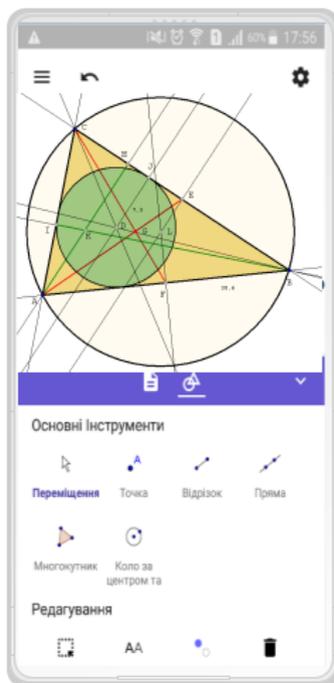


**Т. Г. Крамаренко, В. В. Корольський,
С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк**

ІННОВАЦІЙНІ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

**За редакцією академіка АПН України,
доктора педагогічних наук, професора
М.І. Жалдака**

Видання друге, перероблене і доповнене



Кривий Піг, 2019

[Т. Г. Крамаренко](#), [В. В. Корольський](#),
[С. О. Семеріков](#), [С. В. Шокалюк](#)

ІННОВАЦІЙНІ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Науковий редактор
дійсний член АПН України

[М.І. Жалдак](#)

Видання друге, перероблене і доповнене

Кривий Ріг
2019

УДК 378.016:51]:004(075.8)

I-66

1-ше видання рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (№1.4/18–Г–2801 від 23.12.08)

2-ге видання схвалено рішенням Вченої ради фізико-математичного факультету Криворізького державного педагогічного університету (протокол №3 від -- листопада 2019 року)

Рецензенти: доктор педагогічних наук, професор **Ю. В. Горошко**,
доктор педагогічних наук, доцент **І. В. Лов'янова**,
доктор фізико-математичних наук, професор **В. М. Соловійов**.

Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навч. посіб. / Т. Г. Крамаренко, В. В. Корольський, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк ; наук. ред. М. І. Жалдак. – Вид. 2, перероб. і доп. – Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун-т, 2019. – 444 с. – Режим доступу: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/jspui/handle/0564/>.

У посібнику подаються методичні рекомендації щодо використання у навчанні математики інформаційно-комунікаційних засобів, дібрано зміст навчального матеріалу, комп'ютерно-орієнтовані методи і форми навчання. Розглядаються актуальні питання застосування електронних, дистанційних та мобільних технологій навчання математики.

Посібник призначений для студентів закладів вищої освіти спеціальності 014 Середня освіта (Математика), додаткова спеціальність «Інформатика», інститутів післядипломної освіти педагогічних кадрів, вчителів математики загальноосвітніх шкіл, викладачів професійних навчально-виховних закладів, методистів та викладачів педагогічних закладів вищої освіти. Матеріали окремих розділів посібника адресовано широкому колу педагогічної громадськості, що цікавиться передовим досвідом комп'ютеризованого навчання.

ISBN 978-966-2957-00-6

© М.І. Жалдак,
Т. Г. Крамаренко, В.В. Корольський, С.О. Семеріков, С.В. Шокалюк, 2019

ЗМІСТ

ЗМІСТ	3
ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	6
ПЕРЕДМОВА	7
РОЗДІЛ 1. КОМП'ЮТЕРНО-ОРІЄНТОВАНІ ТЕХНОЛОГІЇ	
НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ	11
1.1. Комп'ютерно-орієнтована методична система навчання	11
1.1.1. Структура методичної системи	11
1.1.2. Цілі навчання	14
1.1.3. Зміст навчання	16
1.1.4. Засоби навчання	17
1.1.5. Методи навчання	22
1.1.6. Форми організації навчання	24
1.2. ІКТ і компетентнісний підхід у навчанні математики	28
1.2.1. Ключова та предметні математичні компетентності	28
1.2.2. Розвиток особистості у процесі навчання математики з використанням ІКТ	36
1.3. Програмно-методичний комплекс «Математика, 5-6 клас»	41
1.4. Програмні засоби навчання алгебри і початків аналізу	50
1.4.1. Бібліотека електронних наочностей «Алгебра, 7-9 клас» ...	50
1.4.2. Педагогічний програмний засіб «Алгебра, 11 клас»	69
1.4.3. Педагогічний програмний засіб GRAN1	77
1.5. Комп'ютерно-орієнтовані засоби навчання геометрії	87
1.5.1. Бібліотека електронних наочностей «Геометрія, 7-9 клас»	87
1.5.2. ПЗ «Геометрія, 11 клас»	94
1.5.3. Динамічна геометрія GRAN-2D і DG	97
1.5.4. GRAN-3D	114
1.6. Система динамічної математики GeoGebra	121
1.6.1. Модуль Геометрія. Основні інструменти, приклади побудов.	121
1.6.2. Модуль Графіки. Дослідження функцій, побудова графіків	130
1.6.3. Модуль 3D Геометрія GeoGebra	137
1.7. Мультимедійна дошка у навчанні математики	142
1.7.1. Методика використання мультимедійної дошки.	142
1.7.2. Розробка уроків з використанням програмного забезпечення InterWrite Workspace.	148
1.7.3. «Інтерактивні» мультимедійні вправи сервісу LearningApps.	154
1.8. Електронний методичний посібник «Евристико-дидактичні конструкції»	159
Висновки до першого розділу	162

РОЗДІЛ 2. ВИБРАНІ ПИТАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕТОДИКА ЇХ ОПРАЦЮВАННЯ НА ОСНОВІ ІКТН	163
2.1. Про виконання рисунків до стереометричних задач	163
2.2. Математичні відкриття за допомогою динамічної геометрії.....	173
2.3. Розв’язування задач на побудову	183
2.4. Вивчення властивостей геометричних перетворень	190
2.5. Про прикладну спрямованість навчального матеріалу	195
2.6. Дослідження властивостей функцій і побудова графіків.....	208
2.6.1. Змістова лінія функції у навчальних програмах з математики для закладів середньої освіти.	208
2.6.2. ІКТ у навчанні змістової лінії функції	211
2.7. Розвиток креативності особистості за допомогою ейдографіки	229
2.8. Розв’язування задач з параметрами графічними прийомами	234
2.9. Розв’язування задач теорії ймовірностей та математичної статистики.....	245
2.9.1. Стохастика з GRAN1.....	245
2.9.2. Стохастика з GeoGebra.	248
<i>Висновки до другого розділу</i>	257
<i>Література до розділів 1, 2</i>	258
РОЗДІЛ 3. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ЗАСАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ДИСТАНЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ НАВЧАННЯ	265
3.1. Основи технологій дистанційного навчання.....	265
3.1.1. Історія становлення дистанційного навчання.....	265
3.1.2. Тлумачення поняття «дистанційне навчання»	268
3.1.3. Характерні риси та принципи дистанційного навчання	272
3.1.4. Типи та моделі дистанційного навчання.....	274
3.2. Порівняльний аналіз технологічних платформ дистанційного навчання	277
3.3. Дистанційне навчання у загальноосвітніх закладах	291
3.3.1. Аналіз стану дистанційного навчання в школах Росії та України	291
3.3.2. Особливості навчання школярів за дистанційною формою	294
<i>Висновки до третього розділу</i>	297
РОЗДІЛ 4. МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕРЕЖНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ	298
4.1. Науково-дослідницьке програмне забезпечення математичного призначення	298
4.2. Мережні системи комп’ютерної математики (Web-СКМ)	303

4.3. Елементи методики навчання Web-СKM SAGE за технологіями дистанційного навчання.....	308
Висновки до четвертого розділу	321
Література до розділів 3, 4	321
РОЗДІЛ 5. ПЕРСПЕКТИВИ РОЗВИТКУ ТЕХНОЛОГІЙ: ВІД ЕЛЕКТРОННОГО НАВЧАННЯ ДО МОБІЛЬНОГО.....	326
Висновки до п'ятого розділу	348
Література до розділу 5	349
РОЗДІЛ 6. ПРОЄКТНІ ТЕХНОЛОГІЇ В НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ	351
6.1. Впровадження STEM-проектів як один із факторів посилення мотивації учіння математики	351
6.2. Методика розробки і впровадження навчальних проектів	365
6.2.1. Методичні особливості проведення тренінгу «Intel [®] Навчання для майбутнього»	365
6.2.2. Аналіз STEAM-проекту до теми шкільного курсу математики «Геометричні перетворення на площині. Рухи».....	368
6.3. Блог вчителя математики як продукт навчання методом проектів.	378
РОЗДІЛ 7. ПІДВИЩЕННЯ КВАЛІФІКАЦІЇ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ З ВИКОРИСТАННЯ ІКТН	384
7.1. Про підвищення кваліфікації педагогічних та науково-педагогічних працівників відповідно до Закону України «Про освіту».	384
7.2. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології як основа підвищення кваліфікації сучасного педагога.....	388
7.3. Програма тренінгу «ІКТН математики» і ресурси електронного навчального курсу.....	399
7.3.1. Вступ.....	399
7.3.2. Мета і основні завдання тренінгу:	401
7.3.3. Структура навчальної дисципліни, аналіз змістових модулів.....	402
7.3.4. Ресурси електронного навчального курсу «Інформаційно-комунікаційні технології навчання математики»	415
Література до розділів 6, 7	418
Список програмних засобів, настанов користувача	421
ДОДАТКИ	424
А. Підготовка SAGE до роботи	424
А.1. Інсталяція	424
А.2. Запуск сервера	424
А.3. З'єднання з сервером.....	425

А.4. Зупинка серверу.....	425
Б. SAGE: «швидка допомога».....	426
В. Фрагмент реалізації проєкту «Розв’язування задач апроксимації засобами Maple та Mathematica у середовищі SAGE»	429
Г. Розробка практичного заняття з елементарної математики	431
Д. Розробка уроку геометрії за темою «Піраміда. Розв’язування задач».	437

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

БН – бібліотека наочностей
 ГМТ – геометричне місце точок
 ДН – дистанційне навчання
 ДОК – динамічний опорний конспект
 ЕЗПН – електронні засоби навчального призначення
 ЕОМ – електронна обчислювальна машина
 ЕДК – евристико-дидактичні конструкції
 ІКТ – інформаційно-комунікаційні технології
 ІКЗН – інформаційно-комунікаційні засоби навчання
 ІКТН – інформаційно-комунікаційні технології навчання
 КОМСН – комп’ютерно-орієнтована методична система навчання
 КПК – курси підвищення кваліфікації
 МСН – методична система навчання
 НІТН – нові інформаційні технології навчання
 ПМ – програмний модуль
 ПМК – програмно-методичний комплекс
 ППЗ, ПЗ – педагогічний програмний засіб
 ПЗНП – програмні засоби навчального призначення
 СДН – системи дистанційного навчання
 СКМ – системи комп’ютерної математики
 ТМСН – традиційна методична система навчання
 SRS – системи зворотного зв’язку

ПЕРЕДМОВА

При використанні ІКТ у навчальному процесі мова повинна йти не лише про вивчення певного матеріалу, а, перш за все, про всебічний і гармонійний розвиток особистості учнів, їх творчих здібностей.

[М.І. Жалдак](#)

В основу інформатизації навчального процесу на сучасному етапі розвитку суспільства покладено створення і широке впровадження у повсякденну педагогічну практику комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання на принципах поступового і неантагоністичного, без руйнівних перебудов і реформ вбудовування ІКТ у діючі методичні системи, не заперечування і відкидання здобутків педагогічної науки минулого, а їх удосконалення і посилення, в тому числі і за рахунок використання досягнень у розвитку комп'ютерної техніки і засобів зв'язку. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики мають значний педагогічний потенціал, який потрібно використати для забезпечення найважливіших принципів розвиваючого навчання, профільної та рівневої диференціації.

Це спричинює зміни у змісті та організації праці вчителя, у вимогах до рівня його професійної компетентності. Принципово важливою є орієнтація освіти педагогічних кадрів на самоосвіту засобами ІКТ, на розвиток креативності педагога, науково-дослідницький пошук, здатність до адекватної діяльності в нових умовах.

Навчальний посібник може бути використаний при підготовці майбутніх учителів математики та інформатики при вивченні наступних навчальних дисциплін: елементарна математика, методика навчання математики, інформаційно-комунікаційні технології в навчанні математики, ІКТ в освіті, вибрані питання геометрії, зокрема задачі на побудову, частково при вивченні математичного аналізу, аналітичної геометрії, теорії ймовірностей та математичної статистики; при проведенні тренінгів за технологією «Intel Навчання для майбутнього» та при проходженні виробничої практики у закладах середньої освіти. А також для підвищення кваліфікації учителів математики та інформатики з питань використання ІКТН на відповідних курсах, тренінгах, з метою самоосвіти.

У розділі 1 пропонованого посібника здійснено огляд науково-методичної, психолого-педагогічної і навчальної літератури, в якій розкриваються основні погляди на структуру комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання математики у середній школі, розглянуто загальні засади використання ІКТ у навчальному процесі. У посібнику подано основні відомості про вітчизняні програмні засоби навчання, рекомендовані МОН України для використання в основній і старшій школі («Математика, 5-6 клас», «Алгебра, 7-9 клас», «[Алгебра, 11 клас](#)»,

бібліотеки електронних наочностей [«Геометрія, 7-9 клас»](#), [«Геометрія, 11 клас»](#), програмні засоби DG, [GRAN1](#), [GRAN-2D](#), [GRAN-3D](#)). Додано відомості про систему динамічної математики [GeoGebra](#) та ін., запропоновано добірки завдань для виконання за допомогою зазначених засобів. Значну увагу приділено у навчанні використанню мультимедійної дошки, розробці уроків з використанням відповідного програмного забезпечення.

Доцільно привернути увагу користувачів програмних методичних комплексів GRAN і DG до того, що ці засоби потрібно використовувати після інсталяції на комп'ютер. Під час ознайомлення з даним посібником за поданими в тексті посиланнями можна завантажувати на комп'ютер і переглядати відповідні файли, створені у середовищі зазначених засобів.

Якщо у тексті посібника наявне посилання на файл GeoGebra, то такі розробки також доступні користувачеві для опрацювання з мобільного телефону. До окремих розробок на сайт GeoGebra додані коментарі, пояснення у вигляді pdf-файлів, посилання на відео з Youtube тощо.

У розділі 2 розглянуто вибрані питання елементарної математики та методику їх опрацювання на основі ІКТН. Здійснено відповідний добір змісту комп'ютерно-орієнтованого курсу елементарної математики, доцільних методів, засобів, форм організації навчання, зроблено акцент на питаннях розвитку особистісних якостей людини у процесі навчання, створенні середовища, сприятливого для розвитку особистості, можливості здійснення творчого спілкування між учасниками навчального процесу. Для використання системи динамічної математики підготовлено добірки завдань з параметрами, задачі практичного змісту, зокрема на відшукання екстремуму функції, дослідницьких завдань для вивчення змістової лінії функції; добірки наочностей для уроків стереометрії, зокрема динамічні креслення перерізів многогранників площиною. Запропоновано низку планіметричних задач на побудову, дослідження і доведення, завдань для вивчення властивостей геометричних перетворень за допомогою програмних засобів динамічної геометрії, наведено приклади розробок уроків, комп'ютерно-орієнтованих навчальних проєктів з математики. Розглянуто добірки задач з теорії ймовірностей та математичної статистики та методику їх опрацювання з використанням програмних засобів GRAN1, GeoGebra, таблиці Google.

У розділі 3 висвітлено основи технологій дистанційного навчання: історія становлення дистанційного навчання, характерні риси дистанційного навчання, типи та моделі дистанційного навчання. Виконано порівняльний аналіз платформ дистанційного навчання математики, сформульовано вимоги до інтеграції технологій дистанційного навчання у традиційне класно-урочне.

Розділ 4 присвячено інноваційним засобам мережного навчання математики. Розглянуто структуру Web-середовища для учнівських алгеб-

раїчних та геометричних досліджень, наведені приклади його застосування для розв'язування задач алгебри (6–9 класи), початків аналізу (10–12 класи), планіметрії та стереометрії, підготовки ілюстративного матеріалу та презентації його у мережі Інтернет.

Розділ 5 посібника присвячено перспективам застосування мобільних технологій в навчанні математики. Визначені класи пристроїв, що можуть застосовуватися в процесі навчання, способи педагогічної взаємодії, нові види навчальної активності, що виникають при переході від традиційних ІКТ до мобільних.

У розділі 6 приділено увагу проблемам запровадження проектних технологій навчання, зокрема STEM-освіті. У цьому розділі подано матеріали щодо використання систем динамічної математики при розробці STEM-проектів, особливостей проведення тренінгів за технологією «Intel Навчання для майбутнього».

Розділ 7 посібника присвячено проблемам підвищення кваліфікації учителів. Зокрема, запровадженню авторських курсів підвищення кваліфікації учителів математики з питань використання ІКТ у навчанні математики.

Друге видання навчального посібника оновлено і доповнено у частині комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання відомостями про мобільні технології навчання, комбіноване навчання.

У розділі 1 розширено блок засобів навчання додаванням відомостей про використання мультимедійної дошки, [хмарного сервісу LearningApps](#), системи динамічної математики [GeoGebra](#), нових форм навчання.

Реалізована назріла потреба оновлення змісту у зв'язку з прийняттям законів про вищу та середню освіту, поглибленням профілізації середньої школи та компетентнісного підходу у навчанні. Додано матеріали, у яких висвітлено проблеми підготовки учителя математики для набуття учнями ключових та предметних компетентностей, зокрема математичних. Актуальна проблема розвитку особистості у процесі навчання математики з використанням ІКТ. Набуття учасниками навчального процесу математичної компетентності безпосередньо пов'язане з розвитком у них організаційно-діяльнісних, пізнавальних та творчих якостей.

Значного поширення набула система динамічної математики [GeoGebra](#), яка постійно розвивається зусиллями світової спільноти програмістів, науковців та методистів. Система має потужні можливості для розв'язування математичних задач, засоби зберігання матеріалів, обміну ними та досвідом використання. Наразі розроблені і удосконалюються потужні додатки [GeoGebra](#) для мобільних телефонів: [Геометрія](#), [3D Графіка](#), [Графічний калькулятор](#), [Калькулятор ймовірностей](#).

Дедалі ширше використовуються у навчанні мультимедійна дошка, інтерактивні панелі. Тому постає проблема опанування учителями математики методикою їх використання.

Значного оновлення набув **розділ 2**, який стосується вибраних питань елементарної математики і методики їх опрацювання на основі ІКТН. Додано низку завдань, які можуть бути розв'язані з використанням системи динамічної математики GeoGebra.

В окремих підрозділах виокремлено відомості щодо розв'язування задач теорії ймовірностей та математичної статистики. Зокрема до відомостей про застосування програмного засобу GRAN1 додано матеріали, які описують можливості використання до задач стохастичної системи динамічної математики GeoGebra.

У розділі 6, який стосується проектних технологій в навчанні математики, значну увагу приділено упровадженню STEM-проектів як одного із факторів посилення мотивації учіння математики. Залишається актуальним проведення тренінгів «Intel® Навчання для майбутнього», де учителі опановують поряд з інноваційними педагогічними технологіями також мобільними технологіями та хмарними сервісами, використанням Веб 2.0. Проаналізовано приклади розробки і упровадження STEM і STEAM-проектів у навчанні елементарної математики. Зокрема при вивченні теми «Геометричні перетворення на площині. Рухи».

У зв'язку з прийняттям Закону України «Про освіту» значного розширення набули альтернативи для підвищення кваліфікації учителів математики, зокрема з використання ІКТН.

Розділ 7 посібника доповнено програмою тренінгу «ІКТ у навчанні елементарної математики» і ресурсами відповідного електронного навчального курсу, розробленого на платформі MOODLE.

Внесок авторів у створення та оновлення даного навчального посібника:

- перший, другий, шостий та сьомий розділи (крім п. 7. 2) посібника, підготовлені **Т. Г. Крамаренко** (kramarenko.tetyana@kdpu.edu.ua),
- третій та четвертий – **С. В. Шокалюк** (shokalyuk15@gmail.com),
- п'ятий розділ – **С. О. Семеріковим** (cc@optima.com.ua),
- п. 7.2 написаний **В. В. Корольським** (kafedra_matem@ukr.net),
- науковий редактор посібника академік АПН України, д. пед. н., професор **М. І. Жалдак** (<http://zhaldak.npu.edu.ua/index.php/prohramnyi-zasib-gran1>).

РОЗДІЛ 1. КОМП'ЮТЕРНО-ОРІЄНТОВАНІ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

1.1. Комп'ютерно-орієнтована методична система навчання

Розгляд комплексу питань, пов'язаних із використанням сучасних ІКТ у навчальному процесі, дидактичні та психологічні аспекти застосування ІКТН, проблеми формування інформаційної культури як системної особистісної якості учня і вчителя знайшли відображення у працях М.І. Жалдака [19-29], Н.В. Морзе [46-47], С.А. Ракова [50], О.В. Співаковського [60], Є.М. Смирнової-Трибульської [58-59], Ю.В. Триуса [63], Є.Ф. Вінниченка [14-16], Ю.В. Горошка [19], І.В. Лупан [32], С.О. Семерікова [55], О.А. Смалько [57] та ін. Результати дослідження цих авторів переконливо свідчать, що впровадження ІКТ у навчання математики створює передумови поглиблення змісту математичної освіти, сприяє інтенсифікації процесу навчання, розвиває особистість, стимулюючи пізнавальну активність, сприяє підготовці спеціалістів, здатних працювати в умовах інформаційного суспільства та ефективно використовувати математичні знання на практиці. Впровадження ІКТН сприяє підвищенню практичної спрямованості навчання математики, набуттю учнями і студентами життєво необхідних навичок, збагачує їх досвідом експериментальної та дослідницької роботи. Тому якщо раніше основною функцією математичної освіти була власне математична освіта, то на сучасному етапі на перше місце виходить інша не менш важлива функція – освіта за допомогою математики.

1.1.1. Структура методичної системи

Сучасні *інформаційні технології* – це сукупності методів, засобів і прийомів, що використовуються для забезпечення ефективної діяльності людей в різноманітних виробничих і невиробничих процесах. *Інформаційно-комунікаційні технології навчання*, включаючи комп'ютер як засіб управління навчально-пізнавальною діяльністю, є сукупністю комп'ютерно-орієнтованих методів, засобів та організаційних форм навчання. Поряд з терміном *«інформаційно-комунікаційні технології навчання»* використовується термін *«комп'ютерно-орієнтовані технології навчання»* [63].

Структура МСН визначається трьома основними питаннями: «навіщо навчати?» (цілі), «чого навчати?» (зміст) і «як навчати?» (методи, засоби, форми навчання). Згідно з системним підходом на рівні методики навчання за А.М. Пишкало, всі компоненти навчального процесу – *цілі, зміст, методи і прийоми, засоби, організаційні форми навчання* – утворюють єдине ціле із визначеними внутрішніми зв'язками. Сукупність компонентів МСН, що відповідають на питання «як навчати?», деякі науковці ([63], [106]) розглядають як певну підсистему – *технології навчання* у вузькому смислі. Структуру з підсистемою «технологія навчання» можна подати як триєдине ціле, що містить *цільовий, змістовий, технологічний* компоненти МСН. Визначальними є

цільовий та змістовий компоненти.

На думку Н.В. Морзе, модель МСН, враховуючи темпи розвитку засобів інформатизації, слід доповнити включенням очікуваних результатів навчання; технології добору змісту, методів, форм і засобів навчання; технології встановлення зв'язків між елементами методичної системи (рис. 1.1).

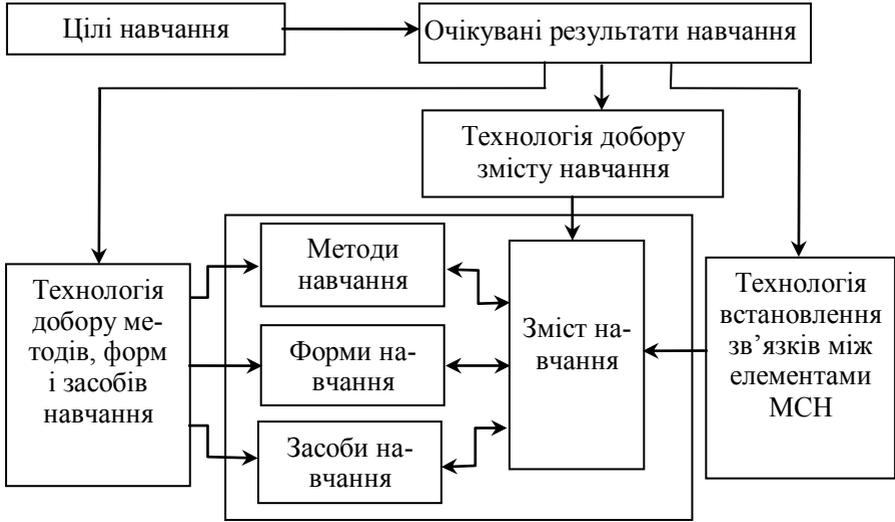


Рис. 1.1. Модель методичної системи навчання за Н.В. Морзе

Під комп'ютерно-орієнтованою МСН за Ю.В. Триусом [63, 229] розумітимемо МСН, яка забезпечує цілеспрямований процес здобування знань, набуття умінь і навичок, засвоєння способів пізнавальної діяльності суб'єктом навчання і розвиток його творчих здібностей на основі широкого використання ІКТ (рис. 1.2).



Рис. 1.2. Структура МСН на основі ІКТ за Ю.В. Триусом

Щоб застосування інформаційно-комунікаційних технологій гарантувало досягнення зазначених цілей, необхідний відповідний добір змісту, методів, форм організації навчання; диференціація та індивідуалізація навчального процесу, підвищення внутрішньої мотивації того, хто навчається, створення середовища, сприятливого для розвитку особистості.

Як зазначає М.І. Жалдак [18], в основу інформатизації навчального процесу слід покласти створення і широке впровадження у повсякденну педагогічну практику нових КОМСН на принципах поступового і неантагоністичного, без руйнівних перебудов і реформ вбудовування ІКТ у діючі дидактичні системи, гармонійного поєднання ТМСН і КОМСН, не заперечування і відкидання здобутків педагогічної науки минулого, а їх удосконалення і посилення, в тому числі і за рахунок використання досягнень у розвитку комп'ютерної техніки і засобів зв'язку.

Є.М. Смирнова-Трибульська [58] виділяє чотири *ступені включення комп'ютерів у дидактичний процес*. Найнижчий ступінь – доповнення, розміщення комп'ютерів з ІКТ окремо від середовищ навчання. Другий ступінь – «розміщення» комп'ютерів та ІКТ в навчальному предметі, однак з обтяжливою рисою «доповнення», бо його використання незінтегроване з предметним змістом і його структурою. На третьому етапі (сучасному) відбувається інтеграція ІКТ у предмет навчання. Це означає повну інтеграцію програм навчання, дидактичного забезпечення, у тому числі підручників, відповідного програмного забезпечення навчального призначення і методів використання їх у навчанні визначеного предмета. Найвищим ступенем має стати повна міжпредметна інтеграція з певною предметною галуззю, наприклад, математикою.

Ю.В. Триус [63] використання ІКТ у навчальному процесі при традиційній МСН характеризує такими рівнями:

- ІКТ не використовуються;
- використання вчителем, викладачем ІКТ для підготовки навчально-методичних матеріалів з дисципліни;
- епізодичне використання програмного засобу, СКМ у навчальному процесі, зокрема для контролю знань, вмінь і навичок учнів чи студентів;
- епізодичне використання ІКТ як засобів навчання і засобів управління навчальною діяльністю.

Для КОМСН вищих навчальних закладів виокремлено три рівні.

- Систематичне використання ІКТ у деяких видах навчальної діяльності студентів при навчанні дисципліни (на лекціях, практичних і лабораторних заняттях). Використання ІКТ суттєво впливає на деякі компоненти МСН (методи, засоби і форми організації навчання).
- Систематичне використання ІКТ в усіх видах навчальної діяльності студентів при навчанні дисципліни. Використання ІКТ суттєво впливає на всі компоненти методичної системи навчання (цілі, зміст, методи, засоби і форми організації навчання).

▪ Організація навчального процесу з дисципліни на основі освітньо-наукового інформаційного середовища. У навчальному процесі використовуються переважно комп'ютерно-орієнтовані методи, засоби і форми організації навчання на основі комп'ютерно-орієнтованого навчально-методичного комплексу дисципліни

Аналізуючи причини низького рівня використання вчителями математики ІКТ у професійній діяльності, Є.М. Смирнова-Трибульська виділяє наступні проблеми [58]:

1) теоретичні і правові (відсутність атестаційних вимог з використання ІКТ і дистанційних форм навчання та цілеспрямованої системи навчання вчителів);

2) методичні (брак методичної літератури, недостатня розробленість методик використання ІКТ на уроках та в дистанційних формах навчання в професійній діяльності вчителя);

3) технічні (нестача комп'ютерної техніки, обмежений доступ до Інтернет);

4) в області програмного забезпечення (недостатня кількість педагогічних програмних засобів, освітніх порталів і платформ дистанційного навчання);

5) організаційні (проведення в комп'ютерному класі уроків з більшої частини навчальних дисциплін не передбачено у шкільному розкладі; не скрізь організовані або слабо функціонують регіональні системи методичної підтримки на основі Інтернет-технологій);

6) особистісні (вчителі невмотивовані використовувати ІКТ; не сформована потреба в безперервному навчанні і підвищенні кваліфікації).

1.1.2. Цілі навчання

На основі аналізу джерел [18], [50], [63] та ін. можемо виділити такі *цілі* КОМСН, як розвиток особистості того, хто навчається, інтенсифікація всіх рівнів навчально-виховного процесу за рахунок застосування ІКТН, оптимізація пошуку необхідних користувачу відомостей, підвищення якості освіти; виконання соціального замовлення суспільства на розвиток особистості, що проживатиме в умовах інформаційного суспільства.

Спостерігається диференціація використання комп'ютера як засобу навчання, виховання та розвитку від комп'ютерних ігор для раннього шкільного віку до тренажера, консультанта, екзаменатора і партнера у вирішенні конкретних навчальних завдань для старшокласників. Це накладає вимогу *враховувати вікові особливості тих, хто навчається, і застосовувати в навчанні доступні засоби*. ІКТ справляють вплив на учнів через спілкування в мережі Інтернет, телепередачі, відеоманітофонні записи та інші опосередковані прояви, що безупинно змінюють все інформаційне середовище й тих людей, у спілкуванні з якими виростає дитина і формується як особистість. Значні переваги перед текстовим, графічним чи іншим традиційним повідомленням має аудіовізуальне у поєднанні з кольором і рухом, що якісно інакше сприймається і за-

пам'ятовується, а іноді має властивість вступати в несподівані асоціативні зв'язки з іншими фрагментами відомостей. Через істотне розширення обсягу і характеру доступних людині відомостей, форм їх одержання і перетворення, через діяльність і спілкування відбувається внутрішнє збагачення особистості, накопичується її різноманітний духовний потенціал. Завдяки автоматизації функцій розумової праці людини за рахунок перекладання на комп'ютер доступних йому рутинних логічних і обчислювальних операцій, вивільняються резерви розуму для виконання творчої роботи.

Ю.І. Машбиць серед найбільш плідних застосувань комп'ютера виокремлює *значні можливості у реалізації проблемного навчання; розвиток творчого мислення учасників навчального процесу, готовності їх до творчої праці*. Автор наголошує на розвитку алгоритмічного мислення як процесі, *що передбачає евристичний пошук, сміливий здогад, інтуїцію – усе те, що у найбільшій мірі характеризує творчі витoki мислительного акту*. Важливо, щоб надмірна алгоритмізація діяльності на основі готових вказівок не стала гальмом для розвитку творчих якостей, пов'язаних із здогадкою і пошуком скорочених шляхів розв'язування задачі.

Важливо, щоб учні / студенти могли мислено уявити весь логічний ланцюг *творчого процесу застосування комп'ютера на практиці*: явище → його математична модель → алгоритм → програма мовою ЕОМ → розв'язування задачі за допомогою ЕОМ → інтерпретація результату → область його застосування на практиці. При моделюванні виокремлюється сама сутність явищ і стає ясною їх спільність [61].

Якщо застосовується ПЗ, то учні / студенти виступають в ролі користувачів програмного забезпечення. Запропонований ланцюг дещо видозмінюється: *явище → розробка моделі → розв'язування засобами ПЗ → інтерпретація отриманих результатів → застосування на практиці*. При цьому захоплення використанням готових моделей погрожує передчасним розривом зв'язку вивчуваного явища з дійсністю. Для уникнення формалізму в знаннях тих, хто навчається, потрібно віддати *перевагу створенню моделі* перед використанням розробленої іншими. Пропонуючи готові моделі, динамічні креслення в дидактичній грі з комп'ютерною підтримкою, необхідно обговорювати з учнями / студентами етапи їх розробки, відтворювати послідовність кроків побудови.

Використання ІКТ у навчальному процесі має сприяти підвищенню інтересу тих, хто навчається, до отримання знань; забезпеченню диференціації, індивідуалізації у процесі навчання, зокрема проходженню матеріалу за власним темпом; об'єктивності контролю якості знань; активізації процесу навчання, зокрема через інтенсифікацію подачі матеріалу з використанням ІКТ; формуванню умінь і навичок різноманітної творчої діяльності; вихованню інформаційної культури; оволодінню навичками оперативного прийняття рішень в складних ситуаціях; забезпеченню оперативного доступу до банків різноманітних відомостей.

Одним з найважливіших принципів, що дозволяють забезпечити розвиваюче навчання, є профільна та рівнева диференціація, індивідуалізація навчання. М.І. Жалдак акцентує увагу на тому, що при використанні ІКТ у навчальному процесі «мова не повинна йти лише про вивчення певного навчального матеріалу, а, перш за все, *про всебічний і гармонійний розвиток особистості, її творчих здібностей*» [18, 14]. ІКТН, відкриваючи перспективи диференціації навчання, розкриття творчого потенціалу, пізнавальних здібностей кожного учасника навчального процесу, мають стати *особистісно орієнтованими*.

Індивідуалізація навчання на основі ІКТ може бути забезпечена при рефлексивному управлінні навчальною діяльністю. Використання комп'ютерно-орієнтованих систем навчання має забезпечувати відповідність інформаційної моделі конкретному учаснику навчального процесу. Наприклад, за допомогою програмного засобу викладач може добирати і пропонувати учасникам навчального процесу завдання трьох рівнів складності, здійснювати перевірку правильності самостійного виконання кроків завдання. Для цього необхідно передбачити визначення стійких і ситуативних індивідуальних особливостей кожного учасника навчального процесу.

1.1.3. Зміст навчання

Зміст навчання на рівні навчального предмету – система знань з певної наукової галузі, практичних вмінь і навичок та способів діяльності, якими повинен оволодіти учень у процесі навчання.

Навчальна програма з математики – основний документ, що визначає зміст і обсяг знань з цього предмету, умінь і навичок, які підлягають засвоєнню, зміст розділів і тем з розподілом їх за роками навчання [85].

Вплив ІКТ на зміст навчання проявляється в розширенні та поглибленні теоретичних основ курсу математики завдяки більшій їх доступності для школярів / студентів, в поглибленні міжпредметних зв'язків і використанні завдань прикладного характеру.

У зв'язку з впровадженням ІКТН математики виникає потреба в перегляді системи завдань для формування знань, умінь та навичок учасників навчального процесу, для контролю і оцінювання знань, а в цілому для набуття ними математичної компетентності. ПЗНП мають відповідати вимогам доцільності створення і практичного застосування. Тому електронні засоби слід наповнювати таким змістом, який найбільш ефективно може бути поданий і засвоєний переважно з використанням комп'ютера. В той же час, з впровадженням обчислювальної техніки необхідно обачливо підходити до зміни змісту математичної освіти з метою запобігання зниженню її рівня.

Ю.І. Машбиць та М.Л. Смульсон [44, 14] акцентують увагу на тому, що з впровадженням комп'ютерно-орієнтованого навчання, а особливо дистанційного, необхідно розрізнати три основні групи змісту. Перша група (*Зміст-1*) включає зміст основних об'єктів і способів оперування

ними, що утворюють певний навчальний предмет. Для засвоєння цього матеріалу залучають додатковий матеріал (*Зміст-2*), що включає певний понятійний апарат, знанневий зміст відповідних розумових дій, різноманітні евристики. Саме *Зміст-2* визначальною мірою впливає на успішність засвоєння матеріалу. *Зміст-1* і *Зміст-2* разом утворюють зміст навчання. Потребує включення у зміст вивчення стратегій навчання, засвоєння учасниками навчального процесу власної навчальної діяльності. Для успішної діяльності учні мають засвоїти ще *Зміст-3*, тобто зміст власної діяльності: як вони аналізують задачу, планують її розв'язання і тощо.

1.1.4. Засоби навчання

Використання засобів навчання залежить від цілей і завдань уроку, змісту і логіки подачі навчального матеріалу, майстерності вчителя.

Засоби навчання ділять на три групи: а) засоби зорової (візуальної) наочності (діафільми, діапозитиви, моделі, муляжі, таблиці, картини, графіки, роздавальний матеріал); б) засоби слухової наочності (платівки, компакт-диски, аудіокасети); в) наочно-слухові (аудіовізуальні) засоби (діафільми зі звуковим супроводом, кінофільми і відеофільми, кінофрагменти тощо) [87,147].

До *традиційних засобів* навчання відносять наочні та технічні засоби навчання, підручники й посібники, дидактичні матеріали, довідкову та іншу навчально-методичну предметну літературу [63].

Схвальні відгуки педагогів отримали посібники [22-26], [13], які демонструють шляхи впровадження в навчальний процес ПЗ, інтеграцію навчальних дисциплін та посилення міжпредметних зв'язків.

Серед *комп'ютерно-орієнтованих засобів* навчання математики розрізняють *апаратне забезпечення* (комп'ютер, засоби телекомунікацій) та *програмне забезпечення* (операційні системи; текстові й графічні редактори; табличні процесори; експертні системи; педагогічні програмні засоби; проблемно-орієнтовані програми; електронні підручники, електронні бібліотеки, методичні та консультаційні каталоги, навчальні телекомунікаційні проекти та ін.). Серед програмних засобів комп'ютерної математики виділяють системи для чисельних розрахунків, табличні процесори, матричні системи, системи для статистичних обчислень, спеціалізовані програми і пакети, системи комп'ютерної алгебри і геометрії, універсальні математичні системи [63].

Як зазначає В.П. Вембер [12], не існує єдиного підходу як до класифікації електронних засобів навчального призначення, так і до термінології у цій сфері. Взавши за основу класифікації цілі та завдання, які можуть бути вирішені за допомогою ЕЗНП, можна виділити наступні типи: ілюструючі, консультуючі, операційне середовище, тренажери, навчальний контроль.

М.І. Жалдак, В.В. Лапінський, М.І. Шут [23] пропонують класифікацію залежно від переважного виду діяльності учасників навчального

процесу при роботі з певним засобом навчання (продуктивна діяльність, спрямована на формування нових знань; продуктивно-репродуктивна діяльність, спрямована на формування умінь, навичок, на актуалізацію та закріплення знань тощо). Виокремлюють 1) демонстраційно-моделюючі програмні засоби; 2) ПЗ типу діяльнісного предметно-орієнтованого середовища; 3) ПЗ, призначені для визначення рівня навчальних досягнень, які в свою чергу класифікують за способом організації роботи в мережі; ступенем «гнучкості», можливістю редагування предметного наповнення і критеріїв оцінювання; структурою і повнотою охоплення навчального курсу; способом введення команд і даних та можливою варіативністю формулювання відповіді; можливими способами формулювання та подання учневі навчальних задач; способом введення даних – командних впливів користувача; 4) ПЗ довідниково-інформаційного призначення.

В.П. Вембер [12], класифікуючи *освітні електронні ресурси*, ототожнює такі поняття, як електронні навчальні видання, електронні засоби навчального призначення, комп'ютерні навчальні системи, педагогічні програмні засоби, електронні навчально-методичні матеріали. Автором виділено такі складові як електронна навчальна книга, електронний навчальний посібник (енциклопедії, словники, альбоми карт і схем, інформаційні бази та банки знань, комп'ютерні лабораторні практикуми, бібліотеки електронних наочностей, хрестоматії, довідники, збірники вправ і задач, електронні атласи, контролюючо-тестуючі комплекти, віртуальні лабораторії, комп'ютерні тренажери), електронний підручник (для дистанційного навчання і для підтримки традиційного навчання), автоматизовані навчальні системи, програмно-методичні комплекти, програмні засоби контролю за навчально-виховним процесом.

Ю.В. Триус серед складових методичного забезпечення КОМСН виділяє такі сучасні електронні засоби навчання як *електронні словники і довідники, електронні навчальні і методичні посібники, електронні підручники* [63]. Розглянемо детальніше окремі з цих засобів.

Електронне видання – сукупність графічних, текстових, числових, мовних, музичних, відео, фото та інших матеріалів, поданих у цифровій формі і розміщених на електронних носіях, а також в електронній комп'ютерній мережі.

Навчальне електронне видання – електронне видання, яке містить систематизований матеріал з відповідної науково-практичної галузі знань. Має відрізнятися високим рівнем виконання і художнього оформлення, повнотою відомостей, якістю методичного інструментарію і технічного виконання, наочністю, логічністю і послідовністю подання матеріалу.

Електронний методичний посібник – форма узагальнення і передавання педагогічного досвіду, формування і поширення нових моделей освітньої діяльності. В електронному методичному посібнику досвід педагога фіксується у вигляді відеофрагментів і аудіозаписів занять, тексто-

вих і графічних дидактичних матеріалів, поданих в електронній формі.

Електронний словник – електронний інформаційний ресурс, що відповідає традиційному «паперовому» словникові. У комп'ютерній версії може викликатися з будь-якої програми спеціально визначеною вказівкою на слово або групу слів, що приводить до візуалізації необхідного фрагмента відповідного словника. Електронний словник поряд з текстом і графічними зображеннями може містити весь спектр медіаоб'єктів, включаючи відео і анімаційні фрагменти, звук, музику.

Електронний навчальний посібник – освітнє електронне видання, яке частково або цілком заміняє чи доповнює звичайний посібник і офіційно затверджене, як даний вид видання.

Електронний підручник [63] – основне освітнє електронне видання, створене на високому науковому і методичному рівні, яке повністю відповідає програмі і змісту навчальної дисципліни (обумовлених освітнім стандартом), забезпечує безперервність і повноту дидактичного циклу процесу навчання за умови здійснення інтерактивного зворотного зв'язку. Зазвичай електронний підручник являє собою комплект навчальних, контролюючих, моделюючих та інших програм, які розташовані на електронних носіях і у яких відображено основний науковий зміст навчальної дисципліни.

Електронні підручники – ПЗ, які охоплюють значні за обсягом матеріалу розділи навчальних курсів або повністю навчальні курси. Для такого типу ПЗ характерною є гіпертекстова структура навчального матеріалу, наявність систем управління із елементами штучного інтелекту, блоку самоконтролю, розвинені мультимедійні складові.

Особливістю всіх електронних видань є те, що вони не можуть бути скорочені до паперового варіанта без втрати дидактичних властивостей. Електронний підручник не може і не повинен замінити книгу. Як зазначає Ю.В. Триус, для створення електронного підручника недостатньо взяти гарний підручник, створити його навігацію (створити гіпертекст), наповнити багатим ілюстративним матеріалом, включаючи мультимедійні засоби, і відтворити на екрані комп'ютера. Електронний підручник не повинен перетворюватися ні в текст із картинками, ні в довідник, тому що, його функція принципово інша. Електронний підручник повинен максимально полегшити розуміння і запам'ятовування (причому активне, а не пасивне) найбільш істотних понять, тверджень і прикладів, залучаючи до процесу навчання слухову й емоційну пам'ять.

Порівняно зі звичайним (паперовим) підручником педагогічний потенціал електронного значно більший завдяки наступним властивостям [63]:

- *гіпертекстовість* (можливість перегляду навчального матеріалу за гіперпосиланнями);
- *мультимедійність* (можливість використання всіх засобів мультимедіа для більш ефективного подання навчального матеріалу – звук, графіка, мультиплікація, анімація, відео);

- *інтегрованість* (може включати не тільки навчальні матеріали, але й запитання, тести для самоконтролю та контролю, гіперпосилання на іншу довідкову та навчальну літературу, надавати можливість безпосередньо працювати з проблемно-орієнтованим програмним забезпеченням, зокрема з системами комп'ютерної математики);
- *конструктивність* (використання ІКТ дозволяє будувати навчальний курс за принципами конструктивізму у навчанні, згідно з яким навчання реалізується через конструювання когнітивних (уявних) моделей через експерименти з реальністю або її комп'ютерними моделями);
- *керіваність* – можливість організувати навігацію (послідовність пред'явлення навчального матеріалу) підручника залежно від успішності, психофізіологічних або інших індивідуальних характеристик учня, тобто забезпечити електронний посібник засобами зворотного зв'язку.

Електронні підручники з «живими» математичними графіками допомагають у самостійному вивченні математики. Завдяки графічній візуалізації розв'язання математичної задачі можна швидко зрозуміти його суть, реалізувати багатоваріантність обчислень, автоматизувати рутинні чи складні обчислення, не заперечуючи при цьому математичну інтуїцію людини та її творчу участь у розв'язуванні проблем. При цьому економію часу можна спрямувати на осмислення математичної сутності задачі.

В.М. Мадзігон, В.В. Лапінський та Ю.О. Дорошенко [43,70] акцентують увагу на тому, що ПЗНП повинні задовольняти *дидактичні принципи* навчання: принципи свідомості й активності, наочності, систематичності й послідовності, міцності, науковості, доступності, зв'язку теорії з практикою. Принцип *науковості* визначає як спосіб і критерії добору змісту навчального матеріалу, так і способи його подання відповідно до сучасного рівня наукових знань. Процес засвоєння матеріалу повинен відбуватися у відповідності з методами пізнання, а саме – науковим експериментом, через здійснення аналізу, синтезу, порівняння, аналогій, індукції та дедукції, абстрагування і конкретизації, систематизації і узагальнення. Способи подання навчального матеріалу, форми і методи організації навчальної діяльності мають відповідати рівню підготовки учасників навчального процесу та їх віковим особливостям. Досягнення успіху кожним може бути забезпечене завдяки *доступності* навчального засобу. Завдяки перевагам подання графічних та інших даних засобами ІКТ закладаються істотні передумови успіхів у навчанні – емоційне включення, гностичність, емоційне сприйняття даних. Принцип *наочності* за умови використання ПЗ полягає не стільки в можливості пасивного споглядання учнями моделей, як в активній перетворюючій діяльності, у процесі якої вони самостійно будують моделі. Встановлення суттєвих зв'язків між складовими динамічної моделі, певних ознак, впливає на розвиток у школярів / студентів прийомів мислительної діяльності.

Оцінювання якості ЕЗНП загально-дидактичного і практичного спрямування необхідне для ефективного використання засобів у навчан-

ні і для їх удосконалення. Вимоги до дизайну, до техніко-ергономічних показників ПЗ навчання математики базуються на вимогах до електронних навчальних видань (див. [12], [43], [47], [63]).

Щодо *організаційно-супроводжуючого рівня* електронних засобів, то змістовому наповненню мають відповідати назви ЕЗНП та анотації, бути привабливим зовнішнє оформлення компакт-диску, зручною комплектація інструкціями користувача та методичними рекомендаціями. *Техніко-ергономічні показники* засобів оцінюють за зручністю і відносною простотою інсталяції на комп'ютері і у локальній комп'ютерній мережі, зручністю структури та організації окремих модулів та екранів.

Щодо *навчально-методичних вимог* до електронного посібника, то вони базуються на вимогах до традиційних підручників [12], [97] і можуть бути згруповані у блоки, які характеризують *науковість змісту посібника і його структуру, доступність змісту, навчально-методичний апарат*. Ці видання не повинні повністю дублювати традиційні засоби, але можуть містити опорні конспекти матеріалу, що вивчається, доповнювати традиційні підручники і бути орієнтованими на підтримку навчально-виховного процесу за класно-урочної системи навчання. Текстовий навчальний матеріал доцільно подавати з використанням гіпертекстової розмітки. Ключові поняття краще продублювати у словнику та здійснити на них гіперпосилання з основного тексту. Важливо, щоб використання посібника сприяло диференціації навчання, дало відомості для поглибленого вивчення предмету, тому варто посібники оснащувати орієнтовним переліком творчих завдань, навчальних проєктів із застосуванням досягнень сучасних ІКТ та апаратних засобів.

Характеристики *науково-методичного рівня* ЕЗНП об'єднують у наступні блоки: структурування, призначення до використання у навчально-виховному процесі, науковість змісту, дидактична цілісність, методична цінність. Аналізуючи *призначення ЕЗНП до використання у навчально-виховному процесі*, оцінюють обсяг навчального матеріалу, охопленний змістовим наповненням засобу відповідно до діючої навчальної програми з математики для закладу освіти. Користуючись засобом, вчитель повинен мати змогу сконструювати урок, включивши до нього компоненти на забезпечення актуалізації опорних знань, подання нового матеріалу, формування умінь та навичок, узагальнення та систематизацію знань. Щодо *науковості змісту* ЕЗНП, то слід оцінювати їх відповідність вимогам державного стандарту загальної середньої освіти з освітньої галузі «Математика» та сучасним науковим тлумаченням.

Дидактичну цілісність ЕЗНП характеризують системність і оригінальність авторських підходів до подання навчального матеріалу, систематичність і послідовність, його доступність для виконання практичних робіт, відповідність віковим особливостям учасників навчального процесу, умінням і навичкам користувачів. Важливою є можливість здійснення індивідуалізації та диференціації навчання, забезпечення мі-

цності, усвідомленості та дієвості результатів навчання, забезпечення наступності і перспективності в організації навчально-виховного процесу. Забезпеченню міцності, усвідомленості та дієвості результатів навчання за допомогою ЕЗНП сприяє наявність у змісті тестових завдань, зразків письмових робіт.

Методичну цінність ЕЗНП характеризує прийнятність розкриття змісту, можливість комплексного використання електронних засобів з традиційними засобами навчання, підготовки вчителя до проведення уроків з використанням конструктора уроку, із застосуванням ним різних дидактичних методів та прийомів. Добір малюнків, графічних зображень, знаково-буквенних зображень, анімацій має відповідати цілям навчання.

За допомогою ЕЗНП вчителю повинно бути зручно здійснювати *контрольно-коригуючу, контрольню-попереджаючу, контрольню-стимулюючу перевірку знань*, а учневі / студентові – надаватися можливість в певній мірі самостійно виконувати завдання без участі викладача. Важливо, щоб при самостійному опрацюванні матеріалу був забезпечений зворотній зв'язок, що сприятиме розвитку самостійності.

У вищих педагогічних та середніх загальноосвітніх навчальних закладах пройшли апробацію такі електронні засоби навчального призначення з математики як GeoGebra, [GRAN1](#), [GRAN-2D](#), [GRAN-3D](#), DG, «Математика, 5-6 клас», Бібліотеки електронних наочностей «Алгебра, 7-9 клас», «Геометрія, 7-9 клас», ПЗ «Алгебра, 10-11 клас», «Геометрія, 10-11 клас» та інші. Доцільні підходи для навчання математики закладені в засобі «Евристико-дидактичні конструкції» (ДонНУ).

Згідно з правилами використання комп'ютерних програм у навчальних закладах, придбати і використовувати можна ті комп'ютерні програми навчального призначення, що мають відповідний гриф та/або свідоцтво про визнання відповідності педагогічним вимогам МОН України. Сучасне життя складно уявити без глобальної мережі Інтернет. Освітні шкільні Інтернет-портали «На урок», «STEM-школа», [«Острів Знань»](#) (<http://ostriv.in.ua>), [портали Львівщини](#) (www.osvit-portal.lviv.ua), [Херсонщини](#) (www.uceba.ks.ua/new) та інші призначені для користувачів-учнів, студентів, учителів, батьків.

1.1.5. Методи навчання

Результативність навчання з використанням ІКТ багато в чому визначається тим, якими методами оперує вчитель у вирішенні дидактичних завдань. Метод навчання – упорядкований спосіб взаємозалежної діяльності вчителя і учнів, спрямований на вирішення завдань освіти, виховання і розвитку у процесі навчання.

В табл. 1.1 наведено перелік основних традиційних і комп'ютерно-орієнтованих методів навчання, в яких за основу вибрано *джерело здобуття знань* [63], [87, 138].

Методи навчання (за джерелом здобуття знань)

<i>Традиційні</i>	<i>Комп'ютерно-орієнтовані</i>
<i>Словесні (вербальні) методи навчання</i>	
Розповідь, пояснення, бесіда, навчальна дискусія, лекція, робота з підручником, довідковою, науково-популярною та навчальною літературою	Робота з електронними підручниками, довідковим матеріалом комп'ютерних програм; опрацювання відомостей, що отримуються через глобальну мережу Інтернет
<i>Наочні методи навчання</i>	
Ілюстрування статистичної наочності, плакатів, карт; демонстрування приладів, дослідів, установок, фільмів; самостійне спостереження	Робота з навчаючими та навчально-контролюючими програмами Відеометод
<i>Практичні методи навчання</i>	
Виконання вправ, лабораторних робіт; практикумів; розв'язування доцільно дібраних задач; графічні роботи	Дослідницька робота у комп'ютерних лабораторіях; обчислювальні експерименти; телекомунікаційні проєкти

Можливість швидко проводити обчислювальні експерименти з використанням ПЗ створює передумови навчання розвиваючими методами: проблемний виклад досліджуваного матеріалу, частково-пошуковий (евристичний) метод, дослідницький метод. Це забезпечує досягнення високого рівня навчання та проблемності пізнавальної активності на основі чого в учасників навчального процесу створюються пізнавальні навички та потреба у набутті інших. Сфера застосування обчислювального експерименту у курсі елементарної математики широка – від формулювання понять (графіка функції, границі, похідної функції в точці і т.д.) до перевірки відомих тверджень. У ході їх виконання учні / студенти зможуть «відкрити» певні закономірності чи перевірити відомі твердження. Метою дослідницької діяльності є пробудження активних дослідницьких інтересів. Особливу увагу слід звернути на *створення проблемної ситуації, стимулювання здогадки, висування гіпотези*. Активність та глибока зацікавленість творчим процесом сприятимуть розширенню знань тих, хто навчається, їх інтересів та форм пізнання, заохочуватимуть до пошуку нових фактів, нових відомостей. Вчитель стимулює самостійність роздумів і суджень учасників навчального процесу, заздалегідь готуючи систему запитань. У ході діалогу за допомогою запитань, які допомагають активізувати мислення тих, хто навчається, відбувається відкриття істини. Відповідаючи на питання, вони самостійно формулюють означення, поняття, «відкривають» доведення теореми, знаходять способи розв'язування задач, приходять до розв'язання певної проблеми.

1.1.6. *Форми організації навчання*

Форма навчання – це встановлений зразок організації навчальної діяльності, що передбачає характер зв'язків між викладачем і учнями, групування учнів для занять, характер їхньої діяльності, місце занять та їх проведення.

У табл. 1.2 наведено перелік основних традиційних і комп'ютерно-орієнтованих форм організації навчання [63], [87, 148]. Детальніше розглянемо окремі з комп'ютерно-орієнтованих форм навчання.

Таблиця 1.2

Форми організації навчання

<i>Традиційні</i>	<i>Комп'ютерно-орієнтовані</i>
Урок, лекція, практичні заняття, семінари, лабораторні роботи, навчальні дискусії, екскурсії, самостійна позакласна робота, індивідуальна або групова науково-дослідна робота, поточні та підсумкові форми контролю.	Комп'ютерно-орієнтовані урок, лекція, семінари, практичні і лабораторні заняття, контрольні роботи тощо; науково-дослідна робота; екзамени, тестування; дистанційні форми: - трансляція; чат (текстовий, графічний); - відео- і телеконференції, - інтерактивні форми проведення лекцій, семінарів, практичних й лабораторних занять, навчальних дискусій та ін.

Впровадження ІКТН в освітній процес здійснюється здебільшого через *комп'ютерно-орієнтований урок*. При цьому постає проблема добору відповідних електронних засобів навчального призначення і належного навчального матеріалу для роботи на уроці. А з іншого боку – це проблема педагогічної майстерності вчителя, уміння конструювати і розробляти ним уроки на основі методологічних і методичних положень та вимог. У процесі навчання вчителю слід враховувати внутрішній процес засвоєння учнями знань, який включає такі ланки: сприймання – осмислення і розуміння – узагальнення – закріплення – застосування на практиці.

Комп'ютерно-орієнтований урок, як і будь-який інший, має задовольняти такі *дидактичні вимоги*: а) чітке визначення дидактичної, виховної, розвивальної мети уроку, включаючи мету застосування того чи іншого педагогічного програмного засобу, та завдань уроку; б) правильний добір навчального матеріалу, зокрема й такого, який найкраще буде поданий за допомогою обраного програмного засобу; в) вибір оптимальних методичних прийомів і засобів навчання; г) поєднання на уроці колективної, групової, індивідуальної роботи; д) реалізація на уроці принципів і умов успішного навчання.

Розробники ПЗ DG особливого значення надають *урокам конструкторської діяльності і наукових досліджень*, зазначаючи при цьому, що навчальні дослідження є вищою формою творчості учнів [50], [13].

З *виховних вимог* до заняття з використанням ІКЗН відзначимо те, що

завдання вчителя полягає в забезпеченні комфорту кожному учневі на уроці. Обговорювати можуть і учасники, які самостійно не досліджували з використанням програмного засобу, а лише спостерігали. Наявність *творчого спілкування* є однією з умов розвитку творчої особистості. Важливо забезпечувати розвиток позитивних мотивів особистості, пізнавальних інтересів, потреби самостійно опановувати знаннями.

Щодо *організаційних вимог* до комп'ютерно-орієнтованих занять, то слід відмітити наявність чіткого плану заняття відповідно до тематичного планування, організаційна чіткість проведення уроку, підготовка і різноманітне використання технічних засобів навчання. Організація самостійної творчої роботи тих, хто навчається, з використанням ІКТ потребує від наставника високої кваліфікації і математичної, і педагогічної, і у галузі ІКТ.

Як краще організувати дослідження, виходячи з різного стану забезпечення закладів технікою? В аудиторіях, які оснащені одним комп'ютером, краще виконувати дослідження групами з 3-4 чоловік за чергою. Якщо до комп'ютера додається мультимедійний проектор, то вчитель може виступати менеджером дослідження і обговорювати результати з усіма учасниками навчального процесу, по можливості, залучаючи їх виконувати аналогічні дослідження з використанням мобільних телефонів. В аудиторії, де є кілька комп'ютерів, краще працювати і звітувати групами. Навіть у комп'ютерній лабораторії чи при можливості у всіх працювати з мобільними телефонами бажано працювати парами, щоб спільно обговорювати і висувати гіпотези.

У процесі вивчення курсу «ІКТН математики» передбачено складання конспектів уроків та їх фрагментів, тому наведемо короткі відомості про *типи уроків* та їх структуру. В дидактиці залежно від дидактичної мети розглядають такі типи уроків [99]:

- урок засвоєння нових знань (перевірка виконання учнями домашнього завдання, актуалізація і корекція опорних знань; повідомлення учням теми, мети і завдань уроку; мотивація учіння школярів; сприймання і усвідомлення учнями фактичного матеріалу, осмислення зв'язків і залежностей між елементами вивчаного; узагальнення і систематизація знань; підсумки уроку, повідомлення домашнього завдання);
- урок формування умінь і навичок (перевірка домашнього завдання, актуалізація і корекція опорних знань, умінь і навичок; повідомлення учням теми, мети і завдань уроку, мотивація учіння школярів; вивчення нового матеріалу (вступні, мотиваційні і пізнавальні вправи); первинне застосування нових знань (пробні вправи); самостійне застосування учнями знань в стандартних ситуаціях (тренувальні вправи за зразком, інструкцією, завданням); творчий перенос знань і навичок у нові ситуації (творчі вправи); підсумки уроку і повідомлення домашнього завдання);
- урок застосування знань, умінь і навичок;
- урок узагальнення і систематизації знань,

- урок перевірки і корекції знань, умінь і навичок (повідомлення теми, мети і завдання уроку, мотивація учіння школярів; перевірка знання учнями фактичного матеріалу й основних понять; перевірка глибини осмислення знань і ступеня їх узагальнення; застосування учнями знань у стандартних і змінених умовах; збирання виконаних робіт чи збереження результатів роботи на електронних носіях; їх перевірка, аналіз і оцінка, враховуючи часткову автоматизацію перевірки і оцінювання, здійснену контролюючим програмним забезпеченням; підсумки, домашнє завдання);
- комбінований урок [87, 154] (організаційний момент (цільова настанова); опитування (письмове, усне, картки); вивчення нового матеріалу (розчленування на частини, формулювання питань для бесіди, терміни, поняття, які пропонуються; технічні засоби навчання); закріплення (усі види робіт); підсумок уроку; рекомендації до виконання домашнього завдання).

Комп'ютерно-орієнтована лабораторна робота – вид навчальної діяльності, пов'язаний з виконанням досліджень (можливо, на лабораторному устаткуванні) із застосуванням комп'ютера.

Зручно проводити лабораторні роботи з математики з використанням програмних засобів GRAN, DG, [GeoGebra](#) (див. п. 2.2, 2.4, 2.6).

У структурі лабораторної роботи можна виділити три основні блоки. Перший з них є мотиваційним, що включає вступне слово наставника, актуалізацію знань та умінь учасників навчального процесу, постановку завдання, мотивацію навчальної діяльності. У ввідній частині заняття доцільно обговорити з учасниками навчального процесу мету заняття і дослідницької роботи та план їхньої реалізації.

Другий блок є практичною частиною заняття, що передбачає роботу з ПЗ і виконання різних типів завдань: розв'язування задач наближеними методами, експериментальна перевірка істинності тверджень, проведення досліджень з метою висунення гіпотези. В ході практичної частини роботи варто передбачити виконання різноманітних творчих завдань прикладного характеру.

Обговорення результатів дослідження, узагальнення та систематизацію способів діяльності, яких набули учасники навчального процесу в ході роботи з програмним засобом, прийомів та методів розв'язування завдань, краще здійснювати в кінці або ж по ходу заняття, якщо передбачено виконання кількох дослідницьких вправ. Питання до учасників навчального процесу, подані в письмовій чи в усній формі, мають спонукати їх до здійснення різних розумових дій. Важливо, щоб перед початком обговорення вони записали власний висновок (звіт), який після обговорення може дещо змінитися, уточнитися. Фіксація думки дослідника надзвичайно важлива для розвитку його пізнавальних якостей.

Заключний блок лабораторної роботи може включати як обґрунтування висунутих гіпотез, розгляд різних способів розв'язування задачі, так і фіксацію основних рекомендацій для обґрунтування. Показником

системності засвоєння знань є уміння учнів / студентів розповісти про спостережені процеси, засвоєні теореми тощо. В той же час, зробити висновки або заповнити таблицю іноді доцільно запропонувати їм як домашнє завдання, якщо на занятті бракує часу. Відстрочка виконання завдання (аргументації) може бути прийомом розвитку особистості тих, хто навчається, якщо інкубація (визрівання ідей) ще не відбулася. Оскільки на лабораторних роботах учні / студенти фактично створюють для себе посібник у таблицях, то в подальшому можливість використовувати його в аудиторії чи вдома посилить мотивацію учіння.

Комп'ютерно-орієнтована контрольна робота, тестування – форма виявлення й оцінювання ступеня оволодіння учнем знаннями, вміннями та навичками, що контролює рівень засвоєння визначеного об'єму навчального матеріалу в межах теми і організована вчителем за допомогою спеціального програмного забезпечення – контролюючої програми.

Контрольні роботи з перевіркою правильності виконання кроку учнем і зберіганням ходу розв'язування на електронних носіях особливо зручно проводити з використанням ПМК Алгебра 7-9 клас.

Розповсюдженими засобами для організації і проведення комп'ютерно-орієнтованого контролю є системи комп'ютерного тестування. Наприклад, тестування учнів 5-6-го класу вчитель може здійснити з використанням засобу «Математика, 5-6 клас», подавши завдання для кожного учня через мережу.

Наразі значно розширився спектр засобів для здійснення тестування учасників навчального процесу з використанням дистанційних технологій, хмарних сервісів, зокрема форм Google, тестів на основі системи управління електронними навчальними курсами MOODLE.

Комп'ютерно-орієнтована лекція – систематичне, послідовне і логічне подання проблемних ситуацій з певних розділів шкільного курсу математики із використанням відео і комп'ютерної техніки для демонстрації малюнків, графіків, динамічних зображень і ін. В основі комп'ютерно-орієнтованої лекції лежить план лекції – чітке формулювання теми і мети, запису найбільш складних доведень, заздалегідь намічений план розкриття теми, логіка переходу від одного питання до іншого, який подається, як правило, у вигляді презентації.

Контрольні питання і завдання

1. Порівняти компоненти традиційної методичної системи навчання і комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання. Визначити цілі застосування ІКТ в навчанні, описати комп'ютерно-орієнтовані методи і форми організації навчання.

2. До однієї з тем шкільного курсу математики самостійно дібрати доцільні ПЗ, комп'ютерно-орієнтовані методи і форми навчання. Оцінити їх переваги у навчанні перед традиційними засобами. Користуючись мережею Інтернет, дібрати відомості для уроку математики.

3. Охарактеризувати групи параметрів за допомогою яких можна оцінювати якість електронного засобу навчального призначення.

4. Скласти характеристику одного із обраних електронних засобів навчання математики відповідно до параметрів науково-методичного рівня.

5. Проаналізувати причини недостатньо високого рівня використання вчителями математики ІКТ у професійній діяльності. Запропонувати заходи щодо підвищення рівня компетентностей вчителя математики в галузі ІКТ.

1.2. ІКТ і компетентнісний підхід у навчанні математики

1.2.1. Ключова та предметні математичні компетентності

Одним із ключових напрямів державної освітньої політики, зазначеним у Національній стратегії розвитку освіти в Україні на 2012-2021 роки [83], має стати модернізація структури, змісту й організації освіти на засадах компетентнісного підходу, переорієнтації змісту освіти на цілі сталого розвитку.

На думку сучасних науковців та педагогів, саме набуття життєво важливих компетентностей може дати людині можливості орієнтуватись у сучасному суспільстві, інформаційному просторі, швидкоплинному розвитку ринку праці, подальшому здобутті освіти.

Який він, сучасний успішний учень? Відзначимо основні навички: читає, пише, швидко друкує, уміє поставити питання. В умовах стрімкої зміни технологій йому важливо уміти самостійно вчитися, оскільки обсяги знань на сьогодні значно зросли. У молоді має бути сформоване критичне мислення, уміння виділяти у знайденому матеріалі головне, бути здатним працювати в команді. Все більшої ваги набуває електронне спілкування, робота в соціальних мережах, тому важливо формувати уміння вести ефективне та шанобливе спілкування. Головне, щоб учень відчував себе повноцінним громадянином суспільства та був щасливим.

Згідно Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти [71], **компетенція** – суспільно визнаний рівень знань, умінь, навичок, ставлень у певній сфері діяльності людини, а **компетентність** – *набута у процесі навчання інтегрована здатність учня, що складається із знань, умінь, досвіду, цінностей і ставлення, що можуть цілісно реалізовуватися на практиці*. Компетентність не протиставляється знанням, умінням, навичкам, вона їх вміщує, хоча не є їхньою простою сумою.

Закон України «Про освіту» визначає **компетентність** як *динамічну комбінацію знань, умінь, навичок, способів мислення, поглядів, цінностей, інших особистих якостей, що визначає здатність особи успішно соціалізуватися, провадити професійну та/або подальшу навчальну діяльність* [93, ст. 1. п. 15]. Під **компетентнісним підходом** будемо розуміти спрямованість навчально-виховного процесу на досягнення резуль-

татів, якими є ієрархічно підпорядковані ключові, загальнопредметні і предметні (галузеві) компетентності. **Ключова компетентність** – спеціально структурований комплекс характеристик (якостей) особистості, що дає можливість їй ефективно діяти у різних сферах життєдіяльності і належить до загальногалузевого змісту освітніх стандартів. Відповідна ключова компетенція – певний рівень знань, умінь, навичок, ставлень, які можна застосувати у сфері діяльності людини [71, с. 3].

Основними **ознаками ключових (життєвих) компетенцій**, на думку О. І. Пометун, є *поліфункціональність* – дають змогу вирішувати різноманітні проблеми в різних сферах особистого й суспільного життя; *надпредметність і міждисциплінарність* – застосовні не тільки в школі, а й на роботі, в сім'ї, у політичній сфері тощо; *багатовимірність* – охоплюють знання, розумові процеси, інтелектуальні, навчальні та практичні вміння, творчі відкриття, стратегії, технології, процедури, емоції, оцінки тощо; забезпечують широку сферу розвитку особистості – її логічного, творчого та критичного мислення, самопізнання, самовизначення, самооцінки, самовиховання тощо.

Під час симпозіуму Ради Європи за темою «Ключові компетенції для Європи» було визначено приблизний перелік ключових компетенцій. Відповідно до них було визначено перелік ключових компетентностей, які запропоновані у Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти [71, с. 5]. До них належать подані нижче. З трактуванням змісту компетентності подаємо ті із запропонованих, яких учні найбільшою мірою можуть набувати у процесі навчання з використанням ІКТ.

- **Уміння вчитись.** Структура уміння вчитись передбачає, що учень: сам визначає мету діяльності або приймає учителю; проявляє зацікавленість навчанням, докладає вольових зусиль; організовує свою працю для досягнення результату; добирає або знаходить потрібні знання, способи для розв'язування задачі; виконує в певній послідовності сенсорні, розумові або практичні дії, прийоми, операції; усвідомлює свою діяльність і прагне її вдосконалити; має уміння й навички самоконтролю та самооцінки.

- **Соціальна компетентність** – здатність особистості продуктивно співпрацювати з партнерами у групі та команді, виконувати різні ролі та функції у колективі.

- **Компетентності з інформаційних і комунікаційних технологій** передбачає здатність учня використовувати інформаційно-комунікаційні технології та відповідні засоби для виконання особистісних і суспільно значущих завдань.

- **Підприємницька компетентність** передбачає реалізацію здатностей співвідносити власні економічні інтереси й потреби з наявними

ресурсами, оцінювати власні професійні можливості, розробляти прості моделі дій та прийняття економічно й екологічно обґрунтованих рішень у динамічному світі та ін.

• **Громадянська, загальнокультурна компетентність, здоров'язберігаюча та ін. ключові компетентності.**

У Законі України «Про освіту» перелік ключових компетентностей учнів значно розширений. Зокрема, у статті 12 [93] мова йде про повну загальну середню освіту, метою якої є всебічний розвиток, виховання і соціалізація особистості, яка здатна до життя в суспільстві та цивілізованій взаємодії з природою, має прагнення до самовдосконалення і навчання впродовж життя, готова до свідомого життєвого вибору та самореалізації, відповідальності, трудової діяльності та громадянської активності. Досягнення цієї мети забезпечується шляхом формування **ключових компетентностей**, необхідних кожній сучасній людині для успішної життєдіяльності:

вільне володіння державною мовою;

здатність спілкуватися рідною (у разі відмінності від державної) та іноземними мовами;

математична компетентність (виділено нами. – Т. К.);

компетентності у галузі природничих наук, техніки і технологій;

інноваційність;

екологічна компетентність;

інформаційно-комунікаційна компетентність;

навчання впродовж життя;

громадянські та соціальні компетентності, пов'язані з ідеями демократії, справедливості, рівності, прав людини, добробуту та здорового способу життя, з усвідомленням рівних прав і можливостей;

культурна компетентність;

підприємливість та фінансова грамотність;

інші компетентності, передбачені стандартом освіти.

Спільними для всіх компетентностей є такі вміння: читання з розумінням, уміння висловлювати власну думку усно і письмово, критичне та системне мислення, здатність логічно обґрунтовувати позицію, творчість, ініціативність, вміння конструктивно керувати емоціями, оцінювати ризики, приймати рішення, розв'язувати проблеми, здатність співпрацювати з іншими людьми.

Вивчення математики сприяє формуванню в учнів майже усіх ключових компетентностей. Зокрема, засобом формування в учнів соціальної компетентності є метод проектів, детальніше про нього буде йти мова далі. Залучивши учнів до застосування з метою навчання всесвітньої мережі Інтернет, різноманітних програмних засобів, таких як GRAN1,

GeoGebra, бібліотек електронних наочностей, спеціалізованих пакетів тощо, вчитель створює умови не лише підвищення пізнавальної діяльності учнів і, як наслідок, підвищення ефективності уроків математики, а й саме сприяє формуванню в учнів ключових компетентностей, зокрема *математичної та інформаційно-комунікаційної компетентності*.

Характеризуючи *ключову математичну компетентність*, у навчальній програмі для основної школи [82] виокремлюють уміння, ставлення та ресурси, за допомогою яких її можна розвивати. Уміння: оперувати числовою інформацією, геометричними об'єктами на площині та в просторі; встановлювати відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо); розв'язувати задачі, зокрема практичного змісту; будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, інтерпретувати та оцінювати результати; прогнозувати в контексті навчальних та практичних задач; використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях.

Ставлення: усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві, розвитку технологічного, економічного й оборонного потенціалу держави, успішного вивчення інших дисциплін.

Навчальні ресурси: розв'язування математичних задач, зокрема таких, що моделюють реальні життєві ситуації.

Загальнопредметна (міжпредметна) компетентність – здатність учня застосовувати щодо міжпредметного кола проблем знання, уміння, навички, способи діяльності та ставлення, які належать до певного кола навчальних предметів і освітніх галузей [71, с. 5].

Предметна (галузева) компетентність – набутий учнями у процесі навчання досвід специфічної для певного предмета діяльності, пов'язаної із засвоєнням, розумінням і застосуванням нових знань. Відповідна до неї предметна компетенція – сукупність знань, умінь та характерних рис у межах змісту конкретного предмета, необхідних для виконання учнями певних дій з метою розв'язання навчальних проблем, задач, ситуацій [71, с. 5]. Математична компетентність виступає у ролі ключової та предметних компетентностей.

В навчальній програмі з математики [82] виокремлюють такі **наскрізні лінії ключових компетентностей** як «Екологічна безпека й сталий розвиток», при розгляді якої важливе місце займають відсоткові обчислення, функції, елементи статистики, «Громадянська відповідальність», «Здоров'я і безпека», «Підприємливість і фінансова грамотність», які реалізуються під час вивчення відсоткових обчислень, рівнянь та функцій. Наскрізні лінії є соціально значимими надпредметними темами, які допомагають формуванню в учнів уявлень про суспільство в цілому, розвивають здатність застосовувати знання і уміння у реальних

життєвих ситуаціях. І майбутнього учителя математики необхідно готувати до реалізації зазначених наскрізних ліній.

За збірником задач з математики Д. В. Васильєвої та Н. І. Василюк [11] наведемо приклади задач до теми «Функція» за допомогою яких здійснюється реалізація наскрізних ліній ключових компетентностей.

Задача 1 (*Підприємливість і фінансова грамотність*). Приватний підприємець платить менеджеру за x кг проданого товару ($50x + 100$) грн. Якщо ж товару продано не менше 10 кг, то приватний підприємець доплачує менеджеру ще 20% комісійних. Далі пропонують за малюнком обрати один із графіків, який може бути моделлю до даної задачі.

Задача 2 (*Екологічна безпека й сталий розвиток*). У таблиці в посібнику подано дані про перевезення в Україні лісових вантажів морським транспортом (у тис. т). Потрібно побудувати графік таблично заданої функції, встановити область визначення і множину її значень, зробити висновки щодо монотонності. Учнів заохочують поміркувати, яке з транспортних перевезень екологічніше. Як, на думку користувача, пояснити зменшення перевезень лісових вантажів?

Задача 3 (*Громадянська відповідальність*). Пропонують розглянути графіки кількості сиріт в Україні, всиновлених іноземцями і українцями впродовж 12 років (графіки подаються у посібнику). Далі потрібно відповісти, чи збігаються області визначення і області значень функцій, заданих графіками, визначити, на яких проміжках графік кожної з функцій спадає, упродовж яких років всиновлення іноземцями українських дітей-сиріт переважало над всиновленням їх українцями?

Задача 4 (*Здоров'я і безпека*). Медичними працівниками встановлено, що для нормального розвитку дитини, якій x років ($x < 18$), вона повинна спати t годин на добу, де t визначається формулою: $t = 16 - \frac{x}{2}$. Знайдіть $t(5)$, $t(10)$, $t(14)$. Примітка: повноцінний сон необхідний для нормального росту й розвитку, особливо в період підвищення навчального навантаження, психоемоційного стресу. Постійні «недосипання» призводять до погіршення загального стану, головного болю, зниження імунітету та пам'яті.

Згідно Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти [71], основною метою освітньої галузі «Математика» є формування в учнів математичної компетентності на рівні, достатньому для забезпечення життєдіяльності в сучасному світі, успішного оволодіння знаннями з інших освітніх галузей у процесі шкільного навчання, забезпечення інтелектуального розвитку учнів, розвитку їх уваги, пам'яті, логіки, культури мислення та інтуїції [71, с. 20].

Закон України «Про вищу освіту» визначає **компетентність** фахівця як динамічну комбінацію знань, вмінь і практичних навичок, способів мис-

лення, професійних, світоглядних і громадянських якостей, морально-етичних цінностей, яка визначає здатність особи успішно здійснювати професійну та подальшу навчальну діяльність і є результатом навчання на певному рівні вищої освіти [91, ст. 1. п. 13]. Результати навчання (компетентності) - знання, уміння, навички, способи мислення, погляди, цінності, інші особисті якості, які можна ідентифікувати, спланувати, оцінити і виміряти та які особа здатна продемонструвати після завершення освітньої програми або окремих освітніх компонентів [91, ст. 1. п. 19], [92].

Знання - осмислена та засвоєна суб'єктом інформація, що є основою його усвідомленої, цілеспрямованої діяльності. Знання поділяються на емпіричні (знання фактів та уявлення) і теоретичні (концептуальні, методологічні). уміння/навички - здатність застосовувати знання для виконання завдань та розв'язання проблем. Уміння/навички поділяються на когнітивні (що включають логічне, інтуїтивне та творче мислення) і практичні (що включають ручну вправність, застосування практичних способів (методів), матеріалів, знарядь та інструментів) [92].

Компетентнісний підхід полягає в зміщенні акценту з накопичування нормативно визначених знань, умінь і навичок до формування й розвитку в учнів здатності практично діяти, застосовувати індивідуальні техніки і досвід успішних дій у ситуаціях професійної діяльності та соціальної практики. Тому, не можна відносити до математичної компетентності запам'ятовування та пам'ятання формул, застосування готових схем розв'язання формальних задач. С. А. Раков досліджує можливості набуття майбутніми учителями математичної компетентності у навчанні дослідницьким підходом [50].

За С. А. Раковим **математична компетентність** – це вміння бачити та застосовувати математику у реальному житті, розуміти зміст та метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані, оцінювати похибку обчислень. До предметно-галузевих математичних компетентностей С. А. Раков відносить подані нижче компетентності.

- **Процедурна компетентність** – уміння розв'язувати типові математичні задачі. *Напрями набуття*: використовувати на практиці алгоритм розв'язання типових задач; вміти відтворювати контекст задачі, що виникають в індивідуальній і соціальній практиці і які зводяться до типових; вміти систематизувати типові задачі, знаходити критерії зведення задач до типових; вміти розпізнавати типову задачу або зводити її до типової; вміти використовувати різні інформаційні джерела для пошуку процедур розв'язувань типових задач (підручник, довідник, Інтернет-ресурси).

- **Логічна компетентність** – володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень. *Напрями набуття*: володіти і ви-

користувати на практиці понятійний апарат дедуктивних теорій (поняття, визначення понять, наочний смисл понять, обсяг понять, властивості понять, межі понять, відношення між поняттями; висловлювання, предикати, логічні операції, аксіоми і теореми, доведення теорем, контрприкладів до теорем тощо); будувати, вдосконалювати та використовувати на практиці власну систему математичних уявлень (в арифметиці, геометрії, алгебрі та початках аналізу, стохастичі) на основі понятійного апарату дедуктивних теорій; відтворювати дедуктивні доведення теорем та доведення правильності процедур розв'язань типових задач; проводити дедуктивні обґрунтування правильності розв'язання задач та шукати логічні помилки у неправильних дедуктивних міркуваннях; використовувати математичну та логічну символіку на практиці при оформленні математичних текстів.

• **Технологічна компетентність** – володіння сучасними математичними пакетами. *Напрями набуття*: розв'язувати типові задачі з використанням основних типів професійного математичного програмного забезпечення (пакети символічних перетворень (наприклад, Derive), динамічної геометрії (наприклад, DG, Gran2D, Gran3D), електронні таблиці (наприклад, Excel) (*на нашу думку, доцільним є виділити й таке математичне програмне забезпечення як GeoGebra, бібліотека електронних наочностей «Алгебра 11 клас» - Т. К.*); оцінювати похибки при використанні наближених обчислень; будувати комп'ютерні моделі для предметної області задачі з метою її евристичного, наближеного або точного розв'язання; досліджувати комп'ютерні моделі за допомогою комп'ютерних експериментів.

• **Дослідницька компетентність** – володіння методами дослідження соціально та індивідуально значущих задач математичними методами. *Напрями набуття*: формулювати математичні задачі на основі аналізу суспільно та індивідуально значущих задач (ідеалізація, узагальнення, специфікація); будувати аналітичні та алгоритмічні (комп'ютерні) моделі задач; висувати та емпірично перевіряти справедливості гіпотез, спираючись на відомі методи (індукція, аналогія, узагальнення), а також на власний досвід досліджень; інтерпретувати результати, отримані формальними методами, у термінах вихідної предметної області; систематизувати отримані результати, досліджувати межі справедливості отриманих результатів, установлювати зв'язки з попередніми результатами, модифікувати вихідні задачі, шукати аналогії в інших розділах математики.

• **Методологічна компетентність** – уміння оцінювати доцільність використання математичних методів для розв'язання індивідуально та суспільно значущих задач. *Напрями набуття*: володіти методоло-

гією дослідження індивідуально та суспільно значущих задач математичними методами; розуміти переваги та обмеженість математичних методів, оцінювати на практиці ефективність математичних методів; володіти методологією використання професійних математичних пакетів комп'ютерної алгебри та динамічної геометрії для дослідження математичних задач, розуміти переваги та обмеженість пакетів комп'ютерного моделювання у галузі математики, оцінювати на практиці їх ефективність; аналізувати ефективність розв'язування індивідуально та суспільно значущих задач математичними методами; формулювати математичні задачі на основі аналізу індивідуально та суспільно значущих проблем; рефлектувати власний досвід розв'язування задач та подолання перешкод з метою постійного вдосконалення власної методології проведення досліджень.

Проблеми набуття учнями понятійної, алгоритмічної та дослідницької компетентностей досліджувалися зокрема А. М. Капіносовим, В. В. Корольським, О. В. Часніковою [73], [74], [104]. Зроблено акцент на виділенні складників відповідних компетентностей та описі рівнів їх набуття. В рамках компетентнісного підходу, навчальна діяльність розглядається як цілісний і багатофункціональний процес, що складається із трьох компонентів: мотиваційний (ставлення до), змістовий (відомі й нові знання, вміння, навички) і процесуальний (способи виконання діяльності на різних рівнях складності).

У рамках дослідження міжнародної програми з оцінки освітніх досягнень учнів PISA (Programme for International Student Assessment) було визначено, що **математична компетентність** – це найбільш загальні здібності та вміння, що включають математичне мислення, письмову і усну математичну аргументацію, постановку і вирішення проблеми, математичне моделювання, використання математичної мови, сучасних технічних засобів. Вченими-дослідниками, що розробили матеріали з оцінки знань і вмінь для міжнародної програми PISA, були виділені **три ієрархічних рівні математичної компетентності**:

Перший рівень (рівень відтворення) – це пряме застосування в знайомій ситуації відомих фактів, стандартних прийомів, розпізнавання математичних об'єктів і властивостей, виконання стандартних процедур, застосування відомих алгоритмів і технічних навичок, робота зі стандартними, знайомими виразами і формулами, безпосереднє виконання обчислень.

Другий рівень (рівень встановлення зв'язків) будується на репродуктивній діяльності щодо вирішення завдань, які, хоча і не є типовими, але все ж знайомі учням або виходять за рамки відомого лише в дуже малому ступені. Зміст завдання підказує, матеріал, якого розділу математики треба використовувати і які відомі методи застосувати. Зазвичай в цих

завданнях є більше вимог до інтерпретації розв'язання, вони передбачають встановлення зв'язків між різними уявленнями ситуації, описаної в задачі, або встановлення зв'язків між даними в умові завдань.

Третій рівень (рівень міркувань) будується як розвиток попереднього рівня. Для вирішення завдань цього рівня потрібні певна інтуїція, роздуми і творчість у виборі математичного інструментарію, інтегрування знань з різних розділів курсу математики, самостійна розробка алгоритму дій. Завдання, як правило, включають більше даних, від учнів часто потрібно знайти закономірність, провести узагальнення та пояснити або обґрунтувати отримані результати.

У навчальних програмах з математики для учнів [85], відповідно до ступеня оволодіння знаннями і способами діяльності виокремлюються чотири **рівні навчальних досягнень учнів з математики**: початковий, середній, достатній, високий. У рамках компетентнісного підходу, з урахуванням особливостей навчальної програми з математики, певною мірою можемо співвідносити перший, другий і третій рівень математичної компетентності відповідно з середнім, достатнім та високим рівнем навчальних досягнень учнів. Початковий рівень розглядати як той, що передує математичній компетентності. Задля відповідності державним стандартам оцінювання якості математичної підготовки учнів, будемо працювати у термінах навчальної програми, а отже розглядати для учнів задачі середнього, достатнього та високого рівнів, що відповідають рівню відтворення, рівню встановлення зав'язків та рівню міркувань.

1.2.2. Розвиток особистості у процесі навчання математики з використанням ІКТ

Щоб розвивати особистісні якості учасників навчального процесу, вчителю необхідно діагностувати рівень їх сформованості та здійснювати їх моніторинг. Можна виокремити такі *групи якостей*: а) *організаційно-діяльнісні*, що характеризують мотиваційно-творчу спрямованість, самоорганізацію; б) *пізнавальні* (уміння аналізувати, синтезувати, порівнювати, узагальнювати, класифікувати, систематизувати; здатність втілювати здобуті знання в духовні і матеріальні форми); в) *творчі* (здатність переносити знання і уміння в нові ситуації; здатність до формулювання гіпотез, закономірностей, уміння бачити відоме в невідомому і навпаки; здатність до дослідницької діяльності, творча уява, фантазія; дивергентність мислення) [102].

Однією з умов ефективного розвитку особистісних якостей учасників комп'ютерно-орієнтованого навчання математики є використання у навчально-виховному процесі такої комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання математики, яка б сприяла активізації їх пошуково-дослідницької діяльності, унаочненню складного для сприйняття абс-

трактного матеріалу, проведенню обчислювальних експериментів зі створеними моделями, динамічними кресленнями з метою висування гіпотез; розв'язуванню творчих, нестандартних задач; посиленню прикладної спрямованості навчання [30].

Ю.В. Триус [63] зазначає, що мислення людини, яка має навички роботи з персональним комп'ютером, вигідно відрізняється організованістю, внутрішньою дисципліною, логічною строгістю.

На думку М.М. Фіцули [99], комп'ютерно-орієнтоване навчання розвиває такі якості особистості, як уміння планувати і раціонально будувати виконавчі операції, точно визначати цілі діяльності, що сприятиме розвитку в учнів охайності, точності, обов'язковості.

Не заперечуючи того, що комп'ютер є потужним засобом зі значними дидактичними можливостями, деякі автори зауважують, що комп'ютеризоване навчання недостатньо розвиває логічне, образне мислення, істотно обмежує властивості усного мовлення. Під його впливом формується формальна логіка мислення на шкоду почуттям і творчим розумовим операціям. М.М. Фіцула [99] привертає увагу до проблеми швидкої стомлюваності учнів, що працюють за комп'ютером, частих випадків погіршення зору і окремих випадків розладів нервової системи. В умовах автоматизованого навчання можуть розвиватися егоїстичні нахили людини, загострюватися індивідуалізм, розширюватися конкурентність, сповільнюватися виховання колективізму, взаємодопомоги.

Д. Пойа, аналізуючи творчий математичний процес, акцентує увагу на тому, що навчання повинне плекати ростки винахідливості, готувати учасників навчального процесу до «відкриття», звертається до вчителів із закликом «Вчити здогадуватися!» [90, 389]. При цьому тих, хто навчається, має відрізнити строге доведення від нестрогої спроби, доведення від здогадки, розумну здогадку від менш розумної.

Для реалізації творчої ситуації у навчально-виховному процесі доцільно дотримуватися наступної *психолого-педагогічної структури творчої навчальної діяльності учнів* [95], [102]: 1) бажання, зацікавленість, ентузіазм, потяг до формулювання проблеми, психологічна готовність до її вирішення; 2) наявність знань, умінь та навичок, необхідних для чіткого усвідомлення і формулювання творчого завдання; 3) зосередження зусиль та пошуки додаткових відомостей для розв'язування завдання (якщо завдання не вирішується, відбувається перехід до наступних етапів); 4) інкубація – підсвідомий аналіз і вибір, уявний відхід від вирішення проблем, переключення на інші види діяльності; 5) еврика (осяння, інсайт) – це може бути лише перший крок до розв'язання завдання, за яким будуть необхідні інші; 6) перевірка (верифікація). При плануванні творчої навчальної діяльності учитель має враховувати рівень розвитку тих, хто навчається, і прогнозувати вихід із творчих ситуацій для різних груп, передбачати надання диференційованої допомоги в ході творчої діяльності.

Задачу вважатимемо *творчою*, якщо вона або деяка із її підзадач є

нерутинною відкритою пізнавальною задачею. В.А. Крутецький [73,10] виділяє задачі з неформальною вимогою, з зайвими даними, з кількома розв'язками, зі змінною умовою, задачі на доведення. У навчанні доцільно використовувати типологію навчально-творчих задач за В.І. Андрєєвим [64, 42] та С.О. Сисоєвою [95, 320].

На основі аналізу джерел [73], [78], [79], [90], [101] та ін. можна виокремити *етапи розв'язування творчих задач*: 1) бачення задачі, самостійність у її пошуку і постановці; 2) виділення відомих і невідомих даних, процесів; первинне моделювання їх якостей, аналіз умови; 3) пошук невідомого в задачі (висунення гіпотез), що може потребувати довізнання умов, розгортання деяких понять, що стосуються даних задачі; 4) виведення інших характеристик даних задачі, встановлення наявності у них властивостей, поданих у визначеннях, зближення даних і вимог задачі; 5) пошук невідомого за допомогою більш визначених за змістом прийомів для підвищення рівня впевненості в собі, знаходження і використання подібної задачі, розподілення задачі на частини; пошук невідомого за допомогою прийомів менш визначених за змістом, узагальнення, конкретизація задачі, формулювання і розв'язування оберненої задачі; 6) перевірка і аналіз гіпотез, виділення обґрунтувань гіпотез, аналіз переваг і недоліків, розгляд причин некоректності гіпотез; виявлення схожості у ідеях та умовах.

В. І. Андрєєв акцентує увагу на багатоплановості застосування навчально-творчих задач [64, 45], а саме: а) для оволодіння новим знанням про поняття, закони, теорії, принципи, методи, правила, засоби діяльності; б) розумовими і практичними вміннями; в) для актуалізації знань, умінь; г) для контролю знань та умінь; д) з метою діагностики і розвитку творчих якостей особистості.

Розвиток творчих якостей особистості відбувається у процесі розв'язуванні навчально-творчих задач. Задачі мають не тільки і не стільки сприяти закріпленню знань, тренуванню в їх застосуванні, скільки формувати дослідницький стиль розумової діяльності, метод підходу до виучуваних явищ. Математичне моделювання, прикладна спрямованість навчального матеріалу активізує творчу діяльність учасників навчально-процесу.

До найбільш істотних переваг комп'ютерно-орієнтованого навчання математики у порівнянні з традиційним відносно надання учасникам можливості самостійно ставити і розв'язувати за допомогою комп'ютера різноманітні навчальні задачі. Навіть у тих випадках, коли вчитель виконує певний етап у розв'язуванні навчальної задачі, його функція полягає не лише в тому, щоб забезпечити правильне розв'язування задачі, а щоб допомогти учневі / студентові у засвоєнні способу її розв'язування, у досягненні певних навчальних цілей. До основних психологічних механізмів навчання засобами ІКТ відносно проблему зворотного зв'язку, довізнання навчальної задачі, динамічного розподілу функцій управ-

лінія між учителем, комп'ютерним забезпеченням, учнями /студентами.

Враховуючи типології навчально-творчих задач В.А. Андрєєва [64], В.А. Крутецького [73], В.О. Моляко [81], С.А. Ракова [50], С.О. Сисоевої [95], можна виокремити типи завдань, які доцільно використовувати для розвитку творчих якостей особистості у процесі комп'ютерно-орієнтованого навчання математики.

Задачі на виявлення протиріччя формують бачення протиріччя, здатність формулювати проблему, діалектичність мислення. *Задачі з відсутністю повних вихідних даних* бажано використовувати для розвитку здатності знаходити потрібні відомості та переносити їх у нові ситуації. Такі задачі називаємо «відкритими». Розмаїття дослідницьких задач з відкритою умовою чи відкритою вимогою можемо розглянути завдяки використанню GRAN, GeoGebra і DG як інструментів дослідження. *Завдання на прогнозування, відкриття теорем* за допомогою програмного засобу доцільно використовувати для розвитку здібності генерувати ідеї, висувати гіпотези. Для цього слід проводити обчислювальні експерименти і аналізувати чисельні величини створених динамічних виразів.

Застосовуючи GRAN, DG для розв'язування практичних задач, а серед них задач на оптимізацію, можна сприяти розвитку гнучкості, дивергентності мислення тих, хто навчається. Тому слід пропонувати *добірки задач на дослідження* моделі-функції, створювати динамічні креслення, пропонувати різні способи розв'язування однієї і тієї ж задачі.

Завдання на рецензування для забезпечення розвитку критичності мислення, здатності до оціночних суджень, пропонуються найчастіше у процесі навчання у співпраці, за методом проєктів з використанням ІКТ.

Задачі на розробку алгоритмічних і евристичних приписів як результатів дослідження за допомогою програмного засобу, бажано використовувати для розвитку здібності до узагальнення і згортання мислительних операцій, здатності до рефлексії мислення. Важливо пропонувати завдання на здійснення умовиводів через узагальнення.

Особливе значення у процесі використання [GRAN-2D](#), DG, GeoGebra слід приділяти створенню динамічних опорних конспектів (динамічні креслення, оснащені системою підказок), які цілеспрямовують тих, хто навчається, в ході самостійного вивчення окремих питань. До задач на винахідливість можна віднести завдання на розробку макроконструкцій для більш складних креслень.

На факультативних заняттях, на спецкурсі математики доречно пропонувати учням розв'язувати різноманітні задачі-проблеми, задачі-загадки, задачі-фантазії. Інтерес до задачного практикуму підвищується, якщо до фонду задач включати завдання, створені учасниками навчального процесу або дібрані ними з посібників за якоюсь суттєвою ознакою. Важливими є задачі, розв'язок яких цікавий чи несподіваний, або який можна естетично і вигідно подати у відомому програмному продукті. Для розвитку інтелектуально-логічних здібностей бажано пропону-

вати логічні задачі, задачі з параметрами. Застосовуючи ПЗ [GRANI](#), GeoGebra, можна до багатьох задач з параметрами побудувати відповідне ГМТ і здійснювати аналіз задачі.

Важливо для учнів уміти знайти в літературі і подати за допомогою презентацій, файлів, створених за допомогою ПЗ, історичні математичні задачі, відомості про математиків, розробників задач з інформатики. Творчу фантазію та уяву можна розвивати, пропонуючи завдання на створення різноманітних малюнків, в яких криві можна описати функціональними залежностями; орнаментів, геометричних паркетів, калейдоскопів.

Щоб розвивати в учасників навчального процесу просторову уяву, розглядають завдання на створення слайдів з перерізами многогранників площиною, динамічних креслень до стереометричних задач, многогранників за їх описами і розгортками, виконують перетворення об'єктів за допомогою ПЗ та інші.

Важливо у процесі навчання з використанням ІКТ дотримуватися дидактичних і психологічних принципів розвивального навчання [98].

Контрольні питання і завдання

1. Чому розвиток позитивних особистісних якостей учасників комп'ютерно-орієнтованого навчання математики є актуальною проблемою?

2. Охарактеризувати типології навчально-творчих задач за В.А. Андрєєвим, С.О. Сисоєвою, В.А. Крутецьким, С.А. Раковим.

3. Охарактеризувати психолого-педагогічну структуру творчої навчальної діяльності учасника навчального процесу, описати етапи розв'язування творчих задач.

4. Для комп'ютерно-орієнтованих занять за обраними темами визначити дидактичну, розвивальну і виховну мету; дібрати навчально-творчі завдання.

1.3. Програмно-методичний комплекс «Математика, 5-6 клас»

ПМК «Математика, 5-6 клас»¹ для загальноосвітніх закладів призначений для викладання та вивчення математики в 5-6 класі ([8-9], [20-22] до розділу 7). Розроблено засіб на замовлення МОН України. У процесі створення засобу розробники використовували підручник Г. М. Янченко, посібник А.М. Капіносова [70]. Матеріали для опанування засобом оприлюднені нами в електронному навчальному курсі [29].

Урок в ПМК – це сукупність зображень, відеофрагментів, текстових пояснень, тестових запитань, що використовує вчитель при проведенні заняття. Урок складається з певної кількості кроків, а крок – з одного або декількох кадрів. Кадр – це частина кроку, що висловлює, демонструє певну властивість, явище, думку. Кожен урок розкриває конкретну тему та містить засоби для її пояснення: текст, формули, статичні та динамічні схеми, моделі, анімації, аудіо- та відеофрагменти, малюнки, світлини тощо. Для перевірки знань передбачено контрольні питання та завдання, задачі, тести для самоконтролю та контролю. Відомості про результати роботи учнів учитель може переглядати на головному комп'ютері у зведеному вигляді та по кожному учню окремо. Крім того, програмний засіб містить додаткові відомості: довідку по роботі з ПМК, словник термінів і понять, історичну довідку, додатки (таблиця простих чисел, координатна площина).

Оскільки при вивченні математики складність навчання обумовлюється великою кількістю рутинних обчислень, які принципово не впливають на логіку розв'язування задач, то для учня важлива побудова ходу розв'язування математичної задачі, розвиток і сприйняття евристики у виучуваному матеріалі, динамічна подача величин та їх відношень, ілюстрація практичних дій із математичними об'єктами, а не лише отримання відповіді чи готових результатів. Завдяки використанню на уроці ПЗ «Математика, 5-6 клас», вчитель зможе вивільнити час для творчого розвитку учнів. Засіб може бути використаний учителем для підготовки до уроку, для пояснення нового матеріалу, для створення власних уроків і редагування існуючих, для формування та закріплення навичок розв'язування вправ, передбачених програмою, для проведення тестового контролю знань, індивідуальних і факультативних занять.

1. Для інсталяції засобу «Математика, 5 клас»² у вікні, що з'явиться, необхідно ввести текст «X:\Математика, 5 клас_Setup.exe», де X – літе-

¹ Математика, 5 клас [Електронний ресурс] : мультимедійний підручник. – Режим доступу: – <http://rozumniki.net/catalog/products/matematyka/matematyka-5-kl/> (дата звернення: 30.06.2019).

² Програмно-методичний комплекс навчального призначення “Математика, 5-6 клас” для загальноосвітніх закладів версія 1.0. – Рівне.: ПП Контур плюс, 2006. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: Pentium, тактова частота – від 1100 MHz, 128 Mb RAM, CD-ROM Windows 98/XP.

ра, якій відповідає дисководу для читання компакт-дисків.

2. ПМК працює в режимах учителя, уроку, учня, підручника, конструктора. У режимі «Підручник» ліва частина екрана відображає навігаційне дерево, а права – методичні рекомендації та текстові відомості для обраної теми чи уроку. Важливим засобом є *Конструктор уроків*, за допомогою якого вчитель може створити уроки за власною методикою, а при потребі відредагувати запропоновані уроки (рис. 1.3). Для вибору режиму необхідно скористатися меню, яке розташоване у лівому верхньому куті екрана. Для того, щоб вибрати необхідний урок, потрібно знайти його за допомогою дерева навігації і активізувати натисканням курсору.

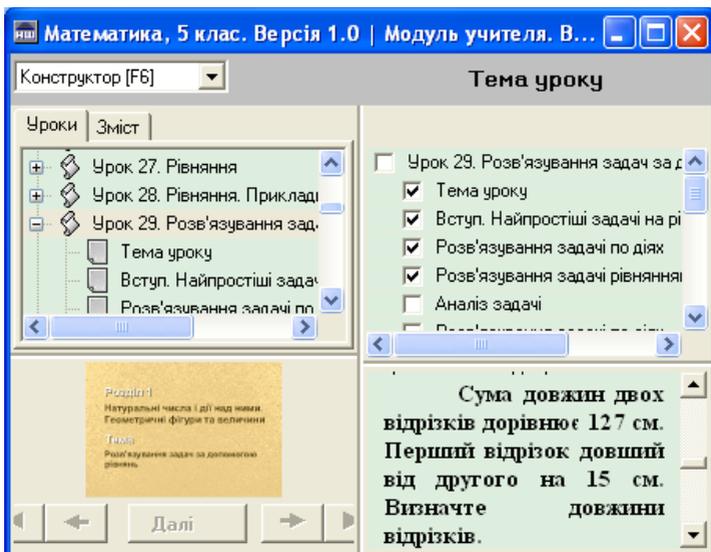


Рис. 1.3. Вікно екрана ПМК «Математика, 5 клас», режим конструктора

3. Переглянемо у режимі *Конструктор* урок №29 (рис. 1.3) на тему «Рівняння. Розв'язування задач». Перейти до цього режиму можемо натисканням клавіші F6. У вкладці *Уроки* виберемо потрібний урок у лівому верхньому вікні та завантажимо його для покрокового перегляду у праве верхнє вікно. За допомогою курсору миші запускають на виконання певний крок у правому верхньому вікні, прослуховують його порціями завдяки вибору опцій *Далі*, *Пуск*, *Пауза* у лівому нижньому вікні.

Дидактична мета уроку №29 – навчити учнів розв'язувати задачі різними способами. Мета застосування ПМК – формувати навички аналізу і розв'язування задач різними способами, уміння встановлювати зв'язки між величинами в умовах задач.

