0) = y_0' = y'(1;-1) = \frac{1+(-1)^2}{2\cdot1\cdot(-1)+6\cdot(-1)^3} = \frac{1}{4}$.

Тепер, згідно з рівняннями (4) і (5), дістанемо:

$y + 1 = \frac{1}{4}(x-1)$ або $x - 4y - 5 = 0$ -рівняння дотичної;

$y + 1 = -4(x-1)$ або $4x + y - 3 = 0$ -рівняння нормалі.

Завдання . Знайти частинні похідні другого порядку:

А)$z = 2x^3 + x^2y + xy^2 + 2y^3$.

Знайдемо перші похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + 2xy + y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy + 6y^2.$$

Знайдемо другі похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(6x^2 + 2xy + y^2) = 12x + 2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(6x^2 + 2xy + y^2) = 2x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2xy + 6y^2) = 2x + 2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2xy + 6y^2) = 2x + 12y$$

Б)$z = xy + \frac{x}{y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{1}{y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y + \frac{1}{y}\right) = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y + \frac{1}{y}\right) = 1 - \frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - \frac{x}{y^2}\right) = 1 - \frac{1}{y^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x - \frac{x}{y^2}\right) = 1 - \frac{2x}{y^3}.$$

В)$z = \ln(x^2 + y^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2 \cdot (y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2y = -\frac{4x}{(x^2 + y^2)^2},$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2 \cdot (x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.[41]

Завдання 1. Перевірити, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = arcctg(x + 2y)$.

Знаходимо перші похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{1 + (x + 2y)^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2}{1 + (x + 2y)^2}.$$

Обчислимо мішані похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{[1 + (x + 2y)^2]^2} \cdot 2(x + 2y) \cdot 2 = \frac{4(x + 2y)}{[1 + (x + 2y)^2]^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{2}{[1+(x+2y)^2]^2} \cdot 2(x+2y) = \frac{4(x+2y)}{[1+(x+2y)^2]^2}.$$

Як бачимо,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.[42]

Завдання 2. Перевірити, що функція $u = e^{\frac{x}{y}}$задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Знайдемо частинні похідні першого та другого порядку, які є в даному рівнянні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \cdot y - e^{\frac{x}{y}}}{y^2} = \frac{-xe^{\frac{x}{y}} - ye^{\frac{x}{y}}}{y^3} = -\frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{y^3}.$$

Підставляємо знайдені похідні в наше рівняння:

$$\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} + \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2} - y \cdot \frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{y^3} = 0 \text{або } \frac{y \cdot e^{\frac{x}{y}} + xe^{\frac{x}{y}}}{y^2} - \frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{y^2} = 0.$$

Отримаємо: $\frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{y^2} - \frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{y^2}$=0, а саме $0 = 0$.

Ми отримали $u = e^{\frac{x}{y}}$задовольняє дане рівняння.[42]

Завдання 3. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ від функцій, заданиї неявно:

А)$x^4y + x^3y^2 - y^5 - 5 = 0$.

$F(x,y) = x^4y + x^3y^2 - y^5 - 5$.

Знайдемо частинні похідні: $F'_x = 4x^4y + 3x^3y^2,\ F'_y = x^4 + 2x^3y - 5y^4$.

За формулою $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$ маємо: $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3y+3x^2y^2}{x^4+2x^3y-5y^4}$.

Б)$x^2 \ln y - y^2 \ln x = a$.

$F(x,y) = x^2 \ln y - y^2 \ln x - a$.

$$F'_x = 2x\ln y - \frac{y^2}{x} = \frac{2x^2\ln y - y^2}{x}, \qquad F'_y = \frac{x^2}{y} - 2y\ln x = \frac{x^2 - 2y^2\ln x}{y}.$$

За формулою $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$ маємо: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y\cdot(2x^2\ln y - y^2)}{x\cdot(x^2-2y^2\ln x)} = \frac{y\cdot(y^2-2x^2\ln y)}{x\cdot(x^2-2y^2\ln x)}$.

В)$xy + \ln y + \ln 2x = \sin xy$.

$F(x,y) = xy + \ln y + \ln 2x - \sin xy$.