На етапі пояснення нових знань за допомогою ПЗ формуємо навички поетапного аналізу умови задачі. Паралельно з текстом на моніторі подається дикторський супровід.

Наведемо приклади задач, які пропонуються учням для розв'язування:

1) Коли водій вирушив у дорогу, лічильник автомобіля показував 17 697 км. Якими будуть покази лічильника через 875 км?

2) Під час виборів за одного кандидата проголосувало 39 859 виборців, а за іншого – на 1 562 виборця менше. Скільки виборців проголосувало за цих кандидатів разом?

3) Сума довжин двох відрізків дорівнює 127 см. Перший відрізок довший від другого на 15 см. Визначте довжини відрізків (рис. 1.6, 1.7).

4) Собака кинувся наздоганяти господаря, коли той був на відстані 320 м. Через який час собака наздожене господаря, якщо швидкість господаря 1 м/с, а собаки – 9 м/с (рис.1.5)?

За допомогою засобу за першим кроком подається умова задачі. На другому кроці, щоб проаналізувати завдання, учням ставляться питання, а після паузи подається на них відповідь. Приклади питань: Яка умова задачі? Яке питання задачі? Які величини зустрічаються в задачі? Які числові значення величин у задачі? Як по-іншому сформулювати питання? Які зв'язки між числовими значеннями в задачі? Мета третього кроку – розв'язування задачі, ілюстрація розв'язку задачі. Мета четвертого кроку – формування навичок розв'язування задач різними способами. Заключний крок – розв'язування за допомогою рівняння.

До значної кількості завдань окремим кроком подаються схематичні малюнки (рис. 1.4). В окремих слайдах малюнки динамічні і побудови мають дикторський супровід.

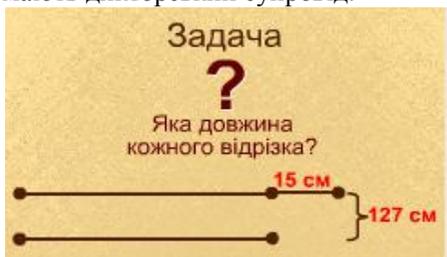


Рис. 1. 4



Рис. 1. 5.

І спосіб. 1) $127 - 15 = 112$ (см) — сума довжин двох однакових частин

2) $112 : 2 = 56$ (см) — довжина другого відрізка.

3) $56 + 15 = 71$ (см) — довжина першого відрізка.

ІІ спосіб. 1) $127 + 15 = 142$ (см) — сума довжин двох відрізків, якби довжина другого була б такою, як довжина першого.

2) $142 : 2 = 71$ (см) — довжина першого відрізка.

3) $71 - 15 = 56$ (см) — довжина другого відрізка.

Рис. 1.6. Фрагмент файлу з текстовими відомостями до задачі №3

4. У режимі *Конструктор* учитель може створити уроки за власною методикою, а також відредагувати запропоновані розробниками уроки.

У правому верхньому вікні для уроку подано всі кроки (рис. 1.3). Для того, щоб крок тимчасово не відображався під час уроку, слід зняти відмітку, що знаходиться ліворуч від назви кроку. Повторне натиснення на це поле відновить крок в уроці. Щоб видалити крок з уроку, потрібно натиснути на назві кроку правою кнопкою миші і вибрати пункт меню *Видалити крок*. Таке видалення не знищить крок з інших уроків і зі змісту. Під час проведення уроку кроки відображатимуться в тій послідовності, в якій вони подані у списку. Кроки можна переставляти на іншу позицію в уроці, перетягуючи їх за допомогою вказівника миші вгору або донизу.

Розглянемо, як можна редагувати запропонований розробниками урок №29 «Рівняння. Розв'язування задач». Якщо вчитель планує на уроці за допомогою ПЗ не розглядати першу задачу, а залишити її учням додому для самостійного опрацювання, то перед кроками 2, 3, 4, які відповідають цій задачі, у правому верхньому вікні слід зняти відмітки. Доцільно зняти відмітку і перед кроком «Аналіз задачі на визначення довжин відрізків», запропонувавши школярам здійснити такий аналіз у класі. Наступний крок, у ході якого пропонується короткий запис завдання, доречно подати після того, як учні спробують самостійно здійснити такий запис.

5. Після редагування уроку слід перейти до вкладки *Уроки* і виконати дію *Оновити список* (права кнопка миші). Збереження створеного уроку відбувається автоматично при виході з конструктора.

6. Додамо з попереднього уроку №28 два завдання на розв'язування рівняння для актуалізації опорних знань та умінь учнів. Ці завдання вчитель може запропонувати на початку уроку як усні вправи, а головну увагу при їх розв'язуванні звернути на визначення невідомих компонентів рівняння. Для цього потрібно не закриваючи урок №29, відкрити у вкладці *Зміст* урок №28, додати (перетягнути) до складових уроку №29 задачу №1 і задачу №2. Розташуємо ці кроки першим та другим, перед оголошенням теми і мети даного уроку.

7. Для створення та формування нового уроку потрібно відкрити вкладку *Уроки*, викликати контекстне меню (натиснути правою кнопкою миші на рядку *Уроки курсу*) і в меню, що з'явиться, вибрати рядок *Створити урок* та ввести тему уроку. Після підтвердження введення теми вона з'явиться останньою у дереві навігації. Для того, щоб додавати та редагувати кроки в уроці, слід натиснути на назві уроку правою кнопкою миші і в меню, що з'явиться, вибрати рядок *Редагувати урок*. У вікні праворуч від дерева навігації відобразиться список кроків цього уроку (рис. 1.3). Якщо урок новостворений, цей список буде порожнім. Для того, щоб додати крок до уроку, потрібно знайти його в дереві навігації (вкладка *Зміст* або *Уроки*) і перетягнути на список кроків уроку, що редагується.

8. Перед тим як розпочати підготовку до уроку (до перегляду пропонуваних кроків та їх аналізу), радимо відкрити текстовий редактор Microsoft Word, ввімкнути буфер обміну (пункт меню *Правка \ Буфер обміну*) для того, щоб у ході перегляду можна було зробити копії окремих екранів (на клавіатурі клавіша Print Screen). Пізніше окремі з вибраних копій вчитель зможе при потребі опрацювати за допомогою графічного редактора та імпортувати як окремі кроки уроку.

9. Зміст курсу відповідно до тем, розділів, окремих елементів уроків знаходиться у вкладці *Зміст*. Ця вкладка містить матеріали відповідно до кожного уроку. Окремі кроки, тестові завдання, блоки самоперевірки можуть повторюватися в декількох уроках.

Нові кроки необхідно спочатку створити у вкладці *Зміст*, а потім сформувати урок у вкладці *Уроки*.

Якщо є потреба в тому, щоб створити нову тему, за допомогою правої кнопки миші активують рядок *Зміст курсу* і у вікні, що з'явилося, вибирають рядок *Створити тему* (рис. 1.7) та вводять її назву. Після введення назви теми, вона появляється останньою у переліку тем.

10. Для створення нового фрагмента уроку у вкладці *Зміст* правою кнопкою миші натискають на назві відповідної теми і вибирають рядок *Створити крок* (рис. 1.9).

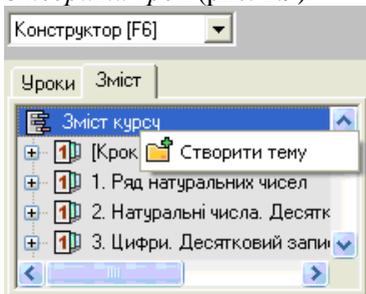


Рис. 1. 7.

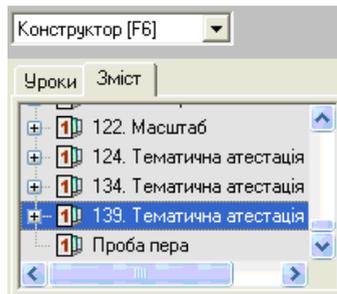


Рис. 1. 8.

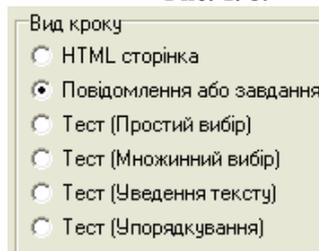


Рис. 1. 9

При створенні кроку *HTML сторінка* з'явиться вікно редактора, в якому можна вводити текст, форматувати його, а також вставити зображення. Для розміщення на сторінці малюнка слід натиснути кнопку *Вставити зображення* і у вікні, що з'явиться, вибрати у папці потріб-

ний файл із малюнком. При потребі можна скористатися колекцією малюнків, які розміщені у папці *C:\Program Files\Microsoft Office\CLIPART\PUB60COR*. При вставленні зображення у кадр, можна змінити як його розміщення відносно тексту, так і розміри самого зображення. Наприклад, для збільшення малюнка вдвічі записують у вкладці *Параметри зображення* число 2, для зменшення вдвічі – 0,5.

Крок *Повідомлення або Завдання* (рис. 1.10) використовують для поточної перевірки знань, самоперевірки або під час проведення уроку (для проведення тестувань із метою оцінювання не використовують). Якщо створено вид кроку *Повідомлення*, то під час перегляду в *Режимі уроку* на екран виводиться текст і, якщо необхідно, малюнок. Якщо створено вид кроку *Завдання*, під час перегляду в *Режимі уроку* на екрані спочатку відображається текст питання, умова завдання чи хід розв'язування, а після натиснення кнопки *Далі* з'являється коментар чи відповідь на питання. Для створення такого виду кроку відкривається діалогове вікно *Додати відповідь*.

Тип завдання: Завдання

Заголовок завдання: Задача про господаря і собаку

Кількість балів: 1

Запитання

Завдання

9 м/с 1 м/с

Через який час собака наздожене господаря?

320 м

Розв'язання:

$9 - 1 = 8$ (м/с) - швидкість зближення собаки і господаря

$320 : 8 = 40$ (с) - час, через який собака наздожене господаря

Відповіді

Додати відповідь

№1

Вставити зображення

Відповідь: 40 с

Попередній перегляд Формули Зберегти Вихід

Рис. 1.10. Вікно створення кроку *Завдання*

Кнопку *Формули* призначено для виведення на екран інструкції із введення математичних формул. Починається і закінчується написання формули введенням символів « » (подвійне підкреслення). Після завершення вводу кроку його слід зберегти.

11. Використовуючи ПМК, можна здійснити поточний контроль та заключне оцінювання знань учнів у формі тестування. Завдання першого

рівня подані у формі тестових завдань закритого типу (вибір відповідей із заданих). Така форма завдань дозволяє за 8–10 хв. перевірити досягнення учнів на етапі первинного сприйняття і осмислення. Завдання середнього рівня (рівень 2) виражають результати оволодіння діями з математичними об'єктами на основі означень, теорем, правил у простих ситуаціях за алгоритмами та зразками. Це традиційні обов'язкові результати навчання з теми.

При створенні тесту *Простий вибір* учню надається декілька варіантів відповіді на поставлене питання. Він має вибрати правильну відповідь (рис. 1.11). При створенні такого завдання потрібно ввести заголовок завдання, кількість балів за правильну відповідь, текст питання, варіанти відповіді. При потребі на відведене місце можна вставити зображення. Оскільки у ПМК передбачена можливість перемішувати відповіді, то при створенні тесту правильну відповідь доцільно писати першою.

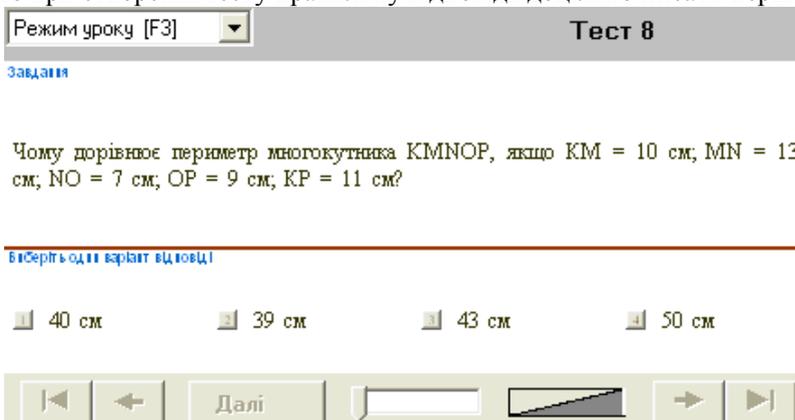


Рис. 1.11. Крок уроку з тестом типу *Простий вибір*

При створенні тесту *Множинний вибір* учню надається декілька варіантів відповіді на поставлене питання. Він має вибрати правильні відповіді (більше однієї). Біля кожної з правильних відповідей потрібно натиснути один раз курсором на полі *правильна відповідь*, після цього у полі з'явиться символ . Після завершення вводу слід натиснути кнопку *Зберегти* для збереження завдання та виходу із діалогового вікна.

При створенні тесту з можливістю *Уведення тексту* можна передбачати такі типи відповідей як рядок (слово), ціле число, дійсне число (з десятковою комою).

На рис. 1.12 подано приклад створення тестового завдання на впорядкування: записати у порядку зростання величини 24% від числа 60, 20% від числа 70, 30% від числа 50. Порядок подання варіантів у тесті на впорядкування визначається умовою завдання.

12. Передбачена можливість створювати у вкладці *Зміст* фрагменти уроку за допомогою *імпорту файлів* (рис. 1.9). Для цього необхідно попе-

редньо створити та зберегти файл на вінчестері комп'ютера або на іншому носії. Можна імпортувати файли таких форматів: *.swf, *.html, *.bmp, *.jpg, *.wmf. Назва нового кроку з'явиться у вкладці *Зміст* дерева навігації. Після імпортування кроків до відповідної теми їх можна додавати до уроку.

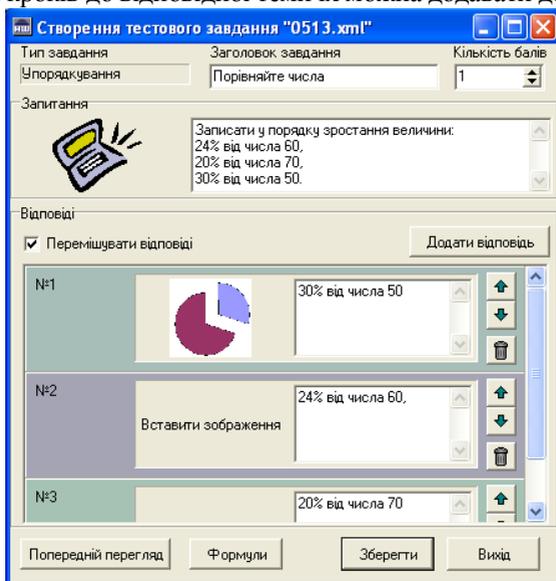


Рис. 1.12. Вікно створення тестового завдання на впорядкування

13. Перед початком роботи у мережі вчитель має занести у журнал відомості про групи та учнів. Перехід до режиму *Електронний журнал* здійснюється натисненням клавіші F8. Вікно класного журналу містить дві вкладки: групи та навігація; результати. Перехід між ними здійснюється натисненням на назві вкладки лівою кнопкою миші або натисканням Ctrl+Tab. У режимі *Електронний журнал* учитель може переглянути відомості про успішність учнів, редагувати їх, роздрукувати. У полі *Уроки групи* виводиться список уроків, проведених у вибраній групі (класі). Список учнів можна впорядкувати за рейтингом (кількістю набраних балів), за абеткою.

14. Для початку роботи в мережі на робочому місці учня слід послідовно обрати *Пуск – Програми – Математика, 5 клас – Модуль учня – Модуль учня (мережа)*. Далі учневі потрібно зареєструватися у вікні входу *Робочого місця* учня, тобто ввести прізвище та ім'я і натиснути кнопку *Відправити*. З'явиться повідомлення *Чекаємо завантаження уроку для учня* і відобразатиметься на екрані, доки учитель зі свого робочого місця не призначить учневі урок. Після того, як учитель призначить урок, учень може розпочати перегляд фрагмента уроку, виконання завдань. Після завершення роботи з уроком потрібно закрити вікно (натиснути на кнопку *Від'єднатися* у правому верхньому куті вікна).

15. Щоб *призначити урок для перегляду* його учнями, необхідно перейти до режиму *Робота в мережі* (натиснути F7). У правій частині вікна відобразиться список учнів (рис. 1.13), які зареєструвалися в мережі зі своїх робочих місць. Далі слід вибрати урок в ієрархічному списку уроків і перетягнути його на відповідне місце поряд з прізвищем учня. Наприклад, призначимо урок тематичного оцінювання №15. Після завершення учнем роботи з уроком вчителю потрібно зберегти результати в електронному журналі.

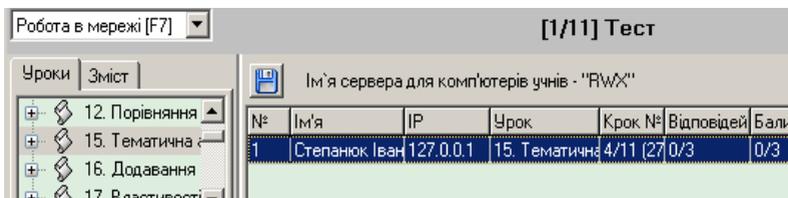


Рис. 1.13. Копія екрана засобу при роботі у мережі

Застосування ПМК дає можливість підтримувати групові та індивідуальні форми вивчення математики в умовах класно-урочної системи організації навчального процесу, підвищувати пізнавальний інтерес учнів до вивчення математики, забезпечувати диференційований підхід у вивченні математики, формування навичок розв'язування задач практичного та дослідницького характерів.

Контрольні питання і завдання

1. Інсталювати ПМК на комп'ютер вчителя (Математика, 5 клас_Setup) і учня (Модуль учня_Setup), налагодити роботу у мережі. Для модуля *Математика, 5 клас* визначити спільне і відмінне в режимах роботи.

2. Для вибраної теми уроку переглянути у режимі *Конструктор* запропоновані розробниками кроки. Відмітити кроки, які вчитель зможе використати на уроці відповідно до мети уроку і поставлених завдань. Визначити мету застосування ПМК на даному уроці і місце в структурі уроку.

3. Скласти план-конспект уроку за вибраною темою. За основу взяти методичні рекомендації та текстові відомості для проведення відповідного уроку (документ Математика, 5 клас\Base\XXX\html\index.html).

4. Створити урок, додати до нього нові фрагменти, зокрема наочності для актуалізації опорних знань і умінь учнів, мотивації навчальної діяльності.

5. Для створюваного уроку підготувати наочності (*Створити крок*) типу *Повідомлення \ Завдання* і чотирьох тестових завдань (простий вибір, множинний вибір, введення тексту, впорядкування). При потребі кроки імпортувати. До одного з нових кроків дібрати відповідне зображення.

6. Провести урок і виконати тестові завдання у мережевій взаємодії.

7. Як використовуючи у навчанні математики ПМК *Математика, 5 клас*, можна активізувати пізнавальну діяльність учнів, розвивати у них пізнавальні і творчі якості? Як можна здійснювати контрольно-коригуючу і контрольно-стимулюючу перевірку знань учнів?

1.4. Програмні засоби навчання алгебри і початків аналізу

1.4.1. Бібліотека електронних наочностей «Алгебра, 7-9 клас»

Бібліотека електронних наочностей «Алгебра, 7-9 клас» є удосконаленою версією програмно-методичного комплексу ТерМ, який призначався для комп'ютерної підтримки уроків алгебри у 7-му класі і активної математичної діяльності користувача. Наразі ТерМ не використовують у навчанні математики у школі. З використанням «Алгебра, 7-9 клас» можна здійснювати рівневу диференціацію та індивідуалізацію навчання, наочно демонструвати методи розв'язування задач та ін. Розроблено засіб на замовлення МОН України Херсонським державним університетом, НДІ інформаційних технологій ([16] до розділу 7). Матеріали для опанування засобом оприлюднені нами в електронному навчальному курсі [29].

Процес розв'язування задачі за допомогою ПЗ є послідовністю кроків, на кожному з яких користувач виконує деякі перетворення математичної моделі задачі. До найважливіших аспектів підтримки роботи учня можна віднести перевірку правильності ходу розв'язування задачі, автоматизацію рутинних дій учня, пов'язаних з обчисленнями, надання йому зручного способу використання навчальних та довідкових відомостей. У ході діяльності учитель може оперативно здійснювати перевірку правильності ходу розв'язування задачі, є автоматизоване тестування знань учнів; можна використовувати заздалегідь сплановану згідно з вимогами стандартів систему навчальних матеріалів для проведення всього циклу уроків з можливістю його модифікації. Засіб може використовуватися на уроці у процесі пояснення методів розв'язування алгебраїчних задач, для проведення самостійних і контрольних робіт.

Посібник є гіпертекстом, який структурований змістом.

Програма покроково перевіряє правильність виконаної користувачем дії при розв'язуванні задачі: якщо відповідь правильна, сигнал правильності – зелений, для неправильної – червоний, якщо відповідь можна ще спростити, то сигнал жовтий.

Основним призначенням програмного засобу «Алгебра 7-9»¹ є використання його в якості наочностей на уроках алгебри у 7-9 класах загальноосвітньої школи або у процесі самостійного вивчення учнями навчального матеріалу для формування відповідних теоретичних знань та практичних умінь. Ім'я програми – *БН Алгебра 7-9*. Окремий модуль засобу – *Середовище розв'язання* – призначений для перевірки практичних умінь учнів та надбання ними навичок алгебраїчних перетворень.

Перед вивченням даного засобу, доцільно ознайомитися з режимами роботи та виконанням символічних перетворень за допомогою ТерМ.

¹ Програмний засіб «Бібліотека електронних наочностей «Алгебра 7-9 клас» для загальноосвітніх навчальних закладів України», версія 1. – Херсон, 2006. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: Pentium, тактова частота – від 1100 MHz, 128 Mb RAM, CD-ROM Windows XP.

1. Інсталяція засобу *БН Алгебра 7-9* здійснюється за допомогою файлу *InstallBNAlgebra*. За замовчуванням програму інсталюють на диск *C* у папку *Program Files*. На компакт-диску виробника розміщені також файли з настановами для організації роботи вчителя і учня: *Методичні рекомендації*, *Настанова користувача*, *Інструкція з інсталяції та експлуатації*. Програма запускається, як і всі додатки Windows, з головного меню (*Всі програми \ SL Edu Soft \ БН Алгебра 7-9 \ Конструктор уроку*) або із застосуванням відповідного ярлика. Модуль *Конструктор уроку* можуть використовувати вчителі для конструювання і проведення уроків. Модуль *Урок алгебри* використовують учні під час роботи у мережі і для самостійного опрацювання певних тем вдома.

2. Після запуску програмного засобу відкривається вікно «*Персоналізація користувача*», яка полягає у виборі категорії користувача та його прізвища. Необхідність персоналізації зумовлена тим, що програмний засіб встановлюється на комп'ютер, за яким можуть працювати у різний час декілька користувачів. Кожен з учителів має змогу сформувати власну бібліотеку уроків і використовувати її у процесі навчання алгебри. Для того, щоб вибрати категорію (користувача), необхідно натиснути кнопку з трикутником списку категорій (користувачів). У списку, що відкриється, вибрати потрібні дані або ввести їх з клавіатури. Наприклад, створити категорію *Математичний клас*, користувача *Прізвище*. Тоді розроблені даним вчителем для даного профілю навчання уроки для 8-го класу зберігатимуться у папці *C:\Program Files\SL Edu Soft\Benazone\users\teachers\Математичний клас\Прізвище\blessons\class_8*.

3. У результаті здійснення персоналізації відкривається головне вікно програмного модуля *Конструктор уроку* (для вчителя) або *Урок алгебри* (для учня). З цього модуля можна завантажити програмні модулі *Середовище розв'язання*, *Графіки*, *Калькулятор*. *Конструктор уроку* призначено для формування бібліотеки уроків, тобто наповнення уроку наочностями – опорними конспектами, алгебраїчними задачами, графічними побудовами. Програмний модуль *Конструктор уроку* містить у своєму складі бібліотеки опорних конспектів, алгебраїчних задач, графічних побудовань, уроків. Засобами програмного модуля користувач має змогу формувати уроки, редагувати зміст бібліотеки уроків та проводити урок зі свого робочого місця в одному з таких режимів: *груповий*, *індивідуальний*, *вибірковий*.

4. *Бібліотека опорних конспектів* (майже 200) містить означення математичних понять, перелічених у навчальній програмі 7-9 класів; приклади, що ілюструють ці поняття; формулювання та покрокове пояснення алгоритмів розв'язування типів навчальних задач, передбачених навчальною програмою; необхідні графічні ілюстрації. За оформленням опорні конспекти є плакатами наочностей, за технологією реалізації – слайдами. За основу викладання матеріалу обраний метод покрокового пояснення з можливостями повернення назад та повернення до поточного кроку

$$d) x^2 - \frac{6}{x^2 + 1} = 0;$$

$$e) \frac{1}{x^2 + 2} - \frac{1}{x^2 + 3} = \frac{1}{12}.$$

Для того, щоб зберегти створений урок, потрібно виконати команду *Файл \ Зберегти урок*. У вікні *Збереження уроку*, що відкриється, треба виділити назву розділу бібліотеки уроків та натиснути кнопку «Так».

При потребі до уроку можна додавати нові задачі. За допомогою засобу створюють уроки для 7, 8, 9 класів. При цьому можна незалежно від класу використовувати для формування уроків навчальну програму для іншого класу. За допомогою команди *Роздрукування* можна роздрукувати зміст вікна *Версія для друку*. Команда *Урок* відкриває вікно змісту уроку для редагування змісту (додавання та видалення конспектів, переміщення конспектів вгору або вниз за змістом). Для початку редагування, встановивши вказівник миші на виділеній темі уроку, викликають контекстне меню, обирають пункт *Редагування уроку*.

6. ПЗ має потужний апарат символічного перетворення виразів. Наведемо приклади запрограмованих перетворень, які використовуються при розв'язуванні рівнянь. Передбачена можливість перетворення рівняння в сукупність рівносильних рівнянь. Можна здійснювати розв'язування найпростіших рівнянь з модулем та рівнянь стандартного виду з модулями. Можна подати розв'язання найпростіших рівнянь з радикалом та рівнянь стандартного виду з радикалами; видаляти розв'язки, які не задовольняють умові-нерівності. Квадратне рівняння можна розв'язувати за формулами через дискримінант та за теоремою Вієта. За допомогою програмного модуля можна представити розв'язки рівняння, записавши їх у вигляді сукупності найпростіших рівнянь з нумерованими змінними чи відокремити додатні розв'язки. Для перетворення рівнянь можна використовувати метод заміни змінної. Щоб здійснити заміну певного виразу, слід цей вираз взяти у дужки і виділити. В подальшому потрібно виконати команду *Змінні \ Заміна виразу на змінну*.

Наведемо приклади перетворень з довідника для розв'язування нерівностей (*Файл \ Навчальна програма \ 9 клас*): 1) логічні значення числових нерівностей; 2) основні властивості нерівностей – додати вираз до обох частин нерівності, включаючи можливість перенести доданок з однієї частини нерівності в іншу; помножити нерівність на число; 3) розв'язування нерівностей – розв'язати лінійну нерівність, зобразити числовий проміжок на числовій осі; для розв'язування квадратної нерівності скласти квадратне рівняння, відповідне нерівності, обрати формулу; 4) деякі перетворення алгебраїчних нерівностей, що містять добуток, частку, степені, радикали, модулі.

Бібліотека алгебраїчних задач є доповненням бібліотеки опорних конспектів. Ця бібліотека формується користувачем за допомогою програмного модуля *Середовище розв'язання*. Для цього попередньо задача має бути сформульована, розв'язана та збережена користувачем у *Сере-*

довищі розв'язання. Будь-яку задачу з бібліотеки алгебраїчних задач вчитель може включити до складу уроку з бібліотеки (*Відкрити урок для редагування, Додати задачу*). Розв'язані користувачем задачі для 8-го класу містяться у папці *C:\Program Files\SL Edu Soft\Benazone\modules\ben.class.8\libalgt\tasks*.

7. Допустимі символи: змінні подаються латинськими буквами, дія помножити записується з використанням символу «*», поділити «/». Щоб подати степінь, слід ввести з клавіатури символ «^» і записати у відведених комірки основу та показник степеня. У табл. 1.3 наведено приклад введення з клавіатури послідовності символів до вправи «Множення многочленів». У першій вправі пропонується винести за дужки спільний множник, у другій – представити вираз у вигляді многочлена від змінної x .

Таблиця 1.3.

Приклади введення з клавіатури послідовності символів до вправ

Завдання	Послідовність введення	Результат
$6 \cdot x \cdot y^2 - 2 \cdot x^4 \cdot y^4$	$2 * x * ^ y^2 * (3 - ^ x^3 * ^ y^2)$	$2 \cdot x \cdot y^2 \cdot (3 - x^3 \cdot y^2)$
$(x - a) \cdot (x - 2 \cdot a)$	$^ x^2 - 3 * a * x + 2 * ^ a^2$	$x^2 - 3 \cdot a \cdot x + 2 \cdot a^2$

Для прикладу розглянемо вправу на *розкладання многочлена на множники*: $a \cdot m^2 - a \cdot n - b \cdot m^2 + c \cdot n - c \cdot m^2 + b \cdot n$.

Розглянемо загальну схему розв'язування задачі засобами ТерМ.

- Вибрати задачу середнього, достатнього чи високого рівнів складності і завантажити її.

- У вкладці *Задача Середовища розв'язування* вказати *Режим розв'язування* (*Перевірка кроку розв'язання* або *Автоматичний, Змішаний*). Режим *Перевірка кроку розв'язання* рекомендується обирати на етапі формування умінь і навичок для розв'язування завдань початкового, середнього і достатнього рівнів складності. Автоматичний і змішаний режими опрацювання задач призначено для розв'язування більш складних задач, які потребують виконання великої кількості засвоєних раніше елементарних перетворень. Автоматичний режим доцільно застосовувати для виконання завдань достатнього і високого рівнів складності на етапі застосування знань. При цьому вивільняється додатковий час за рахунок скорочення процесу розв'язування. Учень може зосередитися на сутності використовуваних методів.

- У вкладці *Хід розв'язування* обрати *Почати* або скористатися відповідною піктограмою.

- Послідовно виконувати дії. У режимі *Перевірка кроку розв'язання* після виконання дії у вкладці *Задача* потрібно вибрати команду *Виконати крок*. Якщо при виконанні перетворення учень допустить помилку, то на «світлофорі» справа зошита спалахне червоне світло. Для подальшого розв'язування задачі необхідно виправити помилку, оскільки

комп'ютер «відмовиться» від запису неправильного виразу.

- Після завершення розв'язування слід знайти у *Довіднику* справа вкладку *Відповіді* і обрати команду *Задачу розв'язано* (натиснути ліву клавішу миші, коли вказівник миші знаходиться біля напису над значком у вигляді трикутника).

- Далі потрібно зберегти розв'язання. При зберіганні результатів роботи у зошиті, слід вказувати тему уроку (створити нову чи вибрати із запропонованих) і номер уроку.

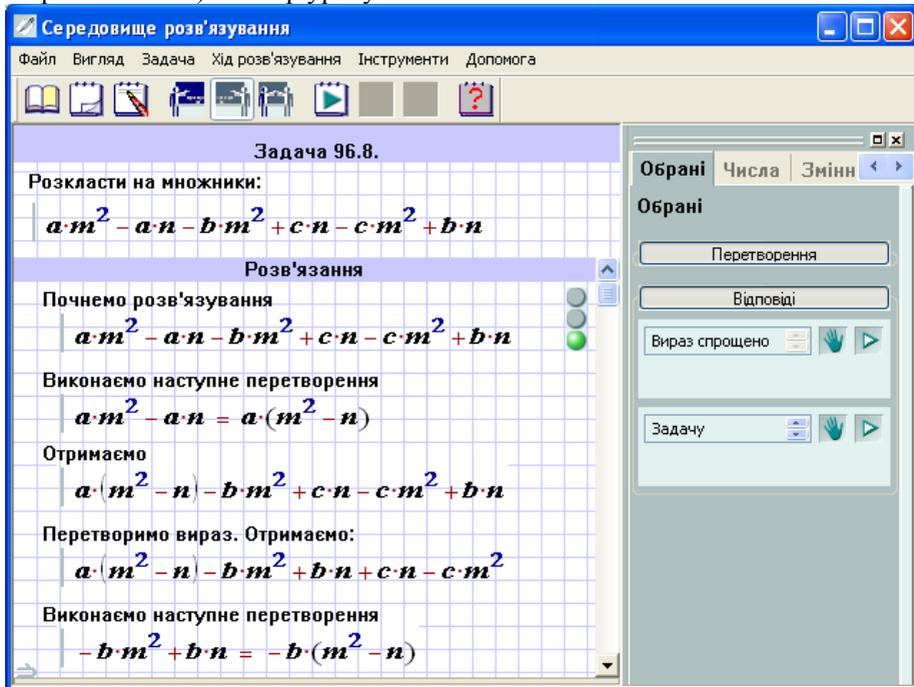


Рис. 1.15. Фрагмент розв'язання завдання

8. Як ініціюється виконання перетворень виразів засобом? Щоб перетворити вираз чи його частину, вираз слід виділити. Для виділення підводять вказівник миші до знака математичної операції, знака рівності чи дужок, в які взято цей вираз, знака системи чи сукупності і натискають ліву клавішу миші. Виділена частина змінює колір. Після цього натискають праву клавішу миші і відкривають *Довідник*, що містить вкладки різних перетворень.

Працюючи в режимі *Перевірка кроку розв'язання* часто вибирають вкладку *Заміна рівних* і заносять у відведену комірку перетворений вираз. В автоматичному та у змішаному режимі можна вибирати потрібну дію з *Довідника*. Крім того, при виділеній дії подвійним натискуванням на ліву клавішу миші ініціюється виконання дій. Наприклад, в автома-

тичному режимі подвійним «натискуванням» курсором по знаку суми ініціюється зведення подібних доданків, які розміщені поряд, по правій дужці – розкриття дужок.

Щоб змінити порядок доданків у виразі, використовують вкладку довідника *Перестановка доданків* або «перетягують» вказівником миші при натиснутій лівій клавіші. При цьому з'являється стрілочка, яка показує, куди можна вираз вставити. Два рівняння додають, перетягуючи одне до одного за знак рівності або вибирають відповідну дію з *Довідника*. Аналогічно здійснюють підстановку значення виразу для певної змінної в інший вираз. Наприклад, при врахуванні заміни змінної у процесі розв'язування рівняння.

9. Розв'яжемо за допомогою ТерМ завдання № 96.8 (рис. 1.15) у режимі *Перевірка кроку розв'язання*. Щоб записувати вирази з степенями, ввімкнемо панель редактора формул (команда *Вигляд \ Панель редактора*).

- Виділимо дію віднімання у виразі $a \cdot m^2 - a \cdot n$ (натиснути ліву клавішу миші, коли вказівник знаходиться над символом «-»). Щоб записати вираз з винесеним за дужки спільним множником, натискають праву клавішу миші. У відведену клітину записують вираз $a \cdot (m^2 - n)$ (у форматі ТерМ вводять з клавіатури послідовність символів $a * (^ m^2 - n)$) і обирають команду *Хід розв'язування \ Виконати крок*. У подальшому в поясненні частину коментарів опустимо.

- Згрупуємо доданки з множником b . Для цього перенесемо доданок $b \cdot n$ («пересунути» курсором за знак множення) до виразу $-b \cdot m^2$.

- У виразі $-b \cdot m^2 + b \cdot n$ виділимо дію додавання і замінимо вираз на тотожно рівний з винесеним за дужки множником $-b \cdot (m^2 - n)$.

- У виразі $c \cdot n - c \cdot m^2$ виділимо дію віднімання і винесемо за дужки спільний множник $-c \cdot (m^2 - n)$. Перетворений вираз матиме такий вигляд: $a \cdot (m^2 - n) - b \cdot (m^2 - n) - c \cdot (m^2 - n)$.

- У виразі $a \cdot (m^2 - n) - b \cdot (m^2 - n)$ виділяємо дію віднімання («-» перед b) і вносимо за дужки спільний множник $m^2 - n$.

- У виразі $(a - b) \cdot (m^2 - n) - c \cdot (m^2 - n)$ виділяємо дію віднімання (мінус перед змінною c), вносимо за дужки спільний множник $m^2 - n$.

- Отримаємо вираз $(m^2 - n) \cdot (a - b - c)$. Обираємо у вкладці *Відповіді* пункт *Задачу розв'язано*.

- Зберігаємо розв'язане завдання в зошиті обравши для цього у вкладці *Файл* пункт *Зберегти в зошиті*. У вікні, що відкриється при цьому записуємо тему «Розкладання на множники» і урок №1. Після цього можна в зошиті переглянути розв'язане завдання.

10. При розв'язуванні текстових задач за допомогою рівняння чи системи лінійних рівнянь учень може отримати підказку не лише під час виконання дій, але й на етапі розробки моделі, що надзвичайно важливо для розвитку пізнавальних якостей учня. Наведемо приклад розв'язування текстової задачі (№158) високого рівня складності, однак доступної для семикласників: *гострі кути між бісектрисами внутріш-*

ніх кутів трикутника ABC рівні 50° , 60° , 70° . Визначити внутрішні кути $A(x)$, $B(y)$, $C(z)$ у трикутнику ABC .

Для розв'язування задачі пропонуємо скласти систему з трьох рівнянь з трьома змінними x , y , z (підказка щодо введення змінних ϵ в самій умові). Щоб скласти систему, учневі потрібно виконати малюнок (рис. 1.16), пригадати означення бісектриси кута трикутника та властивість зовнішнього кута трикутника. Для трикутника BOA кут BOD – зовнішній, тому можемо скласти рівняння $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 70^\circ$. Для трикутника COB кут COF – зовнішній, тому $\frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 50^\circ$. Третє рівняння отримаємо для трикутника COA , оскільки за властивістю зовнішнього кута COD можна записати $\frac{x}{2} + \frac{z}{2} = 60^\circ$. Розв'язати складену систему можна як методом додавання, так і методом підстановки. Розв'язування задачі допоможе учневі краще усвідомити роль алгебраїчних методів у вивченні геометрії.

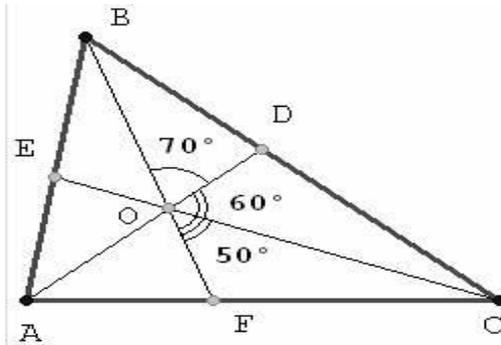


Рис. 1.16. Рисунок до задачі №158

Розв'яжемо розглянуту задачу методом додавання засобами ТерМ. У вікні модуля *Середовище розв'язування* підведемо вказівник миші до заголовку *Задача*, що знаходиться на верхній панелі і натиснемо ліву клавішу миші. З'явиться напис *Режим розв'язування*. Ще раз натиснемо ліву клавішу миші на цьому написі і потім виберемо режим *Змішаний*.

У вкладці *Хід розв'язування* вибираємо команду *Почати розв'язування*. На панелі введення даних, що з'являється на екрані, проставляємо відмітку біля напису *Система рівнянь*. Використовуючи редактор формул, проставляємо знак системи « $\{$ », записуємо три рівняння, підтверджуємо кінець запису – натискаємо кнопку *Виконати* (рис. 1.17). У вкладці *Хід розв'язування* вибираємо *Виконати крок*. У разі утруднення зі складанням системи рівнянь, учень може отримати підказку і скласти систему за допомогою програмного забезпечення (кнопка *Скласти*). При отриманні підказки буде зроблено запис про те, що систему складе-

но програмним забезпеченням.

Випишемо порядок виконання дій (режим *Змішаний*).

Помножимо перше з утворених рівнянь на -2 , щоб у подальшому додати його до другого рівняння. Для цього підведемо вказівник миші до знаку рівності у першому рівнянні та натиснемо спочатку ліву, а потім праву клавішу миші. У довіднику справа вибираємо операцію множення ($c \cdot A = c \cdot B$) і у вікні, що відкривається, вводимо множник -2 , виконуємо операцію. Аналогічно множимо на 2 друге і третє рівняння. Отримаємо систему з трьох рівнянь: $-y - z = -100$, $x + z = 120$, $y + x = 140$.

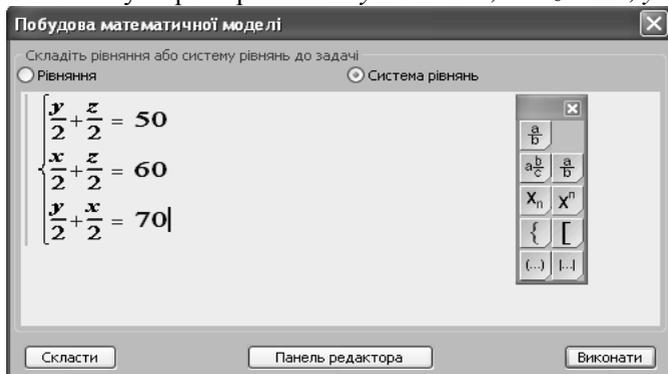


Рис.1.17. Вікно введення системи рівнянь до задачі №158

Додаємо перше рівняння $-y - z = -100$ до другого $x + z = 120$. Для цього необхідно за знак рівності перше рівняння «перетягнути» до знака рівності другого рівняння притиснувши ліву клавішу миші і відпустити клавішу. Отримаємо рівняння $x + z - y - z = -100 + 120$.

Зводимо в рівнянні подібні доданки («перетягуємо» доданок z так, щоб отримати вираз $z - z$). Подальше спрощення виразу ініціюємо подвійним натискуванням лівої клавіші миші, коли вказівник миші розташований на знаком відповідної операції. Маємо $x - y = 20$.

Додаємо отримане друге рівняння до третього. У подальшому необхідно звести подібні доданки і отримати вираз для змінної x .

Наступним кроком змінну x потрібно виключити з другого рівняння, підставивши в це рівняння знайдене значення. Для цього слід перетягнути мишею змінну для виключення з одного рівняння в інше на місце входження даної змінної і відпустити кнопку миші.

Далі слід спростити друге рівняння і знайти значення для змінної y .

Після цього з першого рівняння виключають змінну y та обчислюють значення для змінної z .

Записують відповідь задачі і зберігають розв'язання у зошиті.

11. Наведемо *приклад доповнення бібліотеки алгебраїчних задач* «Алгебра, 7-9 клас» розв'язанням нерівності $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$ (Файл *Навчальна програма \ 9 клас*).

1) Налаштовуємось на навчальну програму 9-го класу, завантажуюмо

програмний модуль розв'язування задачі (*Інструменти \ Середовище розв'язання*), обираємо вкладку *Задача \ Нова задача \ Нерівності \ Алгебраїчна нерівність*, записуємо у відведену комірку формулу $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$.

Для запису формул використовують панель *Редактора формул*.
 2) В *Середовищі розв'язання* перші кроки розв'язання нерівності подано на рис. 1.18, в режимі демонстрації на рис. 1.19. Щоб виділити нерівність (виділений запис змінює колір), підводимо вказівник миші до знака нерівності, натискаємо ліву клавішу миші. Щоб відкрити *Довідник* для вибору кроку розв'язання, натискаємо праву клавішу миші при виділеному виразі. Далі вибирають у вкладці *Нерівності* дію *Розв'язати нерівність \ Скласти відповідне квадратне рівняння*.

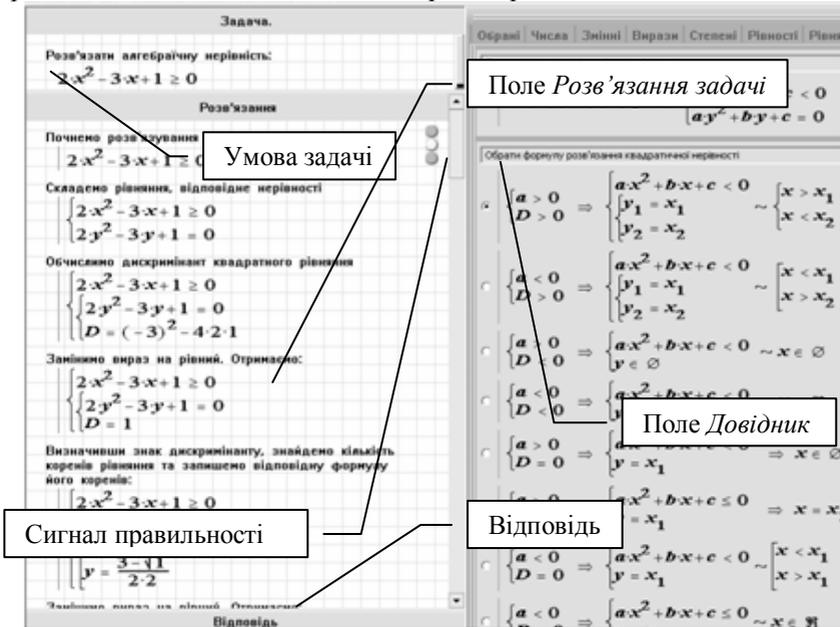


Рис. 1.18. Загальний вигляд вікна *Середовища розв'язування* для 9 класу

3) Виділяємо утворене рівняння (за знак « $=$ ») і обираємо команду *Рівняння \ Квадратні рівняння \ Обчислити дискримінант рівняння*. У полі розв'язання з'являється вираз $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$. Виділяємо вираз $(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$ (за знак операції віднімання), відкриваємо *Довідник* для вибору кроку *Обране \ Заміна рівних*, заносимо у відведену комірку значення дискримінанта 1.

4) Вибираємо з довідника команду *Розв'язати квадратне рівняння*, попередньо виділивши рівняння та його дискримінант (натиснути ліву клавішу миші, коли її вказівник розміщений над символом « $\{ \}$ »).

5) Спростуємо вирази для коренів, вибравши дію *Заміна рівних*.

6) Записуємо розв'язки нерівності. Для цього виділяємо нерівність та

знайдені розв'язки квадратного рівняння ("{}") і обираємо *Формулу розв'язання* залежно від знака старшого коефіцієнта і значення дискримінанта.

7) Для кожної з простих лінійних нерівностей записуємо розв'язання у вигляді інтервалу (*Розв'язати найпростішу лінійну нерівність*).

8) Записуємо розв'язок даної нерівності як об'єднання інтервалів (*Сукупності \ Об'єднання розв'язків*).

9) Записуємо відповідь і зберігаємо розв'язану нерівність.

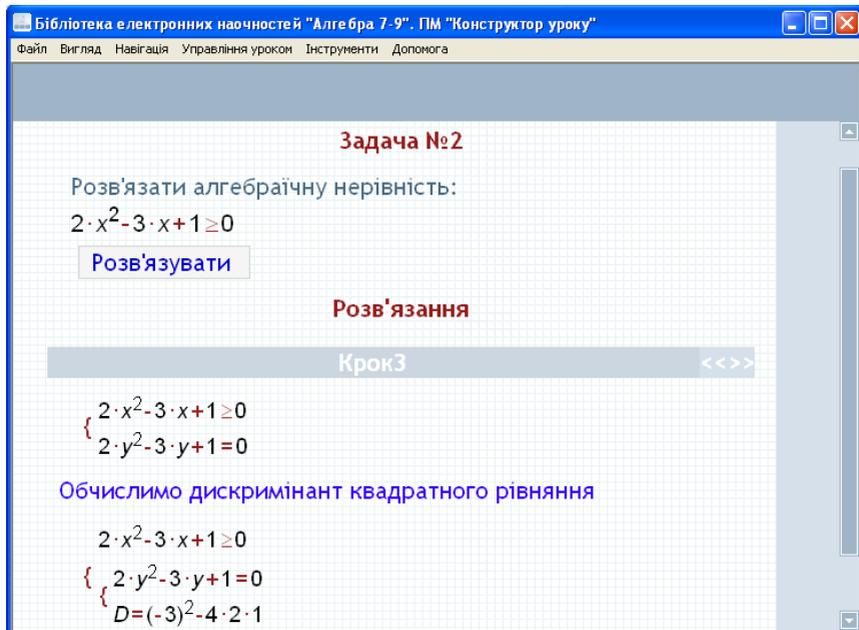


Рис. 1.19. Вікно програмного модуля Урок алгебри

Якщо включити дану нерівність до уроку, то можна буде здійснювати покрокове відтворення її розв'язання. Від режиму покрокового перегляду завдання учень може перейти до *Середовища розв'язання* і продовжити розв'язування розпочатої задачі.

12. Подамо у табл. 1.4 справа коментарі до ходу розв'язування рівняння $(x^2 + 3x)^2 - 2 \cdot (x^2 + 3x) - 3 = 0$, а зліва – записи з *Середовища розв'язання*.

Дане рівняння зводиться до квадратного, тому обираємо відповідну навчальну програму (*Файл \ Навчальна програма \ 8 клас*). Виділення виразу здійснюємо натискуванням лівої клавіші миші, коли вказівник знаходиться над знаком операції, дужкою тощо. Відкриваємо *Довідник* натискуванням правої клавіші. *Виконання дії з Довідника* здійснюється натискуванням лівої клавіші, коли курсор знаходиться над піктограмою у вигляді трикутника. Отримати додаткове роз'яснення щодо формату запису виразу можна, якщо вказати на відповідну піктограму у вигляді

відкритої руки. На завершальному етапі записують відповідь, зберігають задачу у темі «Квадратні рівняння».

Таблиця 1.4.

Коментарі до ходу розв'язування рівняння, яке зводиться до квадратного

Розв'язати рівняння $(x^2+3x)^2-2\cdot(x^2+3x)-3=0$	Для запису рівняння вводимо з клавіатури послідовність символів $(x^2+3x)^2-2\cdot(x^2+3x)-3=0$.
<i>Крок 1.</i> Почнемо розв'язування $(x^2+3x)^2-2\cdot(x^2+3x)-3=0$	<i>Крок 1.</i> Пункт <i>Розв'язування \ Почати</i>
<i>Крок 2.</i> Позначимо вираз новою змінною. $\begin{cases} a^2 - 2 \cdot a - 3 = 0 \\ a = x^2 + 3 \cdot x \end{cases}$	<i>Крок 2.</i> Виділяємо вираз x^2+3x (за знак «+») для заміни новою змінною. У вкладці довідника <i>Змінні \ Заміна виразу на змінну</i> вибираємо дію <i>Позначимо вираз змінною</i> , вводимо назву змінної <i>a</i> .
<i>Крок 3.</i> Обчислимо дискримінант квадратного рівняння. $\begin{cases} a^2 - 2 \cdot a - 3 = 0 \\ D = (-2)^2 + 4 \cdot 3 \\ a = x^2 + 3 \cdot x \end{cases}$	<i>Крок 3.</i> Для обчислення дискримінанта квадратного рівняння виділяємо рівняння за знак «=». У вкладці <i>Рівняння \ Квадратні рівняння</i> вибираємо і виконуємо дію <i>Обчислити дискримінант</i> .
<i>Крок 4.</i> Замінімо вираз на рівний $\begin{cases} a^2 - 2 \cdot a - 3 = 0 \\ D = 16 \\ a = x^2 + 3 \cdot x \end{cases}$	<i>Крок 4.</i> Спростимо вираз для дискримінанта. Виділимо вираз за знак «+» і, обравши <i>Заміну рівних</i> , введемо число 16.
<i>Крок 5.</i> Знайдемо $\begin{cases} a = \frac{2 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \\ a = \frac{2 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \\ a = x^2 + 3 \cdot x \end{cases}$	<i>Крок 5.</i> Визначивши знак дискримінанта, знайдемо кількість коренів рівняння та запишемо відповідну формулу його коренів. Виділяють рівняння і його дискримінант за внутрішню фігурну дужку. У вкладці <i>Рівняння \ Квадратні рівняння</i> вибираємо і виконуємо дію <i>Розв'язати квадратне рівняння</i> .
<i>Крок 6.</i> Замінімо вираз на рівний	<i>Крок 6.</i> Спростимо вирази для коренів рівняння. Виділимо вираз для першого кореня (за риску дробу) і замінімо його на рівний вираз 3 (вкладка <i>Обране \ Заміна рівних</i>).

$\begin{cases} a = 3 \\ a = \frac{2 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \\ a = x^2 + 3 \cdot x \end{cases}$	
<p><i>Крок 7.</i> Замінімо вираз на рівний</p> $\begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \\ a = x^2 + 3 \cdot x \end{cases}$	<p><i>Крок 7.</i> Виділимо вираз для другого кореня (за риску дробу) і замінімо його на рівний вираз -1 (вкладка <i>Обране \ Заміна рівних</i>).</p>
<p><i>Крок 8.</i> Перетворимо систему</p> $\begin{cases} a = 3 \\ a = x^2 + 3 \cdot x \\ a = -1 \\ a = x^2 + 3 \cdot x \end{cases}$	<p><i>Крок 8.</i> Перейдемо до сукупності двох систем. Виділимо систему (за фігурну дужку) і у вкладці <i>Обране \ Перетворення</i> виконаємо команду <i>Перейдемо до окремих випадків</i>.</p>
<p><i>Крок 9.</i> Перетворимо вираз</p> $\begin{cases} x^2 + 3 \cdot x = 3 \\ a = x^2 + 3 \cdot x \\ a = -1 \\ a = x^2 + 3 \cdot x \end{cases}$ <p><i>Крок 10.</i> ...</p>	<p><i>Крок 9.</i> Підставимо знайдені значення для змінної a. Для цього, притиснувши ліву клавішу миші, переміщуємо вказівник миші від змінної a у виразі $a = x^2 + 3 \cdot x$ в першій системі до змінної a у виразі $a = 3$ (змінну a до змінної a). Аналогічно для кроку 10.</p>
<p><i>Крок 11, 12.</i> Видаляємо з системи ті її члени, які залежать від даної змінної.</p> $\begin{cases} x^2 + 3 \cdot x = 3 \\ x^2 + 3 \cdot x = -1 \end{cases}$	<p><i>Крок 11, 12.</i> Видаляємо з сукупності систем змінну a. Для цього виділяємо змінну a у виразі $a = 3$, а потім у вкладці <i>Змінні</i> вибираємо і виконуємо дію <i>Видалити з системи ті її члени, які залежать від даної змінної</i>.</p> <p><i>Крок 13.</i> Маємо квадратні рівняння від x.</p>

13. *Бібліотека графічних побудовань* є доповненням бібліотеки опорних конспектів і формується за допомогою модуля *Графіки*. За допомогою програмного модуля *Графіки* можна виконувати побудови графіків за допомогою елементарних перетворень, шукати точки перетину побудованої кривої та прямої, двох прямих, двох кіл та ін. Програмний модуль *Графіки* має два режими опрацювання задач на графічні побуду-

вання – власне Побудування (рис. 1.20) та Демонстрація (рис. 1.21). Кожна із задач має бути сформульована, розв’язана та збережена користувачем. Розв’язані задачі за програмою 9-го класу знаходяться у папці $C:\Program Files\SL Edu Soft\Benazone\modules\ben.class.9\libgeom\tasks$.

Задачі, які розв’язуються у режимі *Математична модель*, не призначені для збереження в бібліотеці графічних побудовань та використання у складі уроку. Учитель має користуватися цим режимом для демонстрації безпосередньо у програмному модулі *Графіки*. Для того, щоб досліджувати залежності від кількох змінних графічно, потрібно виділити незалежну змінну, а іншим змінним надати числові значення, розглядаючи їх як константи та параметри. Отриману функцію від однієї змінної досліджують графічним методом.

14. Щоб ознайомитися з прикладами графічних побудовань до теми «*Графічне розв’язування системи нелінійних рівнянь*», завантажимо відповідну навчальну програму (Файл \ Навчальна програма \ Клас 9). Знайдемо у бібліотеці опорних конспектів тему «*Квадратична функція*», а в ній відкриємо опорний конспект із заголовком «*Використання графіка квадратичної функції для розв’язування систем двох рівнянь другого степеня з двома змінними*». Для пояснення нового матеріалу, формування умінь учнів розв’язувати системи чи для корекції засвоєних знань вчитель може з використанням засобу подавати покроково розв’язання наступних систем:

а) на відшукування точок перетину кола і прямої

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x + y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ 2x - y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 10, \\ x + 2y = 0; \end{cases}$$

б) на відшукування точок перетину параболи і прямої

$$\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ x - y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2y = 6, \\ 3x + 2y = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} (x + 1)^2 + 2y = 7, \\ x + y = 1; \end{cases}$$

Для першої системи пункту а) на першому кроці демонструється побудоване коло; за другим кроком подається пряма; за третім кроком зображуються точки перетину графіків; на заключному кроці для перевірки учням висвітлюються координати точок перетину графіків.

15. Виконаємо графічне побудування і знайдемо розв’язки системи:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3, \\ y - x - 1 = 0; \end{cases}$$

- Завантажимо програмний модуль *Графіки (Інструменти \ Графіки)*.
- Початок розв’язування здійснюється вибором пункту меню *Файл \ Нова задача* і записом умови задачі. Записавши текст у вікні введення, розміщуємо вказівник миші в клітину, в яку потрібно вписати формулу, і натискаємо кнопку *Вписати формулу*. Спочатку з редактора формул вибираємо і проставляємо в клітину знак системи «{», потім у

кожну з двох новоутворених клітин запишемо формули.

▪ Для побудови графіка першої функції у *Полі формули* запишемо $y_1(x^2-2x-3)$. У вкладці *Формула – Графік* знаходять функцію $f(y=ax^2+bx+c)$, виконують побудову. Графіки будують лініями різного кольору і різної товщини. Налаштування перед виконанням побудови здійснюється з використанням пункту головного меню *Вигляд \ Опції*.

▪ Перед введенням другої функції очищують поле формули і записують до нього $y_2(y-x-1=0)$. Виконують побудову графіка лінійної функції (вибрати вкладку *Формула – Графік* $f(y=kx+b)$), натиснути ліву кнопку миші, коли вказівник знаходиться над кнопкою виконання дії).

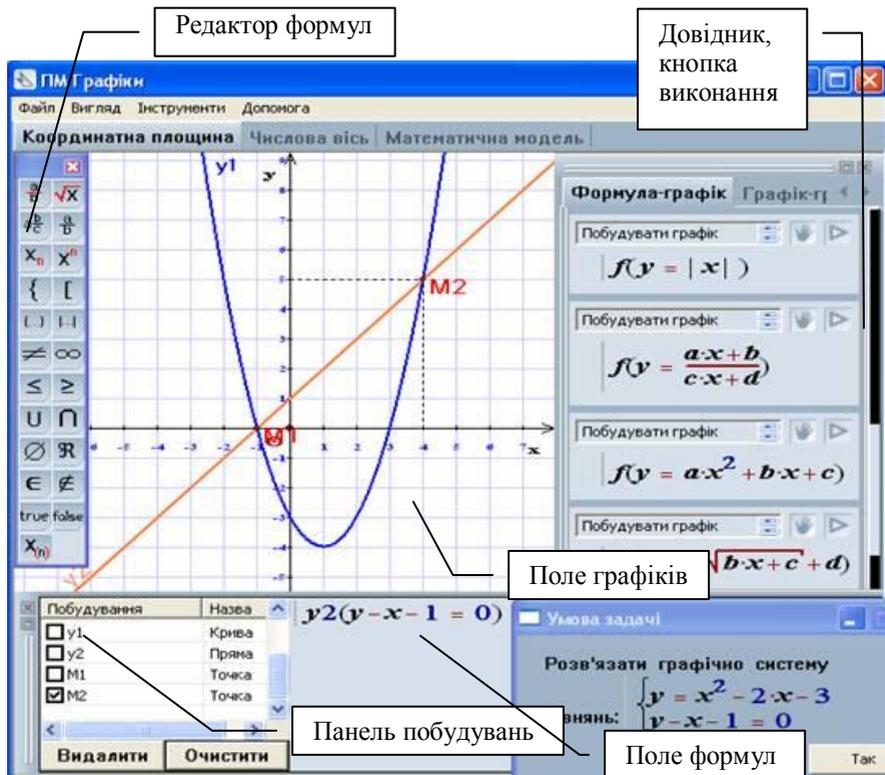


Рис. 1.20. Вікно ПМ Графіки (режим побудови)

▪ Побудуємо точки перетину кривої і прямої. Для цього на *Панелі побудувань* проставляємо відмітки біля введених формул y_1 і y_2 , очищуємо поле формули і записуємо до нього позначення точки – літеру M . У вкладці *Графік–Графік* обираємо пункт *Знайти точки перетину кривої і прямої* і виконуємо команду. Програмним забезпеченням на координатній площині буде проставлено дві точки M_1 і M_2 .

▪ На заключному кроці розв’язування встановлюємо координати

точок перетину графіків. Для цього у списку побудовань проставляємо відмітку біля точки M1. Очищуємо поле формули, обираємо у вкладці *Графік* – *Формула* пункт *Знайти координати точки* і виконуємо дію. Аналогічно встановлюємо координати точки M2.

- Виконавши всі побудови, доцільно ще раз переглянути послідовність їх виконання, скориставшись режимом демонстрації (*Вигляд \ Режим \ Демонстрація*). На рис. 1.21 подано другий крок виконання побудов.

- Завершене побудовання зберігають у бібліотеці графічних побудовань, надавши йому відповідний номер (*Файл \ Зберегти задачу*). Збережену задачу можна відкрити з бібліотеки наочностей *Графічні побудовання*, редагувати, демонструвати, додавати до уроку.

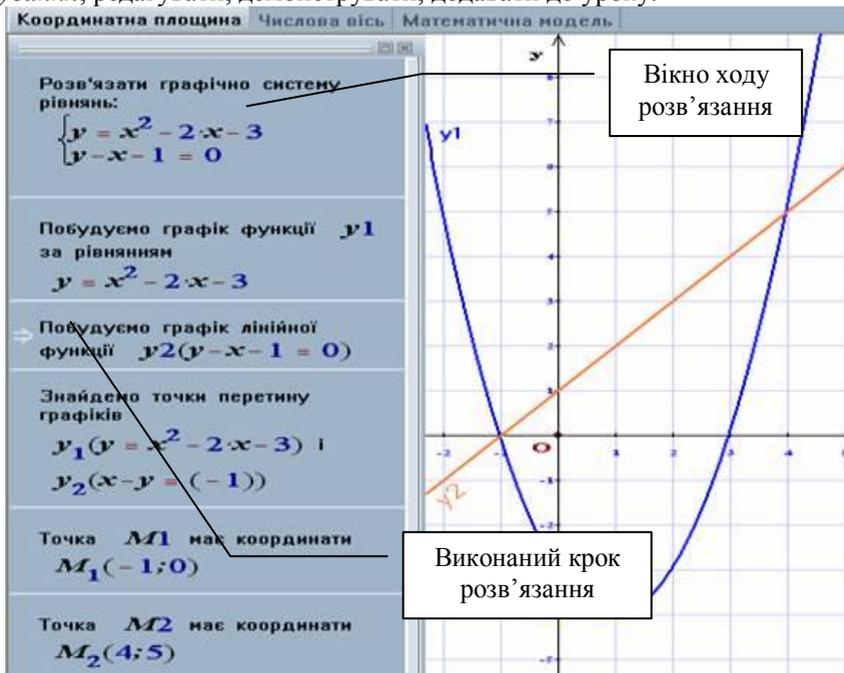


Рис. 1.21. ПМ *Графіки*, режим демонстрації побудови

16. Перед тим, як будувати графіки шляхом геометричних перетворень, учень має визначити, до якого з типів функцій (лінійна, дробово-раціональна, квадратична або квадратично-радикальна) належить дана функція; записати послідовність геометричних перетворень, які приводять до побудови графіка; виконати перетворення; переконатися, що послідовність перетворень знайдено правильно (додатково побудувати графік функції в режимі *Математична модель*).

Наведемо приклад виконання завдання на побудову графіка функції з модулем за допомогою елементарних перетворень: $y = ||x| - 2| - 1|$ (табл. 1.5, рис. 1.22 – режим демонстрації). Записи у полі формули ма-

ють особливості, на які звертаємо увагу. Позначення для кроку 3 і кроку 5 – «/y/» передбачає виконання перетворення $y=|f(x)|$. Це перетворення не слід плутати з перетворенням $|y|=f(x)$. Для кроку 4 у полі формули записано +1.

Таблиця 1.5.

Ланцюжок елементарних перетворень для графіка функції $y=||x|-2|-1$

№	Що будувати?	Вираз у полі формули, відмітка	Опції, колір	Команда з довідника
1	$y = x - 2$	$f1 (y = x - 2)$	авто	$f (y=kx+b)$ вкладка <i>Формула-Графік</i> , побудова графіка лінійної функції
2	$y = x - 2$	вираз $f2 (/x/)$ відмічено $f1$	змінити колір	вкладка <i>Перетворення</i> , Симетричні відображення півплощин відносно осей (вісь Oy)
3	$y = x - 2 $	вираз $f3 (/y/)$ відмічено $f2$	змінити колір (вісь Ox)
4	$y = x - 2 - 1$	вираз $f4 (y+1)$ відмічено $f3$	змінити колір	вкладка <i>Перетворення</i> , Паралельні перенесення у напрямках осей
5	$y = x - 2 - 1$	вираз $f5 (/y/)$ відмічено $f4$	змінити колір, товщину лінії	вкладка <i>Перетворення</i> , симетричні відображення півплощин відносно осей (вісь Ox)

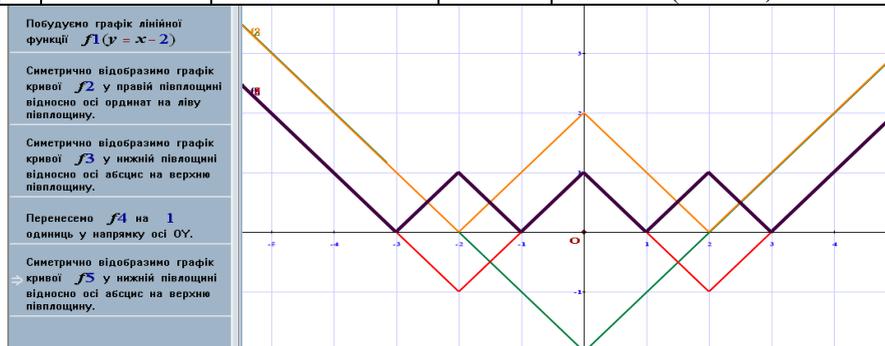


Рис. 1.22. Вікно Графіки, режим Демонстрації

17. БН *Алгебра 7-9* містить значну кількість опорних конспектів-демонстрацій. Наприклад, для закону Кулона, законів Ома і Джоуля-Ленца, залежності висоти та дальності польоту снаряда від кута, що утворює ствол гармати з горизонтом та інші (*Файл \ Навчальна програма \ 9 клас \ Елементи прикладної математики*).

18. Розглянемо, як проводять урок з використанням *БН Алгебра 7-9* у комп'ютерному класі при наявності мережі. Для налаштування мережевої взаємодії необхідно на робочому місці учня запустити програмний модуль *Урок алгебри* і вказати адресу комп'ютера (мережеве ім'я або IP-адресу), на якому встановлено робоче місце вчителя. Після цього у системному треї (область на панелі задач поряд із годинником) з'явиться іконка у вигляді синьої стрілочки (→) або червоного хрестика (X). Іконка у вигляді синьої стрілочки свідчить про успішне встановлення зв'язку із робочим місцем вчителя. Друга іконка свідчить про неможливість приєднання до робочого місця вчителя або про те, що адреса комп'ютера вчителя не була вказана. Щоб вказати адресу комп'ютера вчителя, необхідно клацнути правою кнопкою миші по іконці у системному треї та обрати у меню, що з'явилося, пункт Адреса вчителя (рис. 1.23). Після цього у меню іконки в системному треї необхідно обрати пункт меню *Приєднатися/Від'єднатися*. Робоче місце вчителя не потребує ніякого налаштування для мережевої взаємодії, воно відразу готове до роботи. Команда *Вигляд \ Список учнів* на робочому місці вчителя відкриває вікно списку учнів, з якими проводиться урок.

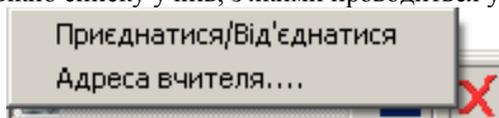


Рис. 1.23. Іконка для налаштування мережевої взаємодії

19. Проведення уроку вчитель може здійснювати у трьох режимах.

- Режим *Груповий* – призначено для проведення уроку вчителем зі свого робочого місця. У цьому режимі вчитель пояснює новий матеріал, демонструючи конспекти (навчальні матеріали), які включені до складу даного уроку. Учні слухають пояснення, переглядають навчальні матеріали, які відтворюються синхронно як у вікні ПМ *Конструктор уроку* на робочому місці вчителя, так і у вікні ПМ *Урок алгебри* на робочих місцях учнів.

- Режим *Індивідуальний* призначено для самостійного опрацювання учнями навчальних матеріалів уроку на своїх робочих місцях.

- Режим *Вибірковий* призначено для проведення уроку вчителем з групою учнів, яку вчитель має сформувати засобами ПМ *Конструктор уроку*. Інші учні (учні, які не увійшли у цю групу) працюють в індивідуальному режимі – кожен над своїм уроком.

Для того, щоб додати урок учню треба скористатися одним з трьох пунктів контекстного меню – *Додати урок поточному учню, обраним учням чи учням в групі*. Далі з'явиться вікно вибору завдання (рис. 1.24), в якому вчитель обирає завдання – опорний конспект чи урок, натискує кнопку *Так* і завдання додається учню, у якого перед прізвищем у списку зроблена відмітка. Для того, щоб учень працював у режимі *Груповий*, необхідно проставити відмітку у колонці *Груповий*. Вчитель завершує проведення уроку командою *Управління уроком \ Завершити*.

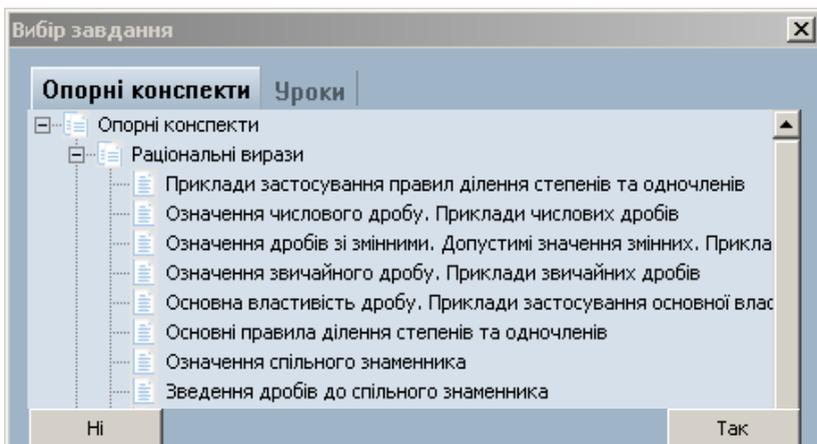


Рис. 1.24. Вікно вибору завдання при мережевій взаємодії

Контрольні питання і завдання

1. Інсталювати *БН Алгебра, 7-9 клас* на робоче місце вчителя (*Конструктор уроку*) і учня (*Урок алгебри*), за умови встановлення мереженого варіанту налагодити мережеву взаємодію. Ознайомитися зі змістом бібліотеки *Опорних конспектів*.

2. Розв'язати в *Середовищі розв'язання* а) нерівність $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$; б) рівняння $(x^2 + 3x)^2 - 2 \cdot (x^2 + 3x) - 3 = 0$.

3. За допомогою програмного модуля *Графік* виконати завдання:

а) графічним способом розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3, \\ y - x - 1 = 0; \end{cases}$$

б) за допомогою геометричних перетворень графіків побудувати графік функції $y = ||x| - 2| - 1$.

4. Як можна здійснювати різнорівневе навчання учнів математики, якщо використовувати електронні наочності *Алгебра, 7-9 клас*?

5. За допомогою ПМ *Конструктор уроку БН Алгебра 7-9* підготувати добірку наочностей до уроку алгебри за обраною темою. Дібрати відповідні опорні конспекти, розв'язати три власні алгебраїчні задачі чи виконати графічні побудовання. Провести підготовлений урок у режимі «груповий».

6. Як можна розвивати пізнавальну самостійність учнів, удосконалювати у них навички самоконтролю, розвивати алгоритмічність мислення, якщо використовувати у навчанні математики *БН Алгебра 7-9 клас*?

7. Опрацювати опорні конспекти *Числові послідовності* \ *Розв'язування задач на арифметичну (геометричну) прогресію прикладного змісту*. Дібрати і розв'язати задачу для числових послідовностей з використанням ПМ *Середовище розв'язання* на визначення а) суми n перших членів прогресії, б) першого члена, якщо задано два інші різні члени прогресії.

1.4.2. Педагогічний програмний засіб «Алгебра, 11 клас»

ПЗ *Алгебра, 10 клас, Алгебра, 11 клас*¹ створено згідно з чинною навчальною програмою алгебри і початків аналізу. Засіб призначений допомогти вчителю в організації продуктивної пізнавальної діяльності учнів при засвоєнні математичних знань, у виробленні стійких механізмів самонавчання, самовиховання і саморозвитку. Матеріали для опанування засобом оприлюднені нами в електронному навчальному курсі [29].

Оновлена версія *Алгебра, 11 клас*² містить поурочний розподіл навчального матеріалу з курсу алгебри і початків аналізу 11-го класу, а також дидактичні матеріали для поточного, тематичного та підсумкового контролю навчальних досягнень учнів, які включають самостійні роботи, тематичні та підсумкові контрольні роботи, контрольні питання і завдання, вправи для самостійного виконання, тестові завдання. Зміст дидактичних матеріалів диференційований за рівнем складності. Серед матеріалів ПЗ є довідкові відомості, а саме: умовні позначення, словник термінів, довідник, в якому вміщено основні формули до певного розділу курсу, список рекомендованої літератури.

Завдяки використанню засобу можна вдосконалити методику організації самостійної роботи учнів, враховувати широкий діапазон індивідуальних особливостей школярів (мислення, пам'ять, рівень підготовки до сприйняття і розуміння нових відомостей), будувати навчання з урахуванням цих особливостей, диференціювати процес навчання, здійснювати принципи алгоритмізації навчальної діяльності, забезпечувати інтенсивність роботи кожного учня, розвивати його здібності.

1. Коректну інсталяцію ПЗ на комп'ютері забезпечує виконання програми-інсталятора. Для ініціалізації програми інсталяції необхідно запустити з диска файл «*setup.exe*». Після запуску з'явиться діалогове вікно. Для запису повного курсу «Алгебра, 11 клас» необхідно обрати режим інсталяції «*Повна*» та натиснути кнопку «*Далі*». За замовченням ПЗ буде встановлено у папку *C:\Program Files\UkrPribor_Service\Algebra_11\assemble_Algebra_11*.

2. Після інсталяції програми в меню *Пуск* у розділі *Всі програми* у папці *UkrPriborService* знаходимо посилання на два програмних модулі: а) педагогічний програмний засіб *Алгебра, 11 клас*; б) програвач уроків (використовують учні при роботі у локальній мережі).

3. На рис. 1.25 представлено головне вікно ПЗ *Алгебра 11 клас*, у якому подано панель роботи з файлами (1), заголовок «активного» вікна (2), мінімізації / закриття вікна програми (3), панель переліків і змісту

¹ Педагогічний програмний засіб для загальноосвітніх навчальних закладів «Алгебра, 11 клас». – К. : УкрПриборСервис, 2006. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: процесор x86, 1100 MHz; 128 Мб RAM, CD-ROM Windows 98/XP.

² Алгебра, 11 клас [Електронний ресурс] : мультимедійний підручник. Режим доступу: – <http://rozumniki.net/catalog/products/matematyka/algebra-11-kl/> (дата звернення: 30.06.2019).

(4), робоча область (5), панель роботи з поточним уроком (6).

Переглядати та змінювати обрані уроки можна, якщо використовувати *Панель роботи з поточним уроком*. Вчитель може працювати в режимах *Уроки* та *Конструктор уроків*. Щоб переглянути урок, потрібно обрати режим *Уроки*. У переліку уроків, що відкриваються на панелі переліків і змісту, знайдемо потрібний урок з вказаним номером, відкриємо його у робочій області, натиснувши ліву клавішу миші, коли курсор миші знаходиться над заголовком уроку. При цьому урок завантажується у *Робочу область*. Щоб переглянути урок і мати змогу його редагувати, завантажимо добірку елементів з *Робочої області* до *Вікна поточного уроку*. Щоб переглянути урок, підводять вказівник миші до кнопки *Перегляд* на панелі роботи з поточним уроком, натискають ліву кнопку миші. При перегляді користуються кнопками навігації для кожного з слайдів.

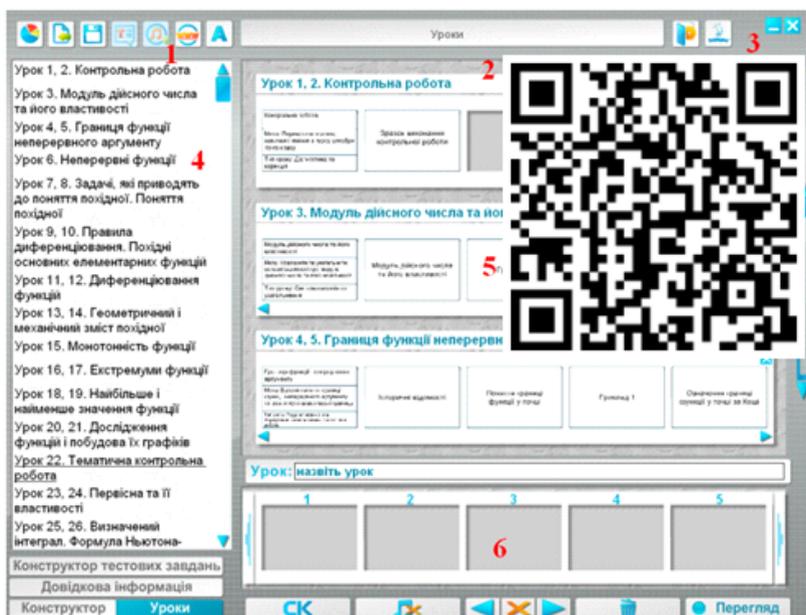


Рис. 1. 25. Головне вікно ПЗ Алгебра 11

4. З'ясуємо, як використовуючи даний програмний засіб, вчитель може провести урок на тему «Застосування визначених інтегралів до розв'язування задач механіки, фізики» за поданим нижче планом.

Мета уроку. Ввести формули для обчислення деяких фізичних величин за допомогою визначених інтегралів, розглянути приклади застосування визначеного інтеграла до розв'язування задач фізики, техніки.

Тип уроку. Засвоєння нових знань.

Ключові слова: визначений інтеграл, формула Ньютона-Лейбніца,

шлях, робота, маса, кількість теплоти, заряд.

Засоби навчання та обладнання. Підручник і ПЗНП «Алгебра, 11 клас».

План уроку.

I. Перевірка домашнього завдання та актуалізація опорних знань учнів (повторення формули Ньютона-Лейбніца, властивостей визначених інтегралів, формул з курсу фізики для обчислення шляху, роботи, заряду, кількості теплоти, маси).

II. Повідомлення теми, визначення мети, завдань уроку. Мотивація навчальної діяльності. Важливою передумовою ефективності вивчення і засвоєння нових навчальних математичних понять є використання мотиваційного фактору. Усвідомлення можливості застосовувати отримані на уроці знання у практичному житті, при вивченні фізики, економіки обумовить цілеспрямовану діяльність учнів.

III. Сприйняття та усвідомлення нового навчального матеріалу. Користуючись таблицею бібліотеки наочностей, з'ясувати, як обчислюється за допомогою визначених інтегралів переміщення, робота, кількість теплоти, маса стержня, заряд для змінних величин швидкості, продуктивності, теплоємності, густини, струму. Усвідомлення отриманих знань, пробні вправи з перевіркою за електронною наочністю.

IV. Застосування набутих навичок та вмій у процесі виконання вправ.

V. Підсумки уроку і повідомлення домашнього завдання.

5. Щоб повноцінно використовувати засіб у навчанні, вчителю необхідно вміти завантажувати розроблений урок і при потребі його редагувати (видаляти окремі елементи уроку, додавати нові з бібліотеки наочностей, створювати текстові повідомлення, імпортувати наочності).

На прикладі уроку за обраною темою з'ясуємо, як вчитель може удосконалювати розроблені раніше уроки, доповнювати їх новими наочностями. Переглянемо урок № 29 (7) «Застосування визначених інтегралів до розв'язування задач механіки, фізики» з бібліотеки уроків ПЗ «Алгебра, 11 клас». Для цього перейдемо до режиму *Уроки*, у переліку знайдемо урок з вказаним номером, відкриємо його у робочій області. Щоб переглянути урок і мати змогу його редагувати, завантажимо добірку елементів з робочої області до вікна поточного уроку.

До зазначеного уроку пропонується включити сім елементів.

- *Елемент 1*, в якому записана тема уроку, мета, тип уроку.
- *Елемент 2* – таблиця з формулами (табл. 1.6) для обчислення величини шляху при змінній швидкості руху тіла; маси тонкого стержня з неоднорідною лінійною густиною; роботи змінної сили; заряду, що проходить через поперечний переріз провідника за певний проміжок часу; кількості теплоти, що виділяється чи поглинається тілом, за умови, що питома теплоємність залежить від температури.

Для різних типів завдань пропонується по одному прикладу (п'ять елементів). Наведемо перелік цих завдань.

- *Елемент 3*. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю

$v(t) = 3 + 3t^2$ (м/с). Знайти шлях, який пройшло тіло за перші 5 с.

▪ *Елемент 4.* Лінійна густина неоднорідного стержня завдовжки 6 см змінюється за законом $\rho(x) = 3x + 4$ (г/см). Знайти масу стержня.

▪ *Елемент 5.* Протягом 7 с величина струму в провіднику змінювалась за законом $I(t) = 3t^2 + 2t$ (А). Знайти величину заряду, що пройшов через провідник за цей час.

▪ *Елемент 6.* Сила у 2 Н розтягує пружину на 4 см. Яку роботу слід виконати, щоб розтягнути пружину на 4 см?

▪ *Елемент 7.* Сила f , з якою електричний заряд e_1 відштовхує заряд e_2 (того самого знаку), що знаходиться від нього на відстані r , виражається

формулою $f = k \frac{e_1 e_2}{r^2}$, де k – стала. Визначити роботу сили f при пере-

міщенні заряду e_2 з точки A_1 , яка знаходиться від e_1 на відстані r_1 , в точку A_2 , яка знаходиться від e_1 на відстані r_2 , покладаючи, що заряд e_1 вміщено у точку A_0 , прийняту за початок відліку.

Таблиця 1.6.

Застосування визначених інтегралів до обчислення фізичних величин

№	Фізична величина	Формула для обчислення
1.	S – пройдений тілом шлях, $v(t)$ – швидкість, $t \in [t_1, t_2]$	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$
2.	m – маса тонкого стержня, $\rho(x)$ – лінійна густина, $x \in [x_1, x_2]$	$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$
3.	q – величина заряду, $I(t)$ – сила струму, $t \in [t_1, t_2]$	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$
4.	A – робота, $F(x)$ – змінна сила, $x \in [x_1, x_2]$	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$
5.	Q – кількість теплоти, $C(t)$ – теплоємність, $t \in [t_1, t_2]$	$Q = \int_{t_1}^{t_2} C(t) dt$

До кожної задачі (*елемент* бібліотеки наочностей) створено по два *кадри*. У першому кадрі подано умову завдання, у другому – його розв’язання. Завдяки такому поданню відомостей створюються сприятливі умови для розвитку у школярів пізнавальної самостійності, запровадження інтерактивних технологій навчання математики.

Для уроків у класах з поглибленим вивченням математики додамо ще кілька завдань. Наприклад, на обчислення роботи при піднятті вантажів.

6. З’ясуємо, як можна редагувати вже розроблений урок. Щоб дода-

ти для актуалізації опорних знань та умінь учнів елемент «Формула Ньютона-Лейбніца», перейдемо з відкритим поточним уроком до режиму *Конструктор*. Виберемо розділ 4, тему 1 «Первісна та інтеграл», урок 3-4 «Формула Ньютона-Лейбніца» та завантажимо його у робочу область. Серед запропонованих елементів знайдемо «Формула Ньютона-Лейбніца» і завантажимо елемент у вікно поточного уроку. На панелі поточного уроку доданий елемент розташований останнім, тому перемістимо його вліво на друге місце, використовуючи при цьому навігаційні клавіші панелі поточного уроку (при виділеному елементі натиснути стрілку вліво).

Як зазначалося вище, важливою передумовою ефективності вивчення і засвоєння нового навчального матеріалу є використання мотиваційного фактору, демонстрування міжпредметних зв'язків *геометрія – математичний аналіз – фізика*. Доцільно включити до елементів уроку завдання, яке вже розв'язувалося на попередньому занятті. А саме, за допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури, обмеженої віссю абсцис, графіками функцій $y=0,5 \cdot x^2$ і $y=4-x$ (рис. 1.26). Це завдання потрібно переформулювати відповідно до теми уроку: знайти масу однорідної пластини чи знайти центр мас однорідної пластини.

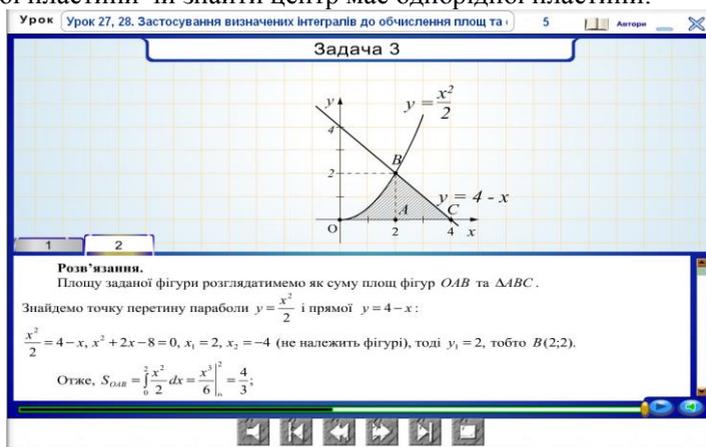


Рис. 1.26. Кадр з розв'язанням задачі на обчислення площі фігури

Щоб додати зазначений елемент уроку, виберемо розділ 4, тему 1 «Первісна та інтеграл», урок 5-6 «Застосування визначених інтегралів до обчислення площ та об'ємів геометричних фігур» та завантажимо його у робочу область. Серед запропонованих базових елементів знайдемо «Задача 3» і завантажимо елемент у вікно поточного уроку. На панелі поточного уроку доданий елемент розмістимо третім.

7. Для створення нового уроку необхідно на панелі роботи з поточним уроком у полі «Урок» ввести його назву і натиснути кнопку *Занам'ятати*.

8. Додамо нові завдання на обчислення виконаної роботи – на викачування води з бочки, на побудову піраміди Хеопса. Якщо учні вже ви-

вчали властивості логарифмічної функції, доцільно запропонувати завдання на визначення роботи, яку виконає ідеальний газ. Пропоновані завдання можуть бути розв'язані на наступному уроці, але зберігати їх в бібліотеці краще разом. Тому нумерацію елементів уроку продовжуватимемо з врахуванням двох доданих базових елементів.

Елемент 10. Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб викачати воду з циліндричної бочки висотою 4 м, з радіусом основи 2 м.

Елемент 11. Піраміда Хеопса є правильною чотирикутною пірамідою висотою 147 м, в основі якої лежить квадрат зі стороною 232 м. Знайти роботу проти сили тяжіння, затрачену при будівництві піраміди.

Елемент 12. Експериментально встановлено, що залежність витрати бензину автомобілем від швидкості на 100 км шляху визначається формулою $Q=18-0,3v+0,0003v^2$, $30<v<110$. Визначити середню витрату бензину, якщо швидкість руху 50-60 км/год.

Елемент 13. Ідеальний газ в об'ємі $V_1=1\text{м}^3$ при тиску $p_1=3\cdot 10^5$ Па здійснює коловий цикл за 3 етапи. газ при сталому тиску нагрівають до температури, при якій його об'єм збільшується в три рази. Після цього він при сталому об'ємі охолоджується до температури, при якій його тиск дорівнює $p_2=10^5$ Па. З цього стану газ повертається у початковий стан при сталій температурі. Обчислити виконану газом роботу (рис. 1.28 д).

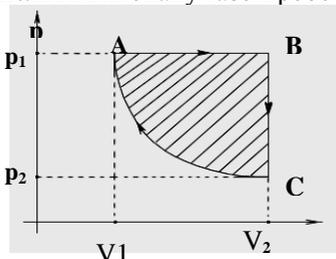


Рис. 1.27. Схематичне зображення колового процесу, який здійснює газ

Базові елементи уроку № 7(29) розміщені у розділі 4 «Інтеграл та його застосування», темі 1 «Первісна та інтеграл». Тому перед тим, як доповнювати бібліотеку новими наочностями, необхідно урок 7-8 з вказаного розділу і теми у режимі *Конструктор* завантажити у робочу область. Тоді всі текстові повідомлення, імпортовані файли зображень, звукові файли будуть зберігатися у папці `C:\Program Files\UkrPriboService\Algebra_11\assemble_Algebra_11\data\rozdil_4\Tema_1\Lesson_7_8`.

9. Для створення текстового повідомлення «натиснемо» на піктограму **T** панелі роботи з файлом. У відкритому вікні для створення текстового повідомлення запишемо назву нової задачі «Задача про викачування води з бочки», введемо її умову і назву файла, під якою задача буде зберігатися у бібліотеці наочностей z_9 (рис. 1.28 б). Аналогічно створюємо і зберігаємо текстові повідомлення до інших трьох задач.

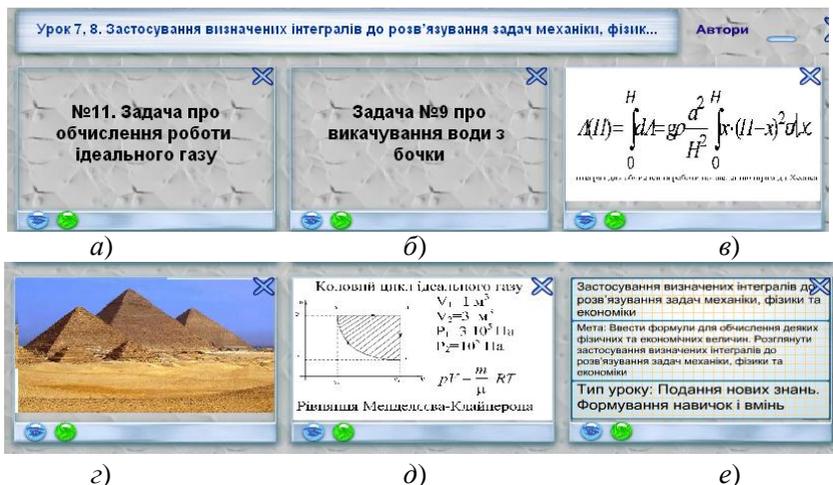


Рис. 1.28. Елементи з імпортованими наочностями для уроку

Крім текстового повідомлення з умовою завдання, бажано подати і деякі нотатки з розв'язаннями задач чи підказками для обчислення. А саме, створити ще одне текстове повідомлення для кожної задачі чи імпортувати розв'язання як зображення (файл з розширенням jpg), якщо запис містить значну кількість формул. Для задачі про викачування води з бочки можна подати нотатки, якими учень може скористатися при самостійному опрацюванні завдання. Для розв'язування задачі розіб'ємо циліндр паралельними основі площинами на тонкі шари. Виділивши один з них на глибині y і позначивши його товщину та об'єм відповідно через Δy та ΔV , отримаємо $\Delta V = \pi R^2 \Delta y$ (м^3). Маса води ΔQ в знайденому об'ємі рівна $\Delta Q = 1000\pi R^2 \Delta y$ (т), оскільки 1 м^3 води важить 1 т. Щоб викачати воду, яка знаходиться в розглянутому шарі, його необхідно підняти до краю бака, тобто на висоту y . Робота ΔP , яка здійснюється при цьому виразиться так:

$$\Delta P = \Delta Q g y = 1000\pi g R^2 y \Delta y \quad (*)$$

При послідовному підніманні до краю бака кожного шару, починаючи з першого та закінчуючи останнім, виконується в кожному випадку робота, яка визначається рівністю (*); при цьому y змінюється від 0 до H . Запис для виконаної роботи матиме вигляд $\sum 1000\pi g R^2 y \Delta y$. Але отримана величина роботи тільки наближена. Щоб знайти шукану роботу, будемо необмежено збільшувати число поділок циліндра площинами. Тоді вся робота обчислюватиметься за допомогою визначеного інтеграла $\int_0^H 1000\pi g R^2 y dy$, де g – прискорення сили тяжіння.

10. Малюнок до завдання можна виконати за допомогою графічного редактора Paint, зберегти з розширенням jpg та імпортувати у бібліотеку

наочностей. Імпортують файли таких типів: зображення (.swf, .jpg), таблиць (.tab), текстів (.txt), звуків (.mp3), уроків (.les).

Для задачі про піраміду доцільно імпортувати фото з єгипетськими пірамідами, підказку для перевірки, чи правильно записано інтеграл для обчислення роботи по зведенню піраміди Хеопса (рис.1. 30 в, з). Складаємо вираз, враховуючи, що g – прискорення сили тяжіння, H – висота піраміди, x – висота від основи до виділеного шару піраміди, ρ – густина каменю.

$$A = A(H) = \int_0^H dA = g\rho \frac{a^2}{H^2} \int_0^H x \cdot (H - x)^2 dx.$$

Щоб додати імпортований елемент до уроку, необхідно перейти до потрібного розділу бібліотеки наочностей і обрати елемент. Елемент автоматично додається в обраний кадр поточного уроку.

Для завдання про обчислення роботи ідеального газу імпортуємо малюнок, який демонструє коловий процес і створюємо текстове повідомлення з підказкою – рівнянням Менделєєва – Клапейрона $pV = RT/\mu$. Робота при здійсненому коловому процесі чисельно дорівнює площі криволінійного трикутника ABC (рис. 1.28 а, д).

11. Для здійснення контролю і корекції знань учнів вчитель може використовувати базові елементи *Контрольна робота*, *Конструктор завдань*, *Конструктор питань*, *Тестові завдання*. При виборі теми уроку *Контрольна робота* користувачу ПЗ буде запропоновано конструктор завдань та зразок виконання контрольної роботи для певної теми (рис. 1.29). Базовий елемент *Конструктор завдань* містить 4-5 варіантів завдань до контрольної роботи. Крім того, користувач може самостійно дібрати завдання і вписати їх в документ для друку для даної контрольної роботи.

Контрольні питання і завдання до теми допоможуть учням краще усвідомити суть, зв'язки та окремі тонкощі математичної теорії, систематизувати та узагальнити навчальний матеріал, здійснити самоконтроль результатів його засвоєння. З цією ж метою дано і тестові завдання. Результати опрацювання цих завдань вчитель може зберігати за допомогою модуля *Статистика*.

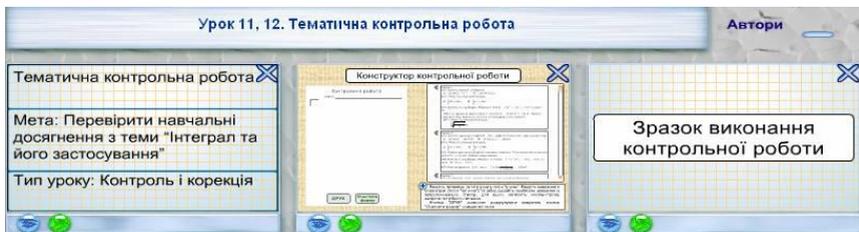


Рис. 1.29. Зображення базових елементів контрольної роботи

Контрольні питання і завдання

1. Дослідити, які можливості для організації самостійної роботи учнів надає використання у навчанні ПЗ *Алгебра, 10-11 клас?*

2. Переглянути уроки до теми «Теорія ймовірностей і математична статистика». Дослідити, якими наочностями доцільно доповнити бібліотеку, якщо використати для аналізу варіаційних рядів Microsoft Excel?

3. Розробити урок за обраною темою в 10-му чи в 11-му класі. Дібрати відповідні завдання з бібліотеки наочностей засобу, створити власні кроки – текстові повідомлення, імпортувати графічні наочності. Дібрати завдання для актуалізації опорних знань та умінь, для контролю і корекції знань.

1.4.3. Педагогічний програмний засіб GRAN1

Програмно-методичний комплекс GRAN¹ може успішно використовуватися не лише у навчанні математики у середній школі, але й при вивченні вищої математики, математичного аналізу, елементарної математики, теорії ймовірностей та математичної статистики, методики навчання математики у закладах вищої педагогічної освіти. Комплекс створений авторським колективом під керівництвом М.І. Жалдака, академіка АПН України, доктора педагогічних наук, професора [19-29]. Значний вклад у розробку нових версій програм внесли Ю.В. Горошко [19], О.В. Вітюк [22], Є.Ф. Вінниченко [14-16], [19], А.О. Костюченко. Для DOS-версії GRAN1 І.В. Лупан розроблено лабораторні роботи (10-11 класи) з вивчення властивостей функцій і рекомендації щодо їх організації [41, 36]. У посібнику «Уроки математики з комп'ютером» [37] подаються добірки завдань для дослідження функції за допомогою оновленої версії GRAN1².

За допомогою GRAN1 можна будувати та аналізувати функціональні залежності явного та неявного видів, які задані в декартових чи в полярних координатах, параметрично, таблично; графічно розв'язувати рівняння, нерівності та їх системи з однією чи двома змінними; наближено визначати корені многочленів; досліджувати границі числових послідовностей та функцій; опрацьовувати статистичні дані (побудова полігону частот, гістограм, обчислення відносних частот різних подій; визначення центра розсіювання відносних частот та величини розсіювання (дисперсії); будувати графіки функцій розподілу; обчислювати визначені інтеграли; площі криволінійних трапецій; площі поверхонь та об'єми тіл обертання тощо.

¹ Програмний комплекс «GRAN», версія 1.0. – К. : Республіканський навчально-методичний центр «Дініт», 2003. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: Pentium, тактова частота – від 1100 MHz, 64 Mb RAM, CD-ROM Windows 98/XP.

² Жалдак М.І. Програмний засіб GRAN1, версія 1.1. [Електронний ресурс] / М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко. – Київ, 2012. – Режим доступу: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/index.php/uk/zavantazhyty/category/1-gran1> (дата звернення: 30.06.2019).

Стосовно ПЗ GRAN1 О. І. Скафа [96] зазначає, що він є одним із засобів візуалізації задачі та її розв'язку, допомагає активізувати діалог учня та вчителя, зробити його більш евристичним.

На особистісних аспектах застосування засобу наголошує М. І. Жалдак. Мова йде насамперед про можливість здійснювати диференційований підхід у навчанні. Учням / студентам, схильним до глибокого вивчення математики, відкриваються широкі можливості не лише досліджувати готові математичні моделі, але й вивільнити час для самої постановки завдання, з'ясування сутності досліджуваних процесів і явищ, інтерпретації отриманих за допомогою комп'ютера результатів. Учням нематематичного профілю навчання навички роботи з комп'ютером сприятимуть тому, що вони не почуватимуть себе у складному становищі, не боятимуться втратити почуття власної гідності, зможуть подолати психологічні бар'єри при вивченні математики [18, 11].

1. Назва засобу утворена від GGraphic ANalysis. Для початку роботи слід активізувати файл [gran1.exe](#) (інсталяційний файл [setup_gran1](#)).

Головне меню (рис. 1.30) включає пункти: *Файл*, *Об'єкт* (створити, змінити, вилучити останній, список об'єктів, нова функція з зафіксованими параметрами), *Виправлення* (копіювання формул, графіків, вікон, налаштування розмірів вікон), *Графік* (побудувати, очистити, координати з клавіатури, масштаб, мітки, параметри вікна *Графік*); *Операції* (вкладки *Інтеграл*, *Операції з ламаними*, *Статистика*, *Нерівності*, *Похідна*, *Відстань до точки*, *Значення виразу $G(x,y)$* , *Відповіді*, *Калькулятор*).

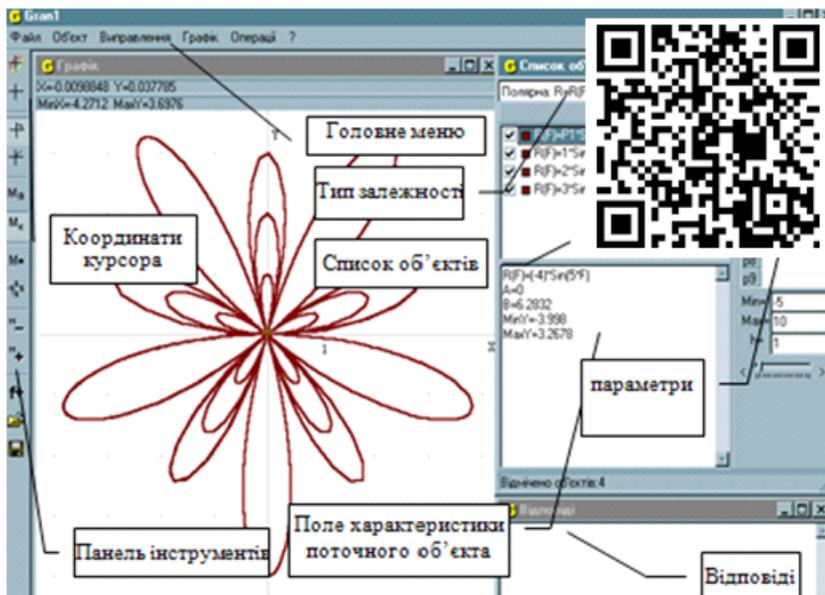


Рис. 1. 30. [Робоче вікно програми GRAN1](#)

Зліва у колонці розташована панель інструментів для виконання окремих найчастіше використовуваних підпунктів головного меню. Справа розташований список об'єктів і таблиця для зміни параметрів.

2. *Допустимі символи і операції.* Числові значення і вирази записуються за правилами близькими до прийнятих у мовах програмування. При записі числових значень дробова частина, якщо вона є, відокремлюється від цілої точкою. *Арифметичні операції* позначаються знаками: + додавання, – віднімання, * множення, / ділення, ^ піднесення до степеня. Пріоритети (порядок виконання) операцій загальноприйняті. Бажаний порядок операцій може бути вказаний за допомогою дужок.

До виразів можуть бути включені *позначення деяких функцій*, представлених на панелі введення (рис. 1.32): *Sin* – синус, *Cos* – косинус, *Tg* – тангенс, *Ctg* – котангенс, *Asin* – арксинус, *Acos* – арккосинус, *Atg* – арктангенс, *Actg* – арккотангенс, *Exp* – експонента (e^x), *Lg* – логарифм десятистовий, *Ln* – логарифм натуральний, *Log* – логарифм за довільною допустимою основою (при введенні в дужках вказується основа і через кому підлогарифмічний вираз), *Abs* – абсолютна величина, *Int* – ціла частина аргументу, *Sqrt* – корінь квадратний, *Pi* – число π (3.141592654).

P – позначення для параметра. При створенні об'єкта-функції аналітичний вираз може містити до 9 параметрів. Параметру, який ще не використовувався, надається початкове значення рівне одиниці. В ході дослідження можна змінювати значення поточного параметра, рухаючи бігунок з певним кроком в заданих межах. Уточнююче значення параметра вводять безпосередньо в таблицю параметрів (рис. 1.30).

3. Щоб *створити нову функціональну залежність*, необхідно виконати ланцюжок команд: *обрати тип залежності* (рис. 1.31) – *Об'єкт \ Створити* – *Ввести функціональну залежність у рядку на панелі введення даних* – *Значити відрізок задання* – *Графік побудувати*.



Рис. 1.31. Панель вибору типу функціональної залежності

Для вказування залежностей між змінними використовується *панель введення функціональних залежностей* (рис. 1.32). При потребі можна змінити колір графіка залежності. Якщо у властивостях об'єкта для побудови графіка зняти відмітку \surd , то графік функції на екран виводитися не буде. Якщо перед формулою у списку об'єктів зняти відмітку \surd , то на функцію не поширюватимуться операції, які виконує користувач, хоча графік функції може будуватися.

4. Нижче подаються допустимі типи *функціональних залежностей*. Задана явно залежність виду $y=f(x)$. Для дослідження функцій $y=|x^2+x-m|$, $y=kx+b$; $y=ax^2+c$, створюють об'єкти за формулами $y=Abs(X^2+X-P1)$, $y=P2*x+P3$; $y=P4*x^2+P5$. Під час один з параметрів фіксують, а інший – змінюють; аналізують отриманий графік; порівнюють його з попереднім; висловлюють гіпотези щодо властивостей функції.

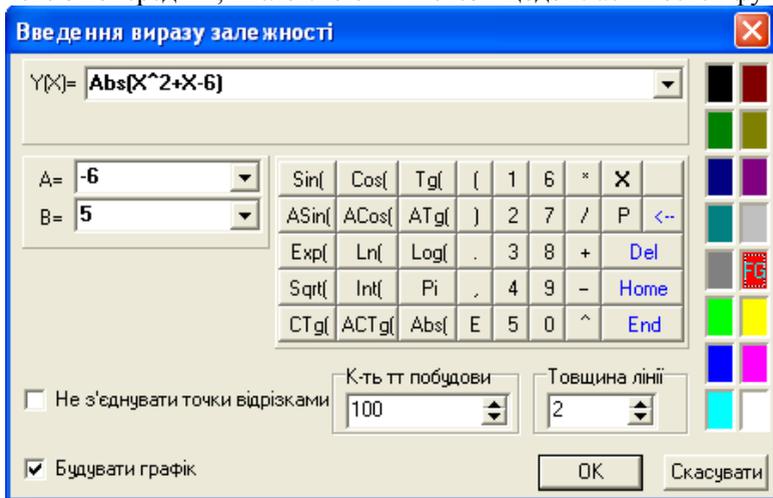


Рис. 1.32. Панель введення даних

Наприклад, щоб дослідити розташування параболі, заданої на координатній площині формулою $f(x)=a(x-x_0)^2+m$, необхідно створити об'єкт явного типу за формулою $y = P6*(X-P7)^2+P8$. Рухаючи бігунок параметра, змінюють значення одного з параметрів $P6$ ($P7$ чи $P8$). [На рис. 1.33 побудовано параболі для різних значень параметрів](#). Щоб зручно було проаналізувати графіки, доцільно користуватися послугою *Об'єкт \ Нова функція з зафіксованими параметрами*. Нові об'єкти фіксуються, якщо світловий курсор встановлено на об'єкт, який містить параметри.

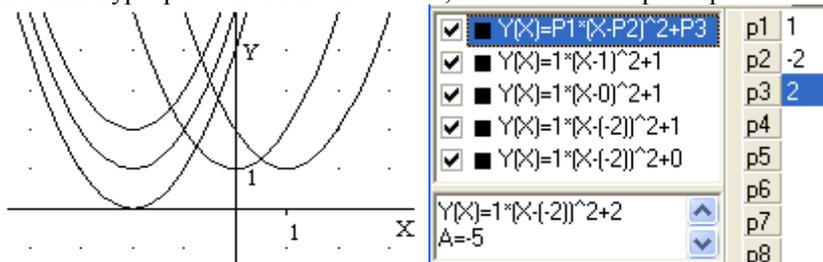


Рис. 1.33. Графіки для дослідження властивостей квадратичної функції

5. Якщо необхідно *змінити введenu функцію* чи вказати інші межі відрізка, на якому задана функціональна залежність між змінними, ви-

користується послуга *Об'єкт \ Змінити*.

6. Щоб скопіювати побудований графік, необхідно перейти до вікна *Графік* і використати послугу *Виправлення \ Скопіювати*. Для копіювання формули переходять до вікна *Список об'єктів* і використовують названу послугу.

7. За допомогою послуги *Масштаб* можна змінювати масштаби у вікні *Графік* (*Попередній масштаб, Початковий, Автоматичний, Масштаб користувача*). У режимі *Масштаб користувача* можна встановити довільні межі вздовж осей Ox і Oy , у яких будуть будуватися зображення. У режимі *Масштаб \ Авто* програма автоматично вибирає масштаби вздовж осей Ox і Oy залежно від меж, у яких змінюються абсциси й ординати.

8. З текстових файлів чи з презентації можна здійснити гіперпосилання на файли [GRAN1](#). Для цього необхідно зберегти файл GRAN1, здійснити копію вікна з графіками (*Виправлення \ скопіювати*), помістити рисунок у створений *текстовий документ* та здійснити посилання з текстового документа на файл ПЗ (виділити графічний об'єкт чи текст, викликати контекстне меню, обрати пункт *Гіперпосилання*, вказати на створений за допомогою GRAN1 файл).

9. *Неявно задана залежність подається у вигляді $G(x, y)=0$.*

Наприклад, рівняння кола $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ подається за допомогою виразу $0=(x-P1)^2+(y-P2)^2-P3^2$.

Щоб порівнювати *властивості даної функціональної залежності та оберненої до неї*, іноді зручно функції представити як неявно задані. Наприклад, для показникової $y=a^x$ та оберненої до неї логарифмічної $y=\log_a x$ створюють об'єкти за формулами $0=y-P9^{\wedge}x$, $0=x-P9^{\wedge}y$. Змінюють значення параметра $P9$, порівнюють властивості обох функцій для значень $a>1$ (параметра $P9>1$), $0<a<1$ (для параметра $0<P9<1$).

10. *Залежність параметрично задана у вигляді $x=x(t)$, $y=y(t)$.*

Наприклад, фігури Ліссажу – графіки залежностей виду $x = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)$, $y = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$ – подаються у форматі GRAN1 формулами $X(t)=P1 * \sin(P2 * t + P3)$; $y(t)=P4 * \sin(P5 * t + P6)$.

Рівняння еліпса подають за формулами $x=P7 * \cos(T)$, $y=P8 * \sin(T)$.

11. Тип залежності таблична X_i , $Y(X_i)$. Для створення таблично заданої залежності між змінними x і y треба сформувати список точок на координатній площині. Оскільки для такої залежності формується апроксимуючий поліном, то необхідно вказати його степінь в межах від 0 до 7, виходячи з умов задачі або з взаємного розміщення точок. Список точок можна сформувати, якщо вводити їх координати з екрану, з клавіатури, з числової панелі, завантажити з текстового файлу. Числа у файлі повинні розділятися пропусками або починатися з нового рядка.

За допомогою заданої залежності можна опрацьовувати результати деякого експерименту і висувати гіпотези про залежність однієї величини від іншої. Наприклад, побудуємо параболу, попередньо ввівши з ек-

рану координати не менше як трьох її точок (вказати степінь многочлена 2); відрізок прямої, який з'єднує дві точки чи апроксимує табличні дані лінійною функцією (степінь многочлена 1).

12. *Залежність задана в полярних координатах* у вигляді $r=r(F)$, де $r(F)$ – вираз від змінної F , r – полярний радіус точки на площині, F – полярний кут. Графіком залежності $r = af$, ($a > 0$, $a = const$, $f \geq 0$) є спіраль Архімеда; залежності $r = a/f$, ($a > 0$, $f > 0$) – гіперболічна спіраль; залежності $r = be^{af}$, ($a > 0$, $b > 0$, $f \geq 0$) – логарифмічна спіраль. Для дослідження створюють об'єкти за формулами $R=P1*f$; $R=P2/f$; $R=P3*exp(P4*f)$, зазначають межі зміни параметрів $P1 \in [0;20]$; $P2 \in [0;20]$ і аргументу $f \in [0;20]$.

На рис. 1.30 подано [графіки функцій, заданих у полярних координатах](#): $R(F)=3*\sin(5*F)$; $R(F)=2*\sin(5*F)$; $R(F)=P1*\sin(P2*F)$.

13. Для *створення ламаної* після сформування списку точок ламаної необхідно вказати чи вона замкнена. Вписування ламаної в криву використовують для наближеного обчислення площі фігури, обмеженої цією кривою (*Операції \ Інтеграл \ Площа многокутника*), для визначення довжини дуги кривої (*Операції \ Довжина дуги*) і об'єму тіла обертання.

14. Побудувати у середовищі GRAN1 *коло* можна чотирма способами: за координатами центра та радіусом; за двома точками – центром кола і точкою на колі (тип *Коло*); як об'єкт неявного типу задання $0=(x-P1)^2+(y-P2)^2-P3^2$; як об'єкт, заданий параметрично $x=P9*\cos(T)$, $y=P9*\sin(T)$.

15. Щоб визначити *координати точки на площині*, потрібно звернутися до підпункту *Координати* пункту *Графік*. Послуга використовується для встановлення коренів рівнянь, обчислення розв'язків системи рівнянь.

Наближено розв'яжемо систему рівнянь $y=3\sin 2x$, $y=(x-2)^2$. Для цього потрібно очистити екран, створити об'єкти явного типу, що відповідають даним функціям: $y=3*\sin(2*x)$, $y=(x-2)^2$, зазначити відрізок $-1; 5$. Побудувавши графіки, знаходять координати точок перетину за допомогою послуги *Координати* чи як координати курсора, що знаходиться над точкою перетину (у верхньому рядку прочитаємо $X=0.4$, $Y=2.3$). Другим розв'язком системи буде пара чисел $X=1,5$ $Y=0,2$. Щоб з'ясувати, чи має система третій розв'язок, обводять «сумнівне» місце вказівником миші, притиснувши ліву клавішу, збільшують досліджувану частину, отримують, що третьої точки перетину не існує ([рис. 1.34](#)).

16. Послуга *Операції \ нерівності \ система нерівностей* $y(x)<(>)c...$ призначена для розв'язування нерівностей виду $y(x)<c$ або $y(x)>c$ для відмічених функцій виду $y=y(x)$. Проміжки, на яких містяться корені системи відповідних рівнянь, записуються у вікно *Відповіді* і зображаються у вікні *Графік* контрастною лінією.

Наприклад, [щоб розв'язати нерівність \$3\sin 2x > 1\$](#) , потрібно виконати ланцюжок команд: *Тип функцій* $y(x)$ – *Об'єкт* – *Створити* – ввести формулу $3*\sin(2*x)$ – задати *Відрізок* $-5; 5$. – *Побудувати графік* – викорис-

тати послугу *Операції \ Нерівності* – вказати «>1» – у вікні *Відповідь* отримати наближені розв’язки нерівності.

Послуга *Операції \ нерівності \ система нерівностей* $G(x,y) < (>) 0$ призначена для розв’язування системи нерівностей виду $G(x,y) < 0$ або $G(x,y) > 0$ для відмічених функцій виду $0 = G(x,y)$. Області, в яких система нерівностей задовольняється, заштриховуються у вікні *Графік*. Система в обох випадках може складатись і з однієї нерівності. Наприклад, *побудувати ГМТ, що задовольняють нерівність $\cos(y-x) > 0$* .

Для цього обираємо тип залежності – неявно задана функція $0 = G(x,y)$ і створюємо об’єкт за формулою $0 = \cos(y-x)$. Відрізок задання можна взяти стандартний $[-5,5]$, як для змінної X , так і для змінної Y . Щоб заштрихувати на площині ГМТ, використовують послугу *Побудувати графік* та послугу *Операції \ Нерівності \ $G(x,y) > 0$* (рис. 1.35).

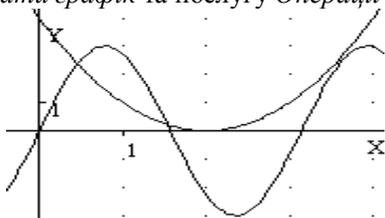


Рис. 1.34.

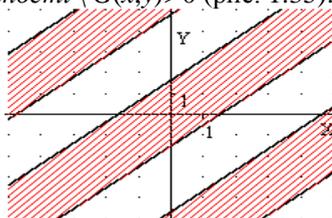


Рис. 1.35.

17. Послуга *Операції \ Інтеграл \ Інтеграл* призначена для обчислення суми визначених інтегралів для відмічених об’єктів у вказаних межах інтегрування. Щоб *обчислити інтеграл* $\int_2^5 \sqrt{6x-5} dx$, спочатку

будують графік функції $y = \sqrt{6x-5}$. Для цього створюють об’єкт явно-го типу за формулою *Sqrt(6*x-5)*, змінивши відрізок задання на $[-1, 7]$. Щоб обчислити інтеграл, використовують послугу *Інтеграл*, задають межі інтегрування 2; 5 (рис. 1.36).

Щоб *обчислити площу фігури*, обмеженої графіками функцій $y = \sqrt{6x-5}$, $y = (x-2)^2$, потрібно очистити екран, побудувати графіки функцій, визначити абсиси точок перетину графіків – межі інтегрування. Для даного прикладу нижня межа інтегрування 1, а верхня 4,1. Далі користуються послугою *Інтеграл*. Спочатку обчислюють площу кожної з криволінійних трапецій окремо. Площу між кривими потрібно обчислити як різницю площ двох криволінійних трапецій.

Щоб *обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції*, обмеженої кривими $y = |x^2 + x - 6|$, $y = 0$, $x = -4$, $x = 3$, будують графік функції ($y = Abs(X^2 + X - 6)$), обрають послугу *Операції \ Інтеграл \ Площа поверхні та об’єм тіла обертання навколо осі Ox* , зазначають межі інтегрування – 4 та 3. Щоб тіло обертання було видно на екрані, добирають масштаб для зображення криволінійної трапеції

(рис. 1.37). У вікні *Відповідь* отримаємо: $V=396.57$, $S=520.14$.

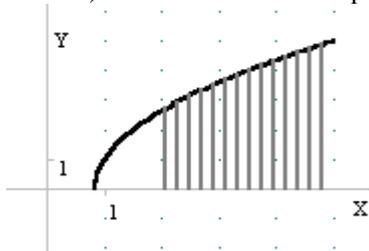


Рис. 1.36. Криволінійна трапеція

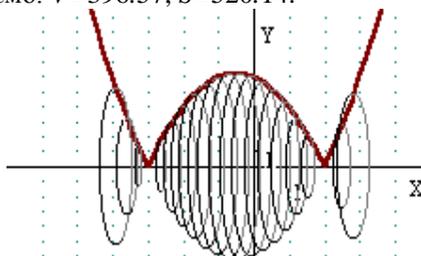


Рис. 1.37. Тіло обертання

18. Щоб знайти, скільки розв'язків має рівняння $e^{1/x} = a/x^2$ залежно від параметра a , в системі координат (x, y) будемо графіки функцій $y = x^2 e^{1/x}$ і $y = a$ (рис. 1.38), знаходимо кількість точок перетину графіків. Для дослідження за допомогою GRAN1 створюємо об'єкти явного типу задання за формулами $y = x^2 * exp(1/x)$ і $y = p1$.

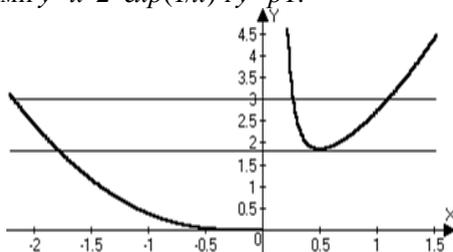


Рис. 1.38. Графік функції $y = x^2 e^{1/x}$

Для розв'язування нерівності $|x^2 - x + a| \geq x^2 - 2a$ залежно від параметра a можна побудувати за допомогою GRAN1 у координатах (x, a) ГМТ, які задовольняють нерівність. При цьому позначають параметр через y та створюють об'єкт неявного типу задання $0 = G(x, y)$ за формулою $0 = ABS(x^2 - x + y) - x^2 + 2 * y$. Побудувавши графік рівняння, застосовують операцію *Розв'язати нерівність* $G(x, y) > 0$. Побудоване геометричне місце точок перетинають горизонтальними прямими, перпендикулярними до осі параметра. Для кожного з допустимих значень параметра абсиси спільних точок прямих і побудованого ГМТ дадуть розв'язки нерівності. Детальніше про графічні прийоми розв'язування задач з параметрами читати в п. 2.8 даного посібника.

19. Для наближеного відшукування *найбільшого і найменшого значень функції $y = f(x)$* на заданому проміжку $[a, b]$ з використанням послуг програми GRAN1 досить побудувати графік залежності $y = f(x)$ при $x \in [a, b]$ і, використовуючи послугу *Координати пункту Графік*, визначити координати найвищої і найнижчої точок на графіку $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. У програмі автоматично обчислюється найменше і найбільше значення функції на заданому проміжку. Про застосування засобу

GRAN1 для відшукування екстремальних значень функції в задачах практичного змісту детальніше можна прочитати в п. 2.5 даного посібника.

20. Доцільно запропонувати учням творче завдання – описати криві на малюнку за допомогою функціональних залежностей. [На рис. 1.39 побудовано графіки квадратичних та лінійних функцій.](#)

Добірку цих функцій подаємо у форматі GRAN1:

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $Y(X)=X^2, x \in [-10;10];$ | 2) $Y(X)=X^2+20, x \in [-5;5];$ |
| 3) $Y(X)=45, x \in [-5;5];$ | 4) $Y(X)=100, x \in [-10;10];$ |
| 5) $Y(X)=-X^2/4+125, x \in [-12;12];$ | 6) $Y(X)=-X^2/4+120, x \in [-8;8];$ |
| 7) $Y(X)=-X^2/4+115, x \in [-6;6];$ | 8) $Y(X)=-X^2/4+110, x \in [-4;4];$ |
| 9) $Y(X)=80, x \in [-5;-3];$ | 10) $Y(X)=80, x \in [3;5].$ |

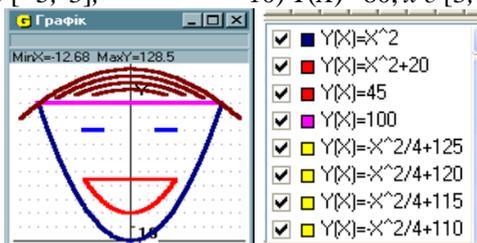


Рис. 1.39. Малюнок «Дівчина-красуня» виконано за допомогою GRAN1

21. За допомогою GRAN1 зручно здійснювати опрацювання статистичних даних, зокрема будувати частотні таблиці, полігони статистичних ймовірностей чи гістограми, визначати числові характеристики вибірок. Детальніше про розв’язування задач стохастики у підрозділі 2.9.

22. Підприємство випускає столи і книжкові полиці. У табл. 1.7 подано затрати і прибутки для кожного виду продукції, наявні ресурси. *Знайти оптимальний за прибутком план виробництва.*

Створимо математичну модель виробничої ситуації. Нехай x – кількість столів, y – кількість книжкових полиць. $P(x;y) = 3x+2y$ – функція прибутку. Складемо математичну систему обмежень і представимо її у вигляді, зручному для розв’язування за допомогою GRAN1 (взяти тип *Функція задана неявно*).

Таблиця 1.7

Матеріальні затрати підприємства на одиницю виготовленої продукції

Вид виробу	Матеріальні затрати			Прибуток
	Час на виготовлення (год.)	Лісоматеріали (м ³)	Скло (м ²)	
Стіл	9,2 (P2)	0,3	–	3 (P7)
Полиця	4 (P3)	0,6	2	2 (P8)
Ресурси	520 (P4)	24 (P5)	40 (P6)	

$$\begin{cases} 9,2x + 4y \leq 520 \\ 0,3x + 0,6y \leq 24 \\ 2y \leq 40 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 520 - (9,2x + 4y) \geq 0 \\ 24 - (0,3x + 0,6y) \geq 0 \\ 40 - 2y \geq 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

На рис. 1.40 побудоване ГМТ, задане першими трьома нерівностями. Дві останні нерівності подаємо як *Відрізок для побудови графіків*. Розв'язки системи нерівностей заповнюють опуклий п'ятикутник на площині. Щоб заштрихувати точки, необхідно скористатися послугою *Операції \ Нерівності \ G(x,y)>0*. Попередньо перед функціями прибутку, якщо вони представлені у неявному вигляді, слід зняти відмітку.

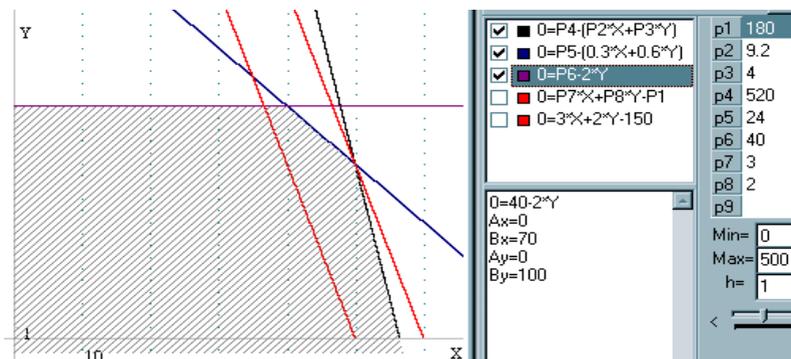


Рис. 1. 40. ГМТ, що задовольняють систему нерівностей

Потрібно знайти такі точки (x,y) п'ятикутника, для яких вираз $3x+2y$ набуває найбільших числових значень. Множина точок, заданих рівнянням $3x+2y=c$, є прямою лінією. На рис. 1.40 побудовано кілька прямих для різних значень параметра $3x+2y=50$, $3x+2y=150$, $3x+2y=P1$. Для зручності дослідження (не витирається заштриховане ГМТ, коли змінюється параметр $P1$) функцію прибутку подати за формулою $y = -2 * x / 3 + P1 / 3$. Значення $P1$ у рівнянні $3x+2y=P1$ знаходять встановивши координати граничної точки. Обчислюють, що найбільший прибуток 145 одиниць у точці $x=50$, $y=15$. Отже, потрібно випускати 50 столів і 15 полиць.

За допомогою GRAN1 можна отримати динамічну модель для визначення оптимального плану. Позначимо за допомогою параметрів $P2$, $P3$ час на виготовлення стола, полиці, $P4$ – ресурс годин, $P5$, $P6$ – запас лісоматеріалів, скла, $P7$, $P8$ – прибуток від продажу стола, полиці. Відповідно до введених параметрів створимо функції виробництва товарів $0 = P4 - (P2 * X + P3 * Y)$; $0 = P5 - (0.3 * X + 0.6 * Y)$; $0 = P6 - 2 * Y$ та функцію прибутку $0 = P7 * X + P8 * Y - P1$. Змінюючи один з параметрів, досліджуємо його вплив на інші показники.

Контрольні питання і завдання

1. Описати види завдань, для розв'язування яких можна використувати педагогічний програмний засіб GRAN1.

2. Дібрати завдання до уроку за обраною темою, підготувати наочності за допомогою GRAN1. Проаналізувати, які з особистісних якостей учнів можна розвивати у процесі розв'язування цих завдань?

3. Знайти наближені розв'язки рівнянь:

$$1 / \log_{0.5}(x+1)=2; \log_2(x) - \sin(x) = 0.$$

4. Побудувати множину розв'язків систем нерівностей:

$$\text{а) } \begin{cases} x(1-x) \geq -3, \\ \log_{1/2}(x)\log_2(x) \geq -1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16, \\ \text{abs}(x) + \text{abs}(y) \leq 5. \end{cases}$$

5. Передбачити за допомогою ПЗ GRAN1 кількість розгалужень у рівнянні $x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0$ та число розв'язків для кожного значення параметра a .

6. Побудувати графіки складених функцій за допомогою елементарних перетворень графіків та на основі знання про границі функції: $y = (0.5\pi - \arctg x) \cdot x \cdot a$, $y = k \arccos(b x^2)$, $y = x - 2 \arctg(x)$.

7. Вартість видобування руди залежить від глибини видобування. Апроксимувати табличні дані для глибини 500-700 м многочленом і спрогнозувати вартість видобування руди на глибині 800 м.

500 м	550 м	600 м	665 м	700 м
810 гр. од.	870 гр. од.	920 гр. од.	983 гр. од.	1120 гр. од.

1.5. Комп'ютерно-орієнтовані засоби навчання геометрії

1.5.1. Бібліотека електронних наочностей [«Геометрія, 7-9 клас»](#)

ПЗНП «Бібліотека електронних наочностей «Геометрія, 7-9 клас»¹ – це електронне видання, що містить набір мультимедійних компонентів, які відображають об'єкти геометрії, які вивчаються в 7-9 класах; програвач мультимедійних компонентів; простий у використанні редактор, що дозволяє вчителю формувати набори необхідних наочностей. Про даний засіб, його оновлені версії [«Геометрія, 7-9 клас»](#), [«Геометрія, 7 клас»](#)², [«Геометрія, 8 клас»](#) можна більше дізнатися з джерел, поданих у розділі 7 ([1-6],[10],[15]) та електронного навчального курсу [29].

Програмні засоби [«Геометрія, 7-9 клас»](#) (розробники ЗАТ «Мальва»,

¹ Педагогічний програмний засіб «Бібліотека електронних наочностей. Геометрія, 7-9 клас». – К. : Мальва, 2006. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: процесор x86, 1100MHz, 128 Мб RAM, CD-ROM Windows 98/XP.

² Геометрія, 7 клас [Електронний ресурс] : мультимедійний підручник. Режим доступу: – <http://rozumniki.net/catalog/products/matematyka/geometriya-7-kl/> (дата звернення: 30.06.2019).

М.І. Бурда, О.П. Вашуленко) і розглянутий раніше засіб «Алгебра, 11 клас» уніфіковані, що полегшує вчителю процес освоєння даного засобу.

Засіб «Геометрія, 7-9 клас» розроблений на таких дидактичних засадах, як *інтегрованість, конструктивність, інтерактивність та візуалізація*.

Інтегрованість полягає в тому, що одну й ту ж наочність можна використовувати з різним цільовим призначенням. Наприклад, побудова трикутників за основними елементами (двома сторонами і кутом між ними, стороною і прилеглими до неї кутами, трьома сторонами) призначена як для вироблення вмінь виконувати основні побудови, так і для самостійного «відкриття» учнями ознак рівності трикутників, для застосування цих ознак в типових ситуаціях. Для кращого усвідомлення суті нових геометричних фактів передбачена можливість проводити невеликі дослідження і опрацьовувати отримані числові характеристики.

Конструктивність забезпечується аналізом комп'ютерних зображень реальних предметів, перенесенням їх властивостей на відповідні моделі, де увага приділяється поелементному створенню. Внаслідок чого учень самостійно формулює означення нових понять, властивості геометричної фігури чи способи діяльності.

Під *інтерактивністю* розуміють можливість використання варіативних методичних технологій проведення уроків (шкільна лекція з ілюстраціями, групова, парна, індивідуальна робота, семінарське заняття тощо), підтримку активних методів навчання (проведення посилюючих навчальних досліджень, моделювання і конструювання геометричних об'єктів, логічна організація невеликих фрагментів навчального матеріалу).

Візуалізація забезпечується розробленими комп'ютерними динамічними моделями геометричних об'єктів. Пропонується їх перетворення (переміщення, зміна форми і розмірів, розташування на площині), що сприяє розвитку образного мислення, творчих та евристичних його складових. Це дозволяє краще засвоювати знання, виробляти вміння і навички, формувати цілісні геометричні образи.

Мета застосування ПЗ полягає в активізації пізнавальної діяльності учнів, розвитку їх самостійності в опануванні знань, формуванні інформаційної та інших базових компетентностей особистості, посиленні позитивної мотивації навчання геометрії. Зміст і структуру ПЗ зорієнтовано на розв'язування навчальних завдань через впровадження сучасних педагогічних технологій, у тому числі інтерактивних форм та використання варіативної методики проведення уроків. Це може бути шкільна лекція з ілюстраціями, самостійна групова чи індивідуальна робота учнів, семінарське заняття, уроки повторення й узагальнення знань, виконання завдань творчого характеру. ПЗ унаочнює як теоретичну, так і практичну частину навчальної програми.

На етапі мотивації навчання залежно від мети і завдань уроку рекомендується використовувати історичні довідки, портрети вчених-математиків, ілюстрації різних практичних ситуацій, які дають змогу об-

ґрунтувати необхідність вивчення того чи іншого геометричного факту.

Ефективному засвоєнню понять, способів діяльності та вивченню властивостей геометричних фігур сприяє динамічне унаочнення відповідних геометричних фігур, де виділяються істотні ознаки понять та здійснюється варіація неістотних ознак при збереженні постійними істотних. Це дає змогу учням самостійно характеризувати істотні та неістотні ознаки. Застосування понять, властивостей і способів діяльності покращується завдяки запропонованій візуалізації практичних життєвих ситуацій. Динамічна наочність дає змогу складати і розв'язувати геометричні задачі за готовими малюнками, варіювати їх умови і вимоги, організувати змістову роботу над розв'язаною задачею. Розгортання унаочнених поопераційних дій учня, ілюстрація їх застосування, сприяє кращому виробленню способів геометричної діяльності та рефлексивного ставлення учня до цієї діяльності.

1. Коректну інсталяцію ПЗ на комп'ютері забезпечує програма-інсталятор. Для запуску програми інсталяції необхідно запустити з диска файл *setup*. ПЗ має два типи інсталяції – на одному комп'ютері чи в локальній мережі. Завантажити ПЗ «Геометрія, 7-9 клас» для роботи з бібліотекою електронних наочностей у режимі *Конструктор* можна виконуючи послідовно такі дії: обрати меню *Пуск* → *Програми* → *Бібліотека електронних наочностей. Геометрія, 7-9 клас*. Перед початком роботи потрібно ознайомитися з настановою користувача та методичними рекомендаціями.

2. Демонстрація підготовлених вчителем фрагментів уроків можлива з використанням мультимедійного проектора і дошки, що підключається до комп'ютера. ПЗ забезпечує такі види діяльності як пошук і добір наочностей, конструювання, редагування та їх перегляд. На рис. 1.41 представлено головне вікно ПЗ. У лівому верхньому куті розміщена панель роботи з файлами (1), справа – панель мінімізації / закриття вікна програми (3). У лівій частині вікна розташована панель переліків і змісту (4), у правій – робоча область (5), заголовок «активного» вікна (2), внизу – панель роботи з поточним уроком (6).

Користувач може працювати у режимах *Конструктор*, *Уроки*, *Підручник*, *Статистика*, *Інтернет*. Для роботи у мережі використовують також *Програвач уроків*.

3. Використовуючи *Панель переліків і змісту*, можна здійснювати навігацію між структурними елементами бібліотеки наочностей, які відповідають розділам курсу «Геометрія, 7-9 клас». Переглядати та змінювати обраний урок можна використовуючи *Панель роботи з поточним уроком*. Наприклад, переглянемо урок до теми «Подібність трикутників». Для цього перейдемо до режиму *Уроки*. У переліку уроків знайдемо тему «Подібність трикутників (прямокутних)», відкриємо її у робочій області, натиснувши ліву кнопку миші, коли вказівник знаходиться над заголовком теми. Щоб переглянути урок, завантажимо його з робочої

області до вікна поточного уроку. При наведенні курсора на розроблені елементи уроку весь урок виділяється жовтою рамкою. Виділивши урок рамкою, натискають ліву клавішу. Буде створено копію поточного уроку, яку можна редагувати, починаючи з назви уроку і закінчуючи складом його елементів. Активізується перегляд змісту уроку «натискуванням» на кнопку біля слова *Перегляд*.

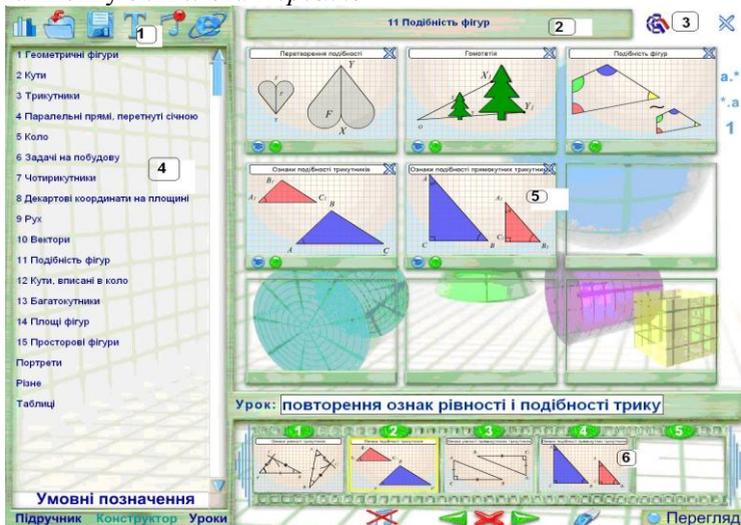


Рис. 1.41. Головне вікно ПЗНП «Бібліотека електронних наочностей «Геометрія, 7-9 клас». Режим «Конструктор»

Крім елементів з поясненнями до ознак подібності трикутників, даний урок містить ще два елементи, які доцільно використовувати для актуалізації опорних знань та умінь учнів.

4. Відредагуємо даний урок додаванням до нього елемента «Ознаки рівності трикутників», щоб учні могли порівняти відповідні ознаки рівності та подібності трикутників. Щоб додати елемент до уроку, необхідно перейти до відповідного розділу бібліотеки наочностей і обрати цей елемент. Елемент автоматично додається в обраний кадр поточного уроку. Тому з відкритим поточним уроком перейдемо до режиму *Конструктор*, виберемо тему «Трикутники» та завантажимо її у робочу область. Знайдемо елемент «Ознаки рівності трикутників» і завантажимо його у вікно поточного уроку (виділити елемент жовтою рамкою, натиснути ліву клавішу миші). Повторити ознаки рівності трикутників доцільно перед вивченням нового матеріалу. Якщо на панелі поточного уроку доданий елемент розташований п'ятим, то перемістимо даний елемент вліво на перше місце, використовуючи при цьому управляючі клавіші панелі поточного уроку (при виділеному кадрі стрілка вліво).

На кожному кадрі елемента подано ряд кнопок навігації для перегляду кадрів у довільному порядку (рис. 1.42). Готуючись до уроку, вчи-

тель відмічає у власному конспекті, які з кроків запропонованого елемента будуть використовуватися, на якому етапі уроку та з якою метою.

5. Для створення нового уроку необхідно на панелі роботи з поточним уроком у полі «Урок» ввести його назву і натиснути кнопку *Занам'ятати*. Відредагований урок зберігають (піктограма *Дискета* на панелі роботи з файлом), написавши замість фрази «Назвіть урок» його тему. До уроку можна додати текстові повідомлення, звукові файли, імпортувати окремі елементи.

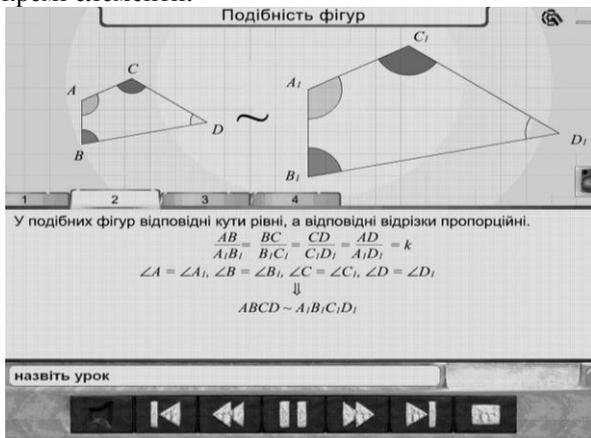


Рис. 1.42. Слайд до теми «Подібність фігур»

6. Окремі електронні наочності передбачають візуалізацію граничних наближень при формуванні понять. Наприклад, в динамічних моделях для вивчення тем «Довжина кола», «Площа круга» можемо змінювати кількість сторін правильних багатокутників від чотирьох до двадцяти (рис. 1.43).

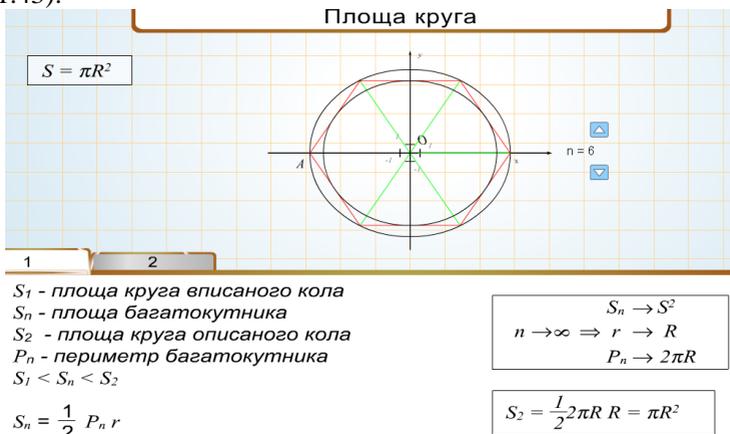


Рис. 1.43. Наочність для вивчення теми «Площа круга»

7. У бібліотеці наочностей пропонуються учням тестові завдання для самоконтролю: а) записати, які з даних трикутників подібні; б) тілам обертання поставити у відповідність фігури обертання (рис. 1.44); в) визначити величину вписаного кута та ін.



Перетягніть відповідні контури до відповідних тіл обертання.

Рис. 1.44. Копія вікна з тестовим завданням

8. Можливий імпорт елементів наочностей (текстів, відеофрагментів, анімаційних фрагментів, малюнків тощо) для існуючої у користувача бібліотеки наступних файлових форматів: зображення (.swf, .jpg), таблиці (.tab), тексти (.txt), звуки (.mp3), уроки (.les). Розміщується наочність у поточний розділ бібліотеки відповідно до наявної структури ПЗ. Наприклад, щоб імпортувати наочності до теми «Рух», потрібно у режимі *Конструктор* відкрити розділ бібліотеки «Рух» у робочій області.

9. Добраємо наочності до нестандартного уроку на тему «*Геометрія українського орнаменту*». Для цього використаємо наочності з посібника до теми «Рух». У режимі *Конструктор* завантажимо для нового уроку наочності *Рух \ Приклади центральносиметричних фігур*. Крім того, з бібліотеки малюнків імпортуємо візерунки для вишивання українських рушників, зразки орнаментів паркетів (рис. 1.45). Для імпортування послідовно виконують команди *Імпортувати* (піктограма у вигляді папки) – *Огляд* – *Місцезнаходження файла* – *Вибір файла* (тип файла *Файли зображень*) – *Підтвердження імпорту файла*. Оскільки можна імпортувати зображення з розширенням *jpg*, то для збереження файлів у зазначеному форматі можна використати графічний редактор *Paint*.



Рис. 1.45. Наочності до уроку «Геометрія українського орнаменту»

Для цього вибираємо в середовищі *Paint* пункт меню *Правка \ Вставити зображення з файла*, змінюємо зображення до потрібних розмірів і зберігаємо у форматі *jpg* (пункт меню *Файл \ Зберегти як*). Наприклад, з назвою *uzor2.jpg*, де розширення прописати малими літерами.

Доцільно прослухати з учнями фрагмент української пісні про рушник. Для цього імпортуємо запис пісні з колекції звуків, послідовно виконуємо команди *Імпортувати – Огляд – Місцезнаходження файла – Вибір файла* (тип файла *Звукові фрагменти*) – *Підтвердження імпорту файла трз*.

Для уроку доцільно підготувати один-два текстові фрагменти з питаннями, які сприятимуть тому, що учні краще проаналізують візерунки; знайдуть симетричні фігури; фігури, утворенні поворотом даної фігури чи її паралельним перенесенням. Варто також створити фрагменти з поясненнями про фігури, що мають симетрію повороту, ковзну симетрію.

Ініціюють створення текстового повідомлення натискуванням на ліву клавішу миші, коли вказівник миші знаходиться над піктограмою з літерою «Т». Після цього записують заголовок повідомлення (може бути номер завдання), подають питання чи пояснення до завдання, вказують ім'я файлу, в якому зберігатиметься дане повідомлення. Завершується створення повідомлення зберіганням файлу (піктограма у вигляді дискети).

Завантаживши необхідні наочності до *Панелі роботи з поточним уроком*, вводять назву нового уроку і зберігають його.

10. Щоб імпортувати розроблений на іншому комп'ютері урок, спочатку потрібно зареєструвати урок на новому місці (назва файлу *LessonXX.chl* генерується програмою). В результаті імпортування існуючий файл замінюється потрібною оновленою версією, якщо назви файлів співпадають. Коли номер файлу для імпорту відмінний (більший) від номера файлу на комп'ютері, то файл на дискеті перейменовують.

Розроблені уроки зберігаються у папці *C:\Program Files\CJSC_Malva\Library_Geometry_7-9\assemble_Geometry\data\lessons*, а наочності – у папці відповідного розділу і теми *C:\Program Files\CJSC_Malva\Library_Geometry_7-9\assemble_Geometry\data\9_ruch*.

11. Для переходу до режиму *Статистики* необхідно натиснути відповідну кнопку на панелі роботи з файлами і завантажити блок у робочу область. Блок надає можливості додавати, редагувати, видаляти класи. Для кожного класу за списком учнів можна відстежувати успішність у процесі використання ПЗ.

12. Для перегляду уроків можна використовувати не лише основну програму, але й додатковий її модуль *Програвач уроків*. *Програвач уроків* можна запустити за допомогою кнопки *Пуск: Пуск – Програми – CJSC Malva – Бібліотека електронних наочностей. Геометрія, 7-9 клас – Програвач уроків*. Також її можна запустити з папки, де розміщена основна програма, обравши файл «Viewer.exe».

Контрольні питання і завдання

1. Інсталювати засіб *Геометрія, 7–9 клас*, переглянути урок «Подібність прямокутних трикутників», додати до уроку елементи на повторення ознак рівності трикутників, зберегти утворений урок.

2. Розробити урок за обраною темою, дібрати відповідні завдання з бібліотеки наочностей засобу, створити власні кроки – текстові повідомлення, імпортувати графічні наочності. Дібрати завдання для актуалізації опорних знань та умінь, завдання для контролю і корекції знань.

3. Дослідити, як можна розвивати пізнавальну самостійність учнів, удосконалювати у них навички самоконтролю, якщо використовувати в навчанні геометрії даний електронний засіб?

4. В чому полягає інтегрованість, конструктивність, інтерактивність та візуалізація наочностей засобу «Геометрія, 7-9 клас»?

1.5.2. ПЗ «Геометрія, 11 клас».

ПЗ «[Геометрія, 11 клас](#)»¹ – це електронне видання, яке містить набір мультимедійних компонентів, що відображають об'єкти геометрії, які вивчаються в 11 класі, програвач мультимедійних компонентів, редактор, використовуючи який, вчитель зможе формувати набори необхідних наочних матеріалів. Використання засобу може відіграти важливу роль в організації самостійної, групової чи індивідуальної роботи учнів. Оскільки більша частина завдань подається з підказкою чи з відстрочкою висвітлення ходу розв'язування, то така подача матеріалу сприяє впровадженню інтерактивних форм навчання, розвитку пізнавальних якостей учнів. Розробники пропонують оновлену версію засобу².

1. За замовченням ПЗ буде встановлено у папку *C:\Program Files\CJSC Malva\Geometry_11\assemble_Geometry11*. Після інсталяції програми в меню *Пуск* у розділі *Всі програми* у папці «*CJSC Malva*» знаходимо посилання на два програмних модулі: *ПЗ Геометрія 11 клас і Програвач уроків*. За допомогою першого модуля можна вводити базові елементи бібліотеки (тексти, відеофрагменти, аудіофрагменти, анімації, тестові завдання тощо) курсу геометрії в 11 класі, переглядати існуючі уроки, додавати нові чи видаляти окремі із створених раніше.

2. У модулі *ПЗ Геометрія 11 клас*, як і розглянутих вище засобах *Алгебра, 11 клас і Геометрія, 7-9 клас*, реалізовані три основні режими: *Конструктор, Уроки, Підручник*. Крім того, є додаткові модулі *Статистика, Імпорт, Додавання текстового пояснення, Запис звукового фрагмента*. Після завантаження програми буде запропоновано роботу кори-

¹ Педагогічний програмний засіб для загальноосвітніх навчальних закладів «Геометрія, 11 клас». – К. : Мальва, 2006. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: процесор x86, 1100 MHz, 128 Мб RAM, CD-ROM Windows 98/XP.

² Геометрія, 11 клас [Електронний ресурс] : мультимедійний підручник. Режим доступу: – <http://rozumniki.net/catalog/products/matematyka/geometriya-11-kl/> (дата звернення: 30.06.2019).

стувача у режимі *Конструктор*. Основні елементи вікна – панель роботи з файлами, переліків і змісту; робоча область і панель роботи з поточним уроком (рис. 1.25, 1.46 для розглянутих вище засобів).

Серед додаткових відомостей учень може прочитати про умовні позначення, словник термінів, аксіоми, теореми.

Базовий елемент *Конструктор завдань* містить декілька варіантів завдань/запитань, але користувач може самостійно дібрати завдання для роботи на уроці. Після формування завдання для конкретного учня, вчитель може отримати завдання на паперовому носії (кнопка «Друк»).

3. Детальніше розглянемо розробку уроку на тему «Об'єм призми». На даному уроці сплануємо використовувати такі засоби навчання як підручник і ПЗ [Геометрія, 11 клас](#).

Дидактична мета уроку – виведення формули для обчислення об'єму призми, формування умінь знаходити об'єм прямої і похилої призми.

Урок можна провести за поданим нижче планом: 1) Перевірка домашнього завдання, відтворення і корекція опорних знань учнів.

2) Актуалізація знань про призму, її види та елементи (використати елементи з розділу 5 електронного підручника, уроки 4, 5).

3) Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу, що передбачає доведення теореми про об'єм прямої призми та розв'язування задачі на знаходження об'єму похилої призми. Якщо за допомогою ПЗ продемонструвати учням як трикутну призму добудовують до паралелепіпеда, а потім довільну призму розбивають на скінченну кількість трикутних призм, то учням простіше буде здійснити доведення теореми самостійно.

У бібліотеці наочностей можна дібрати наочності до задачі на відшукання об'єму похилої призми (елементи розділу 7, урок 4). Динамічна трансформація похилої призми в пряму шляхом переміщення однієї її частини, що відтинається перпендикулярним до бічних ребер перерізом, на іншу є вдалим вирішенням проблеми відтворення цього процесу в уяві учнів.

4) Для закріплення вивченого матеріалу у розробленому ПЗ пропонуються питання для самоперевірки, а також набір вправ з відповідями. Це допоможе вчителю організувати самостійну роботу учнів з можливістю допомоги тим учням, які цього потребують.

5) Підсумки та повідомлення домашнього завдання. Можна запропонувати школярам для домашнього завдання розроблені набори вправ.

Оскільки в пункті 2.1 даного посібника будемо розглядати побудови перерізів многогранників площиною за допомогою програмних засобів [GRAN-2D](#) і [GRAN-3D](#), то переглянемо окремі наочності на побудову перерізів з БН [Геометрія, 11 клас](#) (рис. 1.46–1.48).

Щоб описати суть методу внутрішнього проєктування, для елемента уроку створено три кадри. Прослухавши звукові файли до першого чи другого кадру, учень може ввімкнути *Паузу* і спробувати самостійно побудувати переріз. На третьому кадрі подано побудований переріз призми (рис. 1.46). Для вивчення теми «Зрізана піраміда» створено слайди

як для побудови зрізаної піраміди, так і для демонстрації наслідків, які можемо отримати, якщо досліджувати властивості побудованого перерізу (рис. 1.48).

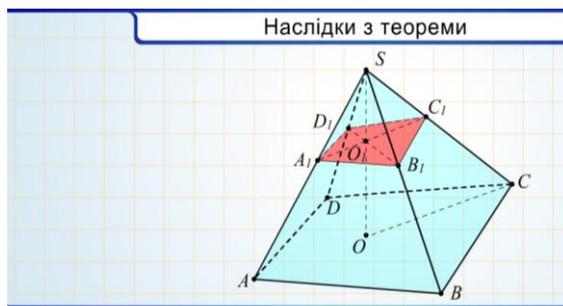


Будуються точки перетину січної площини з ребрами;

Рис. 1.46. Слайд з побудованим перерізом призми



Рис. 1.47. Побудовано переріз призми методом слідів



1. Переріз піраміди площиною, яка паралельна до площини основи, є багатокутник, подібний основі: $A_1B_1C_1D_1 \sim ABCD$.

2. Бічні ребра і висоти піраміди діляться площиною, яка паралельна до площини її основи, на пропорційні відрізки:

$$\frac{AA_1}{A_1S} = \frac{BB_1}{B_1S} = \frac{CC_1}{C_1S} = \frac{DD_1}{D_1S} = \frac{OO_1}{O_1S}$$

Рис. 1.48. Слайд до уроку «Зрізана піраміда». Наслідки теореми

Контрольні питання і завдання

1. Переглянути наочності до теми «Перерізи многогранників площиною» для засобу БН *Геометрія*, 11 клас, наочності до пункту 2.1 даного посібника, створені за допомогою [GRAN-3D](#), [GRAN-2D](#). Оцінити переваги і недоліки кожної з таких наочностей.

2. Підготувати добірку наочностей «Історичні задачі стереометрії» та імпортувати їх до бібліотеки засобу *Геометрія*, 11 клас.

3. Як урізноманітнити форми самостійної роботи учнів з використанням БН *Геометрія*, 11 клас?

4. До уроку за обраною темою дібрати відповідні елементи з бібліотеки наочностей засобу, створити власні кроки (текстові повідомлення, імпортувати графічні наочності). Додати завдання для актуалізації опорних знань та умінь, завдання для контролю і корекції знань.

1.5.3. Динамічна геометрія [GRAN-2D](#) і DG

В навчальній та методичній літературі помітними є видання, в яких висвітлюється методика організації досліджень засобами динамічної геометрії DG¹ [50], [13], [GRAN-2D](#)² [24]. С.А. Раков характеризує програмні засоби як інтерактивні системи досить високого класу [50], що моделюють геометрію Евкліда на площині. Різні аспекти застосування зазначених засобів висвітлено в працях [15], [14], [26-30], [57], [31] та ін.

Засіб [GRAN-2D](#) призначений для графічного аналізу систем геометричних об'єктів на площині, звідки і походить назва (G^Raphic Analysis 2-Dimension), може успішно використовуватися не лише у навчанні математики у середній школі, але й при вивченні вищої математики, аналітичної геометрії, елементарної математики, методики навчання математики у закладах вищої педагогічної освіти. У даному розділі подаємо відомості про оновлену версію [GRAN-2D](#). За допомогою [GRAN-2D](#) та DG зручно розв'язувати задачі на побудову на площині, спростовувати окремі припущення. Створивши динамічні моделі та аналізуючи динамічні вирази, можна проводити дослідження ГМТ, встановлювати екстремальні значення певних величин; шукати закономірності, послідовність яких може привести до доведення теорем. Доцільно проводити спеціалізовані лабораторні роботи, у ході яких учні індивідуально або у складі групи розв'язують математичні задачі дослідницького типу у комп'ютерному класі. Завдання для таких робіт в ПМК DG пропонуються у спеціальних електронних зошитах [13, 3].

1. Для інсталяції ПЗ [GRAN-2D](#) використовують файл setupgran2.

¹ Програмно-методичний комплекс навчального призначення «Динамічна геометрія DG» для загальноосвітніх закладів, версія 1.0. – Харків, 2002. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: Pentium, тактова частота – від 1100 МГц, 64 Mb RAM, CD-ROM Windows 98/XP.

² Програмний засіб GRAN-2D, версія 1.1. [Електронний ресурс]. – Київ, 2012. – Режим доступу: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/gran-2d> (дата звернення: 30.06.2019)

Програма GRAN-2D може запускатися з головного меню (*Всі програми \ GRAN \ GRAN-2D*).

2. Після завантаження на екрані з'явиться головне [вікно програми](#) (рис. 1.49). Зверху під заголовком головного вікна знаходиться *головне меню* (файл, виправлення, об'єкт, обчислення, зображення, макроконструкція, вид, налагодження, допомога) – перелік послуг, до яких можна звернутися у процесі роботи з програмою. При зверненні до певного пункту головного меню з'являється перелік пунктів (послуг) відповідного підменю.

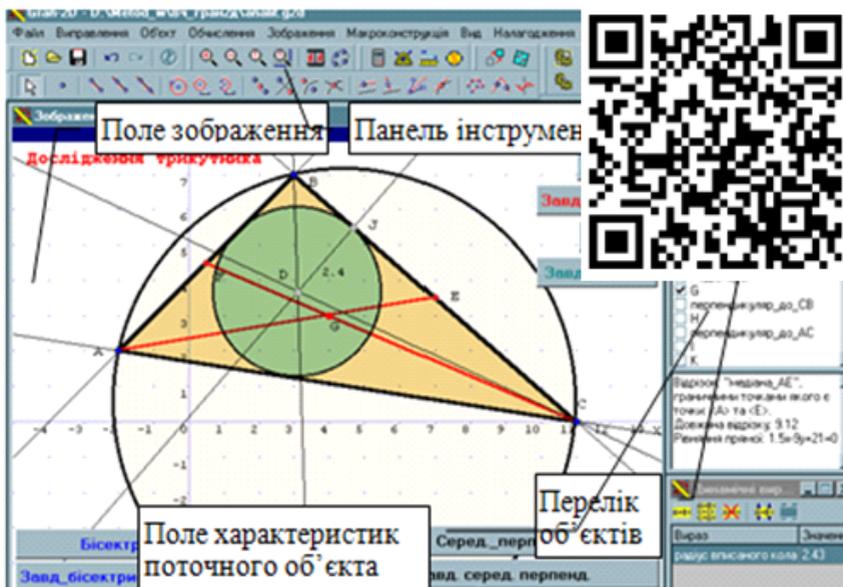


Рис. 1. 49. Дослідження трикутника. Вписане і описане коло

Для активізації деяких послуг можна скористатись «кнопками» швидкого виклику послуг на *панелі інструментів*, що розміщена під головним меню програми. Під панеллю інструментів розміщено *підказку* – поле, де з'являються короткі інструкції про те, яку дію необхідно виконати на поточному етапі роботи. *Поле зображення* – це область головного вікна програми, де зображаються створені об'єкти та осі координат. *Перелік об'єктів* – це поле, що містить перелік назв усіх об'єктів, які були створені або завантажені у процесі роботи з програмою. Зліва від назви об'єктів за допомогою миші можна поставити або зняти відмітку. У полі зображення виводитимуться зображення лише тих об'єктів, перед назвою яких у переліку об'єктів стоїть відмітка. *Поле характеристик поточного об'єкта* – частина головного вікна, де виводяться деякі параметри поточного об'єкта (довжина, радіус (кола), рівняння (прямої) тощо), а також відомості про об'єкти, з якими він зв'язаний. *Перелік ди-*

намічних виразів – таблиця, що містить перелік назв заданих динамічних виразів та їх обчислені значення. *Поле інформування* – поле (внизу екрана), де виводяться координати точки, що відповідає поточному положенню вказівника миші у полі зображення, а якщо вказівник миші знаходиться над зображенням деякого об'єкта, то поряд з координатами виводиться назва цього об'єкта.

3. Завантажимо для перегляду файл з виконаним завданням на дослідження трикутника. При зверненні до послуги *Зображення \ Покрокове відображення* розпочнеться покрокове відображення створених об'єктів, починаючи з першого до останнього. Для виведення на екран зображення кожного наступного об'єкта потрібно натиснути ліву клавішу миші, коли вказівник знаходиться у полі зображення. Порядок виконання кроків побудови поданий справа. Якщо встановити світловий курсор на відповідну фігуру, то в полі характеристик отримаємо для точки її координати, для прямої – рівняння в загальному вигляді, для многокутника – площу і периметр тощо.

4. За допомогою GRAN-2D можна оперувати на площині моделями геометричних об'єктів базових типів: *Точка, Лінія, Ламана, Коло, Інтерполяційний поліном, Графік функції*. При цьому типи *Точка, Лінія, Коло* діляться на підтипи: *Точка (Вільна точка, Точка на об'єкті, Середня точка, Точка перетину об'єктів, Симетрична точка, Інверсна точка); Лінія (Відрізок, Пряма, Промінь, Паралельні прямі, Перпендикулярні прямі, Бісектриса кута, Дотична до кола); Коло (коло, коло за радіусом, дуга)*.

5. Об'єкти можна створювати двома способами: шляхом введення їх характеристик у вікні *Конструювання об'єкта*, з екрана за допомогою вказівника миші. Наведемо перелік елементарних побудов:

- точка (створити з екрана чи аналітично задану); середня точка, якщо задано кінці відрізка; точка, симетрична даній відносно прямої чи точки; точка перетину двох кривих; інверсна точка;
- відрізок, промінь, пряма, що проходить через дві точки; пряма, яка проходить через задану точку і паралельна (перпендикулярна) до прямої;
- бісектриса кута; дотична до кола, що проходить через задану точку;
- ламана, правильний многокутник;
- коло (центр, точка на колі), коло за даним радіусом, дуга кола.

Наприклад, для створення об'єкта типу *Точка перетину об'єктів* слід звернутися до послуги *Об'єкт \ Створити \ Точка перетину об'єктів*, та у вікні *Конструювання об'єкта*, що з'явиться, у полях *Перший об'єкт* та *Другий об'єкт* вказати назви об'єктів, точку перетину яких необхідно знайти, та «натиснути» кнопку *Застосувати*. Для створення об'єкта типу *Симетрична точка* звертаються до послуги *Об'єкт \ Створити \ Точка*, симетрична даній точці. У вікні *Конструювання об'єкта*, що з'явиться, у полі *Точка*, якій симетрична дана точка, слід вказати назву потрібної точки, а у полі *Об'єкт*, відносно якого здійснюється симетрія - вказати назву відповідної точки або лінії. Після «натис-

нення» кнопки *Застосувати* буде створено симетричну точку.

6. Якщо виконується побудова *Створити точку* і при натисненні лівої клавіші миші вказівник знаходиться над зображенням деякого об'єкта типу *Лінія* або *Коло*, то з'явиться запит *Прикріпити точку до об'єкта?* У разі позитивної відповіді створювана точка буде прикріплена до вказаного об'єкта і надалі така точка може переміщуватись тільки в межах об'єкта, до якого прикріплена. Передбачена також можливість від'єднувати прикріплену точку.

7. В табл. 1.8 подано зміст завдань для заняття по вивченню засобу *Динамічна геометрія*. Детальніше зупинимося на першому завданні – створенні [експертної системи «Трикутник»](#) (рис. 1.49). *Інтегрованість* наочності полягає в тому, що її можна використовувати з різним цільовим призначенням. Наприклад, для побудови кола, вписаного в трикутник чи описаного навколо трикутника, для вироблення умінь виконувати основні побудови, для самостійного «відкриття» учнями теореми синусів, перевірки істинності формули для визначення радіуса кола, вписаного в трикутник чи описаного навколо нього. Наочність можна використати під час вивчення теми «Декартова система координат» для складання рівняння прямої.

8. Трикутник заданий координатами вершин $A(-2; 2)$, $B(3; 7)$, $C(11; 0)$.

- Користуючись наочною [експертною системою «Трикутник»](#), записати рівняння сторін трикутника, висоти, медіани, бісектриси, проведених з вершини B ; лінії, що з'єднує середини сторін AB і AC ; знайти координати центрів вписаного і описаного кіл.
- Обчислити довжину висоти, медіани, бісектриси, проведених з вершини B ; величин кутів трикутника; радіус і довжину вписаного кола, кола, описаного навколо трикутника, площ кругів, площу трикутника.
- Дослідити і обґрунтувати взаємне розташування висоти, медіани і бісектриси, проведених з однієї вершини трикутника, положення центра кола, описаного навколо трикутника, залежно від кутів трикутника.
- Побудувати експертну систему *Трикутник*, створити динамічні вирази для обчислення радіуса вписаного кола, описаного кола.
- Створити макроконструкції «Побудова кола, вписаного в трикутник», «Побудова кола, описаного навколо трикутника».

Для розв'язування даного завдання з'ясуємо, якими послугами потрібно користуватися при першому ознайомленні з програмою GRAN-2D, що саме бажано проаналізувати? Щоб переглянути і проаналізувати кожен крок виконаної побудови слід обрати пункт меню *Зображення \ Покрокове відтворення*. У процесі відтворення побудови потрібно з'ясувати, які саме величини для кожного з об'єктів можна обчислити за допомогою GRAN-2D? Якого виду рівняння складено для прямої, для кола? Переконатися, що для кола обчислено довжину, знайдено площу круга; для замкненої ламаної обчислено периметр многокутника та його площу.

Таблиця 1.8

Зміст завдань для заняття на тему «Динамічна геометрія»

№	Завдання	Форма роботи
1	Ознайомлення з планом роботи. Мотивація діяльності. Очікувані результати.	
2	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Ознайомлення з можливостями, які забезпечує використання GRAN-2D. ▪ Покроковий перегляд побудови трикутника, кола, вписаного в трикутник, кола, описаного навколо трикутника; медіани, бісектриси та висоти, проведених з однієї вершини (експертна система «Трикутник»). ▪ Обчислення довжин відрізків, кутів з використанням послуги «Обчислення». Дослідження положення центра описаного кола залежно від виду трикутника. ▪ Аналіз створених динамічних виразів для обчислення радіусів вписаного і описаного кіл. ▪ Створення макроконструкції «Вписане (описане) коло» 	індивідуальна в парах, взаємоконсультування
3	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Поняття про дидактичну гру з комп'ютерною підтримкою. ▪ Демонстрація динамічних моделей для відкриття теореми про хорди, теореми про дотичну і січну, моделі до практичної задачі на екстремум (п. 2.2, п.2.5 посібника). 	Демонстрація
4	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Ознайомлення із завданнями на створення динамічних моделей: теорема Птолемея; вписаний кут, вписаний чотирикутник; властивість медіан трикутника; задача на побудову жолоба з найбільшим перерізом. 	Групи (№№ 1, 2, 3, 4)
5	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Обговорення в групі плану побудови моделі, потреби в створенні динамічних виразів. ▪ Постановка завдання дослідження для учня. 	Обговорення в групі
6	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Коротке обговорення планів створення моделей та організації дослідження в загальному колі (заслуховування представника кожної з груп). ▪ Пропозиції щодо вдосконалення моделей до завдання. 	Обговорення в колі
7	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Створення моделей до завдання. ▪ Прописування завдання на дослідження для учня. 	Робота в групах.
8	<ul style="list-style-type: none"> ▪ «Захист» моделі в групі представників 1-2-3-4. ▪ Рецензування виконаної роботи 	«Мозаїка»
9	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Удосконалення ДОК 	Групи
10	Д/з. Підготувати задачу на доведення з дослідженням. Розробити для задачі ланцюжок евристичних підказок.	
11	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Рефлексія: що виконали в завданні, чого навчилися. 	«Мікрофон»

Здійснюючи покроковий перегляд побудованих об'єктів, одночасно слід аналізувати, яку з піктограм на панелі інструментів потрібно використати, щоб самостійно створити той об'єкт, який відтворюється?

9. Для обчислення відстані між двома точками слід звернутися до послуги *Обчислення \ Відстань*, і за відповідними запитамі програми, що з'являться у полі підказки, послідовно вказати на зображення двох точок. Передбачено обчислення відстані між точкою і прямою, довжини відрізка, довжини кола, довжини дуги, довжини ламаної. При зверненні до послуги *Обчислення \ Кут* після вказування трьох точок буде автоматично обчислюватись кут між прямими, що проходять відповідно через першу і другу та другу і третю точки. Передбачена послуга *Обчислення площі* многокутника, площі круга, сектора. Можна обчислювати орієнтований кут, заданий трьома точками, кут між прямими, полярний кут, полярний радіус та ін.

Отже, щоб виміряти кути трикутника, довжини його сторін, інші елементи потрібно скористатися пунктом меню *Обчислення \ Кут (відстань, площа)*. Попередньо бажано зазначити точність обчислення (*Налагодження \ Параметри програми \ Загальні \ Точність обчислень*).

10. Для кращого усвідомлення суті нових геометричних фактів можна проводити дослідження і опрацьовувати отримані числові характеристики. Змінюючи положення вершин трикутника, моделюють трикутники різних видів. Після покрокового перегляду виконаної побудови доцільно «захопити» курсором одну з вершин трикутника і переміщувати її на площині, не відпускаючи при цьому ліву кнопку миші. Проаналізувати, як змінилися об'єкти та їх характеристики. Змінюючи розташування вершин трикутника, дослідити положення центра описаного кола для гострокутного, прямокутного і тупокутного трикутників, зробити висновок.

11. Запишемо ланцюжок для виконання побудови користувачем.

Якщо користувач обирає певну послугу, то у рядку під панеллю інструментів він отримує підказку щодо того, як виконувати той чи інший крок. За першим кроком потрібно створити вершини – три точки (послуга з екрана *Створити точку*), з'єднати їх відрізками (обрати послугу *Відрізок*, послідовно вказати на кінці відрізка) або провести через кожну пару точок пряму (піктограма *Пряма*).

Побудуємо медіани трикутника. Для цього потрібно знайти середини відрізків (обрати послугу *Середня точка*, послідовно вказати на кінці відрізка), провести медіани, з'єднавши середини відрізків з відповідними вершинами трикутника (піктограма *Відрізок*).

Центр кола, описаного навколо трикутника, визначає точка перетину серединних перпендикулярів трикутника. Тому потрібно провести серединні перпендикуляри двох сторін трикутника (послуга *Перпендикулярні прямі*, вказуємо на середню точку відрізка, а потім на цей відрізок). Далі потрібно побудувати точку перетину серединних перпендику-

лярів. Для цього використовують послугу *Точка перетину двох об'єктів*, послідовно вказують на перший та другий перпендикуляри. Далі будують описане коло (послуга *Коло за центром і точкою на колі*), послідовно вказуючи на центр кола і одну з вершин трикутника.

Побудуємо бісектриси двох кутів трикутника (послуга *Бісектриса кута*), послідовно вказавши на три точки, які визначають кожен з кутів. Далі знаходимо точку перетину бісектрис – центр вписаного кола (*Точка перетину двох об'єктів*). Наступний крок користувачі часто пропускають і допускають помилку. Потрібно з центра вписаного кола провести перпендикуляр до сторони трикутника (послуга *Перпендикулярна пряма*, послідовно вказуємо на центр кола і на пряму, до якої проводять перпендикуляр). Після цього потрібно побудувати точку дотику кола до сторони трикутника (послуга *Точка перетину двох об'єктів*, послідовно вказати на побудований перпендикуляр і сторону трикутника, до якої він проведений). На завершальному етапі вписуємо в трикутник коло (послуга *Коло за відомим центром і точкою на колі*, вказуємо на центр кола і точку дотику).

Додатково створимо трикутник як замкнену *Ламану* (послідовно вказати на три вершини трикутника, завершити натискуванням правої клавіші миші).

12. Для зміни параметрів раніше створеного об'єкта необхідно встановити вказівник переліку об'єктів у положення, що відповідає назві потрібного об'єкта, та звернутися до послуги *Об'єкт \ Змінити*. У результаті з'явиться вікно *Конструювання об'єкта* з параметрами поточного об'єкта, які можна змінити. Подвійне натиснення лівої клавіші миші у випадку, коли вказівник миші знаходиться на зображенні деякого об'єкта у полі зображення або на назві деякого об'єкта у переліку, також призведе до появи вікна *Конструювання об'єкта*, у якому можна змінити параметри цього об'єкта. Наприклад, змінимо для круга параметри зафарбування (на суцільне), спосіб малювання (на напівпрозорий), змінимо товщину лінії (рис. 1.50).

13. Деякі операції (*вилучення, переміщення об'єктів* тощо) виконуються лише стосовно виділених об'єктів. Для вилучення деякого об'єкта потрібно виділити цей об'єкт у полі зображення. Після цього слід звернутися до послуги *Об'єкт \ Вилучити* або натиснути клавішу *Del*.

14. Для дослідження за допомогою ПЗ GRAN-2D доцільно створювати *динамічні вирази*, які можуть містити посилання на наявні об'єкти та обчислюватися автоматично при зміні цих об'єктів. Наприклад, ввівши вираз для обчислення площі деякого багатокутника, можна змінювати положення будь-якої з його вершин, і при цьому автоматично буде обчислено нове значення площі. Динамічні вирази можна розміщувати як у таблиці *Динамічних виразів*, так і в *Полі зображення*. Вирази з поля зображення можна включати до об'єктів, які тимчасово приховують за допомогою *Кнопок*.

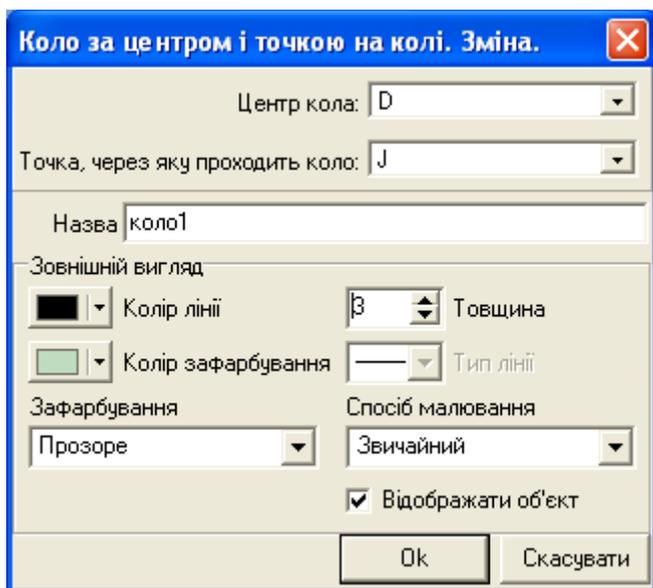


Рис. 1.50. Вікно зміни об'єкта

Для створення динамічного виразу слід звернутися до послуги *Обчислення \ Динамічний вираз \ Створити*, що приведе до появи вікна *Задання динамічного виразу* (рис. 1.51). Поряд з математичними функціями ($\sin x$, $\ln x$ тощо) при заданні динамічних виразів використовують спеціальні функції. За допомогою *Len (точка1, точка2)* обчислюють відстань між точками. В дужках як аргументи подаються назви двох точок, розділені комою, відстань між якими необхідно обчислити. Функція *Angle (точка1, точка2, точка3)* обчислює кут між відрізками, що мають спільну вершину *точка2*. В дужках як аргументи подають назви трьох точок, розділені комою, що є кінцями відрізків, при цьому другою вводиться назва спільної точки. Обчислюють площу многокутника за допомогою функції *Area (точка1, точка2, точка3,...)*. В дужках подаються послідовно назви вершин многокутника, розділені комою. Для обчислення площі многокутника при відкритій вкладці достатньо вказати з екрана замкнену ламану. Якщо поряд функцією вказати на значок « α », то у полі зображення можна вибрати потрібні елементи (після вибору точок вказати *Завершити вибір*).

Наведемо приклади динамічних виразів для експертної системи «Трикутник». Використовуємо послугу *Обчислення \ Динамічний вираз*.

Щоб експериментально перевірити формулу $r = \frac{2 \cdot S}{a + b + c}$ для обчислення радіуса кола, вписаного в трикутник, створюємо вираз $2 * \text{AREA}(A, B, C) / (\text{LEN}(A, C) + \text{LEN}(C, B) + \text{LEN}(B, A))$.

Для радіуса описаного кола подаємо вираз $LEN(A,B)*LEN(B,C)*LEN(C,A)/4/AREA(A,B,C)$ відповідно до формули

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot S} \text{ або за наслідком теореми синусів } 2 \cdot R = \frac{a}{\sin \alpha}$$

вираз $LEN(C,B)/2/SIN(ANGLE(C,A,B))$.

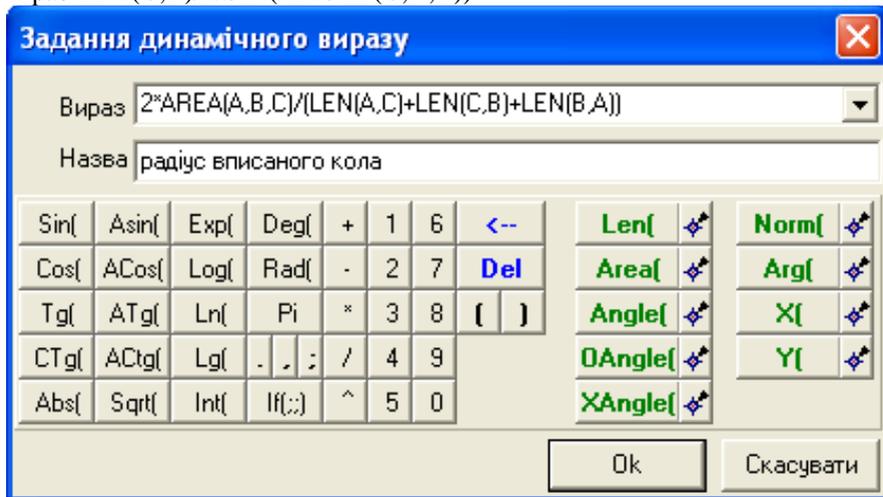


Рис. 1.51. Вигляд вікна Задання динамічного виразу

15. *Макроконструкція* – це сукупність об’єктів базових типів, яка призначена для спрощення задання комбінацій об’єктів, що часто використовуються. *Макроконструкція* складається з *вихідних, проміжних та результуючих об’єктів*. При створенні макроконструкції необхідно вказати у полі зображення за допомогою вказівника миші вихідні та результуючі об’єкти, а проміжні об’єкти, які необхідні для отримання результуючих об’єктів з вихідних, будуть вибрані за програмою автоматично з наявних на зображенні. Створивши макроконструкцію один раз, надалі для її встановлення, навіть під час іншого сеансу роботи з програмою, слід вказати лише опорні об’єкти. Тоді весь ланцюг проміжних об’єктів та результуючі об’єкти буде створено автоматично, з врахуванням властивостей опорних об’єктів. Для створення макроконструкції призначено послугу *Макроконструкція \ Створити*. Звернувшись до цієї послуги, слід послідовно вказати у полі зображення вихідні об’єкти. Після вказування останнього об’єкта слід знову звернутися до зазначеної послуги, після чого потрібно вказати результуючі об’єкти. Вказавши останній об’єкт, активізують послугу *Макроконструкція \ Створити*, що приведе до появи вікна *Назва конструкції*, де у відповідне поле необхідно ввести назву створюваної макроконструкції. Для встановлення збереженої раніше макроконструкції призначено послугу *Макроконструкція \ Встановити*. При зверненні до вказаної послуги з’являється вікно *Встанов-*

лення макроконструкції з переліком назв створених макроконструкцій.

Створимо макроконструкцію для побудови кола, описаного навколо трикутника, і вписаного в трикутник кола. Для цього необхідно послідовно виконувати вписані нижче дії. А саме, активізувати послугу *Макроконструкція \ Створити*, вибрати вихідні об'єкти, послідовно клацнувши по кожній з трьох вершин. Після цього, натиснувши піктограму *Макроконструкція* ще раз, вказати результуючі об'єкти: трикутник, центри кіл, обидва кола. Вибрані вершини та інші об'єкти повинні блимати. Чергове натискування на піктограму *Макроконструкція* відкриває вікно збереження конструкції для подальшого використання. При цьому на запит потрібно відповісти, під яким іменем необхідно зберегти макроконструкцію (наприклад, «*Експертна система «трикутник»*»).

Для перевірки того, що макроконструкцію записано правильно, необхідно створити три довільні об'єкти *Точка*, що не лежать на одній прямій і скористатися послугою *Встановити макроконструкцію*. З переліку макроконструкцій вибирають створену «Експертну систему «трикутник» і вказують курсором на вихідні об'єкти – три побудовані вершини трикутника.

16. При зверненні до послуги *Зображення \ Розмір \ Оптимальний* буде встановлено масштаб, при якому зображення створених об'єктів поміститься у полі зображення.

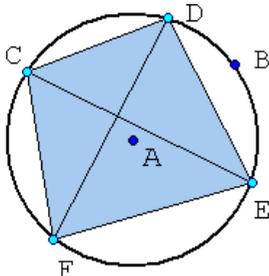
17. За допомогою ПЗ *Динамічна геометрія* вчитель може швидко і якісно перевірити виконання індивідуальних завдань з аналітичної геометрії. Радимо провести міні-експеримент: зафіксувати час на перевірку правильності отриманих результатів, адже всі необхідні елементи трикутника вже побудовані, і порівняти з часом, затраченим на традиційну перевірку. Щоб згенерувати завдання для кожного учасника, можна до координат вершин трикутника ввести порядковий номер N учня в журналі чи остачу від ділення цього номера на 10: $A(-5, N+1)$, $B(-5, -3)$, $C(4, N+1)$. Доцільне застосування ПЗ сприятиме як розвитку особистості того, хто навчається, так і вивільненню часу вчителя за рахунок інтенсифікації праці.

18. У процесі навчання математики з використанням ПЗ GRAN-2D доцільно пропонувати учням / студентам завдання на «відкриття» теорем в ході обчислювального експерименту. Для «[відкриття](#)» [теорема Птолемея](#) (якщо чотирикутник вписаний, то добуток його діагоналей рівний сумі добутків протилежних сторін) необхідно створити модель, до складу якої входять наступні об'єкти: точка A – центр кола; точка B – кінець радіуса кола; коло з центром у точці A і радіусом AB ; точки C, D, E, F – точки, які прикріплені до кола; замкнена ламана $CDEF$ – вписаний чотирикутник (рис. 1.52, 1.53).

Для виконання досліджень необхідно створити наступні динамічні вирази: добуток діагоналей $LEN(C,E)*LEN(F,D)$; добутки для протилежних сторін $LEN(C,D)*LEN(F,E)$ та $LEN(C,F)*LEN(D,E)$. При цьому бажано уникати прямих вказівок, які саме вирази слід створити. Для аналі-

зу моделі, узагальнення емпіричних даних доцільно створити більше виразів, щоб дослідник під час обчислювального експерименту самостійно відкинув зайві. Для динамічного креслення, про яке йде мова, можна створити вирази для суми протилежних сторін $LEN(C,F)+LEN(D,E)$ і $LEN(C,D)+LEN(F,E)$, суми протилежних кутів $DEG(ANGLE(D,C,F))+DEG(ANGLE(F,E,D))$ і $DEG(ANGLE(C,F,E))+DEG(ANGLE(C,D,E))$. Досліджуючи значення двох останніх виразів, учні пригадують властивість вписаного чотирикутника – суми протилежних кутів рівні.

Теорема Птолемея



Завдання для дослідження

1. Розглянути чотирикутник, вписаний в коло
2. Обчислити добуток діагоналей
3. Обчислити добуток протилежних сторін, суму протилежних сторін, суму протилежних кутів
4. Чи існує зв'язок між обчисленими величинами
5. Висловити гіпотезу
6. Перевірити гіпотезу змінюючи радіус кола форму чотирикутника
7. До яких рівностей зведеться встановлене співвідношення для прямокутника? Рівнобічної трапеції?

Перевір себе: формулювання теореми

[Рис. 1.52. Копія екрана GRAN-2D з моделлю до теореми Птолемея](#)

Список об'єктів

- A
- B
- коло1
- C
- D
- E
- F
- чотирикутник

Замкнена ламана:
"чотирикутник".
Кількість вершин: 4
Довжина ламаної: 10.11
Площа ламаної: 5.97

Динамічні вирази

Вираз	Значення	1	2	3
добуток діагоналей	15.6	56.3	54.6	8.2
CD * FE	3.7	20.3	13	1.9
CF * DE	11.9	36.1	41.6	6.2
CF+DE	7	12.1	13.2	5.1
CD + FE	3.7	20.3	13	1.9
сума кутів C і E	180	180	180	180
сума кутів F і D	180	180	180	180

Рис. 1.53. Список об'єктів і динамічні вирази до теореми Птолемея

Щоб спростити процедуру створення динамічних виразів, вибирають об'єкти з поля зображення, попереднього натиснувши на спеціальний символ « α », зазначений справа поряд з функціями для визначення величин. У ході експерименту виникає потреба запам'ятати поточне значення динамічного виразу, щоб порівняти його з іншими. При зверненні до послуги *Обчислення \ Динамічний вираз \ Зафіксувати поточне значення* у таблицю з переліком динамічних виразів справа від останнього стовпчика буде додано новий стовпчик, який міститиме поточні значення усіх динамічних виразів ([Завантажити файл1 DG](#), [файл2 DG](#)).

19. У програмі передбачена можливість створювати *Написи* (*Об'єкт \ Додати напис*), *Кнопки* (*Об'єкт \ Додати кнопку*). За допомогою кнопок можна *сховати \ показати об'єкти, показати повідомлення, переходити до інших файлів*. Для написів і кнопок можна добирати бажані шрифти, кольори тексту. Передбачена можливість фіксувати положення кнопок чи написів у полі зображення (контекстне меню, опція *Прив'язка до сітки*).

Створимо написи і кнопки для креслення до теореми Птолемея

а) Напис №1. Заголовок «Теорема Птолемея» (рис. 1.52).

б) Напис №2 прихований кнопкою «Завдання для дослідження».

- Розглянути чотирикутник, вписаний у коло.

- Обчислити добуток діагоналей.

- Обчислити добуток протилежних сторін, суму добутоків протилежних сторін, суму протилежних сторін, суми протилежних кутів. Проаналізувати обчислені вирази і з'ясувати, чи існує зв'язок між обчисленими величинами?

- Висловити і перевірити гіпотезу, змінюючи радіус кола, чотирикутник.

- До якої рівності зведеться встановлене співвідношення для прямокутника? Рівнобічної трапеції? Сформулювати гіпотезу.

в) Напис №3 до завдання «Сформулювати обернене твердження».

Експериментально перевірити, чи буде істинним обернене твердження? Для цього одну з вершин чотирикутника попередньо від'єднати від кола і рухати в полі зображення, порівнюючи значення динамічних виразів.

г) Напис №4 прихований кнопкою «Початок формулювання теореми». Учасник навчального процесу може скористатися ним у випадку утруднення з формулюванням теореми чи з метою самоперевірки.

Часто зручно *Сховати* за допомогою кнопок динамічні вирази, додаткові побудови, підказки до ходу розв'язування задачі. За допомогою однієї з кнопок можна, наприклад, відкрити файл, створений за допомогою GRAN-2D, який містить доведення теореми Птолемея.

20. За допомогою GRAN-2D можна здійснювати *геометричні перетворення* об'єктів *Точка, Лінія, Ламана, Коло та Інтерполяційний поліном*. Для здійснення перетворення (*паралельного перенесення, повороту відносно деякої точки, гомотетії, деформації вздовж осей координат та комбінацій перетворень*) призначено послуги пункту головного меню *Об'єкт \ Перетворення* (рис. 1.54).

Розглянемо, [як за допомогою GRAN-2D створювати калейдоскопи](#) (фігури, що мають симетрію n -го порядку). Першу пелюстку квітки будують як просту замкнену ламану чи ламану з самоперетином (рис. 1.55 б). Якщо квітка має симетрію обертання порядку n , то для того, щоб пелюстки не перекривалися, багатокутник краще розміщувати всередині кута $360^\circ/n$. Для побудови решти пелюсток за допомогою GRAN-2D застосовують вмонтовану послугу повороту. Для кожної пелюстки здійснюємо ланцюжок операцій *Об'єкт – Перетворення – Па-*

раметрично – Поворот. Вказують центр повороту, кут; відмічають галочкою, що потрібно створювати нову ламану і прив'язувати її до початкової (рис.155. а). У цьому разі будь-яка зміна розташування вершин ламаної, що повертається, відобразиться на решті ламаних, створених у результаті повороту (рис. 1.55, в). Оскільки у квітці вісім пелюсток, то повертаємо початковий багатокутник на кути, кратні 45° . За допомогою ПЗ можна також здійснювати деформації побудованих візерунків до осей координат.

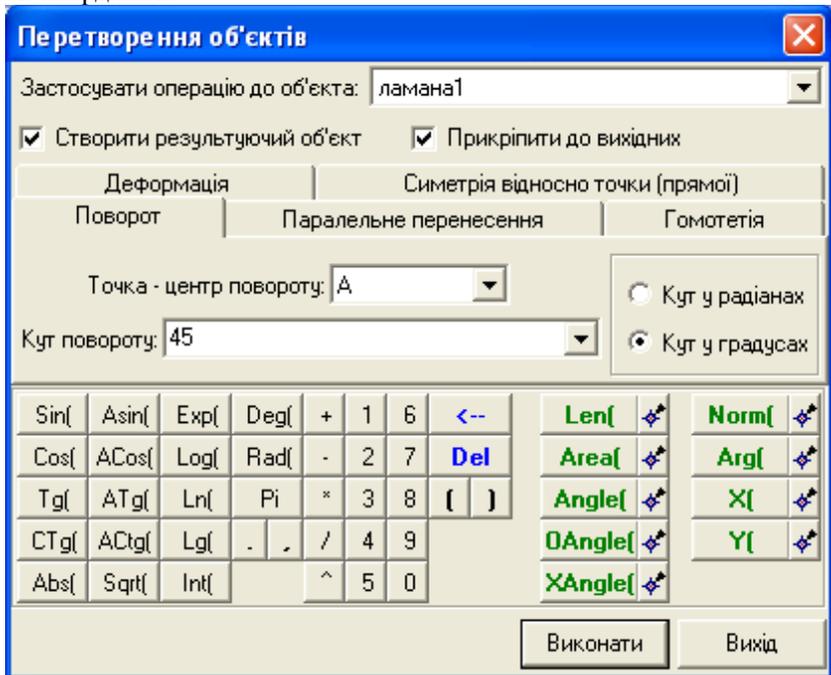


Рис. 1.54. Вікно Перетворення об'єктів

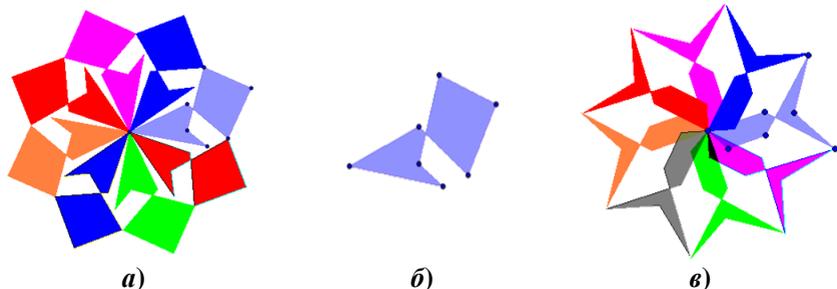


Рис. 1.55. Фігури, що мають симетрію n -го порядку (файл [GRAN-2D](#))

21. Якщо звернутися до послуги *Зображення \ ГМТ* та за відповідним запитом програми, що з'явиться у полі підказки, вказати на зобра-

ження точки, то надалі при всіх переміщеннях вказаної точки на зображенні буде залишатися її слід.

22. Передбачено можливість *Налагодження відображення*, щоб не виділяти як окремі кроки деякі допоміжні побудови, і переглядати зображення в автоматичному режимі. Цю послугу зручно використовувати при розв'язуванні задач на побудову. Дані задачі подаються одним кроком, виділяються лише кроки побудови згідно з алгоритмом (див. п. 2.3).

23. За допомогою GRAN-2D можна побудувати *графіки функцій*, заданих явно в декартових координатах, у полярних координатах та параметрично, апроксимувати табличні дані многочленами. Для цього використовують послугу *Об'єкт \ Створення \ Графік функції*.

Оскільки при створенні об'єкта *Графік функції* можна використовувати такі величини як довжина відрізка, величина кута, площа фігури, ордината чи абсциса точки, то матимемо можливість вводити у функціональній залежності значну кількість параметрів.

Побудуємо графіки гармонічних коливань $y = A \cos \omega(x + \varphi)$.

З'ясуємо, як можна ввести у функціональну залежність параметри. Побудуємо довільну пряму, паралельну осі Ox . На ній візьмемо три довільні точки A, W, F . Скористаємося послугою *Об'єкт \ Створення \ Графік функції*. Обираємо тип функціональної залежності «явний» і записуємо аналітичний вираз $x(A) * \cos(x(W) * (x + x(F)))$. У виразі роль параметрів відіграють абсциси зазначених точок. Змінюючи положення точки A , фіксуємо вплив параметра A на амплітуду коливань. Зміна положення точки W веде до зміни частоти коливань (рис. 1.56). Зміну початкової фази викликає зміна абсциси точки F .

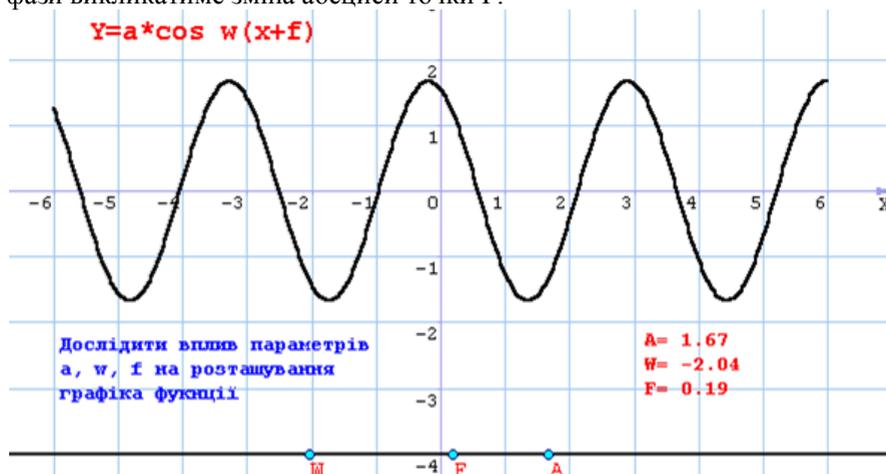


Рис. 1.56. Дослідження гармонічних коливань за допомогою GRAN-2D

24. За допомогою GRAN-2D можна наближувати табличні дані многочленами. Для цього використовують послугу *Об'єкт \ Створення *

Інтерполяційний поліном. Для отримання рівняння кривої, крім заповнення таблиці з координатами точок, слід зазначити степінь многочлена. Послугою зручно скористатися для опрацювання результатів експерименту. Наприклад, перевірити істинність закону Ома, дібрати квадратичну функцію, що описує траєкторію польоту тіла, кинутого під кутом до горизонту та інші.

25. Наведемо *приклад розробки уроку геометрії на тему «Кути, вписані в коло» з використанням програмного засобу DG.*

Мета: розглянути основні властивості кутів, вписаних у коло; використовуючи програмне забезпечення, ознайомити учнів з розв'язуванням задач до теми; зробити викладання предмета більш наочним і науковим.

Обладнання: комп'ютер та ПЗ DG, картки із завданнями та інструкціями.

Вважатимемо, що учні вміють виконувати побудови у програмному середовищі DG. Опишемо хід уроку.

I. Організаційний момент. Учитель нагадує учням правила техніки безпеки у процесі роботи з комп'ютерами.

II. Актуалізація опорних знань і умінь. Можна використати ілюстрацію, виконану за допомогою DG. Учні мають відповісти на питання:

- який кут називається центральним?
- який кут називається вписаним у коло?
- назвати вписані і центральні кути, зображені на малюнках, пояснити відповіді.
- чи існує залежність між градусними мірами вписаного і відповідного центрального кутів?

III. Навчальне дослідження. Клас бажано заздалегідь об'єднати у групи і призначити учнів-консультантів для кожної групи. Група отримує завдання і по черзі виконує його за допомогою комп'ютера. Створити групи можна як гомогенні, так і з учнів, що мають різний рівень підготовки. У першому випадку слід диференціювати завдання за складністю. У другому – сприяти тому, щоб учні з невисоким рівнем підготовки могли вносити у процес дослідження посильний вклад. Консультанти допомагають учням у групі відповісти на питання. Групи можуть працювати у класі біля комп'ютерів по черзі. Доки одна група виконує завдання за комп'ютерами, вчитель працює з іншою частиною класу, запропонувавши учням завдання, які учні виконують у зошитах. Завдання для роботи за комп'ютером слід надрукувати і роздати по одному на кожну парту. Крім умови завдання, бажано подати вказівки щодо того, які інструменти слід використовувати у ході дослідження. У кінці уроку відбувається міні-конференція. Доповідач від кожної групи звітує про її роботу, учні та вчитель ставлять питання.

Завдання №1. Дослідити залежність між величинами вписаного і центрального кутів, якщо вони стягують спільну дугу.

1. Побудувати коло (інструмент *Коло*) і позначити його центр точкою *O*.
2. Позначити на колі три точки *A*, *B*, *C* (інструмент *Точка фігури*).
3. Використовуючи інструмент *Промінь*, побудувати $\angle BAC$, вписаний у коло.

4. Побудувати центральний $\angle BOC$.

5. Вибрати інструмент *Виміряти кут* та виміряти $\angle BOC$ і $\angle BAC$. Порівняти, у скільки разів $\angle BOC$ більший за $\angle BAC$? Доцільно заповнити таблицю та сформулювати висновок.

6. Динамічно змінюючи положення точок *A*, *B* і *C*, дослідити, чи буде зберігатися співвідношення між градусними мірами кутів $\angle BOC$ та $\angle BAC$.

7. Змінюючи положення точок *B* і *C*, розглянути випадок, коли хорда *BC* перетвориться на діаметр. Якою буде градусна міра кута $\angle BAC$?

8. Сформулювати властивість вписаних кутів, які спираються на діаметр.

Завдання №2. Перевірити властивість: порівняти кут між хордою *AB* і дотичною до кола, що проходить через точку *A*, з центральним і вписаним кутом, які мають спільну дугу *AB*.

1. Побудувати коло (інструмент *Коло*) і позначити його центр точкою *O*.

2. Позначити на колі точки *A* і *B* (інструмент *Точка фігури*).

3. Побудувати відрізки *AB*, *AO*, *BO*.

4. Вибрати інструмент *Перпендикулярна пряма* і побудувати пряму *AE* перпендикулярно до радіуса *AO*.

5. За допомогою інструмента *Виміряти кут* виміряти кути $\angle BAE$ та $\angle AOB$.

6. Динамічно змінюючи положення точок *A* та *B*, порівняти відношення кутів $\angle AOB$ і $\angle BAE$, заповнити таблицю та сформулювати висновок.

Завдання №3. Дослідити, як пов'язані величини вписаних кутів, які стягують одну і ту ж дугу. Дослідити властивості кутів вписаного чотирикутника.

1. Побудувати коло (інструмент *Коло*) і позначити його центр точкою *O*.

2. Позначити на колі три точки *A*, *B* і *C* (інструмент *Точка фігури*).

3. Використовуючи інструмент *Промінь*, побудувати кут $\angle BAC$, вписаний у коло (рис.1.57).

4. Побудувати хорду *BC* (інструмент *Відрізок*). Виміряти кут $\angle BAC$, динамічно змінюючи положення лише точки *A*, дослідити зміну величини кута $\angle BAC$. Сформулювати висновок.

IV. Завдання, які учні розв'язують у зошитах. До кожної задачі бажано завчасно створити креслення і покроково відтворити його після аналізу умови.

№1. Провести дотичну до кола, яка проходить через дану точку *A* поза колом.

Якщо вчитель працює у класі з проектором, можна виконати побудову з використанням ПЗ. У розробку електронного конспекту можна помістити малюнок, створений за допомогою засобу, зробити з нього гіперпосилання на файл ПЗ, подати вказівки до ходу розв'язування.

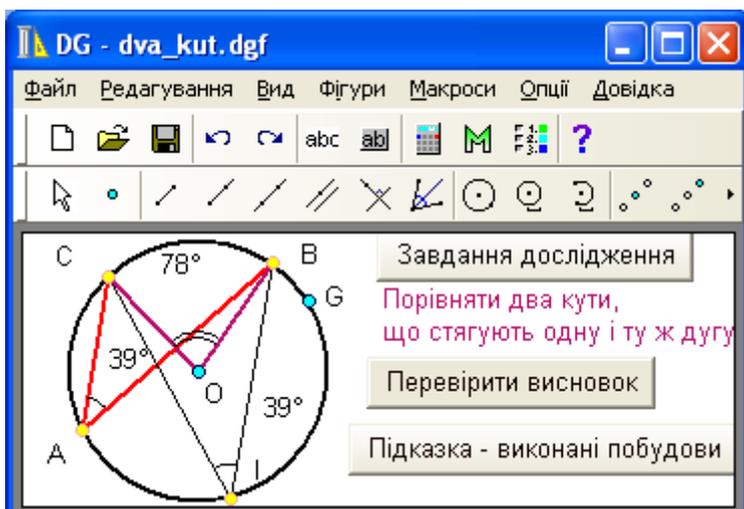


Рис. 1.57. Вікно програми DG (динамічний ОК до завдання №3)

№2. В середині квадрата $ABCD$ взяли точку P так, що трикутник ABP - рівносторонній. Довести, що $\angle PCD = 15^\circ$.

№3. Вершину A гострокутного трикутника ABC сполучено відрізком з центром O описаного кола. З вершини A проведено висоту AH . Довести, що кути $\angle BAH$ і $\angle OAC$ рівні.

№4. Дотична в точці A до кола, описаного навколо трикутника ABC , перетинає пряму BC у точці E ; AD — бісектриса трикутника ABC . Довести, що трикутник ADE рівнобедрений.

IV. Підсумок уроку. Учитель оголошує оцінки та домашнє завдання.

Контрольні питання і завдання

1. Навести приклади тем геометрії, при вивченні яких зручно застосувати GRAN-2D чи DG. Дібрати завдання для одного з уроків, підготувати динамічні конспекти, створити макроконструкцію за кресленням. Визначити мету застосування ПЗ, роль і місце у ході уроку. Визначити переваги застосування на даному уроці педагогічного програмного засобу навчання математики у порівнянні з традиційними засобами?

2. Визначити, які нові можливості для відкриття теорем, відшукування геометричних місць точок надає застосування ПЗ GRAN-2D, DG?

3. Виконати задачу на побудову за допомогою циркуля та лінійки і провести дослідження виконаного побудування.

4. Створити «калейдоскоп» (фігуру з симетрією обертання шостого, восьмого чи дванадцятого порядку), взявши за початкову фігуру для обертання замкнену ламану.

5. Побудувати за допомогою ПЗ ГМТ а) рівновіддалених від вершин трикутника, б) від сторін трикутника; в) з яких даний відрізок видно під заданим кутом. Створити макроконструкцію.

1.5.4. GRAN-3D

Засіб призначено для графічного аналізу тривимірних об'єктів (G^Raphic ANalysis 3-Dimension), виконання обчислювальних операцій та побудов. Засіб може використовуватися як у навчанні стереометрії у старшій школі, так і при вивченні вищої математики, математичного аналізу, аналітичної геометрії, елементарної математики, методики навчання математики у закладах вищої педагогічної освіти. Детальніший опис інструментів програми наведено в посібнику [24]. Дослідження за допомогою GRAN-3D¹ проводяться як з базовими об'єктами, так і з самостійно сконструйованими.

1. У головному вікні відображено *головне меню, панель інструментів, поле підказки, поле зображення, перелік об'єктів, поле характеристик об'єкта, поле інформування*. На рис. 1.58 зображено піраміду в основі якої лежить квадрат, вершина піраміди проектується в одну з вершин основи, а дві бічні грані перпендикулярні до площини основи.

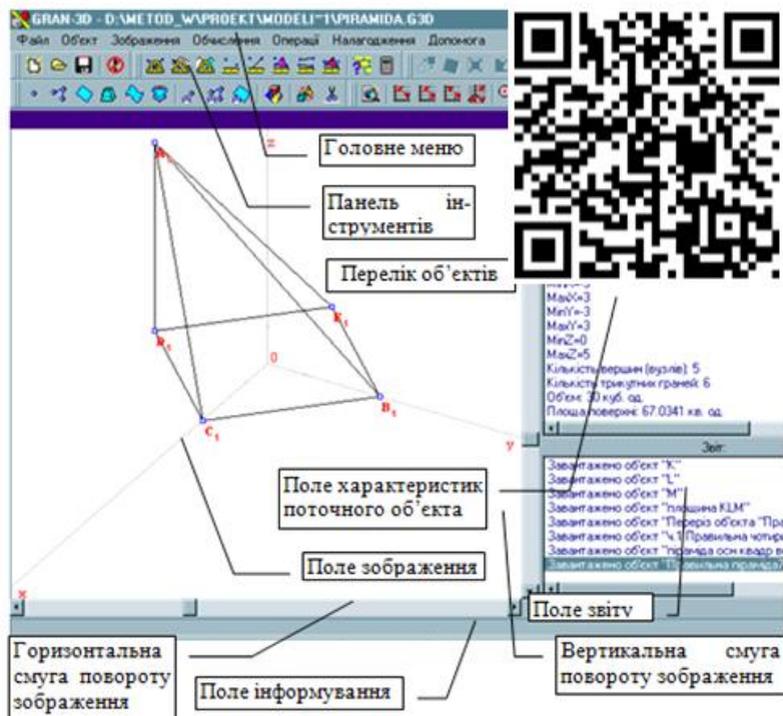


Рис. 1. 58. Вікно програми GRAN-3D.

¹ Програмний засіб GRAN-3D, версія 1.1. [Електронний ресурс]. – Київ, 2012. – Режим доступу: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/gran-3d> (дата звернення: 30.06.2019).

2. З правого та нижнього краю цього поля розміщено *смуги повороту* зображення, за допомогою яких здійснюється поворот зображень об'єктів у полі зображення. Центром повороту може бути точка з довільними просторовими координатами. За допомогою смуг повороту зображення можна повертати систему координат разом з створеними моделями об'єктів.

3. *Поле звіту* – частина головного вікна, де фіксується протокол роботи програми та куди виводяться результати всіх вимірювань та обчислень.