Тоді $F'_x = y + \frac{1}{2x}\cdot 2 - \cos x\cdot y = y + \frac{1}{x} - y\cos xy, F'_y = x + \frac{1}{y} - \cos xy \cdot x$.

Отримаємо: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y+\frac{1}{x}-y\cos xy}{x+\frac{1}{y}-x\cos xy} = -\frac{(xy+1-xy\cos xy)\cdot y}{x\cdot(xy+1-xy\cos xy)} = -\frac{y}{x}$.[41]

Завдання 4. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$від неявно заданих функцій:

А)$2x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 5 = 0$.

$F(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 5$.

Обчислимо $F'_x = 4x - yz,\ F'_y = 2y - xz,\ F'_z = 2z - xy$.

Зауважимо, що у кожному випадку беручи похідну по одній змінній, дві другі вважаються сталими. За формулами $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$маємо:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{4x - yz}{2z - xy} = \frac{yz - 4x}{2z - xy}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y - xz}{2z - xy} = \frac{xz - 2y}{2z - xy}.$$

Б)$x + 2y - 3z^2 = e^{y-z}$.

$F(x,y,z) = x + 2y - 3z^2 - e^{y-z}$.

Обчислимо $F'_x = 1,\ F'_y = 2 - e^{y-z},\ F'_y = -6z - e^{y-z}\cdot(-1) = e^{y-z} - 6z$.

Тоді будемо мати:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{e^{y-z} - 6z} = \frac{1}{6x - e^{y-z}},$$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2-e^{y-z}}{e^{y-z}-6z} = \frac{2-e^{y-z}}{6z-e^{y-z}}$.[41]

Завдання 5. $z^3 - 4xz - y^2 = 4$. Знайти z'_xта z'_yу точці (1;-2;2).

$F(x,y,z) = z^3 - 4xz - y^2 - 4$.

Знайдемо $F'_x = -4z,\ F'_y = -2y,\ F'_z = 3z^2 - 4x$.

$z'_x = \dfrac{4z}{3z^2 - 4x}$, тоді$z'_x(1;-2;2) = \dfrac{4 \cdot 2}{3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 1} = 1.$

$z'_y = \frac{2y}{3z^2-4x}$, тоді $z'_y(1;-2;2) = \frac{2\cdot(-2)}{3\cdot2^2-4\cdot1} = -\frac{1}{2}$.[40]

Завдання 6. Знайти похідні неявно заданих функцій $y(x)$.

А) $3^x + 3^y = 3^{x-y}$

Розв’язок: Продиференціюємо праву і ліву частини

$$3^x \times \ln 3 + 3^y \times y' = 3^{x+y} \ln 3 \times (1 + y').$$

Отриманий вираз поділимо на спільний множник $ln(3)$та згрупуємододанки, що містять похідну y'(x)і перенесемо їх в одну сторону за знак рівності. В результаті отримаємо:

$$3^x - 3^{x+y} = (3^{x+y} - 3^y) \times y'$$

Поділивши на множник при похідній $y'(x)$ отримаємо її значення:

$$y' = \frac{3^x - 3^{x+y}}{3^{x+y} - 3^y}$$

Для спрощення винесемо із чисельника та знаменника спільні множники 3^xта 3^y відповідно. В результаті отримаємо:

$$y' = \frac{3^x(1 - 3^y)}{3^y(3^x - 1)} = \frac{1 - 3^y}{3^x - 1} \times 3^x \times 3^{-y} = \frac{1 - 3^y}{3^x - 1} \times 3^{x-y}.$$

Б)$y = 2x + \arccos(3y)$

Розв’язок: Проведемо диференціювання виразу. Перший доданок дасть 2, похідну від arccos знаходимо за правилом складеної фунції:

$$y' = 2 - \frac{1}{\sqrt{1 - 9y^2}} 3y'$$

Виділяємо доданки, що містять похідну *y'(x)*

$$y'\left(1 + \frac{3}{\sqrt{1 - 9y^2}}\right) = 2 \rightarrow y'\left(\frac{\sqrt{1 - 9y^2} + 3}{\sqrt{1 - 9y^2}}\right) = 2$$