4. Для встановлення системи у *положення ізометрії* або в положення, при якому зображення однієї з координатних осей вироджується в точку, призначено послуги пункту *Зображення \ Положення координатних осей – Вироджена вісь Oх, Вироджена вісь Oу, Вироджена вісь Oz та Ізометрія*.

5. Для унаочнення моделей стереометричних тіл зручно скористатися послугою програми *Зображення \ Режим піктонового зображення*, що дозволяє отримувати «реалістичне» зображення моделей цих тіл, побудоване з врахуванням видимості ліній і площин.

6. За допомогою [GRAN-3D](#) можна створювати та оперувати моделями геометричних об'єктів *точка, відрізок, ламана, площина, многогранник, поверхня обертання та довільна поверхня, яка визначається рівнянням виду $z=f(x,y)$* . При цьому можливе задання об'єктів у різний спосіб. Для створення деякого об'єкта слід звернутися до підпункту послуги *Об'єкт \ Створити*, що має назву, яка відповідає бажаному типу об'єкта.

7. *Точка* задається координатами x , y та z , *відрізок* – двома точками або точкою і напрямним вектором, *ламана* – координатами вузлів або точкою та впорядкованим набором векторів (ламана може бути замкненою чи незамкненою), *площина* – трьома точками, точкою і вектором нормалі або коефіцієнтами A , B , C , D рівняння площини виду $Ax+By+Cz+D=0$.

8. Моделі *базових просторових об'єктів*, якими оперують при вивченні стереометрії (*правильна звичайна або [зрізана піраміда](#), правильна призма, прямий паралелепіпед, конус, циліндр, куля, куб*) можна створювати окремо, вказавши необхідні параметри об'єкта у вікні *Задання базових просторових об'єктів* у вкладці з відповідною назвою, що з'являється при зверненні до послуги програми *Об'єкт \ Створити базовий об'єкт*. Наприклад, для створення моделі правильної піраміди у вкладці *Правильна піраміда* (рис. 1.59) слід вказати спосіб задання нижньої основи (за допомогою перемикача *Нижня основа*) та ввести відповідне значення у поле під вказаним перемикачем. Якщо необхідно створити зрізану піраміду, то слід встановити відмітку біля напису *Зрізана* та аналогічно до попереднього задати параметри верхньої основи. Також слід вказати кількість вершин в основі піраміди та висоту або довжину бічного ребра піраміди, залежно від положення лівого перемикача. Після введення даних слід натиснути кнопку *Створити*.

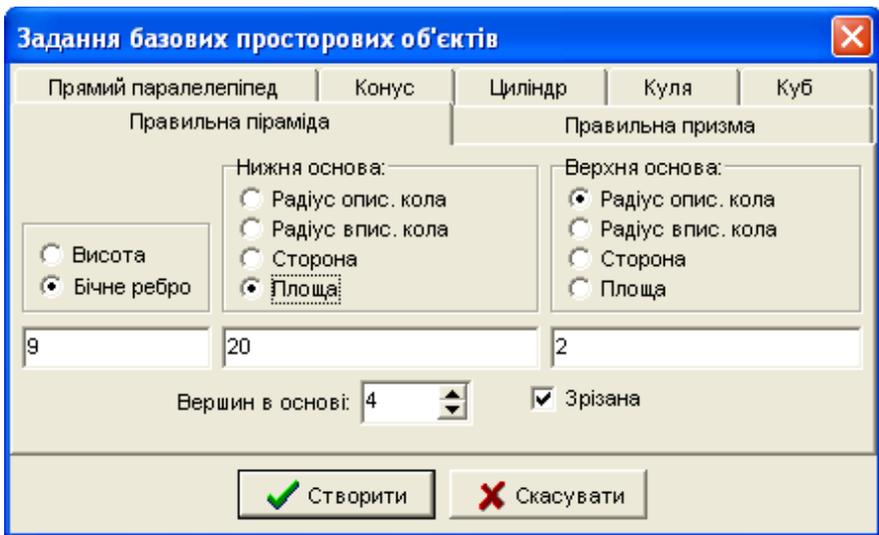


Рис. 1.59. Вікно задання базових просторових об'єктів

9. *Многогранник* задається сукупністю граней, кожна з яких трикутник, який визначається деякими трьома вершинами многогранника, а кожна вершина задається своїми просторовими координатами. Щоб сконструювати об'єкт *Многогранник*, потрібно звернутись до послуги меню *Об'єкт \ Створити \ Многогранник*. Засобами ПЗ GRAN-3D можна створити довільний многогранник. Для цього необхідно у відповідних полях вказати кількість вершин многогранника та кількість трикутних граней, а не трикутні грані потрібно поділити на трикутники, ввести координати вершин многогранника у таблиці *Вершини*, а також вказати по три вершини на кожній грані. Для опуклих многогранників можна не вказувати кількість трикутних граней та номери вершин для кожної грані. Досить ввести вершини многогранника (рис. 1.60), а потім скористатися послугою *Сформувати грані опуклого об'єкта* – кількість граней і відповідні номери вершин для кожної грані буде встановлено автоматично. Для підтвердження введення даних натиснути кнопку *Виконати*.

10. Деякі характеристики об'єктів обчислюються автоматично відразу після створення об'єктів або після їх перетворення. Наприклад, для об'єктів типу *Ламана* обчислюється довжина ламаної, а якщо ламана замкнена і всі її вузли належать одній площині, то також обчислюється площа області, обмеженої ламаною; для об'єктів типу *Площина*, незалежно від способу її задання, обчислюються коефіцієнти A , B , C і D рівняння площини виду $Ax + By + Cz + D = 0$; для об'єктів типу *Многогранник* обчислюється об'єм та площа поверхні, а також площа і периметр окремо кожної грані (ці характеристики наведено у вікні *Перелік граней* об'єкта, що з'явиться після звернення до послуги *Обчислення \ Многог-*

ранник \ Площі та периметри граней.

11. Користуючись ПЗ GRAN-3D, можна здійснювати *паралельне перенесення, поворот та деформацію об'єктів*.

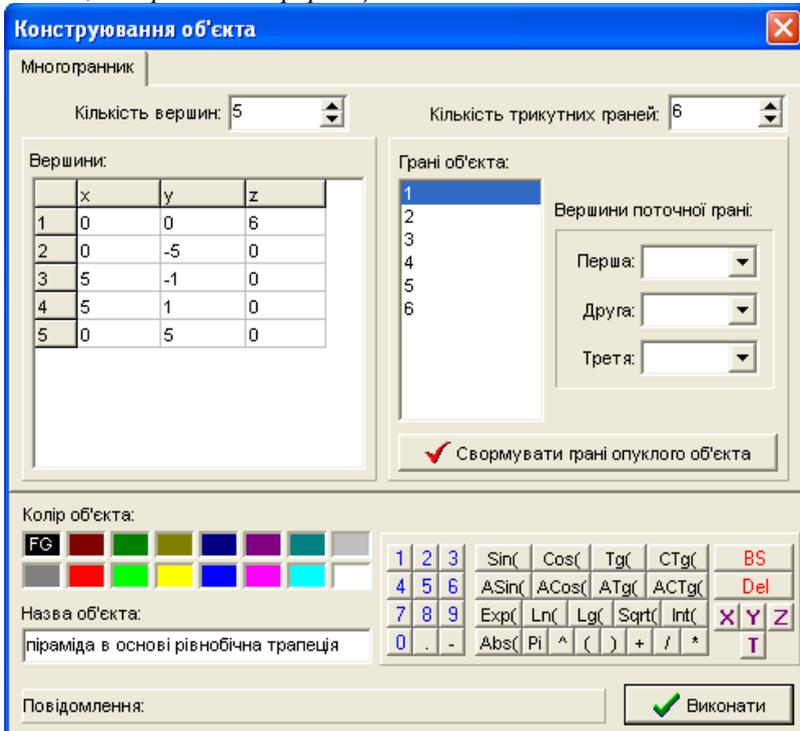


Рис. 1.60. Вікно конструювання піраміди

12. *Об'єм та площа поверхні об'єктів типу Многогранник* (піраміда, призма, паралелепіпед, куб тощо) обчислюються за програмою автоматично при створенні або перетворенні цих об'єктів. Обчислені значення виводяться у полі характеристик поточного об'єкта.

13. У полі *Площа* виводиться сумарна площа граней, відмічених « \surd » у переліку. За допомогою кнопок *Відмітити всі*, *Зняти відмітки* та *Інвертувати відмітки* можна швидко відмітити всі грані, зняти відмітки з усіх граней в переліку або змінити стан відміток граней на протилежний. Зауважимо, що послугою *Обчислення \ Многогранник \ Площі та периметри граней* можна скористатися, коли поточним об'єктом є об'єкт типу *Многогранник*.

14. За допомогою ПЗ GRAN-3D можна виконувати *перерізи опуклих многогранників площиною*. Для цього призначено послугу *Операції \ Виконати переріз*. Необхідно вказати у полі зображення (за допомогою вказівника миші) площину (об'єкт типу *Площина*), якою перерізається многогранник, та об'єкт типу *Многогранник*. При цьому можуть бути

створеними два нові об'єкти типу *Многогранник*, що матимуть таку ж назву, як і базовий, але з помітками ч.1 та ч.2 відповідно. Надалі новоутвореними многогранниками можна оперувати, як окремими об'єктами. У полі звіту з'явиться площа та величина периметра утвореного перерізу.

15. За допомогою ПЗ GRAN-3D можна обчислювати відстані між двома точками, між точкою та прямою, між двома прямими, між прямою і площиною, між точкою і площиною, а також обчислювати кути за трьома точками (між відрізками, що мають спільну точку), між прямою і площиною та між двома площинами. Для цього призначено послуги пунктів меню *Обчислення \ Відстань* та *Обчислення \ Кут*.

16. Приклад задачі на обчислення. В правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює 9 од., а площа основи 20 кв. од. Обчислити висоту піраміди; радіус описаного навколо основи кола; кут між сусідніми бічними ребрами; кут нахилу бічного ребра до площини основи; кут між площинами суміжних бічних граней, кут між бічною площиною і площиною основи Побудувати кут нахилу бічного ребра до площини основи (*Ламана*) та лінійний кут двогранного кута при ребрі основи. Наближено побудувати лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі піраміди.

У вкладці *Правильна піраміда* вікна *Задання базових просторових об'єктів* необхідно ввести параметри піраміди та натиснути кнопку *Створити* (рис. 1.59).

Висота піраміди – це відстань від вершини до площини основи піраміди, тому для обчислення можна скористатися послугою *Обчислення \ Відстань \ між точкою і площиною*. Але оскільки при зверненні до цієї послуги необхідно вказати об'єкт типу *Площина*, то попередньо створюють об'єкт, що відповідає площині основи піраміди. Активізуємо послугу *Об'єкт \ Створити з екрана*. За відповідними запитами програми, що з'являться у полі підказки, вказують три точки, що визначатимуть площину. Далі активізуємо послугу *Обчислення \ Відстань \ між точкою і площиною*, і за відповідними запитами програми вказуємо у полі зображення точку – вершину піраміди та площину – об'єкт *Площина основи*. У поле звіту буде виведено результат обчислення відстані, що становить 8.4261. Довжину діагоналі зручно обчислити, звернувшись до послуги *Обчислення \ Відстань \ між двома точками*. Радіус описаного кола становить 3.1623. Для обчислення кута між сусідніми бічними ребрами користуються послугою *Обчислення \ Кут \ за трьома точками*, вказавши послідовно на три точки, що утворюють кут. У полі звіту з'явиться результат обчислення 28.772⁰.

Кут нахилу бічного ребра до площини основи можна обчислити, скориставшись послугою *Обчислення \ Кут \ між прямою і площиною*. Оскільки при зверненні до цієї послуги необхідно вказати об'єкт типу *Площина* і об'єкт *Пряма*, то слід попередньо створити об'єкт *пряма*, що

відповідає бічному ребру піраміди. У полі звіту з'явиться результат обчислення відповідного кута: 69.429° . Програмою не передбачено виконувати побудову даного кута, тому можна позначити основу висоти піраміди як точку перетину діагоналей піраміди, а потім побудувати ламану, що відповідає куту.

Кут між суміжними бічними гранями можна обчислити, скориставшись послугою *Обчислення \ Кут \ між двома площинами*. Оскільки при використанні цієї послуги вимагається вказати два об'єкти типу *Площина*, то попередньо необхідно створити об'єкти-площини, що відповідають площинам двох сусідніх бічних граней. Активізувавши послугу *Обчислення \ Кут \ між двома площинами*, за відповідними запитам програми послідовно вказати у полі зображення об'єкти *Площина грані 1* та *Площина грані 2*. У полі звіту з'явиться результат обчислення кута між вказаними площинами: 86.228° .

Щоб виконувати обчислення вручну, учневі необхідно правильно побудувати лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі. З практики відомо, що учні часто допускають при цьому помилки. Побудувати точку на ребрі, що є вершиною цього лінійного кута краще в режимі, коли вісь, перпендикулярна до площини, проведеної через бічне ребро і висоту піраміди, є виродженою. А потім з'єднати необхідні точки ламаною.

17. Приклад завдання на *конструювання многогранника* та побудову його перерізу площиною.

Побудувати піраміду, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з основами 2 см і 10 см, висотою трапеції 5 см. Відомо, що вершина піраміди проектується на середину більшої основи трапеції. Висота піраміди рівна 6 см. Точка *M* лежить на бічному ребрі піраміди, що з'єднує вершину з кінцем більшої основи, і ділить ребро у відношенні 1:2, починаючи від вершини піраміди. Через точку *M* та середини бічних ребер трапеції проведено площину. Знайти об'єм піраміди, площу і периметр утвореного перерізу. Виконати обчислення вручну і за допомогою GRAN-3D. Для обчислення площі скористатися формулою площі ортогональної проекції. Обчислити за допомогою ПЗ об'єми утворених в результаті перетину частин піраміди.

При створенні піраміди враховуємо, що вершина піраміди проектується на середину більшої основи, тому площина, в якій розміщена бічна грань, перпендикулярна до площини основи. Зручно основу висоти сумістити з початком координат, а більшу основу трапеції розташувати вздовж осі ординат. Тоді менша основа трапеції буде розташована у площині *Oxy*. Визначившись з розташуванням піраміди, отримаємо координати її вершин (рис. 1.60). Оскільки маємо справу з опуклим многогранником, то для його створення достатньо вказати кількість точок 5, кількість трикутних граней 6 (трапецію розбити на два трикутники), а потім скористатися послугою *Сформувати грані опуклого об'єкта*. [Модель піраміди зображено на рис. 1.61.](#)

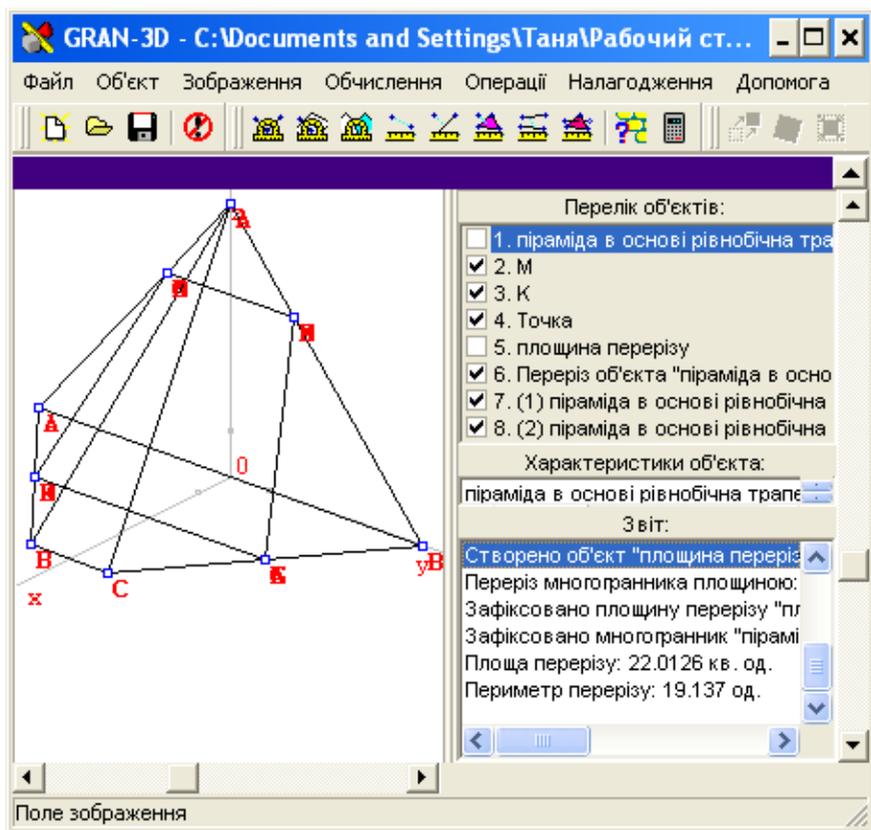


Рис. 1.61. Модель піраміди, в основі якої лежить рівнобічна трапеція

За допомогою формули поділу відрізка в заданому відношенні, визначаємо координати точки $M(0; 5/3; 4)$ та середин бічних ребер трапеції $K(2.5; -3; 0)$; $L(2.5; 3; 0)$. Користуючись послугою *Об'єкт \ Створити з екрана*, будуємо площину через зазначені точки. Щоб побудувати переріз, використовують послугу програми *Операції \ Виконати переріз* і послідовно вказують у *полі зображення* площину перерізу та піраміду. Водночас створюється ламана – контур перерізу та два нових об'єкти-многогранники, що відповідають частинам піраміди у різних півпросторах відносно площини перерізу. У *полі звіту* з'являється значення площі перерізу 22.01 кв. од. Об'єм піраміди і кожної з частин можна виписати з поля характеристик, якщо світловий курсор у переліку об'єктів встановити на цей об'єкт. $V = 60$ куб. од., $V_1 = 27,8$ куб. од., $V_2 = 32,2$ куб. од.

18. **Розглянемо приклад завдання до теми «Декартові координати в просторі»:** 1) скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1, 3, 0)$, $B(4, -1, 2)$ і $C(3, 0, 1)$; 2) знайти відстань до цієї площини від точки $D(4, 3, 0)$; 3) записати рівняння площини, яка проходить через да-

ну точку і паралельна до площини ABC .

Щоб скласти рівняння площини, обираємо пункт меню *Об'єкт \ Створити \ Площина* та записуємо координати заданих точок. У звіті прочитаємо складене рівняння: $0,82x + 0,41y - 0,41z = 0$. Будуємо точку D (*Об'єкт \ Створити \ Точка*). Для обчислення відстані використовуємо послугу *Обчислення \ Відстань \ Між точкою і площиною* і вказуємо відповідно до запитів програми на точку і на площину ABC . Щоб скласти рівняння площини, паралельної до ABC , пригадуємо умову паралельності: пропорційні координати нормальних векторів. Випишуємо координати вектора, перпендикулярного до ABC (82, 41, -41); складаємо рівняння площини, активізувавши пункт меню *Об'єкт \ Створити \ Площина \ Точка і вектор нормалі*.

Контрольні питання і завдання

1. Виконати розглянуті в п.1.5.4 завдання за допомогою GRAN-3D.
2. Для правильної 5-кутної піраміди $ABCDE F$ (точка A – вершина піраміди), бічне ребро якої 10, а площа основи дорівнює 38 кв.од., обчислити висоту; радіус описаного навколо основи кола; радіус вписаного в основу кола; відстань між вершинами B і D ; відстань між вершинами C і F ; кут між сусідніми бічними гранями; кут між бічною гранню і площиною основи; кут між сусідніми бічними ребрами; кут нахилу бічного ребра до площини основи.
3. Знайти площу бічної грані правильної 6-кутної зрізаної піраміди, висота якої 4, сторона верхньої основи дорівнює 1.5, а площа нижньої 15 кв. од.
4. Обчислити площу бічних граней прямого паралелепіпеда, висота якого 30 см, а діагоналі основи довжиною 10 см та 13 см утворюють кут 17° .
5. Дібрати до уроку завдання для виконання за допомогою GRAN-3D. Які з якостей особистості доцільно розвивати у процесі навчання математики з використанням засобу? Як це краще здійснювати?

1.6. Система динамічної математики GeoGebra

1.6.1. Модуль Геометрія. Основні інструменти, приклади побудов.

GeoGebra¹ – це вільне програмне забезпечення, система динамічної математики для всіх рівнів освіти, що включає в себе окрім розділів геометрії, алгебри, таблиць, графіків, математичного аналізу, також блоки теорії ймовірностей і статистики в одному зручному для використання пакеті. Тому засіб може успішно використовуватися як у навчанні математики у середній школі, так і при вивченні вищої математики, аналітичної геометрії, математичного аналізу, елементарної математики, методики навчання математики у закладах вищої педагогічної освіти.

¹ Офіційний сайт розробників системи динамічної математики GeoGebra – Dynamic Mathematics for Everyone. – Режим доступу: <https://www.geogebra.org/>.

GeoGebra завоювала кілька освітніх нагород в Європі і США. Засіб доступний на багатьох мовах для мільйонів користувачів по всьому світу (режим доступу <http://geogebra.org>), у тому числі локалізований українською та російською мовами. *GeoGebra* має легкий у використанні інтерфейс і потужні можливості здійснення обчислень і візуалізації абстракцій. Використовуючи засіб, викладач/вчитель може створити інтерактивний навчальний матеріал. Команди в системі динамічної математики згруповані за призначенням (областю застосування або навчальною дисципліною): *Математичні функції, GeoGebra, Алгебра, Вектори та Матриці, Геометрія, Дискретна математика, Ймовірність, Команди оптимізації, Логіка, Список, Статистика, Таблиці, Функції*.

На офіційному сайті *GeoGebra* подано основні відомості про продукт, розміщений інсталяційний файл для найновіших версій *GeoGebra*: для використання на ПК з ОС Windows, Mac OS X, Linux. З'явилися додатки для мобільних телефонів *Геометрія, Графічний калькулятор, 3D-Графіка, Науковий калькулятор* (рис.1.62). *GeoGebra* може використовуватись у вікні веб-браузера, без інсталяції на ПК, на мобільних телефонах.

Більше про GeoGebra за наступними посиланнями

Learn GeoGebra Classic <https://www.geogebra.org/m/XUv5mXTm>

Learn GeoGebra Calculator <https://www.geogebra.org/m/aWhYSpvy>

Learn GeoGebra Geometry <https://www.geogebra.org/m/DmVNbn2V>

Learn GeoGebra Graphing Calculator <https://www.geogebra.org/m/vd6UC685>.

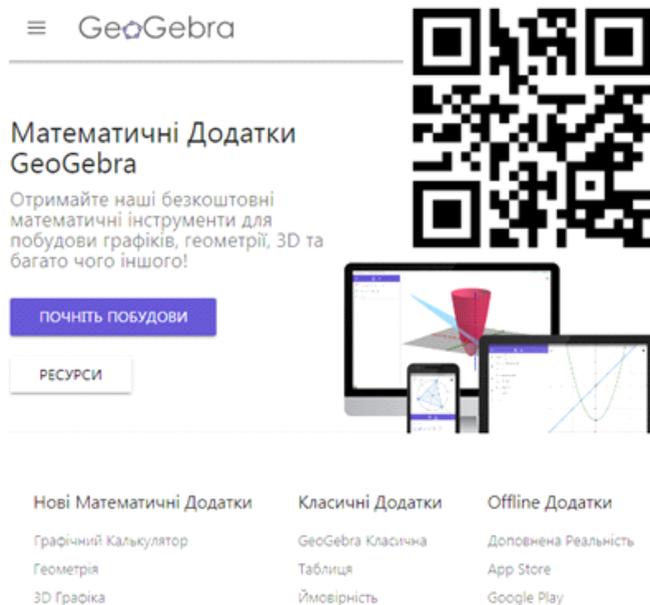


Рис. 1. 62. Копія веб-сторінки на офіційному сайті *GeoGebra*.

Ще одна з переваг *GeoGebra* та, що у вкладці [Ресурси](#) розміщено низку навчально-методичних матеріалів: підручники, статті, готові конструкції та наочності. На сайті подається короткий опис команд та інструментів *GeoGebra*, приклади їх використання [4], [5], [3]. При цьому зареєстрований користувач може ділитися своїми навчальними матеріалами на сторінці офіційного сайту – *GeoGebraTube*. Це це своєрідний файлообмінник, особливість якого полягає в тому, що створені динамічні «інтерактивні» конструкції немає необхідності завантажувати на ПК, якщо вони будуть використовуватися саме у запропонованій формі без змін. Для використання достатньо відкрити *Переглянути аркуш* у вікні браузера як веб-сторінку, можна динамічно рухати модель, змінювати вхідні данні. Користувач може залишати коментарі до матеріалів *GeoGebraTube*. Є можливість створити власну *GeoGebraBook* – папку, у яку можна додавати обрані матеріали, створювати підпапки. [Користувач може опублікувати](#) для загального користування гру, колекцію наочностей (розробок), практику, розробку уроку, до якої можна включати текстові повідомлення, об'єкти *GeoGebra*, веб-сторінки, питання, відео, зображення та pdf-файли, навчальний посібник.

Проблемам використання *GeoGebra* присвячено низку досліджень і розробок В. М. Ракути [51], В. А. Сидорука [56], О. В. Семеніхіної [53], М. Г. Друшляк [53] та ін. [З нашими наробками можна ознайомитися](#) за публікаціями [32], [33], добіркою матеріалів [електронного навчального курсу](#) [36], добіркою матеріалів на сайті *GeoGebra* за профілем, [добірками для популяризації системи динамічної математики GeoGebra](#) та ін.

Матеріалами з *GeoGebraTube* можна ділитися через соціальні мережі: Facebook, Twitter та відправляти на електронну адресу, завантажувати на *GoogleDrive*. Це створює умови для високої взаємодії між педагогом та учнями у неформальній обстановці, сприяє розвитку інформаційної культури, яка є невід'ємною складовою сучасного суспільства.

Перейдемо до розгляду інструментів [класичної GeoGebra](#) (рис. 1.63). Більшість з них застосовна і для мобільного додатку [Геометрія](#).

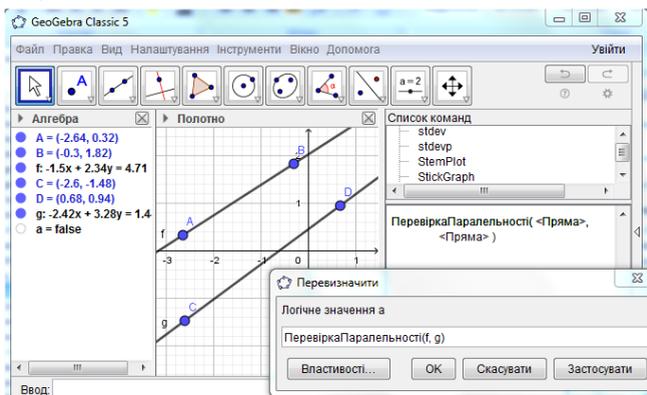


Рис. 1. 63. Вікно засобу *GeoGebra Classic*, [QR-код посібника](#)

До першої групи інструментів GeoGebra належать *Переміщення*, *Поворот навколо точки* та *Записати у таблицю*. Для побудови точок використовують інструменти *Нова*, *На об'єкті*, *Приєднати/від'єднати точку*, *Перетин двох об'єктів*, *Середня точка або центр*, *Комплексне число* (Рис. 1.64).

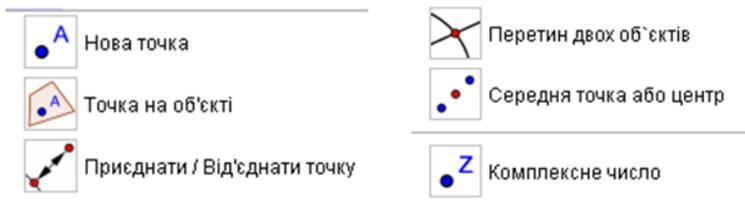


Рис. 1. 64. Точки.

При побудові ліній використовують наступні інструменти: *Пряма через дві точки*, *Відрізок* із заданими кінцями, *Відрізок з фіксованою довжиною*, *Промінь* за початком променя і точкою на промені, *Ламана* з вершинами у заданих точках, *Вектор за двома точками* – початком і кінцем; *Відкладання від точки вектора*, рівного даному) (Рис. 1.65).

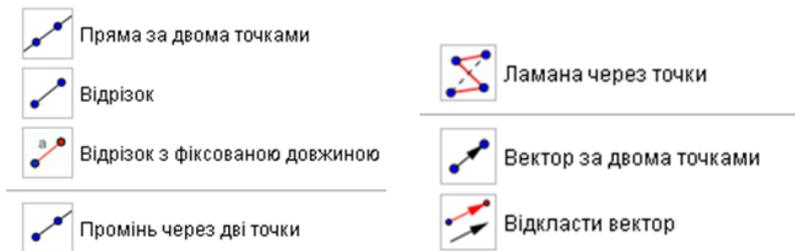


Рис. 1. 65. Лінія.

У системі динамічної математики *GeoGebra* розглядають такі прямі: *Перпендикулярна пряма*, яка проходить через задану точку і перпендикулярна до заданої прямої; *Паралельна пряма*, яка проходить через задану точку і паралельна до заданої прямої; *Серединний перпендикуляр* заданого відрізка; *Бісектриса кута*; *Дотична до кола*; *Полярна*, діаметр кола; *Апроксимація лінійною функцією*; *Локус*) (Рис. 1.66).



Рис. 1. 66. Пряма.

Можна побудувати довільний *Многокутник*, послідовно вказавши його вершини; *Правильний многокутник*, вказавши дві сусідні вершини і кількість сторін; *Жорсткий многокутник*, вказавши його вершини (навколо першої вершини можна повертати, за другу вершину переміщувати); *Векторний многокутник* для якого точки, відмінні від першої отримують переміщення на вектор (Рис. 1.67).



Рис. 1. 67. Многокутник.

У середовищі *GeoGebra* можна побудувати *Коло за центром і точкою на колі*, *Коло за центром та радіусом*, при цьому радіус задають величиною (Рис. 1.68). Обравши *Циркуль*, вказують кінці відрізка, що задають радіус і центр кола. Будують *Коло за трьома точками*, що не лежать на одній прямій, а також дуги і сектор.

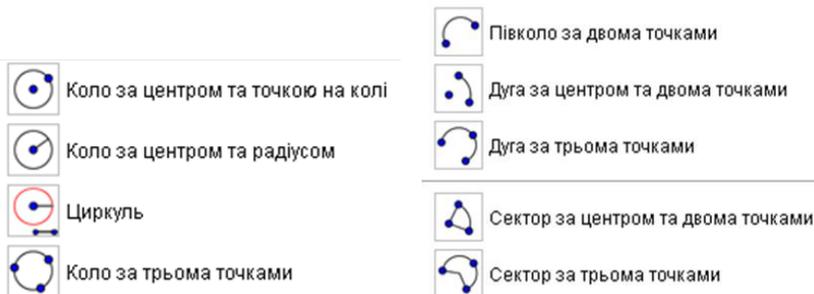


Рис. 1. 68. Коло, дуга, сектор.

У *GeoGebra* будують криві другого порядку (Рис. 1.69): *Еліпс* за фокусами і точкою на еліпсі, *Гіперболу* за фокусами і точкою на гіперболі, *Параболу* за фокусом і прямою, *Коніку* за п'ятьма точками.



Рис. 1. 69. Криві другого порядку.

У системі динамічної математики можна здійснити низку обчислень, пов'язаних з властивостями побудованих об'єктів. Зокрема, можна обчислити величину побудованого кута, обравши інструмент *Кут* і послідовно вказавши точку на стороні кута, вершину кута, точку на іншій стороні кута. Вказавши напрям і величину кута, можна побудувати *Кут заданої величини*.

ни. Можемо обчислити довжину заданого відрізка чи площу побудованої плоскої фігури, кутівий коефіцієнт у рівнянні прямої тощо (Рис. 1.70).

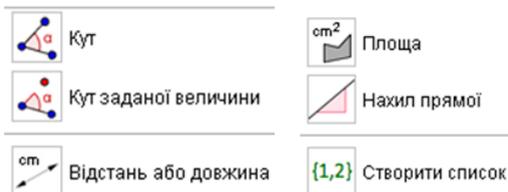


Рис. 1.70. Інструменти обчислення.

З використанням *GeoGebra* можна здійснити низку геометричних перетворень побудованих на полотні об'єктів. Серед пропонуваніх інструментів наступні: *Симетрія відносно прямої*, *Симетрія відносно точки*, *Інверсія*, *Поворот навколо точки*, *паралельне перенесення*, *Гомотетія відносно точки* (Рис. 1.71). Інтерфейс програмного засобу дуже простий, використання кожного з інструментів забезпечене контекстною підказкою, тому нема потреби деталізувати опис інструментів. У другому розділі цього посібника буде наведена низка наочностей на застосування цих інструментів.

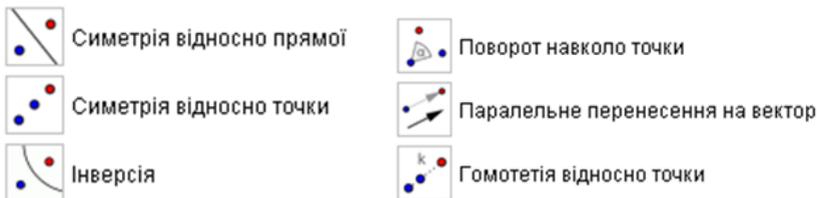


Рис. 1.71. Інструменти для геометричного перетворення фігур.

Вигідно вирізняють динамічну математику *GeoGebra* надані користувачу можливості додавати на полотно зображення, писати на полотні від руки чи додавати геометричні фігури (Рис. 1.72). Ці інструменти надзвичайно зручно використовувати вчителю, який має можливість використовувати у навчанні учнів мультимедійну дошку. Для побудови геометричних фігур учні можуть використовувати не лише вбудований циркуль та лінійку, але й звичайні.

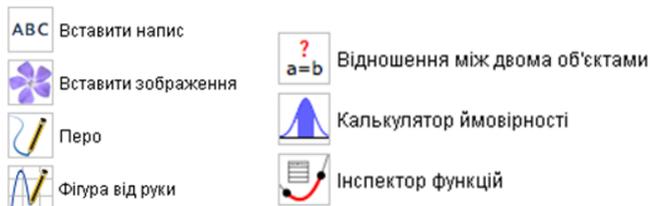


Рис. 1.72. Інструменти додавання написів, зображень, фігур.

Для розробки робочих листів з «інтерактивом», зручно використовувати наступні інструменти: *Повзунок* для введення до використання низки параметрів; *Прапорець*, за допомогою якого можна тимчасово приховувати об'єкти, підказки, які розглядаються. Передбачено також можливість додавання інструменту *Кнопка* та *Поля вводу* (Рис. 1.73).

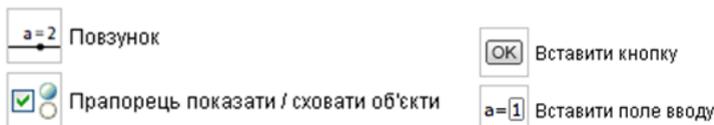


Рис. 1. 73. Інструменти для створення «інтерактивних» плакатів.

На завершення огляду інструментів блоку «Геометрія» доцільно нагадати користувачу про можливість у ході роботи здійснювати переміщення полотна, зміну масштабу, показувати чи приховувати об'єкти і позначення, змінювати і вилучати об'єкти. Технологія середовища дозволяє вчителям ефективніше адаптувати інструкції та методи навчання до потреб своїх учнів.

1. Розглянемо [побудову кола, описаного навколо трикутника](#) (табл. 1.9). Детальніше про розв'язування задач на побудову див. у п. 2.3.



Табл. 1.9.

Додаток Геометрія. Кроки побудови кола, описаного навколо трикутника

№	Опис кроку побудови	Піктограма
1.	Обрати інструмент « <i>Многокутник</i> » і побудувати трикутник як замкнену ламану, обираючи на площині три точки, які не лежать на одній прямій (рис.1.74).	
2.	Обрати інструмент « <i>Серединний перпендикуляр</i> » і побудувати два серединні перпендикуляри, вказуючи на сторону трикутника.	
3.	Побудувати <i>Точку перетину</i> серединних перпендикулярів – центр описаного кола. Можна вказати на кожен з серединних перпендикулярів або на точку їх перетину безпосередньо.	
4.	Обрати інструмент « <i>Коло за центром і точкою на колі</i> » і послідовно вказати центр кола і одну з вершин трикутника.	
5.	Дослідити положення центра описаного кола. Як пов'язане положення центра описаного кола з видом трикутника? Для цього обрати інструмент « <i>Вимірювання кутів</i> », послідовно вказати, рухаючись проти часової стрілки, точку на стороні кута, вершину кута, точку на суміжній стороні трикутника.	

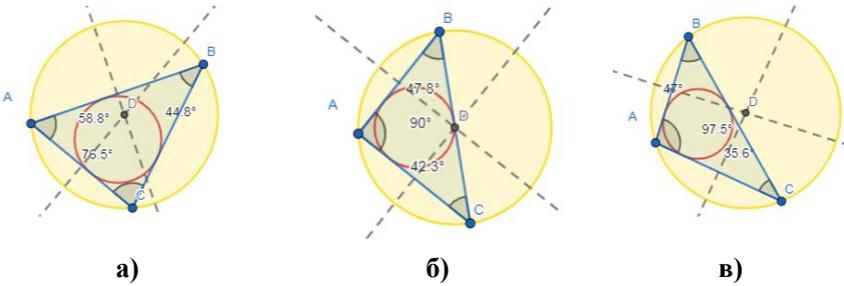


Рис. 1. 74. Дослідження положення центра описаного навколо трикутника кола: а) гострокутний трикутник, б) прямокутний, в) тупокутний.

2. Розглянемо **побудову кола, вписаного у трикутник** (табл. 1.10). Переглянути кінцевий результат побудови можна за наступним посиланням <https://www.geogebra.org/m/kjwvtmm>. Дану побудову зручно здійснювати як на полотні класичної версії GeoGebra, так і з використанням мобільного додатку.

Табл. 1.10.

Додаток Геометрія. Кроки побудови кола, вписаного у трикутник

№	Опис кроку побудови	Піктограма
1.	Обрати інструмент « <i>Многокутник</i> » і побудувати трикутник як замкнену ламану, обираючи на площині три точки, які не лежать на одній прямій.	
2.	Обрати інструмент « <i>Бісектриса кута</i> » і побудувати бісектриси двох кутів, вказуючи послідовно точку на стороні кута, вершину кута, точку на суміжній стороні трикутника.	
3.	Обрати інструмент <i>Точка</i> . Побудувати точку перетину бісектрис – центр вписаного кола. Можна вказати на кожну з бісектрис або на точку їх перетину безпосередньо.	
4.	Побудувати точку дотику вписаного кола до сторони трикутника. Для цього обирають інструмент « <i>Перпендикулярна пряма</i> », послідовно вказують точку перетину бісектрис і одну з сторін трикутника.	
5.	Обирають інструмент « <i>Точка</i> » і вказують точку перетину перпендикуляра з стороною трикутника.	
6.	Обрати інструмент « <i>Коло за центром і точкою на колі</i> », послідовно вказати центр кола і побудовану точку дотику кола до сторони трикутника.	
7.	Поділитися розробленою наочністю / зберегти / надіслати на Google-диск.	

4. Наведемо приклад побудови центральносиметричної фігури з використанням властивостей об'єктів Точка (Залишити слід) (Рис. 1.75 а)). Послідовність виконання побудови центральносиметричної фігури (табл. 1.11). Приклад побудови фігури, що має також осі симетрії (рис. 1.75. б). Доцільно переглянути наочність, де продемонстровано дві замкнені ламані, отримані у результаті перетворення осьова симетрія. На рис. 1.75 в) подано скріншот екрану смартфоні з побудовою ламаних (спочатку побудовано центр симетрії, далі створено замкнену ламану, наступним кроком до ламаної застосовано геометричне перетворення Симетрія відносно точки; відповідні точки з'єднано відрізками).

Табл. 1.11.

Кроки та інструменти побудови фігури, що має центр симетрії

№	Піктограма	Кроки побудови
		Побудувати точку А – центр симетрії, обравши інструмент «Точка». Побудувати довільну Точку В. Для побудови центральносиметричних фігур у властивостях точки зазначити «Залишити слід»
2.		Створити точку, симетричну точці В відносно точки А (спочатку вказати точку В, потім точку А). Для побудови центральносиметричних фігур у властивостях доцільно зазначити «залишити слід».

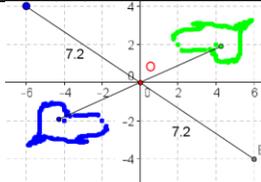
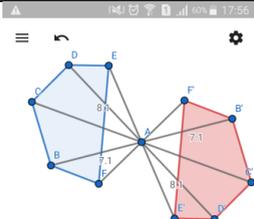
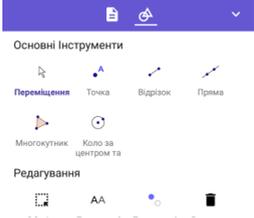
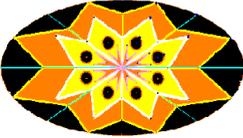
		
<p>а)</p>	<p>Колекція GeoGebra</p> 	
 <p>б)</p>	<p>в)</p>	<p>Розробка GeoGebra</p>

Рис. 1. 75. Приклади геометричних перетворень фігур.

Як зазначалося вище, для розробки робочих листів з «інтерактивом», зручно використовувати інструменти *Повзунок* для введення до

використання низки параметрів; *Прапорець*, за допомогою якого можна тимчасово приховувати об'єкти, підказки, які розглядаються. Передбачено також можливість додавання інструменту *Кнопка* та *Поля вводу*. Використовувати ці інструменти можемо в класичній версії GeoGebra, а переглядати завантажені на сайт наочності можна також з використанням мобільних телефонів. Приклади використання таких інструментів радимо переглянути у [дослідницькому завданні до теми «Перпендикуляр і похила»](#) (за допомогою *Прапорців* приховані написи) (рис. 1.76). У наочності [«Подібність фігур»](#) інструмент *Прапорець* використано для послідовного відкривання кроків побудови, вимірювань тощо.

Завдання на дослідження до теми "Перпендикуляр і похила"

Автори: Крамаренко Тетяна Григорівна
Тема: Геометрія

Дослідницьке завдання до уроку "Перпендикуляр і похила"

Продовжіть речення, використовуючи малюнок

Рівні похилі мають ...

Якщо проєкції похилих рівні, то ...

із двох похилих більшою є та, у якої ...

Більшій похилій відповідає ...

Відрізок, що сполучає кінець перпендикуляра і похилої до прямої, проведених з однієї точки, називається проєкцією похилої на пряму.
На малюнку проєкціями похилих є $DB = 9.59$ та $BC = 16$

Крамаренко Тетяна

- Що таке похила?
- Що таке проєкція похилої?
- Що таке перпендикуляр?

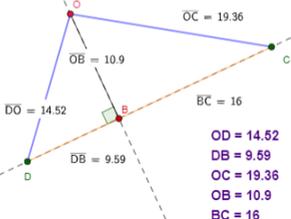


Рис. 1. 76. Скрін [дослідницького завдання](#) з інструментом *Прапорець*

У розділі 2 цього навчального посібника розкрито застосування модуль *Геометрія GeoGebra* до виконання малюнків до задач стереометрії (п. 2.1), розв'язування дослідницьких задач (п. 2.2), вивчення властивостей геометричних перетворень тощо.

1.6.2. Модуль Графіки. Дослідження функцій, побудова графіків

Для розгляду функціональних залежностей використовують список команд (піктограма 1) і рядок введення виразів (піктограма 2) (рис. 1.77).

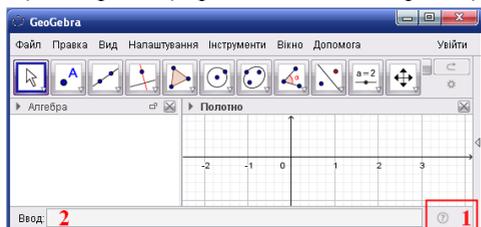


Рис. 1. 77. Вікно *GeoGebra* з Рядком введення, [QR-код колекції](#)



Для введення функцій розглядатимемо вкладку *Функції та Обчислення*, виділену на рис. 1.78 червоним кольором. Перелік команд для цієї вкладки подано українською на рис. 1.79 та англійською (*Functions & Calculus*) на рис. 1.80. Опис окремих використовуваних команд будемо здійснювати безпосередньо під час розв'язування задач.

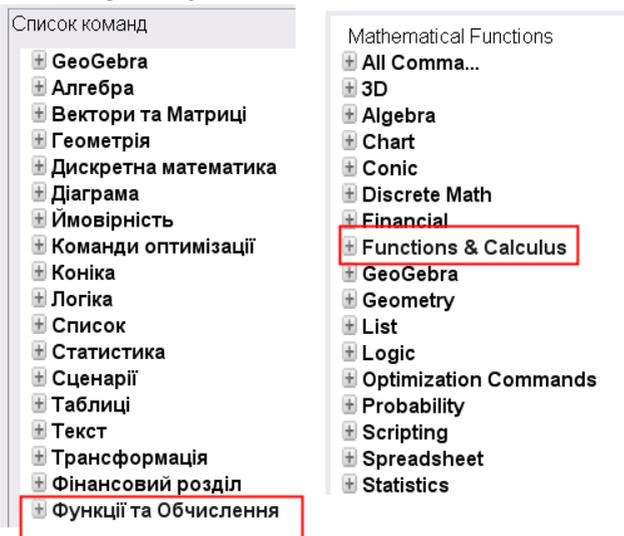


Рис. 1. 78. Перелік команд GeoGebra українською та англійською

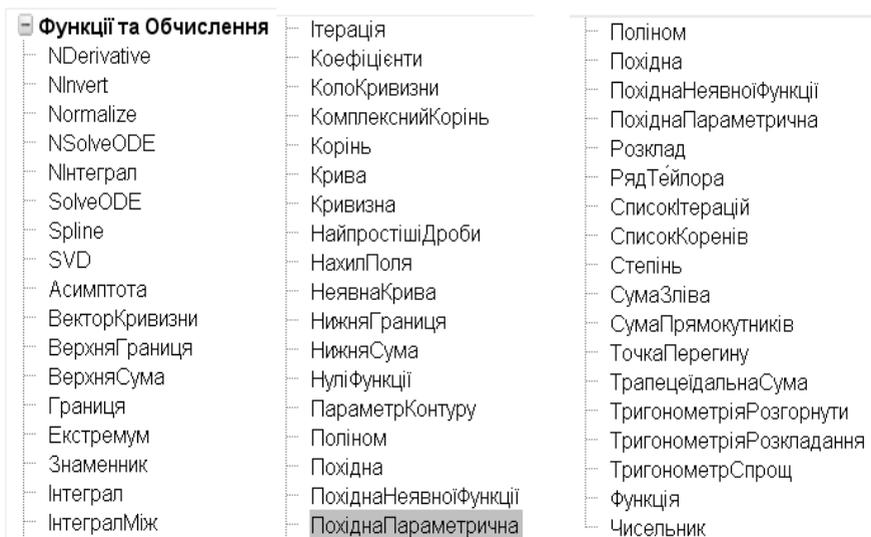


Рис. 1. 79. Перелік команд вкладки Функції та Обчислення

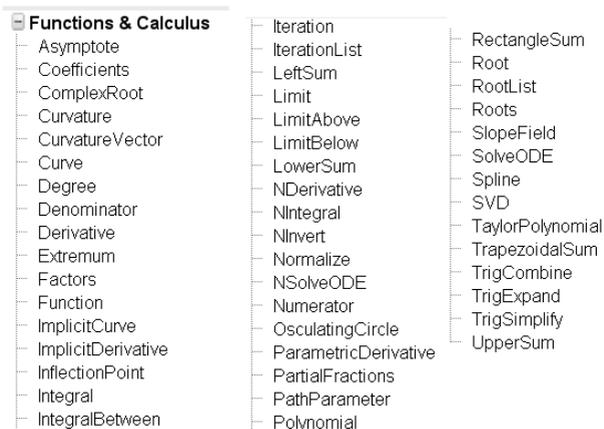


Рис. 1. 80. Перелік англійською команд вкладки **Functions&Calculus**

При створенні функціональних залежностей у виразах можна виконувати арифметичні дії $+$, $-$, $*$, $/$, $^$ (піднесення до степеня) та логічні дії. Можна використовувати математичні функції (подані для україномовної версії): \sin – синус; \cos – косинус; tg – тангенс; ctg – котангенс; $arctg$ – арктангенс; $arcsin$ – арксинус; $arccos$ – арккосинус; abs – модуль; $sqrt$ – квадратний корінь; ln – натуральний логарифм; lg – десятковий логарифм; $\log(b,x)$ – логарифм за основою b ; exp – експоненту; гіперболічний синус – \sinh ; ch – гіперболічний косинус; th – гіперболічний тангенс; $arcsh$ – гіперболічний арксинус; $arth$ – гіперболічний арктангенс; $random$ – генератор випадкових чисел, $0 \leq random < 1$ та інші. Можна використовувати функції у виразах. Наприклад, $tg(x+2)$; $ln(ln(1/x))$; $\cos(x)^3$.

При записі виразів враховують пріоритет дій і функцій: 1) Функції, 2) $^$, 3) $*$, $/$; 4) $+$, $-$; 5) $>$, $=$, \leq , $<$; 6) заперечення; 7) і, або.

Якщо виділити одну з математичних функцій, а потім обрати *Вставка*, то на полотні автоматично будується графік обраної функції. При побудові графіків тригонометричних функцій варто змінити налаштування полотна вздовж осі абсцис (рис. 1.81).

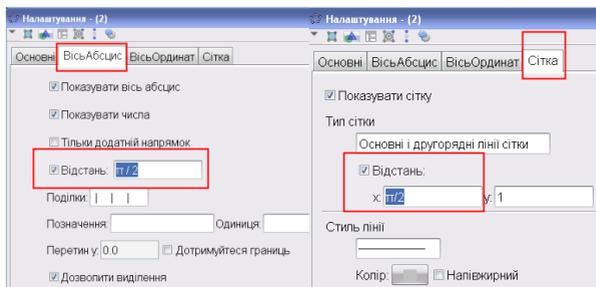


Рис. 1. 81. Скріни налаштування полотна.

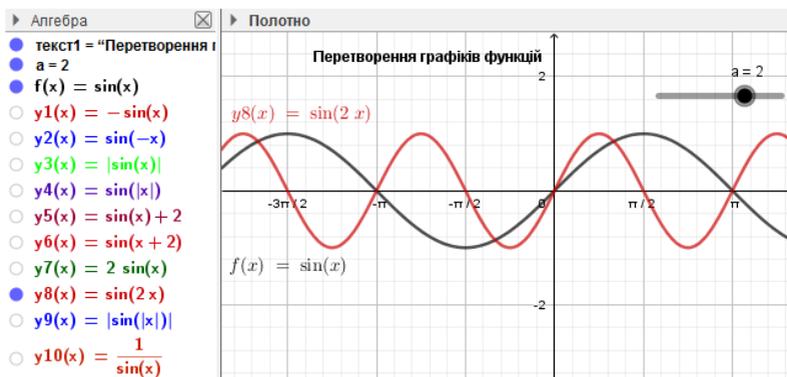


Рис. 1. 82. Побудовано графік функції $f(x) = \sin(x)$

1. *Послідовність дій для введення функції.* Щоб ввести до розгляду функцію явного виду, необхідно обрати команду *Функція (Function)*, далі *Вставити* і у *Рядку введення* з'явиться запис *Функція[]*. Далі обираємо *Функція(<Вираз>, <Початкове значення x>, <Кінцеве значення x>)* для явно заданої функції однієї змінної чи *Функція(<Вираз>, <Змінна 1>, <Початкове значення>, <Кінцеве значення>, <Змінна 2>, <Початкове значення>, <Кінцеве значення>)* для функції від двох змінних з подальшою побудовою поверхні.

Наприклад, вираз [Функція\[x^2-x-2,-2,1.7\]](#) задає квадратичну функцію $x^2 - x - 2$, яка визначена на відрізку $[-2; 1.7]$.

2. Щоб ввести до розгляду функцію неявного виду, необхідно обрати команду *НеявнаКрива (ImplicitCurve)*. Наприклад, щоб задати коло з центром у точці $(2; 3)$ і радіусом 2 як графік неявно заданої функції у рядку введення записуємо вираз [НеявнаКрива\[\(x-2\)^2+\(y-3\)^2-4\]](#). Якщо інтерфейс англomовний, то вираз [ImplicitCurve\[x^2/9+\(y-1\)^2/4-1\]](#) задає еліпс з центром у точці $(0; 1)$ та півосями 3 і 2.

3. Щоб ввести до розгляду функцію, яка задана параметрично, використовують команду *Крива(<Expression>, <Expression>, <Parameter Variable>, <Start Value>, <End Value>)* для побудови графіка плоскої фігури і команду *Крива(<Expression>, <Expression>, <Expression>, <Parameter Variable>, <Start Value>, <End Value>)* для побудови графіка просторової кривої. В англomовному інтерфейсі це команда *Curve*. В якості параметрів подають вирази, які містять параметр, далі вказують, якою змінною подано параметр, насамкінець вказують початкове та кінцеве значення параметра. Наприклад, команда [Крива\[3*cos\(t\),2*sin\(t\)+1,t,0,2*pi\]](#) задає еліпс з центром у точці $(0; 1)$ та півосями 3 і 2 (Рис.1.83).



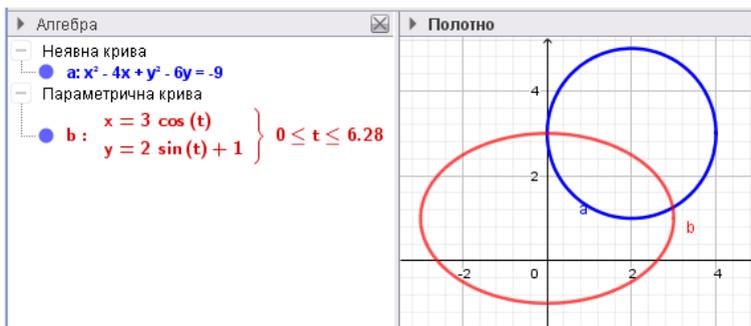


Рис. 1. 83. Графіки функцій: заданої неявно – коло, параметрично – еліпс

4. Розглянемо, як використовуючи *GeoGebra*, обчислити точки екстремумів та екстремуми функцій. Якщо у рядку введення записати команди *Екстремум*(<Поліном>) чи *Екстремум*(<Функція>, <Початкове значення x>, <Кінцеве значення x>), то після їх виконання у переліку об'єктів з'являться координати екстремумів, а на полотні побудови – їх зображення.

Щоб при цьому був побудований графік, потрібно додатково виконати команду *Функція*. У результаті виконання команди *Екстремум*[x^3-x] отримаємо пару точок: $(-0,58; 0,38)$, $(0,58; -0,38)$. Абсциси цих точок – наближені значення точок екстремумів функції, а ординати – екстремуми функції. Щоб побудувати графік, скористалися командою *Функція* (Рис. 1.84).

Щоб визначити точки перегину графіка функції, використовують команду *ТочкаПерегину*(<Поліном>). При цьому у переліку об'єктів і на полотні з'являється точка при переході через яку у графіка функції змінюється напрям опуклості. Наприклад, виконавши команду *ТочкаПерегину*[x^3-x], отримаємо точку з координатами $(0;0)$, тобто для графіка функції $y = x^3 - x$ напрям опуклості змінюється в точці $x = 0$.

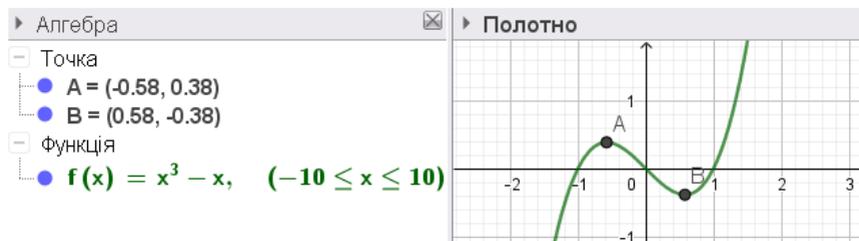


Рис. 1. 84. Представлено результати визначення екстремумів функції

5. Розглянемо застосування команди *Інтеграл*, яку можна викорис-

товувати у кількох форматах. Для обчислення первісної послуговуються командою *Інтеграл*(*<Функція>*), зазначивши у дужках, якої саме явно заданої функції стосується ця команда. Можна обчислити невизначений інтеграл і для функції, до запису формули якої входить параметр: *Інтеграл*(*<Функція>*, *<Змінна>*).

Для функції $y = (10 + t) \cdot e^{-0,08t}$ вручну первісну можна обчислити, інтегруючи частинами. Спробувавши [визначити первісну за допомогою GeoGebra](#), отримуємо вираз і можливість змінювати параметр константи (Рис. 1.85).

6. Обчислювати визначений інтеграл можна за допомогою команди *Інтеграл*(*<Функція>*, *<Початкове значення x>*, *<Кінцеве значення x>*). У зазначеній вище задачі обчислюють визначений інтеграл від функції $y = (10 + t) \cdot e^{-0,08t}$ з межами 0 і 3. Щоб здійснити обчислення за допомогою GeoGebra, спочатку вводять до розгляду функцію за командою [Функція\[\(10+x\)*exp\(-0.08*x\),-2,5\]](#), вказавши межі побудови графіка. Після цього з використанням команди *Інтеграл*[*f*, 0, 3] обчислюють визначений інтеграл. При цьому на полотні маємо побудований графік підінтегральної функції та виділену кольором криволінійну трапецію, площу якої обчислено (Рис. 1.85).

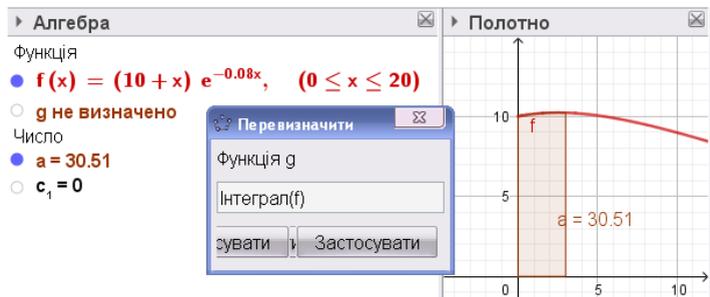


Рис. 1.85. Скріншот з [обчисленням визначеного інтеграла](#) в GeoGebra

7. Щоб обчислити площу криволінійної трапеції, яка обмежена знизу і зверху графіками двох функцій, використовують команду *ІнтегралМіж*(*<Функція>*, *<Функція>*, *<Початкове значення x>*, *<Кінцеве значення x>*).

Приклад. Нехай потрібно обчислити площу фігури, обмеженої графіками кривих $y = \sqrt{6x - 5}$, $y = (x - 2)^2$. Для цього створюють два об'єкти функція за допомогою виконання команд *Функція*[*sqrt(6*x-5),-2,5]* та *Функція*[*(x-2)^2,-2,5]*. Останні два параметри, подані у дужках, визначають межі побудов графіків на полотні. Після цього застосовують команду *Перетин*, зазначивши у дужках позначення для обох введених функцій. На заключному етапі у рядку введення записують команду

Інтеграл Між $[f, g, x(A), x(B)]$, де $x(A)$ та $x(B)$ – абсциси точок A і B перетину графіків функцій. При цьому на полотні з'являється виділення кольором фігури, площу якої потрібно було знайти, а також числове значення площі (Рис. 3.41).

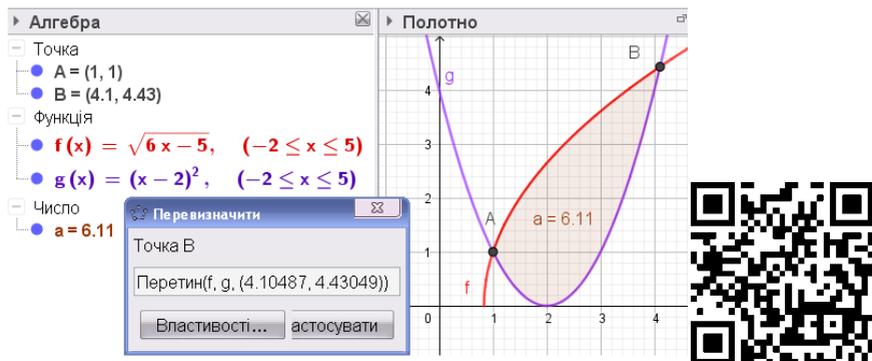


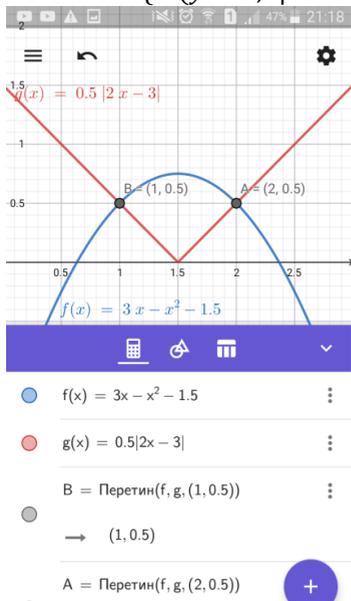
Рис. 1. 86. Скріншот з результатом виконання команди *Інтеграл* Між

8. Розглянемо приклади використання додатку для мобільного телефону «Графічний калькулятор» (більше про цей модуль Learn GeoGebra Graphing Calculator <https://www.geogebra.org/m/vd6UC685>).

Розв'язати графічно систему нелінійних рівнянь (рис.1.87):

$$\{ \begin{matrix} y = 0,5|2x - 3|; \\ @y = 3x - x^2 - 1,5. \end{matrix} \}$$

Послідовність виконання завдання:



1. Додати вираз (+ f_x) $0.5 \cdot \text{abs}(2 \cdot x - 3)$.



2. Додати вираз (+ f_x) $3 \cdot x - x^2 - 1.5$



3. Обираємо інструмент *Точка перетину*, послідовно вказуємо обидва графіки функцій чи точку перетину.



4. Щоб зазначити на графіку координати точок перетину графіків, обирають об'єкт A і B , зазначають у *Заголовку* показувати *Ім'я* та *Значення*.

Рис. 1. 87. Скріншот побудови і послідовність кроків побудови.

9. Розглянемо, як побудувати графік функції з параметрами, користуючись додатком «Графічний калькулятор» (табл. 1.12).:

а) $y = x^4 + ax^2 + b$; б) $y = a*(X-b)^2 + c$.

Табл 1.12.

<p>1. Для цього обирають піктограму <i>Інструменти</i>, далі <i>Повзунок</i>. Створити три <i>Повзунки</i>, які визначатимуть коефіцієнти а, b, с, позначаючи їх розташування і діапазон значень.</p>	
<p>2. Створюють об'єкт-функцію явного виду. Обирають піктограму для введення виразу (+ f_x), вводять вираз для першої функції $x^4 + ax^2 + b$. Аналогічно виконують для другої функції : $a*(X-b)^2 + c$.</p>	

1.6.3. Модуль 3D Геометрія GeoGebra

За допомогою 3D Геометрія GeoGebra можна імітувати зовнішні дії з геометричними тілами, необхідними для того, щоб учень міг провести з ними мисленнєві внутрішні дії і розвинути просторове мислення.

Більше про Додаток 3D Геометрія читати [ТУТ](http://www.geogebra.org/m/aWhYSpyv) (Learn GeoGebra 3D Calculator <https://www.geogebra.org/m/aWhYSpyv>).

На рис. 1. 88 подано головне вікно засобу GeoGebra Classic з побудовою піраміди на 3D-полотні.

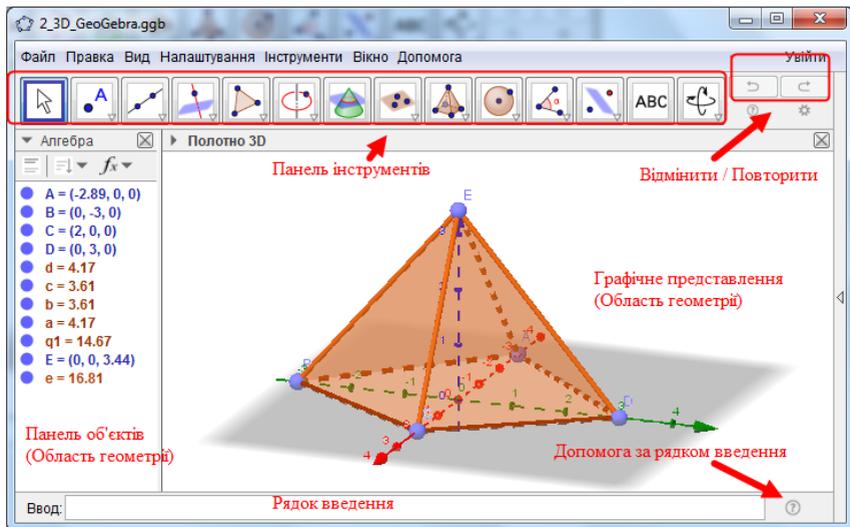


Рис. 1. 88. Головне вікно засобу GeoGebra Classic ([колекція розробок](#)).

Розглянемо кілька завдань **на побудову перерізів многогранників площиною**, що проходить через три задані точки, які не лежать на одній прямій; через пряму і точку, яка їй не належить; побудову лінійних кутів двогранних кутів та їх вимірювання; кута між прямою і площиною.

1. Побудувати переріз куба площиною, яка проходить через три точки, які лежать на ребрах куба (табл. 1.13, додаток для мобільного).

Табл. 1.13.

Кроки побудови перерізу куба площиною (3D Графіка)

№	Кроки побудови	Піктограми
1.	Обирають піктограму «Куб», вказують дві вершини у площині основи куба і будують куб.	  Куб
	Для відміни багаторазової дії інструмента обирають піктограму «Переміщення». Для відміни попередньої дії обирають піктограму «Повернення до попереднього».	  Переміщення
2.	У <i>Налаштуваннях</i> можна обрати опцію «Не показувати осі».	
3.	Обирають піктограму «Точка» і вказують три точки на різних ребрах куба.	 Точка
4.	Проводять площину через обрані три точки (після обрання піктограми «Площина через 3 точки», послідовно вказати точки.	 Площина через 3 точки
5.	Обирають піктограму «Перетин двох поверхонь», вказують на видиму лінію перетину куба і площини, будують переріз куба площиною.	 Перетин двох поверхонь
6.	Зберегти зображення (за наявності WiFi, вказати назву латинськими літерами) або поділитися кресленням, зображенням, надіславши його на Google-диск чи на вказану адресу; експортувати зображення.	 Зберегти  Експортувати Зоб  Поділитися
7.	<u>Дослідити, як змінюється многокутник</u> , отриманий у перерізі, залежно від розташування точок на ребрах куба; повернути куб.	
8.	Додатково можна визначити площу перерізу куба, попередньо знявши відмітки відображення куба і січної площини.	

2. Побудувати правильну 6-кутну призму і переріз призми площиною.

Табл. 1.14.

Кроки побудови перерізу піраміди площиною

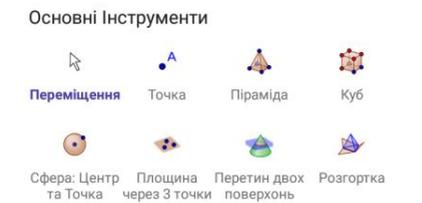
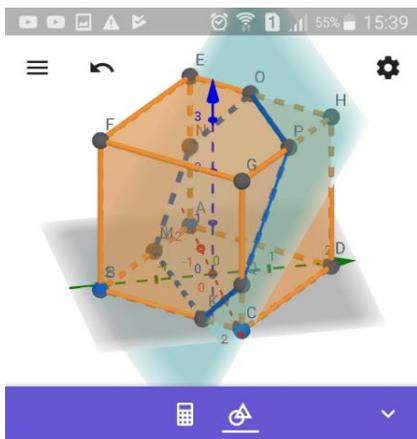
№	Що зробити	Піктограми
1.	Обирають піктограму « <i>Правильний многокутник</i> », вказують у площині основи призми дві вершини, які визначають сторону основи правильної призми і вписують число кутів многокутника в основі 6.	 Правильний Многокутник
	Для відміни багаторазової дії інструмента обирають піктограму « <i>Переміщення</i> ». Для відміни попередньої дії обирають піктограму « <i>Повернення до попереднього</i> ».	 Переміщення 
2.	Обирають піктограму « <i>Паралельна пряма</i> », вказують на одну з вершин побудованого многокутника, потім на вісь, перпендикулярну до площини основи многокутника.	 Паралельна пряма
3.	Обирають піктограму « <i>Призма</i> », вказують на побудований правильний 6-кутник, далі на довільну точку на побудованій прямій. Правильну 6-кутну призму побудовано.	 Призма
	У налаштуваннях можна обрати опцію « <i>Не показувати осі</i> ».	
4.	Обирають піктограму « <i>Точка</i> » і вказують три точки на різних ребрах призми чи в її гранях.	 Точка
5.	Проводять площину через обрані три точки (після обрання піктограми « <i>Площина через 3 точки</i> », послідовно вказати точки).	 Площина через 3 точки
6.	Обирають піктограму « <i>Перетин двох поверхонь</i> », вказують на видиму лінію перетину призми і площини, будують переріз призми площиною. Можна також послідовно будувати лінію перетину кожної грані з площиною перерізу, для цього вказують на грань і на площину перерізу.	 Перетин двох поверхонь
7.	Зберегти зображення (WiFi, вказати назву латинськими літерами), поділитися кресленням , зображенням, надіславши його на Google-диск чи на адресу; експортувати зображення.	 Зберегти  Експортувати Зобр:  Поділитися

[Дослідити, як змінюється многокутник, отриманий у перерізі](#), залежно від розташування точок на ребрах призми; повернути призму. Мо-

жна [визначити площу перерізу призми](#), попередньо знявши відмітки відображення призми і січної площини (у властивостях об'єкта зняти відмітку «не показувати»).

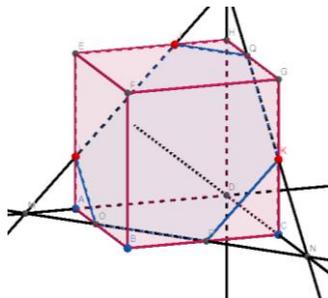
[Сидорук В. А.](#) [56] пропонує книгу наочностей з перерізами многогранників, креслення до яких виконано різними методами (рис. 1.89 в) (<https://www.geogebra.org/m/Jd4va4rs>): метод слідів, метод внутрішнього проєктування та інші. У запропонованому ним методичному посібнику подано також основні теоретичні відомості, опорні задачі.

Підсумовуючи, варто зазначити, що побудови перерізів многогранників у середовищі GeoGebra можна здійснювати двома способами: з використанням інструмента «Перетин поверхонь», а також методом слідів чи внутрішнього проєктування, здійснюючи покроково побудови.



БІЛЬШЕ

а) скріншот побудови перерізу куба з використанням мобільного додатку [3D Графіка](#);



б) [переріз куба площиною методом слідів](#);

Побудова перерізів м

Автор: Сидорук В.А.



в) [книга «Перерізи многогранників»](#)

Рис. 1. 89. Побудови перерізів многогранників площиною

Низку наочностей до задач стереометрії пропонує [Михайло Йосипович Риковський](#) [52]. Ці моделі розроблені як побудови тіл на площині з використанням властивостей паралельного проєктування. Зокрема пропонується книга / добірка наочностей до теми «[Призма](#)». Є низка

наочностей, у яких представлено комбінації стереометричних тіл: сфера і піраміда, сфера і призма, сфера і циліндр тощо. Розглянемо наочність «Вписаний у кулю конус. Правильна трикутна піраміда вписана в конус. Піраміда вписана в сферу» (рис.1.90). Уже з назви слідує, що наочності властива інтегровність і вона може бути використана при проведенні уроків стереометрії у школі чи занять з методики навчання математики за різними темами. Користуючись наочністю, користувачам радять вивчити властивості тіл, вписаних у сферу, дослідити зв'язок між радіусами кулі, конуса, висотою конуса та його твірною. Користуючись інструментом *Прапорець*, яким оснащені ці наочності, користувач має змогу повторити наступне: який конус називається вписаним у кулю; якому елементу конуса належить центр кулі; яка піраміда називається вписаною у конус; яка піраміда називається вписаною у сферу; яким буде осьвий переріз конуса; який круг кулі називається великим кругом; сформулювати властивості діаметра кулі перпендикулярного до його великого круга.

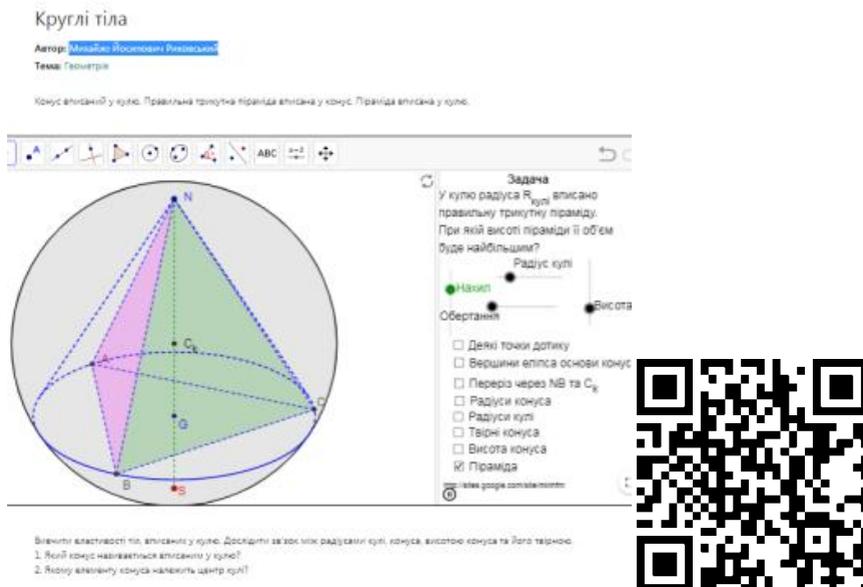


Рис. 1. 90. Вписаний у кулю конус

Про будову рисунків до задач стереометрії мова йтиме і в п. 2.1 даного посібника. Використання динамічних наочностей з можливістю проведення обчислювальних експериментів сприятиме набуттю учнями / студентами дослідницької та технологічної складових математичної компетентності.

Контрольні питання і завдання

1. Перегляньте [навчально-методичний посібник](#) «Вибрані питання елементарної математики з GeoGebra». Створіть власну колекцію наочностей та веб-розробку уроку за обраною темою за допомогою GeoGebra, додаючи до неї відповідні текстові повідомлення, відповідні побудови. Додатково до розробки можна додавати зображення, відео, питання чи pdf-файли.



2. Порівняйте особистості побудови графіків функцій, геометричних фігур за допомогою GRAN та GeoGebra.

3. У трапеції $SABCD$ $BC \parallel AD$. Відрізок SB перпендикулярний ABC і вдвічі більший середньої лінії трапеції. Як виразити відстань від середини SD до площини SBC через довжину одного з елементів трапеції? Розробіть наочності до задачі у Полотні GeoGebra [з використанням властивостей паралельного проектування](#) та на 3D-полотні. Порівняйте особливості створення наочностей та оцініть можливості їх сприйняття майбутніми користувачами.

1.7. Мультимедійна дошка у навчанні математики

1.7.1. Методика використання мультимедійної дошки.

Термін «мультимедійна дошка» подаємо за Д. В. Васильєвою [9] у широкому розумінні разом з відповідним обладнанням: комп'ютер учителя, мультимедійний проектор, сенсорна дошка, електронні олівці, програмні засоби, система дистанційного інтерактивного тестування та моніторингу знань тощо. Дослідниця обґрунтовує, що використання мультимедійної дошки у навчанні учнів 5-6 класів дозволяє інтенсифікувати всі етапи уроку, створити позитивне налаштування школярів на свідому та активну діяльність, підвищити рівень їх математичної та загальної культури, запровадити інноваційні методи і форми навчання. У медіатеці створених Д. В. Васильєвою уроків є низка розробок для вивчення геометричного матеріалу [10].

Популярними на сьогодні є такі мультимедійні дошки: Smart Board, IQBoard, Classic Solution, Promethean ActivBoard, ScreenMedia, Triumph Board, Interwrite, IPBoard, Panasonic та ін.

Поява мультимедійної дошки відповідно призвела до створення різноманітних електронних плакатів, широкого використання додатків хмарних сервісів [LearningApps](#), GeoGebra, Padlet та ін. Ці додатки орієнтовані як на використання в аудиторії, так і самостійну роботу вдома. У цифрових освітніх ресурсах типу «плакат», відомості розгортаються за-

лежно від дій користувача, який управляє відповідними «кнопками». Плакат – це засіб надання інформації, основна його функція – демонстрація матеріалу.

Інтерактивні вправи під час занять орієнтовані на розвиток мислення учасників навчального процесу, певної самостійності думок. Їх використання спонукає учасників до висловлення думки, висування гіпотез; стимулює вироблення творчого ставлення до будь-яких висновків, правил, тощо. Вправи спрямовані на самостійне осмислення матеріалу; спонукають учнів/студентів критично мислити («Чи справді це так?»); дослідити факти, проаналізувати алгоритм розв’язування, зрозуміти їх суть. Коли в завданнях наявна певна проблемна ситуація, то розв’язування їх в умовах використання інтерактивних технологій активно стимулює діяльність мислення, спрямовану на подолання протиріч.

Самоосвіту в опануванні мультимедійною дошкою, набуття учителями математики компетентностей в галузі ІКТ та удосконалення на цій основі педагогічної майстерності можна розглядати як важливу методичну умову ефективного використання нових засобів навчання.

Незважаючи на те, що останнім часом ІКТ-технології навчання знаходять все більшу підтримку серед учителів, в освітньому процесі вони часто використовуються без належного теоретичного осмислення та експериментальної перевірки. Саме тому використання мультимедійних комп’ютерних технологій актуалізує проблему розвитку педагогічних технологій у закладах освіти. Доцільним є аналіз педагогічних аспектів використання у навчанні мультимедійної дошки з метою підвищення якості освіти.

Виокремимо кілька типів занять, які стануть значно цікавішими, якщо використати мультимедійну дошку: урок-лекція, урок-провокація, урок-конференція, урок узагальнення і систематизації знань, уроки-тестування, інтегровані уроки, ділові ігри тощо.

Завдяки використанню спеціального програмного забезпечення для мультимедійної дошки, можна працювати з текстами і об’єктами, аудіо- і відеоматеріалами, Internet-ресурсами, робити записи від руки прямо на відкритих документах і зберігати відомості.

Все ширше застосовуються бібліотеки електронних наочностей, що містять матеріали для систематичного вивчення усіх навчальних курсів та рекомендовані МОН України для використання у школі. Учителю потрібно оволодіти методикою їх використання на сенсорній дошці.

Збільшується кількість електронних чи дистанційних курсів для школярів / учителів. Наприклад, нами розроблені [електронні курси з геометрії](#) на платформі для управління навчанням MOODLE (<http://kdpu.edu.ua/moodle/>). Електронні наочності, створені за допомогою системи динамічної математики, можна завантажувати за гіперпо-

силаннями з відповідних веб-сторінок, розроблених за сучасними підручниками геометрії. Перевага прив'язки при створенні колекції електронних наочностей до конкретного підручника у тому, що це дає змогу вчителю математики швидше добирати для уроку наочності, а тому використовувати їх систематично, забезпечуючи наступність у навчанні. Пропонується низка навчальних проектів до відповідних тем, кросвордів, різнорівневих тестів та дистанційних уроків. А ще розробки уроків геометрії для мультимедійної дошки створені за допомогою спеціального ПЗ ([уроки для «Геометрія, 9 клас»](#)). Учитель може використати їх в якості основи для розробки власного уроку. Швидше опанувати програмне забезпечення для мультимедійної дошки та методику розробки уроків можна через використання відеоуроків ([добірка відеоуроків](#)).

Низку наочностей можна дібрати на сайті GeoGebra (<http://www.geogebra.org/>, [навчальний посібник](#)). Доцільно зареєструватися на сайті GeoGebra, щоб мати змогу створювати та зберігати власні розробки і книги/колекції, переглядати доступні розробки і колекції інших учасників. Учитель може завантажити і власний проект. При цьому доцільно поряд з коротким описом наочності подавати запитання та завдання учням/студентам, методичні рекомендації іншим учителям щодо використання надісланих матеріалів. Наочності з сайту GeoGebra зручно демонструвати на мультимедійній дошці. Оскільки в середовищі засобу GeoGebra наявні інструменти *Перо* та *Фігура від руки*, то на цьому ж полотні на мультимедійній дошці можна виконати побудову і традиційними інструментами.

Ми висвітлювали як власний педагогічний досвід використання мультимедійної дошки у навчанні математики [32], так і досвід кращих учителів Криворіжжя. Зокрема, про переваги використання мультимедійної дошки у навчанні школярів розповідає *учитель математики та інформатики Криворізької гімназії №95 А. В. Томіліна* [34, с. 203-205].

З мультимедійною дошкою краще використовувати різні стилі навчання: візуальні, слухові або кінестетичні. Учасники навчального процесу можуть бачити великі кольорові зображення та діаграми, які можна переміщувати, змінювати. Окремі зображення, фрагменти тексту можна виділити, що дозволяє сфокусувати увагу аудиторії саме на цьому матеріалі. Це сприяє підвищенню рівня застосування наочності на занятті та його продуктивності, встановленню міжпредметних зв'язків, вихованню інтересу учнів/студентів до навчального предмета. І як наслідок, можна зробити процес навчання цікавим та насиченим. Вплив навчального матеріалу на учасників навчання багато в чому залежить від ступеня та рівня його ілюстрації. Візуальна насиченість навчального матеріалу робить його яскравим, переконливим, сприяє кращому засвоєнню та запам'ятовуванню. Тому при вивченні нової теми часто використовують пре-

зентації. Перевага презентації, відтвореної через сенсорну дошку, в тому, що можемо робити в ній позначки, додаткові записи, виділяти кольором найбільш важливі відомості. Застосовувати мультимедійну дошку можна на всіх етапах уроку: при поясненні та закріпленні нового матеріалу, повторенні та перевірці його засвоєння.

Можна використовувати кілька *режимів роботи з мультимедійною дошкою*: проекція – демонстрація (презентація Notebook або PowerPoint, відео, мультимедіа, текст-документ); графіті (електронне перо); онлайн (перегляд Web-сторінок, використання ресурсів Інтернету, електронної пошти); об'єкт (функція перетягування). Прийоми останньої функції – з'єднати, класифікувати, групувати, сортувати, заповнити пропуски, упорядкувати. Наприклад, з використанням мультимедійної дошки зручно подавати інтерактивні мультимедійні вправи, розроблені за допомогою [LearningApps](#), вправи, розроблені в середовищі динамічної математики, зокрема GRAN і GeoGebra.

При цьому вчитель має змогу використовувати як завчасно підготовлені креслення, розробка яких вимагає більше часу, так і виконувати нескладні побудови та проводити дослідження за ними у ході уроку. Вивчення нового матеріалу доцільно здійснювати дослідницьким методом з використанням індуктивних міркувань, із залученням практичного досвіду учасників навчального процесу та прикладів із довкілля. Особливу увагу варто звернути на забезпечення свідомої та активної роботи школярів на уроці, формування у них мотиваційно-творчої спрямованості, розвитку творчого інтересу, потягу до пошуку нових відомостей, пізнавальної самостійності. Важливо, щоб учні були ознайомлені з правилами роботи з мультимедійною дошкою, з можливостями застосування динамічної геометрії. Цього можна досягти, якщо використання мультимедійної дошки у роботі вчителя є систематичним, а учні активно залучаються до створення електронних наочностей.

На мультимедійній дошці зручно робити позначки і записи поверх виведених на екрані зображень, змінювати тексти документів, використовуючи віртуальну клавіатуру чи спеціальні стилуси, демонструвати веб-сайти, навчальні відеоролики, управляти комп'ютером через дошку, виконувати завдання на установку відповідностей термінів, понять та багато іншого, перевіряти виконання учнями домашніх завдань. Особливо, якщо вони були задані для виконання на домашньому комп'ютері.

Використання мультимедійної дошки сприяє запровадженню групових форм роботи. Це і спільна робота над документами, таблицями або зображеннями, захист проектів, демонстрація роботи одного учасника іншим. І такі форми роботи доцільно дедалі ширше практикувати.

Використання мультимедійної дошки розширює спектр можливостей щодо рефлексії, узагальнення знань, повторення. Розглянемо, які тут особ-

ливості. Підбиваючи підсумки заняття, учитель/викладач має змогу ще раз повернутися до усіх збережених записів, акцентувати увагу слухачів на ключових моментах заняття. Збережені записи можна передати будь-якому учасникові, який пропустив це заняття або не встиг зробити відповідні помітки у своєму зошиті. Після проведення самостійних письмових робіт можна оперативнo провести самоперевірку учасниками виконаних завдань. Є можливості для створення малюнків, схем і карт під час проведення заняття, які можна використовувати під час наступних занять, у кінці року під час повторення всього навчального курсу.

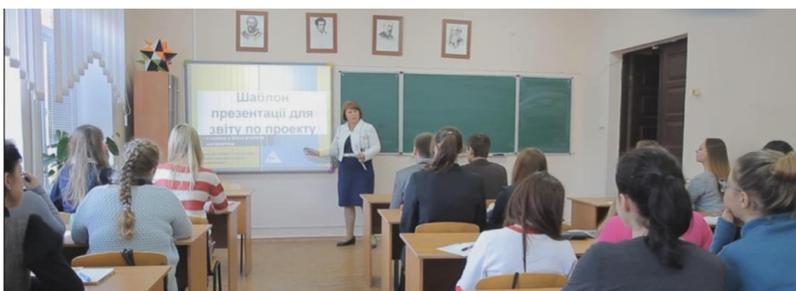
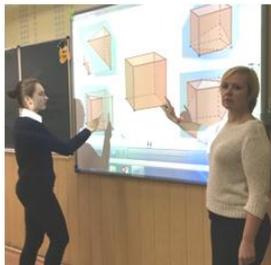
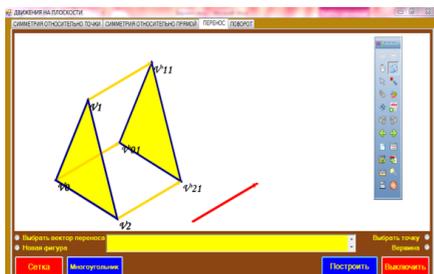


Рис. 1. 91. Фрагменти уроків з використанням мультимедійної дошки

Дослідження показують, що використання мультимедійної дошки через застосування різноманітних динамічних ресурсів сприяє покращенню мотивації учіння. Учитель А. Томіліна [34, с. 203-205] відзначає, що на практиці переконалася, що навчання тільки тоді буде для дітей радісним та цікавим, коли вони самостійно вчитимуться проектувати, конструювати, досліджувати та ін. Для підвищення інтересу до предмету іноді учитель розв'язує з учнями анаграми, ребуси, головоломки та інші наочні логічні ігри. Без позитивної мотивації учнів, без створення ситуації успіху на уроці для кожної дитини такий урок пройде повз їхню свідомість, не залишаючи сліду. Особливо важливою є проблема взаємодії зовнішньої та внутрішньої мотивації. Різні учні потребують різної мотивації, тому потрібно заохочувати добрі починання кожного, хвалити за найменші досягнення мети та прагнення до навчання. Тривожність

та страх – перешкода розвитку мотивації. У пору розвитку інформаційних технологій потрібно розмовляти з дитиною тією мовою, якою їй цікаво спілкуватися. Комп'ютер, мультимедійна дошка та інші засоби ІКТ є дійсно сучасними засобами підвищення мотивації в учнів не лише на уроках математики, але й з інших шкільних дисциплін. Використання такої дошки допомагає вчителю зробити заняття яскравими, цікавими, наочними, а тому підвищити мотивацію навчання у школярів.

Учням подобається досліджувати та займатися пошуком цікавих відомостей. Залучені до проектного навчання школярі знаходять приклади відомих наукових понять у повсякденному житті, шукають повідомлення про цікаві наукові дослідження та пояснення відомих фактів геометрії та алгебри. Наочно пояснюють міжпредметні зв'язки. Саме ці дослідження мотивують їх на подальше спрямоване профільне навчання. Адже улюблений предмет хочеться вивчати більше за всі інші.

Розглянемо популярні для уроку математики функції мультимедійної дошки. Насамперед, це вбудовані шаблони. При підготовці до уроку вчитель математики часто стикається з проблемою побудови геометричних фігур та графіків функцій на координатній площині. За допомогою мультимедійної дошки ці питання легко можна вирішити за допомогою вбудованих шаблонів. Наприклад, для демонстрації побудови графіка функції $y = f(x) + t$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$, досить побудувати тільки один шаблон параболи чи гіперболи, щоб потім відпрацювати рух графіка функції в різних напрямках. Час економиться за рахунок того, що не треба кожного разу будувати новий графік. Досить тільки його перемістити. Кожна така побудова швидка та наочна.

Крім цього, у колекції засобів мультимедійної дошки є зображення математичних інструментів, що дозволяє демонструвати роботу з ними. Наприклад, вимірювання і побудову кутів за допомогою транспортира. А ще є можливість використання «інтерактивних» додатків для демонстрації переміщення фігур, побудови графіків функцій тощо. Це, насамперед, допомога вчителю у наочності при вивченні різних тем. На різних етапах уроку їх можна застосовувати для пояснення, аналізу та перевірки знань.

Досягненню дидактичної мети уроків сприятиме цілеспрямоване планування використання мультимедійної дошки відповідно до теми, мети і типу уроку; комплексне та системне її застосування з перевагою у процесі навчання проблемно-пошукових та дослідницьких методів, різноманітних форм організації діяльності учнів.

Є потреба в удосконаленні методичної підготовки вчителів математики, у підвищенні у них ІКТ-компетентностей. Учитель має досконало володіти сучасними засобами навчання учнів, добирати раціональні форми організації їх діяльності та методи навчання. Завдяки застосуванню

КТ на уроках математики, вчитель має можливість скоротити час на вивчення матеріалу за рахунок наочності і швидкості виконання роботи, перевірити знання учнів в інтерактивному режимі, що підвищує ефективність навчання, допомагає реалізувати весь потенціал особистості - пізнавальний, творчий, комунікативний і естетичний, сприяє розвитку інтелекту, інформаційної культури учнів, робить уроки яскравими та цікавими.

Застосування в навчальному процесі сучасних засобів навчання створює передумови поліпшення результатів навчання, підвищення якості освіти.

1.7.2. Розробка уроків з використанням програмного забезпечення InterWrite Workspace.

Для дошки InterWrite виробники рекомендують застосовувати програмне забезпечення InterWrite Workspace [6]. Для вивчення [курсу «Інформаційно-комунікаційні технології навчання»](#) [36] нами розроблено уроки з використанням ПЗ [InterWrite Workspace](#) (QR рис.1.92). Як підсумок вивчення програмного забезпечення відбувається демонстрування студентами розробок уроків для використання мультимедійної дошки в навчанні математики ([група МІ-16](#), [група МІ-15](#)). З Workspace учитель може вибрати у мережі із сотень уроків з різних предметів або створити власний ([файл GWB-формату](#), [файл pdf-формату](#), [відео](#); рис. 1.94).

Використання інтерактивних дошок Interwrite істотним чином полегшує роботу учителів / викладачів при проведенні занять, значно скорочує час на підготовку до наступних за такою ж темою, а також сприяє концентрації уваги і покращує сприйняття відомостей аудиторією, викликає додатковий інтерес до представленого матеріалу і перешкоджає розсіюванню уваги.



Рис. 1.92. Вікно Interwrite Workspace®

Інтерактивна дошка DualBoard поставляється з програмним забезпеченням Interwrite Workspase®, з двома електромагнітними маркерами, інтерфейсними кабелями і зарядним пристроєм. Українізоване і адаптоване програмне забезпечення є інтуїтивно простим і зручним засобом для використання в навчальному процесі з можливістю запису всього, що відбувається на дошці і збереження у вигляді окремого файлу. Викладач може створювати і зберігати власні курси лекцій, уроків або презентацій з використанням вбудованих елементів галереї або власних. Електромагнітний маркер є заміною комп'ютерної миші і може функціонувати як віртуальний маркер при використанні Workspase. Перед початком роботи потрібно *здійснити калібрування* інтерактивної дошки DualBoard, щоб зручно було працювати, писати у запланованому місці.

Workspase надає користувачам наступні можливості:

- запуск додатків і доступ в інтернет;
- робити записи всіх проведених маніпуляцій, зберігаючи у вигляді окремого файлу (конспекту або відеозапису);
- готувати і проводити мультимедіа презентації;
- ділити інтерактивну дошку DualBoard на окремі ділянки, щоб працювати у чиям разі або на заданій ділянці;
- використання для побудови на дошці типових інструментів: маркер, заливка, автоформи, текст, лінійка, транспорир, косинець, циркуль, фотографії, відеозапис, шторка, колір вікна (прожектор) та ін.;
- вносити зміни в документи MS Office і зберігати їх у форматі офісних додатків;
- підтримує створення написів і коментарів поверх додатків, запущених на комп'ютері.

Обравши на панелі інструментів (рис.1.93) в режимі контекстного меню *Налаштування*, користувач може за власним бажанням її [налаштувати](#).

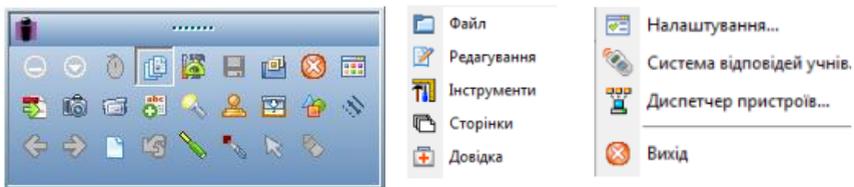


Рис. 1. 93. Панель інструментів.

Доцільно для навчання математики додати до панелі інструментів курсор, перо (ручка), фломастер, гумку, геометричні об'єкти (форми), пряму лінію, текст, відміну дії, очистити (видалити), закрити панель (вихід), створити нову сторінку, листання сторінок уроку (вліво-вправо), сортувальник сторінок (перегляд всіх сторінок), галерея/роботи

з файлами, набір інструментів і різних режимів роботи, збереження файлу, завіса (шторка), фотографування частин дошки, штамп, вставити рисунок, проектор (підсвічування).

Наявність режиму кількох користувачів дозволяє одночасно працювати біля дошки двом учням, що економить час, наприклад, при перевірці домашнього завдання, актуалізації опорних знань та умінь. Розширюються можливості для здійснення контролю, само- та взаємоконтролю. Наприклад, доцільно використовувати записи і розташування малюнків у різних шарах. При поясненні нового матеріалу, демонстрації розв'язаних прикладів можна послуговуватися інструментами «завіса», «підсвічення». Це дозволяє поетапно відкривати створений слайд.

Режим *Колір вікна (Прожектор)* використовується для відображення невеликої області екрана, до якої варто привернути увагу і приховує частини, що залишилися. Коли на екрані знаходиться одночасно декілька об'єктів, можна виділити той об'єкт, про який в даний момент йде мова і приховати останні. Наприклад, на рис. 1.94 привернути увагу до [практичної ситуації](#), потім до математичної моделі, а тоді досліджують створену модель математичними методами. Отримавши розв'язання, його інтерпретують, порівнюючи з практичною ситуацією.

Інструмент *Zavisa* (поетапне пред'явлення відомостей) використовується для приховування певної частини екрану. *Zavisa* є прямокутною областю, за якою не видно вмісту сторінки. Можна викликати учня розв'язати завдання на дошці, а завісою закрити відповідь або наступні завдання. Або при поясненні нової теми за завісою можна приховати відомості, які ще не відомі учням, і потім розкривати її у міру проходження матеріалу. Використовуючи можливості роботи з шарами, можна в іншому шарі приховувати підказки, а пізніше їх висвітлювати. Підказки можна також приховувати і за малюнками, визначаючи їх порядок (верхній, середній, нижній).

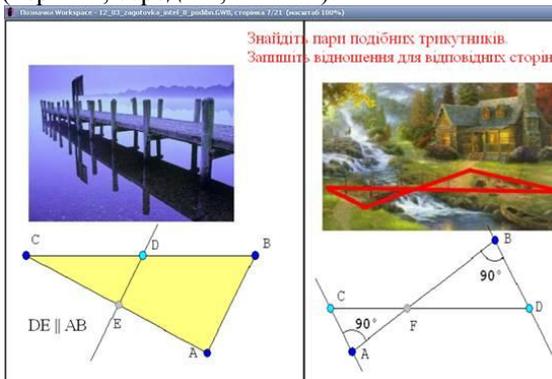


Рис. 1. 94. [Слайд розробки](#), режим роботи двох користувачів.



Режим *Запис і відтворення* зручно використовувати, щоб записати власні уроки і лекції за допомогою інструменту *IW Recorder*. Записуються всі дії з сенсорною дошкою і звук. Записаний файл потім може бути проглянутий як відеоролик, а також розданий учасникам для повторення і підготовки до занять. За умовчанням, файли зберігаються в папку *Мої документи/InterWrite Workspace/Записи користувача*. Доцільно також робити відеозаписи уроків з методичними рекомендаціями, щоб у подальшому інші учителі краще могли використовувати запропоновані для обміну розробки.

Під час проведення лабораторних робіт з методики навчання математики для майбутніх учителів чи тренінгу для працюючих радимо з метою опанування програмним забезпеченням для мультимедійної дошки створити розробку на 7-8 сторінок. До неї можна додати такі слайди

- з відомостями щодо теми уроку, підручника, типу уроку, автора розробника, з доцільним малюнком;
- сторінку для перевірки домашнього завдання;
- сторінку для актуалізації опорних знань і умінь;
- матеріали для подання нових відомостей;
- розв'язання однієї-двох задач;
- вправа на закріплення матеріалу;
- домашнє завдання.

На завершення роботи потрібно експортувати розробку в pdf-документ, надіслати на форум для обговорення і оцінювання. Для детальнішого самостійного опрацювання пропонуються відповідні [ресурси електронного навчального курсу](#) [36].

Розглянемо основні прийоми створення конспекту в режимі *Interwrite* (табл. 1.15).

Таблиця 1.15.

Найпростіші кроки створення уроку в режимі *Interwrite*

Зміст кроку	Піктограма
1. Режим чистої сторінки. Обирають на панелі інструментів піктограму «Створення сторінки».	
2. За допомогою інструменту «Введіть текст» на чистому листі вводять текст.	
3. За допомогою інструменту «Відображення галереї малюнків» відкривають папку із зображеннями до уроку. Вставити зображення. Можна також знайти у мережі доцільний малюнок, скопіювати його до буферу обміну і додати на сторінку.	  Вставити медіа.

4. Додати при необхідності плоскі фігури (коло/круг, прямокутник, квадрат та ін., прями лінії чи стрілки.	
5. Проглянути і сортувати створені слайди можна за допомогою інструменту «Порядок сторінок».	
6. При виході, створений конспект зберегти. Для цього в меню Interwrite/файл обирають команду «Зберегти». Програма автоматично зберігає конспект в папку «Зображення». Збережений файл матиме розширення GWB.	
7. <i>Режим шаблони.</i> Додати раніше збережений шаблон чи малюнок на сторінку. При демонстрації завчасно приготовлених шаблонів та малюнків і доданих на сторінку на уроці можна використовувати інструменти «Перо», «Маркер», «Прожектор» та ін. При цьому писати можна в різних шарах.	
8. Зберегти записи у файл формату pdf для поширення.	

У запропонованій читачу [розробці](#) мова йде про застосування знань про подібні трикутники до вимірювання відстаней на місцевості. Надано низку доцільних наочностей для реалізації STEM-проєкту: визначення відстані до недоступної точки, висоти об'єкта тощо. Наприклад, подано малюнок за романом Жюль Верна «Острів» про те, як визначали висоту скелі (рис. 1.95), як давньогрецький філософ і математик Фалес за довжиною тіні визначив висоту піраміди, як діти за сонячним «зайчиком», що відбивається у калюжі, можуть визначити висоту дерева та ін. Детальніше про STEM-навчання мова буде йти у розділі 6.

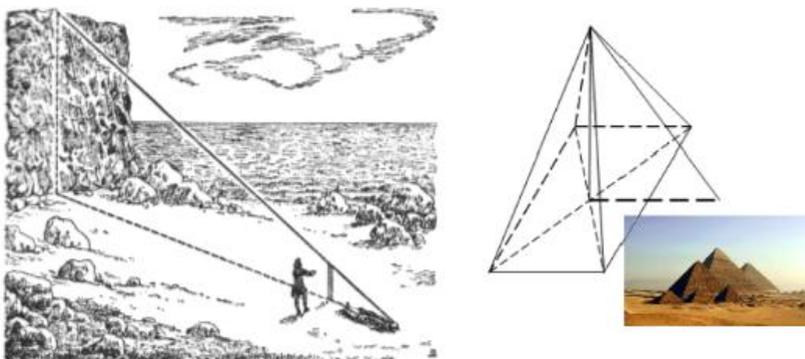


Рис. 1. 95. Схематичні малюнки для визначення висоти скелі і пірамід.

З використанням даного ПЗ доцільно записувати скрінкасти уроків за допомогою інструмента Record and Playback. Надавши доступ до записаних відео, учні / студенти у будь-який час можуть переглянути матеріал і більш ґрунтовно засвоїти тему.

Скрінкасти з аналізами розроблених уроків використовуємо [для надання своєчасної допомоги студентам](#) у процесі розробки та удосконалення уроків. З цією метою також широко використовуємо інструмент платформи Moodle – «форум», де майбутні учителі математики мають змогу не лише подавати пропозиції щодо розробок колег, але й здійснювати взаємооцінювання. Основні проблеми у студентів виникали з плануванням уроку, структуруванням матеріалу, оскільки, вивчаючи нове ПЗ, вони більшої ваги надають умінню використовувати ті чи інші інструменти засобу. Необхідно майбутнього учителя заохочувати до імпровізації, гнучкості, пошуку нових підходів до навчання, стимулювати професійне зростання. Важливо, щоб учитель математики міг самостійно добирати необхідні наочності, створювати з них власні колекції, видозмінювати і пристосовувати їх до цілей і типу уроку (табл.1.16).

Таблиця 1.16.

Приклади розробок уроків / занять для мультимедійної дошки.