Поділимо на множник при похідній та відшукаємо її значення

$$y' = \frac{2\sqrt{1 - 9y^2}}{\sqrt{1 - 9y^2} + 3}$$

В)$cos^2 \frac{\sqrt{x}}{y} \times y = 5y$

Розв’язок: Обчислимо похідну правої і лівої частини, від косинуса знаходимо, як від складеної функції:

$$2cos\frac{\sqrt{x}}{y} \times \left(-sin\frac{\sqrt{x}}{y}\right) \times \left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)' = 5y'$$

Похідна від частки функцій рівна

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}y - \sqrt{x}y'}{y^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}y} - \frac{\sqrt{x}}{y^2}y'$$

Перші два множники рівні синусу подвійного кута. Тому похідні можемо згрупувати у вигляді

$$-sin\frac{2\sqrt{x}}{y} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}y} - \frac{\sqrt{x}}{y^2}y'\right) = 5y'$$

Домножимо праву та ліву частини на множник $y^2\sqrt{x}$ щоб позбутися знаменників та згрупуємо доданки при похідній $y'(x)$

$$-\sin\frac{2\sqrt{x}}{y} \cdot \left(\frac{y}{2} - xy'\right) = 5y^2\sqrt{x}\,y'$$

$$\left(xsin\frac{2\sqrt{x}}{y} - 5y^2\sqrt{x}\right) \times y' = \frac{y}{2}sin\frac{2\sqrt{x}}{y}$$

З останньої залежності знаходимо значення потрібної похідної

$$y' = \frac{ysin\frac{2\sqrt{x}}{y}}{2\left(xsin\frac{2\sqrt{x}}{y} - 5y^2\sqrt{x}\right)}.$$

Г)$x - y = \ln\left(y^2 - \sqrt{x}\right)$

Розв’язок: Диференціюємо неявно задану функцію по змінній

$$1 - y' = \frac{1}{y^2 - \sqrt{x}} \times \left(y^2 - \sqrt{x}\right) = \frac{1}{y^2 - \sqrt{x}}\left(2y \times y' - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

Перегрупуємо доданки, що містять y'

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{x}\left(y^2 - \sqrt{x}\right)} = \left(\frac{2y}{y^2 - \sqrt{x}} + 1\right)y'$$

Зводимо вирази до спільного знаменника

$$\frac{2\sqrt{x}\left(y^2-\sqrt{x}\right)+1}{2\sqrt{x}\left(y^2-\sqrt{x}\right)}=\frac{2y^2\sqrt{x}-2x+1}{2\sqrt{x}\left(y^2-\sqrt{x}\right)}$$

та підставляємо їх на свої місця

$$\frac{2y}{y^2-\sqrt{x}}+1=\frac{2y+y^2-\sqrt{x}}{y^2-\sqrt{x}}$$

$$\frac{2y^2\sqrt{x}-2x+1}{2\sqrt{x}\left(y^2-\sqrt{x}\right)}=\frac{y^2+2y-\sqrt{x}}{y^2-\sqrt{x}}y'$$

Звідси виражаємо похідну функції

$y'=\frac{2y^2\sqrt{x}-2x+1}{2\sqrt{x}\left(y^2-\sqrt{x}\right)}\times\frac{y^2-\sqrt{x}}{y^2+2y-\sqrt{x}}=\frac{2y^2\sqrt{x}-2x+1}{2\sqrt{x}\left(y^2+2y-\sqrt{x}\right)}$[19]

Завдання 7. Продиференціювати неявно задану функцію

$xy^3-4xy+x^2+2=0$

Так як y є функцією від x, то будемо розглядати y^3 як складену функцію від x. Отже,

$(y^3)'=3y^2y'$

Продиференціюємо по x обидві частини рівності. Одержимо:

$xy^3-4xy+x^2+2=0$

$x'y^3+(y^3)'x-(4x)'y-(4x)y'+2x=0$

$y^3+3y^2y'x-4y-4xy'+2x=0$

Виразимо y′

$3y^2y'x-4xy'=-y^3+4y-2x$

$xy'(3y^2-4)=-y^3+4y-2x$

$$y'=\frac{-y^3+4y-2x}{x(3y^2-4)}$$

$y'=\frac{4y-y^3-2x}{3xy^2-4x}$[15]