№	Тема уроку	Файл GWB	Скрінкаст
1.	Правильні багатокутники (9 кл.).	файл1	
2.	Квадратична функція, властивості, графік (9 кл.).	файл2	
3.	Розв'язування текстових задач за допомогою рівнянь (8 кл.).	файл3	скрінкаст3
4.	Розв'язування текстових задач за допомогою систем рівнянь (9 кл.).	файл4	скрінкаст4 , pdf
5.	Розв'язування нерівностей (8 кл.).	файл5	скрінкаст5
6.	Звичайні дроби. Розв'язування задач (5 кл.)	файл6	
7.	Розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей (підготовка до ЗНО)	файл7	

Отже, застосування мультимедійної дошки у процесі навчання математики відкриває додаткові можливості підвищення інтересу до предмета. Проте сам факт використання комп'ютера на уроці ще не дає можливості легко опанувати математику.

Важливо об'єднувати зусилля педагогів для розробки якісних електронних наочностей і створення банку електронних цифрових ресурсів, методичних матеріалів, наприклад, через сайти провідних педагогічних навчальних закладів, сучасні платформи для вчителя «На урок» та ін.

1.7.3. «Інтерактивні» мультимедійні вправи *servisy LearningApps*.

Маючи у своєму розпорядженні мультимедійну дошку та доступ до мережі, учитель математики може успішно використовувати у навчанні онлайн-сервіс Web 2.0 для створення так званих інтерактивних вправ LearningApps.org. Тому що значна частина вправ пов'язана з переміщенням на дошці об'єктів, використанням клавіатури.

LearningApps.org є сервісом для підтримки процесів навчання та викладання за допомогою невеликих інтерактивних модулів. Ці модулі можуть використовуватись безпосередньо як навчальні ресурси або для самостійної роботи. Метою роботи є створення загальнодоступної бібліотеки незалежних блоків, придатних для повторного використання та змін. Блоки (вони називаються Вправами) не включені в жодні конкретні сценарії чи програми, тому вони не розглядаються як цілісні уроки чи завдання, натомість їх можна використати у будь-якому доречному методичному сценарії [8].

Перед початком роботи користувачу потрібно зареєструватися на сайті, що дає можливість учителю не лише створювати та редагувати вправи, але й створювати папки з колекціями наочностей, створювати класи, реєструвати учнів, планувати перегляд ними певних вправ, вести статистичний облік виконання ними завдань.

Вправи, розроблені у середовищі LearningApps, доступні для виконання також на мобільних телефонах, оскільки відкриваються у браузері (рис.1.96, позначки 1,2). Користувач має змогу виконувати хід, а у разі помилки - відстрочку правильної відповіді чи підказку. На завершення виконання завдання користувач отримує схвальну відповідь. Щоб користувач був оцінений також дистанційно, потрібно щоб він був приєднаним до віртуального класу LearningApps, який створює учитель і розсилає запрошення для своїх учнів. При цьому учень може не лише розв'язувати вправи, запропоновані учителем, але й створювати власні. Якщо вправа, створена учнем, заслуговує на увагу, учитель може запропонувати її для виконання класу. У той же час, учень не може передати цю вправу для публічного доступу, доки він приєднаний до класу.

Другий підхід для дистанційного оцінювання користувача – через вбудовування SCORM-пакетів (рис. 1.96, 4) кожної з вправ в електронний навчальний курс, створений, наприклад, на платформі MOODLE.

Враховуючи те, що в LearningApps для кожної вправи автоматично генерується QR-код (рис. 1.96, помітка 6), який висвітлюється на екрані, то учні / студенти можуть миттєво отримати доступ до вправи і виконати її. У випадку відсутності доступу до мережі учитель може попередньо вправу в архів і розглянути її на уроці (рис. 1.96, помітка 5).

Крім того, є можливість додавати ці вправи у блог і сайт, оскільки при створенні вправи автоматично генерується код, який додається до

блогу з використанням гаджета HTML / JavaScript, про що мова буде йти в п. 6.3 даного посібника (рис. 1.96, помітка 3).

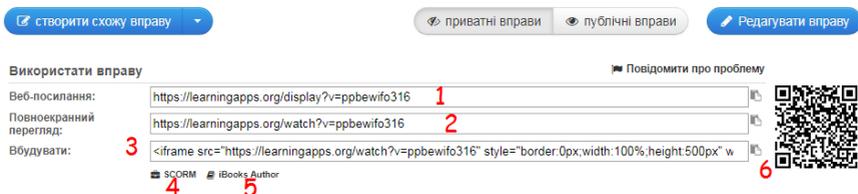


Рис. 1. 96. Коди, посилання для поширення вправи.

Конструктор LearningApps призначений для розробки, зберігання завдань з різних навчальних дисциплін.

Щоб створити власну вправу, можна модернізувати розглянуту вправу з публічним доступом (режим редагування і збереження) або створити цілком нову вправу, обравши [інструмент «Створити вправу»](#) (відеоурок <https://youtu.be/8dct92RWMv0>). На вибір користувачу пропонуються для розробки завдання наступних типів:

- Вибір (виділити слова; вікторина (1 відповідь); вікторина (множинні відповіді); знайти слова; перший мільйон);
- Розподіл (відповідності сітки; гра "Парочки"; знайти на карті; знайти пару; класифікація; пазл; таблиця відповідностей; фрагменти зображення);
- Послідовність (розставити за порядком; числа пряма);
- Заповнення (вгадай слово; вікторина з друкуванням; заповнити пропуски; заповнити таблицю; кросворд);
- Онлайн-ігри (впорядкування; вікторина для кількох гравців; де це?; порахувати; гонки).

Інструменти (інтелектуальна карта; аудіо- та відео-контент; блокнот; голосування; дошка оголошень; календар; колекція вправ; нотатки; чат).



Рис. 1. 97. Окремі типи вправ для розробки.

Наведемо **приклади вправ**, рекомендованих для перегляду.

1. Ребуси . 2. Кросворд. 3. Пазл (основна властивість дробу).
4. Гра (впорядкування одиниць довжин). 5. Знайти слова (тема "Геометричні перетворення на площині"). 6. Залежність розміщення графіка квадратичної функції від дискримінанта

Знайти поняття про геометричні перетворення

2014-06-16

Завдання:
Знайдіть математичні терміни до теми "Геометричні перетворення"

OK

- _____ вид руху, вказують центр і кут
- _____ вид руху
- _____ при перетворенні подібності зберігаються між відповідними елементами ...
- _____ пряму при певному виді симетрії називають ...
- _____ вид симетрії, вказують пряму
- _____ вид руху, вказують вектор

Вправа у режимі перегляду

Фонове зображення

Можете обрати фонове зображення для кросворду

Пошук зображення
 Розмір: 174 x 114
 редагувати зображення

Слова

Запишіть слова для пошуку тут:

Слово:

Підказка:

Слово:

Підказка:

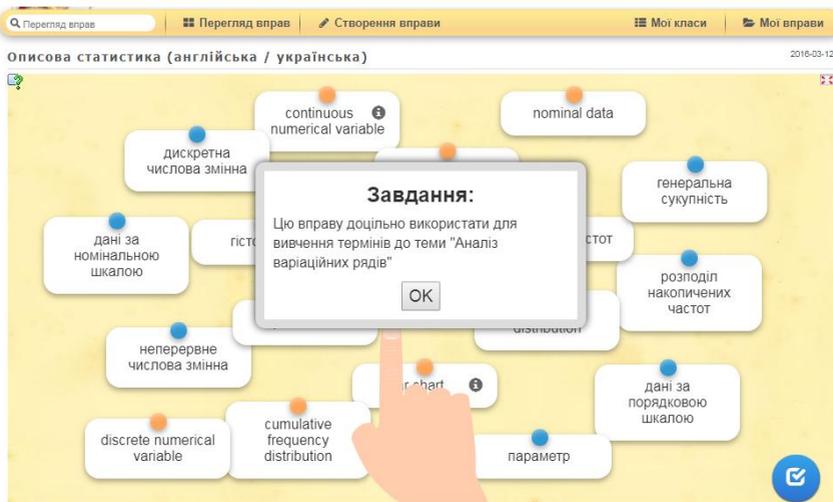
Слово:

Підказка:

Слово:

Підказка:

Рис. 1. 98. Вправа на відшукування термінів в режимах перегляду та редагування.



Вправа на відшукування пар у режимі перегляду

Назва вправи

Мова пк

Описова статистика (англійська / українська)

Опис завдання

Напишіть опис завдання цієї вправи, який показуватиметься при її запуску. Можна залишити поле порожнім.

Цю вправу доцільно використати для вивчення термінів до теми "Аналіз варіаційних рядів"

Пари

Вкажіть два об'єкти, які відповідають одне одному - це може бути поєднання текстів, зображень, аудіо- та відео.

Пара 1: Підказка:

Пара 1: Підказка:

Пара 2: Підказка:

Пара 2: Підказка:

Рис. 1. 99. Вправа на відшукування пар (терміни математичної статистики української та англійською мовами) в режимі редагування.

+ додати ще один елемент

Зайві елементи

Можна додати до 3 зайвих елементів, які не належать до рішення

Елемент: Текст Зображення Озвучений текст Аудіо Відео

+ додати ще один елемент

У такому вигляді бачимо подану вище вправу в режимі *Редагування*.

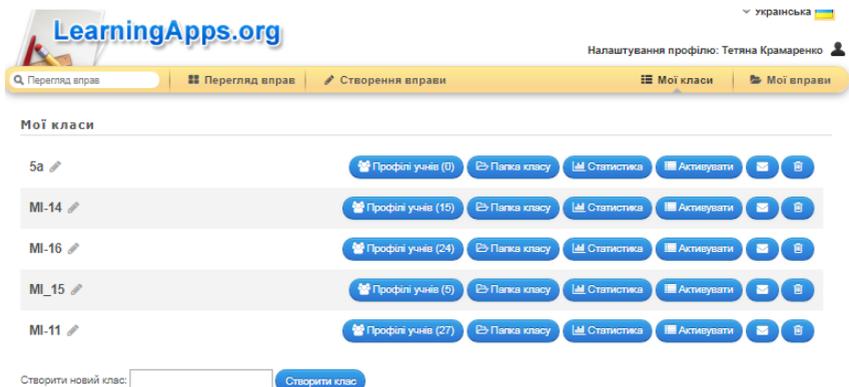


Рис. 1. 100. У вкладці «Мої класи» подано папки профілів, папку наочностей, статистику.

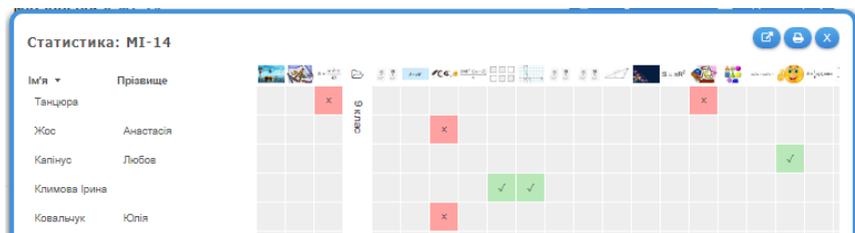


Рис. 1. 101. Представлено фрагмент звіту виконання вправ «Статистика»

Контрольні питання і завдання

1. Охарактеризувати основні типи вправ LearningApps. Як можна використати ці вправи з метою розвитку математичної компетентності учасників навчального процесу.
2. Розробіть кілька вправ на використання LearningApps.

1.8. Електронний методичний посібник «Евристико-дидактичні конструкції»

«Евристико-дидактичні конструкції» – комплекс, що включає в себе цілий спектр програм, які доцільно використовувати у процесі навчання математики в середній школі. Розроблено засіб в Донецькому національному університеті на початку 2000-х років. До складу комплексу входять акцентовані програми, програми з запізнюючою корекцією, зчеплені, програми «завдання-метод», «завдання-софізм», програми автоматизованого рецензування розв'язаних задач та ін. Підходи і принципи, закладені в розробку засобу, надзвичайно прогресивні і у подальшому матимуть розвиток у навчанні математики.

Під поняттям «*евристико-дидактичні конструкції*» розуміють систему логічно зв'язаних навчальних проблем (евристичних завдань або навчальних комп'ютерних програм), які в сукупності з евристичними питаннями, вказівками і мінімумом навчальних відомостей дозволяють учням переважно без допомоги ззовні відкрити нове знання про об'єкт дослідження, спосіб або засіб евристичної діяльності. ЕДК – це програми, які поступово наближають учня до пошуку розв'язання і знаходження відповіді у процесі евристичного діалогу (з програмним забезпеченням), коли акцентується увага на теоретичних фактах, деяких методах розв'язування задачі, пропонується «розміте наведення» на пошук розв'язання і дається можливість самостійно знайти «власний шлях» до відкриття, розв'язання і перевірки результатів. Метою застосування ЕДК є формування прийомів евристичної діяльності у процесі навчання математики. Прикладами конструкцій можуть служити ЕДК – Limit до теми «Границя послідовності, границя функції», евристичний тренажер до теми «Функції», для розв'язування задач на оптимізацію, навчальні програми до розділу «Нерівності» та інші.

О.І. Скафою [96] досліджувалися питання розвитку в учнів якостей творчої особистості з використанням загальних і спеціальних евристик. Для цього розроблено і досліджено такі напрями розвитку евристичної діяльності, як використання у навчанні загальних евристик (аналіз, аналогія, індукція тощо) і спеціальних евристик (метод перебору, принцип крайнього, інваріанти та ін.).

Значна увага розробниками ЕДК приділяється навчанню доведенням. Одним із сучасних методологічних підходів до розробки методики навчання доведенню є єдність логіки і евристики. Як зазначає О.І. Скафа, навчати доведенню означає навчати аналізу доведення, його відтворенню, самостійному відкриттю факту, пошуку і конструюванню доведення, а також спростуванню запропонованих доведень [96]. Формування такої концепції припускає широке використання евристик.

Залежно від характеру матеріалу, що вивчається, наявності навчального часу, рівня розвитку учнів та інших факторів, учитель може обирати один з

таких методичних варіантів ознайомлення учнів з математичним твердженням: 1) учні готуються до самостійного формулювання, «відкриття» теореми; 2) учні готуються до свідомого сприйняття, до розуміння нового математичного твердження, формулювання якого повідомляється для них потім; 3) вчитель сам формулює нову теорему без якої-небудь попередньої підготовки, а потім зосереджує зусилля учнів на її засвоєнні і закріпленні.

При здійсненні перших двох способів використовуються різні евристичні прийоми загального і спеціального характеру, в класі створюється проблемна ситуація, яка сприяє самостійному «відкриттю» учнями нових знань. Це підвищує інтерес до знань, сприяє розвитку творчих здібностей, але вимагає певної затрати навчального часу.

Суть програми *завдання-метод* полягає в тому, що до завдання або набору з декількох завдань пропонується декілька методів або способів розв'язання. Учні необхідно вибрати правильний і найбільш раціональний до кожного із запропонованих завдань. Наприклад, процес доведення твердження про середню лінію трапеції розділено на 11 кроків. Після висвітлення кожного кроку учень повинен знайти обґрунтування правильності такого кроку, обравши для цього один із запропонованих варіантів обґрунтування (рис. 1.96). Наприклад, на 6-му кроці доведення для учня програмним забезпеченням буде згенеровано напис « $\Delta PBC = \Delta PED$ ». У відповідь учнем має бути обрано із запропонованих варіантів наступний – «за другою ознакою рівності трикутників». На 7-му кроці буде зроблено висновок, що « $PB=PE, BC=ED$ ». Учень у відповідь має обрати «за умовою, враховуючи крок доведення б».

У разі неправильної відповіді корегуються дії учня, і програма вводить його на правильне обґрунтування кожного кроку доведення. Вправи такого виду є евристичними, оскільки навчають учнів міркувати аргументовано, свідомо застосовувати вивчені раніше аксіоми і теореми.

Текст програми *задача-софізм* є ланцюжком виконаних дій за розв'язанням завдання, в якому на одному етапі допущена помилка. Щоб знайти помилку в міркуванні, учень повинен твердження проаналізувати, провести аналогію з запропонованим розв'язанням і власним, порівнювати відповідь, встановити правильність вибору невідомого тощо. Після роботи з програмою учень отримує програму корекції з обговоренням і аналізом виконання кожної логічної операції у розв'язанні завдання. Розгляд завдань-софізмів розвиває в учня спостережливість, вдумливе і критичне ставлення до матеріалу, що вивчається. Наприклад, для розглянутої властивості середньої лінії трапеції наведено три варіанти доведення, у яких допущено помилки. Ці помилки учень може виявити у результаті ретельного аналізу. Учень після вибору етапу, що містить помилку, отримує корекцію з обговоренням і аналізом допущеної помилки у розв'язанні задачі.

В *акцентованих* навчальних програмах при розв'язуванні евристичної задачі вже на початкових кроках, після деякого загального евристи-

чного правила-орієнтиру, обговорюється стратегія її розв'язання.

Средняя линия трапеции

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Дано: ABCD – трапеция,
 $Q \in AB, AQ = QB,$
 $AD \parallel BC,$
 $P \in CD, CP = PD$.

Доказать: $QP \parallel AD, QP \parallel BC;$
 $QP = \frac{1}{2}(AD + BC).$

Шаги доказательства:

1. Проведем через точку В и точку Р прямую a .
2. $a \cap AD = E$.
3. $CP = DP$.
4. $\angle BPC = \angle EPD$.
5. $\angle PCB = \angle PDE$.
6. $\triangle PBC = \triangle PED$.
7. $PB = PE, BC = ED$.

ОБОСНОВАНИЯ

- По свойству вертикальных углов
- Т.к. через любые 2 точки можно провести прямую и только одну
- По условию теоремы
- По свойству внутренних накрест лежащих углов при параллельных прямых и секуш

Рис. 1.102. Доведення теореми про властивість середньої лінії трапеції

Програми актуалізації знань, зокрема «передпрограми», побудовані у вигляді тестів з корекцією, в яких обговорюються правильні відповіді, а також пред'являється повторний тест. Повторно сформульовані питання тесту є переформулюванням, узагальненням, аналізом або синтезом, модифікацією питань первинного тесту. Пропонуються такі завдання для поглиблення установки на сприйняття і розуміння подальшого складного навчального матеріалу. Часто такі тестові завдання складаються з набору підготовчих елементарних завдань, пропонує перед вирішенням системи евристичних завдань. При цьому обговорюються питання граничних випадків, введення допоміжних невідомих, переходу до рівносильного завдання, введення додаткових елементів, застосування прийомів моделювання тощо.

У програмах із запізнюючою корекцією проходження задачі здійснюється за індивідуальною траєкторією, а в кінці шляху здійснюється корекція всієї системи помилок. Зчеплені програми дозволяють реалізувати евристику – варіювання розв'язанням задачі. Учні пропонуються кілька способів, з яких треба вибрати найбільш раціональний.

Контрольні питання і завдання

1. Охарактеризувати основні типи евристико-дидактичних конструкцій.
2. Для обраної задачі на доведення розробити схему пошуку доведення, спланувати послідовність кроків для створення ЕДК.

Висновки до першого розділу

1. ІКТН, включаючи комп'ютер як засіб управління навчально-пізнавальною діяльністю, є сукупністю комп'ютерно-орієнтованих методів, засобів та організаційних форм навчання. Комп'ютерно-орієнтованою називають таку методичну систему навчання, яка забезпечує цілеспрямований процес здобування знань, набуття умінь і навичок, засвоєння способів пізнавальної діяльності суб'єктом навчання і розвиток його творчих здібностей на основі широкого використання ІКТ.

2. Основними цілями КОМСН є розвиток особистості учасника навчального процесу; інтенсифікація всіх рівнів навчально-виховного процесу за рахунок застосування ІКТН, оптимізація пошуку необхідних користувачу відомостей, підвищення якості освіти; виконання соціального замовлення суспільства на розвитку особистості інформаційного суспільства.

3. Вплив ІКТ на зміст навчання проявляється в розширенні та поглибленні теоретичних основ курсу математики завдяки більшій їх доступності для тих, хто навчається, в поглибленні міжпредметних зв'язків і використанні завдань прикладного характеру. Можна ширше застосовувати частково-пошуковий та дослідницький методи навчання.

4. Одним з найважливіших принципів, що дозволяють здійснювати розвиваюче навчання за допомогою ІКТН, є профільна та рівнева диференціація. Індивідуалізація навчання на основі НІТ може бути забезпечена при рефлексивному управлінні навчальною діяльністю. Використання комп'ютерно-орієнтованих систем навчання має забезпечувати відповідність інформаційної моделі конкретному учаснику навчального процесу. Для цього необхідно передбачити визначення стійких і ситуативних індивідуальних особливостей всіх учасників.

5. Найважливіші дидактичні принципи, яким повинні задовольняти ПЗНП: науковість, доступність, наочність, відповідність рівню підготовки учнів та їх віковим особливостям. Процес засвоєння матеріалу повинен відбуватися у відповідності з методами пізнання – науковим експериментом, через здійснення аналізу, синтезу, порівняння, аналогій, індукції та дедукції, абстрагування і конкретизації, систематизації і узагальнення. Принцип наочності полягає не стільки в можливості пасивного споглядання учасниками навчального процесу моделей, як в активній перетворюючій діяльності, у процесі якої вони самостійно будують моделі.

6. Педагогічний потенціал електронного посібника навчального призначення посилюється завдяки таким властивостям як гіпертекстовість, мультимедійність, інтегрованість, конструктивність, керованість.

7. Якість ЕЗНП загально-дидактичного і практичного спрямування оцінюють за техніко-ергономічними показниками і навчально-методичними вимогами (науковість змісту посібника і його структура, доступність змісту, навчально-методичний апарат).

РОЗДІЛ 2. ВИБРАНІ ПИТАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕТОДИКА ЇХ ОПРАЦЮВАННЯ НА ОСНОВІ ІКТН

2.1. Про виконання рисунків до стереометричних задач

Просторове мислення як різновид образного мислення і важлива грань інтелектуального розвитку особистості відіграє значну роль в оволодінні знаннями основ наук. Оперування просторовими образами - це і вміння за плоским зображенням відтворити просторові форми і характеристики реального технічного об'єкта, і вміння уявити його в динаміці, у взаємозв'язках з іншими об'єктами. І. С. Якиманською відповідно до трьох типів оперування образами виділено типи розвитку просторового мислення (низький, середній, високий) [108, 121]. Цей показник позитивно корелюється з такими показниками, як широта оперування просторовим образом, повнота образу, його динамічність, узагальненість, зворотність.

Розвиток здібностей до просторової уяви в учасників навчального процесу тісно пов'язаний з вивченням стереометрії. За висловленням О.Д. Александрова, геометрія у своїй сутності є «поєднанням живої уяви і строгої логіки, в якому вони взаємно організують і спрямовують одна одну». *Основні завдання навчання геометрії – розвивати у людини три якості: просторову уяву, практичне розуміння та логічне мислення*¹.

Як показує практика, значна частина старшокласників надзвичайно складно сприймає перехід «від площини» до «простору», не вміє читати рисунок, плоске креслення не сприймає як об'ємне. Вони відчують труднощі при визначенні співвідношень між окремими елементами зображення, мисленно не можуть змінювати їх розташування, розділяти фігуру на частини чи, навпаки, «склеювати» її з наявних частин. З подібними проблемами іноді стикаються і майбутні учителі математики під час вивчення відповідного матеріалу в курсі елементарної математики.

Розвиває просторову уяву і просторове мислення особистості виконання таких типів вправ [103], [108]: 1) пошук зображення серед кількох даних для пред'явленого об'єкта; 2) знаходження об'єкта, що відповідає даному зображенню, з деякого набору об'єктів; 3) завершення зображення відомої фігури за її фрагментом; 4) ідентифікація різних зображень одного і того ж просторового об'єкта; 5) впізнавання фігури за її проєкціями; 6) визначення взаємного розташування кількох фігур за їх зображенням; 7) оцінювання форми і розмірів фігури; 8) побудова проєкцій заданої фігури; 9) побудова зображення об'єкта за його проєкціями; 10) зображення об'єкта за його словесним описом; 11) виготовлення моделі за її кресленням, за пред'явленим об'єктом, за описом; 12) впізнавання і зображення об'єкта, отриманого (мисленною) зміною

¹ Александров А. Д. О геометрии / Александров А. Д. // Математика в школе. – 1980. – №3. – С. 56-57.

(за допомогою повороту, симетрії, паралельного перенесення) положення заданого об'єкта; 13) зображення перерізу заданих фігур (в тому числі після мисленого їх переміщення); 14) зображення частин фігури після її мисленого розтину.

Вважаємо, що вправи 1), 2), 6) відповідають низькому типу розвитку мислення, 3), 4), 5), 7), 8), 9), 10), 11) – середньому, 12), 13), 14) – високому.

У навчанні доцільно розподілити учасників навчального процесу на три підгрупи відповідно до типу оперування просторовими образами. Це допоможе підходити до розвитку їх просторової уяви диференційовано, враховуючи індивідуальні особливості, поступово ускладнюючи завдання, доповнюючи навчальний матеріал наочністю, фіксуючи увагу на практичному застосуванні знань. Дії з моделями, створеними за допомогою ПЗ, займають проміжну ланку між зовнішніми діями з геометричними тілами та мисленими внутрішніми діями. Мисленні дії повинні передувати зовнішнім, щоб задіяти та розвинути уяву людини.

1. Дослідження за допомогою *GeoGebra* (полотно 3D) (завантажити за QR-кодом [рис.2.1](#) розроблену у *GeoGebra* книгу «[Моделі до стереометричних задач](#)») і *GRAN-3D* можна проводити як з базовими об'єктами, так і з самостійно сконструйованими. Доцільно запропонувати учасникам навчального процесу підготувати комп'ютерні моделі до задач. Наприклад, моделі пірамід, у яких вершина проектується в одну з вершин основи ([рис. 1.58](#) GRAN-2D, [рис. 2.1](#) GeoGebra) чи на одну з сторін ([рис. 1.61](#)); піраміди, в основі яких лежать прямокутники, ромби, трапеції чи інші многокутники. За допомогою ПЗ потрібно здійснювати практичну роботу з просторовими об'єктами: змінювати їх положення (обертати навколо довільного центра на певний кут, паралельно переносити), деформувати, розділяти на частини; демонструвати лінійні кути двограних кутів, кут між прямою і площиною, спільний перпендикуляр мимобіжних прямих тощо. Кращому засвоєнню матеріалу сприяє наявність режиму кольорового зображення просторових фігур.

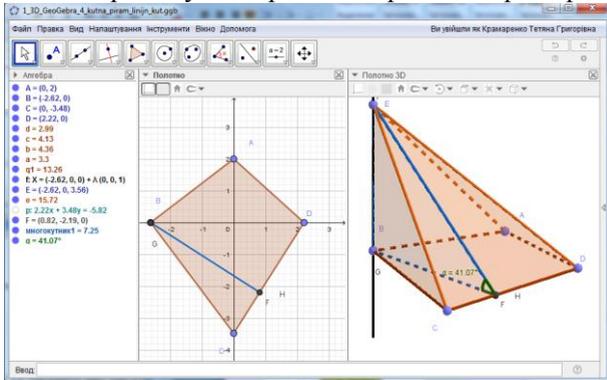


Рис.2. 1. Піраміда, дві грані якої перпендикулярні до площини основи. [GeoGebra-наочність](#), [розробка уроку](#), [колекція моделей GeoGebra](#).

За допомогою *GeoGebra* (полотно 3D) можна здійснювати побудову у полотні основи піраміди (Oxy) і при цьому побудови можуть синхронно відображатися на 3D-полотні (рис. 2.1; 2.8; 2.9; 2.10). Варто привернути увагу до зручності у побудові за допомогою засобу лінійних кутів двогранних кутів при основі (згідно означення можна провести площину, перпендикулярну до ребра; тоді кут між утвореними прямими в результаті перетину цієї площини з гранями двогранного кута визначить його лінійний кут) (рис. 2.1).

2. Розв'язуючи [задачі на обчислення об'ємів тіл обертання, доцільно застосувати GRAN1](#) (рис. 1.37). Побудови тіл обертання за допомогою ПЗ в ході розв'язування задачі сприяють неформальному засвоєнню знань.

З метою підвищення ефективності сприйняття та засвоєння стереометричного матеріалу, для подолання труднощів при перекодуванні умовно-графічного зображення просторового тіла та створення адекватного просторового образу, бажано доповнити теоретичний матеріал мультимедійними демонстраційними моделями, створеними засобами ІКТ, заохотити спроби школярів / студентів самостійно підготувати такі моделі до заняття. Адже набування математичної компетентності залежить не від пам'яті, а від тієї діяльності, в яку включається особа, від системи розумових операцій, які вона здійснює при засвоєнні знань.

3. За допомогою ПЗ *GRAN-2D* та *GeoGebra*, зокрема і мобільного додатку *Геометрія* зручно виконувати малюнки до задач на розташування прямих і площин у просторі. Стереометричний малюнок дає на площині просторові образи в спотвореному вигляді. І тоді на допомогу школяреві / студенту приходить логіка. Процес побудови за допомогою ПЗ відповідає побудові вручну, оскільки враховуються властивості паралельного проектування. Перевагою комп'ютерних моделей є динамічність. Фігуру можна розташувати в найкращому ракурсі, легко змінивши розміщення опорних точок, покроково відтворити хід побудови, розмістити підказки до умови завдання чи до ходу розв'язування. Розглянемо приклади таких завдань.

1) Навколо правильної чотирикутної піраміди описано кулю радіуса R . Двогранний кут при бічному ребрі піраміди дорівнює β . Визначити об'єм піраміди (рис. 2.2).

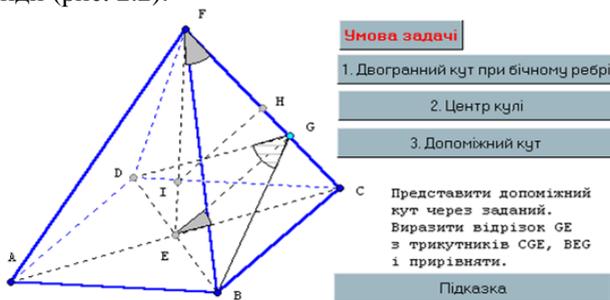


Рис. 2.2. Копія вікна GRAN-2D з відкритими підказками до умови задачі ([завантажити наочність, створену за допомогою Gran-2D](#))

2) Перпендикуляри, опущені з деякої точки простору на всі сторони правильного трикутника, мають однакову довжину. Інша точка простору віддалена від цих перпендикулярів і від площини трикутника на 10 см. Відстань між даними точками дорівнює 26 см. Обчислити площу трикутника (рис. 2.3 Gran-2D), (рис. 2.5, GeoGebra, 3D Геометрія).

3) Основи рівнобічної трапеції рівні 35 і 24 см, а її площа – 540 см².

Точка простору віддалена від усіх вершин трапеції на $2\sqrt{374}$ см. Інша точка простору рівновіддалена від даної точки і від усіх вершин трапеції. Визначити відстань від другої точки до площини трапеції (рис. 2.4).

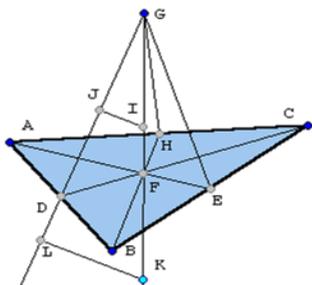


Рис.2. 3. (Gran-2D)

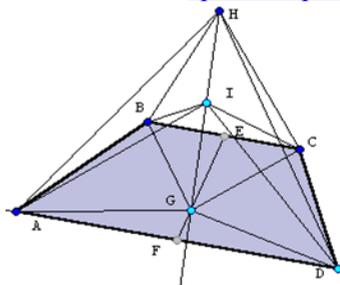


Рис.2. 4.

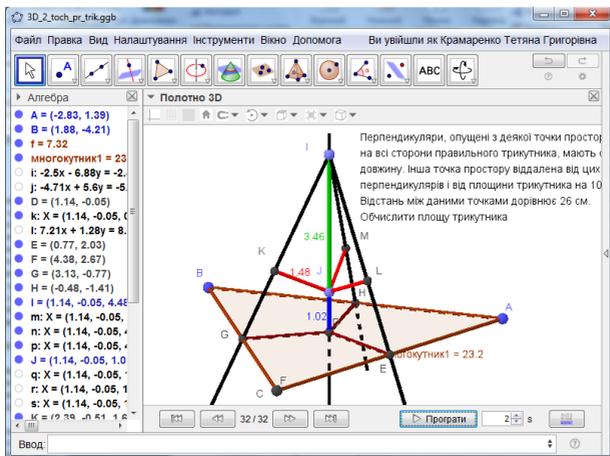


Рис.2. 5. Наочність до задачі, створена з використанням GeoGebra.

При розробці наочності за допомогою системи динамічної математики до першої задачі (рис. 2.2), доцільно, щоб на екрані спочатку з'являлося зображення правильної чотирикутної піраміди. На слайді розміщені підказки до умови задачі, які школяр / студент може послідовно відкривати, якщо натискуватиме відповідні кнопки типу *Сховати \ показати об'єкт*. Для цієї задачі важливо зобразити лінійний кут DGB двогранного кута при бічному ребрі FC та центр описаної кулі I . Оскільки

ки відрізок GE перпендикулярний до бічного ребра, то серединний перпендикуляр цього ж ребра йому паралельний. Наступна підказка стосується введення допоміжного кута. Якщо виразити відрізок GE з трикутників CGE , BEG і прирівняти, то зможемо представити допоміжний кут GEC через заданий: $\cos \alpha = ctg 0.5\beta$.

Розв'язуючи другу задачу, необхідно розглянути два випадки. Точки, про які йдеться в умові задачі, можуть бути розташовані з одного боку від площини правильного трикутника та по різні боки від площини (рис. 2.3).

4. У значній кількості задач елементарної математики, пов'язаних з побудовою на зображеннях, вимагається виконувати побудову перерізів заданих просторових фігур. У посібниках [77], [78], [97] виділяють метод слідів, внутрішнього проектування (спосіб відповідності) і комбінований метод.

Динамічні креслення перерізів многогранників доцільно також використовувати під час перших уроків стереометрії в 10-му класі, коли школярі опановують аксіоматику, вивчають властивості паралельного проектування. [На Google-диску нами пропонуються динамічні моделі](#), створені у ході впровадження навчального проекту «Перерізи многогранників» з використанням засобів PowerPoint, GRAN-2D, GRAN-3D та DG.

На сьогодні однією з найпотужніших розробок GeoGebraBook з побудови перерізів многогранників є добірка наочностей [Сидорука В. А.](#) [56]. Автор пропонує книгу наочностей з перерізами многогранників, креслення до яких виконано різними методами (рис. 1.89 в) (<https://www.geogebra.org/m/Jd4va4rs>): метод слідів, метод внутрішнього проектування та інші. У запропонованому ним методичному посібнику подано також основні теоретичні відомості, опорні задачі.

Навчання побудовам перерізів рекомендується розпочати зі складання алгоритмів до базисної задачі [97, 466]. *Задано три точки A, B, C та їх проекції. Знайти на площині ABC точку D , проекція якої D_1 відома при заданому напрямку проектування.* У добірці є чотири динамічні креслення для базисної задачі, подано алгоритми побудови. Будуючи перерізи призми площиною, найчастіше користуються паралельним проектуванням, а для піраміди – центральним проектуванням. Для розвитку просторової уяви учасників навчального процесу більш раціональним є знаходження сліду площини перерізу в площині будь-якої грані, відмінної від площини нижньої основи многогранника [78, 17].

[Динамічні креслення, створені з використанням GRAN-2D, GeoGebra чи DG](#), оснащують кнопками типу *сховати* \ *показати об'єкт*. За допомогою цих кнопок (*прапорців*) тимчасово приховують виконані кроки побудови, щоб учень / студент мав змогу здійснювати самоперевірку правильності виконання завдання. Після налаштування режиму перегляду, можна покроково відтворити хід побудови перерізу, модифікувати многогранники, зробити моделі «керованими» – вмикати \ вимикати кнопки побудови перерізу, записи ходу побудови, звуковий супровід. Порядок виконання побудови

учнем/ студентом може бути відмінним від закладеного у файлі, однак самі перерізи повинні співпасти. Щоб дослідити, якого виду многокутник можемо отримати в якості перерізу, доцільно змінювати положення заданих точок, рухаючи їх вздовж ребер чи в певних площинах.

На рис. 2.6 подано побудову перерізу шестикутної призми площиною методом слідів. Площина перерізу проходить через три точки, розміщені в площинах бічних граней призми. Хід побудови виписано на слайді зліва.

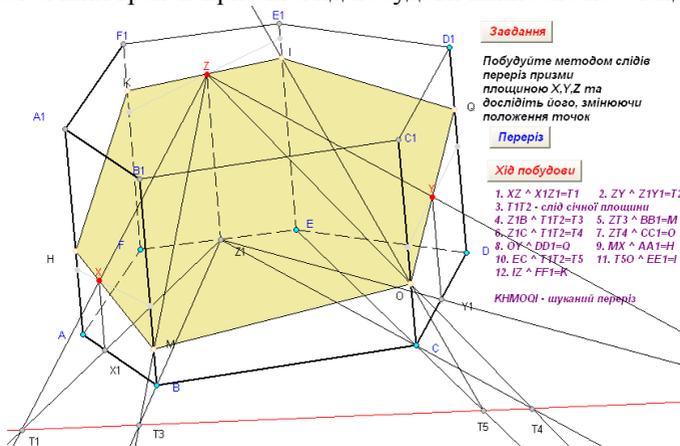


Рис.2. 6. Побудову перерізу призми виконано за допомогою DG

Використання методу відповідності продемонструємо на прикладі задачі на побудову перерізу шестикутної піраміди площиною, що проходить через точки на ребрах A, E, C (рис. 2.10).

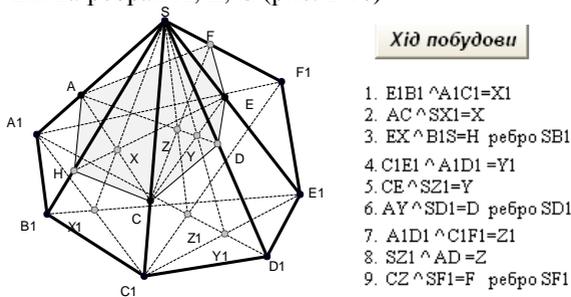


Рис. 2.10. Побудова перерізу піраміди площиною (файл DG).

Знаходять точку перетину січної площини з ребром SB_1 : $E_1B_1 \cap A_1C_1 = X_1$, $AC \cap SX_1 = X$, $EX \cap B_1S = H$. Виконуючи побудови $C_1E_1 \cap A_1D_1 = Y_1$, $CE \cap SY_1 = Y$, $AY \cap SD_1 = D$, встановлюють точку на ребрі SD_1 . Для перетину ребра SF_1 виконують дії: $A_1D_1 \cap C_1F_1 = Z_1$, $SZ_1 \cap AD = Z$, $CZ \cap SF_1 = F$. Тоді $AHCDEF$ – шуканий переріз. Для акцентування уваги на ключових побудовах, в режимі *Налаштування відтворення побудови* знімають відмітки з допоміжних.

5. Зважаючи на те, що тема «Комбінації геометричних тіл» є складною для опанування учнями та окремими студентами, про що свідчить і досвід підготовки магістрів, пропонуємо розглянути кілька наочностей, пов'язаних з побудовою комбінацій кулі з многогранниками чи круглими тілами. Заслужують на увагу наочності [Василя Гречуха](#), представлені ним у GeoGebra-книзі «[Тіла обертання](#)».

Як уже зазначалося в п. 1.6.3, низку наочностей до задач стереометрії пропонує [М. Й. Риковський](#) [52]. Ці моделі розроблені як побудови тіл на площині з використанням властивостей паралельного проектування. Зокрема пропонуються книги GeoGebra / добірки наочностей до теми «[Призма](#)», «[Піраміда](#)», «[Круглі тіла](#)». Є низка наочностей, у яких представлено комбінації стереометричних тіл: сфера і піраміда, сфера і призма, сфера і циліндр тощо. Ці наочності представлено без використання 3D-полотна, з широким використанням інструментів для зворотного зв'язку.

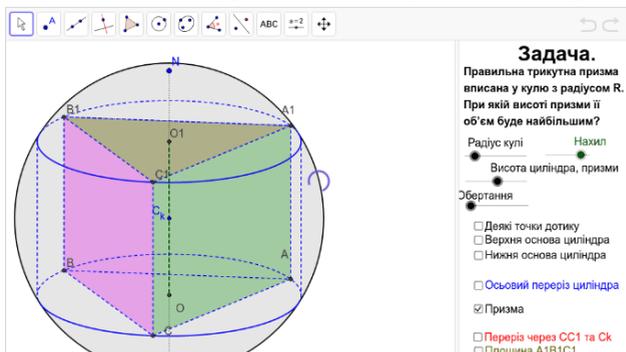


Рис. 2. 7. Призма, вписана в кулю ([розробка GeoGebra](#)).

Розглянемо [кілька прикладів створення наочностей з комбінаціями геометричних тіл за допомогою Модуля 3D Геометрія GeoGebra](#). Звісно, краще подати побудови у класичній версії програми, однак всі пропоновані кроки побудови наразі доступні і для мобільних телефонів.

1) **Навколо піраміди, вершина якої проєктується в одну із вершин основи, описано сферу.** Потрібно [створити наочність з використанням 3D-полотна класичної GeoGebra](#) до цієї комбінації геометричних тіл.

Спочатку встановлюємо, що для того, щоб навколо піраміди можна було описати сферу, необхідно, щоб навколо основи піраміди можна було описати коло. Тому на полотні будуємо коло (*Коло*) і в нього вписуємо довільний многокутник (*Многокутник*), який слугуватиме основою піраміди. При цьому на полотні 3D програмне забезпечення виконує синхронно ті побудови, які виконані нами на першому полотні.

Далі через одну з вершин основи проводимо пряму, перпендикулярну до площини основи (*Пряма, перпендикулярна до площини*), і на ній обираємо довільну точку (*Точка на об'єкті*) – вершину піраміди. Будуємо піраміду (*Многогранник Піраміда*). Далі потрібно визначити, де буде розта-

шований центр описаної сфери. З цією метою проводимо через центр описаного навколо основи кола пряму, перпендикулярну до площини основи (*Пряма, перпендикулярна до площини*). Ця пряма є геометричним місцем точок, рівновіддалених від вершин основи.

Щоб визначити положення центра описаної навколо піраміди сфери, будуємо ГМТ, які рівновіддалені від кінців одного з бічних ребер. Це буде площина, яка проходить через середину бічного ребра (*Середня точка*), перпендикулярно до нього (*Площина, перпендикулярна до прямої*). Далі потрібно знайти точку перетину (*Точка перетину прямої і площини*) побудованих перпендикуляра і площини. Це й буде центр описаної куля.

На завершення виконують [побудову описаної сфери](#) (*Сфера за центром і радіусом*). Для того, щоб учні краще засвоїли алгоритм побудови описаної навколо піраміди сфери, проstavляємо відмітку налаштування полотно – показувати кроки побудови (рис. 2.8). У цьому разі учень зможе за бажанням переглянути хід побудови кілька разів і засвоїти алгоритм.

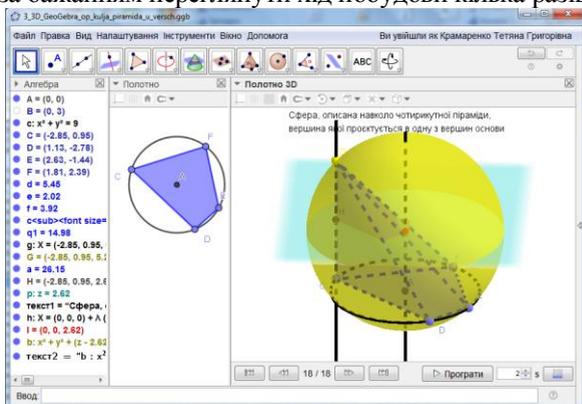


Рис.2. 8. Сфера описана навколо піраміди, вершина якої проєктується в одну із точок основи ([наочність 3D-полотна класичної GeoGebra](#)).

2) Аналогічно до розглянутої вище побудови, створюємо наочність для **сфери, описаної навколо правильної чотирикутної піраміди**. Розпочинаємо [побудову з основи піраміди](#) (розробка GeoGebra). Для цього використовують інструмент *Правильний многокутник*, вказують на 3D полотні дві точки – вершини ребра основи і зазначають, що правильний многокутник має 4 вершини. Далі потрібно побудувати діагоналі квадрата (*Відрізок*) і визначити його центр (*Точка перетину*). Потім через центр кола проводять *пряму, перпендикулярну площині* квадрата. На цій прямій, яка є ГМТ, рівновіддалених від вершин основи, беремо довільну точку (*Точка на об'єкті*) і будуємо многогранник (*Піраміда*).

Щоб визначити положення центра описаної навколо піраміди сфери, будуємо ГМТ, які рівновіддалені від кінців одного з бічних ребер. Це буде площина, яка проходить через середину бічного ребра (*Середня точка*),

перпендикулярно до нього (*Площина, перпендикулярна до прямої*). Далі потрібно знайти точку перетину (*Точка перетину прямої і площини*) побудованих перпендикуляра і площини. Це й буде центр описаної кулі.

На завершення виконують побудову описаної сфери (*Сфера за центром і радіусом*) (рис.2.9). Для того, щоб учасники краще засвоїли алгоритм побудови описаної навколо піраміди сфери, проставляємо відмітку налаштування полотна – показувати кроки побудови.

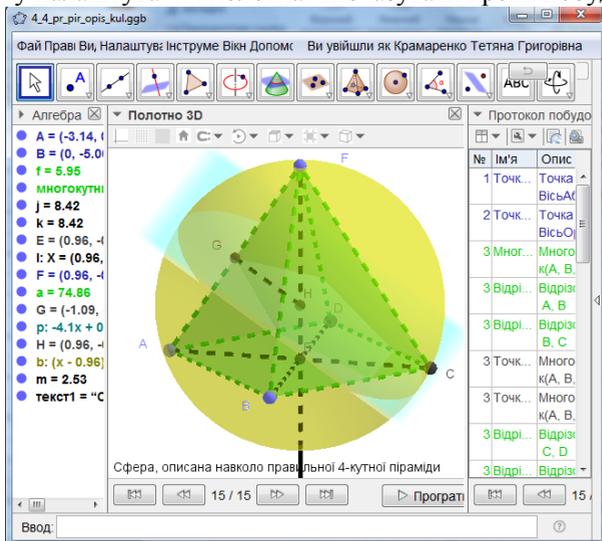


Рис.2. 9. Сфера, описана навколо правильної чотирикутної піраміди.

3) Розглянемо, як користуючись **3D Геометрія**, **вписати кулю у правильну чотирикутну піраміду**. Для побудови основи піраміди використовують інструмент *Правильний многокутник*, вказують на 3D-полотні дві точки – вершини ребра основи і зазначають, що правильний многокутник має 4 вершини. Далі потрібно побудувати діагоналі квадрата (інструмент *Відрізок*) і визначити центр (*Точка перетину*). Потім через центр квадрата, який при цьому є й центром вписаного у квадрат кола, проводять *пряму, перпендикулярну до площини* квадрата. На цій прямій, беремо довільну точку (*Точка на об'єкті*) і будуємо многогранник (*Піраміда*). Перпендикулярна до площини квадрата пряма є GMT, рівновіддалених від сторін основи правильної піраміди.

Щоб визначити положення центра вписаної у піраміду кулі, будуємо геометричне місце точок, які рівновіддалені від граней двогранного кута при основі піраміди. Оскільки серед інструментів GeoGebra нема побудови бісекторної площини, тому потрібно побудувати лінійний кут двогранного кута при основі, а потім бісектрису цього кута. Будують площину, яка проходить через вершину піраміди, перпендикулярно до ребра основи (*Площина через точку, перпендикулярна до прямої; Точка перетину*).

Можна замість площини провести пряму з вершини піраміди перпендикулярно до ребра основи (*Пряма, перпендикулярна до прямої*). Далі потрібно знайти точку перетину побудованих площини / перпендикуляра з ребром основи (*Точка перетину прямої і площини / Точка перетину двох прямих*). Тоді будують бісектрису отриманого лінійного кута.

Точка його перетину з перпендикуляром до основи піраміди, проведеним з вершини піраміди, визначить центр вписаної кулі (*Точка перетину*). На завершення виконують побудову вписаної кулі (*Сфера за центром і радіусом*) (рис.2.10), вказавши послідовно центр кулі і точку перетину діагоналей квадрата.

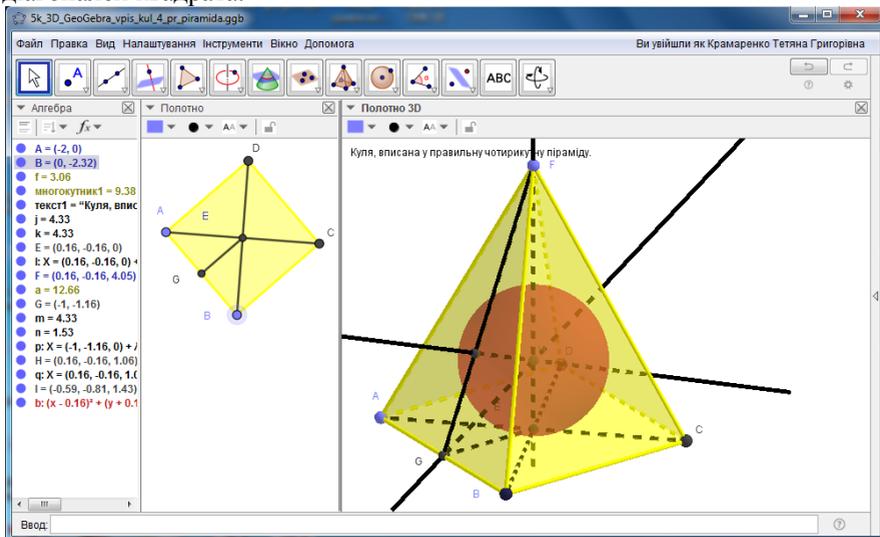


Рис. 2. 10. Куля, вписана у піраміду (розробка GeoGebra).

Контрольні питання і завдання

1. Переглянути і проаналізувати добірки наочностей запропоновані у підрозділах 1.6, 2.1. Зокрема добірку [«Наочності до задач стереометрії»](#) за QR-кодом.

2. Запропонувати спосіб побудови за допомогою системи динамічної математики точки в площині грані многогранника, що не лежить на ребрі цієї грані.

3. Побудувати в середовищі динамічної математики методом слідів та методом внутрішнього проектування переріз 5-кутної піраміди чи призми площиною, що проходить через три точки, взяті на ребрах многогранника чи в його гранях. Для створеного креслення додати підказки, використовуючи відповідні інструменти.



2.2. Математичні відкриття за допомогою динамічної геометрії

У навчанні геометрії з використанням системи динамічної математики доцільно використовувати дослідницький метод навчання, який за словами С.А. Ракова, є «живою душею математики» і на практиці найчастіше використовується через розглядання «відкритих» задач («відкритих» проблем). Тобто, задач з неповними даними, з невизначеними елементами умови, з відкритістю твердження [50, 58]. Розв'язування завдання зазначеного типу розпочинається з «довизначення», яке можна здійснити різними способами залежно від наявного досвіду чи особистісних уподобань учасників навчального процесу (учнів та вчителя). Розглядання саме таких задач у навчанні математики наближає навчальний процес до творчого математичного процесу. Добірку різнорівневих завдань на довизначення задач планіметрії пропонує Н.А. Тарасенкова [100].

Надзвичайно важливими для розвитку творчого потенціалу школяра / студента є *дидактичні ігри з комп'ютерною підтримкою* [62]. Наведено приклади завдань планіметрії, виконуючи дослідження до яких за допомогою ПЗ, можна висувати гіпотези, формулювати твердження, експериментально їх перевіряти та шукати способи обґрунтування. Подання нового матеріалу через аналіз результатів графічного експерименту зручно поєднувати з методом доцільних задач.

Під «відкриттям» розуміємо результат пошукової навчальної діяльності, яку здійснює учасник навчального процесу власними зусиллями при мінімальному керівництві з боку наставника. У ході виконання комп'ютерних експериментів слід розвивати в особистості такі пізнавальні якості як уміння аналізувати, синтезувати, узагальнювати, створювати сприятливі умови для розвитку таких креативних якостей, як здібність до формулювання гіпотез, конструювання версій, здатність до дослідницької діяльності. Модель навчання через відкриття передбачає формулювання проблеми, з'ясування плану діяльності, створення динамічних креслень, проведення обчислювального експерименту, формулювання гіпотези. Збираючи та оцінюючи отримані результати, учні / студенти перевіряють гіпотезу, роблять висновок, намагаються знайти теоретичне обґрунтування. У пошуку доведення доцільно використовувати такий прийом розумової діяльності як аналіз через синтез. Особливу увагу варто звертати на інтерпретацію отриманих відомостей, спонукати учасників до здійснення узагальнення результатів експерименту.

До завдань дидактичної гри на уроках геометрії можна включити завдання на формування та доведення гіпотези про властивість медіан і висот рівнобедреного трикутника, проведених до бічних сторін, про суму кутів трикутника, градусну міру зовнішнього кута трикутника; про властивість кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною; про властивість точок, розташованих на серединному перпендикулярі відрізка, бісектрисі кута. Доцільно на основі результату експерименту сформулювати гіпотезу про розташування центра вписаного кола

та описаного навколо трикутника кола.

Учитель математики має оволодіти методикою навчання через дослідження засобами динамічної математики. Щоб у подальшому пропонувати учням експериментально відкрити залежність між сторонами прямокутного трикутника – теорему Піфагора, властивості чотирикутників, теореми про середню лінію трикутника і про середню лінію трапеції, потрібно оволодіти технікою створення електронних наочностей і повідомити необхідність саме так навчати математики сучасних учнів. Доцільно також перевірити з використанням ПЗ теорему про пропорційні відрізки. Дослідники при цьому повинні з'ясувати, що паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від сторін кута пропорційні відрізки.

У ході обчислювального експерименту учасники можуть сформулювати і в подальшому довести гіпотези про градусну міру кута, вписаного в коло; ([розробка GRAN-2D](#)) про градусну міру вписаного кута і гострого кута між хордою кола і дотичною до кола в кінці хорди; про суму протилежних кутів вписаного чотирикутника; про суму протилежних сторін описаного чотирикутника. У ході експерименту доцільно сформулювати та довести гіпотези про метричні співвідношення в колі: добуток відрізків хорди, для кожної з хорд, проведених у колі через одну і ту ж точку є сталим; сталим є також добуток відрізків січної та її зовнішньої частини (якщо з точки P до кола проведено дві січні, що перетинають коло відповідно в точках A, B і C, D , то $AP \cdot BP = CP \cdot DP$). Аналогічно можна висунути гіпотезу про рівність добутку січної на її зовнішню частину і квадрата довжини дотичної.

Створивши відповідні моделі, учасники зможуть експериментально перевірити теорему про властивість медіан трикутника (медіани довільного трикутника перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться у відношенні 2:1, починаючи від вершини); теорему про властивість бісектриси довільного трикутника (бісектриса трикутника ділить протилежну сторону трикутника на відрізки пропорційні двом іншим сторонам); теорему Птолемея (сума добутків протилежних сторін вписаного чотирикутника дорівнює добутку його діагоналей); формули для радіуса описаного навколо трикутника кола $R = abc/4S$ і $R = a/(2\sin\alpha)$; формулу для радіуса вписаного в n -кутник кола $r = S/p$; де a, b, c – сторони трикутника, p – півпериметр.

У класах з поглибленим вивченням математики бажано «відкрити» теореми Чеви, Менелая, побудувати пряму Сімпсона та ін.

Нема потреби щоразу на занятті створювати динамічні креслення. Можна напередодні запропонувати групі учасників випереджаюче завдання – підготувати чи дібрати на сайті GeoGebra відповідні моделі, виконати дослідження, в аудиторії доповісти про отримані результати, переглянути хід створення моделі на телефонах або ж через проектор. Для перегляду використовують налаштування *Покрокове відтворення*. Коментування готових моделей дозволить інтенсифікувати процес засвоєння матеріалу і вести навчання розвиваючими методами.

Особливу увагу вчителю / викладачу слід звернути на такі важливі

питання, як визначення місця дидактичної гри в системі інших видів діяльності на занятті; педагогічна доцільність її використання на різних етапах роботи з навчальним матеріалом; методика проведення «відкриття» з врахуванням мети заняття, особливостей програмного засобу, навичок роботи учасників з комп'ютером, додатками для мобільних телефонів, рівня здібностей і підготовленості.

Розглянемо детальніше динамічне креслення для «відкриття» теореми про хорди (рис. 2.11). Створимо точки A, B ; коло з центром A і радіусом AB . На колі виберемо точки C, D, E, F (послуга *Створення \ Точка* прикріплена до кола), проведемо прямі EC та DF (послуга *Створення \ Пряма*), знайдемо точку їх перетину G (*Створення \ Точка перетину*) та створимо динамічні вирази для обчислення сум та добутків відрізків хорд.

У форматі [Gran-2D](#) потрібно зробити запис $LEN(C,G)*LEN(G,E); LEN(F,G)*LEN(G,D)$. Для подання динамічного напису [засобами GeoGebra](#) потрібно вписати до тексту позначення використовуваних об'єктів.

Рухаючи вздовж кола одну з точок C, D, E, F , змінюючи радіус кола, учасники зможуть відстежити зміни динамічних виразів, проаналізують отримані дані. Оскільки добутки залишаються рівними, то дослідники можуть висловити гіпотезу, що добуток відрізків однієї хорди буде сталим і залежатиме від положення точки перетину хорд.

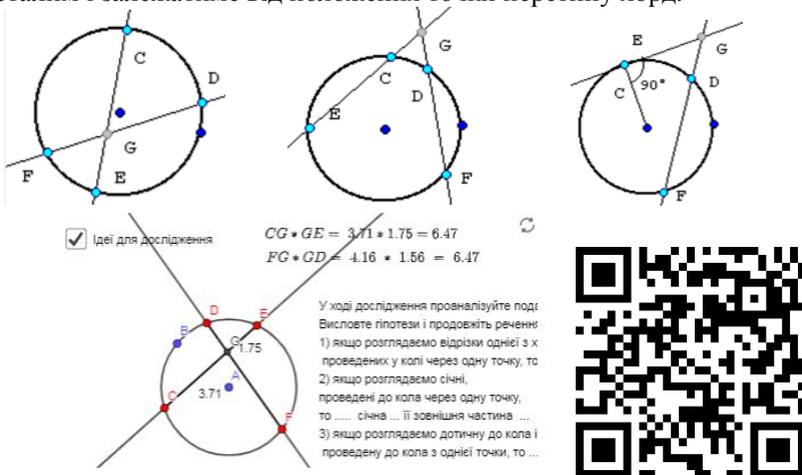


Рис.2. 11. Креслення до теорем про хорди, січні, січну і дотичну ([розробка GeoGebra за QR-кодом](#))

Стимулюємо подальші пошуки питанням: які результати отримаємо, якщо перетинатимуться не хорди, а їх продовження. Учасники мають встановити, що в цьому разі мова йтиме про січні, проведені до кола з однієї точки. Оскільки вони з'ясують, що вписані добутки при цьому залишилися сталими, то зможуть сформулювати твердження стосовно сталості добутку січної на її зовнішню частину. В подальшому пропону-

емо відслідковувати, які значення отримаємо для граничних положень січної, тобто для дотичної до кола. Треба зафіксувати, що добуток залишається сталим. Тому можна сформулювати третє твердження – квадрат дотичної рівний добутку січної на її зовнішню частину. Наступний етап в ході дослідження дуже важливий, тому що учасники повинні виокремити спільне в цих трьох формулюваннях, зробити узагальнення. Привертаємо увагу дослідників до того, як здійснюється порядок вибору точок. Спочатку беремо точку на колі, потім точку перетину, останньою – іншу точку тієї ж січної (хорди) на колі. Точку дотику при цьому розглядаємо як подвійну. Отже, використовуючи поняття напрямлених відрізків, зводимо три формулювання в одне. Обговорення з учасниками результатів дослідження сприятиме розвитку у них пізнавальних якостей узагальнення та систематизації.

Варто зауважити, що для проведення описаних досліджень важливим був той факт, що точка G отримали як перетин прямих, а не відрізків. Не змогли б на динамічному кресленні продемонструвати зв'язок між трьома згаданими вище теоремами та здійснити узагальнення і в тому разі, якби почали будувати січні, використовуючи послугу *Промінь* чи послугу *Дотична*. Наведені приклади яскраво свідчать про важливість у ході створення креслення добору об'єктів та порядку їх створення. Тому краще пропонувати учасникам не готові моделі для відкриття, а разом з ними обговорювати, яку із запропонованих краще використати. Формуючи вміння створювати, добирати «гнучкі» моделі, розвиватимемо в особистості таку творчу компоненту як гнучкість мислення.

Розглянемо, які наочності за допомогою ПЗ можна запропонувати при вивченні теми «Паралелограм. Ромб. Прямокутник. Квадрат».

У бібліотеці наочностей «Геометрія, 7-9 клас» [15 до р.7] пропонується чотири елементи, що мають по кілька кроків (рис. 2.11). Надається можливість моделювати фігури. Наприклад, з'єднавши середини сторін прямокутника, з'ясувати, що отриманою фігурою буде ромб. Для кожного з чотирьох кутників подаються його властивості у вигляді текстових повідомлень з демонстраціями. Можна прослухати звукові повідомлення про властивості.

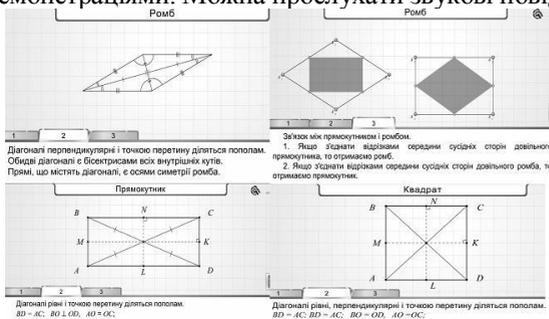


Рис.2. 12. Копії окремих кадрів з бібліотеки наочностей «Геометрія, 7-9».

Для зазначеної теми «Паралелограм» пропонуємо також використати динамічний опорний конспект, створений за допомогою динамічної математики: експертну систему «Паралелограм» (рис. 2.13). На одній і тій же моделі можна встановити властивості паралелограма, прямокутника, ромба, квадрата. Всі елементи паралелограма (кути, сторони, відрізки діагоналей тощо) вимірюються в динаміці. Проаналізувавши дані, учневі при засвоєнні нового матеріалу потрібно висловити гіпотези щодо властивостей паралелограма певного виду, подати їх як продовження незавершеного речення. Друга частина речення бажано приховати за підказками, які подаються в конспекті за допомогою об'єктів-«прапорців». Мислення дослідників активізуємо постановкою питань, які стимулюють самостійність суджень та висування гіпотез. Відкривши прапорці з повідомленнями, вони зможуть перевірити, чи правильно сформулювали властивості. Наприклад, за допомогою «Діагональ ділить паралелограм...» приховано як закінчення речення, так і допоміжну побудову трикутника.

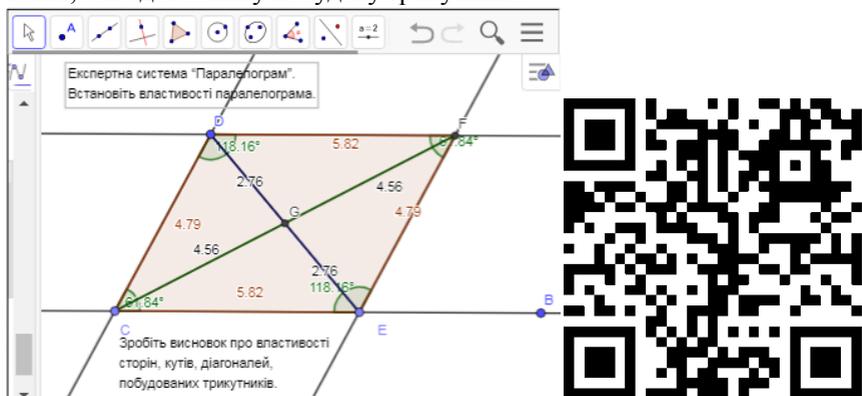


Рис.2. 13. ДОК до теми «Паралелограм» ([розробка GRAN-2D](#), [QR GeoGebra](#))

Пропоновані моделі є варіативними, інтегрованими, що уможливило використання їх при вивченні різних тем. Дану модель можна використати і при вивченні теми «Переміщення фігур». Для демонстрації того, що точка перетину діагоналей є центром симетрії паралелограма, прихована додаткова побудова двох симетричних відрізків та їх вимірів. Відповідні побудови подаються і за допомогою кнопки «Побудова осей симетрії прямокутника». Щоб їх використати, попередньо слід змінити паралелограм так, щоб він став прямокутником. В окремому завданні пропонується встановити вигляд чотирикутника, який отримаємо, якщо з'єднаємо середини сторін паралелограма (прямокутника, ромба, квадрата, довільного чотирикутника). Цей фрагмент динамічного конспекту стане в нагоді і при вивченні теми «Середня лінія трикутника».

Щоб обґрунтувати отримані властивості, можна об'єднати учасників у чотири групи, запропонувавши кожній з них відповідне завдання, а в подальшому розглянути доведення біля дошки.

Наведемо приклади завдань на дослідження, які можна запропонувати при вивченні теми «Прямокутник». Подаємо деякі вказівки щодо створення креслень до них.

1) Діагоналі чотирикутника рівні, два кути його прями. Чи є цей чотирикутник прямокутником? Для створення креслення будуємо пряму, на ній беремо точку A , через неї проводимо перпендикуляр, на перпендикулярі беремо точку C (прикріпити до перпендикуляра) та з'єднуємо її з довільною точкою B прямої, відмінною від точки A . Оскільки діагоналі за умовою рівні, то слід провести коло з центром у точці A та радіусом, рівним довжині CB . Створюємо об'єкт-точку D і прикріплюємо її до побудованого кола. Завершують побудову створенням замкненої ламаної $ABDC$ та вимірюванням кутів чотирикутника. Доцільно за допомогою кнопки приховати коло, описане навколо трикутника ABC , щоб проаналізувати положення точки D (розробка GRAN-2D).

2) $ABCD$ – прямокутник. На сторонах AB і CD відкладено рівні відрізки BM і CE . MK – перпендикуляр, опущений на AC . Знайти кут BKE .

Щоб розглянути деяке узагальнення задачі, доцільно точку M прикріпляти не до відрізка AB , а до прямої AB . Щоб побудувати рівні відрізки, слід будувати коло з центром у точці C і радіусом BM або через точку M провести пряму, паралельну BC . За допомогою інструмента Кнопка/Прапорець доцільно приховати коло, описане навколо прямокутника $CEMB$ (рис. 2.13) (розробка GRAN-2D, розробка GeoGebra). Слід перевірити, чи зміниться величина кута, якщо відрізки BM і CE відкласти на продовженні сторін? Якщо через точку C провести довільну пряму і на неї опустити перпендикуляр BK ?

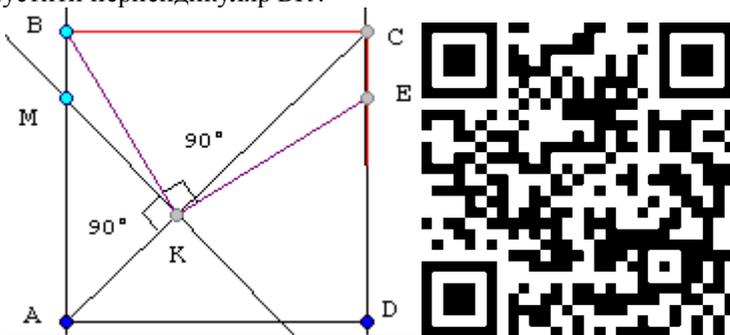


Рис.2. 14. Наочність з [колекції «Задачі на дослідження і доведення»](#).

3) На стороні BC прямокутника $ABCD$ є така точка M , що кут AMB рівний куту AMD . Знаючи, що сторона AD вдвічі більша за AB , знайти величини названих кутів. Важливо побудувати прямокутник, у якого одна сторона вдвічі більша іншої. Для цього з центром у вершині прямого кута A слід провести коло, яке відтне від сторін кута рівні відрізки. Самі точки B і B_1 знаходять за допомогою інструмента Перетин двох ліній. Щоб створити точку D , можна побудувати точку, симетричну

А відносно B_1 ([розробка GRAN-2D](#); [розробка GeoGebra](#)).

В.О. Моляко [81], В.А. Крутецький [73], М.І. Жалдак [18], С.А. Раков [50], М.Л. Смульсон [44], І.О. Теплицький [61] звертають увагу на той факт, що для розвитку творчих здібностей особистості не завжди необхідно повністю формулювати умову завдання на дослідження. Корисно здійснювати довивзначення задачі, формулювання проблеми учасником навчального процесу. Таке довивзначення відносять до навчально-творчих задач, які розвивають здібності знаходити потрібні відомості, переносити їх, застосовувати в умовах задачі. Переформулювання та довивзначення задачі – це один з видів мотивування діяльності учнів / студентів. Переформулювання допомагає створити таку навчально-пізнавальну ситуацію, коли учасникам захочеться досліджувати і висувати гіпотези. Наведемо приклади завдань на доведення, які доцільніше подавати як завдання на дослідження і обґрунтування.

Довести

1. Вершини трикутника $A_1B_1C_1$ лежать на серединах сторін трикутника ABC . Показати, що площа трикутника ABC в чотири рази більша площі трикутника $A_1B_1C_1$.
2. Довести, що медіани ділять трикутник на шість рівновеликих частин. ([розробка GRAN-2D](#))
3. Довести, що відстань ортоцентра від якої-небудь вершини трикутника у два рази більша за відстань центра описаного кола від протилежної сторони.
4. Довести, що коли основи висот гострокутного трикутника сполучити, то дістанемо трикутник, для якого висоти першого будуть бісектрисами ([розробка GRAN-2D](#)).

Дослідити і обґрунтувати

1. Встановити, як співвідносяться площі трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, якщо вершини трикутника $A_1B_1C_1$ лежать на серединах сторін трикутника ABC ? Обґрунтувати отриманий результат.
2. Медіани ділять трикутник на шість частин. Дослідити, чи залежить значення площі вказаних частин від виду трикутника? Порівняти з площею трикутника, висловити гіпотезу, обґрунтувати її.
3. Порівняти відстані ортоцентра трикутника від його вершин з відстанями центра описаного кола від протилежних до взятих вершин сторін. Висловити і обґрунтувати гіпотезу ([розробка GRAN-2D](#)).
4. Основи висот гострокутного трикутника сполучили. Дослідити, яку властивість мають в отриманому трикутнику висоти першого? Обґрунтувати гіпотезу і сформулювати алгоритм відновлення трикутника, якщо задані основи його висот.

Вивчаючи теорему Птолемея, спочатку доцільно провести дослідження і висловити гіпотезу щодо залежності між сторонами та діагоналями вписаного чотирикутника (п. 1.5.3, рис. 1.52, 1.53). [На рис. 2.14 подано копію опорного динамічного конспекту для доведення теореми Птолемея з частиною відкритих підказок \(DG\)](#). Підказки можуть містити як текстові

евристичні настанови – нечітке наведення на отримання розв’язку, так і приховувати деякі побудови, співвідношення між елементами.

Розглянемо, як можна до визначити задачу на «відкриття» теорем Менелая ([GRAN-2D](#)) і Чеви. Нехай задано трикутник ABC і три точки на прямих, які утворюють трикутник (C_1 на прямій AB , A_1 на прямій BC , B_1 на CA). Досліджуючи значення виразу $AC_1/C_1B \cdot BA_1/A_1C \cdot CB_1/B_1A$, зафіксувати положення точок і прямих, при яких це значення рівне одиниці. Висунути гіпотези. Дослідники спочатку повинні проаналізувати і з’ясувати, як складено вираз, які відношення перемножуються і лише після цього перейти до створення динамічного креслення за допомогою ПЗ.

В результаті дослідження і обговорення в групах вони мають отримати гіпотези, істинність яких потрібно буде довести:

1) (узагальнена теорема Чеви) прямі CC_1 , AA_1 , BB_1 перетинаються в одній точці чи паралельні тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $AC_1/C_1B \cdot BA_1/A_1C \cdot CB_1/B_1A = 1$;

2) (теорема Менелая) точки C_1 , A_1 , B_1 лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $AC_1/C_1B \cdot BA_1/A_1C \cdot CB_1/B_1A = 1$.

Перейти до слайда дослідження

Формулювання теореми

Якщо чотирикутник вписаний в коло, то сума добутків його протилежних сторін рівна добутку діагоналей

Рівність

$FC \cdot DE + CD \cdot FE = FD \cdot CE$ (1)

Доведення теореми Птолемея

1. Виконайте допоміжну побудову - кут DCJ рівний куту ECF.
3. Трикутники DCJ та ECF подібні
Складіть пропорції для відповідних сторін
4. $DC/EC = DJ/EF = CJ/CF$
Які рівності отримаємо?
5. $CD \cdot FE = EC \cdot DJ$ (2)
6. Трикутники CFJ та CED подібні
Складіть пропорції для відповідних сторін
7. $CF/CE = CJ/CD = FJ/ED$
Які рівності отримаємо з пропорцій?
8. $CF \cdot ED = CE \cdot FJ$ (3)

Крок 1

Підказка 1

Підказка 2

Підказка 3

Підказка 4

Крок 2

Крок 3

Крок 4

Підказка 5

Підказка 6

Крок 5

Крок 6

Крок 7

Підказка 7

Рис.2. 15. Креслення до теореми Птолемея з відкритими підказками (DG)

Розглядаючи перетворення подібності, доцільно запропонувати учням випереджаюче домашнє завдання – самостійно здійснити дослідження властивостей перетворення, використовуючи розроблені динамічні креслення, і скласти звіт. Наприклад, нами розроблено такі наочності для дослідження властивостей перетворення «Подібність» (режим доступу <http://www.geogebra.org/material/show/id/42625> з можливістю завантаження файлу для класичної версії GeoGebra або ж <https://www.geogebra.org/m/KkjMTpPn> для використання також на мобільних телефонах). Варто стимулювати учасників висловлювати гіпотези щодо властивостей перетворення "Подібність". Далі доцільно продемонстру-

вати побудову подібних фігур як результат комбінації гомотетії та повороту. Проведення дослідження і узагальнення його результатів сприятиме формуванню в тих, хто навчається, дослідницької математичної компетентності.

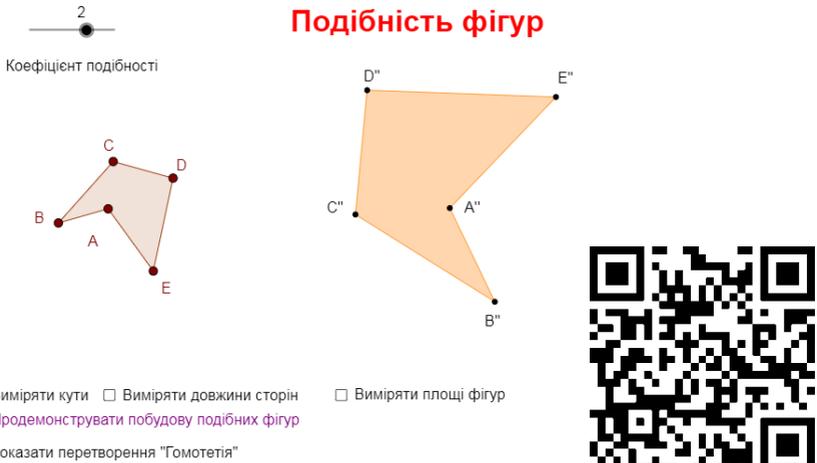


Рис.2. 16. Вигляд полотна, відкритого для дослідження ([розробка GeoGebra](#)).

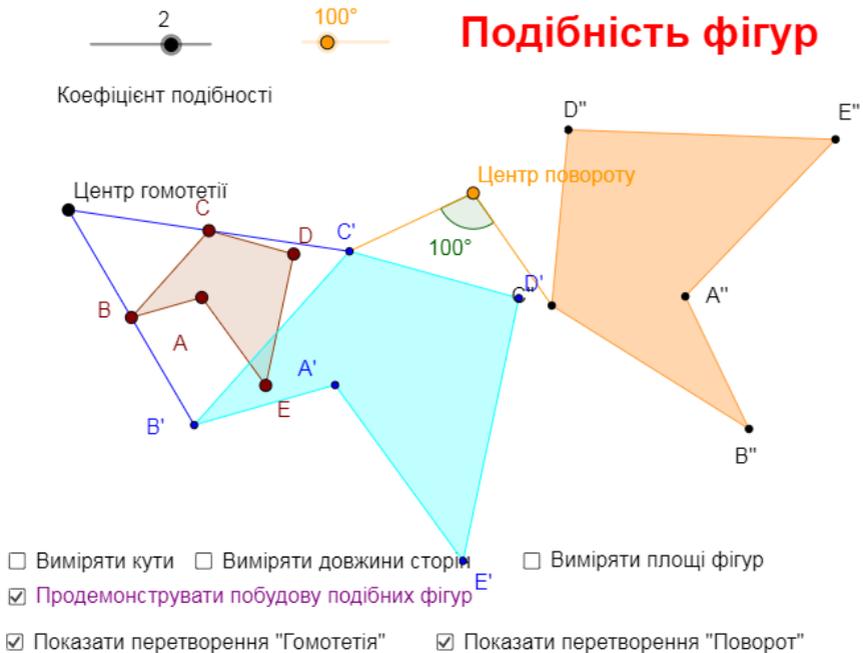


Рис.2. 17. Вигляд полотна [з відкритими деталями побудови](#)

На рис. 2.16. представлено креслення з увімкненою побудовою гомотетичної фігури. У процесі дослідження учасники можуть відкривати тимчасово приховані відомості (виміри кутів, довжини сторін, площі фігур).

Учитель повинен володіти навичками складання орієнтовних **планів дослідження** (завдання для учня).

1. Знайдіть відношення довжин відповідних сторін і порівняйте його із записаним значенням коефіцієнта подібності. Запишіть гіпотезу.

2. Виміряйте відповідні кути у подібних фігур. Запишіть гіпотезу.

3. Проведіть дослідження, змінюючи значення коефіцієнта подібності; змінюючи форму однієї з представлених фігур.

4. Знайдіть відношення площ подібних фігур, порівняйте знайдене число з коефіцієнтом подібності. Запишіть гіпотезу про зв'язок.

5. Дізнайтеся, як можна отримати подібні фігури. Проведіть дослідження для різних кутів і розташування центрів гомотетії чи повороту.

6. Самостійно дайте відповіді на питання: а) які фігури будуть подібними; б) що виражає коефіцієнт подібності; в) про які властивості подібних фігур дізналися; г) в результаті яких перетворень і як можна отримати подібні фігури?

7. Дізнайтеся більше про перетворення "Подібність" у науково-популярній та у навчальній літературі.

Контрольні питання і завдання

1. Дослідити, як використовуючи засоби динамічної геометрії, можна розвивати в учнів здібності до висування гіпотез, уміння узагальнювати та інші позитивні особистісні якості?

2. Дібрати завдання з планіметрії на доведення, переформулювати його як завдання на дослідження і обґрунтування, створити відповідний ДОК уроку, який міститиме креслення, динамічні вирази, підказки.

3. Скласти конспект уроку за вибраною темою, підготувати наочності за допомогою системи динамічної математики, «Бібліотека наочностей *Геометрія, 7-9 клас*». Зазначити мету використання кожного засобу та місце в ході уроку.

4. Які наочності можна назвати динамічними опорними конспектами?

5. Оцінити, у чому може проявлятися у процесі навчання математики позитивність властивості інтегрованості наочностей? Яких негативних впливів при цьому слід уникати? Для яких типів занять найкраще використовувати інтегровані наочності?



2.3. Розв'язування задач на побудову

Розглянемо, як за допомогою системи динамічної математики GeoGebra / GRAN-2D / DG можна розв'язувати та подавати на занятті, пропонувати для самостійного опрацювання *задачі на побудову за допомогою циркуля та лінійки*. Розв'язування задачі полягає не стільки в побудові фігури, скільки у знаходженні способу, як це зробити, і відповідному доведенні. Основними етапами в розв'язуванні задачі є *аналіз, побудова*, що включає запис способу побудови фігур та власне виконання побудов, *доведення* та *дослідження*. Основними методами розв'язування задач на побудову є метод геометричних місць, геометричних перетворень (симетрії, повороту, паралельного перенесення, гомететії) та алгебраїчний методи.

Щоб розв'язати задачу *методом геометричних місць*, можна використати відповідне правило-орієнтир [97, 276]: якщо при аналізі задачі встановлено, що для знаходження розв'язку потрібно побудувати деяку точку А, яка задовольняє двом умовам α_1 і α_2 , то спочатку будують дві фігури F_1 і F_2 , відповідні цим умовам, а потім знаходять точку А, як перетин побудованих фігур: $A = F_1 \cap F_2$. Точка А вважається основним елементом побудови. Фігури F_1 і F_2 являють собою певні геометричні місця точок або множини точок. Оскільки задачу потрібно розв'язувати циркулем і лінійкою, то ці фігури повинні бути колами або прямими лініями, які відповідають певним властивостям.

Доцільно розглянути як будують деякі геометричні місця точок, які найчастіше використовують при розв'язуванні задач на побудову ([урок в GeoGebra](#)). Відзначимо з них найголовніші:

- 1) точки, розташовані на заданій відстані від фіксованої точки;
- 2) точки, рівновіддалені від кінців даного відрізка;
- 3) точки, рівновіддалені від даної прямої;
- 4) точки, рівновіддалені від двох прямих;
- 5) точки, з кожної з яких даний відрізок видно під заданим кутом ([GeoGebra](#));

6) точки, відношення відстаней від яких до фіксованих точок величина постійна (для точки М і точок А, В маємо $AM/MB=m/n$, де $m/n=\lambda \neq 1$);

7) точки, які ділять навпіл хорди, що виходять з однієї точки кола ([розробка GRAN-2D](#), [розробка GeoGebra](#));

8) точки, для кожної з яких різниця квадратів відстаней від двох даних точок А і В постійна;

9) точки, для кожної з яких сума квадратів відстаней до двох даних точок А і В є сталою величиною.

Продемонструємо застосування методу геометричних місць точок на прикладі задачі: *побудувати трикутник ABC, якщо задано радіус кола, описаного навколо трикутника, кут А і медіану, проведену з вер-*



шини B (рис. 2.17) ([розробка GRAN-2D](#), [розробка GeoGebra](#)). Для розробки на сайт GeoGebra додано коментар щодо побудови як посилання на [відео з Youtube](#) тощо.

Необхідно з'ясувати, до знаходження яких точок зводиться розв'язування задачі, і які дві вимоги мають ці точки задовольняти. У запропонованій задачі такими є точки C , A – вершини трикутника і точка L – основа медіани. На другому кроці відкидають одну з вимог задачі і будують геометричне місце точок, що задовольняють іншу вимогу. На третьому кроці будують ГМТ, які задовольняють раніше опущену вимогу. На заключному знаходять точки перетину геометричних місць точок. Розглянемохід виконання побудов (рис. 2.17).

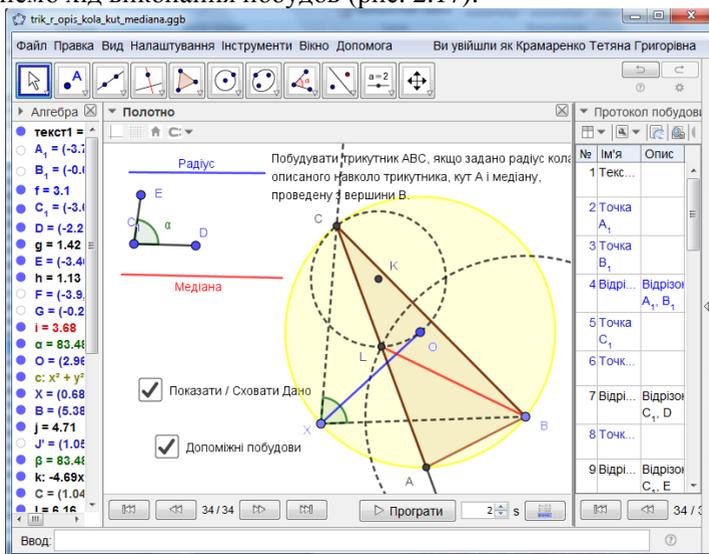


Рис.2. 18. Побудова до задачі ([розробка GeoGebra](#))

1) У лівому верхньому куті будуємо два відрізки, що відповідають радіусу кола та медіані, а також кут. Доцільно використати інструмент *Прапорець*, щоб тимчасово приховувати ці побудови, щоб учень мав змогу подумати, що саме йому потрібно будувати.

2) Будуємо коло заданого радіуса з центром у довільній точці O (інструмент *Коло / Циркуль*), проводимо у ньому довільну хорду XB (точки X, B прикріпити до кола; використати послугу *Об'єкт / Відрізок*).

3) Від променя XB відкладаємо кут з вершиною у точці X , рівний даному (інструмент *Кут, рівний даному*). Збільшення чи зменшення величини кута вестиме до автоматичної перебудови креслення. Друга сторона кута перетне коло у точці, яку позначимо C .

Третя вершина трикутника – точка A буде лежати на колі в тій же півплощині по відношенню до прямої BC , що й точка X (ГМТ №5).

4) Будуємо коло з центром у точці B і радіусом, рівним медіані

(ГМТ №1) (інструмент *Циркуль*).

5) Геометричним місцем середин всіх хорд, що виходять з вершини C , є коло з діаметром OC (ГМТ №7). Точка K – середина OC .

6) Якщо кола (K, OK) і (B, m_b) перетинаються в точці, яка лежить в одній півплощині з точкою X відносно прямої BC , то через цю точку L проводимо промінь CL до перетину з колом (O, R) . Отримаємо точку A .

7) ABC – шуканий трикутник, оскільки задовольняє всім вимогам, що ставились в умові задачі.

8) Досліджуємо за вихідними даними вид трикутника, довільно змінюючи кут, довжину радіуса кола та медіани. Задача має розв'язки, якщо кола (K, OK) і (B, m_b) перетинаються в точці над хордою BC (рис. 2.17).

Правила-орієнтири для розв'язування задач на побудову за допомогою паралельного перенесення і повороту схожі між собою [97, 278].

Застосування *методу паралельного перенесення* проілюструємо за допомогою задачі на *побудову трапеції за відомими основами та діагоналями*. Припускаємо, що задачу розв'язано. Одну з діагоналей паралельно переносимо в напрямку однієї з основ і проводимо її через другу вершину обраної основи. В результаті отримаємо допоміжний трикутник з двома сторонами, які рівні діагоналям трапеції (рис. 2.18). Третя сторона трикутника рівна сумі основ трапеції. Цей трикутник можна побудувати за даними задачі. Виконуючи обернене паралельне перенесення, будуємо шукану трапецію. Розглянемо послідовність дій, які потрібно виконати при побудові за допомогою динамічної математики.

1) Щоб задати умову задачі («Дано»), створюють напис з умовою задачі (*Додати напис*). Будують чотири відрізки, що відповідатимуть основам та діагоналям трапеції (послуга *Відрізок*).

2) На етапі *Аналіз* будують довільну трапецію (вказують дві довільні точки – на рис. 2.18 точки I, J); проводять через них пряму. Далі створюють довільну точку K , яка не лежить на побудованій прямій, і будують пряму, яка проходить через дану точку K і паралельна до даної прямої IJ (послуга *Паралельна пряма*); створюють *Об'єкт* – точку L , що прикріплена до побудованої паралельної прямої; застосовуючи послугу *Ламана*, будують замкнену ламану – трапецію $IKLJ$. При побудові трапеції послідовно вказують курсором чотири вершини I, K, L, J , а на закінчення побудови ламаної натискають праву кнопку миші. Проводять діагоналі трапеції (послуга *Створити відрізки*).

Всі розглянуті вище побудови можуть бути домашньою заготовкою і тоді їх потрібно лише відкрити одразу після обговорення з учасниками, що ж саме задано. Або ж побудови одночасно виконувати за допомогою ПЗ та учнями в зошитах за допомогою креслярських інструментів. Використовуючи послугу *Паралельна пряма* (вказують на точку L та відрізок KJ), здійснюють паралельне перенесення однієї з діагоналей. Точку перетину побудованої прямої з основою трапеції (точку M) знаходять за допомогою пос-

луги *Створення точки перетину об'єктів*. Бажано для багаторазового використання моделі додати прапорець, за допомогою якого можна приховати побудови до аналізу (інструмент *Показати \ Сховати об'єкти*) та виконати *Налагодження відображення у протоколі побудови*. Об'єкти, які потрібно приховувати, вказують курсором. Натискування створеної кнопки / прапорця на слайді викликає появу об'єктів чи їх зникнення. Це допоможе школяреві при самостійному опрацюванні задачі з врахуванням коментарів кроків побудови краще усвідомити хід побудови до задачі. Щоб не відображалися при цьому елементи фігури, створеної для аналізу, фігуру перед покроковим відтворенням потрібно приховати за допомогою прапорця.

3) *Етап побудови*. Виконуємо побудову допоміжного трикутника ПМ. Послідовно використовуємо послуги для побудови точки N і прямої, яка проходить через цю точку. Іншу, допоміжну точку, необхідну для створення об'єкта пряма, після побудови приховали, знявши відмітку з відображення імені. Щоб побудувати відрізок, рівний відрітку АВ, застосовують послугу *Коло за радіусом / Циркуль*. При цьому у GRAN-2D спочатку вказують центр кола – точку N, а потім курсором відмічають початок радіуса – точку А та кінець радіуса – точку В. У GeoGebra центр кола вказують останнім. Використовуючи послугу *Точки перетину об'єктів*, відмічають точку Q. Далі аналогічно відкладають відрізок, рівний іншій основі. Отримують точку S. Використовуючи послугу *Коло за радіусом / Циркуль*, знаходять точку T; будують відрізки NT і TS. Використовуючи послугу *Паралельна пряма*, проводять пряму через точку T, яка паралельна до прямої NS. Аналогічно будують пряму, паралельну TS. Точку перетину побудованих прямих (точку V) знаходять, використовуючи послугу *Точка перетину об'єктів*. Завершують побудову створенням замкненої ламаної NVTQ.

До ходу побудови можна створити кілька прапорців, за допомогою яких приховувати і послідовно відкривати підказки (наразі з мобільного телефона в GeoGebra недоступно). З одного боку, якщо вчитель використовує готову модель, то відкривання підказок зробить його діалог з учнями більш евристичним, що забезпечуватиме розвиток мислення школярів. Якщо учень самостійно опрацьовує задачу, то завдяки послідовному відкриванню підказок імітується евристичний діалог школяра з учителем, адже можна також приховувати питання для учня і відповіді. [Покрокова подача матеріалу](#) може допомогти тому, хто навчається, удосконалювати навички самоконтролю.

4) Виконавши побудову, *обтунтовуємо*, що трапеція шукана. Зміна довжин заданих відрізків зразу призводить до зміни трапеції. Щоб розвивати логічне мислення учасника навчального процесу, необхідно спонукати його зробити висновок про можливість побудови трапеції за вихідними даними до того моменту, як це він встановить за допомогою ПЗ експериментально.

5) *Дослідження*. Побудувати трапецію можна тоді, коли можна побудувати допоміжний трикутник. Тобто сума довжин відрізків діагона-

лей має бути більшою суми довжин основ трапеції.

За допомогою програмного засобу можна порівняти площу трапеції та площу допоміжного трикутника і висловити гіпотезу, що вони рівні. Тобто, вивести можливі наслідки, аналізуючи виконану побудову.

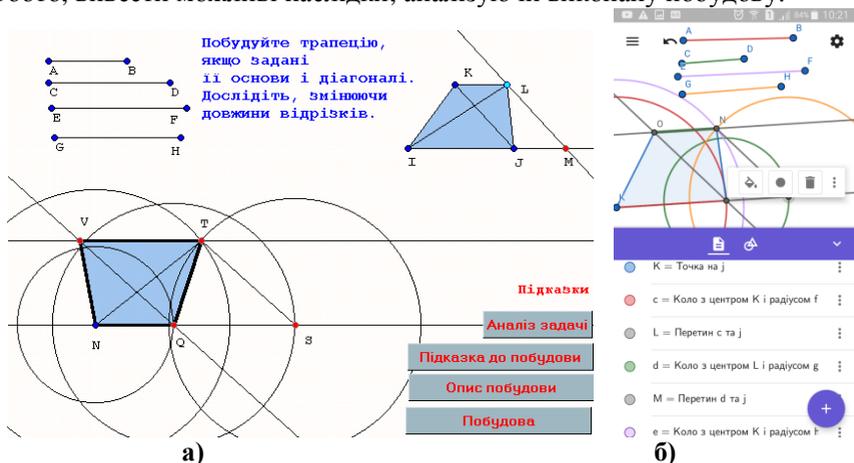


Рис.2. 19. Копії екранів: а) з відкритою підказкою аналізу побудови ([креслення в GRAN-2D](#)), б) з додатку для телефону *GeoGebra Геометрія* ([файл1](#)), з можливістю покрокового відтворення побудови ([файл2](#)).

Для закріплення вивченого матеріалу доцільно запропонувати виконати побудову до задач: 1) побудувати трапецію, якщо відомі її сторони; 2) побудувати трапецію за основою, різницею кутів при основі і бічними сторонами. Створені моделі можна використати у процесі вивчення тем «Чотирикутники» і «Площа трапеції».

Метод осової симетрії застосовують, наприклад, для розв'язування задачі на оптимальне розміщення мосту через річку, якщо відоме розташування населених пунктів з одного боку від річки чи по різні боки (п. 2.5).

Центральну симетрію можна розглядати як окремий випадок повороту на кут 180° . Виділимо кілька типів задач, для розв'язування яких зручно використовувати *метод повороту*. 1) Задачі на побудову многокутників, вершини яких лежать на трьох даних лініях (прямих чи колах). Наприклад, побудувати рівносторонній трикутник так, щоб три його вершини лежали на трьох даних прямих (рис. 2.18); вершини знаходились на трьох концентричних колах; одна вершина співпадала з даною точкою, інша лежала на даній прямій, третя на даному колі (рис. 2.19). Можна запропонувати учням побудувати квадрат, три вершини якого лежать на трьох паралельних прямих тощо. 2) Задачі на побудову многокутників, вписаних в інші многокутники. Наприклад, у даний квадрат вписати рівносторонній трикутник, одну з вершин якого задано на стороні квадрата; у даний ромб вписати квадрат. 3) Задачі на доведення, що розв'язуються за допомогою повороту.

Засоби динамічної геометрії ефективно використовувати не тільки при дослідженні властивостей геометричних перетворень, але і у процесі розв'язування задач методом геометричних перетворень. Частина задач на побудову доцільно переформулювати і подавати як задачі прикладного характеру, практичного змісту. Наведемо приклади.

1. Після повені необхідно відновити розмиті межі земельної ділянки квадратної форми. Відомо, що залишилися тільки дві віхи на межах і віха у центрі ділянки. Для розв'язування задачі застосовують метод симетрії. При використанні динамічної геометрії доцільно демонструвати розташування квадрата залежно від заданих на сторонах точок.

2. Необхідно оновити атракціон і спроектувати каркас у формі правильного трикутника. Кріплення будуть здійснені за вершини так, щоб платформа рухалася вздовж трьох паралельних колій, які залишилися. Для розв'язування задачі використовують метод повороту. За допомогою динамічної геометрії демонструють розташування трикутника, визначають довжину його сторони залежно від розташування паралельних прямих. Зрештою, побудови до задач можна одночасно здійснювати як вручну традиційними інструментами, так і з використанням динамічної геометрії. Адже найголовніше при розв'язуванні – розробка алгоритму побудови.

Щоб побудувати правильний трикутник, вершини якого лежать на трьох прямих (рис. 2.19 а), б), на прямій CD вибирають довільну точку G і повертають пряму AB на кути $+60^\circ$ і -60° до перетину з прямою EF. Нехай вершини рівностороннього трикутника розташовані в точці A, на прямій BC і на даному колі відповідно. Для побудови виконано поворот прямої на кут $+60^\circ$ відносно A (рис. 2.19 в)).

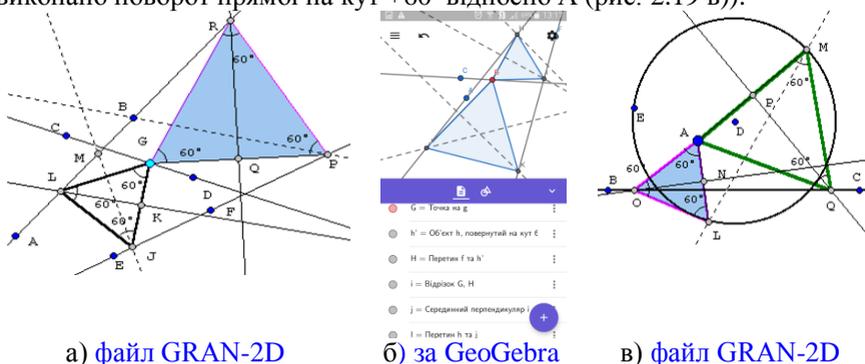


Рис.2. 20. Скріншоти побудов правильного трикутника.

Розглянемо детальніше побудову правильного трикутника, вершини якого лежать на трьох паралельних прямих (наведено [приклад розробки за допомогою GeoGebra](#)) (рис.1.20):

- будуюмо довільну пряму (Пряма);

- будуюмо дві прямі a , b , c , паралельні даній (Паралельна пряма);
- на прямій c обираємо довільну точку A (Точка на об'єкті);
- повертаємо пряму a на кут 60° відносно точки A (геометричне перетворення Поворот);
- в результаті перетину прямих a і b отримуємо другу вершину трикутника B (Точка перетину);
- щоб побудувати третю вершину трикутника, будуюмо серединний перпендикуляр (Серединний перпендикуляр) відрізка AB і точка його перетину з прямою a буде шуканою вершиною трикутника.

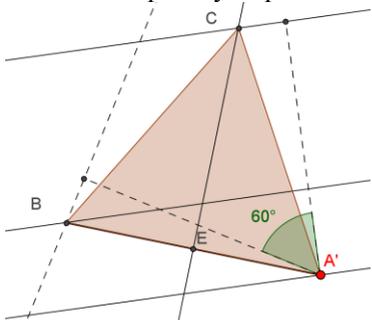


Рис.2. 21. Побудова правильного трикутника (GeoGebra)

Контрольні питання і завдання

1. Перегляньте та проаналізуйте добірку завдань на побудову за допомогою GeoGebra.

2. Виконати креслення до теми «Чотирикутники» за допомогою динамічної математики:

а) побудувати ромб $ABCD$, якщо задана середина сторони AC (AB , AD , BC) та центри кіл, описаних навколо трикутників ABC і ADC ;

б) побудувати ромб $ABCD$ за розташуванням вершин A і B , відстанню від даної точки M до середини DC ;

в) побудувати квадрат за сумою сторони з діагоналлю;

г) побудувати квадрат за різницею довжин діагоналі та сторони;

д) на місцевості була відмічена ділянка $ABCD$ квадратної форми. Дощі розмили її межі, збереглася віха в центрі ділянки і кілочки на сторонах AB та CD . Чи можна за цими даними відновити межі ділянки? Чи можна розв'язати завдання, якщо другий кілок забитий на стороні BC ?

е) побудувати трапецію за середньою лінією, відстанню між основами та кутами при одній з основ.

2. На сторонах паралелограма у зовнішній бік побудовано рівносторонні трикутники. Вершинами якого чотирикутника є ті їх вершини, які не лежать на сторонах паралелограма? Дослідити вид чотирикутника залежно від характеристик паралелограма.



2.4. Вивчення властивостей геометричних перетворень

Мета вивчення геометричних перетворень – ознайомити учнів / студентів з різними видами рухів, подібністю і гомотетією, їх властивостями; ввести загальне поняття про рівність і подібність фігур, показати застосування окремих видів перетворень [97, 291].

Розробники ПЗ DG пропонують розробити такі електронні шарнірні механізми: симетризатор, ротатор, транслятор, гомотетор, ротатор-гомотетор, дилататор – засіб для виконання довільного перетворення подібності. Наведені електронні механізми можна розглядати як керовані математичні моделі з засобами змінювання параметрів моделі і динамічного відображення змін моделей, зокрема у графічній інтерпретації [50].

У процесі використання динамічної математики на етапі формування понять, дослідження властивостей переміщення, перетворення подібності особливу увагу звертатимемо на розвиток мотиваційно-творчої спрямованості особистості, творчого інтересу, потягу до пошуку нових даних, пізнавальної самостійності ([добірка наочностей GeoGebra](#), [урок з методичними рекомендаціями вивчення теми](#)).



Вводячи означення центральносиметричних точок, послуговуються двома методичними прийомами: 1) означення базується на суттєвих властивостях: дві точки X_1 та X_2 називаються симетричними, якщо точка O – середина відрізка X_1X_2 ; 2) конструктивне означення: нехай O – фіксована точка, X_1 – довільна точка площина. Відкладемо на продовженні відрізка OX_1 за точку O відрізок OX_2 , рівний OX_1 . Точка X_2 називається симетричною точці X_1 відносно точки O . Друге означення дає спосіб побудови центральносиметричних точок і центральносиметричних фігур.

При вивченні перетворень з використанням GRAN-2D чи DG заняття доцільно провести у комп'ютерному класі. Якщо ж планується використання *GeoGebra*, доцільно учасникам навчального процесу попередньо завантажити на мобільні телефони додаток *Геометрія*. Тоді можна буде працювати у звичайній аудиторії. Добре, якщо у менеджера буде можливість демонструвати [надіслані учасниками наочності](#) через проектор.

Розглядаючи *симетрію*, можна діяти наступним чином. Запропонувати побудувати довільну точку A і вказати центр симетрії чи пряму симетрії. Симетричну точку створити, використавши послугу [Точка, симетрична відносно даної точки](#) чи [Точка, симетрична відносно даної прямої](#) відповідно. Утворені точки слід з'єднати відрізком. У цьому разі будуть створені незалежні об'єкти центр симетрії чи вісь симетрії, а залежними будуть симетричні точки. Потрібно поставити учасникам навчального процесу завдання самостійно, користуючись обчислювальними інструментами, з'ясувати властивості перетворення. Змінюючи положення точки A , вони з'ясуують таку суттєву властивість, як однакові

відстані до центра (прямої) симетрії. Для встановлення властивостей точок, симетричних відносно прямої, використовують два інструменти – обчислення відстані та обчислення кутів. Далі у процесі спілкування потрібно сформулювати означення симетричних точок за суттєвими властивостями і конструктивне означення, скласти алгоритм побудови симетричних точок.

Можна з'ясувати, **як пов'язані координати симетричних точок**. Для цього на екрані відобразити координатні осі, а для точок зазначити у властивостях відображати координати «Властивості: заголовок: ім'я та значення». **Для центральної симетрії** розташовують центр у початку координат.