Завдання 8.Знайдітьпохідну y′(x) , якщо$\sin(x+y)=\frac{y}{x}$

Функція задана неявно. Продиференціюємо рівність, застосовуючи теорему про диференціювання складеної функції:

$\cos(x+y) \times (1+y') = \frac{y'x-y}{x^2}$

$x^2\cos(x+y) + x^2y'\cos(x+y) = y'x - y$

$y'(x^2\cos(x+y) - x) = -y - x^2\cos(x+y)$

$y' = \frac{x^2\cos(x+y)+y}{x-x^2\cos(x+y)}$[16]

Завдання 9. Знайти значення $\frac{dy}{dx}$ в точці $\mathrm{M}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ для функції заданої неявно

$x^2 + xy + y^2 = 7$, $M(-1,-2)$

Розв'язання: Диференціюємо обидві частини рівності і виражаємо $\mathrm{y}' = \frac{dy}{dx}$

$(x^2 + xy + y^2)' = 7'$

$2x + y + xy' + 2yy' = 0$

$y'(x+2y) = -2x - y$

$y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$

В точці M(-1,-2) отримуємо:

$\frac{dy}{dx}(-1,-2) = -\frac{-2-2}{-1-4} = -\frac{4}{5}$ [16]

Завдання 10. Записати диференціал d^2uфункції, заданої неявно $F(x-u, u-3y) = 0$.

Розв'язання :Послідовно диференціюючи функцію, отримаємо перший диференціал.

$F_1' \cdot (dx - du) + F_2' \cdot (du - 3dy) = 0$ (1)

Та другий

$F_{11}'' \cdot (dx-du)^2 + F_{22}'' \cdot (du-3dy)^2 + 2F_{12}'' \cdot (dx-du)(du-3dy) - F_1' \cdot d^2u + F_2' \cdot d^2u = 0$ **(2)**

На цьому обчислення не закінчуються, всюди де можна слід вписати реальне значення du

Тому із залежності (1) знайдемо du:

$$du = \frac{F_1' \cdot dx - 3F_2' \cdot dy}{F_1' - F_2'} \ (3)$$

Використовуючи формулу (3), обчислимо різниці $dx - du$ і$du - 3dy$:

$$dx - du = \frac{F_2' \cdot (dx + 3dy)}{F_2' - F_1'};$$

$$du - 3dy = \frac{F_1' \cdot (dx - 3dy)}{F_1' - F_2'}.$$

Далі підставимо співвідношення (4) в рівняння (2) та знайдемо диференціал другого порядку d^2u;

$$\frac{F_{11}'' \cdot (F_2')^2}{(F_2' - F_1')^2}(dx + 3dy)^2 + \frac{F_{22}'' \cdot (F_1')^2}{(F_1' - F_2')^2}(dx - 3dy)^2 - \frac{2F_{12}'' \cdot F_1' \cdot F_2'}{(F_1' - F_2')^2}(dx^2 - 9dy^2) - (F_1' - F_2') \cdot d^2u = 0 =>$$

$$d^2u = \frac{F_{11}'' \cdot (F_2')^2}{(F_1' - F_2')^3}(dx + 3dy)^2 + \frac{F_{22}'' \cdot (F_2')^2}{(F_1' - F_2')^3}(dx - 3dy)^2 - \frac{2F_{12}'' \cdot F_1' \cdot F_2'}{(F_1' - F_2')^3}(dx^2 - 9dy^2)$$[41].

Висновки до розділу 2

Розглянуто та вивчено велику кількість науково-методичної літератури з даної теми. У роботі подані основні поняття похідної, проведено аналіз підручників для поглибленого вивчення математики, з’ясовано психолого-педагогічні особливості учнів різних профілів, що надалі дозволило підготувати факультативний курс, а також розглянуто особливості вивчення теми «Похідна функції» у класах різного профілю.

Факультативний курс розроблявся з дотриманням усіх особливостей навчання математики учнів профільної школи. Була доведена ефективність розробленого курсу, шляхом включення її у навчальний процес школярів. За період проходження факультативного курсу учні змогли значно розширити та покращити свої знання з теми «Похідна функції».