Наступним кроком є підведення учасників до формулювання ними **означення симетричних фігур**. У властивостях для двох побудованих симетричних точок зазначаємо «Залишати слід». Рухаючи точку А вздовж деякої фігури, симетрична до неї точка опише симетричну фігуру. У процесі дослідження кожен отримає змогу проявити творчість і побудувати ту фігуру, яка буде йому до вподоби (рис. 2.21, 2.22). Щоб зручніше демонструвати властивості перетворення, бажано створити ще одну пару симетричних точок (на рисунках точка D і симетрична до неї). У подальшому доцільно обговорити, що при симетрії зберігаються відстані між відповідними точками, промені переходять у промені, зберігаються кути і зробити висновок, що симетрія є рухом.

Для зручності представимо перелік кроків побудови симетричних фігур за допомогою мобільних додатків *Геометрія* у вигляді таблиці.

Таблиця 2.1.

Послідовність виконання побудови центральносиметричних фігур

1.		Побудувати точку А – центр симетрії, обравши інструмент «Точка». Побудувати точку довільну точку В. Для побудови центральносиметричних фігур у властивостях точки потрібно зазначити «залишати слід».
2.		Створити Точку, симетричну точці В відносно точки А (спочатку вказати точку В, потім точку А). Для побудови центральносиметричних фігур у властивостях доцільно зазначити «залишати слід» (рис.2.21).
3.		Можна створити замкнену ламану і відобразити її відносно центра симетрії (приклад з GeoGebra).

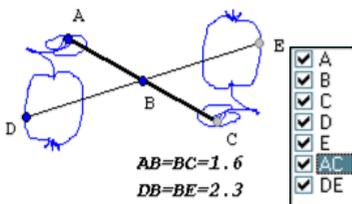


Рис.2. 22. **Центральна симетрія**

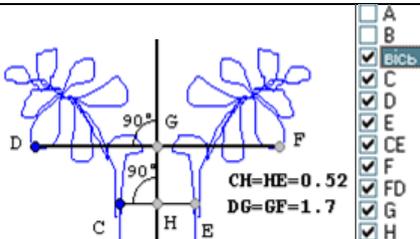


Рис.2. 23. **Осьова симетрія**

У творчій частині домашнього завдання пропонуємо дібрати приклади застосування [симетрії в архітектурі](#), техніці, живій природі. Бажано підготувати презентацію, побудувати динамічні симетричні моделі.

Для введення *повороту* необхідно вказати центр, кут повороту та напрям. Детальніше зупинимося на створенні динамічних моделей повороту. Будуємо довільний кут BAC – кут повороту і довільну ламану. Нехай точка J – центр повороту. Застосуємо послугу *Перетворення \ Поворот* до побудованої ламаної (див. рис. 1.61). [У випадку GRAN-2D зазначаємо, що в результаті повороту](#) необхідно створити результуючий образ та прикріпити його до вихідного. Поворот здійснюємо на орієнтований кут BAC , подаючи його в градусах (запис для кута $Deg(Oangle(B,A,C))$). В подальшому можемо змінювати величину кута BAC , положення центра повороту і спостерігати за переміщенням на площині ламаної. Якщо для точок новоствореної ламаної зазначити у властивостях «Залишати слід», то в результаті повороту точки повинні залишати слід у вигляді дуг кіл.

Доцільно побудувати фігури, які є центральносиметричними; мають вісь симетрії чи симетрію обертання порядку n (фігура, яка внаслідок повороту навколо деякої точки фігури на кут $360^\circ/n$ переходить в себе). [На рис. 1.55 наведено приклад фігури, яка має симетрію \$n\$ -го порядку](#), і зроблено пояснення, як потрібно такі фігури будувати. Щоб отримати калейдоскоп, зазначають прив'язку результуючих об'єктів до початкового. У цьому разі будь-яка зміна в розташуванні вершин ламаної, що повертається, відобразиться на решті ламаних, створених в результаті повороту.

Подібна можливість може бути здійснена і для класичної GeoGebra. Якщо застосовують додатки для мобільних телефонів, то поки що на можемо прописати назву кута, а не його величину у градусах. Для зручності представимо перелік кроків [побудови фігури, яка має симетрію обертання](#) за допомогою мобільних додатків *Геометрія* у вигляді табл. 2.2.

Таблиця 2.2.

Послідовність виконання побудови [фігури з симетрією повороту](#)

1.		Створити довільну точку O – центр повороту.
2.		Створити ламану, послідовно вказавши її вершини. Оскільки планується побудувати фігуру, що має симетрію 6-го порядку, по визначають кут повороту $360^\circ/6=60^\circ$.
3.		Повернути початкову ламану на кут 60° . Для цього спочатку вказують вихідний об'єкт (замкнену ламану), центр повороту O , кут повороту 60° . При цьому будуть створені точки – вершини другої ламаної
4.		Потім повертають на кут 60° другу ламану, далі третю, четверту і п'яту (2.26).

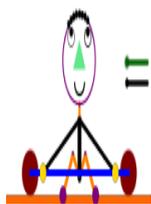


Рис.2. 24.
Спортсмен

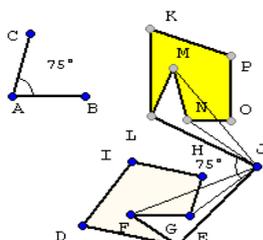


Рис.2. 25. Поворот

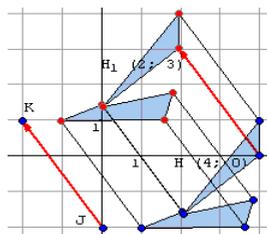


Рис.2. 26. Паралельне перенесення

Знайомлячи з властивостями *паралельного перенесення* за допомогою системи динамічної математики (рис. 2.25), доцільно використати інструмент *Перетворення \ Паралельне перенесення*. Координати вектора перенесення зручно задати як постійними числами, так і через параметри. Ілюструвати паралельне перенесення краще, якщо на екрані зображена система координат і нанесена координатна сітка (файл GRAN-2D).

Для зручності представимо перелік кроків побудови фігури, отриманої в результаті паралельного перенесення за допомогою мобільних додатків *Геометрія* у вигляді табл. 2.3.

Таблиця 2.3.

Побудова фігури в результаті паралельного перенесення.

1.		Побудувати вектор АВ
2.		Створити довільну замкнену ламану.
3.		Застосувати до побудованої ламаної паралельне перенесення, послідовно вказавши ламану і вектор (рис. 2.25).

Аналогічно можна підійти до вивчення властивостей *гомотетії* (рис.2.27). Фігуру а) створено як слід точки. Справа б) – зображення динамічної моделі у вигляді ламаної. Коефіцієнт гомотетії у GeoGebra створюють як повзунок. Зміна коефіцієнта гомотетії веде до зміни фігури.

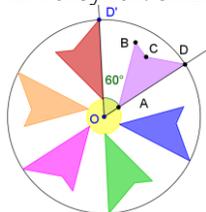
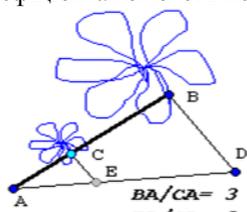
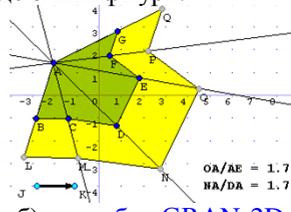


Рис.2. 27. GeoGebra



а) розробка GeoGebra

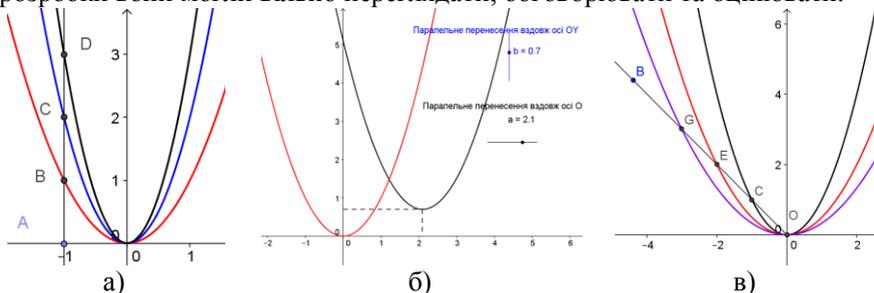


б) розробка GRAN-2D

Рис.2. 28. Приклади гомотетичних фігур.

Приклади застосування геометричних перетворень до задач на побудову розглядалися в п. 2.3. Зокрема для побудови правильного трикутника, вершини якого лежать на трьох паралельних прямих, для побудови трапеції за її сторонами. В п. 2.2 розглянуто приклад дослідження властивостей перетворення подібності.

Розглянемо як пов'язані геометричні перетворення фігур на площині з побудовою графіків функцій за допомогою перетворень. У процесі вивчення теми важливо забезпечувати в учнів розвиток функціональних уявлень на геометричному змісті. Оскільки перетворення графіків вивчають в алгебрі 9-го класу раніше, ніж геометричні перетворення на площині, то у ході уроків систематизації та узагальнення необхідно встановлювати зв'язок між даними перетвореннями. На рис. 2.28 представлено графіки функцій, отримані з графіка функції $y=x^2$ в результаті застосування команди GeoGebra *Розтягнути* [*<Об'єкт>*, *<Пряма>*, *<Коефіцієнт>*]. Доцільно також продемонструвати і паралельне перенесення вздовж осей координат за допомогою команди *Перенести* [*<Об'єкт>*, *<Вектор>*]. На рис. 2.28 представлено графіки, отримані з графіка функції $y=x^2$ в результаті гомотетії з центром у початку координат. Важливо, щоб учасники навчання при цьому спочатку записали формулу для нової функції, а тоді перевірили з результатом, представленим програмним засобом. Доцільно, щоб створені розробки вони могли вільно переглядати, обговорювати та оцінювати.



Розтягнути Паралельне перенесення Гомотетія $[x^2, k, (0,0)]$
 $[x^2, \text{Вісь Абсцис}, k]$

Рис.2. 29. Перетворення графіків функцій ([добірка GeoGebra](#)).

Контрольні питання і завдання

Навести приклади завдань, які можна виконувати з використанням засобів динамічної геометрії: дібрати колекції, що демонструють геометричні перетворення в архітектурі, техніці, живій природі; дослідити геометричні перетворення в українському орнаменті, створити власний орнамент; представити розробки писанки, створити розробку динамічного креслення до задачі на побудову, імітатор калейдоскопу з використанням динамічних параметрів чи генераторів випадкових чисел.

2.5. Про прикладну спрямованість навчального матеріалу

В концепції математичної освіти 12-річної школи поряд із зростанням ролі теоретичної складової, посилення прикладної спрямованості навчання визначається як один із пріоритетів розвитку освіти. Прикладні задачі – це задачі, які поставлені поза математикою і розв’язуються математичними засобами. Задачі такого виду відповідають певним вимогам: мати реальний практичний зміст, який демонструє практичну цінність набутих математичних знань; відповідати шкільній програмі; бути сформульованими доступно і зрозумілою мовою, не містити термінів, що потребують додаткових знань, які не передбачені шкільною програмою.

Практичні задачі евристичного характеру є потужним зряддям для розвитку творчих здібностей особистості. Наприклад, здібностей втілювати здобуті знання в духовні і матеріальні форми, переносити знання і уміння в нові ситуації, уміння бачити знайоме в незнайомому, винахідливість, гнучкість мислення та ін. Доступні для розуміння учнів / студентів прикладні задачі посилюють світоглядні аспекти навчання, мають незрівнянну цінність для мотивації вивчення нового математичного матеріалу. Життєвою необхідністю їх розв’язування найбільш природно обґрунтувати потребу у нових ідеях, знаннях і методах.

Один із фундаторів методології математичного моделювання Б.В. Гнеденко зазначав, що готувати не лише учнів, але й майбутніх вчителів математики потрібно так, щоб вони могли бачити, з одного боку, основний зміст сучасної математики, з іншого – її прикладні можливості, методологічні проблеми та історичний процес її розвитку. Причому, метод математичного моделювання слід розглядати як метод наукового пізнання.

Питання прикладної спрямованості матеріалу як засобу стимулювання навчальної діяльності висвітлювали М.П. Маланюк [79], Л.Л. Панченко [87], З.І. Слєпкань [98], Л.М. Фрідман [101], І.М. Шапіро [107] та ін. Застосування ПЗ GRAN1 та GRAN-2D для аналізу функціональних залежностей, наближеного відшукування найбільших і найменших значень функції на заданій множині висвітлювали М.І. Жалдак, Є.Ф. Вінниченко, Ю.В. Горошко [22]. На важливості задач з оптимізацією розв’язку акцентують увагу З.І. Слєпкань [97], С.А. Раков [50] та ін.

Прикладні задачі в процесі навчання виконують такі *дидактичні функції* як *навчаюча, виховна, розвиваюча, контролююча* [97]. Вирішальною серед цих функцій все частіше називається розвиваюча.

На основі аналізу розглянутих вище джерел, досвіду використання ПЗНП можемо констатувати:

- розв’язування практичних задач надзвичайно важливе для розвитку творчих якостей особистості, активізації його творчої діяльності;

- педагогічна практика свідчить про низьку готовність значної частини учнів і студентів до розв’язування таких задач, починаючи з аналізу умови до дослідження на прийнятність, змістовність отриманих результатів;

– впровадження ІКТН математики дозволяє значно інтенсифікувати процес розв’язування практичних, прикладних задач за рахунок перекладання операцій обчислення на програмне забезпечення.

Розглянемо схему розв’язування задач з практичним змістом, запропоновану М.Д. Касьяненко:

1. Вивчення задачі і здійснення її структурного аналізу:

а) виділення об’єктів задачі та відношень між ними;

б) виділення величин, які розглядаються в задачі;

в) пригадування і встановлення співвідношень між величинами.

2. Складання плану розв’язування задачі у загальному вигляді.

3. Побудова математичної моделі: складання числових виразів, рівнянь, нерівностей, використання готових (раніше вивчених) співвідношень, формул, тотожностей.

4. Розв’язування задачі.

5. Перевірка правильності моделювання та розв’язку задачі.

6. Дослідження здобутих розв’язків у даній практичній ситуації, знаходження остаточного результату – відповіді.

7. Пошуки інших способів розв’язування задачі, виділення найраціональнішого.

8. Опис найраціональнішого способу розв’язування задачі.

9. Складання задач, обернених до даної, їх розв’язування.

10. Встановлення меж застосування способу розв’язування задачі (для задач з іншим практичним змістом чи іншими числовими даними).

11. Складання узагальненої задачі, її розв’язування та дослідження.

Зауважимо, що не для всіх задач і не кожного разу потрібно виконувати всі етапи. Наприклад, етапи 9, 10, 11 можна включати під час розв’язування опорних задач. Поряд з повною схемою розв’язування задач з практичним змістом можна застосовувати і згорнуту [87, 22]:

1) попередній аналіз об’єкта дослідження; 2) побудова моделі; 3) реалізація моделі математичними методами; 4) аналіз одержаних результатів та їх перенесення на образ, що вивчається. В згаданій публікації задачі розглянуто тренувальні (для вироблення стійких умінь і навичок) і розвиваючі (для розвитку творчого мислення). Щоб забезпечити поетапне оволодіння евристичною схемою діяльності математичного моделювання, доцільно на першому етапі застосовувати тренувальні задачі з відносно простим змістом, такі, що текст задачі містить підказку у виборі моделі.

Комп’ютерною моделлю можна назвати таку заміну реальних об’єктів, яка дозволяє всебічно відобразити найважливіші сторони досліджуваного об’єкта або явища в навчальному процесі.

Оскільки прикладні задачі вимагають творчого підходу того, хто навчається, як на стадії створення математичної моделі, так і при відшуванні одного чи кількох способів розв’язування, інтерпретації отриманих результатів, то доцільно розв’язувати їх в кілька етапів. На першому

етапі – здійснювали аналіз умови, можливо, і постановку задачі. На другому етапі можна вислуховувати пропозиції учасників, обговорювати результати дослідження, в тому числі отримані на комп'ютері. На цьому ж етапі намічають шлях теоретичного обґрунтування. На заключному етапі можна робити остаточні висновки. Розбиття на кілька етапів корисне з метою забезпечення інкубації – *через уявний відхід від проблеми, підсвідомий аналіз і вибір підготувати ґрунт для «відкриття».*

Наведемо приклади розв'язування задач з практичним змістом за допомогою динамічної математики (QR-код [розробки GeoGebra](#), [колекція наочностей GeoGebra](#)).



Вивчаючи тему «Нерівність трикутника», помітили, з якою цікавістю школярі розв'язують задачу про оптимальне розміщення мосту через річку, яка протікає поблизу двох населених пунктів, та вирішують проблему зменшення витрат на асфальтування доріг. Для вирішення проблеми варто запропонувати створити динамічне креслення за допомогою системи динамічної математики (рис. 2.29).

На першому етапі переводимо прикладну задачу на математичну мову. Вводимо наступні абстрактні об'єкти: населені пункти – точки; береги річки – дві паралельні прямі; шлях, що з'єднує населені пункти, подаємо у вигляді ламаної. Аналізуємо, які величини задані в умові, а які потрібно в задачі знайти. До заданих відносимо відстані до берегів річки від населених пунктів, ширину річки, відстань між населеними пунктами вздовж берега. Щоб побудувати динамічне креслення, необхідно з'ясувати, які об'єкти в динамічному кресленні будуть головними, залежними чи напівзалежними. Виробляємо поданий нижче алгоритм створення креслення:

- 1) побудуємо точки A, B, C (Створити \ Точка);
- 2) проведемо берег річки AB (Створити \ Пряма);
- 3) через точку C паралельно до AB проходить другий берег (Створити \ Паралельна пряма);
- 4) позначаємо населені пункти D, E (Створити \ Точка);
- 5) вибираємо на прямій AB довільну точку F (вхід на міст) і даємо ствердну відповідь на питання про її *прикріплення до об'єкта*;
- 6) будуємо міст – перпендикулярну до AB пряму через точку F (Створити \ Перпендикулярна пряма);
- 7) знаходимо точку G – точку перетину з протилежним берегом (Створити \ Точка перетину об'єктів);
- 8) прокладаємо дорогу, що з'єднує пункти (Створити \ Ламана $DGFE$). Якщо вказівник *переліку об'єктів* устанavimo на пункті «ламана», то в полі *характеристик* з'явиться її довжина;
- 9) щоб знайти оптимальне розташування точки F , змінюють її положення, рухаючи вздовж прямої. При цьому відстежуємо зміну вели-

чини шляху як довжину ламаної або ж створюємо динамічний вираз за формулою $Len(D,G)+Len(G,F)+Len(F,E)$ (подано у форматі *GRAN-2D*). Для того, щоб створити динамічний вираз в середовищі GeoGebra, потрібно створити напис, ввівши до його складу три об'єкти – позначення відрізків. Щоб отримати підсумок, вписують вираз у відведену комірку.

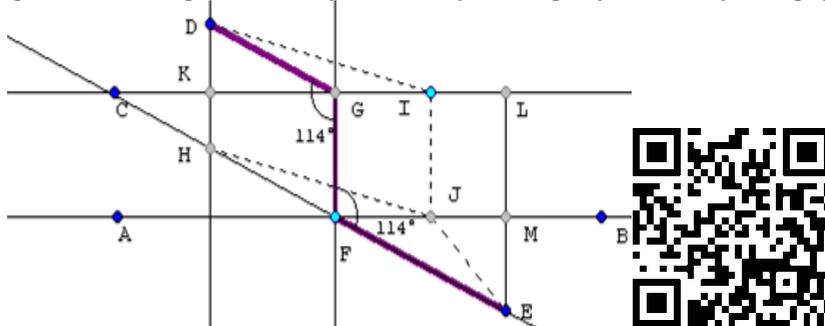


Рис.2. 30. Проект для побудови мосту ([Gran-2D](#), QR колекції [Geogebra](#))

Якщо у вчителя є змога лише демонструвати наочність через проектор, то можна пропонувати заздалегідь підготовлену модель, проставляючи відмітки біля введених об'єктів. Одночасно переглядають дану модель і з використанням мобільних телефонів.

Для довільного розташування пунктів на кресленні можемо знайти розташування точки F. Вчитель пропонує знову повернутися до вихідної проблеми і проаналізувати кожен із складових шляху. Варіюючи такою несуттєвою величиною, як відстань до берега, встановлюємо, що ширина річки не впливає на оптимальну довжину шляху. Тому переходимо до підзадачі даної задачі. За якої умови сума відстаней від населених пунктів до входу на міст буде однаковою? Учасники дослідження можуть висунути дві гіпотези – внутрішні різносторонні кути DGF і EFG рівні чи прями DG та EF паралельні. Зрештою, обидві гіпотези будуть правильними. Перевірку рівності кутів виконуємо за допомогою послуги *Обчислення \ Кут*. Користуючись динамічним кресленням, потрібно спрямували учасників навчального процесу до самостійного висновку.

Наступним кроком має йти пошук обґрунтування висунутої гіпотези. Для цього потрібно здійснити добудовування паралелограма $DGFH$ та нерівність трикутника HEJ , де J – довільна точка на прямій AB , відмінна від F . Оскільки $HE < HJ+JE$, то $DG+GF+FE < DI+IJ+JE$. Шлях $DGFE$ найкоротший.

Для самостійної роботи учням / студентам можна запропонувати розглянути розташування пунктів з одного боку річки, а додатково створити динамічне креслення за допомогою системи динамічної математики.

Задачу про побудову мосту через річку можна розв'язувати з використанням похідної. Модель-функція для дослідження за допомогою

[GRAN1](#) чи GeoGebra така ж, як і для дослідження з похідною без застосування програмних засобів. Позначимо відстань DK (рис. 2.29) через параметр $P1$ (створити відповідний бігунок), ширину річки $P2$, відстань між пунктами KL вздовж берега через $P3$, відстань EM від другого пункту до берега річки через параметр $P4$. Нехай змінна x – це відстань KG . Для дослідження [за допомогою GRAN1 створюємо об'єкт явного типу](#) задання за формулою $Y(X)=\text{Sqrt}(P1^2+X^2)+P2+\text{Sqrt}((P3-X)^2+P4^2)$. Для кожного з параметрів вказуємо невід'ємні межі. Відстані, про які йде мова в задачі, можна змінювати, рухаючи бігунок параметра. Щоб знайти точку мінімуму функції, встановлюємо курсор в найнижчу точку на графіку.

У GeoGebra можемо скористатися при цьому вкладкою *Інспектор функції* чи інструментами *Функції та Обчислення / Екстремум*, зробивши відповідний запис у рядку введення. При цьому записують *Екстремум[функція, початок відрізка, кінець відрізка]*.

Важливо правильно інтерпретувати отриманий результат і узагальнити його. Для параметрів функції, графік якої подано на рис. 2.31 ($P1=4$, $P2=0.025$, $P3=5$, $P4=6$), знайдено, що $X=2$. Для точки мінімуму буде виконуватися умова рівності тангенсів кутів DGK і EFM , тобто $P1/X=P4/(P3-X)$. Умову отримаємо, обгрунтовуючи результат за допомогою похідної $X=P1 * P3 / (P1 + P4)$.

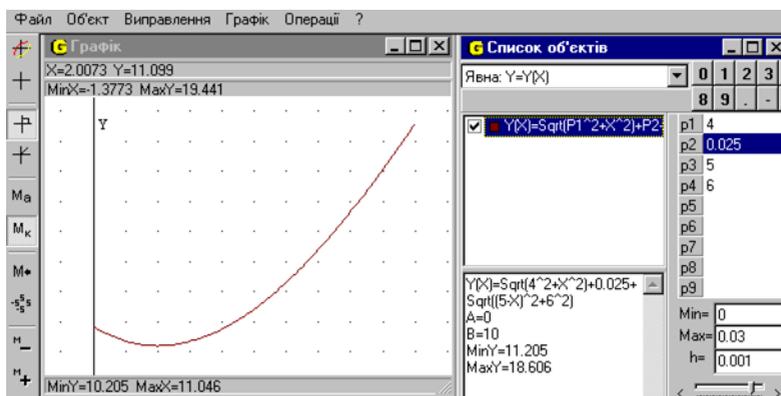


Рис.2. 31. Дослідження розташування мосту через річку ([скріншот GRAN1](#))

Вивчаючи тему «Переміщення фігур», можна побудувати динамічні креслення до наступних практичних задач:

1) З прямокутного листа жерсті розмірами 5×8 дм виготовити коробку без кришки найбільшого об'єму. Якими мають бути її виміри (рис. 2.31)?

2) При конструюванні трансформатора змінного струму заповнити порожнину котушки залізним хрестоподібним [осердям найбільшої площі](#). Знайти розміри осердя, якщо задано радіус порожнини котушки?

Створюємо розгортку поверхні коробки, дотримуючись правил побудови у системі динамічної математики. Послідовність побудов у про-

грамі така сама, як і при виконанні цих дій вручну з циркулем та лінійкою. На стороні AC прямокутника $ACDB$ виберемо довільну точку E і прикріпимо її до об'єкта пряма AC . Відріжемо у кожному з чотирьох кутів прямокутника квадратики, довжини сторін яких дорівнюють CE . Для цього знайдемо точку F – точку перетину кола (центр C , радіус CE) зі стороною CD і проведемо через точки F та E пряму, перпендикулярну до сторін прямокутника. Точку перетину прямих позначимо G . Через середину сторони AB проведемо вісь симетрії. Точка перетину її з діагоналлю AD утворить центр симетрії прямокутника. Для побудови симетричних точок користуємося послугою *Побудова точки, симетричної даній відносно прямої (точки)*. Якби лист жерсті був квадратним, то для відрізання квадратиків могли б застосувати поворот навколо центра на кут 90° . На завершення побудови розгортки обводимо контур – створюємо замкнену ланану, що містить 12 вершин.

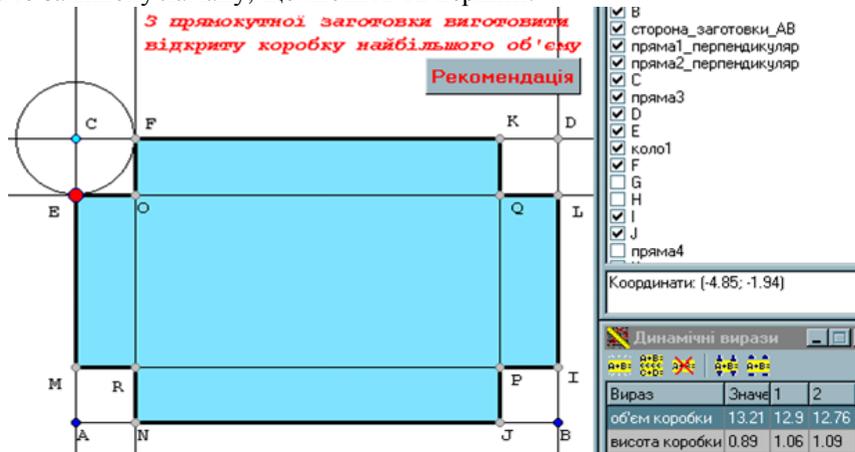


Рис.2. 32. Розгортка відкритої коробки (**GRAN-2D**, **GeoGebra**).

У **GRAN-2D**, активізувавши послугу *Обчислення \ Динамічний вираз \ Створити*, складаємо вираз для відстеження зміни об'єму коробки $LEN(O,Q)*LEN(Q,P)*LEN(O,F)$. Рухаємо точку E вздовж сторони прямокутника і, звернувшись до послуги *Обчислення \ Динамічний вираз \ Зафіксувати поточне значення*, реєструємо величину об'єму. Серед обчислених значень вибираємо найбільше. Для прямокутника з розмірами 5×8 дм встановлюємо, що відрізати потрібно квадратики зі стороною 1 дм. Для листа квадратної форми знайдемо, що максимальне значення об'єму буде за умови, коли відтинаємо квадратики зі стороною, рівною шостій частині сторони початкової заготовки.

Порівняємо, як задачу про коробку розв'язують через створення моделі у вигляді функції. Правило-орієнтир при цьому таке ж, як і для дослідження з похідною [97, 414]: 1) проаналізувати формулювання задачі, з'ясувавши, найбільше значення якої величини треба знайти; виб-

рати незалежну змінну (аргумент) x і записати цю величину у вигляді формули, що задає відповідну функцію; 2) знайти найбільше значення функції. Отже, введемо змінну x – довжину сторони квадратику і складемо функцію $V(x) = (5 - 2x)(8 - 2x)x$, при $x \in (0; 2.5)$. Побудувавши графік функції, визначають точку екстремуму і екстремум за допомогою координатного курсору, який потрібно [розмістити у найвищій точці графіка \(GRAN1\)](#). Обґрунтовують результат з використанням похідної. Знаходять похідну $V' = 12x^2 - 52x + 40$ і переконуються, що при $x = 1$ значення об'єму максимальне. У системі динамічної математики *GeoGebra* для визначення точок екстремумів та екстремумів доцільно скористатися інструментом *Інспектор функцій*.

На уроці з метою економії часу можна використати моделі в режимі *покрової побудови*. Наприклад, доцільно продемонструвати модель для створення проблемної ситуації на етапі мотивації при вивченні теми «Застосування похідної до дослідження функції», що сприятиме розвитку мотиваційно-творчої активності та спрямованості особистості. Застосування комп'ютерних технологій спрямоване на цілісне сприйняття досліджуваного явища, з'ясування його сутності, а тому сприятиме кращому засвоєнню навчального матеріалу, більш повному осмисленню його школярами. Це зробить їх діяльність більш усвідомленою і продуктивною.

Спираючись на класифікацію В.І. Андрєєва [64, с. 42], запропоновані задачі можна віднести як до навчально-творчих *задач на оптимізацію*, що передбачають вибір оптимального розв'язування та оптимізацію затрат і розвивають відповідно такі компоненти творчих здібностей особистості, як *гнучкість та раціоналізм мислення*, так і до *конструкторських задач* чи до *експериментальних задач на моделювання*. Два останні види навчально-творчих завдань дозволяють розвивати здібності особистості до конструювання та до широкого перенесення принципів, методів наукового пізнання у нові ситуації.

Конкретну задачу на відшукування екстремальних значень можна розв'язувати різними способами. Часто використовують нерівність трикутника, обмеженість функції синус і косинус; квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ досягає в точці $x = -0.5b/a$ максимального значення при $a < 0$, та найменшого при $a > 0$. Вивчаючи тему «Доведення нерівностей» в класах з поглибленим вивченням математики, доцільно запропонувати для розв'язування практичні задачі, в яких для обґрунтування використовуються нерівності Коші, Коші-Буняковського. Зазначимо, що часто опорну нерівність Коші (для $a \geq 0$, $b \geq 0$ виконується $0.5(a+b) \geq \sqrt{ab}$) використовують формально, бо не перевіряють, коли в нерівності виконується умова рівності (при $a=b$). Саме з умови рівності отримуємо важливий висновок: якщо сума двох додатних чисел стала, то їх добуток буде найбільшим тоді, коли значення цих величин рівні між собою. Якщо ж добуток двох додатних величин сталий, то їх сума буде най-

меншою тоді і тільки тоді, коли значення цих величин збігаються. Умова рівності в практичних задачах на екстремум найсуттєвіша.

На заняттях з підготовки до олімпіад при поглибленому вивченні математики бажано розглянути більш загальні твердження, сформульовані в посібнику [79, с. 82]: добуток $x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots \cdot x_n^{m_n}$ змінних $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, сума яких дорівнює даному числу S , набуває найбільшого

значення тоді, коли $\frac{x_1}{m_1} = \frac{x_2}{m_2} = \dots = \frac{x_n}{m_n}$, де m_1, m_2, \dots, m_n – довільні додатні раціональні числа. Сума $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ набуває найменшого значення, якщо добуток $x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots \cdot x_n^{m_n}$ сталий і виконується співвідношення:

$$\frac{x_1}{m_1} = \frac{x_2}{m_2} = \dots = \frac{x_n}{m_n}.$$

Розвиває творчі якості особистості як розв'язування нестандартних задач, так і відшукування нестандартного методу для розв'язування пізнавальної задачі. Наприклад, доцільно запропонувати використати нерівність Коші для обґрунтування результатів, отриманих за допомогою системи динамічної математики до такої розвиваючої задачі: під яким кутом потрібно збити три однакові дошки, щоб одержати жолоб з найбільшим поперечним перерізом (найбільшим об'ємом)?

Попередній аналіз і побудова моделі. Якщо в завданні стоїть вимога щодо об'єму жолоба, то виділяємо підзадачу: знайти рівносторонню трапецію найбільшої площі. Розчленуємо умову задачі на елементарні умови і вимоги. Об'єктом в задачі є трапеція, у якій менша основа і бічні сторони рівні. Вимогою є обчислення площі. Вибудовуємо послідовність створення об'єктів за [допомогою GRAN-2D \(рис. 2.32\)](#). Креслимо кола з центрами в точках А і В та радіусом АВ. Виберемо на одному з кіл точку С і через неї проведемо пряму, паралельну АВ до перетину з другим колом. Будемо замкнену ламану – трапецію. Довжина відрізка АВ рівна ширині дошки і меншій основі трапеції.

- 1. (A)
 - 2. (B)
 - 3. (коло центр A)
 - 4. (коло центр B)
 - 5. (пряма АВ)
 - 6. (C)
 - 7. (пряма паралельна АВ)
 - 8. (D)
 - 9. (E)
 - 10. (переріз жолоба)
- Замкнена ламана, кількість вершин: 4
Довжина: 9.164
Площа: 4.363

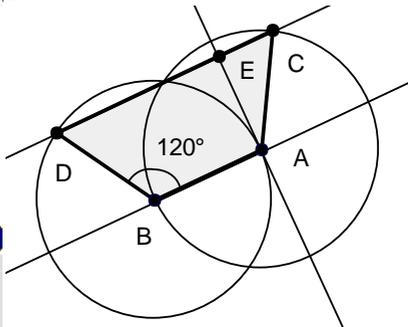


Рис.2. 33. Поперечний переріз жолоба – [рівностороння трапеція \(GRAN-2D\)](#)

Реалізація моделі засобами ІКТ. Величини, необхідні для дослідження, обчислюються в програмі автоматично. Для зменшення похибки обчислення рекомендуємо збільшити кількість значущих цифр за допомогою послуги *Налагодження програми / Налаштування*. При зверненні в GRAN-2D до послуги *Обчислення \ Кут* і вказуванні букв D, B, A, в динаміці обчислюватиметься тупий кут, який змінюється в результаті руху по колу точки C. Досліджуємо зміну площі залежно від тупого кута (динамічний вираз $AREA(A, B, D, C)$) і встановлюємо шуканий кут.

Вибудовуємо послідовність створення об'єктів за допомогою [GeoGebra \(рис.2.33\)](#):

- Креслимо кола з центрами в точках A і B та радіусом AB. Довжина відрізка AB рівна ширині дошки і меншій основі трапеції.
- Створюємо на полотні бігунок a , за допомогою якого будемо задавати тупий кут трапеції у градусах в межах від 90 до 180.
- Відкладаємо від відрізка AB проти годинникової стрілки кут a з вершиною у точці A. Отримуємо точку C.
- Через точку C проводимо пряму, паралельну до відрізка AB, до перетину з іншим колом. Отримуємо точку D.
- На завершення будемо замкнену ламану – трапецію. При цьому автоматично обчислюється площа трапеції $q1$.

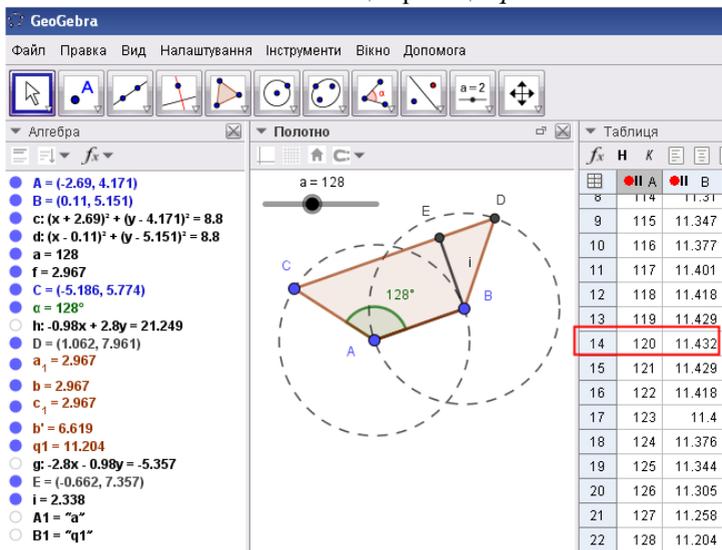


Рис. 2. 34. Побудовано переріз жолоба. Справа подано таблицю зі списком даних *Кут* і *Площа трапеції*.

Реалізація моделі засобами ІКТ. Величини, необхідні для дослідження, обчислюються в програмі автоматично. Для зменшення похибки

ки обчислення доцільно збільшити кількість значущих цифр за допомогою послуги *Налаштування програми*. Досліджуємо зміну величини площі q_1 залежно від величини тупого кута.

Для того, щоб простіше було порівнювати значення, які отримаємо для площі трапеції залежно від тупого кута, створюємо таблицю, до якої заносимо значення бігунка та величину площі трапеції. Якщо таблиця відкрита, то у контекстному меню для властивостей об'єкта з'являється рядок «Занести до таблиці». Спочатку вказуємо про занесення до таблиці значень кута, далі виділяємо трапецію і, викликавши контекстне меню, зазначаємо про занесення значень площі. При зміні значень бігунка з обраним кроком, таблиця автоматично заповнюється відповідними наборами значень (рис. 2.33). Встановлюємо, що найбільше значення площі трапеції буде для кута 120° .

Зрештою, можна будувати динамічну конструкцію і графік функції площі як геометричне місце точок з координатами (a, q_1) на одному чи різних полотнах. Спочатку будують довільну точку, а потім у властивостях змінюють її координати на (a, q_1) . Потім обирають вкладку *Локус*. У якості незалежного параметра вказують значення бігунка a , у якості залежної точки – точку з координатами (a, q_1) . Коли анімувати об'єкт-бігунок, то побудована точка буде описувати графік функції площі. Однак, визначати екстремум можемо візуально, тому що до *Локус* застосувати *Інспектор функції* чи інструмент *Екстремум* не можемо.

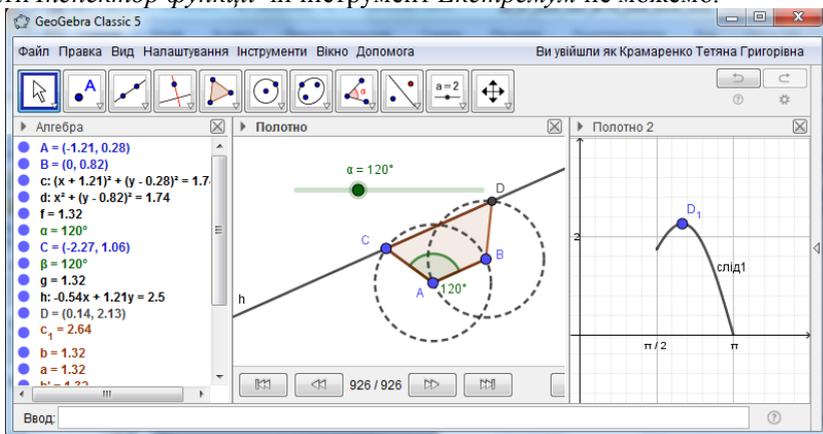


Рис. 2. 35. Справа на полотні 2 побудовано ГМТ [величини кута і площі](#).

Розглянемо ще й інші прийоми розв'язування задачі засобами GeoGebra, змодельовавши відповідну функцію площі.

Реалізація моделі-функції засобами ІКТ. Складемо функцію для обчислення площі трапеції і знайдемо її найбільше значення. Прийемо ширину дошки рівною 1, величину тупого кута трапеції a . Тоді з трику-

тника BED (рис. 2.33) отримаємо $ED = DB \cdot \sin(a - 90^\circ) = -\cos(a)$. Висоту трапеції обчислимо за формулою $BE = DB \cdot \cos(a - 90^\circ) = \sin(a)$. Тоді запишемо формулу для обчислення площі трапеції: $S(a) = (1 - \cos(a)) \cdot \sin(a)$.

Розв'язуючи задачу з використанням похідної, диференціюють функцію $S(a)$, отримують критичну точку $a = 2\pi/3$ і перевіряють, що це точка максимуму.

За допомогою команди GeoGebra *Функція* $[(1 - \cos(x)) \cdot \sin(x), \pi/2, \pi]$ можна ввести до розгляду функцію $S(x) = (1 - \cos(x)) \cdot \sin(x)$. Створений об'єкт автоматично отримав позначення f , яке за бажанням можна змінити. Далі користуємося командою *Екстремум* і у рядку введення записуємо вираз $\text{Екстремум}[f, \pi/2, \pi]$, вказавши, на якому відрізку необхідно обчислити екстремум. У результаті на графіку функції з'являється точка, абсциса якої є точкою максимуму функції, а ордината – максимумом функції, а у списку об'єктів точка з цими координатами, обчисленими наближено: $2,09 \text{ рад} \approx 2\pi/3 \text{ рад}$.

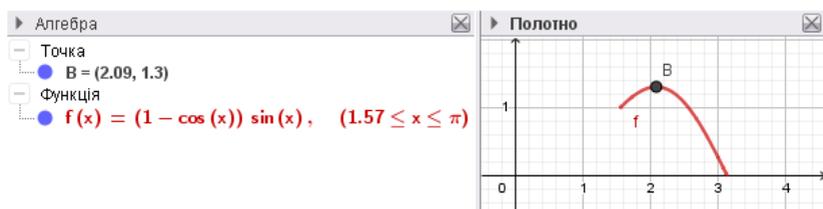


Рис.2. 36. Скріншот виконаної побудови графіка функції площі

У якості незалежної змінної x можна взяти довжину відрізка ED – півризницю основ, через a позначити довжину меншої основи та бічної сторони. За формулою $S = \frac{1}{2}(2x + 2a) \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$ обчислюватимемо

площу трапеції. Створюємо об'єкт типу *Бігунок*, яким будемо визначати ширину дошки. Для дослідження за допомогою GeoGebra створюємо об'єкт типу *Функція* за формулою $\text{Функція}[0.5 \cdot (2 \cdot x + 2 \cdot a) \cdot \sqrt{a^2 - x^2}, 0, a]$, де a – параметр (ширина дошки). Вказуємо межі зміни змінної X та параметра.

Рухаючи бігунок параметра, змінюємо ширину дошки і відстежуємо, як точка максимуму пов'язана з величиною цього параметра. Для визначення точки максимуму розташовуємо координатний курсор у найвищій точці графіка (рис. 2.36) і знаходимо, що $x_{\text{max}} = 0,5 \cdot a$, тобто згідно з позначенням $2x = a$.

Аналіз одержаних результатів та перенесення їх на образ, що вивчається. З трикутника BED встановлюємо кут збивання дощок 120° .

При обґрунтуванні гіпотези за нерівністю Коші чи з використанням похідної, попередній аналіз і побудова моделі-функції повторюють викладені вище.

Для доведення за нерівністю Коші перетворимо формулу $S = \frac{1}{2}(2x + 2a) \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$ для вираження площі трапеції. Необхідно знайти найбільше значення площі за умови сталої величини $l=3a$. Добуток $3S^2 = (x + a)(x + a)(x + a)(3a - 3x)$ набуває найбільшого значення при сталій сумі $2l = (x + a) + (x + a) + (x + a) + (3a - 3x) = 6a$ за умови $x + a = 3a - 3x$. Тоді $a=2x$.

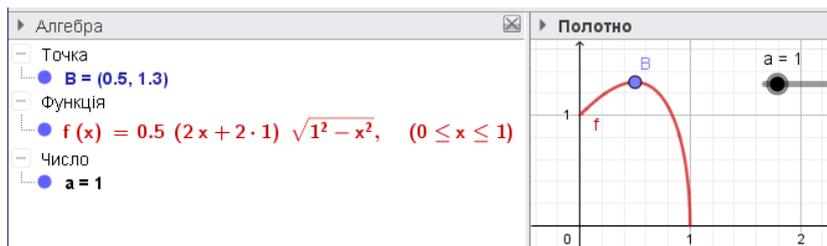


Рис. 2. 37. Графік функції [площі трапеції \(GeoGebra\)](#).

Для дослідження за допомогою GRAN1 позначаємо ширину дошки (змінна y) через параметр $P1$ і створюємо об'єкт типу Явний $y(x)$ за формулою $(X + P1) * \text{SQRT}(P1^2 - X^2)$. Вказуємо межі зміни X та параметра $P1$: $A=0, B=5$. Рухаючи бігунок параметра $P1$, змінюємо ширину дошки і відстежуємо, як точка максимуму пов'язана з величиною параметра $P1$. Знаходимо, що $X_{\max}=0,5P1$, тобто згідно з позначенням $2x=y$ (рис. 2.37).

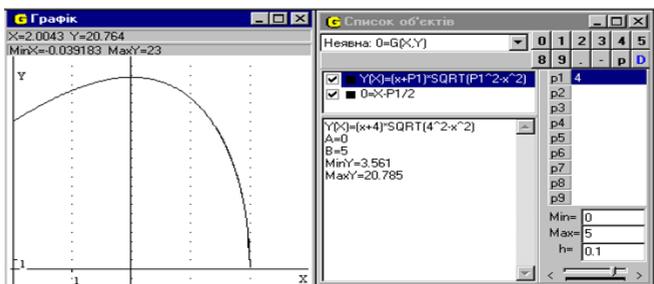


Рис.2. 38. [Графік функції площі трапеції \(GRAN1\)](#).

Проаналізуємо дидактичні функції, що їх виконує запропонована задача. *Навчаюча функція* забезпечує формування системи математичних знань, умінь і навичок на різних етапах засвоєння. В учнів / студентів формується вміння застосовувати нерівність Коші чи похідну до розв'язування задач на екстремум, будувати до них динамічні креслення. *Виховна роль задачі* проявляється у формуванні навичок праці, нау-

кового світогляду, пізнавального інтересу та самостійності. *Розвиваюча* – забезпечує розвиток вміння моделювати ситуацію, оволодіння прийомами розумової діяльності, сприяє формуванню здібності переносити знання та уміння в нові ситуації, бачити знайоме в незнайомому та ін. *Контролююча функція* спрямована на встановлення навченості, рівня загального і математичного розвитку, стану засвоєння матеріалу.

У двох наступних задачах для обґрунтування результатів також можна використати нерівність Коші. Однак ці завдання краще розглянути при вивченні теми «Площі фігур».

– В деталі, що має форму циліндра, просвердлити паралельно її осі круглий наскрізний отвір, діаметр якого дорівнював би діаметру кола, вписаного в трикутник, вписаного в свою чергу у поперечний переріз цієї деталі. Знайти максимально можливий відсоток відходів від первісної маси деталі [26, 190].

– З відходів виробництва, що є обрізками трикутної форми, штампують круглі шайби. Визначити найбільший відсоток використання матеріалу.

У результаті дослідження для першого завдання сформулюємо висновок: з усіх трикутників, вписаних в дане коло, найбільший радіус вписаного кола у рівностороннього трикутника.

Для другого завдання динамічний вираз складаємо як відношення площі вписаного кола до площі трикутника CDE (рис. 2.38): [у форматі GRAN-2D](#) за формулою $(LEN(F,G))^2 \cdot \pi \cdot 100 / \text{AREA}(C,D,E)$ чи за іншою, в якій площа кола не розписана, $\text{AREA}(\text{КОЛО}2) / \text{AREA}(C,D,E) \cdot 100$. Для рівностороннього трикутника встановимо найбільший відсоток використання матеріалу обрізків – майже 60,5%.

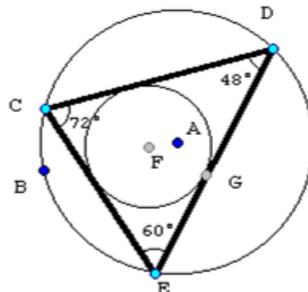


Рис.2. 39. розробка GRAN-2D

Як результати дослідження, сформулюємо важливі практичні висновки: найбільшу площу з усіх трикутників, вписаних в дане коло, має рівносторонній; з усіх трикутників зі сталою площею найбільший радіус вписаного кола також у правильного трикутника. Обґрунтуємо висунуту гіпотезу. При незмінній величині площі отримаємо

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{4S}{(a+b)+(b+c)+(a+c)} \leq \frac{4S}{3 \cdot 2a}$$

Рівність маємо при $a=b=c$.

Завдяки розв'язуванню задач кількома способами, включаючи і моделі, створені за допомогою ПЗ, вибору найдоцільнішого способу розв'язування, задач нестандартного виду формується креативна якість особистості – гнучкість мислення. Прояв цієї якості діагностується в легкості переходу від одного способу розв'язування до іншого, вмінні

знаходити декілька способів розв'язування поставленої задачі.

Навчальний матеріал слід насичувати різними економічними задачами. Наприклад, *задачами лінійного програмування* (п.1.4.3, табл.1.7), завданнями, пов'язаними з опрацюванням *статистичних вибірок* (п.2.9) тощо.

Контрольні питання і завдання

1. Із залишку тирсоплити у вигляді трапеції необхідно вирізати прямокутну кришку з максимальною площею. Як це зробити?

2. Із заготовки у вигляді трикутника вирізати паралелограм найбільшої площі так, щоб у паралелограма і трикутника був спільний кут.

3. Серед усіх прямокутників, вписаних в дане півколо, знайти прямокутник найбільшої площі.

4. З клаптиків тканини у вигляді кругів вирізати для аплікацій чотирикутники найбільшої площі. Як це зробити?

2.6. Дослідження властивостей функцій і побудова графіків

2.6.1. Змістова лінія функції у навчальних програмах з математики для закладів середньої освіти.

Функції – одна із основних змістових ліній математичної освіти в закладах середньої освіти. Одним із завдань освітньої галузі, що визначає зміст математичної освіти у основній школі є формування системи функціональних понять, умінь використовувати функції та їх графіки для характеристики залежностей між величинами явищ і процесів. У старшій школі завершується формування поняття числової функції у результаті вивчення степеневих, показникових, тригонометричних класів функцій, формування вмінь їх досліджувати і використовувати для опису і вивчення явищ і процесів.

На основі аналізу навчальних програм для 5-9 класів [82] та 10-11 класів [85] розглянемо як учні мають опанувати змістову лінію функцій. У курсі алгебри 7 класу вводиться одне з фундаментальних математичних понять – поняття функції. На вивчення теми «Функції» відводиться 10 годин [82]. За цей час розглядається функціональна відповідність, область визначення та область значень функції, способи задання функції, графік функції, лінійна функція її графік, властивості та пряма пропорційність. Ці відомості використовуються для графічного ілюстрування розв'язування лінійного рівняння з однією змінною, а також системи двох лінійних рівнянь з двома змінними.

На завершення вивчення теми учні повинні вміти наводити приклади функціональних залежностей, лінійних функцій, пояснювати, що таке: аргумент, функція, область визначення функції, область значень функції, графік функції. Формулювати означення понять функція, графік функції, лінійна функція, пряма пропорційність, а також називати та

ілюструвати на прикладах способи задання функції, описувати побудову графіка функції, зокрема лінійної та її окремого виду – прямої пропорційності. Розв'язувати вправи, що передбачають знаходження області визначення функції, знаходження значення функції за даним значенням аргументу, побудову графіка лінійної функції, знаходження за графіком функції значення функції за даним значенням аргументу і навпаки. Також вміти складати та розв'язувати задачі на пряму пропорційність на основі життєвого досвіду та побудову графіків при моделюванні реальних процесів з використанням лінійної функції тощо.

Інші види функцій розглядаються у зв'язку з вивченням відповідного матеріалу, що стосується решти змістових ліній курсу. Зокрема у курсі алгебри 8 класу в темі «Рациональні вирази» вивчають функцію $y = \frac{k}{x}$ та її графік, перед вивченням учням нагадують, що в курсі математики 6 класу вони вже ознайомились з функціональною залежністю, яку називають оберненою пропорційністю, також учнів ознайомлюють з властивостями даної функції. В темі «Квадратні корені. Дійсні числа» вивчають функції $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ їх графіки та властивості. Учні повинні вміти описувати властивості функції $y = \frac{k}{x}$ за її графіком, розв'язувати вправи, що передбачають побудову графіка функції $y = \frac{k}{x}$.

У курсі алгебри 9 класу розглядається тема «Квадратична функція», якій відводиться 20 годин. В даній темі учні пригадують вивчений раніше матеріал стосовно функцій та їх властивостей і поглиблюють свої знання, визначаючи нулі функції, проміжки знакосталості, зростання і спадання функції, найбільше та найменше значення функції. Також вивчають перетворення графіків функцій $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = f(kx)$, $y = kf(x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$. Розглядають квадратичну функцію, її графік, вивчення властивостей пов'язується, зокрема, з розв'язуванням квадратних нерівностей.

На завершення вивчення теми учні повинні вміти наводити приклади квадратичної функції, обчислювати значення функції в точці, пояснювати перетворення графіків функції $f(x) \rightarrow f(x)+a$; $f(x) \rightarrow f(x+a)$; $f(x) \rightarrow kf(x)$, $f(x) \rightarrow -f(x)$, пояснювати алгоритм побудови графіка квадратичної функції, характеризувати функцію за її графіком. Також вміти розв'язувати вправи, що передбачають побудову графіка квадратичної функції.

Для курсу «Алгебра і початки аналізу» також однією з провідних змістових ліній навчання є функціональна. У вступній частині програми зазначається, що у процесі навчання слід приділити особливу увагу функціональній спрямованості курсу. Дослідження властивостей функцій у тій чи іншій формі має супроводжувати вивчення математики протягом усього навчання. При цьому слід постійно звертати увагу учнів на зв'язок таких

понять, як функція, рівняння, нерівність. Зокрема, необхідно добиватись від учнів розуміння того, що розв'язання рівняння $f(x) = 0$ та нерівності $f(x) > 0$ є окремими випадками задачі дослідження функції $y = f(x)$ (знаходження нулів функції та проміжків її знакосталості).

У курсі алгебри і початків аналізу 10 класу для розгляду теми «Функції, рівняння і нерівності» кількість годин на вивчення теми залежить від профілю навчання. Під час вивчення даної теми учнів ознайомлюють з числовими функціями, їх властивостями, способами задання, парними та непарними функціями, побудовою графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій.

На завершення вивчення теми учні повинні вміти користуватись різними способами задання функцій, формулювати означення числової функції, зростаючої і спадної функцій, парної і непарної функцій, знаходити область визначення функціональних залежностей, значення функцій при заданих значеннях аргументу і значення аргументу, за яких функція набуває даного значення. Встановлювати за графіком функції її основні властивості, виконувати і пояснювати перетворення графіків функцій, досліджувати функції, задані аналітично, використовувати одержані результати для побудови графіків функцій, а також вміти застосовувати властивості функцій до розв'язування рівнянь і нерівностей.

У 10 класі в темі «Степенева функція» вивчають функцію виду $y = \sqrt[n]{x}$, її графік, а також степеневу функцію, її властивості та графік. Учні повинні вміти розпізнавати та зображувати графіки степеневих функцій, моделювати реальні процеси за допомогою степеневих функцій. При вивченні теми «Тригонометричні функції» учні ознайомлюються з тригонометричними функціями числового аргументу, основними співвідношеннями між тригонометричними функціями одного аргументу, періодичністю функцій, властивостями та графіками тригонометричних функцій. Учні повинні вміти формулювати властивості тригонометричних функцій, розпізнавати і будувати графіки тригонометричних функцій, ілюструвати властивості тригонометричних функцій за допомогою графіків, а також застосовувати тригонометричні функції до опису реальних процесів, зокрема гармонічних коливань.

У курсі алгебри і початків аналізу 11 класу вивчають тему «Показникова та логарифмічна функції». Учні ознайомлюються з властивостями та графіками показникових та логарифмічних функцій. По завершенню вивчення даної теми учні повинні вміти формулювати властивості показникової та логарифмічної функцій, будувати їх графіки, ілюструвати властивості показникової та логарифмічної функцій за допомогою графіків.

При вивченні функцій слід зробити наголос на моделюванні реальних процесів. В уявленні учнів характер реального процесу має асоцію-

ватись із відповідною функцією, її графіком, властивостями. Наприклад, змінювання маси радіоактивної речовини має викликати в учнів уявлення про функцію $m = m_0 e^{-kt}$ ($k > 0$). Важливо, щоб притаманні явищу властивості (наприклад, зменшення чи збільшення маси, розпад речовини з часом) пов'язувались із властивостями функцій (спадання, зростання, прямування до нуля, коли $t \rightarrow \infty$). Доцільно особливу увагу приділити показниковій функції, яка широко використовується при моделюванні процесів і явищ навколишнього світу.

Таким чином, функціональна лінія пронизує весь курс алгебри основної і старшої школи та розвивається в тісному зв'язку з тотожними перетвореннями, рівняннями і нерівностями. Властивості функцій, як правило, встановлюються за їх графіками, тобто на основі наочних уявлень, і лише деякі властивості обґрунтовуються аналітично. У міру оволодіння учнями теоретичним матеріалом кількість властивостей, що підлягають вивченню, поступово збільшується. Під час вивчення функцій чільне місце відводиться формуванню умінь будувати й аналізувати графіки функцій, характеризувати за графіками функцій процеси, які вони описують, спроможності розуміти функцію як певну математичну модель реального процесу.

2.6.2. ІКТ у навчанні змістової лінії функції

Дослідницька навчальна діяльність школяра / студента стимулює у нього розвиток креативних особистісних якостей, тому вчитель / викладач математики має не просто подати певний об'єм знань, а готувати учасників навчального процесу самостійно оволодівати знаннями, на основі міцних базових знань розвивати мислення, інтуїцію, уяву. Навчання повинне готувати до «відкриття» і не подавлювати паростки винахідливості.

Під пошуково-дослідницькою діяльністю учнів / студентів розглядаємо таку навчально-пізнавальну діяльність, яка спрямована на самостійне набуття суб'єктивно нових математичних знань на основі аналізу наявних даних, висунання гіпотез та їх обґрунтування. У ході дослідницької діяльності удосконалюються дослідницькі уміння учасників навчального процесу. Під такими розумітимемо вміння прогнозувати кінцевий результат роботи, знаходити певні закономірності, досліджувати їх на основі висунутих гіпотез, перевіряти гіпотези, шукати шляхи обґрунтування чи спростування, використовувати для дослідження програмні засоби.

Лабораторні роботи з використанням GRAN чи GeoGebra краще виконувати на початку вивчення певної теми, оскільки ці засоби більшою мірою є інструментального, ніж контролюючого характеру, і тому найбільш ефективні при ознайомленні з новим матеріалом та при розв'язуванні задач дослідницького характеру. Передувати лабораторній роботі може підготовка у формі виконання домашнього завдання, коли повторюється певний теоретичний матеріал, що буде використовуватись

при виконанні роботи. Доцільно запропонувати аналітично розв'язати приклади, щоб в подальшому перевірити правильність розв'язку за допомогою ПЗ. Можна запропонувати учням / студентам самостійно скласти чи дібрати задачі для лабораторної роботи. Для виконання роботи варто забезпечити учасників навчального процесу інструкціями щодо ходу дослідження, можливо, зошитами з друкованою основою чи електронними, в яких є відведені місця для занесення результатів спостереження та знахідок. З електронних зошитів зручно здійснюються гіперпосилання на файли ПЗ, а в роздрукованих розміщувати QR-коди посилань. Особливо зручно [такі розробки](#) подавати у середовищі GeoGebra.

Дослідження показали, що підсумовуючи результати графічних експериментів, виконаних за допомогою ПЗ, учні / студенти можуть скласти інструкції, алгоритми, схеми, узагальнювати способи розв'язування задач.

На заключному етапі роботи формулюються загальні твердження. Графічні експерименти [за допомогою GRAN1](#) чи GeoGebra дають матеріал для емпіричних узагальнень, відповіді на питання «Як?». Для теоретичного узагальнення слід обґрунтувати «Чому?».

1. Розглянемо приклади завдань, при виконанні яких зручно виконати дослідження [за допомогою GRAN1](#) (рис. 2.39). Можна описати властивості [лінійної функції](#) $y=kx+b$ ($y=P1*x+P2$), [оберненої пропорційності](#) $y=k/x$ ($y=P3/x$), [квадратичної](#) $y=ax^2+bx+c$ ($y=P4*x^2+P5*x+P6$), [дробово-раціональної](#) $y=(ax+b)/(cx+d)$. В дужках до кожної з функцій вказано об'єкт типу «Явний: $Y=Y(x)$ » з аналітичним виразом. Для дробово-раціональної функції доцільніше досліджували [об'єкт](#) $y(x)=P7+P8/(x+P9)$, тобто попередньо виділити цілу частину. Саме у такому записі краще відображається зв'язок між параметрами, властивостями функції і розташуванням її графіка. Звертаємо увагу на те, що в GRAN1 параметрів може бути до 9, причому позначення їх починається з літери P.

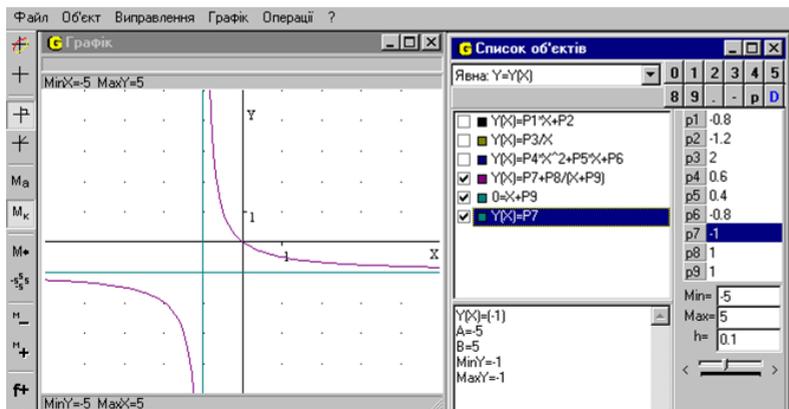


Рис. 2. 40. Побудовано графік [дробово-раціональної функції \(GRAN1\)](#).

При розгляді функції в GeoGebra, параметри, створені як бігунки, можуть позначатися різними літерами, зокрема a , b , c (рис. 2.40). Далі у рядку введення для розгляду функції явного виду набираємо вираз *Функція* $[a+b/(x-c)$, -6.5 , $6.5]$. Для побудови вертикальної асимптоти у рядку введення подаємо вираз *НеявнаКрива* $[0*y+x-c]$. Для побудови горизонтальної асимптоти вводимо вираз $0*x+a$ (рис. 2.41).

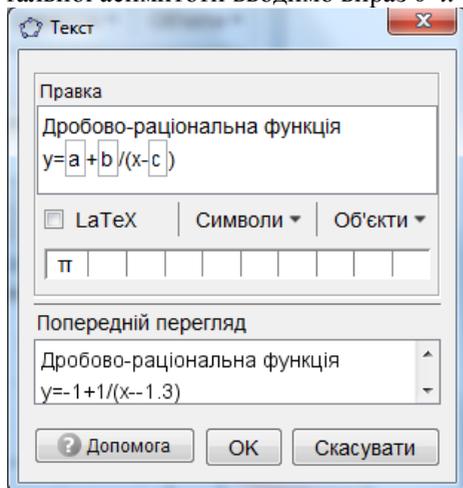


Рис. 2. 41. Вікно створення напису (QR [розробки](#) і [колекції](#) GeoGebra).

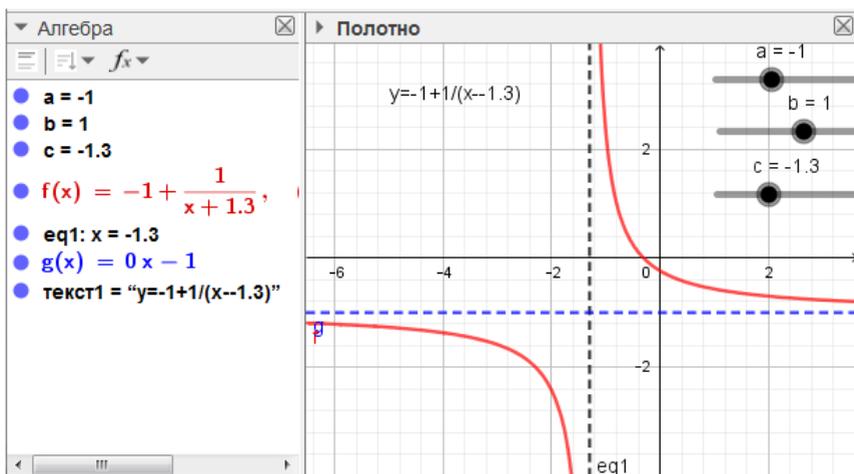


Рис. 2. 42. Скріншот з побудовою графіка дробово-раціональної функції (посилання на [наочність](#), [розробку](#), [колекцію](#)).

2. Детальніше зупинимося на переліку завдань для дослідження, які можна запропонувати при вивченні *квадратичної функції*.

▪ Для функції $y=ax^2$, $a \neq 0$ необхідно створити об'єкт типу «Явна» $y=a*x^2$ ($A=-10$, $B=10$), встановити курсор на параметр a і плавно рухати бігунок параметра, наприклад, з кроком 0.1 від значення -5 до значення 5, спостерігаючи при цьому за зміною графіка функції. В результаті дослідження учасники можуть відповісти на питання: Як коефіцієнт a впливає на напрям віток параболи? Для яких значень параметра функція досягає найбільшого (найменшого) значення? В якій точці досягається екстремальне значення?

▪ Дослідити, як будуть виглядати графік функції $y=ax^2$, $a \neq 0$, якщо побудовано графік функції $y=x^2$. Для дослідження створюють об'єкт $y=a*x^2$; встановлюють значення параметра a рівним одиниці. Змінюють значення параметра і фіксують нові функції для значень параметра -3, -2, -1, 2, 3. Заповнивши таблицю, роблять висновки щодо перетворення графіка функції $y=ax^2$, $a \neq 0$ залежно від параметра a .

▪ $y=ax^2+n$, $a \neq 0$. Дослідити за допомогою GRAN1 чи GeoGebra, як впливає значення коефіцієнта n на зміну графіка функції $y=ax^2$, $a \neq 0$. Для цього створюють об'єкт $y=p1*x^2+p2$ і змінюють значення параметра $p2$. Використовуючи послугу Об'єкт \Нова функція з зафіксованими параметрами ([лише в GRAN1](#)), будують кілька графіків для різних значень параметра n . Роблять висновок щодо перетворення графіка. У середовищі GeoGebra можна зручно досліджувати, якщо додати у властивостях об'єкта *Залишити слід*.

▪ $y=a(x-m)^2$. Дослідити, як впливає коефіцієнт m на зміну графіка функції $y=ax^2$, $a \neq 0$. Для дослідження необхідно створити об'єкт $y=p1*(x-p3)^2$ і змінювати параметр $p3$.

▪ $y=a(x-m)^2+n$. [На основі попередніх досліджень пояснити, залежить розташування параболи від значень коефіцієнтів \$a\$, \$n\$ та \$m\$.](#)

▪ Для функції $y=ax^2+bx+c$ дослідити вплив параметрів на розташування параболи (об'єкт-функція за формулою $y=p1*x^2+p2*x+p3$).

▪ Для квадратичної функції *експериментально встановити формулу абсциси вершини параболи*. З попереднього дослідження, можна зробити висновок, що параметр $P3$ не впливає на зміну абсциси вершини параболи. Тому можна зафіксувати параметр $P3$, а параметр $P2$ змінювати, наприклад, з кроком 2. Необхідно з'ясувати, як при цьому змінюється абсциса вершини. В подальшому змінюємо параметр $P1$ з кроком 2 при інших зафіксованих параметрах. Підсумовуючи результати дослідження, встановлюємо, що абсцису вершини параболи можна знайти за формулою $x_0 = -b/(2a)$.

▪ З'ясувати, як залежить розташування параболи (перетинає вісь Ox , дотикається, не перетинає) від значення дискримінанта відповідного квадратного рівняння? $D=(p2)^2-4p1p2$. Змінюючи значення коефіцієнтів $p1$, $p2$, $p3$, необхідно обчислити дискримінант. У GRAN1 для цього використовують послугу *Калькулятор*, а у *GeoGebra* з використанням рядка введення створюють вираз, включивши до нього потрібні параметри.

Обговорення результатів дослідження доцільно провести у формі інтерактивної вправи «Незавершене речення»: парабола перетинає вісь Ox , якщо ... ; дотикається до осі Ox , якщо ... ; не перетинає вісь Ox , якщо ... ; якщо дискримінант ..., то...

▪ Попереднє дослідження можна поєднати з використанням послуги *Операції \ Нерівність*, щоб за допомогою ПЗ розв'язувати нерівності виду $f(x) > 0$, $f(x) < 0$. При цьому у вікно GRAN1 *Відповіді* заноситься результат розв'язування, а на осі абсцис розв'язки виділяються жирною лінією. У той же час GeoGebra подає виділену кольором вертикальну смугу, що не відповідає запису розв'язку нерівності, як прийнято у математиці. Аналізуючи результати графічного експерименту, учень може самостійно заповнити таблицю *розв'язування нерівностей* другого степеня для функції $f(x) = ax^2 + bx + c$. Зручно для підбиття підсумків цього і попереднього завдання використати [вправу Світлани Попель \(LearningApps\)](#).

▪ Щоб *відновити графік функції $f(x) = ax^2 + bx + c$* , необхідно на площині задати три точки, скласти систему із трьох рівнянь з трьома змінними та розв'язавши її, визначити невідомі коефіцієнти. Щоб виконати завдання за допомогою [GRAN1, необхідно створити об'єкт Функція задана таблично](#). У GeoGebra записують до таблиці координати трьох точок. Точки можна вибрати, якщо вказати їх координати з екрана або з клавіатури. Для побудови параболи використовують елементи регресійного аналізу, зазначаючи степінь многочлена 2. Потрібно з'ясувати, для якого розташування точок параболу не вдасться побудувати?

Доцільною для розвитку мислення є вправа на визначення за графіком знака дискримінанта і знаків коефіцієнтів a , b , c . Розглянуті дослідження властивостей функції залежно від значень коефіцієнтів є пропедевтикою розв'язування задач з параметрами.

3. [Зміна значення коефіцієнта \$c\$ у функції \$y = ax^2 + bx + c\$](#) спричинює переміщення параболи вздовж її осі $x = -b/(2a)$ (рис. 2.42. а).

Доцільно дослідити, *вздовж якої кривої рухатиметься вершина параболи*, якщо змінювати лише коефіцієнт a ? Для цього створюють об'єкт $y = p1 * x^2 + p2 * x + p3$ і змінюють параметр $p1$, надаючи йому різних значень. Щоб встановити лінію, вздовж якої рухається вершина, потрібно залишати слід вершини параболи на площині.

У GRAN1 при цьому створюються об'єкти типу «явна» для різних значень параметра $p1$. Значно спрощує дослідження використання послуги *Об'єкт \ Нова функція з зафіксованими параметрами*. Рекомендуємо в ході дослідження заносити координати вершини параболи в таблицю. Їх можна отримати, підставивши значення параметрів у формули для координат вершини параболи. Щоб створити таблицю значень [за допомогою GRAN1, обирають](#) тип даних *Таблично*, створюють об'єкт-функцію, вказують з екрана вершини побудованих парабол та степінь многочлена, яким наближатимуть табличні дані. Оскільки крива нагадує пряму, то вибирають степінь многочлена 1 і будують цю пряму.

У GeoGebra для дослідження ГМТ доцільно створити три бігунки a , b , c , об'єкт-точку з координатами $x_0 = -b/(2a)$, $y_0 = y(x_0)$. Тоді можна скористатися інструментом *Локус*, обравши спочатку побудовану вершину параболу, а потім параметр a .

Коли змінюється лише параметр a , траєкторія вершини описується лінійною функцією $y = bx/2 + c$ (рис.2.42. б).

Якщо зафіксувати значення параметрів a ($p1$) і c ($p3$), а змінювати коефіцієнт b ($p2$), то встановимо, що вершина параболу буде рухатися вздовж іншої параболу, заданої рівнянням $y = -ax^2 + c$ (рис. 2.42. в).

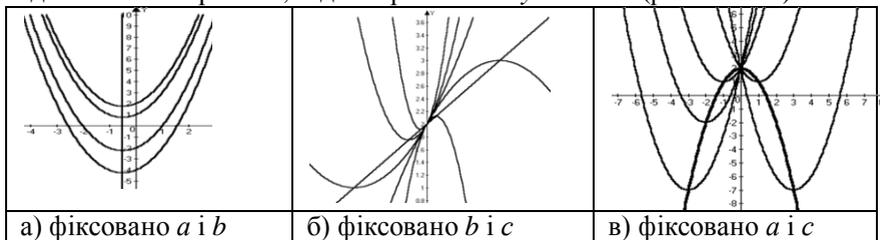


Рис.2. 43. Траєкторії руху вершини параболу.

4. Вивчаючи квадратичну функцію, доцільно дослідити *траєкторії польоту тіла, кинутого під кутом до горизонту* (рис. 2.34).

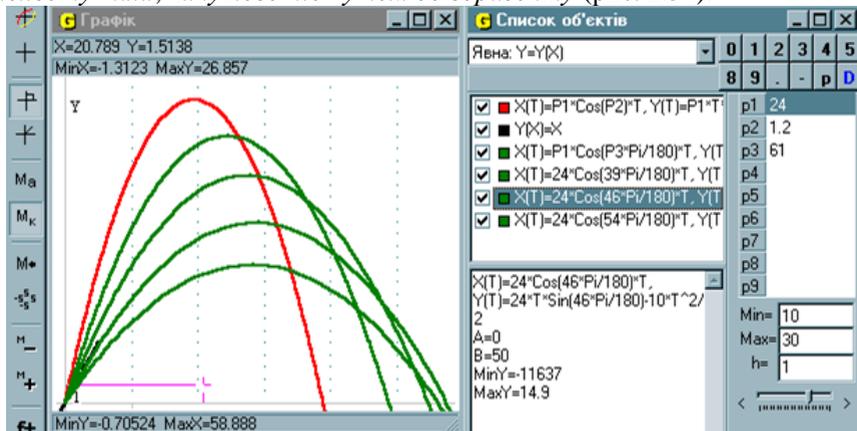


Рис.2. 44. Траєкторія польоту тіла, кинутого під кутом до горизонту
(скріншот розробки GRANI, розробка GeoGebra)

Задаємо параметрично функцію, за допомогою якої можемо визначити положення тіла над горизонтом у довільний момент часу: $x = (V_0 \cos \alpha)t$, $y = (V_0 \sin \alpha)t - gt^2/2$, будемо графік і досліджуємо, змінюючи кут α чи початкову швидкість V_0 . Спочатку виконаємо дослідження за допомогою програмного засобу. При цьому для радіанної міри кута необхідно створити об'єкти типу «параметрично» за формулами $x(t) = P1 * \text{Cos}(P2) * T$, $y(t) = P1 * T * \text{Sin}(P2) - 10 * T^2 / 2$. Рухаючи бігунку пара-

метра спочатку для $P1$, а потім для $P2$, досліджують залежність дальності польоту і висоти підйому від початкового кута і початкової швидкості. В ході дослідження необхідно встановити, що найбільша дальність польоту досягається, коли початковий кут рівний 45° .

У процесі дослідження з використанням GRAN1 встановлюють світловий курсор на функцію з параметром та використовують для створення траєкторій польоту послугу *Об'єкт \Нова функція з зафіксованими параметрами*. Графіки, побудовані за допомогою GRAN, можна розрізняти за кольорами.

Обґрунтовують результати дослідження властивостями квадратичної функції, заданої формулою $y=xtga-gx^2/(2v^2\cos^2\alpha)$.

5. За допомогою програмних засобів учні / студенти краще засвоять побудови графіків функцій через елементарні перетворення, в тому числі, і перетворення з модулями. Подаємо у табл. 2.4 запис перетворення і вираз для рядка введення в Geogebra. Продемонструємо перетворення графіків на [прикладі \$y = \sin\(x\)\$](#) (рис. 2.44 б) і [квадратичної функції \$y = \(x + 1\)^2 - 2\$](#) (рис. 2.45). При побудові графіків тригонометричних функцій потрібно додатково налаштувати масштаб вздовж осі абсцис, поставивши відмітку *Відстань* і обравши π або $\pi/2$ (рис. 2.44 а).

Таблиця 2.4.

Перетворення графіків функцій

y1	y2	y3	y4	y5	y6	y7	y8	y9	y10
$-f(x)$	$f(-x)$	$ f(x) $	$f(x)$	$f(x)+a$	$f(x+a)$	$a \cdot f(x)$	$f(ax)$	$ f(x) $	$\frac{1}{f(x)}$
$-f$	$f(-x)$	$abs(f)$	$f(abs(x))$	$f+a$	$f(x+a)$	$a*f$	$f(a*x)$	$abs(f(abs(x)))$	$1/f$

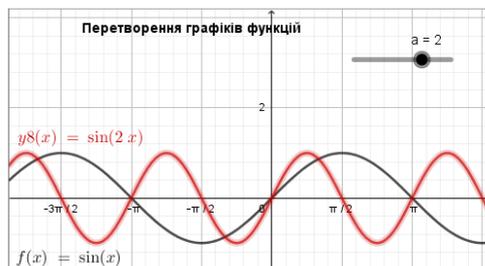
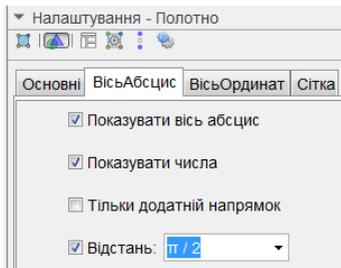


Рис.2. 45. Перетворення $f(ax)$ [графіка функції \$f\(x\)=\sin\(x\)\$](#) .

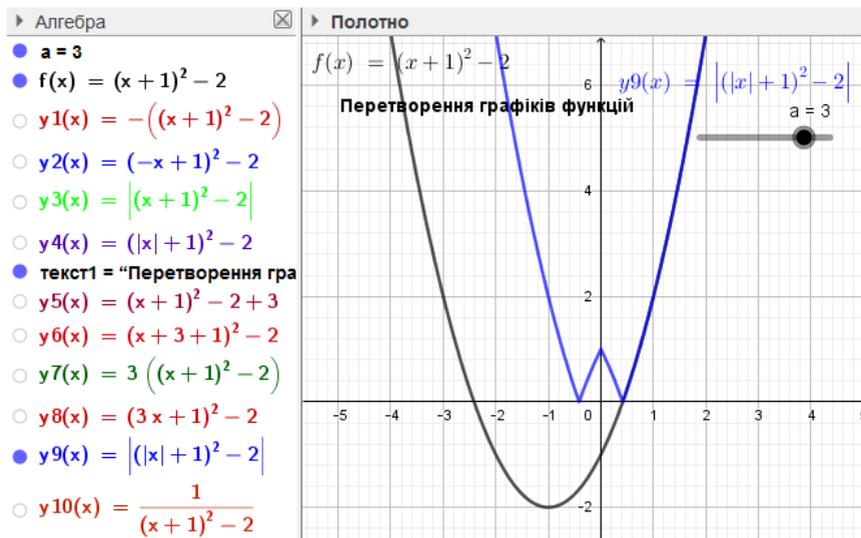


Рис. 2. 46. Перетворення $|f(x)|$ графіка функції $y = (x + 1)^2 - 2$.

6. При вивченні тригонометричних функцій новим у порівнянні з попередніми дослідженнями є поняття періодичності функції. Наприклад, формулою $I = I_m \sin(\omega(t + \varphi))$ може виражатися залежність між силою струму I та часом t у ланцюгу змінного струму. Пропонуємо дослідити за допомогою програмного засобу об'єкт-функцію $Y=P1*\sin(P2*(X+P3))$ і встановити зміст коефіцієнтів I_m , ω , φ гармонічних коливань – амплітуди, частоти, початкової фази; з'ясувати, який з коефіцієнтів впливає на зміщення графіка функції вздовж осі Ox ; на період коливань, і як саме визначається період ([розробка GRAN1](#), [розробка GeoGebra](#)).

7. Використовуючи ПЗ GRAN1, зручно подавати побудови ГМТ на площині, задані тригонометричними нерівностями з двома змінними. Щоб отримати заштриховані смуги, задані нерівністю $\cos(y-x) > 0$ (рис. 1.35), необхідно перейти від нерівності $\cos(y-x) > 0$ до подвійної нерівності

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < y - x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n < y < x + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

8. Часто важко даються побудови графіків складених функцій, що містять *обернені тригонометричні функції*. З метою самонавчання і самоконтролю доцільно використовувати ПЗ, зокрема GeoGebra, [калькулятор Desmos](#). Наприклад, разом з [графіком функції \$y = \arccos\left\(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right\)\$](#) (рис. 2.46), доцільно побудувати в одній системі координат графік внутрішньої функції $y = (1-x^2)/(1+x^2)$, горизонтальні асимптоти.

Для побудови графіка [функції \$y = \arcsin\(\sin\(x\)\)\$](#) **важливо** встановити період функції, непарність, записати аналітичні вирази, перевірити правильність запису, виконуючи побудову графіка за допомогою ПЗ. На завершення дослідження формулюють алгоритм побудови та здійснюють його перевірку для функції $y = \arccos(\cos(x))$ чи $y = \arctg(\tg(x))$.

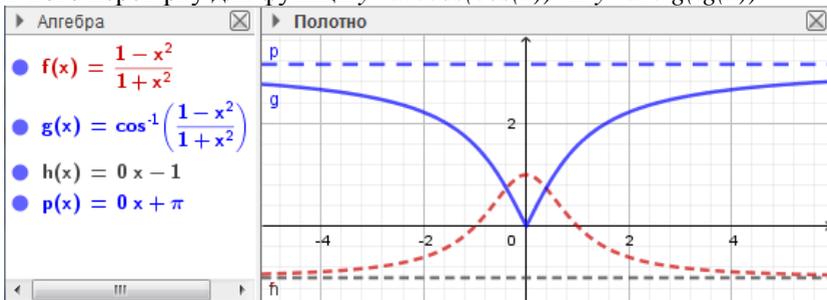


Рис.2. 47. Графік складеної [функції \$y = \arccos\left\(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right\)\$](#) , асимптота

9. Задачі, які містять *цілу і дробову частину числа*, досить часто зустрічаються на олімпіадних змаганнях різних рівнів, є нестандартними і вимагають творчого підходу до розв'язування. Завдання по праву називають «шедеврами шкільної математики», тому доцільно розглянути їх на факультативних заняттях та спецкурсах математики [77], [79].

Дробове число можна подати у вигляді суми двох доданків, один з яких ціле число, а другий – невід'ємний правильний дріб. Нагадаємо, що ціла частина числа – це найбільше ціле число, що не перевищує дане. Дробова частина визначається як різниця між числом і його цілою частиною. З означення слідує, що дробова частина невід'ємна. Для будь-якого x виконуються подвійні нерівності $[x] \leq x < [x] + 1, 0 \leq \{x\} < 1$.

У GeoGebra для визначення цілої частини потрібно скористатися функцією floor(x) (рис. 2.47). Щоб побудувати графік функції $y = [x^2 - 4|x|]$, краще у *Рядку введення команд* подати вираз $x^2 - 4x$, а потім створити об'єкт-функцію, використовуючи команду floor(f) (рис. 2.49).

[Функція fractionalPart\(x\) \(ДробоваЧастина\(x\)\)](#) визначає [дробову частину числа не так, як прийнято у вітчизняних підручниках математики](#). Для дробової частини у рядку введення команд потрібно записати, виходячи з означення $\{f(x)\}$, вираз $f(x) - [f(x)]$ (рис. 2.48, 2.50, 2.51).

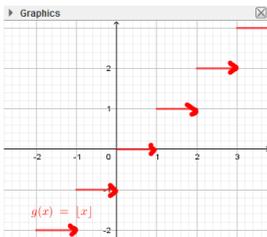


Рис.2. 48. [Графік функції](#) $y=[x]$.

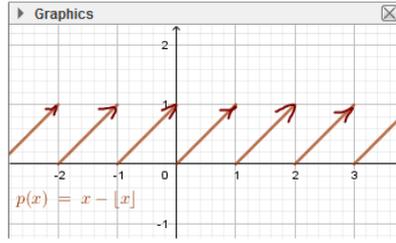


Рис.2. 49. [Графік функції](#) $y=\{x\}$.

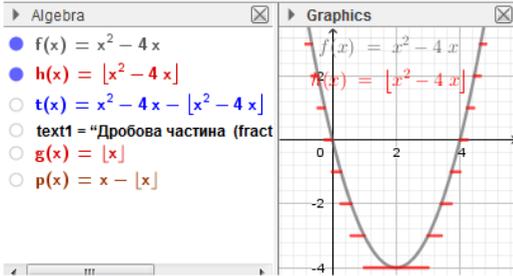


Рис.2. 50. [Графік](#) $y=[x^2 - 4x]$

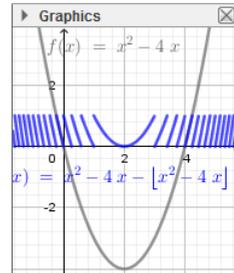


Рис.2. 51. [Графік](#) $y=\{x^2 - 4x\}$

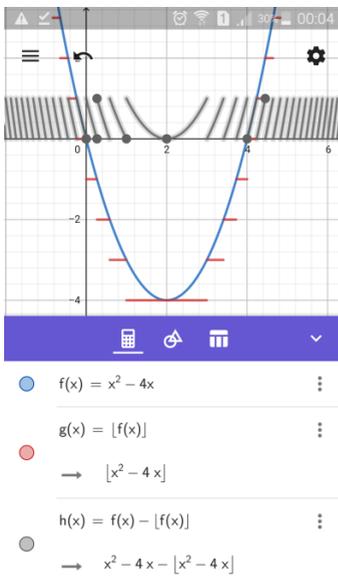


Рис.2. 52. Скрін екрана мобільного телефону

Щоб побудувати за допомогою [GRAN1 графіки функцій](#) $y=[x^2 - a|x|]$ і $y=\{x^2 - a|x|\}$, створюють [для першої функції об'єкт явного виду задання](#) $y = INT(x^2 - P1 * ABS(x))$.

Для дробової частини на панелі введення даних нема зарезервованої кнопки, тому її потрібно ввести виходячи з означення: $\{f(x)\} = f(x) - [f(x)]$.

Маємо побудувати графік функції $y = x^2 - P1 * ABS(x) - INT(x^2 - P1 * ABS(x))$ [Графіки розривних функцій в GRAN1](#) потрібно будувати в режимі «за точками».

Варто наголосити на тому, що навіть тоді, коли графік побудований за допомогою ПЗ, залишається невирішеною проблема «виколотих» точок. Тому на графіках функцій, побудованих за допомогою ПЗ (рис. 2.52), позначки для «виколотих» точок проставлені вручну.

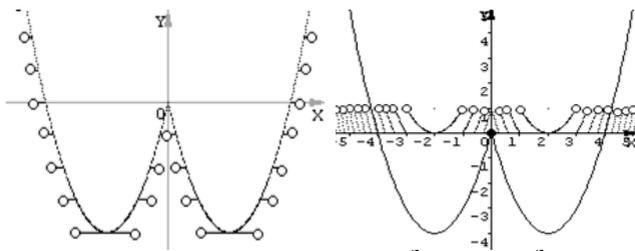


Рис. 2. 53. Графіки функцій $y=|x^2-4|x|$, $y=\{x^2-4|x\}$

10. Вивчаючи похідну, корисно провести за допомогою GRAN чи GeoGebra дослідження, які допоможуть глибше усвідомити сутність цього поняття, **з'ясувати геометричний зміст похідної**, «відкрити» **теореми про необхідну умову існування локального екстремуму**; достатню умову монотонності функції; висунути гіпотези стосовно зв'язку, який існує між знаком другої похідної функції та опуклістю графіків функції.

Комп'ютерні експерименти за допомогою ПЗ можна виконати у двох режимах. 1) Провести дослідження [за допомогою GRAN1](#) можна з використанням послуги *Операції. Похідна \ Будувати дотичну*. Послугу *Обчислення \ Похідна* зручно застосовувати також при формуванні поняття приросту функції, границі функції в точці, поняття похідної, оскільки [за допомогою GRAN1](#) можна будувати як дотичну, так і січну. Приріст аргументу потрібно плавно зменшувати через параметри. При цьому рухається і січна.

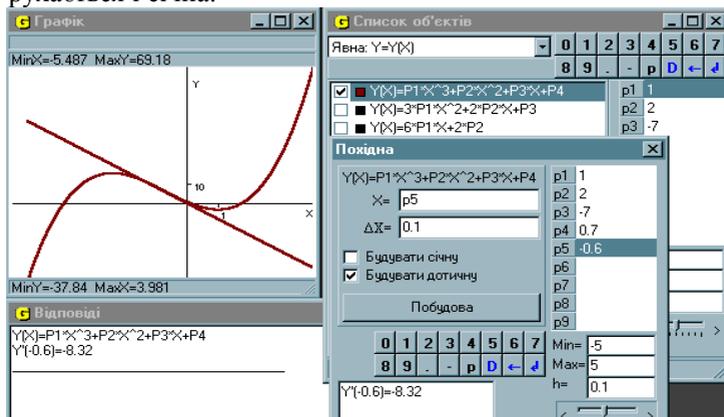


Рис.2. 54. [Дотична рухається вздовж кривої \(GRAN1\)](#)

Аналогічні дослідження можна здійснити і [за допомогою GeoGebra](#). Попередньо слід побудувати графік функції. Потім обираємо на графіку функції довільну точку і через неї проводимо [дотичну до графіка](#). Дотична до графіка функції $f(x)$ проходить через точку $(x_0, f(x_0))$. Потім обираємо інструмент *Нахил прямої*. Далі рухаємо вибрану точку вздовж

графіка. У ході дослідження спостерігаємо, як змінюється значення кутового коефіцієнта дотичної. Якщо абсцису точки дотику задати через параметр, то можна, плавно змінюючи значення параметра, рухати як дотичну вздовж кривої, так і відповідну точку на графіку похідної (рис. 2.55). При цьому динамічно обчислюється похідна функції в кожній з розглянутих точок. Значення аргументу та значення похідної можна фіксувати та заносити до таблиці. Для цього відкривають таблицю, виділяють побудований об'єкт, значення якого цікавлять, і зазначають, що їх необхідно внести до таблиці. В точках екстремумів отримуємо нульові значення похідної. На проміжках зростання функції – додатні значення похідної, на проміжках спадання функції – від'ємні значення похідної.

Завдяки демонстраціям з використанням ПЗ школярі/студенти краще усвідомлюють поняття граничного переходу в означенні похідної функції. Важлива зазначена послуга і при вивченні теми «Наближені обчислення з використанням похідної». З використанням ПЗ зручно продемонструвати зв'язок між приростом функції та диференціалом.

2) Побудувати в одній системі координат графіки функції та її першої похідної; графіки функції та її другої похідної.

Відзначимо, що при дослідженні [за допомогою GeoGebra](#) можна обчислити похідну вказаного порядку для введеної функції (*Функції / Похідна*). При цьому буде автоматично побудовано графік похідної.

Побудови графіків можна здійснювати як на одному полотні, так і на різних. Можна запропонувати для дослідження такі функції: $y=x^3$, $y=x^4$, $y=x^5$, $y=|x|$, $y=x^3-3x^2$, $y=3x^4-7x^3+3x-7$, $y=0.25x^4-2x^2$, $y=x-x^3$, $y=x^2-\ln(1+2x)$, $y=x^2-\ln(1-2x)$. В одній із запропонованих нами наочностей є можливість подавати довільну з функцій.

[Розглянемо кубічний многочлен](#). Для дослідження за допомогою GeoGebra вводять у рядку команд для кубічного многочлена вираз $a \cdot X^3 + b \cdot X^2 + c \cdot X + d$. Об'єкт буде автоматично позначено f . Далі для обчислення першої похідної вводимо вираз *Похідна(f)*, для другої похідної - вираз *Похідна[f,2]*, вказавши поряд з функцією порядок похідної для обчислення. Доцільно на графіку функції обрати точку і через неї провести вертикальну пряму до перетину з графіком [похідної \(рис. 2.54\)](#). Для виявлення зв'язку між функцією та її другою похідною, доцільно побудувати дотичну до графіка функції і відстежувати, як розташований графік функції по відношенню до графіка [дотичної \(рис. 2.55\)](#).

У ході лабораторної роботи в комп'ютерному класі чи евристичної бесіди учні/студенти аналізують побудовані графіки, порівнюють проміжки монотонності функції та проміжки знакосталості першої похідної, проміжки опуклості графіків функцій та проміжки знакосталості другої



похідної, співставляють нулі похідної та точки екстремумів, нулі другої похідної та точки перегину. Пропонуємо низку запитань і підводимо до формулювання необхідної та достатньої умов існування екстремуму, до складання алгоритму дослідження на монотонність та екстремуми, на опуклість графіків функцій та точки перегину графіків.

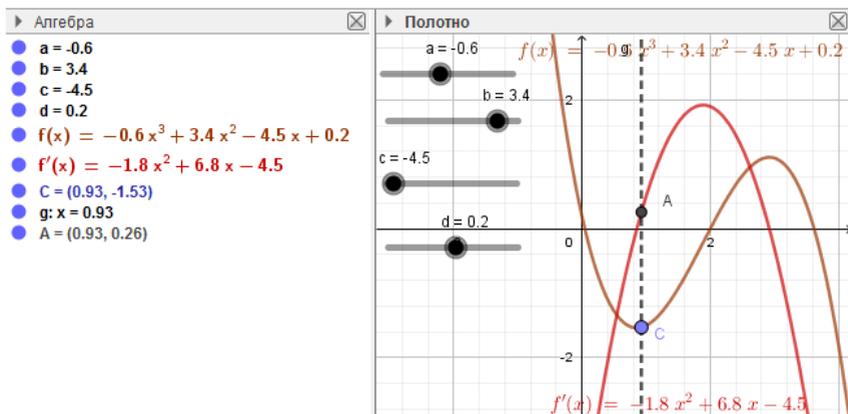


Рис.2. 55. Побудовано графіки функції та її похідної

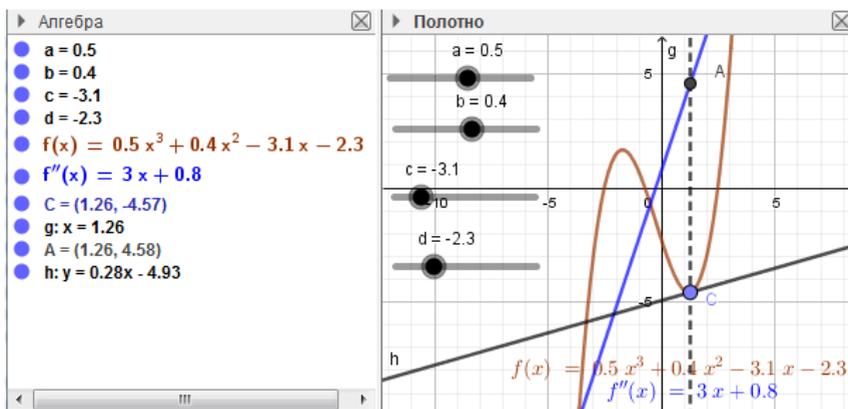


Рис.2. 56. Побудовано графіки функції та її другої похідної.

Досліджуючи функцію на монотонність та екстремуми, заповнюють таблицю, у якій фіксують проміжки монотонності функції, точки екстремумів, екстремуми, проміжки знакосталості похідної, критичні точки (стаціонарні точки і точки з області визначення, в яких похідна не існує).

У процесі дослідження на опуклість графіків функцій заповнюють таблицю, в якій фіксують проміжки, на яких графік опуклий вгору, вниз, точки перегину, проміжки знакосталості другої похідної, нулі другої похідної.

Дослідникам слід надавати диференційовану допомогу. Щоб прос-

тіше було аналізувати графічні образи, можна запропонувати підказки у вигляді незакінчених речень. Наведемо приклади таких речень.

- Якщо a – точка екстремуму, то похідна, якщо вона в цій точці існує, ...
- Якщо диференційовна функція зростає (спадає), то перша похідна ...
- Критична точка буде точкою максимуму (мінімуму), якщо ...
- Диференційовна функція зростає (спадає) тоді, коли похідна ...
- Якщо a – точка перегину, то друга похідна ...
- Якщо графік двічі диференційовної функції опуклий вгору (вниз), то друга похідна за умови, що вона існує, буде ...
- Точка a тоді буде точкою перегину, якщо ...
- Графік двічі диференційовної функції тоді опуклий вгору (вниз), якщо друга похідна ...

11. Обчислення інтегралів.

Переходячи до вивчення визначених інтегралів, доцільно провести дослідження, які сприяють кращому усвідомленню поняття інтегральна сума. З цією метою використовують інструмент GeoGebra СумаПрямокутників(<Функція>, <Початкове значення x >, <Кінцеве значення x >, <Кількість прямокутників>, <Положення початку прямокутника>). Спочатку потрібно створити повзунок (натуральні числа), яким можна задавати кількість прямокутників. Це впливатиме на точність обчислення інтегральної суми, збільшуючи число прямокутників отримуємо точніші суми. Такий підхід дає можливість краще усвідомити тим, хто навчається, сутність граничного переходу. Наприклад, за виразом СумаПрямокутників[($x-2$)²,2,4,n,0] отримаємо зображення, подані на рис. 2.57.

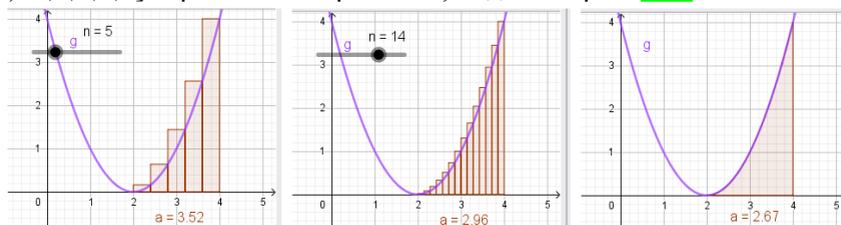


Рис.2. 57. Зображення прямокутників для [обчислення інтегральних сум](#).

12. Розглянемо як графічно розв'язувати системи нерівностей, до складу яких входять нерівності виду $y < f(x)$, $f(x) \leq y$, $f(x) > y$, $f(x) \geq y$. Наприклад, щоб графічно розв'язати систему з двох нерівностей $y < ax^2 + bx + c$ та $y > dx + c$, доцільно спочатку створити відповідні бігунки, які подаватимуть параметри. Далі подати у рядку введення вираз $(y < ax^2 + bx + c) \cap (y > dx + c)$. Заштриховане місце точок, які задовольняють систему нерівностей, подано на [рис. 2.58](#).



Рис.2. 58. Місце точок, які задовольняють [систему нерівностей](#), QR-коди наочностей GeoGebra для нерівності та [добірці завдань для логарифмічної та показникової функції](#).

13. Розглянемо добірку завдань для вивчення властивостей логарифмічної функції за допомогою GeoGebra (рис. 2.56). До тематичного оцінювання потрібно знати означення, властивості логарифмів, графік логарифмічної функції, будувати графіки за допомогою перетворень, застосовувати властивості функції до розв'язування рівнянь та нерівностей. У рядку введення до виразів можемо додавати такі функції: натуральні логарифми $\ln(x)$, десяткові $\lg(x)$, за 2 $\lg_2(x)$ та логарифми $\log(b, x)$ з довільною допустимою основою b . В дужках на першому місці вказується основа, через кому вираз під знаком логарифма.

- [Об'єм легенів людини](#)
- [Обернена до показникової](#)
- [Виберіть графік логарифмічної](#)
- [Знайдіть число e'](#)
- [Порівняти зростання](#)
- [Елементарні перетворення графіків](#)
- [Властивості функцій](#)
- [Функції з модулями](#)
- [Найпростіші нерівності](#)
- [Знайти площу фігури](#)

$$y = \lfloor \log_2(|x| - 3) - 1 \rfloor$$

$$y = \lfloor \log_2|x - 3| - 1 \rfloor$$

$$\log_2(13 - x) \leq 2x + 11$$

$$\log_{0.5}(2 - x^2 - y^2) \geq 0$$

$$\log_{|y|-x^2}(x^2 + y^2) \geq \log_{|y|-x^2} 4$$

$$ax^2 = \ln x$$

$$\ln x = ax$$

$$\log_{a+x}(ax - x^2) < \log_{a+x} x$$

$$\log_{\frac{1}{x}}(a - x) \leq 1$$

$$\log_x(x - a) > 2$$

Рис.2. 59. «Логарифмічна функція» ([GRAN1](#), [колекція GeoGebra](#))

• На етапі мотивації доцільно навести приклади залежностей, які виражаються через логарифмічну функцію. За формулами, що містять логарифмічні функції, визначають інтенсивність звуку, повну вартість продукції, виготовленої на фабриці; їх використовують при обчисленні сили землетрусу (показники шкали Ріхтера), [об'єму легенів людини](#) за формулою $V(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$, де x – вік людини в роках ($x \in [10; 100]$) [98]. Графік функції *об'єму легенів людини* представлений [на рис. 2.57](#). Для його побудови за допомогою GeoGebra у рядку введення даних набирають вираз $110 * (\ln(x) - 2) / x$. Доцільно змінити масштаб вздовж Оу.

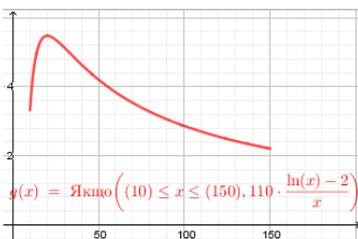


Рис.2. 60

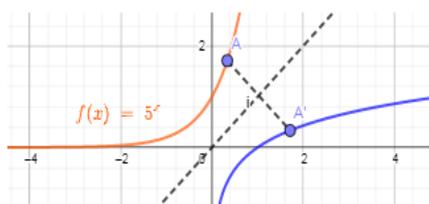


Рис. 2. 61

▪ **Пропонуємо знайти [функцію, обернену до показникової](#) $y = a^x$** , скориставшись відомим алгоритмом відшукування формули функції, оберненої до даної: встановити проміжки монотонності і з'ясувати, що показникова функція оборотна; розв'язати рівняння відносно змінної x ; поміняти позначення незалежної і залежної змінних. Можна розглянути неявно задані функціональні залежності $y - P1^x = 0$ і $x - P1^y = 0$. Для параметра P1 зазначаємо межі зміни $[0.1; 7]$ та крок зміни 0,1. Змінюємо основу, рухаючи за допомогою миші чи клавіш управління курсором ←, → бігунок параметра, і досліджуємо зміну графіків функцій. Графіки даних функцій симетричні відносно прямої $y=x$ (рис. [2.40](#)). В результаті дослідження можна зробити висновки про залежність властивостей логарифмічної функції від основи логарифма і порівняти властивості логарифмічної функції з властивостями показникової. Потрібно передбачити, що параметр набував лише додатних значень і не був рівним 1.

▪ Один із шляхів **введення числа e** ($e=2.718281828\dots$) полягає в тому, що будують дотичну до графіка показникової функції $y = a^x$ в точці $x=0$ чи до графіка логарифмічної $y = \log_a x$ в точці $x=1$ і визначають кут, який вона утворює з додатнім напрямом осі Ox . Основу, при якій тангенс рівний одиниці (кут 45°), позначають e . Завдання на *визначення числа e* зручно виконати за допомогою GeoGebra. З цією метою створюють об'єкти $y = P1^x$ і $y = \text{Log}(P1, x)$ та зазначають межі зміни параметра $P1$, $P1 \in [2; 3]$ і крок зміни $h=0,1$. Обираємо на одному з графіків довіль-

ну точку, будуюмо в ній *дотичну*, визначаємо кутовий коефіцієнт за допомогою інструмента *Кут прямої*. Відслідковуємо, для якого параметра – основи значення кутового коефіцієнта рівне одиниці. При цьому у відкрити таблицю можемо записувати значення основи і тангенса кута. Щоб визначити число e точніше, для $P1$ зазначають межі зміни параметра $P1 \in [2.7; 2.8]$, зменшують крок зміни параметра до $h=0,01$.

▪ За допомогою GRAN1 доцільно провести дослідження, які дозволять *порівняти швидкість зростання степеневих функцій* $y = x^\alpha$, $\alpha > 0$, *показникової та логарифмічної функцій* з основою, більшою одиниці, при $x \rightarrow +\infty$. З цією метою створюють об'єкти: $Y(x)=x^{P2}$; $Y(x)=(P1)^x$; $Y(x)=\log(P3,x)$. Для кожного з параметрів задають область зміни і крок зміни: $P1 \in (1;7)$, $P2 \in (0,1;15)$, $P3 \in (1;7)$, $h=0,1$. Потреба у виконанні запропонованих досліджень викликана труднощами, які часто виникають у школярів і студентів при побудові графіків функцій. Наприклад, при поглибленому вивченні математики, таких, як $y=x^2e^x$, $y=x\ln^{-2}(x)$, $y=(x\ln(x))^{-1}$. Для останньої функції найчастіше помилка допускається при обчисленні границі, коли x прямує до нуля справа. Підсумовуючи результати дослідження, здійснюють емпіричне узагальнення, яке сприятиме глибшому усвідомленню теоретичного матеріалу, пов'язаному з обчисленнями границі функцій, з відшукуванням горизонтальних та вертикальних асимптот графіків.

▪ Розглянемо, як можна подати з використанням динамічної математики побудови графіків функцій, що містять модулі: $y = |\log_2(|x| - 3) - 1|$, $y = |\log_2|x - 3| - 1|$ (рис. 2.41). Найчастіше допускають помилки при записуванні ланцюжка перетворень, оскільки плутають, що раніше потрібно будувати $y = \log_2(x - 3)$ чи $y = \log_2|x|$ і для якої з функцій? Запропонуємо для аналізу сім ланцюжків для побудови графіка першої функції і виберемо з них правильні. Для решти ланцюжків необхідно пояснити, які саме кроки здійснити неможливо.

Для функції $y_5 = |\log_2(|x| - 3) - 1|$ проаналізуємо варіанти побудови:

$$1) y_1 = \log_2 x; y_2 = \log_2(x - 3); y_3 = \log_2(x - 3) - 1, y_4 = |\log_2(x - 3) - 1|, y_5.$$

$$2) y_1; y_2 = \log_2(x - 3); y_3 = \log_2(|x| - 3), y_4 = \log_2(|x| - 3) - 1.$$

$$3) y_1, y_2 = \log_2 x - 1, y_3 = \log_2(x - 3) - 1, y_4 = |\log_2(x - 3) - 1|.$$

$$4) y_1, y_2 = \log_2 x - 1, y_3 = \log_2(x - 3) - 1, y_4 = \log_2(|x| - 3) - 1.$$

$$5) y_1, y_2 = |\log_2 x|, y_3 = |\log_2 x - 1|, y_4 = |\log_2(x - 3) - 1|, y_5.$$

$$6) y_1, y_2 = \log_2|x|, y_3 = \log_2(|x| - 3), y_4 = \log_2(|x| - 3) - 1, y_5.$$

$$7) y_1, y_2 = \log_2|x|, y_3 = \log_2|x| - 1, y_4 = \log_2(|x| - 3) - 1, y_5.$$

Обговорюємо, чому в 5-му і 6-му варіантах не можна здійснити перехід 2–3, а в 7-му перехід 3–4.

Для функції $y = |\log_2|x-3|-1|$ складаємо ланцюжок перетворення графіка: 1) $y_1 = \log_2 x$, 2) $y_2 = \log_2|x|$, 3) $y_3 = \log_2|x-3|$, 4) $y_4 = \log_2|x-3|-1$, 5) $y = |\log_2|x-3|-1|$. Пропонуємо [порівняти послідовність побудов](#) для даної та розглянутої вище функцій і узагальнити алгоритми побудови, щоб в подальшому уникнути помилок, пов'язаних зі складанням ланцюжка перетворень. Для самостійної роботи можна рекомендувати розглянути функції $y = |2\log_3(|x|+3)-1|$ або $y = |\log_{0.5}|x+2||$.

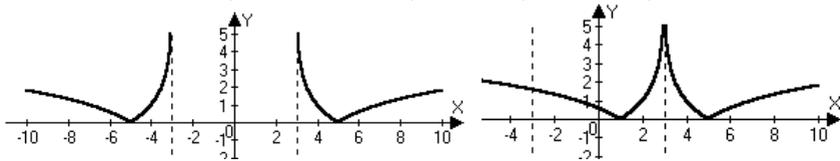


Рис. 2.41. $y = |\log_2(|x-3|-1|$ $y = |\log_2|x-3|-1|$

▪ Значну кількість помилок допускають при розв'язуванні логарифмічних нерівностей, що мають змінну основу. Потрібно розглянути два випадки: а) основа більша одиниці, б) основа набуває значень від нуля до одиниці. Нерівність $\log_{|y|-x^2}(x^2 + y^2) \geq \log_{|y|-x^2} 4$, що має змінну основу, рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} |y| - x^2 > 1, & \begin{cases} 0 < |y| - x^2 < 1, \\ x^2 + y^2 \geq 4, \end{cases} \\ x^2 + y^2 \geq 4, & \begin{cases} 0 < |y| - x^2 < 1, \\ 0 < x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases} \end{cases}$$

Для побудови за допомогою GRAN1 створюємо об'єкт неявного типу задання $0=G(x,y): 0=\log(\text{ABS}(y)-x^2,(x^2+y^2)/4)$ і використовуємо послугу *Операції. Нерівність. $G(x,y)>0$* .

Контрольні питання і завдання

1. Проаналізувати можливості застосування динамічної математики з метою розвитку здібностей генерувати ідеї, висувати гіпотези в умовах обмежених даних, прогнозувати розв'язування творчих задач, інтелектуально вбачати і висувати оригінальні підходи, методи.

2. Оцінити можливості засобів GeoGebra, GRAN1, Алгебра, 7-9 клас, Алгебра, 10 клас для перевірки результатів розв'язування задачі, удосконалення умінь знаходити власні помилки та причини їх появи.

3. Скласти за допомогою ПЗ рівняння дотичної до графіка функції $y = \log_2(x) - \cos(x/20)$ у точці з абсцисою $x_0 = 5$.

4. Побудувати графіки функцій $y = |2\log_3(|x|+3)-1|$, $y = |\log_{0.5}|x+2||$.

2.7. Розвиток креативності особистості за допомогою ейдографіки

Ейдографіка – різновид комп’ютерного моделювання за допомогою графіків функцій та рівнянь. Це своєрідний симбіоз застосування математики, ПЗ і мистецтва. Як зазначає С.П. Параскевич [88, 67] ([переглянути презентацію «Астроарт»](#)), самостійне створення образів у техніці ейдографіки є продуктивною діяльністю і сприяє розвитку креативності особистості завдяки інтегрованому поєднанню математичних та художньо-естетичних знань при посередництві комп’ютерного забезпечення; реальній можливості самовиразитися, створити щось нове, особистісно значуще; збагаченню навчального процесу позитивними емоціями; активізації навчально-пізнавальної діяльності. Створення малюнків з використанням динамічної математики є одним із підходів запровадження STEM-освіти.

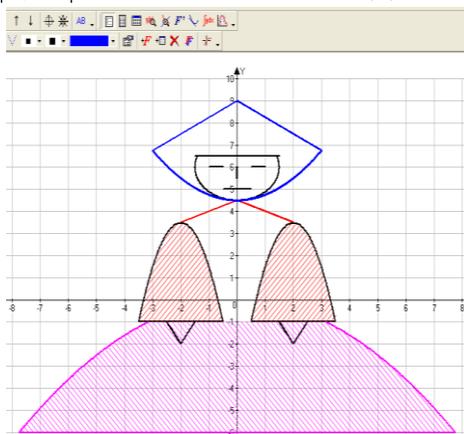
Значно підвищує інтерес школярів до вивчення математики *дидактична гра*. Вплив її на школярів проявляється в тому, що гра вносить деякий елемент невизначеності, що збуджує, активізує розум, налаштовує на пошук оптимальних рішень. Використовуючи у навчанні дидактичну гру, викладач може розвивати в учасників навчального процесу такі компоненти творчих якостей як фантазія, творча уява, образність мислення. Л.В. Тополя, М.Е. Марко виокремлюють наступні притаманні педагогічній грі риси: вільна розвиваюча діяльність, що починається за бажанням учня, заради задоволення від самого процесу діяльності, а не тільки від результату (процедурне задоволення); творчий, в певній мірі імпровізаційний, активний характер діяльності (поле творчості); емоційна піднесеність діяльності (емоційна напруга), що передбачає як суперництво, так і співпрацю в команді; змагання та ін.; наявність прямих чи непрямих правил, що відображає зміст гри, логічну і часову послідовність її розвитку. За характером педагогічного процесу виділяють такі групи гри: а) навчальні, тренувальні, контролюючі, узагальнюючі; б) пізнавальні, виховні, розвиваючі; в) репродуктивні, продуктивні, творчі та інші. Дидактична гра, що використовується як засіб розвитку пізнавальної активності особистості, є грою за готовими правилами.

У формі конкурсу художників-математиків рекомендують провести заняття побудови графіків функцій і автори посібника¹. Бажано об’єднати учасників у групи і кожній з них запропонувати системи рівнянь чи нерівностей, якими зашифровано малюнок. Переможе та команда, яка краще справиться з побудовою графіків, записаних на аркушах. Побудову можна здійснити як вручну, так і з використанням динамічної математики. Виконуючи завдання, учасники оперують також поняттями області визначення і області значень функції.

При розшифровці рис. 2.42 в учасників можуть виникнути проблеми при побудові залежностей з модулями, а саме – «руки»

¹ Скобелев Г. М. Математика в позаурочний час / Скобелев Г.М., Берман В. П. – К. : Радянська школа, 1973. – 160 с.

$$y = 2\left||x| - 2\right| - 2 \text{ та «рукавів» } y \leq -2(|x| - 2)^2 + 3,5.$$



ГМТ, побудовані за рівняннями та нерівностями ([розробка Advanced Grapher](#), [GeoGebra](#)), [QR-код розробки малюнків GeoGebra](#) і [колекції](#).

Завдання з тренувального перейде в розряд розвиваючого, якщо запропонувати учасникам описати рівняннями малюнок, виконаний в координатній площині. При вивченні теми «*Побудови графіків функцій за допомогою елементарних перетворень*» актуальним буде STEM-проект «*Малюємо графіками функцій*». Кінцевим продуктом в проекті стане колекція малюнків. Завдання для учасників будуть корисними у тому смислі, що закладають базу для усвідомлення практичного застосування матеріалу – опису графічних зображень за методом функціонального подання. Учням доступно вивчати предмет в ігровій формі, тому й учителів потрібно готувати до цього. При цьому наявний елемент заохочення, ігровий ефект. «Художники» мають можливість проявити нестандартний підхід, творчість, розкрити прихований потенціал дослідника.

В окремих учасників можуть виникнути проблеми при створенні малюнка для описування, а не лише при добиранні функцій. Простіше побудувати графік функції за готовою формулою. Інша справа, коли потрібно проаналізувати – графіки яких функцій (чи частини графіків) нагадують ті чи інші криві, дібрати формулу, з'ясувати вплив коефіцієнтів, можливо, зробити корекцію малюнка тощо. Тобто, виконання малюнків створює передумови розвитку не лише творчої уяви і фантазії, але й таких пізнавальних якостей, як уміння аналізувати, синтезувати, креативної якості – здібності до формування залежності.

За допомогою GRAN1 та GeoGebra можна не лише побудувати графіки функції, але й наближати криві графіками многочленів від першого до сьомого степеня включно. Для цього створюють об'єкт *Таблиця*, зазначають степінь многочлена, будують графік. В GeoGebra з цією метою звертаються до вкладки *Регресійний аналіз*, обирають поліноміальну

модель. Звернемо увагу на можливість добору коефіцієнтів, наприклад, квадратичної функції, через зміну параметрів у формулі $y=ax^2+bx+c$. Для цього створюють об'єкт $y = P1 * x^2 + P2 * x + P3$, де $P1, P2, P3$ – коефіцієнти, які можна змінювати, якщо рухати бігунок параметра. Більша затрата часу при такому доборі функції компенсується тим, що дослідники глибше усвідомлюють зміст параметрів.

Завдання на створення малюнків ускладнюють виставленням вимоги: для описування кривих, що мають вертикальну вісь симетрії задіяти перетворення $y=f(x/|x|)$, з горизонтальною віссю – перетворення $|y|=f(x)$. Учням, які поглиблено вивчають математику, можна запропонувати задіяти [функції, які містять цілу та дробову частину числа](#). Наприклад, «рівняння трави» задається формулою періодичної функції $y=k\{x\}+b$. За допомогою GRAN1 для цього створюють об'єкт явного типу задання $y = P1 * (x - \text{int}(x)) + P2$ і $y = k * (x - \text{floor}(x)) + b$, якщо застосовують [систему динамічної математики GeoGebra](#). Дробова частина представлена як різниця між числом та його цілою частиною. Для розфарбовування частин малюнка будують ГМТ, задані відповідними нерівностями і перевіряють правильність виконання за допомогою ПЗ.

Починаючи з 9-го класу при поглибленому вивченні математики, доступні для побудови рис. 2.43–2.45. Малюнок «Котик» (рис. 2.43) описано поданими нижче рівняннями та нерівностями. Наразі повну побудову можемо виконати у класичній GeoGebra.

Об'єкти явного виду задання: 1) $y=x*x/4, x \in [-6,5; 6,5]$; 2) $y=10, x \in [-5;-3]$; 3) $y=2, x \in [-1; 1]$; 4) $y=9, x \in [-4;-2]$;

5) $y=9, x \in [2; 4]$; 6) $y=x*x+1, x \in [-1;1]$;

7) $y=-0.25*x^2+abs(x)+3$, 8) $y=-0.35*x^2+abs(x)+3, x \in [-3; 3]$;

9) $y= -0.5*x^2+abs(x)+3, x \in [-2,5; 2,5]$.

Об'єкти неявного виду задання $f(x,y)=0, f(x,y)<0, f(x,y)>0$:

1) $y+abs(abs(x)*2-8)-15=0, x \in [-10;10]; y \in [10;15]$;

2) $y+abs(abs(x)*2-8)-12<0, x \in [-10;10]; y \in [10;12]$;

3) $y+7*abs(x)-7<0, x \in [-10;10]; y \in [5;7]$;

4) $(abs(x)-3)^2+(y-8)^2-0.5=0$. 5) $(abs(x)-3)^2+(y-8)^2-0.05<0$

6) $y+2*x^2-1.5<0, x \in [-10;10]; y \in [1; 2]$.

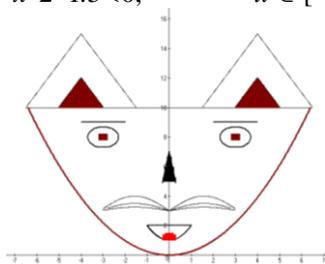


Рис. 2.43. Малюнок «Котик» ([розробки Advanced Grapher](#) і [GeoGebra](#))

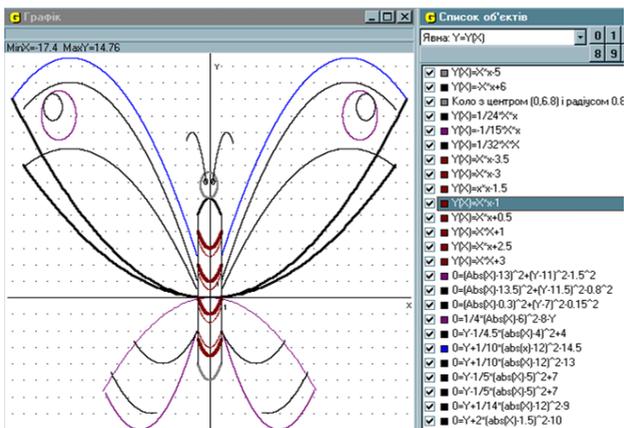


Рис. 2.44. «Метелик» (розробка і колекція GRANI; розробка GeoGebra)

При побудові ГМТ, заданих рівняннями, враховують особливості. Наприклад, графік функції $y = -abs(abs(x)*2-8)+15$ можна будувати двічі, оскільки за один раз умову області визначення функції $1.5 < |x| < 6.5$ подати складно. Якщо ж для побудови ГМТ створити об'єкт неявного типу задання, то побудову можна здійснити за один раз, оскільки при створенні вказують як відрізки для x , так і для y . У побудовах використано лінійну, квадратичну функції, функції з модулями, задієне також рівняння кола. Якщо малюнок виконувати за допомогою Advanced Grapher чи GeoGebra, то можна зберегти у файлі заштриховані ГМТ, задані нерівностями. У GeoGebra при побудові ГМТ, заданих нестрогою нерівністю, граничні лінії побудовані суцільною лінією, а у випадку строгої нерівності – пунктиром. Зменшити кількість об'єктів у переліку можна, якщо розглянути перетворення з модулем.

Користуючись ПЗ для побудови графіків, учасники навчального процесу можуть розглядати відомі їм функції, будувати графіки композицій. Важливо, щоб змодельовавши візерунки, вони проаналізували, як побудовано графіки, як вигляд графіка залежить від параметрів, від несвідомого перейшли до свідомого, щоб отримати підґрунтя для нових творчих актів.

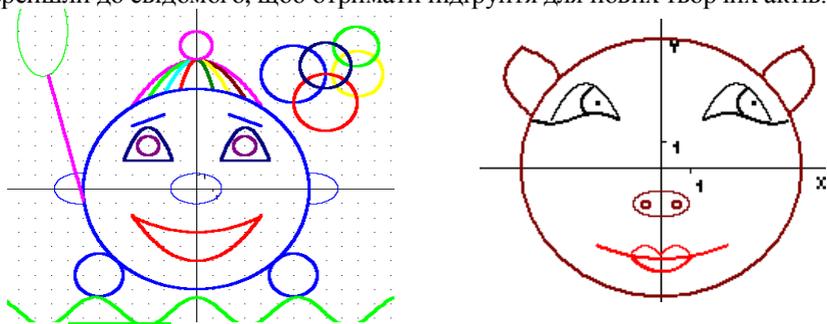


Рис. 2.45. Рисунки графіками (розробка1, розробка2 GRANI)

Використовуючи GeoGebra, можемо у вирази для функцій вводити параметри і зазначати для них анімацію. При цьому малюнок буде динамічним. Можна зберегти розробку як Gif-малюнок за одним з обраних параметрів. Потім його зручно додавати до презентацій, веб-сторінок.

Починаючи вивчення *декартових координат*, доцільно запропонувати створити колекції STEM-малюнків «У світі тварин», «Квіти мого міста» та інші. Мета гри – розвивати фантазію учнів / студентів, естетичні якості. Пропонуємо завдання відтворити на площині ланцюжок, заданий парами чисел, за яким приховано зображення якоїсь фігури, тварини тощо (рис. 2.46). Доцільно і самостійно підготувати таку вправу: побудувати малюнок, описати його координатами. Зазначені завдання можна виконувати як вручну, так і з використанням програмних засобів. Для цього необхідно створювати об'єкти типу *Ламана*. Щоб частину площини, обмеженої ламаною, можна було розфарбувати, необхідно побудувати за допомогою ПЗ замкнену ламану. За допомогою GeoGebra дану вправу зручно використовувати на мультимедійній дошці з використанням інструменту *Перд*.

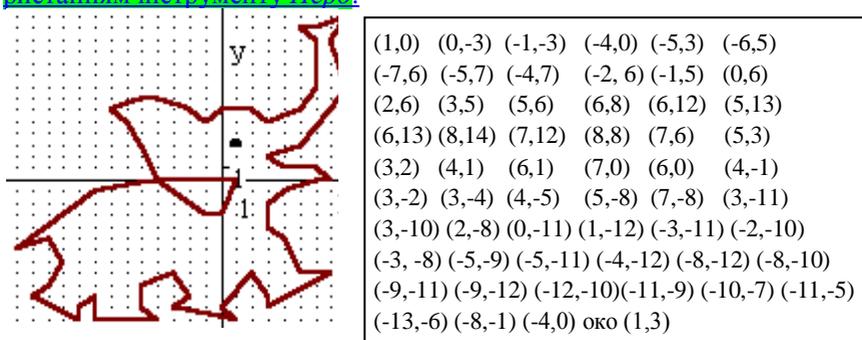


Рис. 2.46. «Веселе слонення» (розробка GRAN1).

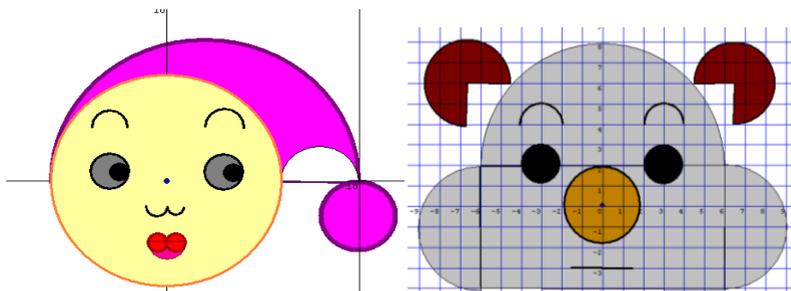


Рис. 2.47. Побудовано з використанням GRAN-2D («хлопчик», «Бровко»).

Вивчаючи з учнями тему «Круг та його частини», можна запропонувати їм створити колекцію малюнків, в яких приховані певні геометричні фігури (рис. 2.47). Для цього й сам учитель має дібрати в літературі потрі-

бний матеріал, продумати, як подати завдання, щоб учні, створюючи малюнки, могли самовиразитися. Щоб зробити малюнок привабливим, за допомогою динамічної математики його можна розфарбувати. При цьому можна наближено обчислювати площі фігур чи довжини відрізків.

Контрольні питання і завдання

1. Порівняти, як будують графіки функціональних залежностей з використанням ПЗ «Алгебра, 7-9 клас», динамічної математики GeoGebra і GRAN1. Звернути увагу на можливість введення обмеження на незалежні та залежні змінні в усіх засобах.

2. Як можна розвивати творчі якості особистості, якщо використовувати у навчанні математики дидактичну гру?

3. Побудувати малюнок на папері вручну, описати криві функціональними залежностями. Для корекції складених формул, області визначення функції скористатися побудовою графіків з використанням ПЗ GRAN1, GRAN-2D чи GeoGebra.

4. Розробити ланцюжок пар чисел, побудувавши які на площині, отримаємо зображення певної фігури, тварини тощо.

2.8. Розв'язування задач з параметрами графічними прийомами

Через систему вправ, що пропонуються при поглибленому вивченні математики, червоною ниткою проходять задачі з параметрами – дослідницькі мініатюри, які сприяють розвитку інтелектуально-логічних здібностей учня / студента та формують його математичну культуру. Оскільки задачі вимагають ретельного аналізу та всебічного дослідження умов, то їх розв'язування відкриває значну кількість евристичних прийомів загального характеру, які цінні для математичного розвитку особистості і застосовні в дослідженнях чи в будь-якому іншому математичному матеріалі. Теоретичне вивчення багатьох фізичних процесів приводить до більш чи менш складних рівнянь та нерівностей, що містять параметри, і необхідною частиною їх розв'язування є дослідження характеру процесу залежно від значень параметра.

Автори посібників [69], [70], [72] виокремлюють як аналітичні, так і графічні прийоми розв'язування основних типів задач, широко використовують в дослідженнях такі властивості функцій, як область визначення, монотонність, парність, періодичність, оборотність, наявність точок екстремумів тощо. Графічні прийоми передбачають побудови образів як на координатній площині (x,y) , так і на площині (x,a) . У значній кількості задач застосовуються методи паралельного перенесення, повороту, гомотетії, стискування до прямої.

Параметри у функціональні залежності для дослідження за допомогою динамічної математики вводять як абсциси чи ординати деяких точок, що можуть рухатися вздовж певних кривих, змінюватися в певних межах. В комп'ютерних експериментах для задач з параметрами вико-

ристовуються графічні прийоми розв'язування задач.

Параметр має двоїсту природу – з одного боку це фіксоване, але невідоме число, а з іншого – змінна, оскільки розглядаємо задачу для всіх допустимих значень параметра. Двоїста природа параметра обумовлює два основні методи розв'язування – аналітичний та графічний. Щоб не допустити помилок у ході міркувань, по можливості їх поєднують.

Залежно від того, яка роль параметру відводиться в задачі (нерівноправна чи рівноправна зі змінною), можна відповідно виділити два основних графічних прийоми – побудова графічного образу на координатній площині $(x;y)$ або на площині $(x;a)$. У першому випадку розглядають параметричну сім'ю кривих, що залежить від параметра a . Змінюючи параметр, відстежують зміни графіків, фіксують контрольні значення параметрів, розбивають множину допустимих значень параметра на підмножини і розв'язують для кожної з утворених підмножин. Під час побудови графічного образу на площині (x,a) згідно з [69], [70], [72] встановлюють ОДЗ змінної, а також ОДЗ параметрів; виражають параметр a як функцію від x ; перетинають отриманий графік прямими, перпендикулярними до параметричної осі і записують результати згідно з умовою. При використанні GRAN1 чи GeoGebra виражати параметр явно не потрібно. Досить вибрати тип *Функція задана неявно*.



[QR колекції GRAN](#)



[QR розробки GeoGebra](#)



[QR колекції GeoGebra](#)

1. Щоб знайти при яких значеннях параметра a рівняння $x^2-2ax+a+1=0$ і $x^2+ax-a-1=0$ мають хоча б один спільний корінь, традиційно користуються аналітичним методом. Нехай $x=a$ – спільний корінь даних рівнянь. Матимуть місце тотожності: $a^2-2aa+a+1=0$, $a^2+aa-a-1=0$. Віднімемо від першої рівності другу: $-3aa+2a+2=0$; $3aa=2a+2$; $a=(2a+2)/(3a)$. Якщо $a=0$, то рівняння дійсних спільних коренів не мають. Тому $3a \neq 0$. Підставляємо знайдене значення a в перше рівняння:

$$\left(\frac{2a+2}{3a}\right)^2 - 2a \frac{2a+2}{3a} + a + 1 = 0 \quad (a-2)(3a^2+5a+2) = 0.$$

$$3a^3 - a^2 - 8a - 4 = 0$$

Отримаємо розв'язки: $a_1 = -1$; $a_2 = -\frac{2}{3}$; $a_3 = 2$.

Оскільки значення параметра a знайдено припускаючи, що дані рівняння мають спільний корінь, то необхідно виконати перевірку.

Розглянемо, які дані можна отримати за допомогою динамічної математики. Для цього побудуємо в системі координат (x, a) (рис. 2.48) графічні образи рівнянь, позначивши параметр через y . Створюємо об'єкти неявного типу задання $0=G(x, y)$: $0 = x^2 - 2 * y * x + y + 1$; $0 = x^2 + y * x - y - 1$. Використовуючи послугу *Координати точки*, знаходимо ординати точок перетину графіків: -1 ; 2 ; $\approx -0,67$. При таких значеннях параметра рівняння мають спільний корінь. Графічним образом другого рівняння є прями $x=1$ та $x=-a-1$. Користуючись графіками, можна з'ясувати, наприклад, при якому значенні параметра спільний корінь рівний одиниці, скільки розв'язків може мати кожне з рівнянь?

З іншого боку, за допомогою динамічної математики можна побудувати параболу за формулами $y=x^2-2ax+a+1$ і $y=x^2+ax-a-1$, створивши для цього об'єкти явного типу задання $y = x^2 - 2 * P1 * x + P1 + 1$, $y = x^2 + P1 * x - P1 - 1$ (рис. 2.49), і проводити дослідження в системі координат (x, y) . Змінюючи значення параметра $P1$, рухаємо побудовані параболу і встановлюємо, при яких значеннях параметра графіки перетинаються на осі абсцис. Таким чином встановлюємо наявність спільних нулів функцій.

Для відшукування розв'язків нерівностей $f(x) \geq 0$, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leq 0$, спочатку будують графік рівняння $f(x)=0$. Для цього створюють об'єкти явного $y=f(x)$ чи неявного виду задання $G(x, y)=0$, а потім використовують послугу *Розв'язати нерівність*.

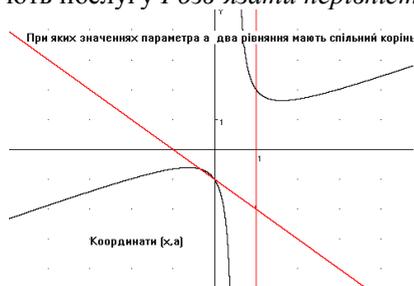


Рис. 2.48. Координати (x, a) (GRANI)

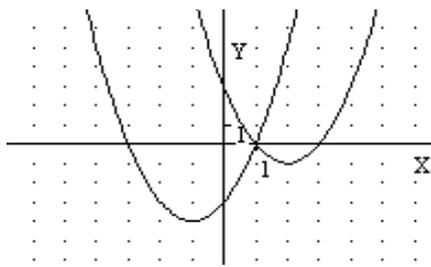


Рис. 2.49. Координати (x, y) (GRANI)

2. Щоб з'ясувати, скільки розгалужень отримаємо при розв'язуванні нерівності $x^2(4-a) > x^2(x^2-2a) + 4a$ залежно від параметра a , створимо об'єкт $x^2 * (4 - Y) - x^2 * (x^2 - 2 * Y) - 4 * Y = 0$. Заштриховане з використанням динамічної математики ГМТ (рис. 2.50), що задовольняє нерівність, перетинаємо горизонтальними прямими, перпендикулярними до осі параметра.

Абсциси спільних точок дадуть розв'язки нерівності. Записуючи їх, враховуємо, що нерівність строга:

якщо $a < 0$, то $x \in (-2; 2)$; якщо $0 \leq a < 4$, то $x \in (-2; -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}; 2)$;
 для $a = 4$ нема розв'язків; при $a > 4$ $x \in (-\sqrt{a}; -2) \cup (2; \sqrt{a})$.

На основі графічного образу складаємо нові задачі: дослідити, при яких значеннях параметра множині розв'язків належить відрізок $[3; 4]$; коли отримаємо розв'язки, що містять не менше шести цілих чисел та інші.

3. За допомогою динамічної математики встановлять, що при значеннях параметра $a \geq 1$ нерівність $a4^x - 4 \cdot 2^x + 3a + 1 \geq 0$ виконується для всіх дійсних x (рис. 2.50). Для дослідження створюють об'єкт типу $G(x, y)$ за формулою $0 = y * 4^x - 4 * 2^x + 3 * y + 1$ (параметр позначили через y) і використовують послугу *Розв'язати нерівність $G(x, y) > 0$* . Побудову виконано в координатній площині (x, a) .

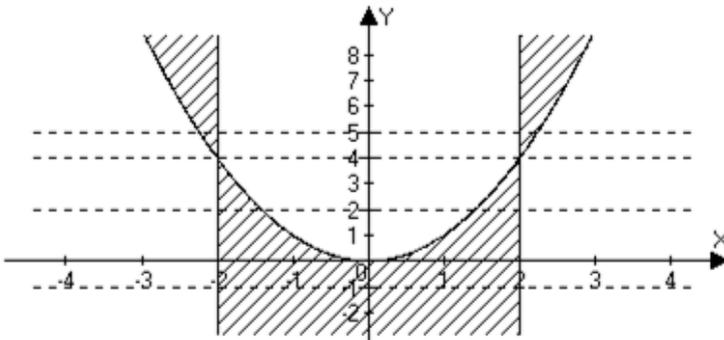


Рис. 2.50. ГМТ, що задовольняє нерівність $x^2(4 - a) > x^2(x^2 - 2a) + 4a$

Заштриховане з використанням ПЗ ГМТ, що задовольняє нерівність, перетинаємо горизонтальними прямими, перпендикулярними до осі параметра. При різних значеннях a прямі або не перетинають заштриховану область, або перетинають її вздовж відрізків. Абсциси спільних точок дадуть розв'язки нерівності.

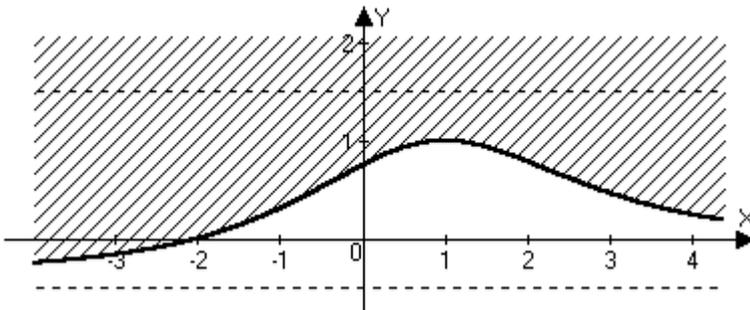


Рис. 2.51. ГМТ, побудоване в координатах (x, a) (GRANI)

Можна створити власні задачі за побудованим ГМТ, поставити питання та відповісти на них. Наприклад, дослідити, коли нерівність не

має розв'язків; розв'язки записуються через об'єднання двох інтервалів; при яких значеннях параметра множині розв'язків належить відрізок $[-1; 2]$; коли отримаємо розв'язки, що містять цілі числа більші шести та інші? Вміння аналізувати графічні образи допоможе в подальшому швидше шукати ефективні методи розв'язування задач. Крім того, завдяки складанню чим більшої кількості задач за певний час на основі одного і того ж ГМТ, розвиватимемо таку компоненту дивергентного мислення як продуктивність.

Якщо нерівність переписати у вигляді $a(4^x + 3) \geq 4 \cdot 2^x - 1$, і врахувати, що $4^x + 3 > 0$, то обґрунтування зведеться до знаходження найбільшого значення функції $f(x) = (4 \cdot 2^x - 1) / (4^x + 3)$. Виконують заміну $2^x = t$ і досліджують функцію $g(t) = (4 \cdot t - 1) / (t^2 + 3)$ за допомогою похідної для додатних t . $g'(t) = -4(t-2)(t+1.5) / (t^2 + 3)^2$. З урахуванням $t > 0$, отримаємо, що $g'(t) = 0$ при $t = 2$. Для $t > 2$ $g'(t) < 0$ і функція спадає, при $t < 2$ $g'(t) > 0$ – функція зростає. В точці $t = 2$ функція $g(t)$ досягає свого найбільшого значення, тоді функція $f(x)$ досягає свого найбільшого значення в точці $x = 1$. Знаходимо, що $f(1) = 1$. Отже, дана нерівність виконується для всіх $a \geq 1$. Доцільно звернути увагу на те, що на рис. 2.51 побудовано графік функції $f(x)$ та заштриховане ГМТ, заданих нерівністю $y \geq f(x)$. Оскільки встановлено проміжки монотонності для функції $g(t)$, точки екстремумів та екстремуми, то враховуючи властивості функції $y = 2^x$, нескладно вручну побудувати ескіз графіка функції $f(x)$. Для побудови необхідно обчислити границю функції $f(x)$ на нескінченності: при $x \rightarrow -\infty$ отримаємо, що $f(x) \rightarrow -1/3$; для $x \rightarrow +\infty$ маємо, що $f(x) \rightarrow 0$.

Щоб розвивати гнучкість мислення особистості, корисно розв'язувати одну і ту ж задачу різними методами. Так, попередню нерівність заміною змінної $t = 2^x$ можна звести до квадратної нерівності $at^2 - 4t + 3a + 1 \geq 0$, де $t > 0$ і досліджувати квадратний тричлен $at^2 - 4t + 3a + 1$. Якщо застосовувати динамічну математику, то необхідно створити об'єкт явного типу задання за формулою $y = P1 * x^2 - 4 * x + 3 * P1 + 1$ і побудувати графік на координатній площині (x, y) . У формулах можна використовувати лише змінні x , y і параметри p з індексами. Змінюємо значення параметра, рухаючи бігунок, що розташований під списком об'єктів (функцій). У ході дослідження школярі зможуть зафіксувати чотири різних положення параболи, що є важливими для відшукування розв'язків (перший для $a < 0$, наступні для $a > 0$ – парабола не перетинає вісь Ox , дотикається, перетинає у двох точках). Очевидно, що від'ємні a умову нерівності не задовольняють, бо в цьому разі над віссю абсцис може бути розташованою лише частина параболи. Тобто нерівність буде виконуватися не для всіх дійсних x . Для нульового значення параметра отримаємо лінійну нерівність, розв'язки якої утворюють підмножину множини додатних чисел. Для додатних a вітки параболи напрямлені вгору. Враховуючи знак нерівності « \geq », умову завдання задовольняють ті значення параметрів, коли парабола розташована над віссю абсцис чи дотикається

до неї, тобто дискримінант $-3a^2 - a + 4$ відповідного квадратного рівняння недодатний, значення параметра при цьому a не менші одиниці.

4. Нерівності $\sqrt{x+a} > x+1$, $\log_{y/x}(a-x) < 1$ можна розв'язувати як аналітичними, так і графічними методами. Для першої нерівності необхідні побудови показані на рис. 2.52. При виконанні побудови за допомогою GRAN1 на площині (x,a) створюють об'єкти неявного типу задання. Для цього набирають на панелі введення даних для першої нерівності вираз $SQRT(x+y)-x-1$, для другої $\log(1/x, y-x)-1$ та використовують послугу *Розв'язати нерівність* $G(x,y) > 0$ для першої нерівності чи $G(x,y) < 0$ для другої. При цьому світловий курсор у списку об'єктів має бути встановленим на об'єкт неявного типу. Щоб записати розв'язки нерівності, проводять прямі $a = const$ (об'єкт явного типу задання $y=P1$), які перпендикулярні до осі параметра. Для фіксації прямих при різних значеннях параметра P1, світловий курсор у списку об'єктів необхідно встановити на функцію $y=P1$ і використати послугу *Об'єкт \ Нова функція з зафіксованими параметрами*. Абсциси точок перетину є розв'язками нерівності. Отримаємо розв'язки: якщо $a \leq 0.75$, то \emptyset ; для $0.75 < a \leq 1$ маємо $x \in (x_1, x_2)$; якщо $a > 1$, то $x \in (-a, x_2)$.

Щоб знайти аналітичні вирази для x_1 та x_2 , переходимо від нерівності до рівносильної сукупності систем: $\begin{cases} x+1 < 0, \\ x+a \geq 0; \end{cases}$ або $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x+a > (x+1)^2. \end{cases}$

З другої системи маємо, що $a > x^2 + x + 1$. Графіком функції $a(x) = x^2 + x + 1$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору, найменше значення 0.75 досягається у вершині $x = -0.5$. Нехай x_1 – менший корінь рівняння $a = x^2 + x + 1$, x_2 – більший. Для $a \geq 0.75$ отримаємо, що $x_1 = 0,5(-1 - \sqrt{4a - 3})$, $x_2 = 0,5(-1 + \sqrt{4a - 3})$.

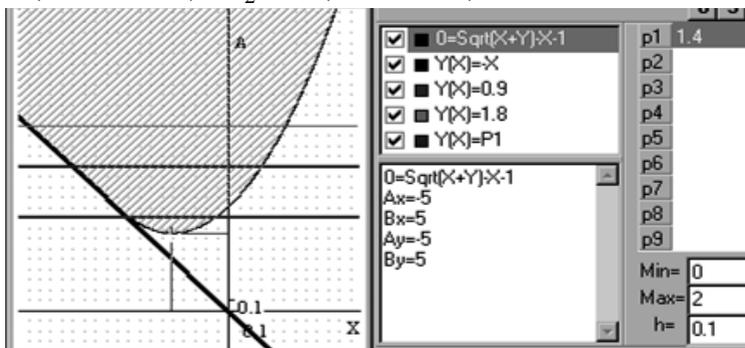


Рис. 2.52. Заштриховано розв'язки нерівності $\sqrt{x+a} > x+1$ (GRAN1)

Зручно досліджувати дану нерівність, якщо виконувати побудови в координатах (x, y) . Тут параметр виступає як нерівноправна змінна, тому

потрібно будувати параметричну сім'ю кривих для різних значень a . Для нерівності $\sqrt{x+a} > x+1$ будуюмо пряму $y=x+1$ та «півпараболу» $y = \sqrt{x+a}$. Для кожного з допустимих значень параметра початкову нерівність задовольняють ті значення змінної x , для яких парабола буде розташована вище прямої. Для дослідження за допомогою ПЗ створюємо об'єкти явного типу задання $y=x+1$ і $y=\text{SQRT}(x+P1)$, де $P1$ – довільний параметр. Вказуємо межі для зміни параметра, наприклад, $[-5;5]$ і крок зміни $h=0.05$ (рис. 2.53). Для введення нових функцій, що відповідають контрольним значенням параметра, користуються послугою *Об'єкт \ Нова функція з зафіксованими параметрами*. Світловий курсор повинен бути встановленим на функцію, параметри якої фіксують.

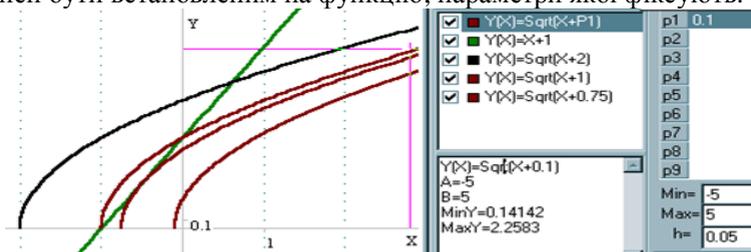


Рис. 2.53. Можливі положення параболи відносно прямої (GRANI)

Плавно рухаючи бігунок параметра, здійснюємо паралельне перенесення «півпараболи» вздовж осі OX , фіксуємо контрольні значення параметрів, що відповідають чотирьом положенням кривої щодо прямої $y=x+1$, та записуємо вигляд розв'язку: 1) якщо $a < 0,75$ ($P1 < 0,75$), то «півпарабола» розташована нижче прямої і розв'язків нерівність не має; 2) при $a=0.75$ парабола дотикається до прямої; 3) для $0.75 < a \leq 1$ розв'язками будуть $x \in (x_1, x_2)$, де x_1 та x_2 – абсциси точок перетину прямої та «півпараболи» ($x_1 < x_2$); 4) при $a > 1$, парабола перетинає пряму в одній точці і тоді $x \in (-a; x_2)$. Вирази для x_1 та x_2 подані вище.

Якщо у початковій нерівності виконати заміну $x+a=t$, то перейдемо до нерухої параболи $y = \sqrt{t}$ та прямої $y=t+1-a$, що рухається вздовж осі Oy . Завдяки застосуванню ПЗ учні краще усвідомлять, як здійснюється паралельне перенесення кривої вздовж осі координат і відбувається фіксація контрольних значень параметра, що сприятиме в подальшому кращому виконанню цих дій мисленно.

5. В класах з поглибленим вивченням математики доцільно розв'язати логарифмічну нерівність з параметром та змінною основою. Наприклад, *розв'язати залежно від параметра a нерівність $\log_{y_x}(a-x) \leq 1$* . Здійснимо побудову графічного образу нерівності в координатній площині (x, a) . Вздовж осі абсцис відкладемо значення змін-

ної x , вздовж осі ординат – значення параметра a . Для побудови ГМТ за допомогою ПЗ не потрібно виражати параметр, досить обрати тип «неявно задана функція», позначивши при цьому параметр через y : $\log(\frac{1}{x}, y-x) - 1 = 0$. Побудувавши образ рівняння, використовують послугу *Розв'язати нерівність* $G(x,y) < 0$. Заштриховане ГМТ перетинають прямими $y = \text{const}$ ($Y = P1$), перпендикулярними до осі параметрів. Для різних значень параметра прямі або не перетинають заштриховану область, або перетинають її вздовж відрізків. Абсциси точок цих відрізків є розв'язками даної нерівності: 1) якщо $a \leq 0$, то нема розв'язків; 2) якщо $0 < a \leq 1$, то $x \in (0, a)$; 3) якщо $1 < a \leq 2$, то $x \in (0, 1)$; 4) при $a > 2$, $x \in (0; x_1) \cup (1; x_2)$, де x_1, x_2 – корені рівняння $x + \frac{1}{x} = a$.

Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} 0 < \frac{1}{x} < 1, \\ a - x \geq \frac{1}{x}; \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} > 1, \\ a - x \leq \frac{1}{x} \\ a - x > 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи нерівність вручну, виражають параметр через змінну x , оскільки в нерівність параметр входить лінійно, та будують графічний образ нерівності у координатній площині (x, a) . Щоб побудувати графік функції $y = x + \frac{1}{x}$, виконують дослідження за допомогою похідної. Ескіз графіка можна побудувати, якщо поточково додати значення функцій $y = \frac{1}{x}$ і $y = x$. Найменше значення функції $y = 2$ досягається при $x = 1$, що слідує, наприклад, з нерівності Коші. Завершуємо розв'язування виконанням описаної вище процедури знімання результатів.

6. Розглянемо завдання на застосування паралельного перенесення. Це завдання можна використати в темах «Рівняння кола», «Взаємне розташування двох кіл на площині».

Знайти всі значення параметра a , для кожного з яких система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4ax - 2y = 3 - 4a^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2y = -a^2 \end{cases} \quad \text{має два розв'язки?}$$

Для дослідження за допомогою ПЗ створюємо два об'єкти неявного типу задання $0 = G(x,y)$ за формулами $0 = X^2 + Y^2 - 4*P1*X - 2*Y - 3 + 4*P1^2$ та $0 = X^2 + Y^2 - 2*P1*X - 2*Y + P1^2$. Змінюючи значення параметра $P1$, досліджуємо рух кіл на площині вздовж прямої $y = 1$. Фіксуємо можливі випадки взаємного розташування двох кіл (не перетинаються, дотикаються, перетинаються у двох точках). Значення параметра можна уточнити, зменшивши його крок зміни. На рис. 2.54 представлено копію слайда презентації з умовою завдання.

Знайти всі значення параметра a , при кожному з яких система рівнянь має два розв'язки.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4ax - 2y = 3 - 4a^2, \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2y = -a^2 \end{cases}$$

Підказка
Виділити повні квадрати!

Представити вирази у форматі GRAN1

$$0 = x^2 + y^2 - 4 * P1 * x - 2 * y - 3 + 4 * P1^2$$

$$0 = x^2 + y^2 - 2 * P1 * x - 2 * y + P1^2$$

Рис. 2.54. Копія слайда презентації з дослідженням розташування кіл

Для обґрунтування отриманих результатів аналізують обидва рівняння, виділяють повні квадрати, знаходять центри кіл $(2a;1)$, $(a;1)$ та їхні радіуси $R_1=2$, $R_2=1$ відповідно. Кола перетинатимуться в двох точках за умови, що відстань між центрами буде меншою за суму радіусів і більшою за різницю більшого і меншого радіусів. Розглянемо два випадки:

- 1) для $2a < a$ маємо $R_1 - R_2 < a - 2a < R_1 + R_2$; $a \in (-3; -1)$;
- 2) якщо $a < 2a$, то знайдемо, що $a \in (1; 3)$.

7. Продемонструємо застосування методу повороту при розв'язуванні наступної задачі: *при яких значеннях параметра a рівняння $ax - 1 = \sqrt{8x - x^2} - 15$ має єдиний розв'язок?*

Розглянемо функції $y = ax$ і $y = \sqrt{8x - x^2} - 15 + 1$. Перетворивши другу з них за умови, що $y \geq 1$, отримаємо що графік є дугою кола, заданого рівнянням $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 1$ (рис. 2.55). Для дослідження за допомогою динамічної математики створюють об'єкти явного типу задання $y = P1 * x$, $y = \text{SQRT}(8 * x - x^2 - 15) + 1$. При побудові у *Властивостях графіка* слід зазначити, що $y \geq 1$. Пряма $y = ax$ ($y = P1 * x$) повертається навколо початку координат. Аналізуючи графічні образи, встановлюємо, що єдиний розв'язок рівняння матиме тоді, коли промінь перетинатиме півколо в одній точці. Це буде пучок прямих, у яких кутовий коефіцієнт змінюватиметься від $1/5$ до $1/3$, а також пряма, яка є дотичною до півкола. Здійснюючи поворот прямої, що проходить через початок координат, фіксуємо контрольні значення параметрів. Відшукування точного значення кутового коефіцієнта дотичної зводиться до розв'язування квадратного рівняння $(ax - 1)^2 = 8x - x^2 - 15$ за умови єдиності розв'язку. Об'єднавши розв'язки для обох випадків, отримаємо, що $a \in \left[\frac{1}{5}; \frac{1}{3} \right) \cup \left\{ \frac{8}{15} \right\}$.

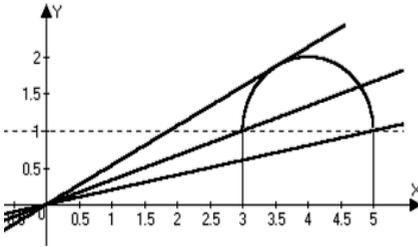


Рис. 2.55. Поворот прямої (GRANI)

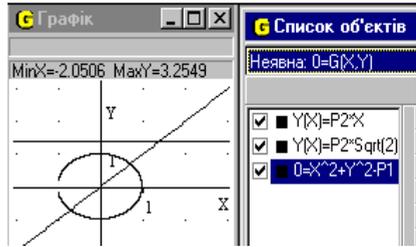


Рис. 2.56. Перетин кола і прямих

8. У задачі на відшукування кількості різних розв'язків, що має система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = b, \\ (y - ax)(y - a\sqrt{2}) = 0, \end{cases}$ залежно від параметрів a і b , при

графічній інтерпретації маємо справу для a одночасно з двома перетвореннями – з поворотом ($y=ax$) та паралельним перенесенням ($y=a\sqrt{2}$); для b – з гомотетією з центром у початку координат (рис. 2.56).

9. Доцільно виконати за допомогою динамічної математики дослідження і самостійно сформулювати теореми про розміщення коренів квадратного тричлена $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) залежно від значень параметрів.

Слід отримати умови, коли 1) обидва корені будуть більші (менші), ніж задане число; 2) корені матимуть різні (однакові) знаки; 3) корені належатимуть заданому проміжку; 4) заданий відрізок буде знаходитися всередині проміжку між коренями квадратного тричлена; тільки більший (менший) корінь лежатиме на заданому відрізку; значення тричлена будуть лише додатними (від'ємними) та інші.

На рис. 2.57 подано креслення, за допомогою якого можна досліджувати розташування коренів квадратного тричлена $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) залежно від коефіцієнтів a , b , c . Точки I та J вибрані на осі абсцис і можуть вільно рухатися вздовж неї, а точки K , L , M , E створені за аналітичними виразами. Змінюючи положення точок A , B , C , змінюємо відповідні значення параметрів та положення параболи. Попередньо слід звернути увагу на те, що відстежувати необхідно такі величини, як старший коефіцієнт квадратного тричлена, дискримінант відповідного квадратного рівняння, абсцису і ординату вершини параболи, значення функції в певних заданих точках.

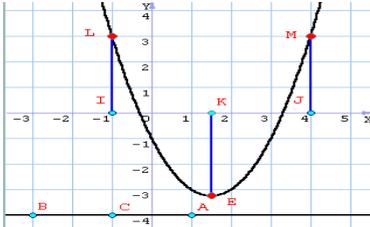


Рис. 2.57. Модель для дослідження розміщення коренів (GRAN-2D).

Наприклад, досліджуючи, при якому значенні параметра t корені рівняння $4x^2 - (3t+1)x + t - 2 = 0$ знаходяться між числами 0 і 2, не лише встановлюємо, що умову задовольняють ті значення параметра, для яких

$m \in (2; 2.4)$, але й через узагальнення переходимо від системи нерівностей $D \geq 0, f(0) > 0, f(2) > 0, 0 < x_0 < 2$ до системи загального вигляду $D \geq 0, f(x_1) > 0, f(x_2) > 0, x_1 < x_0 < x_2$, яка виражає необхідну та достатню умови того, що корені рівняння для коефіцієнта $a > 0$ лежать на проміжку (x_1, x_2) . Для узагальнення необхідно проаналізувати можливі положення параболи.

10. Зауважимо, що графічні методи розв'язування задач з параметрами не повною мірою можна вважати строгими, при їх застосуванні цілком ймовірні помилки. Тому *розв'язування графічними прийомами бажано супроводжуватися доказовими аналітичними міркуваннями*. З іншого боку, можливі помилки і при розв'язуванні аналітичним методом. У цьому випадку графічні побудови можуть допомогти усунути недоліки.

Наприклад, для яких значень параметра p система двох рівнянь $y^2 + (2x + 4)y + (x^2 + 2x)(4 - x^2) = 0$ і $y = p(x + 4)$ має три різні розв'язки?

ГМТ, заданих першим рівнянням, розпадається на дві параболи. Друге рівняння задає сім'ю прямих, що проходять через точку $(-4; 0)$. Розв'язуючи графічним методом, часто припускаються помилки, тому що знайдуть лише чотири положення прямої, а не шість. Однак, аналітична частина розв'язування, без якої в задачі не обійтися, покаже всі шість шуканих значень параметра. Для побудови за допомогою динамічної математики створюють об'єкти неявного типу задання $0 = y^2 + (2 * x + 4) * y + (x^2 + 2 * x) * (4 - x^2)$ і явного $y = P1 * (x + 4)$. Кожна з двох прямих дотикається до однієї параболи і перетинає в двох точках другу параболу.

Завдяки застосуванню ПЗ в дослідженнях до задач з параметрами можна знаходити наближені розв'язки за побудованим ГМТ з використанням ПЗ і долучатися до процесу обговорення, представивши свої результати. Потрібно аналізувати задачу, планувати її розв'язання, більше уваги приділити обґрунтуванню отриманих результатів, відшуканню інших способів розв'язування задачі, зокрема аналітичних.

Контрольні питання і завдання

Розв'язати завдання з параметрами, виконати перевірку з використанням динамічної математики.

1. При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 + a - 6 = 0$ належать відрізку $[2; 4]$?

2. При яких значеннях a корені x_1 і x_2 квадратного тричлена $f(x) = (a^2 + 1)x^2 + (a + 2)x - a^2 - 3$ задовольняють умову $x_1 \in (-4; -1), x_2 \in (0; 2)$?

3. Розв'язати нерівності $\log_x(x - a) > 2, \log_{a+x}(ax - x^2) < \log_{a+x}x$.

4. Показати, що при $a \in [0, 5; +\infty)$ нерівність $\ln(1 + x) \geq x - ax^2$ виконується для всіх додатних x .

2.9. Розв'язування задач теорії ймовірностей та математичної статистики.

2.9.1. Стохастика з GRAN1.

Застосовуючи ПЗ GRAN1 для розв'язування задач, які потребують статистичного опрацювання даних, можна інтенсифікувати процес навчання за рахунок вивільнення тих, хто навчається, від рутинних обчислень, а зекономлений час відвести на обговорення отриманих результатів, складання задач за частотною таблицею ([добірка завдань](#), [відео](#)).

Наприклад, отримано такі дані про зріст дівчат 9 –11 класів:

159 162 158 161 160 160 158 169 156 160 164 169 155 157 161 159
175 176 171 161 162 163 165 170 163 162 170 174 171 161 171 172 174
168 168 172 173 168 169 168 166 166 162 166 159 164 163 159 170 173
167 167 169 162 168 167 167 169 170 165 165 164 164 166 165 165 164
163 159 169 167 162 164 163 165 166 165 167 166 167

Знайти об'єм та розмах вибірки, моду, медіану, середнє арифметичне, середнє квадратичне відхилення. Побудувати частотну таблицю, гістограму відносних частот. Користуючись частотною таблицею, розподілити за зростом замовлення на пошиття 2000 форм для школяр-рок (зріст 160-164, 164-168 і далі), обчислити ймовірний прибуток від продажу цієї партії одягу, якщо відомий прибуток від продажу одиниці товару певного розміру.

Для створення *статистичної вибірки* потрібно вказати тип даних вибірки (варіанти, частоти або відносні частоти); модель даних (дискретна або неперервна); тип графіка залежно від типу розподілу (полігон – для дискретного, гістограма – для неперервного); розглянути відповідно дискретну чи неперервну функцію розподілу. Якщо вводяться відносні частоти, то вказують об'єм вибірки. Для неперервної моделі даних, що задається через набір варіант, вказують відрізок задання вибірки та кількість відрізків розбиття.

Обираємо тип даних *Статистична вибірка* (див. [рис. 1.31](#)), використовуємо послугу *Об'єкт створити*. Зазначаємо, що модель даних *Неперервна*, і потрібно побудувати *Гістограму* ([рис. 1.40](#)). Обираємо тип даних *Варіанти* і вводимо дані з клавіатури. Бажано зберегти введені дані у файлї. Далі додатково вказуємо відрізок задання та кількість відрізків розбиття ([рис. 1.41](#)). Бажано підтвердити визначену автоматично за формулою Стерджеса кількість відрізків відповідно до об'єму вибірки.

Послуга *Операції \ статистика* призначена для операцій, які пов'язані з опрацюванням статистичних даних: *Частотна таблиця*, *Критерій Пірсона*, *Щільність нормального розподілу за вибіркою*.

Послуга *Операції \ статистика \ частотна таблиця* ([рис. 1.42](#)) використовується при необхідності переглянути частотну таблицю для статистичної вибірки. Таблиця подається у додатковому вікні, в якому вказані 1) значення варіант для дискретного або межі інтервалів для не-

перервного розподілу; 2) частота варіанти для дискретного або частота попадання в інтервал для неперервного розподілу; 3) накопичена частота (сума частот від першої до даної включно); 4) відносна частота варіанти для дискретного або відносна частота попадання в інтервал для неперервного розподілу; 5) накопичена відносна частота.

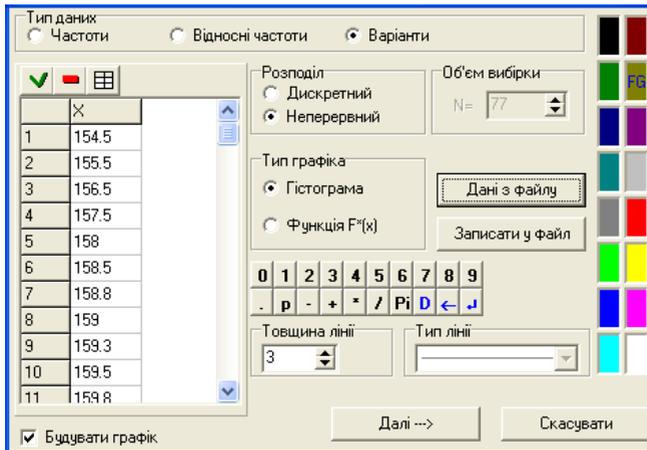


Рис. 1.103. Робоче вікно для введення вибірки, QR добірки завдань

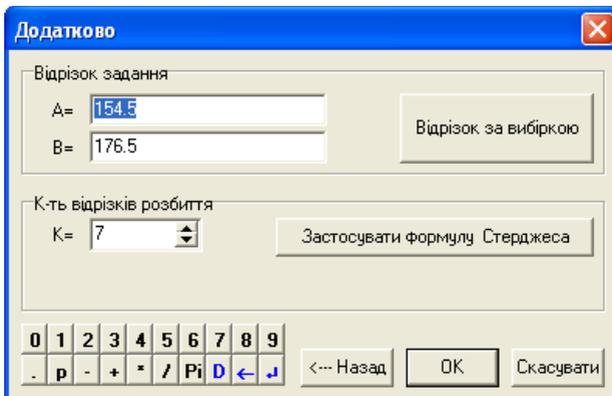


Рис. 1.104. Визначення розмаху вибірки, кількості відрізків розбиття

Частотна таблиця

Відрізок	n	Накопич. n	Pn*	Накопич. Pn*
154.5 - 157.6	4	4	0.05195	0.05195
157.6 - 160.8	9	13	0.1169	0.1688
160.8 - 163.9	16	29	0.2078	0.3766
163.9 - 167.1	20	49	0.2597	0.6364
167.1 - 170.2	16	65	0.2078	0.8442
170.2 - 173.4	8	73	0.1039	0.9481
173.4 - 176.5	4	77	0.05195	1

Рис. 1.105. Частотна таблиця до вибірки «Зріст дівчат»

Щоб визначити, скільки форм для певного зросту потрібно пошити, перемножують обчислені відносні частоти на обсяг замовлення. Отримані дані запишемо в графу 6 (табл. 1.7). Щоб визначити затрати тканини, перемножують отриману кількість одиниць продукції для кожного інтервалу (графа 6) на витрати тканини для пошиття одиниці продукції (графа 3). Планований прибуток для кожного інтервалу (графа 9) отримують як добуток відповідних даних в графі 4 і графі 6.

У програмі GRAN1 передбачена послуга *Операції \ Статистика \ Щільність нормального розподілу за вибіркою*, за допомогою якої для поточного неперервного розподілу статистичних ймовірностей можна побудувати новий об'єкт-функцію, що визначається за формулою

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S} e^{-\frac{(x-M)^2}{2S^2}},$$

де M – статистичне математичне сподівання, а S – статистичне середнє квадратичне відхилення для заданої вибірки (рис. 1.43).

Таблиця 1.7

Обчислення прибутку і кількості тканини для пошиву форми

№	Зріст дівчат	Витрати на од. продукції	Прибуток	Кількість = відносна частота * * обсяг партії		Кількість тканини		Прибуток
				5	6	7	8	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	152-156	2.5	2	0,01299·2000	26	2,5·26	65	52
2	156-160	2.8	3	0,1169·2000	208	2,8·208	582,4	624
3	160-164	3,1	4	0,2208·2000	442	3,1·442	1370,2	1768
4	164-168	3,4	4	0,3247·2000	649	3,4·649	2206,6	2596
5	168-172	3,7	4	0,2338·2000	468	3,7·468	1731,6	1872
6	172-176	4,0	3	0,09091·2000	182	4,0·182	728	546
7	176-180	4,3	2	0,1299·2000	26	4,3·26	111,8	52
Σ					2001		6795,6	7510

Доцільно порівняти площу під гистограмою і згенерованою кривою (послуга *Операції \ Інтеграл*), перевірити гіпотезу про узгодженість статистичних даних за критерієм Пірсона (*Операції \ Статистика \ Критерій Пірсона*), для функції щільності нормального розподілу перевірити «правило 3 сигм», побудувати графік розподілу статистичних ймовірностей (рис. 1.44), обчислити площу фігури, обмеженої цим графіком.

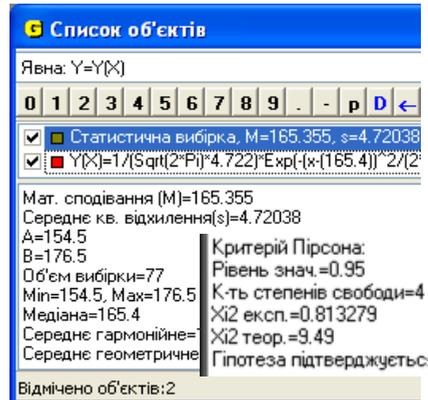
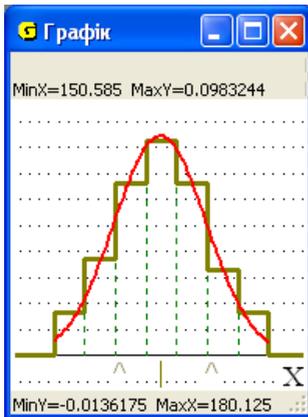


Рис. 1.106. Вікно з результатами статистичного опрацювання даних вибірки

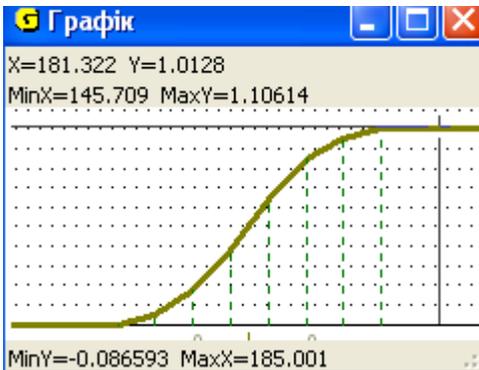


Рис. 1.107. Графік функцій розподілу відносних частот, [QR відеоуроків](#)

2.9.2. Стохастика з GeoGebra.

При вивченні розділу «Випадкові події» спочатку розглядають поняття відносної частоти відбування події, пізніше переходять до аксіоматичного означення ймовірності випадкової події, властивостей безумовної чи умовної ймовірності випадкової події. При розв'язуванні задач широко застосовують як приклади мір так звані «класичне» і «геометричне означення» ймовірності випадкової події. Часто у студентів виникають труднощі при складанні алгоритмів розв'язування задач, іноді вони плутають поняття сумісних / несумісних та залежних / незалежних подій.

Менше досліджені можливості використання засобу у навчанні стохастики GeoGebra. Рекомендуємо публікації [33], [38], [53]. Розглянемо, як доцільно використовувати динамічну математику GeoGebra у навчанні стохастики (прикладні завдання за QR-кодами, [відео](#)).



[QR колекції](#)



[QR розробки](#)



[QR посібника](#)

1. Під час вивчення теми «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» доцільно використовувати «інтерактивні» конструкції при розв'язуванні задач. Зміна входних параметрів у таких конструкціях веде до отримання інших результатів. Проводячи динамічні зміни параметрів, маємо змогу проводити дослідження, а це сприяє розвитку математичної компетентності дослідника.

Створювати «інтерактивний» навчальний матеріал у GeoGebra можна за допомогою таких інструментів, як повзунок, прапорець, поле введення, кнопка, які розташовані на панелі інструментів та зручно згруповані (рис 1.73). Водночас використовують інструменти створення написів та вставки зображень (рис 1.72).

При вивченні стохастики GeoGebra доцільно використати для створення так званих «інтерактивних» конструкцій. Для спрощення обчислень доцільно також скористатися командами *Біноміальний Коефіцієнт* [*<Число n>*, *<Число r>*], *Кількість Розміщень* [*<Число>*, *<Число>*].

Для створення динамічної конструкції спочатку необхідно визначити, які параметри з умови задачі будуть змінюватись. Тоді створюють «повзунки» для змінних параметрів, визначають інтервали їх зміни. Далі проводяться обчислення у таблицях та за допомогою команд. Після цього можна переходити до створення полів для внесення даних, текстових полів, прапорців.

Розглянемо приклади створення «інтерактивних» конструкцій до комбінаторних задач та задач з теорії ймовірностей.

Задача №1 (достатній рівень). Для шкільної лотереї підготовлено 50 квитків, з яких 6 є виграшними. Перший учень навмання вибирає 5 квитків. Скільки існує різних варіантів вибору, при яких він вибере рівно 2 виграшні квитки?

Розв'язання. Серед квитків 6 виграшних і 44 невикрашних. Серед 5 квитків, що обрав учень, 2 виграшних і 3 невикрашних. Кількість способів вибрати з 6 виграшних квитків 2 квитки дорівнює $C_6^2 = 15$. Кількість способів вибрати з 44 невикрашних квитків 3 квитки дорівнює $C_{44}^3 = 13244$. За правилом добутку, варіантів вибору 5 квитків, серед яких 2 виграшних дорівнює $C_6^2 \cdot C_{44}^3 = 198660$.

Відповідь: 198660.

Для створення динамічної конструкції до задачі у

GeoGebra (рис. 1.102), визначимо, які параметри у задачі будуть змінюватись. Зокрема у даній задачі пропонуємо зробити усі параметри динамічними. Для цього створимо чотири повзунки: N , k , m , n , що будуть відповідати загальній кількості лотерейних квитків, кількості виграшних квитків, навмання витягнутих квитків та виграшних серед витягнутих відповідно. Далі проводяться обчислення за допомогою команди *Біноміальний Коефіцієнт*[<Число n >, <Число r >], що обчислює кількість комбінацій із n по r . У даному випадку необхідно обчислити *Біноміальний Коефіцієнт*[k, n] та *Біноміальний Коефіцієнт*[$N-k, m-n$]. Далі у таблиці здійснюємо обчислення, що передбачають арифметичні операції над параметрами. На наступному кроці переходимо до створення полів для введення даних, текстових полів умови задачі, етапів розв'язування, створення прапорців, «вмикання» яких дозволяє переходити від одного етапу розв'язування задачі до іншого.

Таким чином, зробивши параметри задачі динамічними, маємо змогу, змінюючи вхідні параметри, отримувати різні відповіді, а тобто використовувати конструкцію як своєрідний тренажер, а також проводити дослідження. Змінюючи, наприклад, загальну кількість квитків у бік збільшення, можна простежити, що кількість варіантів вибору, при яких учасник вибере рівно 2 виграшні квитки зростає, а якщо зменшити, то навпаки зменшиться. Також можна простежити, що збільшення кількості квитків, що виймаються першим учасником, призводить до значного збільшення варіантів вибору виграшних квитків та ін.

Задача (29.14).

Для шкільної лотереї підготовлено 50 білетів, серед яких 6 є виграшними.

Перший учень навмання вибирає 5 білетів. Скільки існує варіантів вибору, при яких він вибере рівно 2 виграшні білети.

Розв'язання:

- 1. Серед білетів 6 виграшних і 44 невигаших.
- 2. Серед 5 білетів, що обрав учень, 2 виграшних і 3 невигаших.
- 3. Кількість способів вибрати з 6 виграшних білетів 2 білетів дорівнює кількості комбінацій з 6 елементів по 2, тобто дорівнює 15.
- 4. Кількість способів вибрати з 44 невигаших білетів 3 білетів дорівнює кількості комбінацій з 44 елементів по 3 елементів, тобто дорівнює 13244.
- 5. За правилом добутку, варіантів вибору 5 білетів, серед яких 2 виграшних (і 3 невигаших) дорівнює $15 \cdot 13244 = 198660$.
- Відповідь: 198660.

Рис. 1. 108. Динамічна конструкція до задачі №1.

Задача №2 (достатній рівень). У коробці лежать 5 синіх, 10 жовтих і 12 червоних кульок. Яка ймовірність того, що вибрана навмання куль-

ка виявиться: 1) жовтою; 2) синьою; 3) не червоною?

Розв'язання: Будемо розглядати випробування, суть якого полягає у тому, що з коробки навмання виймають кульку. У коробці загалом міститься 27 кульок, тобто у даному випробуванні 27 рівноможливих результатів.

Розглядаємо подію А – вийнята кулька виявилася жовтою, яку спричиняють 10 результатів. Обчислюємо ймовірність події А: $P(A) = \frac{10}{27} = 0,37$. Розглядаємо подію В – вийнята кулька виявилася синьою, яку

спричиняють 5 результатів. Обчислюємо ймовірність події В: $P(B) = \frac{5}{27} = 0,19$. Розглядаємо подію С – вийнята кулька виявилася не червоною.

Настанню події С сприяють настання події А і В, які є несумісними, тоді подію С спричиняють $10 + 5 = 15$ результатів. Обчислюємо ймовірність

події С: $P(C) = \frac{15}{27} = 0,56$.

Відповідь: 0,37; 0,19; 0,56.

Реалізуючи динамічну конструкцію (рис. 1.103) до розглянутої задачі, пропонуємо використати три змінні параметри: кількість синіх, жовтих та червоних кульок. Створивши три повзунки, що відповідають даним параметрам, залишається виконати обчислення у таблиці, створити прапорці відповідно до трьох полів для введення даних та текстових полів для умови задачі та етапів розв'язування. Змінюючи параметри кількості кульок, що лежать у коробці, учні роблять висновок, що чим більше кульок синього кольору, тим більша ймовірність вийняти кульку синього кольору, чим більше жовтих кульок, тим більша ймовірність вийняти жовту кульку, чим більша кількість кульок синього та жовтого кольорів, тим менша ймовірність вийняти кульку червоного кольору.

Задача (30.15).

У коробці лежать синіх, жовтих і червоних кульок.

Яка ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться: 1) жовтою; 2) синьою; 3) не червоною?

Розв'язання:

1. Будемо розглядати випробування, суть якого полягає у тому, що з коробки навмання виймають кульку.
У коробці загалом міститься $5 + 10 + 12 = 27$ кульок, тобто у даному випробуванні 27 рівноможливих результатів.
2. Розглядаємо подію А – вийнята кулька виявилася жовтою, яку спричиняють 10 результатів.
Обчислюємо ймовірність події А: $P(A) = 10/27 = 0,37$.
3. Розглядаємо подію В – вийнята кулька виявилася синьою, яку спричиняють 5 результатів.
Обчислюємо ймовірність події В: $P(B) = 5/27 = 0,19$.
4. Розглядаємо подію С – вийнята кулька виявилася не червоною.
Настанню події С сприяють настання події А і В, які є несумісними, тоді подію С спричиняють $10 + 5 = 15$ результатів.
5. Обчислюємо ймовірність події С: $P(C) = 15/27 = 0,56$.
- Відповідь: 1) 0,37; 2) 0,19; 3) 0,56.

Рис. 1. 109. Динамічна конструкція до задачі №2.

Задача №3 (високий рівень). Для шифрування повідомлень використовують 4 символи. Слово у повідомленні містить від 1 до 5 символів. Яку найбільшу кількість різних слів може містити повідомлення?

Створюючи динамічну конструкцію до даної задачі, пропонуємо за змінний параметр взяти кількість символів, що використовуються для шифрування повідомлень. Можна прослідкувати, що зростання кількості символів, що використовуються для шифрування, збільшує кількість слів, що може містити повідомлення, і виявити на скільки.

2. Розглянемо, як доцільно використовувати у навчанні математичної статистики майбутніх учителів математики розробку «GeoGebra калькулятор теорії ймовірностей та математичної статистики» [1] (завантажити на мобільний за QR-кодом на рис. 1.104). Переваги використання даного засобу висвітлювалися нами у матеріалах конференції [33].

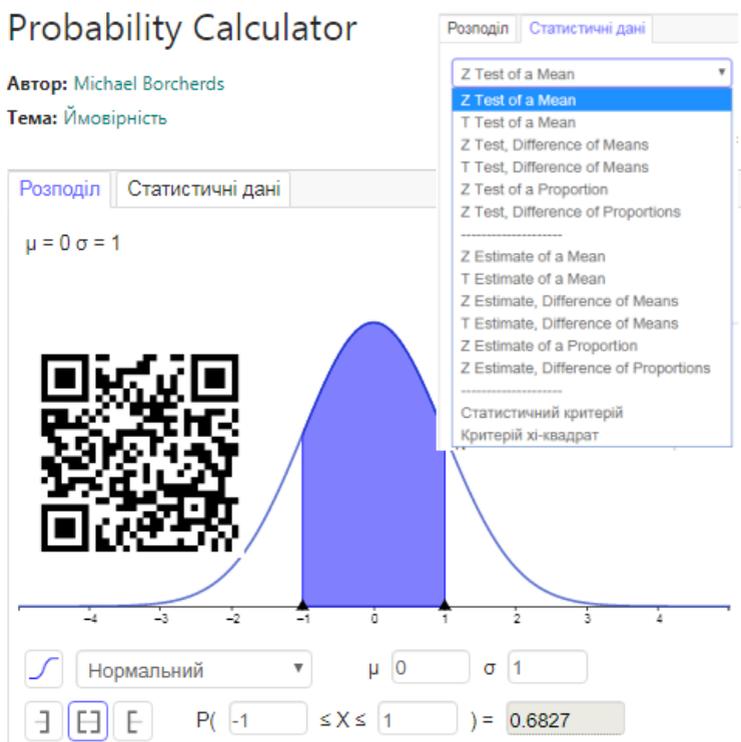


Рис. 1. 110. [GeoGebra калькулятор ймовірностей.](#)

За допомогою GeoGebra «Калькулятор ймовірностей» зручно обчислювати ймовірність набування значень випадкової величини з певного інтервалу для неперервних та дискретних законів розподілу ймовірностей. Серед неперервних це *Нормальний, Стюдента, Хі-квадрат, Фіше-*

ра, Показниковий, серед дискретних - Біноміальний, Пуассона, Гіпергеометричний та ін. Використовуючи калькулятор ймовірностей, у викладача з'являється можливість інтенсифікації подання матеріалу і одночасно його унаочнення.

Для дискретних розподілів ймовірностей у полі калькулятора зображається гістограма заданого розподілу. Розглянемо біноміальний розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини. Здаємо на калькуляторі його параметри, вид (ліворуч, в центрі, праворуч) та межі інтервалу, отримаємо ймовірності набування певних значень випадкової величини. Є можливість «накласти» нормальну криву на графік розподілу ймовірностей, обчислювати ймовірності набування значень з певного діапазону. На рис. 1.105 подано результат, отриманий за допомогою калькулятора, для обчислення ймовірності того, в серії 50 повторних незалежних випробувань за схемою Бернуллі з ймовірністю успіху $p=0,5$ у кожному випробуванні, випадкова величина набудатиме значення від 20 до 30. На практичних заняттях обчислення потрібно провести також з використанням інтегральної теореми Муавра-Лапласа і порівняти отримані результати.

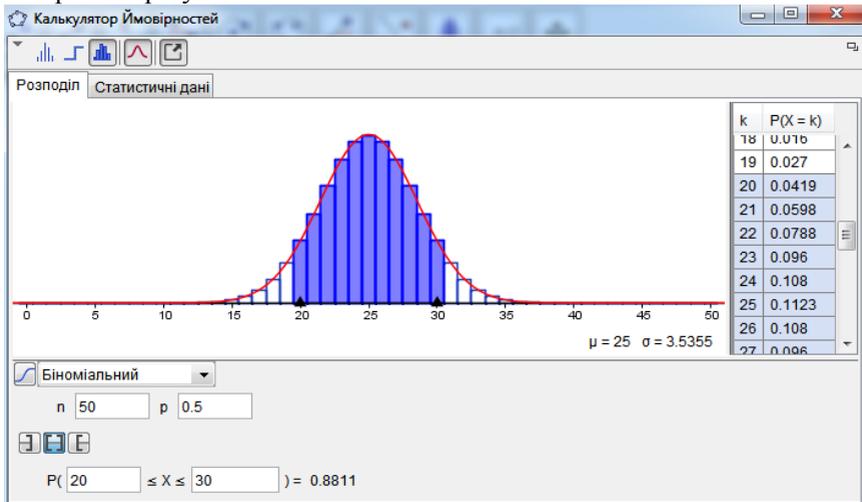


Рис. 1. 111. Обчислення за Калькулятором ймовірностей.

Особливо зручно калькулятор ймовірностей використовувати при статистичній перевірці статистичних гіпотез. Користувачі при цьому можуть зручно знаходити критичні точки для різних статистичних критеріїв залежно від виду альтернативної гіпотези і виду критичної області. Враховуючи, що при цьому будується функція щільності розподілу, заштриховується область під кривою для критичної області, то можна відзначити наступні переваги: 1) студенти ще раз усвідомлюють геоме-

тричний зміст визначеного інтеграла; 2) здійснюється унаочнення процесу відшукування критичних точок; 3) критичні точки можна знаходити для різних рівнів значущості без використання завчасно складених таблиць.

На рис. 1.106 представлено результат обчислення критичної точки за допомогою калькулятора ймовірностей для перевірки статистичної гіпотези про рівність дисперсій нормально розподілених випадкових величин за критерієм Фішера-Снедекора.

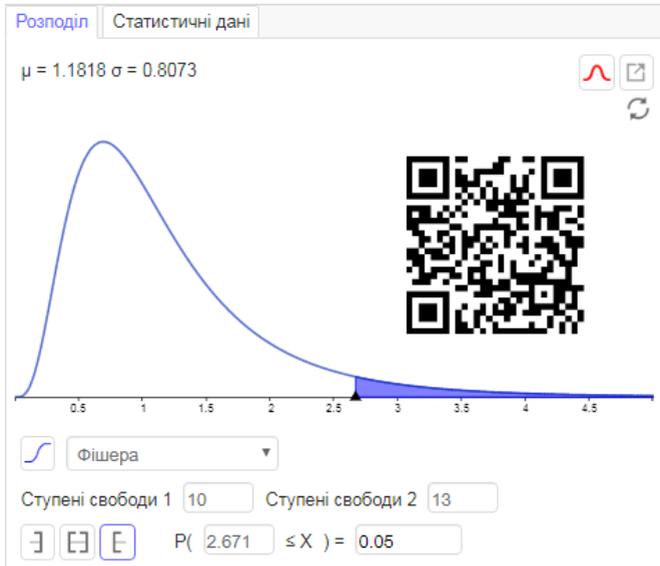


Рис. 1. 112. Обчислення критичних точок за допомогою Калькулятора ймовірностей для перевірки статистичних гіпотез.

Алгоритм відшукування критичної точки за калькулятором.

1. Обираємо вкладку *Розподіл*.
2. У випадуючому меню обираємо *розподіл Фішера*.
3. Вводимо *ступені вільності* (свободи). Для більшої виправленої дисперсії записуємо число до першої позиції (обсяг вибірки, зменшений на одиницю), для меншої – до другої. Наприклад, $k_1=10$, $k_2=13$.

4. Для правосторонньої критичної області *обираємо інтервал за позначкою [*. Записуємо до комірки для обчислення ймовірності *рівень значущості 0.05* і підтверджуємо дію. При цьому у комірці $\underline{\quad} \leq X$ отримаємо значення *критичної точки*. Для наведеного прикладу 2,671.

Для двосторонньої критичної області також *обираємо інтервал за позначкою [*. Записуємо до комірки для обчислення ймовірності *рівень значущості 0.025* і підтверджуємо дію. При цьому у комірці $\underline{\quad} \leq X$ отримаємо значення *критичної точки*. Для наведеного прикладу 3,2497.

3. Користуються популярністю у навчанні стохастики *наочності*, які моделюють випадкові події. Низку таких наочностей наводять у публікації О. Семеніхіна та М. Друшляк [54]. Заслужують на увагу і потребують локалізації українською наочності [Manuel Sada](#) [7]. Наведемо приклади окремих наочностей із зазначеної добірки.

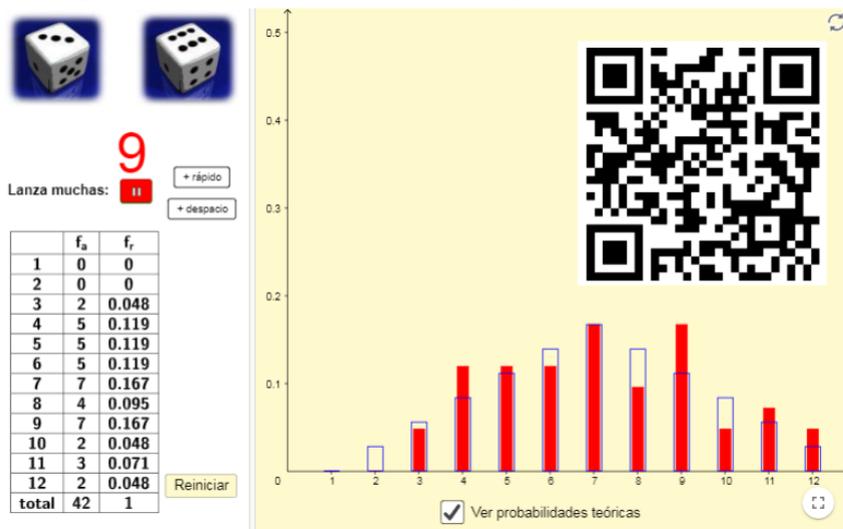


Рис. 1. 113. Моделювання процесу підкидання двох кубиків і фіксування суми чисел, які випадають на верхніх гранях.

Розглянемо, які настанови доцільно дати досліднику, який працює з цією наочностю. Далі подаємо орієнтовний текст, який може супроводжувати розробку GeoGebra.

Подивіться на початкову діаграму та частотну таблицю, у якій зібрані результати після того, як кинули 20 разів по два кубики, і запишіть їх суму. Який результат відбувся найчастіше? Скопіюйте і таблицю, і діаграму у свій ноутбук, щоб порівняти їх з подальшими результатами.

Натисніть кнопку «Киньте один раз» та спостерігайте за змінами: опишіть, що змінилося в таблиці і на гістограмі.

Клацніть на «Перезапустити» та змодельуйте серію викидання кубиків ще 20 разів. Дайте відповіді на ті самі запитання, що й вище, та повторіть схему у своєму зошиті.

Якби довелось зробити ставку на те, який результат буде найбільш повтореним після 100 підкидань, на що б ви зробили ставку? Чому?

Натисніть кнопку *Відтворити*, щоб «кинути багато разів», і перегляньте зміни. Використовуйте кнопку «Пауза», щоб зупинитись, а потім спостерігайте за результатами після 100 запусків.

Скопіюйте діаграми, отримані після 10, 100 та 1000 запусків у свій ноутбук. Що спільного та відмінного ви спостерігаєте?

Що складніше отримати, коли ви перекидаєте дві кістки, 12 чи 10? Чому? А 11 чи 12? Чому?

Який найімовірніший результат, коли підкидати дві кістки? Чому?

Отже, у навчанні теорії ймовірностей і математичної статистики доцільно використовувати GeoGebra, оскільки можна будувати гістограми розподілу статистичних ймовірностей і кумулятивні криві, обчислювати ймовірність потрапляння випадкової величини на заданий інтервал тощо. За допомогою динамічних параметрів отримати динамічні графіки.

GeoGebra – це «інтерактивний» моделюючий засіб, за допомогою якого у навчанні математики можна створювати динамічні моделі та унаочнити частину навчального матеріалу.

Контрольні питання і завдання

1. Описати види завдань з теорії ймовірностей і математичної статистики, для розв'язування яких можна використовувати ПЗ *GRANI* та *GeoGebra*.

2. Як можна використати програмні засоби для опрацювання результатів педагогічних досліджень? У чому відмінності в опрацюванні статистичних даних для дискретних і неперервних розподілів?

3. Дослідити відношення зросту учня до його маси для підлітків деякого класу навчального закладу. Користуючись формулою Кьютела, розрахувати, чи відповідає маса учня його зросту? Для цього необхідно масу, виміряну в кілограмах, поділити на квадрат зросту, взятий у метрах. Якщо відношення менше двадцяти, то вагу необхідно набирати. Якщо значення обчисленої величини лежить в межах від 20 до 23, то вага нормальна. Тим учням, у яких обчислений коефіцієнт більший за 24, але не перевищує 29, бажано зменшувати вагу.

4. Взуттєвій фабриці потрібно виготовити партію взуття обсягом 5000 пар для підлітків. Опитати учнів 9-11-их класів, з'ясувати у них розміри взуття, опрацювати статистичні дані, підготувати поради для представника взуттєвої фабрики щодо виготовлення кількості пар взуття певних розмірів.

5. Урожайність зернових культур в районі задана таблицею в центнерах з гектара. Наближено обчислити урожай, який можна зібрати з 300 гектарів зернових?

40.2	10.2	15.4	19.4	14.1	28.0	15.8	20.1	26.5	15.6	29.3	13.6	18.6
34.6	20.8	28.4	18.2	28.1	17.1	26.4	25.9	37.6	32.6	31.4	27.9	21.4
10.9	26.4	38.0	49.1	22.0	26.5	25.6	27.6	20.1	30.0	40.2	26.2	11.0
12.9	27.2	30.1	15.4	31.4	31.4	12.4	37.6	34.0	12.1	18.3	19.1	36.7
14.6	12.9	30.1	18.5	12.4	18.1	38.3	13.4	20.1	29.2	26.1	10.8	19.2

Висновки до другого розділу

1. Доцільне застосування у навчанні математики ПЗ може забезпечувати диференціацію навчання і підвищення його результативності, сприяти розкриттю творчого потенціалу та пізнавальних здібностей кожного окремого учасника навчального процесу.

2. Впровадження у процесі навчання математики проєктних технологій сприяє фундаменталізації навчання через глибоке, усвідомлене засвоєння базових знань, що забезпечується за рахунок їх універсального використання в різних ситуаціях, передбачених роботою над проєктом; забезпечує розвиваюче навчання завдяки комплексному підходу до розробки навчальних проєктів; підвищує внутрішню мотивацію тих, хто навчається, через гармонійне вбудовування освітнього процесу в логіку діяльності, що має для них особистісний зміст.

3. З метою підвищення ефективності сприйняття та засвоєння стереометричного матеріалу, для подолання труднощів при перекодуванні умовно-графічного зображення просторового тіла та створення адекватного просторового образу, доцільно доповнити теоретичний матеріал демонстраційними моделями, створеними засобами ІКТ. Практика використання на уроках стереометрії ПЗ свідчить про краще набуття учнями / студентами вмінь та навичок правильно виконувати просторові рисунки, про підвищення у них рівня знань та умінь, розвиток просторової уяви.

4. У навчанні планіметрії за допомогою динамічної геометрії доцільно використовувати дослідницький метод навчання, який на практиці найчастіше використовується через розглядання «відкритих» задач: задач з неповними даними, з невизначеними елементами умови, з відкритістю твердження. Розв'язування завдання зазначеного типу розпочинається з довизначення. Довизначення задачі відносять до навчально-творчих задач, які розвивають здібності знаходити потрібні відомості, переносити їх, застосовувати в умовах задачі. Це один з видів мотивування діяльності учасників навчального процесу, оскільки допомагає створити навчально-пізнавальну ситуацію, коли їм захочеться досліджувати і висувати гіпотези.

5. Аналізуючи графічні образи в задачах з параметрами, можна встановити кількість розгалужень, визначити контрольні значення параметрів, отримати дані для створення евристичних правил-орієнтирів. Доцільно розглядати одночасно графічні та аналітичні прийоми розв'язування однієї і тієї ж задачі.

6. У ході графічних експериментів за допомогою ПЗ формуються різні прийоми мислительної діяльності – аналіз, синтез, узагальнення, удосконалюються навички самоконтролю, розвивається пізнавальна самостійність особистості. Якщо завершувати аналіз побудованих графічних образів виведенням можливих наслідків, то стимулюватимемо розвиток такої компоненти дивергентного мислення як продуктивність.

Література до розділів 1, 2

Комп'ютерно-орієнтовані технології навчання

1. Borchers [Michael](#) Probability Calculator [Electronic Resource] / Michael Borcherd. - Mode of access : <https://www.geogebra.org/m/UaZzHjZG> (date of appeal : 31.07.2019).
2. GeoGebra : динамічна математика для навчання та викладання : веб-сайт [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://www.geogebra.org/> (дата звернення 30.06.2019).
3. GeoGebra : динамічна математика для навчання та викладання : підручники [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://wiki.geogebra.org/en/Tutorials> (дата звернення 30.06.2019).
4. Hohenwarter [Markus](#). GeoGebra Quickstart. Check-as-you-go GeoGebra Tutorials [Electronic Resource] [Markus Hohenwarter](#). – Режим доступу : <https://www.geogebra.org/m/Ebm5wBW5> (date of appeal : 30.06.2019).
5. Hohenwarter M. GeoGebra Help 3.2 [Електронний ресурс] / М. Hohenwarter, J. Hohenwarter – Режим доступу : <http://static.geogebra.org/help/docuen.pdf> (дата звернення 30.06.2019).
6. Interwrite Workspace : програмне забезпечення для дошки Interwrite DualBoard : веб-сайт [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://interwrite-workspace.software.informer.com/download/> (дата звернення: 30.06.2019).
7. Sada [Manuel](#). Probabilidad: simulaciones y problemas [Electronic Resource] : GeoGebraBook / [Manuel Sada](#). - Mode of access: <https://www.geogebra.org/m/qjWuUAgs> (date of appeal : 31.07.2019).
8. Web 2.0 LearningApps.org : сервіс для підтримки процесів навчання та викладання за допомогою інтерактивних модулів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://learningapps.org/> (дата звернення: 30.06.2019).
9. Васильєва Д. В. Методика навчання математики учнів 5–6 класів з використанням мультимедійної дошки : автореф. дис. на здобуття наукового ступеня канд. пед. наук : 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)» / Д. В. Васильєва ; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – Київ, 2013. – 20 с.
10. Васильєва Д. В. Мультимедіа на уроках математики. 5–6 класи / Д. В. Васильєва. – Київ : Ред. газет природничо-математичного циклу, 2013. – 128 с.
11. Васильєва Д. В. Збірник задач з математики. 5-9 класи : наскрізні лінії компетентностей та їх реалізація / Д. В. Васильєва, Н. І. Василюк. – Київ : Видавничий дім «Освіта», 2017. – 112 с.
12. Вембер В. П. Навчально-методичні вимоги до електронного підручника / В. П. Вембер // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наукових праць / Редрада. – Київ : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2006. – № 4 (11). – С. 50-56.
13. Відкриття геометрії через комп'ютерні експерименти в пакеті DG : посіб. для вчителів математики / С. А. Раков, В. П. Горох, К. О. Осенков та ін. – Харків : Вікторія. – 2002. – 136 с.
14. Вінниченко Є. Ф. Деякі особливості геометричних перетворень в програмі GRAN-2D / Є. Ф. Вінниченко, А. О. Костюченко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук. праць / Редрада. – Київ : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2007. – № 5 (12). – С. 114–120.
15. Вінниченко Є. Ф. Розв'язування задач на ГМТ з використанням моделюючих

- програмних засобів / С. Ф. Вінниченко // Математика в школі. – 2003. – № 4. – С. 13–16.
16. Вінниченко С. Ф. Розвиток творчих здібностей старшокласників у процесі навчання інформаційних технологій розв'язування математичних задач : дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : 13.00.02 / Вінниченко Євгеній Федорович. – Київ, 2006. – 234 с.
 17. Грамбовська Л. В. Методика використання комп'ютерного моделювання у процесі розв'язування прикладних стереометричних задач на побудову / Л. В. Грамбовська // Математика в школі. – 2011. – № 5. – С. 40–45.
 18. Дементієвська Н. П. Як можна комп'ютерні технології використати для розвитку учнів та вчителів? / Н. П. Дементієвська, Н. В. Морзе // Актуальні проблеми психології : Психологічна теорія і технологія навчання / за ред. С. Д. Максименка, М. Л. Смільсон. – Київ : Міленіум, 2005. – Т. 8, вип. 1. – С. 23-38.
 19. Жалдак М. І. Математика с компьютером: пособие для учителей [Электронный ресурс] / М. И. Жалдак, Ю. В. Горошко, Е. Ф. Винниченко. – Киев : Изд-во НПУ имени М. П. Драгоманова, 2015. – 308 с. – Режим доступа: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyky-ta-pidruchnyky> (дата обращения: 30.06.2019).
 20. Жалдак М. І. Елементи стохастики з комп'ютерною підтримкою : посіб. для вчителів / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін. – Київ : Шкільний світ, 2006. – 119 с.
 21. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках геометрії : посіб. для вчителів [Електронний ресурс] / М. І. Жалдак, О. В. Вітюк – Київ : РННЦ „ДІНІТ”, 2004. – 168 с. – Режим доступа: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyky-ta-pidruchnyky> (дата звернення: 30.06.2019).
 22. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики: посіб. для вчителів [Електронний ресурс] / М. І. Жалдак. – К. : Техніка, 1997. – 304 с. – Режим доступа: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyky-ta-pidruchnyky> (дата звернення: 30.06.2019).
 23. Жалдак М. І. Комп'ютерно-орієнтовані засоби навчання математики, фізики, інформатики : посіб. для вчителів / М. І. Жалдак, В. В. Лапінський, М. І. Шут. – Київ : Дініт, 2004. – 110 с.
 24. Жалдак М. І. Математика (алгебра і початки аналізу) з комп'ютерною підтримкою : навч. посіб. для підгодов. відділень / М. І. Жалдак, А. В. Грохольська, О. Б. Жильцов. – Київ : МАУП, 2003. – 304 с.
 25. Жалдак М. І. Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики / М. І. Жалдак // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук праць / Редкол. – Київ, 2003. – Вип. 7. – С. 3–16.
 26. Жалдак М. І. Стохастика : посіб. для вчителів [Електронний ресурс] / М. І. Жалдак, І. М. Біляй. – Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. – 304 с. – Режим доступа: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyky-ta-pidruchnyky> (дата звернення: 30.06.2019).
 27. Жалдак М. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : підручник для студентів фізико-математичних та інформативних спеціальностей педагогічних університетів [Електронний ресурс] / М. І. Жалдак, Н. М. Кузьміна, Г. О. Михалін. – 3-тє вид., перероб. і доп. – Київ : Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, 2017. – 707 с. – Режим доступа: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyky-ta-pidruchnyky> (дата звернення: 30.06.2019).
 28. Жалдак М. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : збірник вправ і задач [для студентів фізико-математичних та інформатичних спеціальностей педагогічних університетів] [Електронний ресурс] / М.І. Жалдак, Н.М. Кузьміна, Г.О. Михалін. – Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2019. – 840 с. Ре-

- жим доступу: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyky-ta-pidruchnyky> (дата звернення: 30.06.2019).
29. Жалдак М. І. Початки стохастики : факультативний курс для учнів старшої школи [Електронний ресурс] / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, І. М. Біляй. – Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2014. – 163 с. – Режим доступу: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyky-ta-pidruchnyky> (дата звернення: 30.06.2019).
 30. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики [Електронний ресурс] : навч. посіб. / В. В. Корольський, Т. Г. Крамаренко, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк ; наук. ред. М. І. Жалдак. – Кривий Ріг : Книжкове видво Киреевського, 2009. – 316 с. – Режим доступу: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/jspui/handle/0564/571> (дата звернення: 26.02.2019).
 31. Колчук Т. В. Методика дистанційного навчання геометрії учнів основної школи : автореф. дис. на здобуття наукового ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія і методика навчання (математика)» / Т. В. Колчук ; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – Київ, 2014. – 20 с.
 32. Крамаренко Т. Використання мультимедійної дошки під час навчання геометричних перетворень на площині [Електронний ресурс] / Т. Крамаренко // Математика в сучасній школі. – 2013. – № 9. – С. 38–43. – Режим доступу: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/jspui/handle/0564/577> (дата звернення: 26.02.2019).
 33. Крамаренко Т. Г. Використання GeoGebra у навчанні теорії ймовірностей і математичної статистики / Т. Г. Крамаренко, О. М. Ухова // Нові інформаційні технології в освіті для всіх : безперервна освіта : Восьма міжнародна конференція ІТЕА-2013 (Київ, 26-27 листопада, 2013 р.) : матеріали доповідей та виступів. – Київ, 2013. – С. 77-84.
 34. Крамаренко Т. Г. Педагогічні замальовки [Електронний ресурс] : нариси / Тетяна Григорівна Крамаренко. – Кривий Ріг : Вид. Р. А. Козлов, 2018. – 592 с. – Режим доступу: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/jspui/handle/0564/2007> (дата звернення: 30.06.2019).
 35. Крамаренко Т. Г. Теорія ймовірностей і математична статистика [Електронний ресурс] / Т. Г. Крамаренко // Електронний навчальний курс. – Режим доступу: <https://moodle.kdpu.edu.ua/course/index.php?categoryid=76> (дата звернення 30.06.2019).
 36. Крамаренко Т. Г. Електронний навчальний курс «Інформаційно-комунікаційні засоби навчання математики» [Електронний ресурс] / Т. Г. Крамаренко ; Криворізький держ. пед. ун-т. – Режим доступу: <http://moodle.kdpu.edu.ua/course/view.php?id=40> (дата звернення: 30.06.2019).
 37. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером [Електронний ресурс] : навч. посіб. / Т. Г. Крамаренко; за ред. М. І. Жалдака. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. – 272 с. – Режим доступу: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/jspui/handle/0564/570> (дата звернення: 26.02.2019).
 38. Крамаренко Т. Г. Вибрані питання елементарної математики з GeoGebra : посібник [Електронний ресурс] / Т. Г. Крамаренко. – Режим доступу : <https://www.geogebra.org/m/gqpk8yfu> (дата звернення 29.07.2019).
 39. Крамаренко Т. Г. Проблеми підготовки вчителя математики до використання ІКТ у процесі навчання теорії ймовірностей і математичної статистики / Т. Г. Крамаренко // Вісник Черкаського університету. Серія Педагогічні науки. – Ч. : Черкаський нац. ун-т., 2013. – № 8. – С. 63-71.
 40. Лов'янова І. В. Професійно спрямоване навчання математики у профільній школі : теоретичний аспект : монографія / Ірина Василівна Лов'янова. – Черкаси : Вид. Чабаненко Ю. А., 2014. – 368 с.
 41. Лупан І. В. Лабораторні роботи на уроках алгебри і початків аналізу в 10 класі / І.