ВИСНОВКИ

Тема "Похідна функції" є однією із ключових тем математичного аналізу. Ця тема має широке застосування у багатьох галузях науки. У загальноосвітніх школах дається лише мінімум (основні поняття та формули). Але деяким учням цих знань недостатньо, тому що їх особистісно орієнтовані цілі для реалізації себе у майбутній професії вимагають більш глибоких знань. Деяким навпаки, досить шкільного мінімуму. У зв'язку з цим, а саме для задоволення потреб кожного з учнів було створено профільне навчання. Завдяки профільному поділу діти зі шкільною лави можуть повноцінно підготуватися до вступу без допомоги репетиторів, адже у школах їм даються всі необхідні знання.

У ході роботи розглянуто та вивчено велику кількість науково-методичної літератури з даної теми. Завдяки цьому було досягнуто всі поставлені завдання. У роботі подані основні поняття похідної, проведено аналіз підручників для поглибленого вивчення математики, з'ясовано психолого-педагогічні особливості учнів різних профілів, що надалі дозволило підготувати факультативний курс, а також розглянуто особливості вивчення теми «Похідна функції» у класах різного профілю.

Факультативний курс розроблявся з дотриманням усіх особливостей навчання математики учнів профільної школи. Була доведена ефективність розробленого курсу, шляхом включення її у навчальний процес школярів. За період проходження факультативного курсу учні змогли значно розширити та покращити свої знання з теми «Похідна функції».

Виходячи з усього вище сказаного, ми можемо зробити висновок, що мета магістерської роботи, була досягнута.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра и начала анализа : Учеб. для 11 кл. общеобразоват. учреждений / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М. : Просвещение, 2018. – 448 с.

2. Алгебра и начала анализа.10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В.Ткачев и др. – 3-е изд. - М. : Просвещение, 2016. – 463 с.

3. Алгебра и начала математического анализа : учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / [А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.] ; под ред. А. Н. Колмогорова. – 17-е изд. – М. : Просвещение, 2016. – 384 с.

4. Бевз В.Г. Практикум з історії математики: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. – К.:НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. –312с.

5. В. Г. Болтянский, Что такое дифференцирование?, «Популярные лекции по математике», Выпуск 17, Гостехиздат 1955г., 64 стр.

6. Вавилов В.В., Задачи отборочных математических олимпиад. – М.: МГУ, 1992. – 61 с.

7. Виленкин Н. Я. Алгебра и начала математического анализа. 10класс. Учебник для учащихся общеобразоват. организаций (углубленный уровень) / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – 18-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2014. – 352 с.

8. Виноградов И.М. Элементы высшей математики / И.М. Виноградов. – М.: Наука, 1999. - 507 с.

9. Вища математика: конспект лекцій у 3 частинах / Укладач О.І. Оглобліна. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – Ч.2. – 111 с.

10. Вища математика: Підручник / ДомбровськийВ.А., Крижанів-ськийІ.М., МацьківР.С., МиговичФ.М., НемішВ.М., Окре-пкийБ.С., ХомаГ.П.,

ШелестовськаМ.Я.; заредакцієюШин-карикаМ.І. –Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003 - 480с. - ISBN 966-7946-15-0

11. Відео-урок «Походження поняття похідної» [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://videouroki.net/razrabotki/proizvodnaya-istoricheskaya-spravka.html

12. Воєвода А.Л. Зацікавити математикою : (методичні матеріали для підвищення інтересу до математики) : Методичний посібник / А.Л. Воєвода. – Вінниця: ФОП Легкун В.М., 2012. –176 с.

13. Герасимчук, В.С. Вища математика. Повний курс вищої математики у прикладах і задачах [Текст] / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – Київ : Книги України ЛТД, 2009. – Ч. 1–3.

14. Далингер В. А. Элективные курсы в системе профильного обучения [Текст] / В.А. Далингер, А.Н. Зубков. - Вестник Омского государственного университета, 2006. - №6. – 26 – 31 с

15. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] /П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва, 2000. – Ч. І, ІІ

16. Диференціальне числення: Методичні рекомендації для виконання модульної роботи № 4 / Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. імені акад. В. Лазаряна; Уклад.: І. В. Клименко, В. В. Кравець, Н. Г. Наріус, С. П. Русу; За заг.ред. д-ра техн. наук, проф. В. В. Кравця. – Д., 2008. – 53 с.

17. Диференціальні рівняння: Підручник / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. – 600с.

18. Ильин В. А. Математический анализ. Начальный курс / В. А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. Под ред. А. Н. Тихонова. – 2-е изд., - перераб. – М.: Изд-во МГУ, 2015. - 662 с.

19. І.Ф.Шаригін, В.І.Голубєв. Факультативний курс з математики, Москва, 1991. – 253с.

20. Історія виникнення похідної [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://pohidnamat.blogspot.com/p/blog-page_12.html

21. Корнєєв В. П. Основи розвитку пізнавальних інтересів // Рідна школа, 1993. – № 5. – С. 36–40.

22. Мерзляк А. Г. Алгебра : підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики: у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2011. – Ч. 1. – 256 с.: іл.

23. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу :початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу., проф. рівень: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2018. – 512 с.: іл.

24. Мерзляк А. Г. Алгебра: підручник для 11 класу для профільного та академічного рівня вивчення математики / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2011. – 431 с.: іл.

25. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 –11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый уровень) / А. Г. Мордкович. – 14-е изд., стер.- М.: Мнемозина, 2016. – 400 с.

26. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. [Текст]: в 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов – 4-е изд., доп. – М. : Мнемозина, 2007. – 424 с.

27. Навчальні програми МОН (математика) [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: 93 http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/navchalni-programy.html.

28. Наукові записки. Серія. Педагогіка.: - №6. – 2002

29. Нелін Є. П. Алгебра. 11 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень, профільний рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Х.: Гімназія, 2011. – 448 с.: іл

30. Перелік навчальних програм, підручників та навчальнометодичних посібників, рекомендованих Міністерством освіти і науки України для використання в основній і старшій школі загальноосвітніх навчальних

закладів з навчанням українською мовою [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://imzo.gov.ua/pidruchniki/pereliki/.

31. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов [Текст] / Н. С. Пискунов. – Москва. – Т. 1, 1970. – Т. 2, 1985.

32. Побережный А.Н. Краткий справочник по математике (Курс средней школы) / А. Н. Побережный, - Изд.: Синтез-88, Одесса. - 1990. - 16 с

33. Похідна Історія виникнення похідної [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D1%85%D1%96%D0%B4%D0%BD%D0%B0

34. Похідна та її застосування [Текст]: навчальний посібник /В. М. Кузнецов, Т. М. Бусарова, Т. А. Агошкова, І. В. Клименко, Н. В. Міхєєва; Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Дніпро, 2017. – 104 с.

35. Похідна функції. Властивості похідних. [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://allref.com.ua/uk/skachaty/pohidna_funkciyi

36. Сайт вчителя математики [Електронний ресурс] : Мотивація за допомогою історії математики. – Режим доступу : http://blystsivita.at.ua /index/motivacija_za_dopomogoju_istoriji_matematiki /0-23.

37. Саркисян Е. А. Внекласные и факультативные занятия в современной общеобразовательной школе. – Ереван: ЛУНС, 1987. – 196 с.

38. Сборник задач по математике для вузов [Текст] / под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – Москва, 1986, 1987. – Ч. I–IV.

39. Урок-проект «Застосування похідної» [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://navigator.rv.ua/wp-content/uploads/2020/02/zastosuvannya-pohidnoyi-peretvoreno.pdf

40. Факультативні курси з математики [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://lib.mdpu.org.ua/e-book/ernestbook/temas/9_2.htm

41. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.:Наука. – Т. 1.

42. Юшкевич А. П. Історія математики в трьох томах / А. П. Юшкевич. М.: Наука. – том 2. – 1970. – 301 с.

ДОДАТОК А

Заняття №3.

Тема: Похідна складної функції.

Мета:

- **навчальна:** розглянути правило знаходження похідної складної функції;
- **розвивальна:** розширити кругозір учнів;
- **виховна:** виховувати увагу та вміння аналізувати отримане рішення, брати участь у діалозі з товаришами, учителем.

Тип заняття: комбінований.

Вид заняття: практикум.

Матеріал до заняття.

На попередніх заняттях ми розглянули похідні раціональних функцій, зокрема, многочленів. Однак завдання обчислення похідної функції $f(x)=(2x+3)^{100}$, хоч і зводиться до знаходження похідної многочлена, потрібно дуже великий обсяг роботи: треба уявити $(2x+3)^{100}$ у вигляді многочлена і продиференціювати 101 доданок отриманої суми. Можна помітно спростити розв'язання цієї та інших завдань, довівши правило обчислення похідної складної функції.

Якщо функція f має похідну в точці x_0, а функція g має похідну в точці $y_0=f(x_0)$, то складена функція $h(x)=g(f(x))$ також має похідно в точці x_0, причому $h'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$.

Для доведення формули потрібно, при $\Delta x\neq 0$ розглянути дріб $\frac{\Delta h}{\Delta x}$ і встановити, що $\frac{\Delta h}{\Delta x}\to g'(y_0)\cdot f'(x_0)$ при $\Delta x\to 0$.

Введемо позначення:

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \Delta f$

Тоді, $\Delta h = h(x_0+\Delta x) - h(x_0) = g(f(x_0+\Delta x)) - g(f(x_0)) = g(y_0+\Delta y) - g(y_0) = \Delta g$.

$\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, так як f диференційована в точці x_0.

Далі доведення проведемо тільки для таких функцій f, у яких $\Delta f \neq 0$ в деякому околі точки x_0. Тоді $\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta h}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta g}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta y} \to g'(y_0) \cdot f'(x_0)$ при $\Delta x \to 0$, так як $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$ при $\Delta x \to 0$, а $\frac{\Delta g}{\Delta y} \to g'(y_0)$ при $\Delta y \to 0$, що виконано при $\Delta x \to 0$.

Задача 1. Знайти похідну функції $f(x) = \sqrt{\cos x}$.

Розв'язання.

За правилом диференціювання складеної функції отримуємо:

$$f'(x) = \frac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}} = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

Задача 2. Знайти похідну показникової функції $y = a^x$.

Розв'язання.

Представимо показникову функцію в наступному вигляді:

$$y = e^{x \ln a}.$$

Доведемо спочатку, що $(e^x)' = e^x$. Знайдемо приріст функції $y = e^x$:

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1).$$

Тепер знайдемо похідну цієї функції, користуючись означенням:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x$$

Тепер за правилом диференціювання складеної функції маємо:

$$y' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Задача 3. Знайти похідну логарифмічної функції $y = \log_a x$.

Розв'язання.

Спочатку покажемо, що $\ln' x = \frac{1}{x}$. За основною логарифмічною тотожністю $x = e^{\ln x}$, тобто в даній рівності справа і зліва стоїть одна й та ж сама функція. Тому похідні x та $e^{\ln x}$ рівні, тобто $x' = (e^{\ln x})'$.

Відомо, що $x'=1$. Похідну правої частини обчислюємо за правилом диференціювання складеної функції: $(e^{\ln x})'=e^{\ln x}\ln' x = x\ln' x$. Підставивши знайдені похідні в рівність $x'=(e^{\ln x})'$, отримаємо $\ln' x = \frac{1}{x}$.

Тепер користуючись формулою переходу до другої основи, отримаємо: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Тепер знайдемо похідну даної функції: $\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a}$.

Задача 4. Знайти похідну функції $y=\left(\frac{1}{4}x-7\right)^8-(1-2x)^4$.

Розв'язання.

За правилом диференціювання складеної функції отримуємо:

$$y'=8\left(\frac{1}{4}x-7\right)^7\left(\frac{1}{4}x-7\right)'-4(1-2x)^3(1-2x)'=2\left(\frac{1}{4}x-7\right)^7+8(1-2x)^3$$

Завдання для самостійної роботи: знайти похідні функцій:

А) $y=\sqrt{\cos(x^2)}$;

Б) $y=2^{\sin\cos x}$;

В) $y=tg\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)$;

Г) $y=\ln\sin(2x+3)$;

Д) $y=\cos^3(2x\sin^2 4x)$.

Заняття №4.

Тема: Дотична до графіка функції.

Мета:

- **навчальна:** розглянути поняття дотичної та її рівняння;;
- **розвивальна:** розширити знання учнів з даної теми;
- **виховна:** формувати вміння аналізувати.

Тип заняття: комбінований.

Вид заняття: практикум.

Матеріал до заняття.