- В. Лупан // Математика в школі. – 2000. – № 6. – С. 36–39.
42. Львов М. С. Шкільна система комп'ютерної алгебри ТерМ 7-9. Принципи побудови та особливості використання / М. С. Львов // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова (серія № 2), Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук. праць. – К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2005. – № 3 (10). – С. 160-169.
 43. Мадзігон В. М. Педагогічні аспекти створення і використання електронних засобів навчання / В. М. Мадзігон, В. В. Лапінський, Ю. О. Дорошенко // Проблеми сучасного підручника : зб. наук. праць. – К. : Педагогічна думка, 2003. – Вип. 4. – С. 70-82.
 44. Машбиць Ю. І. Актуальні психолого-педагогічні проблеми дистанційного навчання / Ю. І. Машбиць, М. Л. Смульсон // Актуальні проблеми психології (психологічна теорія і технологія навчання) / За ред. С. Д. Максименка, М. Л. Смульсон. – К. : Міленіум, 2005. – Т. 8, Вип. 1. – С. 6–23.
 45. Методичні рекомендації для проведення тренінгу для вчителів : матеріали навчальної програми Intel «Навчання для майбутнього. 10 версія» [Електронний ресурс] / Корпорація Intel, Інститут комп'ютерних технологій США; адаптовано для використання в Україні; загальна редакція: Н. П. Дементієвська, Н. В. Морзе, Т. В. Нанаєва. – Київ, 2011. – Режим доступу: <http://iteach.com.ua/> (дата звернення: 18.02.2017).
 46. Морзе Н. В. Intel. Навчання для майбутнього : адаптація до укр. видання / Н. В. Морзе, Н. П. Дементієвська. – Київ : Видавнича група BHV, 2004. – 416 с.
 47. Морзе Н. В. Методика навчання інформатики. Ч. 2. Методика навчання інформаційних технологій / Н. В. Морзе. – Київ : Навчальна книга, 2003. – 288 с.
 48. Практикум з опанування пакету динамічної математики GeoGebra : GeoGebraBook [Електронний ресурс] / Л.Е.Гризун, В.В. Пікалова, І.Д.Русіна, В.А.Цибулька - [Kharkiv GeoGebra Institute](http://www.geogebra.org/m/jjgf2vfk). – Режим доступу: <https://www.geogebra.org/m/jjgf2vfk> (дата звернення 06.07.2019).
 49. Програма спеціального курсу «Навчальні дослідження та їх підтримка засобами ІКТ у курсі математики загальноосвітніх навчальних закладів» / М. І. Жалдак, В. Ю. Биков, Ю. О. Жук та ін. // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. праць. – Випуск VI: в 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавн. відділ НметАУ, 2006. – Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – С. 4-20.
 50. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій : дис. на здобуття наук. ступеня д-ра пед. наук : 13.00.02 / Раков Сергій Анатолійович. – Київ, 2005. – 503 с.
 51. Ракута В.М. Бібліотека комп'ютерних моделей, як необхідна складова сучасного навчального середовища [Електронний ресурс] / В. М. Ракута // Наукові записки. – Випуск № 98. – 2011 – С. 246-249. –Режим доступу : https://drive.google.com/file/d/0B5v29f_pNRDiNjzkZmFkZGltYjA3ZS00OGU5LWZlZ3YtktNjBkYmQzODRiYWZ3/view (дата звернення: 30.06.2019).
 52. Риковський М. Й. Комбінації геометричних тіл : GeoGebraBook [Електронний ресурс] / М. Й. Риковський. – Режим доступу : <https://www.geogebra.org/u/mirinf> (дата звернення 06.07.2019).
 53. Семеніхіна О. В. Розв'язування задач шкільного курсу статистики у середовищах Gran1 і GeoGebra : порівняльний аналіз [Електронний ресурс] / О. В. Семеніхіна, М. Г. Друшляк // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2015. – № 1 (4). – С. 21–30. – Режим доступу: <https://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/publ/1-1-0-26> (дата звернення: 30.06.2019).
 54. Семеніхіна О.В. Візуалізація експериментальних випробувань на основі випадкових подій у середовищі GeoGebra 5.0 / О.В. Семеніхіна, М.Г. Друшляк // Нау-

- ковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 3. Фізика і математика у вищій і середній школі. – 2014. – № 14. – С. 94-103.
55. Семеріков С. О. Фундаменталізація навчання інформатичних дисциплін у вищій школі : монографія / Сергій Олексійович Семеріков ; наук. ред. М. І. Жалдак. – Кривий Ріг : Мінерал ; Київ : Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, 2009. – 340 с.
 56. Сидорук В. А. Побудова перерізів многогранників : навчально-методичний посібник *GeoGebraBook* [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://www.geogebra.org/m/Jd4va4rs> (дата звернення: 30.06.2019).
 57. Смалько О. А. Використання програмного педагогічного засобу «GRAN-2D» на уроці планіметрії / О. А. Смалько // Математика в школі. – 2003.– №1. – С. 10–14.
 58. Смирнова-Трибульська Е. Н. Теоретико-методические основы формирования информационных компетентностей учителей естественно-научных дисциплин в области дистанционного обучения : дисс. на соискание научной степени д-ра пед. наук : 13.00.02 / Евгения Николаевна Смирнова-Трибульська. – Киев, 2008. – 676 с.
 59. Смирнова-Трибульська Є. М. Інформаційно-комунікаційні технології в професійній діяльності вчителя : посібник [для вчителів] / Є. М. Смирнова-Трибульська. – Херсон: Айлант, 2007. – 560 с.
 60. Співаковський О. В. Теоретико-методичні основи навчання вищої математики майбутніх вчителів математики з використанням інформаційних технологій : дис. на здобуття наук. ступеня д-ра пед. наук : 13.00.02 / Співаковський Олександр Володимирович. – Київ, 2003. – 534 с.
 61. Теплицький І. О. Розвиток творчих здібностей школярів засобами комп'ютерного моделювання : дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : 13.00.02 / Теплицький Ілля Олександрович. – Київ, 2000. – 222 с.
 62. Тополя Л. В. Математичні відкриття у процесі дидактичних ігор з комп'ютерною підтримкою / Л. В. Тополя // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук. праць. – Київ, 2002. – Вип. 5. – С. 110–118.
 63. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики : монографія / Юрій Васильович Триус. – Черкаси : Брама-Україна, 2005. – 400.

Інша використана чи рекомендована література

64. Андреев В. И. Диалектика воспитания и самовоспитания творческой личности / В. И. Андреев. – Казань : Изд-во Казанского ун-та, 1988. – 238 с.
65. Бевз Г. П. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. — 272 с.
66. Бевз Г. П. Методика розв'язування стереометричних задач / Г. П. Бевз. – Київ : Радянська школа, 1975. – 240 с.
67. Бевз Г. П. Алгебра (Алгебра і початки аналізу) : підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. : академ. рівень, проф. рівень / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – К. : Освіта, 2011. – 400 с.
68. Буряк В. К. Самостійна робота з книгою / В. К. Буряк. – К. : Знання, 1990. – 48 с.
69. Вишенський В. А. Збірник задач з математики : навч. посібник / В. А. Вишенський, М. О. Перестюк, А. М. Самойленко. – 2-е вид., доп. – Київ : Либідь, 1993. – 344 с.
70. Горнштейн П. И. Задачи с параметрами / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Київ : Текст, 1992. – 290 с.
71. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти : постанова Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. № 1392 // Офіційний віс-

- ник України. – 2012. – №11. – С. 51.
72. Задачі з параметрами. Розв'язки, рекомендації, приклади : навч. посіб. для старшокласників та абітурієнтів / Віктор Репета, Надія К्लешня, Марина Коробова, Леся Репета. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2002. – 264 с.
73. Капіносов А. М. Математична алгоритмічна компетентність: теоретико-методологічні основи дослідження, структура та рівні / А. М. Капіносов, В. В. Корольський // Педагогіка вищої та середньої школи : зб. наук. праць. – Кривий Ріг, 2013. – Вип. 37. – С. 71–78.
74. Капіносов А. М. Математична понятійна компетентність: теоретико-методологічні основи дослідження, структура та рівні / А. М. Капіносов, В. В. Корольський // Педагогіка вищої та середньої школи : зб. наук. праць. – Кривий Ріг, 2012. – Вип. 34. – С. 69–74.
75. Капіносов А. М. Тематичне поетапне рівневе вивчення математики в основній школі / А. М. Капіносов. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2005. – 112 с.
76. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников / В. А. Крутецкий. – Москва : Просвещение, 1968. – 431 с.
77. Кушнир И. А. Математическая энциклопедия / И. А. Кушнир. – Київ : Астарта, 1995. – 768 с.
78. Литвиненко В. Н. Задачи на развитие пространственных представлений / В. Н. Литвиненко. – Москва : Просвещение, 1991. – 127 с.
79. Маланюк М. П. Олімпіади юних математиків / М. П. Маланюк, В. І. Лукавецький. – Київ : Радянська школа, 1977. – 104 с.
80. Математика: посібник для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання / А. М. Капіносов, Г. І. Білоусова, Г. В. Гап'юк та ін. ; за ред. В. В. Корольського. – 3-є вид., перероб. і доп. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2012. – 416 с.
81. Моляко В. А. Психология решения школьниками творческих задач / В. А. Моляко. – Київ : Радянська школа, 1983. – 94 с.
82. Навчальна програма з математики для 5-9 класів : навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс] // Наказ Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804. – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf> (дата звернення 24.07.2019).
83. Національна стратегія розвитку освіти в Україні на період до 2021 року : Указ Президента України від 25 червня 2013 року №344/2013 // Офіційний вісник Президента України. – 2013. – №17. – С. 31.
84. Нелін Є. П. Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навч. закладів : академ. рівень, проф. рівень / Є. П. Нелін, О. Е. Долгова. – Х. : Гімназія, 2011. – 448 с.
85. Освітні програми : сайт Міністерства освіти і науки України [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi> (дата звернення 30.06.2019).
86. Освітні технології : навч.-метод. посіб. / О. М. Пехота, А. З. Кіктенко, О. М. Любарська та ін., за ред. О. М. Пехоти. – Київ : А.С.К., 2001. – 256 с.
87. Панченко Л. В. Система прикладних задач як засіб формування вмінь математичного моделювання у майбутніх учителів математики / Л. В. Панченко // Математика в школі. – 2004. – № 9. – С. 21-28.
88. Параскевич С. П. Ейдографіка як засіб розвитку креативності майбутніх учителів математики / С. П. Параскевич // Кривий Ріг: Видавн. відділ НМетАУ, 2008. – Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – С. 67-71.
89. Педагогіка в питаннях і відповідях : навч. посіб. / Л. В. Кондрашова, О. А. Пермяков, Н. І. Зеленкова, Г. Ю. Лаврешина. – Київ : Знання, 2006. – 252 с. – (Вища освіта ХХІ століття).

90. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа. – Москва : Наука, 1975. – 463 с.
91. Про вищу освіту : Закон України від 1 липня 2014 р. № 1556-VII5 [Електронний ресурс] // Відомості Верховної Ради. – 2014, редакція від 16.07.2019. – Режим доступу : <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1556-18/conv> (дата звернення: 22.07.2019).
92. Про затвердження Національної рамки кваліфікацій : Постанова Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. № 1341 (в редакції постанови Кабінету Міністрів України від 12 червня 2019 р. № 509) : додаток [Електронний документ]. – Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1341-2011-п/conv> (дата звернення 22.07.2019)
93. Про освіту : Закон України від 5 вересня 2017 р. № 2145-VIII (в редакції від 16.07.2019) [Електронний ресурс] // Відомості Верховної Ради. – Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19/conv> (дата звернення: 22.07.2019).
94. Сиротенко Г. О. Шляхи оновлення освіти : науково-методичний аспект : інформаційно-метод. зб. / Г. О. Сиротенко. – Харків: Основа, 2003. – 96 с.
95. Сисоева С. О. Підготовка вчителя до формування творчої особистості учня : монографія / Світлана Олексіївна Сисоева. – Київ : Поліграфкнига, 1996.– 406 с.
96. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике : теория, методика, технология : монография / Елена Ивановна Скафа. – Донецк : ДонНУ, 2004. – 439 с.
97. Слепкань З. І. Методика навчання математики : підруч. для студ. мат. спец. пед. навч. закл. / З. І. Слепкань. – Київ : Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
98. Слепкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики / З. І. Слепкань. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. – 240 с.
99. Степанов О. М. Основи психології і педагогіки : посібник / О. М. Степанов, М. М. Фіцула. – Київ : Академвидав, 2003. – 504 с.
100. Тарасенкова Н. А. Диференційовані завдання за готовими малюнками для 8 класу / Н. А. Тарасенкова. – К. : Кімо, 1999. – 80 с.
101. Фридман Л. М. Как научиться решать задачи : кн. для учащихся ст. классов сред. шк. / Л. М. Фридман, Е. Н. Турецкий. – 3-е изд., дораб. – Москва : Просвещение, 1989. – 192 с.
102. Хуторской А. В. Современная дидактика : учебник для вузов / А. В. Хуторской. – СПб. : Питер, 2001. – 544 с.
103. Цукарь А. Я. Упражнения на развитие пространственного воображения / А. Я. Цукарь // Математика в школе. – 2000. – № 9. – С. 14–18.
104. Часнікова О. В. Компетентнісний підхід в освіті як основа її реформування [Електронний ресурс] / О. В. Часнікова // Електронне наукове фахове видання «Народна освіта». – 2014. – №3(24). – Режим доступу : http://narodnaosvita.kiev.ua/?page_id=2607 (дата звернення 30.06.2019).
105. Чашечнікова О. С. Система компонентів творчого мислення, що можуть діагностуватися в процесі навчання математики / О. С. Чашечнікова // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнародний зб. наук. робіт, вип. 14. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2005. – С. 33–40.
106. Черных Л. А. Теоретические основы разработки методической системы обучения / Л. А. Черных // Эвристика та дидактика точних наук : зб. наук. робіт. – Вип. 3. – Донецьк, 1995. – С. 15–19.
107. Шапиро И. М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики : пособие для учителя / И. М. Шапиро. – Москва : Просвещение, 1990. – 96 с.
108. Якиманская И. С. Развитие пространственного мышления школьников / И. С. Якиманская. – Москва : Педагогика, 1980. – 240 с.

РОЗДІЛ 3. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ЗАСАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ДИСТАНЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ НАВЧАННЯ

3.1. Основи технологій дистанційного навчання

На виконання завдань, задекларованих в основних національних освітніх документах [6; 7; 18] щодо забезпечення розвитку освіти на основі нових прогресивних концепцій, впровадження в навчально-виховний процес новітніх технологій та науково-методичних досягнень, дистанційне навчання (ДН) набуває все більшого поширення в Україні.

Проаналізуємо історичні етапи розвитку та становлення дистанційного навчання у світовій практиці.

3.1.1. Історія становлення дистанційного навчання

Історично дистанційне навчання виникло у 1840 році, коли Ісаак Пітман запропонував навчання через поштовий зв'язок для студентів Англії. У 1850 р. в Росії було створено Інститут заочного навчання, а у 1856 році Чарльз Тюссе та Густав Лангеншейдт розпочали викладання іноземної мови заочною формою у Берліні.

Перший етап розвитку дистанційного навчання тривав майже сто років – до другої половини ХХ століття. Основними технологіями доставлення навчальних матеріалів тим, хто навчається і географічно віддалений від навчального закладу, був поштовий зв'язок, радіозв'язок (з 20-х років ХХ століття) та телебачення (з 50-х років ХХ століття). Ці технології поєднувались з аудиторними заняттями та екзаменаційним контролем [1].

Приватні школи, відділення коледжів та університетів пропонували програми навчання за допомогою листування тільки як додаткову освіту: короткострокові професійно-технічні курси, різні курси доекзаменаційної підготовки.

Появу навчання за допомогою листування можна впевнено розглядати як ранню форму дистанційного навчання [4]. Підсумками першого періоду дистанційного навчання фахівці вважають такі: усвідомлення першими практиками-організаторами дистанційного навчання як особливої форми, в основі якої міститься особливе середовище, відмінне від середовища «класної кімнати»; часткове формування типової структури дистанційних освітніх програм, в яких поєднуються академічні та професійно-технічні курси; визначення пріоритетної цільової групи тих, хто обирає дистанційне навчання; виникнення відкритого дистанційного навчання у сегменті додаткового та продовженого навчання; початок термінологічного оформлення дистанційного навчання в англійській мові: поява термінів «home-study» («домашнє навчання»), «independent study» («незалежне навчання»), «external student» («зовнішній студент», або «екстерн», або «заочник»), а в 1892 році в каталозі кореспондентсь-

ких курсів Університету штату Вісконсін вперше з'явився термін «distance education» [2].

В 1915 році професор Університету штату Вісконсін У. Лайті дав оцінку стану дистанційного навчання першого покоління: «... передбачається створити метод, техніку, атмосферу, ... розв'язати складні проблеми, пов'язані з навчанням на відстані. І це розв'язання, поки що, тільки накреслено» [23].

Другий етап – етап поширення заочного навчання – розпочинається із заснування Відкритого Університету Великобританії (1969 р.). З цього моменту в дистанційному навчанні почав використовуватися комплексний підхід до навчання з використанням різних засобів при домінуванні друкованих матеріалів. Взаємодія викладача зі студентами здійснювалася через друкований матеріал, що доповнювався радіо- та телепередачами, за допомогою листування, очних консультацій та короткострокових курсів [5].

У 60-ті роки у зв'язку з поширенням програм неперервного навчання, підвищення кваліфікації та перепідготовки фахівців перед вищою школою постали важливі завдання [15]. Філософія міжнародних організацій, що здійснюють свою діяльність у сфері освіти, зокрема ЮНЕСКО, спрямовується на те, щоб перетворення та нововведення у вищій освіті сприяли втіленню в життя різних теорій та концепцій неперервної освіти, перетворенню жорстких, негнучких та елітарних систем вищої освіти в доступні для всіх.

У цей період відбувається активне становлення та розвиток радянської системи заочного навчання, яка стала історично першою державною системою дистанційного навчання і випустила мільйони дипломованих фахівців [11].

Кінець 60-х – початок 70-х рр. є найбільш плідним у теоретичному осмисленні дистанційного навчання. В цей час розвиваються основні концепції дистанційного навчання. В центрі уваги науковців з'явилися нові теорії дистанційного навчання: теорія індустріалізації, теорія взаємодії та комунікації, теорія автономності та незалежності. За дистанційним навчанням остаточно закріплюється соціальна функція – надати освітні послуги тим, хто бажає навчатися, але не має можливості змінити свій спосіб життя [23].

Завдяки появі та поширенню інформаційних та комунікаційних технологій у різних сферах життєдіяльності суспільства, в тому числі й в освіті, у другій половині 80-х років ХХ століття відбувся перехід до третього етапу дистанційного навчання. Використання технологій третього етапу, на відміну від технологій першого та другого, забезпечило можливість здійснювати двосторонній зв'язок у найрізноманітніших формах як у синхронному, так і в асинхронному режимі [62].

Наприкінці 80-х років бібліографія з проблем дистанційного навчання нараховувала близько двох тисяч публікацій тільки англійською та німецькою мовами. Однак слід зазначити, що теоретичні узагальнен-

ня 80-х суттєво не відрізнялись від зазначених теорій 70-х років і значно відставали від практики дистанційних університетів, які емпірично виробляли власні дидактичні стратегії [25].

Розвиток дистанційної освіти в Україні розпочався значно пізніше, ніж у країнах Західної Європи, і здійснювався за умов низького рівня інформатизації українського суспільства, слабкого оснащення комп'ютерною технікою шкіл України та відсутності методик дистанційного навчання. Проте більш пізній початок призвів до того, що сьогодні розвиток дистанційної освіти в Україні відбувається з урахуванням уже існуючих досягнень у цій галузі. В динаміці цього процесу можна умовно виділити кілька етапів. Перші кроки були зроблені ще наприкінці 90-х років минулого століття. У лютому 1998 р. Верховна Рада приймає Закон України «Про національну програму інформатизації» [10], в якому формулюються завдання щодо інформатизації освіти та визначаються напрями їх реалізації. З моменту прийняття цього Закону в системі освіти України відбувається ряд позитивних змін у галузі інформатизації та освоєння Internet.

З 1997 року в Україні регулярно проводяться Всеукраїнські конференції «Internet-технології в інформаційному просторі держави» (м. Ялта). В 1998 році науковці країни організовують та проводять національну конференцію в Одесі, на якій відбулося підписання меморандуму про співробітництво між 27 ЗВО України. Спільною постановою Президії Національної Академії наук України і Колегії Міністерства освіти України в 1997 році було створено Асоціацію користувачів телекомунікаційних мереж закладів освіти і науки України з координуючим центром Європейської інтеграції у місті Києві, який у подальшому отримав офіційну назву «Українська науково-освітня телекомунікаційна мережа „УРАН”» [23].

В 2000 році Міністерство освіти та науки України затвердило «Концепцію розвитку дистанційної освіти в Україні», яка передбачає створення в країні системи освіти, що забезпечує розширення кола користувачів освітніх послуг, реалізацію системи безперервної освіти протягом всього життя та індивідуалізацію навчання при масовості освіти [18].

Крім того, створення Українського центру дистанційної освіти на основі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут» дало можливість проводити в Україні курси навчання для викладачів ЗВО, розробників дистанційних курсів і укладати договори з ЗВО про співробітництво з метою координації розбудови системи дистанційної освіти в Україні.

Розвиток дистанційної освіти в Україні пройшов два етапи становлення. На першому етапі розвитку вітчизняної дистанційної освіти протягом 2001 року було:

- створено організаційну структуру системи дистанційної освіти;
- розроблено правові основи і стандарти дистанційної освіти;

- створено матеріально-технічну базу регіональних і локальних центрів дистанційної освіти;
- створено первинний фонд дистанційних курсів і забезпечено їх експериментальне впровадження;

- розроблено засади фінансування системи дистанційної освіти;
- реалізовано пілотні проекти впровадження дистанційної освіти.

На другому етапі становлення дистанційної освіти в Україні протягом 2002-2003 рр. проходило:

- повномасштабне розгортання і впровадження дистанційної освіти як форми навчання, рівноцінної з очною і заочною формами та екстернатом;

- розробка і впровадження системи пільг щодо використання комп'ютерних мереж і телекомунікаційної інфраструктури для складових системи дистанційної освіти (юридичних і фізичних осіб);

- впровадження системи ліцензування, атестації та акредитації закладів дистанційної освіти;

- інтеграція системи дистанційної освіти України у світову систему.

Інтенсивному впровадженню дистанційної освіти у вищих навчальних закладах протягом останніх років сприяло прийняття таких офіційних документів: «Програма розвитку системи дистанційного навчання» на 2004-2006 рр. (2003 р.) [38], «Положення про дистанційне навчання» (2004 р.) [31], проект ліцензійних умов надання освітніх послуг у сфері вищої освіти за дистанційною формою навчання» (2005 р.) [39], Державна програма «Інформаційні та комунікаційні технології в освіті і науці» на 2006-2010 роки [7].

Сьогодні в Україні вже функціонують понад 224 дистанційні курси, розроблені в центрах дистанційного навчання більш ніж десяти вищих навчальних закладів. Найбільш продуктивними на даний момент є такі заклади: Український центр дистанційної освіти, Українська система дистанційного навчання, Українська академія державного управління при Президентові України та Харківський національний політехнічний університет.

Контрольні питання і завдання

1. Коротко охарактеризувати становлення дистанційного навчання у світовій практиці.

2. Проаналізувати основні етапи становлення дистанційного навчання в Україні. Спрогнозувати перспективи розвитку дистанційного навчання в системі освіти України.

3.1.2. Тлумачення поняття «дистанційне навчання»

У психолого-педагогічній літератури та нормативно-правових освітніх документах немає єдиного тлумачення поняття «дистанційне навчання». Інколи це поняття ототожнюється з поняттям «дистанційна освіта», що є некоректним з точки зору педагогіки, адже навчання – це двоєдиний процес взаємодії вчителя і учня (діяльностей викладання і

учіння), тоді як освіта – більш широке поняття, яке включає результат і процес, систему навчання і самоосвіти.

У Концепції розвитку дистанційної освіти в Україні [18] дистанційна освіта визначається як форма навчання, рівноцінна очній, вечірній, заочній та екстернату, яка реалізується, в основному, за технологіями дистанційного навчання через мережу Інтернет.

Розробкою теоретичних основ дистанційного навчання займалися О.О. Андрєєв [2], В.М. Кухаренко [4; 20], Н.В. Морзе [26; 27; 29; 30], В.В. Олійник [33], Є.С. Полат [34; 35; 36], О.В. Рибалко [20], Є.М. Смирнова-Трибульська [44; 46], А.В. Хуторський [53; 54] та інші вчені-педагоги.

За Є.М. Смирновою-Трибульською, дистанційна освіта – це керована навчально-пізнавальна діяльність, яка забезпечує інтелектуальну взаємодію студента і педагога на відстані і студентів між собою. Вона засновується на використанні сучасних телекомунікаційних засобів і є найбільш ефективним і адекватним видом навчання для сучасного інформаційного суспільства [46].

А.В. Хуторський вважає, що дистанційна освіта – це освіта, яка здійснюється з переважанням у навчальному процесі дистанційних освітніх технологій, а також з використанням інформаційних ресурсів і освітніх масивів мережі Інтернет, а дистанційне навчання – це навчання за допомогою засобів телекомунікацій, за яким суб'єкти навчання (учні, педагоги, тьютори та ін.), віддалені у просторі й часі, здійснюють загальний навчальний процес, спрямований на створення ними зовнішніх освітніх продуктів і відповідних внутрішніх зміни (приростів) суб'єктів освіти [53].

О.О. Андрєєв і В.І. Солдаткін розглядають дистанційне навчання як цілеспрямований, організований процес інтерактивної взаємодії учнів та вчителів між собою і роботи учнів із засобами навчання, інваріантний до їх розташування в просторі й часі, що реалізується за специфічною дидактичною схемою [2].

Група російських вчених на чолі з Є.С. Полат під дистанційним навчанням розуміють навчання на відстані, коли вчитель та учень розподілені простором [34; 35; 36].

На думку В.М. Кухаренка, дистанційне навчання – це сукупність педагогічних технологій (форма навчання), що базується на принципах відкритого і комп'ютерного навчання та активних методах навчання у спілкуванні в інформаційно-освітньому просторі, для організації освіти користувачів, розподілених у просторі і часі [20].

Педагогічні технології, які частково можуть бути використані при організації дистанційного навчання на думку ряду вчених, у тому числі Є.С. Полат, повинні бути перш за все *особистісно орієнтованими*. Основне призначення особистісно-орієнтованих технологій навчання полягає в тому, щоб підтримувати та розвивати природні якості дитини, її

здоров'я та індивідуальні здібності, допомагати в становленні її суб'єктивності, соціальності, культурної ідентифікації, творчої самореалізації особистості.

Сьогодні різні автори називають різноманітні технології, які належать до особистісно-орієнтованих технологій. Є.С. Полат серед всього різноманіття таких технологій зупиняє свій вибір на дидактичній системі, що включає метод проєктів, різнорівневе навчання та навчання у групах.

Оскільки, історія виникнення методу проєктів та особливості його застосування у шкільній практиці, зокрема на уроках математики як мотивуючого фактору, раніше вже були розглянуті (див. п. 2.1), залишається коротко охарактеризувати технології різнорівневого навчання та навчання у групах.

Технологія рівневої диференціації визначається як сукупність форм і методів навчання, в якому враховуються індивідуальні особливості учня, його потреби та інтереси. Рівнева диференціація виражається у тому, що, навчаючись у одному класі, за однією програмою та підручником, учні можуть засвоювати матеріал на різних рівнях. Вчитель організовує навчання на всіх чотирьох рівнях навчальних досягнень (початковому, середньому, достатньому та високому), а учень сам обирає рівень засвоєння навчального матеріалу.

Рівнева диференціація є формою реалізації *принципу індивідуалізації навчання*, відповідно до якого у процесі навчально-виховної роботи з класом вчитель взаємодіє з окремими учнями за індивідуальною моделлю, враховуючи властивості особистості учня.

В умовах індивідуалізованого навчання з'являються можливості:

- повністю адаптувати зміст, методи та темпи навчальної діяльності учня відповідно до його індивідуальних особливостей;
- спостерігати за кожною дією і операцією учня при розв'язуванні конкретної задачі;
- спостерігати за просуванням учня від незнання до знання, оперативно коригуючи його діяльність.

Головні переваги індивідуального навчання можуть бути успішно реалізовані як за умов традиційного навчання, так і при організації навчання за дистанційною формою, наприклад на вільнопоширюваній платформі дистанційного навчання MOODLE.

Групова навчальна діяльність (кооперативне навчання, *cooperative learning*) визначається як форма організації навчання в малих групах, об'єднаних загальною навчальною метою при опосередкованому керівництві вчителем [26].

Учитель у груповій навчальній діяльності керує роботою кожного учня опосередковано, через завдання, які він пропонує групі та через які регулюється діяльність учнів. Стосунки між учителем та учнем набувають характеру співпраці, тому що педагог безпосередньо втручається у роботу груп тільки в тому разі, якщо в учнів виникають запитання і вони

самі звертаються за допомогою до вчителя. Ця їхня спільна діяльність. При груповій навчальній діяльності, на відміну від фронтальної та індивідуальної, учні не ізолюються один від одного, а навпаки, є можливість реалізувати природне прагнення до спілкування, взаємодопомоги та співпраці.

Відомо, що учням буває психологічно складно звертатись за поясненням до вчителя і набагато простіше – до ровесників.

Групова навчальна діяльність сприяє активізації й результативності навчання школярів, вихованню гуманних стосунків між ними, самостійності, умінню обґрунтовувати і відстоювати свою точку зору, а також прислуховуватися до думки товаришів, культурі ведення діалогу, відповідальності за результати своєї праці. В умовах групової навчальної діяльності на занятті створюються умови для формування позитивної мотивації учіння школярів.

Як вид навчальної діяльності школярів, групова діяльність багатофункціональна.

Організаційна функція групової діяльності полягає в тому, що учні вчаться розподіляти обов'язки, спілкуватися один з одним, розв'язувати конфлікти, що виникають у спільній діяльності. В груповій роботі учень бере на себе функції вчителя і виконує дорослі види діяльності.

Важливу роль групова діяльність відіграє у досягненні виховної функції навчання. У груповій навчальній діяльності формується колективізм, моральні, гуманні якості особистості. Важливу роль у формуванні цих якостей відіграють особливості організації групової роботи; розподіл функцій і обов'язків між учасниками діяльності, обмін думками, взаємна вимогливість і допомога, взаємоконтроль і самооцінка.

Організуючи групову навчальну діяльність, потрібно забезпечити активність кожного учня. Цього можна досягти, розподіливши запропоновані групі завдання на частини за кількістю учасників групи, коли кожен має виконати свою частину роботи і пояснити спосіб її виконання іншим, а також налагодивши систему обліку діяльності кожного учня в групі. Для цього після виконання запропонованого групі завдання кожен учень має поставити оцінку роботи всієї групи та кожного її члена.

Ефективно реалізувати навчання і взаємодопомогу в групах за умов дистанційної форми навчання можна завдяки доступним засобам комунікації, таким як форум, Wiki, e-mail, чат, програми-комунікатори та ін.

Дидактичну систему дистанційного навчання, запропоновану Є.С. Полат [35], розширює Є.М. Смирнова-Трибульська, додавши до неї технології *повного засвоєння* та *занурення у предметне середовище* [46].

Контрольні питання і завдання

1. Вказати характерні ознаки понять «дистанційна освіта» та «дистанційне навчання».

2. Із застосуванням засобів яких педагогічних технологій може бути організоване дистанційне навчання? Дати їм коротку характеристику.

3.1.3. *Характерні риси та принципи дистанційного навчання*

У концепції розвитку дистанційної освіти в Україні [18] виділяються наступні *характерні риси* дистанційного навчання:

Гнучкість: можливість навчатись у зручний для себе час, у зручному місці і темпі.

Модульність: в основу програм дистанційного навчання покладений модульний принцип оволодіння кожним окремим курсом створює цілісне подання про певну предметну галузь. Це дозволяє з набору незалежних курсів-модулів формувати навчальну програму, що відповідає індивідуальним або груповим (наприклад, для персоналу окремої фірми) потребам.

Паралельність: паралельне з професійною діяльністю навчання, тобто без відриву від виробництва.

Велика аудиторія: одночасне звернення до учбової інформації великої кількості студентів. Можливість спілкування студентів один з одним і з викладачами через Інтернет та інтранет-мережу.

Економічність: ефективне використання учбових площ, технічних засобів, концентроване і уніфіковане подання матеріалів знижують витрати на підготовку фахівців.

Технологічність: використання в навчальному процесі нових досягнень інформаційних і телекомунікаційних технологій, що сприяє просуванню людини у світовий постіндустріальний інформаційний простір.

Соціальна рівність: рівні можливості одержання освіти незалежно від місця проживання, стану здоров'я, елітарності і практично рівні можливості для молодих людей різного рівня матеріальної забезпеченості.

Інтернаціональність: експорт та імпорт світових досягнень на ринку освітніх послуг.

Нова роль викладача: дистанційне навчання розширює і оновлює роль викладача, робить його наставником-консультантом, який повинен координувати пізнавальний процес, постійно удосконалювати ті курси, яких він навчає, підвищувати творчу активність і кваліфікацію відповідно до нововведень та інновацій.

Позитивний вплив на студента (учня, слухача): підвищення його творчого та інтелектуального потенціалу за рахунок самоорганізації, прагнення до знань, вміння користуватись комп'ютерною технікою і самостійно приймати відповідальні рішення.

Висока якість: якість дистанційного навчання не поступається якості очної форми, оскільки вона підвищується завдяки залученню найкращого професорсько-викладацького складу та використанню в навчальному процесі найкращих навчально-методичних посібників і контролюючих тестів.

Дистанційне навчання ґрунтується на певних *педагогічних принципах*, що діляться на три групи:

– *загальні* (принципи гуманізації навчання, науковості, системності

та розвитку);

– *принципи, що стосуються цілей та змісту навчання* (відповідності цілей та змісту навчання державним освітнім стандартам, генералізації, історизму, цілісності та комплектності);

– *принципи на яких базується дидактичний процес та адекватна йому педагогічна система з її елементами* (відповідності дидактичного процесу закономірностям учіння, провідній ролі теоретичних знань, єдності освітньої, виховної та розвивальної функцій навчання. стимуляції та мотивації позитивного ставлення до навчання, проблемності, поєднання колективної навчальної роботи з індивідуальним підходом до навчання, узгодження абстрактності мислення з наочністю у навчанні; доступності; міцності оволодіння змістом навчання).

Із загальних принципів стосовно ДН найбільш значимим та об'ємним вважається *принцип гуманізації*. Його суть полягає в спрямованості навчання та освітнього процесу в цілому на благо людини; у створенні максимально сприятливих умов для оволодіння студентами соціально накопиченим досвідом, структурованим у зміст навчання; в опануванні обраною професією для розвитку та вияву творчої індивідуальності, високих громадських, моральних, інтелектуальних якостей, що забезпечувало би соціальну захищеність людини, безпечне та комфортне існування.

Аналізуючи процеси у системі дистанційної освіти, вчені дійшли висновку, що цих структурованих і в повній мірі обґрунтованих принципів недостатньо для ДН. Емпіричний досвід вітчизняного та зарубіжного дистанційного навчання дозволив сформулювати *специфічні* для ДН принципи. О.О. Андрєєв [2] відзначає такі специфічні принципи:

– *принцип інтерактивності*. Особливість даного принципу полягає в тому, що він відображає закономірність контактів не лише учнів з викладачем шляхом застосування засобів нових інформаційних технологій, але й учнів між собою. Для реалізації на практиці даного принципу рекомендується, наприклад при проведенні комп'ютерних телеконференцій, обов'язково повідомляти учням електронні адреси всіх учасників навчального процесу;

– *принцип стартових знань*. Ефективне навчання за дистанційною формою вимагає певного набору знань, умінь та навичок. Наприклад, для продуктивного навчання кандидат на навчання повинен бути ознайомлений з науковими основами самостійної навчальної праці, володіти певними навичками роботи з комп'ютером, у тому числі і у мережі, та інше;

– *принцип індивідуалізації*. Сутність принципу розкрита у п. 3.1.2. Для виконання даного принципу в реальному дистанційному навчальному процесі проводиться вступний та поточний контроль. Вступний контроль дозволяє у подальшому не лише скласти індивідуальний план навчання, але й усунути прогалини у наявних початкових знаннях та уміннях, що дозволить успішно навчатися дистанційно. Поточний контроль дозволяє коригувати освітню траєкторію;

– *принцип ідентифікації* полягає у необхідності контролювати самостійність учіння, тому що при дистанційному навчанні можливостей фальсифікації навчання надається набагато більше, ніж за умов очного навчання. Окрім безпосереднього контакту, контроль за самостійністю виконання звітних робіт (тестів, рефератів та ін.) може бути виконаний за допомогою різних технічних засобів (шляхом налагодження відеозв'язку тощо);

– *принцип регламентування навчання*. Поширеною є думка, що оскільки час навчання за програмою дистанційного курсу чітко не регламентується, то для слухача не є необхідним складання графіка самостійної роботи. Однак досвідчені тьютори наполягають на жорсткому контролі та плануванні для учнів та студентів молодших курсів;

– *принцип педагогічно вираженого і доцільного застосування засобів нових інформаційних технологій*. Більшості освітніх установ, де починається впровадження технологій дистанційного навчання, притаманна «дитяча хвороба» захоплення засобами нових інформаційних технологій, особливо Інтернет. Санкт-Петербурзький технічний університет, узагальнюючи власний досвід впровадження дистанційного навчання, пропонує таке співвідношення між засобами дистанційного навчання, а саме: друковані матеріали – 40-50%, навчальні матеріали на WWW-серверах – 30-35%, комп'ютерний відеоконференцз'язок – 10-15% та інші засоби навчання – 5-20%.

Контрольні питання та завдання

1. Перелічити характерні риси дистанційного навчання.
2. Які принципи навчання є специфічними для дистанційного навчального процесу?

3.1.4. Типи та моделі дистанційного навчання

На сьогодні існує кілька десятків класифікацій типів та моделей дистанційної освіти і навчання. Розглянемо найпоширеніші з них.

Відповідно до генезису дистанційного навчання виділяють такі типи: *кореспондентське навчання, зовнішнє навчання, подовжене навчання та відкрите навчання* [73].

Кореспондентське навчання існує вже більше ста років. Для самонавчання в рамках кореспондентського навчання використовуються автономні матеріали (переважно друковані), а для встановлення контакту з навчальними центрами використовуються переважно поштові служби або телефон.

Багато університетів Північної Америки в останні 30 років перейменували свої програми кореспондентської освіти, даючи їм більш сучасні назви, такі як відкрите та дистанційне навчання або самостійне навчання.

Термін «*зовнішнє навчання*» застосовується до навчання, що здійснюється поза основною територією навчального закладу, наприклад, в аудиторії, що перебуває за межами кампусу, передбачає розмаїтість засобів доставляння матеріалів, включаючи комп'ютерні конференції, ау-

діо- та відеозасоби.

У багатьох університетах і навчальних закладах, таких як Університет Намібії, є Центри зовнішнього навчання, на які покладається відповідальність за складання програм відкритого та дистанційного навчання.

Термін «*подовжене навчання*» звичайно відноситься до курсів, в яких не застосовується система заліків (кредитів).

В Університеті Ботсвани, наприклад, є відділення дистанційного навчання, що є частиною університетського Центру подовженого навчання.

Відкрите навчання – сучасна форма навчання, спрямована на отримання якісних знань у поєднанні з більш повним розвитком особистості (незалежність, творчість, ініціативність, інтелігентність та ін.).

Педагогічна доктрина *відкритого навчання* в центрі ставить надання учням можливості вибору:

- місця навчання – вдома, на робочому місці, у навчальному закладі;
- темпу навчання – із чітко заданим темпом або без чіткої структури;
- моментів початку та завершення навчання;
- середовищ та медіа – друкованих, онлайн, телевізійних або відео;
- механізмів підтримки – допомога тьюторів на вимогу, аудіоконференції та ін.

Н.В. Морзе пропонує класифікацію моделей дистанційного навчання за ступенем дистанційності [28], зазначаючи при цьому, що навчання, в якому застосовуються технології і ресурси Інтернет може бути:

1) повністю дистанційним з використанням електронної пошти, чатів, відеозв'язку;

2) очно-дистанційним, коли частина очних занять у класі є порівняною з кількістю занять, що проводяться вчителем дистанційно;

3) доповнювати очну форму з окремими параметрами, наприклад, вчитель проводить заняття з учнями в очній формі, але при цьому використовуються матеріали з мережі Інтернет, відеоклекції з освітніх сайтів та інші Інтернет-ресурси – так звана *Інтернет-освіта*.

Деяко іншу класифікацію пропонують Є.С. Полат [34] та В.В. Олійник [33]. На їхню думку найважливішими технологіями дистанційного навчання є: *TV-технологія, кейс-технологія, мережна та змішана технології*.

TV-технологія (в інших джерелах *трансляційна модель*) дистанційного навчання передбачає застосування у процесі навчання різних систем телебачення (кабельне, супутникове, мережне тощо) та спеціальних освітніх програм. Телезаняття, які проводили висококваліфіковані викладачі, були дуже розповсюджені у 70-х роках минулого століття. Але вже через 20 років освітні технології телебачення втратили актуальність через відсутність особистісної орієнтації змісту навчання, недостатній зворотний зв'язок, високу вартість ефірного часу та освітніх програм і т. ін.

Кейс-технологія дистанційного навчання дістала свою назву через комплект засобів навчання, який розміщено у кейсі і надається суб'єкту

навчання з моменту його зарахування на курс.

Кейс-комплект, як правило, містить: навчальну програму, список літератури (основної, додаткової, факультативної), методичні вказівки з вивчення курсу, навчально-практичні посібники (опорний конспект, план-конспект лекцій), тести (вхідні, проміжні, ідентифікаційні та підсумкові) аудіо- та відео матеріали, комп'ютерні навчальні програми у звичайному чи у мультимедійному варіантах, робочі зошити та рекомендації з організації самостійної роботи учня і план-графік його самостійної роботи. У випадку вивчення природничонаукових дисциплін до складу кейса додаються завдання та матеріали для виконання лабораторного практикуму. Рекомендується включати у складу кейсу рекомендації та практикуми з опанування основних навичок роботи з комп'ютером та мережею Інтернет.

Організація навчального процесу кожного з курсів, що вивчається, передбачає проведення тьюторіалів (семінарів), виконання домашніх завдань, проміжні та підсумкові екзамени, а також «недільні» («літні») школи. Останні являють собою інтенсивні практичні заняття навчальної групи під керівництвом тьютора.

У більшості випадків кейс-технології дистанційного навчання є першими сходинками, які долають навчальні заклади на шляху впровадження дистанційної освіти.

Мережна технологія дистанційного навчання на сьогодні є педагогічною технологією високого рівня. Її основним принципом є застосування у навчанні телекомунікаційних мереж, у тому числі й Інтернет, найсучасніших інформаційних технологій подання, відображення, корекції, оновлення та зберігання навчальних матеріалів.

Мережне навчання пропонується використовувати у тих випадках, коли виникають перешкоди отримання якісної освіти шляхом очного навчання (для дітей з фізичними вадами, для дітей із віддалених населених пунктів або сіл та ін.), для ліквідації пропусків у знаннях, а також для поглиблення знань з того чи іншого предмету (для обдарованих дітей та ін.). У такому разі створюються спеціальні, автономні курси дистанційного навчання з окремим навчальних предметів, розділів чи тем програми або ж віртуальні школи та університети.

Реальне впровадження мережного навчання вимагає значних організаційних зусиль, відповідних інтелектуальних ресурсів, матеріально-технічного та фінансового забезпечення.

Органічне та педагогічно обґрунтоване поєднання елементів різних технологій дистанційного та денного навчання передбачається в *змішаних технологіях* дистанційного навчання. Накопичений досвід вітчизняних та світових тьюторів показує, що дана модель є найбільш перспективною на всіх рівнях впровадження дистанційної освіти.

Впровадження у практику навчання старшокласників спеціалізованих профільних курсів дистанційного навчання дозволить вирішити пе-

вні проблеми профільного навчання, урізноманітнити його напрямки відповідно до профорієнтаційних інтересів учнів, надати учням можливість більш чіткої професійної орієнтації та підготовки до вступу у відповідний вищий навчальний заклад.

Крім того, інтеграція дистанційного та денного навчання досить перспективна і в умовах навчання за індивідуальними програмами. Пропонується частину навчального матеріалу, який не потребує значних інтелектуальних зусиль для його засвоєння, перенести на вивчення за дистанційною формою. Така заміна могла б не просто значно розвантажити денний час учня, а й створити умови для продуктивної самостійної творчої діяльності, забезпечуючи при цьому гармонійний інтелектуальний розвиток учня-старшокласника та досягнення однієї з основних цілей сучасної освіти – формування умінь працювати з інформаційними ресурсами.

Кожна із зазначених моделей специфічна і вибір тієї чи іншої моделі обумовлюється перш за все конкретними дидактичними задачами, які ставить перед собою вчитель при організації дистанційного навчання [2]. Реалізація цих задач у значній мірі залежить від обґрунтованого вибору платформи дистанційного навчання.

Контрольні питання і завдання

1. Яких типів набувало дистанційне навчання за періоди свого історичного становлення?

2. Дослідити особливості організації дистанційного навчання за кожною із моделей, відміченою у класифікації Є.С. Полат та В.В. Олійника.

3.2. Порівняльний аналіз технологічних платформ дистанційного навчання

Одним із найголовніших чинників успішного впровадження дистанційного навчання є правильний вибір телекомунікаційного інформаційно-навчального середовища, на основі якого навчання буде здійснюватися дистанційно. Навчальні платформи повинні відповідати таким вимогам:

- надійність в експлуатації;
- відповідність міжнародним стандартам із розробки дистанційних курсів;
- можливість здійснювати гнучке управління навчальним процесом (модульність побудови);
- наявність мовної локалізації;
- наявність простого інтерфейсу, доступного для користувача-початківця [19].

Виділяють наступні типи середовищ, за допомогою яких може здійснюватись дистанційне навчання [20]: авторські програмні продукти, системи управління навчанням, системи управління контентом (навчальним наповненням) та системи управління знаннями.

Розглянемо докладніше кожен із зазначених типів середовищ.

Авторські програмні продукти (Authoring Packages) найчастіше

всього розроблюються для інтенсифікації активізації навчального процесу і в основному охоплюють лише окремі розділи певного предмету. Такі програмні продукти мають обмежені технологічні і функціональні характеристики, вони використовуються в основному для певних визначених груп студентів.

Системи управління навчанням (LMS – Learning Management System) призначені для:

- комп'ютерної підтримки навчально-адміністративної роботи: формування навчальних груп, складання розкладу занять, генерація відомостей та звітів;

- контролю кількості пройденого матеріалу та якості його засвоєння;

- роботи в асинхронному режимі з можливістю індивідуалізованого навчання;

- підтримки колективної роботи учнів з викладачем у вигляді семінару чи конференції;

- підтримки електронної пошти, форуму, чату, відеоконференції, обміну файлами, спільного використання програм і даних, віртуального класу;

- комп'ютеризованого розподілу учасників навчального процесу за ролями: гість, учень, автор, тьютор, інструктор, розробник курсів, адміністратор;

- надання різних типів навчальних матеріалів – електронних підручників, тестів, моделей та лабораторних робіт.

Ці системи найчастіше використовуються для контролю великої кількості студентів.

Використання *систем управління контентом (CMS – Content Management System)* дозволяє здійснювати функції управління вмістом навчальних курсів, подавати навчальний матеріал у різних форматах і маніпулювати ним.

Системи управління знаннями (KMS – Knowledge Management System) призначені для здійснення різноманітних операцій управління над різними матеріалами (зберігання, пошук і т.д.)

Системи управління навчальним контентом (CLMS – Content Learning Management System) – це програмно-апаратні комплекси, що використовуються для створення, зберігання й доставляння користувачеві персоналізованого контенту у формі «навчальних об'єктів». Використання цього типу середовища може замінити два попередні типи.

Межі відмінностей одних типів зазначених середовищ від інших досить розмиті. Але порівнюючи LMS та CLMS, відмічають, що використання LMS пов'язане з вирішенням адміністративних аспектів навчання, а використання CLMS – з управлінням навчальним процесом.

За способом отримання права на придбання, використання та поширення середовища дистанційного навчання поділяють на комерційні програмні продукти та вільнопоширювані (в т.ч. Open Source середовища – середовища з відкритим кодом) [47].

Ринок систем управління навчальними ресурсами розвивається швидкими темпами, системи такого класу стають все більш необхідними і розглядаються не просто в якості інфраструктури для комп'ютеризованого навчання, але і в якості інформаційної інфраструктури навчального закладу.

Розглянемо докладніше системи підтримки дистанційного навчання, які набули найбільшого застосування у навчальних закладах України, а саме: системи дистанційного навчання, що розповсюджуються на комерційній основі – Lotus LearningSpace (виробник: IBM, офіційний сайт системи: <http://www.lotus.com>), Прометей (НІЦ «АСК», <http://www.prometeus.ru>), «Агапа» (ТОВ «АВ-Консалтинг», <http://www.agapa.com.ua>) та вільно поширювані програмні засоби – «Веб-клас ХПІ» (НТУ «ХПІ», <http://dl.kpi.kharkov.ua>) та MOODLE (М. Дугіямас, <http://www.moodle.org>).

Lotus LearningSpace

Lotus LearningSpace – це програмне навчальне середовище, використання якого дозволяє поєднати технології традиційного навчання із сучасними інформаційними технологіями, заснованими на автоматизації діяльності викладача та студентів.

Відмітимо основні характеристики системи LearningSpace версії 5.0:

1. Інсталюється на серверні операційні системи Windows NT, Windows 2000 тощо.
2. Обмеження на тип Web-браузера відсутні.
3. Підтримка систем управління реляційними базами даних IBM DB2, Oracle та MS SQL.
4. Організація навчання як у синхронному, так і в асинхронному режимі.
5. Платформа не містить вбудованого інструментарію розробки курсів. Зміст курсу може бути створений користувачем за допомогою будь-яких програм, а потім розміщений у середовищі LearningSpace 5.0. Для цього рекомендується використовувати програмне забезпечення компанії Macromedia (Macromedia Flash, DreamWeaver, AuthorWare) або компанії IBM (IBM Knowledge Producer, Content Producer).
6. Гнучка система редагування та адміністрування курсу.
7. Програмна підтримка 24 мов навчання.

Організація роботи з курсами

Курси організовані у вигляді набору занять, які можуть бути самостійними, інтерактивними або колективними. Для самостійних занять надається матеріал для перегляду і тести, які необхідно пройти після вивчення матеріалу. Інтерактивні заняття передбачають відвідування лекцій у віртуальному класі, участь в онлайн-вічній дискусії або чаті, роботу з віртуальною дошкою і системою спільного перегляду Web-сайтів (Follow me). Колективні заняття можливі в офлайн-вічній та онлайн-вічній дискусіях, чаті. Всі записи, які були зроблені під час дискусії, доступні

протягом всього часу вивчення курсу. Інтерактивні заняття плануються на певну дату і час, і проводяться викладачем у віртуальному класі в режимі реального часу. Поточні результати роботи учнів (ступінь проходження курсу, оцінки за курс, витрачений час, кількість звернень і т.д.) зберігаються у базі даних і доступні викладачеві у будь-який час у вигляді звітів різної форми.

Функціонально система LearningSpace 5.0 складається з двох основних компонентів «Базового модуля» (Core) – ядра системи і модуля «Колективна робота» (Collaboration).

«**Базовий модуль**» складається із сервера Core (на якому встановлено програмне забезпечення LearningSpace 5.0), сервера бази даних та авторського Web-сервера. Ці сервери можуть знаходитися на окремих комп'ютерах або ж бути віртуальними серверами, що розміщені на одному комп'ютері. Сервер LearningSpace 5.0 містить основне програмне забезпечення продукту і є ядром системи дистанційного навчання. Він використовується для створення інтерфейсу інструктора і призначений для введення та отримання відомостей про користувачів та курси, зберігання та отримання відомостей про результати роботи учнів. В ньому також підтримується інтерфейс студента, призначений для участі в заняттях і перегляді персональних даних реєстрації та результатів навчання.

У базі даних містяться дані про користувачів, курс та результати навчання, які можуть бути вилучені автоматично (за допомогою програмного забезпечення LearningSpace 5.0) чи явно (за запитом користувача) під час виконання SQL-запиту до бази даних.

LearningSpace 5.0 містить багато шаблонів звітів, за допомогою яких користувачі можуть легко генерувати, переглядати та роздруковувати звіти.

Модуль «Колективна робота» (Collaboration) призначений для створення віртуального класу («живих уроків» в онлайн-режимі), у якому викладачі та учні можуть одночасно працювати з прикладними програмами, рисувати на віртуальній дошці та одночасно відвідувати Web-сайти.

Окрім того, модуль «Колективна робота» використовується для створення дискусійних форумів, в яких користувачі можуть розміщувати коментарі з певного курсу, відповідати на повідомлення інших користувачів та брати участь в онлайн-чатах.

Серед недоліків системи Lotus LearningSpace слід відмітити неповну відповідність міжнародним стандартам підтримки дистанційного навчання (лише IMS і AICC), недосконалість інструментарію створення резервних копій дистанційних курсів – тільки на рівні архівування головної бази даних системи управління базами даних, недосконалість вбудованого інструментарію з розробки тестів (всі тестові питання за всіма курсами розміщуються в одному спільному банку питань), недосконалі засоби відновлення окремих курсів чи всієї платформи при їхньому ушкодженні, відсутність можливості використання операційних систем сімейства UNIX.

Незважаючи на зазначені недоліки, система Lotus LearningSpace займає одне з провідних місць серед програмних продуктів організації дистанційного навчання у світових масштабах, у навчальних закладах Росії та України. Так, у вітчизняних вищих навчальних закладах систему Lotus LearningSpace широко використовують Київський національний університет ім. Т.Г. Шевченка, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут» та Національний університет «Львівська політехніка».

«Прометей»

Система дистанційного навчання «Прометей» є середовищем, використання якого не тільки забезпечує дистанційне навчання і тестування слухачів, але й дає змогу керувати всією діяльністю навчального закладу.

Розробники платформи «Прометей» відзначають такі переваги даного програмного продукту:

- «люб'язний» інтерфейс, простота опанування та експлуатації;
- відсутність ліцензій на клієнтські місця;
- можливість використання методики онлайн-навчання, що базується на командній роботі;
- висока продуктивність та масштабованість у міру збільшення кількості користувачів та навантаження;
- 10 видів тестів, можливість використання графіки та мультимедіа в тестах;
- можливість побудови додаткових звітів;
- можливість об'єднання кількох систем у єдине освітнє середовище;
- помірні вимоги до ресурсів сервера та клієнтських місць, пропускних характеристик мережі;
- можливість під'єднання до системи електронних курсів, розроблених за допомогою різних прикладних програм і в будь-яких форматах.

У 2000 році Інститут інформаційних технологій і засобів навчання Академії педагогічних наук України спільно з російським Інститутом віртуальних технологій навчання створили українську локалізацію існуючого комплексу програмних засобів організації дистанційного навчання «Прометей» – «Прометей-3».

Система має гнучку модульну архітектуру, використання якої дозволяє:

- проводити дистанційне навчання через Інтернет (інтранет) практично в будь-яких сферах людської діяльності;
- управляти системою, розподіляючи права доступу до її компонентів серед користувачів, та формувати групи, реєструвати слухачів та вносити відомості про них до бази даних, контролюючи оплату навчання та розсилання навчальних матеріалів;
- консультувати слухачів, проводячи контроль за їх навчанням, тестуванням, заносити оцінки у залікову книжку, формувати звіти для керівництва;
- автоматично фіксувати в базі даних всі звернення до інформаційних матеріалів, що розташовані на Web-сервері навчального центру.

Отримувати звіт про те, хто, коли і що читав або переглядав;

- забезпечувати доступ до курсів з боку слухачів, тьюторів, організаторів та адміністратора;

- формувати для кожного слухача унікальне тестове завдання та проводити багаторівневий контроль знань. В системі зберігаються відповіді на запитання в базі даних, автоматично аналізуються та підраховуються набрані бали. Генерується детальний звіт про спробу проходження тесту та зберігається на сервері для подальшого аналізу;

- створювати нові тести, розширювати та змінювати існуючі або імпортувати тест з текстового файлу;

- швидко створювати мультимедійні курси;

- використовувати інформаційно-навчальні матеріали: лекції, словники, посилання на літературні джерела, на віддалені мережні ресурси;

- підключати комп'ютерні тренажери для дистанційного проведення лабораторних робіт;

- спілкуватися з слухачам з викладачем різноманітними засобами: електронна пошта, дискусійний клуб (телеконференція), круглий стіл (чат), аудіо-/відеоконференція.

Система дистанційного навчання «Прометей» була створена за принципами простоти та зручності для користувача, чому сприяють:

- мінімальні вимоги до технічної підготовки тьютора та слухача;

- відсутність прив'язки до певного комп'ютера;

- невисокі технічні вимоги до комп'ютерів слухачів і викладачів, відсутність потреби встановлювати на них спеціальні програми;

- використання курсів у форматі HTML;

- відкритість структури бази даних, можливість розширення та налаштування системи;

- висока продуктивність та масштабованість у відповідності з робочим навантаженням.

Сьогодні в Україні платформу «Прометей» використовують такі навчальні заклади:

- Національна академія державного управління при Президентіві України (м. Київ);

- Київський обласний інститут післядипломної освіти педагогічних кадрів (Центр дистанційного навчання);

- Інститут післядипломної освіти Національного університету державної податкової служби України (м. Ірпінь, Київська обл.);

- Східноєвропейський університет економіки і менеджменту (м. Черкаси).

«Агапа»

«Агапа» – це система, в якій поєднуються навчальний комплекс, комунікаційне середовище та система управління даними. Це перший в Україні програмний засіб, зареєстрований як «Система дистанційного навчання» у травні 2005 року, а в листопаді 2007 року – як «Система

управління контентом».

Роботу над системою дистанційного навчання «Агапа» розпочала у 2003 році компанія «АВ-Консалтинг» (м. Кривий Ріг), коли у її керівництва виникли потреби оперативної підготовки й перепідготовки кадрів. Основний профіль компанії – інформаційні технології, тому компанія мала потребу у високоефективних інструментах збирання та структурування нових відомостей, а також створення й переробки на їх основі навчальних курсів. Наявність великої кількості структурних підрозділів та їхня віддаленість один від одного вимагали використання систем дистанційного навчання й систем управління навчальним процесом. Також виникала необхідність у створенні багаторівневого комунікаційного середовища як всередині підприємства, так і за його межами для підтримки роботи з партнерами та клієнтами.

На початку 2005 року система була випробувана й впроваджена в компанії «АВ-Консалтинг», а вже наприкінці 2005 року була взята для використання Криворізьким технічним університетом і стала основою для створення освітнього порталу університету. Досвід впровадження показав високу ефективність системи як для оперативної підготовки кадрів на підприємстві, так і для всебічної підтримки навчального процесу у вищому навчальному закладі.

Система дистанційного навчання «Агапа» створена засобами мови програмування PHP та включає в себе систему управління базами даних MySQL.

Основні характеристики системи дистанційного навчання «Агапа» версії 4.5:

1. «Агапа» – це система класу «клієнт-сервер», призначена для автоматизації і контролю процесу навчання. Система може використовуватися як інструмент управління дистанційним навчанням, і як інструмент підтримки очного/заочного навчання. Програма містить набір модулів, призначених для створення дистанційного навчального курсу, управління дистанційним навчанням, комунікації, контролю, аналізу, персоналізації та ін.

2. В системі поєднуються елементи системи управління навчальним матеріалом та навчальним процесом.

3. Система дистанційного навчання «Агапа» може бути використана і в якості корпоративного сайту без функцій навчання.

4. Система «Агапа» має відкритий програмний код.

5. Програмний комплекс може бути встановлений на UNIX/Windows сервер.

6. Інсталяція програми може відбуватися в будь-який каталог з будь-якою зовнішньою адресою. Також підтримується мультиадресація (коли система у локальній мережі може використовуватися під однією адресою і одночасно у мережі Інтернет – під іншою).

7. В системі дистанційного навчання «Агапа» використовується вільно поширюване програмне забезпечення Apache Web Server, MySQL

Database 4.x, PHP4 (з розширеннями zip, gd2, domxml).

8. Управління системою повністю здійснюється через Web-інтерфейс, від користувачів не вимагається жодних спеціальних знань.

9. Підтримка різних мов інтерфейсу закладена у програму, але поки що пропонується лише російськомовний варіант.

10. Передбачена підтримка шаблонів оформлення інтерфейсу. Завдяки гнучкій модульній структурі система дистанційного навчання «Агапа» може бути змінена адміністратором, не втрачаючи функціональності та зручності.

11. Для навчальних закладів державної форми власності, що знаходяться на території України, система дистанційного навчання «Агапа» безкоштовна.

«Агапа» – це проект, що розвивається. Кінцевою метою розвитку системи дистанційного навчання «Агапа» є створення повнофункціональної системи управління навчанням з підтримкою українських та світових стандартів (SCORM, IMS і інших).

Партнерами з розробки, впровадження та удосконалення системи дистанційного навчання «Агапа» є такі вищі навчальні заклади України:

– Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»;

– Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана;

– Криворізький технічний університет;

– Луганський національний педагогічний університет імені Тараса Шевченка;

– Кримський інститут економіки та господарського права (м. Сімферополь);

– Тернопільській національний економічний університет;

– Запорізький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти.

«Веб-клас ХІІІ»

Розробка середовища «Веб-клас ХІІІ» була розпочата у 1999 році на базі Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» під керівництвом М.В. Савченка та В.М. Кухаренка.

В основу середовища покладена технологія клієнт-сервер. Середовище створене з використанням технології ASP, доступ до баз даних виконується через ADO, діалог на Web-сторінках побудований на основі мови JavaScript.

Віртуальне навчальне середовище призначене для забезпечення основних педагогічних технологій дистанційного навчання. Для роботи адміністратора системи, автора курсу, тьютора і студента використовується єдиний інтерфейс українською, російською та англійською мовами.

До складу системи входять підсистеми:

– доступу до довідкових матеріалів про курс (передмова до курсу, відомості про авторів та тьюторів).

- адміністрування (реєстрація, контроль активності слухачів);
- налагодження параметрів системи;
- планування занять;
- доступу до статичного електронного курсу;
- доступу до динамічного електронного курсу (онлайн-зв'язок наявних на сайті та/або в Інтернет навчальних Web-сторінок і формування динамічних уроків) – курс-меню;
- створення бази навчальних сторінок та використання їх у динамічних уроках;
- підготовки і проведення онлайн-тестування (включаючи тестування знань, психологічні тести, анкетування);
- доступу до системних Web-довідників;
- внутрішньої пошти за курсом;
- форуму – курсового дискусійного клубу;
- стрічки чатів.

Найбільш високий пріоритет доступу до ресурсів системи має адміністратор системи. Його діяльність спрямована на підтримку цілісності системи, збереження бази даних, виконання загального контролю навчального процесу. Він контролює процес реєстрації нових користувачів, відслідковує можливі порушення правил роботи у даній системі.

Автор курсу створює дистанційний курс, який включає план занять, електронний курс, набір тестів, анкет, теми для обговорення на форумі курсу та у стрічці чатів. Використовуючи систему, автор має можливість формувати частину занять динамічно, якщо цього вимагає індивідуальний підхід до студентів чи групи студентів.

Тьютор відповідає за успішне проведення дистанційного навчання. Він відслідковує наповненість баз даних курсу відомостями про слухачів. Тьютор контролює повідомлення у форумі, організовує та проводить чати. За необхідності він може створити динамічні уроки. Протягом навчального процесу тьютор може аналізувати статистику, що автоматично накопичується в середовищі: кількість відвідувань курсу студентами, час роботи студентів за сеансами, середній час роботи студента протягом сеансу, кількість записів у глосарії чи в тестах, статистику відповідей студентів на кожну тестову задачу.

Віртуальне середовище «Веб-клас ХІІ» вільно розповсюджується серед навчальних закладів.

MOODLE

MOODLE (від англ. Modular Object Oriented Dynamic Learning Environment – модульне динамічне об'єктно-орієнтоване середовище для навчання) є програмним комплексом для організації дистанційного навчання в мережі Internet. Це пакет програм, призначений для створення в мережі Інтернет навчальних курсів різних напрямків, а також різних тестових програм для перевірки знань. Розробка системи була розпочата Мартіном Дугіямасом (який і сьогодні координує її) у 90-ті роки ХХ ст.,

кілька попередніх прототипів були створені і відкинуті перед тим, як 20 серпня 2002 року він випустив версію 1.0. Ця версія була націлена на малі класи університетського рівня і була предметом наукових досліджень, у яких детально аналізувалася природа співробітництва і процеси, що відбувалися всередині цих маленьких груп студентів. З тих пір постійно проводилися нові випуски системи, що включали додаткові послуги, кращу масштабованість та удосконалене виконання [41].

Остання англійська версія системи дистанційного навчання MOODLE – Moodle 1.9.4, українська – Moodle 1.7.

Наведемо загальні характеристики системи дистанційного навчання MOODLE [44]:

- простий та зручний інтерфейс користувача;
- просто інсталується майже на всі платформи, де підтримується PHP;
- повна абстракція баз даних, підтримуються всі види баз даних;
- у списку курсів висвітлює опис кожного курсу, включаючи можливість перегляду гостями;
- існує можливість категоризації та пошуку курсів – на одному сайті за допомогою MOODLE можна підтримувати тисячі курсів;
- надійна система безпеки – форми перевіряються, дані підтверджуються, паролі шифруються.
- більшість текстових областей введення (ресурси, поштові відправлення) можуть бути відредаговані за допомогою вбудованого WYSIWYG HTML-редактора.

Перелічимо основні характеристики системи стосовно підтримки роботи користувачів [61]:

- вплив адміністратора зводиться до мінімуму, проте забезпечується високий рівень безпеки;
- підтримка ряду механізмів аутентифікації через вбудовані модулі аутентифікації полегшує інтеграцію з існуючими системами;
- адміністратор контролює створення курсів і призначає викладачів, записує користувачів на курси;
- розробник курсів створює курси;
- викладачі можуть не мати привілеїв модифікувати курси (наприклад, позаштатні викладачі);
- викладачі можуть додавати «реєстраційний ключ» до своїх курсів для неможливості прослуховування їх не-студентами. Ключ може передаватися особисто чи електронною поштою;
- при бажанні викладачі можуть власноруч записувати студентів;
- заохочується створення студентами онлайн-профайлів, включаючи фотографії, описи. При бажанні поштові адреси можуть не висвітлюватися;
- кожен користувач може обрати мову для інтерфейсу MOODLE (на сьогодні підтримується 78 мов).

Основні можливості системи щодо підтримки курсів:

- штатний викладач має повний контроль над всіма налаштуваннями, включаючи обмеження щодо інших викладачів;
- курси можуть обиратися в залежності від тижня, теми, дискусії;
- гнучкі засоби діяльності стосовно курсу – форуми, журнали, ресурси, дослідження, вибори, завдання, чати, семінари;
- зміни у курсі з моменту останнього входження в систему можуть висвітлюватися на домашній сторінці курсів;
- усі оцінки за форуми, журнали, виконані завдання можуть бути переглянуті на одній сторінці (і збережені в окремому файлі);
- повні звіти про вхід у систему і діяльність користувачів доступні з графами і деталями стосовно кожного модуля (останній вхід, кількість часу) так само, як і детальна історія активності кожного студента, включаючи листування, журнальні статті на сторінці;
- копії листів на форумах, відповіді викладачів можуть бути збережені в форматі HTML чи у вигляді простого тексту;
- викладачі можуть вводити власні системи оцінювання форумів, завдань, журналів;
- курси можуть бути запаковані у стандартний zip-файл.

Наведемо основні характеристики системи навчання за модулями дистанційного курсу [59].

Модуль завдань:

- завдання можуть бути охарактеризовані датою складання і максимальною оцінкою;
- студенти можуть завантажувати свої завдання на сервер (у будь-якому форматі);
- дозволяється невчасне виконання завдання, але час запізнення показується викладачеві;
- відповідь викладача приєднується до сторінки із завданням кожного студента, про що надсилається попередження;
- викладач може дозволити перескладання завдань після оцінювання.

Модуль тестів:

- викладачі можуть визначати базу даних питань для використання у різних тестах;
- тести можуть бути розподілені за категоріями для полегшення доступу, і ці категорії можуть бути доступними для всіх курсів на сайті;
- тести автоматично оцінюються і переоцінюються, якщо питання змінюються;
- тестам відповідає обмежене часом вікно, поза яким доступу до них немає;
- на вимогу викладачів тестування може проводитися багаторазово, з демонстрацією правильних відповідей;
- тестові питання і відповіді можуть бути перемішані для захисту від списування;
- в тестах підтримується HTML і малюнки;

- тестові питання можуть бути імпортовані із зовнішнього текстового файлу;
- кількість спроб проходження тестів може бути обмеженою;
- існують питання з багатьма правильними відповідями, питання, що потребують короткої відповіді (слово чи фразу), питання типу правда-неправда, випадкові питання, нумеровані питання, питання із вбудованими відповідями (у фрагменті тексту), вбудований описовий текст і графіка.

В Україні систему MOODLE для підтримки дистанційного навчання використовують:

- Дніпропетровський національний університет;
- Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»;
- Києво-Могилянська академія;
- Інститут інформатики Національного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова (м. Київ);
- Херсонський економіко-правовий інститут;
- Херсонський державний аграрний університет;
- Кафедра інформатики Тернопільського національного педагогічного університету;
- Класичний приватний університет (м. Запоріжжя);
- Криворізький державний педагогічний університет та інші заклади.

Таблиця 3.1.

**Порівняльний аналіз
систем підтримки дистанційного навчання**

<i>Специфікація і можливості вико- ристання системи</i>	<i>Lotus Learning Space 5.0</i>	<i>Прометей</i>	<i>Azana</i>	<i>Веб-клас XPII</i>	<i>MOODLE</i>
Платформа					
Операційна систе- ма	Windows	Windows	Windows, Unix/Linux	Windows	Windows, Unix/Linux
База даних	MS SQL Server 7.0, Oracle	MS SQL Server 7.0	MySQL	MS SQL Server 7.0	MS SQL Server 7.0, PostgreSQL
Web-сервер	MS IIS	MS IIS	Apache	MS IIS	Apache
Інсталяція і конфі- гурація	+	+	+	+	+
Адміністрування					
Засоби адміністру- вання	Вбудовані	MS IIS	Вбудовані	MS IIS	Вбудовані
Системний адміні- стратор	+	+	+	+	+

<i>Специфікація і можливості вико- ристання системи</i>	<i>Lotus Learning Space 5.0</i>	<i>Прометей</i>	<i>Агана</i>	<i>Веб-клас XIII</i>	<i>MOODLE</i>
Структура управління					
Віртуальний дека- нат	–	+	–	–	–
Автор курсу	–	–	+	+	+
Тьютор	+	+	+	+	+
Режими навчання					
Самостійне на- вчання	+	+	+	+	+
Групове навчання	+	+	+	+	+
Асинхронне на- вчання	+	+	+	+	+
Синхронне навчан- ня	+	Окремі кому- нікаційні програми	+	+	+
Розробка курсів дисциплін					
Редагування на від- стані (завантажен- ня на сервер)	+	–	+	+	+
Експорт-імпорт курсів	+	–	–	–	+
Використання кур- сів третіх фірм	+	–	–	–	–
Можливості використання у процесі навчання					
Планування на- вчання за спеціаль- ністю	+	–	–	–	–
Бібліотека вільного доступу	–	–	–	+	+
Модульна структу- ра курсу	+	–	+	–	+
Бібліографія	+	–	–	+	–
Структура курсів у вигляді дерева	–	–	–	–	+
Календар	+	–	+	+	+
Глосарій	+	–	+	+	+
Засоби комунікації					

Специфікація і можливості вико- ристання системи	Lotus Learning Space 5.0	Прометей	Агана	Веб-клас XIII	MOODLE
Загальний форум системи	+	+	+	+	+
Форум групи	+	+	+	+	+
Чат з тьютором	–	+	–	–	–
Чат групи	+	+	–	+	–
Внутрішньокурсова пошта	+	+	+	+	+
Тестування					
Типи питань	5	10	5	5	8
Статистика тесту- вання	+	+	+	+	+
Статистика досяг- нень групи	+	+	+	+	+
Графік тестування	–	+	+	+	+
Звіт досягнень в групах	–	+	–	+	–
Інтерфейс користувача					
Пошукова система	+	–	–	–	–
Вибір дизайну	Частково	–	+	Частково	+
Корисні посилання	+	+	+	+	+
Часто поставлені запитання	+	+	+	+	+
Оцінювання якості навчання студен- том	–	–	–	–	–
Вбудована навча- льна система кори- стування середо- вищем ДН	+	–	–	–	+

Є.М. Смирновою-Трибульською сформульовані наступні *рекомендації щодо вибору навчальної платформи для організації дистанційного навчання школярів* [47]:

- наявність інтуїтивно зрозумілого інтерфейсу користувача, а також довідки та документації рідною мовою;
- можливість використання платформи на комп'ютері з будь-якою операційною системою без необхідності встановлення спеціального обладнання;
- дешева, або навіть безкоштовна, з помірними вимогами до швид-

кісних характеристик мережі та апаратної складової;

– зручне управління змістом і спілкуванням з користувачами, легка комунікація з ними, можливість швидкого створення документів, легкість у наданні доступу;

– можливість розширення сукупності використовуваних компонентів відповідно до зростаючих потреб та умінь вчителя й учнів;

– наявність інструментів, що служать для підтримки складових елементів процесу навчання, специфічних для шкільної педагогіки;

– підтримка різних форм комунікації та групових форм навчання, взаємного оцінювання та самоуправління.

За результатами порівняльного аналізу програмно-інструментальних платформ дистанційного навчання середовище MOODLE виявляється найзручнішим для організації позаурочної самостійної роботи з вивчення інформаційних технологій математичного призначення у формі дистанційного факультативу.

Контрольні питання і завдання

1. Які вимоги покладені в основу будування інформаційно-навчального середовища?

2. Описати основні характеристики найпопулярніших в Україні платформ дистанційного навчання.

3. Відмітити переваги відкритих вільно поширюваних платформ дистанційного навчання над комерційними.

3.3. Дистанційне навчання у загальноосвітніх закладах

Сучасне інформаційне суспільство вимагає від кожної людини уміння постійно вчитися протягом всього свого життя, бути конкурентоспроможною, високо кваліфікованою та професійно компетентною, про що йдеться у деклараціях Болонського процесу, до якого Україна приєдналася у 2005 році. Відповідні загальнонавчальні уміння повинні закладатися під час навчання в школі [17]. Провідними у підготовці учнів до навчання протягом всього життя (LLL – Life Long Learning) є дистанційні технології навчання, поєднані з технологіями традиційного навчання.

3.3.1. Аналіз стану дистанційного навчання в школах Росії та України

Розвиток дистанційної освіти в Україні, зокрема у загальноосвітніх навчальних закладах, відбувається з урахуванням уже існуючих досягнень у цій галузі науковців США, Європи та Росії. Через відсутність мовних бар'єрів, термінологічну схожість у галузі освіти та схожість у підходах до проблем освіти в цілому, особливий інтерес вітчизняних педагогів зосереджений на теоретичному та практичному досвіді впровадження дистанційної освіти в Росії.

Початок впровадження технологій дистанційного навчання в прак-

тику роботи російських шкіл припадає на 1999 рік. За десять років накопичено величезний досвід Інтернет-підтримки середньої освіти. За даними порталу «Все про дистанційне навчання» [67] лідерами у наданні дистанційних освітніх послуг називають проекти: «Телешкола», «Відкритий коледж» і «Віртуальна школа Кирила та Мефодія». Наведемо коротку характеристику проектів-лідерів.

Некомерційне партнерство «Телешкола» [76] – це перша в Росії, ліцензована й акредитована Інтернет-школа, яка, пройшовши всі рівні державної експертизи, має офіційний статус середнього загальноосвітнього закладу.

Інтернет-школа, заснована у 2001 році, в ній надається можливість всім бажаючим засвоїти освітню програму 10-го та 11-го класів за дистанційною формою, після завершення навчання отримати повну середню загальну освіту і атестат державного зразка.

Компанія розробила інформаційно-освітню платформу для дистанційного навчання з використанням Інтернет-технологій – «TS – distant learning». Дана платформа включає всі необхідні для навчального процесу елементи, а саме: електронні журнали користувачів, систему комунікацій, засоби обліку успішності та ін. На платформі розміщені мережні навчальні матеріали для основної та додаткової освіти учнів загальноосвітніх закладів, а також закладів додаткової професійної освіти.

Проект «Відкритий коледж» [70] – перший у Росії освітній Інтернет-портал, на якому представлені дистанційні курси, спрямовані на учнівську аудиторію, а також курси для професійної освіти.

Розробка проекту виконується з 1999 року компанією «ФІЗИКОН». Основне призначення проекту – інтеграція навчальних комп'ютерних курсів, що випускаються компанією на компакт-дисках, та індивідуального навчання через Інтернет.

У середовищі «Відкритий коледж» учні можуть:

- самостійно навчатися за основними предметами шкільної програми, розв'язувати задачі, спілкуватися з віртуальним вчителем та отримувати електронні консультації;

- брати участь у дистанційних олімпіадах і вікторинах;

- перевіряти набуті знання шляхом тестування.

Для професійної підготовки пропонується курси з основ бізнесу та економіки, курси інформатики, фізики, англійської мови та інші. Після закінчення за результатами навчання видається сертифікат.

«Віртуальна школа Кирила та Мефодія (КМ-школа)» [72] – інформаційний інтегрований продукт, створений на основі Інтернет та Інтранет технологій. В ньому об'єднуються освітній мультимедійний зміст, система доставляння та управління ним, а також ефективні засоби автоматизації управління школою (робочі місця директора, заступника директора, вчителя, учня, бібліотекаря та адміністратора).

До складу освітнього контенту «КМ-школи» входять:

- мультимедіа-уроки,
- мультимедіа-енциклопедії;
- інструмент для тренінгу, перевірки та самоперевірки знань учнів зі шкільних предметів («репетитори»);
- тренінги з інформаційних технологій;
- електронна бібліотека;
- практичні курси розвитку особистості та ін.

На базі «КМ-школи» може бути створений електронний освітній простір в окремому регіоні та мінімізований Інтернет-трафік шкіл.

Досвід впровадження дистанційного навчання в школах України значно поступається російському. Про масштаби відставання свідчить той факт, що перший конкурс «Дистанційний вчитель року» всеросійського рівня був проведений у 1999 році, а в Україні міського рівня – у 2007 році у м. Херсон.

Активному впровадженню дистанційного навчання в практику роботи загальноосвітніх закладів перешкоджають об'єктивні та суб'єктивні проблеми психологічного, технічного, юридичного та методичного характеру, а саме: інертність вчителів-предметників, слабкість технічної бази, відсутність апробованих програмних засобів, недостатність нормативної, законодавчої документальної бази, якою регламентується навчальну діяльність під час дистанційної форми навчання, слабе забезпечення методичними розробками за технологіями дистанційного навчання.

Незважаючи на наявні проблеми, про становлення дистанційного навчання в Україні на рівні загальноосвітніх закладів свідчать експериментальні дослідження: В.М. Кухаренка [21; 22], Є.М. Смирнової-Трибульської [45], В.В. Сташенко [45;48], освітні портали: Шкільний Інтернет-портал «Острів знань» [68], Всеукраїнський шкільний портал [75], а також діяльність шкіл Херсону, Харкова, Вінниці та ін.

Перша дистанційна школа в Україні, призначена для проведення додаткового навчання, була відкрита на базі проблемної лабораторії дистанційного навчання НТУ «ХПІ» під керівництвом В.М. Кухаренка за участю співробітників кафедри технічної кріофізики. Навчальний процес у дистанційній школі, яка отримала назву «Фізик-інформатик», розпочався з жовтня 2005 року. У школу приймаються особи із середньою освітою, учні випускних класів середніх навчальних закладів, студенти випускних курсів технікумів, училищ, котрі мають намір до вступу в НТУ «ХПІ».

Школа є структурним підрозділом факультету дистанційного навчання та доуніверситетської підготовки НТУ «ХПІ».

Основними задачами школи є:

- проведення профорієнтаційної роботи серед школярів, студентів випускних курсів технікумів та інших громадян із середньою освітою з метою залучення їх до вступу до університету;
- проведення відбору найбільш здібної молоді, що має нахил до

оволодіння науками відповідно до профілю факультету;

– підвищення рівня підготовки молоді в галузях наук, що відповідають спрямуванню факультету;

– підготовка і залучення найбільш обдарованих учнів до участі в республіканських та регіональних олімпіадах з фундаментальних дисциплін.

Контрольні питання і завдання

1. Порівняти масштаби впровадження дистанційного навчання у практику роботи шкіл Росії та України.

3.3.2. Особливості навчання школярів за дистанційною формою

У більшості випадків, дистанційне навчання школярів повинно розглядатися як додаткове до традиційного класно-урочного навчання. Так, елементи дистанційного навчання можуть стати незамінними для таких груп учнів:

– учням сільських шкіл для отримання якісної освіти;

– обдарованим дітям для поглиблення знань, перевірки ступеня самореалізації під час участі в олімпіадах різного рівня, для виконання робіт МАН на високому науковому рівні;

– учням випускних класів для підготовки до складання зовнішнього незалежного тестування;

– невстигаючим дітям для формування інтересу до навчання чи його поновлення, підвищення якості навчання;

– учням, які з різних причин пропускали заняття (активісти, спортсмени та ін.) для усунення прогалин у знаннях;

– учням різних класів для самореалізації, загального розвитку та систематизації знань, уникнення прогалин у знаннях через непередбачувані обставини (наприклад, карантин).

А для дітей з індивідуальними особливостями, через які вони не можуть відвідувати школу (фізичні вади, перебування у лікарнях, колоніях і т.ін.), дистанційне навчання за умов створення відповідних інфраструктур може стати основною і єдиною формою одержання середньої освіти.

Дистанційне навчання знімає багато психологічних проблем, пов'язаних із комунікабельністю школярів, дозволяє їм бути більш відвертими. Можливість попрацювати над своєю думкою допомагає учням усунувати огріхи усного спілкування.

Н.В. Морзе визначає *типи* дистанційного навчання, які відрізняються між собою за ступенем дистанційності, індивідуалізації і продуктивності [28, 96]:

1. Школа – Інтернет

2. Школа – Інтернет – Школа

3. Учень – Інтернет – Учитель

4. Учень – Інтернет – Центр

5. Учень – Інтернет – ...

Як зазначає В.В. Сташенко, «навчальний процес при дистанційному навчанні містить у собі всі основні форми традиційної організації освіт-

нього процесу та поєднує дослідницьку і самостійну роботу учнів; при цьому реалізація цих форм значно змінюється» [48].

Вирішуючи одну із задач сучасної освіти, застосування дистанційних форм навчання урізноманітнює види й форми навчальної діяльності школярів [3]. Складовими навчальної діяльності дистанційного учня є:

- пізнавально-продуктивна діяльність;
- комунікативна діяльність;
- методологічно-змістова діяльність;
- психолого-виховна діяльність;
- технічна діяльність.

Пізнавально-продуктивна діяльність учнів реалізується у таких формах, як дистанційні творчі олімпіади, проекти і курси. Основною метою такої діяльності в дистанційному навчанні є набуття і розвиток учнями умінь створювати творчий продукт з використанням засобів телекомунікацій.

Комунікативна діяльність учнів під час дистанційного навчання передбачає винесення творчого продукту, створеного у результаті пізнавально-продуктивної діяльності, на обговорення в електронні конференції та дискусійний чат. Форми організації комунікативної діяльності поділяються на: асинхронні (електронна пошта, телеконференція, форум, дошка оголошень, гостьова книга) і синхронні (чат-уроки і чат-конференції у режимі реального часу).

Методологічно-змістова діяльність учнів передбачає суттєве збільшення складової самостійного правління учнями пізнавально-продуктивною діяльністю, розвиток у них умінь, спрямованих на самоуправління своєю навчальною діяльністю.

Психолого-виховна діяльність учнів полягає у вихованні особистісних умінь для підсилення самостійності учня у дистанційному навчальному процесі:

- уміння бути здатним до самоосвіти, людиною, яка може вчасно реагувати на стрімкі зміни в соціальній та технічній областях життя;
- цілеспрямованість, самодисципліна і наполегливість;
- позитивне ставлення до навчання за дистанційною формою та ін.

Технічна діяльність полягає у набутті специфічних знань, умінь та навичок із застосування засобів телекомунікацій.

Проаналізувавши досвід впровадження дистанційного навчання у навчально-виховний процес шкіл Росії, а також стан впровадження дистанційного навчання у навчальний процес вітчизняних шкіл (у тому числі в рамках експерименту «Дистанційне навчання для середньої школи» [21; 22]), можна сформулювати загальні вимоги щодо організації дистанційного навчання у загальноосвітніх навчальних закладах та рекомендації щодо розробки дистанційних курсів для школярів різних вікових категорій.

Вимоги до організації дистанційного навчання у загальноосвітніх

навчальних закладах:

– наявність високоорганізованої комп'ютерної мережі з одним чи кількома серверами (один – для обслуговування локальної комп'ютерної мережі, другий може використовуватися для підтримки організації Екстрнету [28], третій – для використання ресурсів глобально мережі Інтернет в освітніх цілях);

– наявність висококваліфікованих кадрів, компетентних в організації та проведенні дистанційного навчального процесу – фахівців у предметних галузях, методистів, добре ознайомих зі специфікою Інтернет- і комунікаційних технологій, із сучасними тенденціями в системі освіти, сучасними концепціями, теоріями, педагогічними технологіями, психологічними особливостями взаємодії в мережі тощо [25];

– наявність нормативно-правової документації з регулювання навчальної діяльності за дистанційних форм навчання.

Рекомендації щодо розробки дистанційних курсів для школярів:

– оформлення теоретичного матеріалу теми має бути виконане у гіпертекстовому чи мультимедійному форматі [9];

– обов'язково є наявність списку рекомендованої додаткової друкованої літератури та точних (актуальних і робочих) гіперпосилань на Інтернет-ресурси з розглядуваної теми;

– до навчального матеріалу мають бути включені всі додаткові питання, які можуть виникнути в учнів під час навчання;

– необхідно передбачити використання різноманітних складових елементів системи дистанційного навчання;

– після завершення вивчення окремої теми учень обов'язково має отримати оцінку, без якої неможливе подальше вивчення курсу.

Дотримання зазначених вимог є необхідною умовою успішного впровадження технологій дистанційного навчання у навчально-виховний процес школи.

Контрольні питання і завдання

1. Доповнити перелік груп учнів, для яких дистанційне навчання може стати альтернативою традиційному.

2. Охарактеризувати складові навчальної діяльності учня під час навчання за дистанційними формами.

3. Прокоментувати вимоги та рекомендації щодо організації дистанційного навчання у школі.

Висновки до третього розділу

1. Провідною тенденцією розвитку дистанційного навчання в Україні є застосування технологій дистанційного навчання у традиційному очному навчанні, що, зокрема, дозволяє його застосовувати при навчанні школярів.

2. Порівняння платформ дистанційного навчання показало, що повна підтримка міжнародного стандарту дистанційного навчання SCORM 2004, найкраща локалізація та найбільш повна реалізація дистанційного навчання як педагогічної технології наявна у СДН MOODLE.

3. Дистанційне навчання школярів має такі основні особливості:

- є додатковим до традиційного класно-урочного навчання;
- основними критеріями вибору навчальної платформи дистанційного навчання школярів є наявність інтуїтивного інтерфейсу, довідки та документації рідною мовою, зручність управління змістом і спілкуванням з користувачами, можливість розширення сукупності використовуваних компонентів відповідно до зростаючих потреб та умінь вчителя й учнів, підтримка різних форм комунікації та групових форм навчання, взаємного оцінювання та самоуправління, а також наявність інструментів, що служать для підтримки складових елементів процесу навчання в середній школі;

- при розробці шкільного дистанційного курсу необхідно забезпечити: використання різноманітних складових елементів системи дистанційного навчання, оформлення теоретичного матеріалу у гіпертекстовому та мультимедійному форматі, наявність списку рекомендованої додаткової друкованої літератури та точних гіперпосилань, включення до навчального матеріалу всіх додаткових питань, які можуть виникнути в учнів у процесі навчання, оцінювання кожної вивченої теми окремо.

РОЗДІЛ 4.

МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕРЕЖНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

За ідеєю М.І. Жалдака, прикладне програмне забезпечення математичного призначення можна умовно поділити на дві великі групи:

– програмне забезпечення *навчально*-дослідницького призначення, так звані педагогічні програмні засоби (ПЗ), розраховані на учнів загальноосвітніх навчальних закладів та студентів вузів, які лише почали вивчати шкільний курс математики та основи вищої математики;

– програмне забезпечення *науково*-дослідницького призначення, розраховане на математиків-фахівців досить високої кваліфікації.

Найбільш придатними для підтримки вивчення ШКМ та основ вищої математики на сьогоднішній день називають такі програми: програмно-методичний комплекс GRAN, система динамічної геометрії DG і система комп'ютерної алгебри ТерМ, описані у першому розділі.

Програмне забезпечення науково-дослідницького призначення не має широкого застосування у школі, тоді як використання цих програмних засобів у процесі навчання шкільної математики сприятиме утвердженню нової парадигми розвитку математичної освіти, основним змістом якої є не опанування певними алгоритмами розв'язування математичних задач, а розуміння та застосування математичних методів дослідження.

4.1. Науково-дослідницьке програмне забезпечення математичного призначення

Починаючи з 1960-го року було створено кілька сотень систем для розв'язування математичних задач та візуалізації математичних об'єктів. Всі ці системи характеризуються наявністю обчислювального ядра, чисельних бібліотек математичних об'єктів та алгоритмів роботи з ними, пакетів розширень, більш менш розвинутим інтерфейсом та ін.

За своїм призначенням, структурою та функціями математичне програмне забезпечення науково-дослідницького призначення можна умовно поділити на кілька груп, а саме:

1. Математичні пакети вузької спеціалізації: *GAP*, *Macaulay*, *Singular* та ін.

2. Програмні засоби візуалізації математичних даних: *Gnuplot*, *JMol*, *LaTeX* та ін.

3. Системи геометричного моделювання: *Autodesk 3ds Max*, *ANSYS* та ін.

4. Системи комп'ютерної математики: *Derive*, *Maple*, *Matlab*, *Mathematica*, *MathCAD*, *Maxima*, *SAGE* та ін.

У даній класифікації наведені далеко не всі, а лише найпопулярніші на сьогодні, переважно некомерційні, програмні засоби підтримки математичних досліджень. Коротко зазначимо основні можливості використання професійно орієнтованого програмного забезпечення математич-

ного призначення.

Так, математичні пакети вузької спеціалізації призначені для виконання алгебраїчних та теоретико-числових обчислень, чисельних та матричних обчислень необмеженої точності, розв'язування диференціальних рівнянь та ін. Вони набагато швидше та ефективніше універсальних систем, оскільки від початку були орієнтовані на розв'язування досить обмеженого кола задач без необхідності інтерпретувати вхідні дані, компілювати тисячі функцій ядра у момент завантаження, підтримувати інтерфейс та графіку, мати вбудовану довідкову систему та ін.

За представленістю у наукових публікаціях та кількістю посилань на сторінках мережі Інтернет найпопулярнішою системою вузької спеціалізації є система *GAP (Groups, Algorithms, Programming)* – система для обчислювальної дискретної алгебри. Розробка системи була розпочата у 1986 році у Німеччині (м. Аахен), в 1997 році центр координації розробки та технічної підтримки перемістився у Шотландію (Університет м. Сент-Ендрюс). *GAP* безкоштовно поширюється разом із дистрибутивом на умовах ліцензії GNU.

Система *GAP* може бути використана для проведення досліджень та навчання в галузі теорії груп, кілець, алгебри, комбінаторних структур, теорії графів та їх автоморфізмів, теорії кодування, кристалографії, векторних просторів та ін. В систему *GAP* вбудовано спеціалізовану мову програмування, бази даних математичних об'єктів та величезну бібліотеку алгоритмів роботи з ними. За допомогою *GAP* можна працювати з циклотомічними полями, скінченими полями, алгебраїчними розширеннями полів, групами Галуа, многочленами від багатьох змінних, раціональними функціями, векторами та матрицями. Користувач має доступ до різноманітних комбінаторних функцій, елементарних теоретико-числових функцій, різноманітних функцій для роботи з множинами та списками та ін. Окрім того, за допомогою *GAP* можна виконувати обчислення з гігантськими цілими та раціональними числами, допустимі значення яких обмежуються лише обсягом допустимої пам'яті.

Менш відомою відкритою вільно поширюваною системою вузької спеціалізації є система *Singular*, створена на потребу виконання спеціальних операцій у сфері комутативної алгебри, алгебраїчної геометрії та теорії особливостей.

Перша версія *Singular* вийшла у 1997 році. За допомогою *Singular* можна виконувати обчислення над такими математичними об'єктами, як ідеали та модулі, скінченні поля, алгебраїчні розширення, фактор-кілець та ін.

Але однією з перших вільно поширюваних спеціалізованих систем для виконання досліджень в галузі алгебраїчної геометрії та комутативної алгебри була створена система *Macaulay* (1983–1993 – роки написання ядра системи). Дана система призначена для опрацювання складних математичних об'єктів високого рівня, включаючи поля Галуа, кілець поліномів, алгебраїчні розширення, алгебри Вейля, фактор-кілець, го-

моморфізми кілець та модулів та ін.

Окрім виконання швидких та точних обчислень переважна кількість математичних задач вимагають адекватної візуалізації математичних даних та отриманих результатів.

Найпопулярнішим серед програмних засобів візуалізації математичних функцій і даних є середовище *Gnuplot*, розробка якого розпочалася у 1986 році. Не зважаючи на назву, *Gnuplot* не є частиною проекту GNU, захищений авторським правом розповсюджується безкоштовно, але не за ліцензією GNU GPL.

Використовуючи *Gnuplot*, можна працювати у будь-якій операційній системі у режимі командного рядка або у пакетному режимі, виконуючи скрипти, прочитані з файлів. Також *Gnuplot* використовують в якості системи виведення зображень у різних математичних пакетах, таких як GNU Octave, Maxima, SAGE та ін.

За допомогою *Gnuplot* можна будувати різноманітні типи графіків та поверхонь для функцій, заданих аналітично, параметрично або переліком координат точок. В системі підтримується не лише декартова система координат, а і полярна система координат при побудові двовимірних графіків та сферична чи циліндрична – при побудові тривимірних графіків.

В *Gnuplot* підтримується кілька різних типів виведення: на екран, у файли різних графічних форматів (eps, fig, jpeg, LaTeX, metafont, pbm, pdf, png, postscript, svg та ін.), на графічні пристрої (графопобудівники) та сучасні принтери.

До складу *Gnuplot* входить стандартна бібліотека математичних функцій, яка відповідає бібліотеці UNIX. Бібліотеку можна налаштувати на використання радіан та градусів (за замовчуванням використовуються радіани). В функціях у якості аргументів підтримуються цілі, дійсні та комплексні числа.

Вибір системи *Gnuplot* буде виправданим для виконання базових побудов графіків.

Для адекватного подання тривимірних об'єктів унікальною на сьогодні є система *JMol*, яка від початку була задумана як програма для простої візуалізації складних хімічних структур. Але, через те, що вона описана мовою Java, система *JMol* може бути використана в якості аплету на динамічних Web-сторінках (аплет – програма, що розміщена на Web-сервері, виконується на комп'ютері користувача, а результати її роботи відображаються у вікні браузера). Тому, у мережних системах комп'ютерної математики аплет *JMol* використовується для перегляду результуючого файлу обчислень із тривимірним зображенням. Змінити параметри (обертання, масштаб та ін.) аплетного 3D-зображення можна за допомогою контекстного меню відповідного аплету.

Візуалізації підлягають не лише різноманітні математичні функції та дані, отримані у результаті математичних розрахунків, а й самі математичні тексти через наявність у них специфічних математичних симво-

лів, формул, виразів та ін.

Для підготовки та друку математичної документації високої якості Леслі Лампортом був створений макропакет *LaTeX*. На сторінках Вікіпедії відзначені такі особливості пакету:

- високоякісні алгоритми розстановки переносів, перенесень між словами, балансування тексту в абзацах;
- автоматична генерація таблиці змісту документа, таблиць ілюстрацій та ін.;
- зручний механізм роботи з перехресними посиланнями (на формули, таблиці, ілюстрації, їхній номер або сторінку);
- зручний механізм цитування бібліографічних джерел;
- оформлення математичних та фізичних формул і рівнянь, хімічних формул та структурних схем молекул;
- оформлення графів, схем, діаграм та ін.

LaTeX входить до складу сучасних дистрибутивів *TeX*, і доступний на більшості основних апаратних та програмних платформах.

У зв'язку з поширенням геометричних досліджень, зокрема в галузі проєктивної геометрії та геометрії комплексних чисел, актуальності набувають системи геометричного моделювання. Найбільш вдалою системою такого класу на сьогодні є *Autodesk 3ds Max*.

Autodesk 3ds Max є об'єктно-орієнтованим середовищем для напівавтоматичного моделювання, анімації та візуалізації. За допомогою *Autodesk 3ds Max* можна створювати та редагувати геометричні поверхні будь-яких форм та складності, а також моделювати складні динамічні процеси.

Основним методом моделювання в *Autodesk 3ds Max* є моделювання на основі стандартних (прямокутний паралелепіпед, сфера, циліндр, тор, конус, труба, піраміда, чайник, площина, геосфера) та додаткових об'єктів, кожен із яких володіє рядом параметрів, на основі яких однозначно визначається форма тривимірного тіла. Після створення об'єкта кожен із його параметрів можна змінити і переглянути як змінився об'єкт у вікні редагування.

Програма *Autodesk 3ds Max* оснащена *DCOM*-інтерфейсом, за допомогою якого нею можна управляти з інших додатків, у тому числі через мережу. Враховуючи відкритість та гнучкість архітектури пакету *Autodesk 3ds Max*, можна необмежено розширювати його функціональні характеристики.

Серед значної кількості переваг *Autodesk 3ds Max* певним недоліком є можливість роботи з пакетом лише на *Windows*-платформі.

Широкі можливості для ефективного здійснення розрахунків та проведення дослідження чи моделювання явищ різної природи у різних предметних галузях відкриваються на основі використання *систем комп'ютерної математики (СКМ)*. В цих універсальних математичних пакетах поєднуються спеціалізоване математичне програмне забезпе-

чення з виконання символічних та чисельних розрахунків, потужні графічні засоби, власні мови програмування, графічний інтерфейс, засоби підготовки математичних текстів до друку, засоби для здійснення експортування даних в інші програмні продукти (текстові і графічні редактори, електронні таблиці) та імпортування з них даних для опрацювання.

Ефективність застосування СКМ універсального типу, таких як *Derive*, *Maple*, *Matlab*, *Mathematica*, *MathCAD* чи *Maxima*, у дослідницькій діяльності студентів не викликає сумнівів, тоді як їх застосування у загальноосвітніх школах є дискусійним щодо педагогічної доцільності.

Р.І. Івановський відмічає, що необхідність вивчення СКМ у школі визначається такими факторами:

- високою інтенсивністю навчального процесу;
- вимогами щодо підвищення інформативності занять;
- нестачу навчального часу на розробку учнями складних програм;
- вимогами варіативності типових задач, що розв'язуються;
- простотою створення ілюстрацій на базі СКМ та їх анімації;
- намаганнями виключити рутинні операції;
- простотою символічного, чисельного чи графічного розв'язування задач [13].

На думку М.В. Рафальської, застосування засобів СКМ на різних етапах уроку математики дає змогу активізувати навчально-пізнавальну діяльність учнів, сприяє розвитку їх творчих здібностей, математичної інтуїції та навичок здійснення дослідницької діяльності з використанням сучасних засобів ІКТ, а можливість проведення комп'ютерних експериментів у середовищі СКМ дає змогу організувати навчання математики з використанням елементів проблемного навчання, дослідницьких підходів у навчанні. Окрім того, оволодіння вміннями та навичками здійснення обчислень у певній СКМ та використання цих засобів для розв'язування навчальних та прикладних задач є необхідною умовою формування математичних компетентностей учнів [40].

Результати експериментального впровадження СКМ у процес навчання математики С.Ю. Попадійною [37] є свідченням ефективного застосування засобів СКМ у дослідницькій роботі учнів з математики.

Грунтового дослідження потребує визначення змісту, засобів та форм навчання учнів можливостей використання СКМ, як компонентів відповідної методичної системи, побудованої за принципом педагогічної доцільності застосування СКМ у навчальному процесі загальноосвітньої школи.

Контрольні питання і завдання

1. Доповнити перелік професійного програмного забезпечення математика.

2. Провести порівняльний аналіз систем комп'ютерної математики *Derive*, *Maple*, *Matlab*, *Mathematica*, *MathCAD* та *Maxima*, відмітити їхні переваги та недоліки.

4.2. Мережні системи комп'ютерної математики (Web-СКМ)

Однією з проблем, що постають у процесі навчання математики за умов широкого впровадження засобів сучасних ІКТ, є вибір середовища для роботи. Як комерційні, так і вільно поширювані системи суттєво різняться за функціональністю (універсальні системи та системи вузької спеціалізації), інтерфейсом (командного рядка, графічним), розміром (від кількох кілобайт до кількох гігабайт), вбудованою мовою програмування тощо. Безальтернативне ознайомлення лише з однією СКМ (навіть такою розвинутою, як *Maxima*) неминуче впливатиме на подальшу професійну діяльність, обмежуючи клас розв'язуваних задач за допомогою конкретного програмного продукту.

Як у педагогічній, так і в інженерній та науково-дослідницькій роботі діє єдиний принцип: *вибір інструмента визначається задачею*, тому обійтися лише однією СКМ не вдається, та й не потрібно.

Фактором, що утруднює вивчення та застосування різних СКМ, є синтаксичні відмінності у застосуванні одних і тих самих команд, що можуть змінюватися навіть у межах однієї СКМ різних версій. Інша проблема – те, що досить часто в універсальних системах не вистачає функціональностей спеціалізованих систем, та навпаки. В результаті для роботи буває необхідним цілий «зоопарк» СКМ, встановлених на одному комп'ютері, що в умовах загальноосвітньої школи та ЗВО реалізувати практично неможливо через ліцензійні чи адміністративні перешкоди.

Проблема вибору СКМ та підтримки великої інсталяційної бази може бути розв'язана через застосування мережних надбудов до існуючих СКМ – *мережних систем комп'ютерної математики*, або *Web-СКМ*. Основними характеристиками мережних систем комп'ютерної математики є:

- відсутність необхідності встановлення обчислювального ядра СКМ на клієнтській машині;
- виконання обчислень – на Web-сервері СКМ;
- відображення результатів – у Web-браузері;
- невимогливість до апаратної складової обчислювальної системи;
- індиферентність до використовуваного браузера;
- простота адміністрування (зняття проблеми підтримки великої інсталяційної бази та ліцензування програмного забезпечення);
- мобільний доступ до навчальних ресурсів, програм і даних та ін.

Сьогодні представниками класу мережних СКМ є *MathCAD Application Server (MAS)*, *MapleNet*, *Matlab Web Server (MWS)*, *webMathematica*, *wxMaxima* та *SAGE*. Проте, не всі із перелічених Web-СКМ можуть бути з легкістю використані для організації очно-дистанційного навчання математики в умовах загальноосвітніх шкіл.

Найбільший потенціал щодо організації учнівських досліджень, що включають побудову та оцінку математичної моделі, із застосуванням мережних технологій відмічено у системі *SAGE*, перша версія якої

з'явилася у лютому 2006 року.

SAGE (**S**oftware for **A**lgebra and **G**eometry **E**xperimentation – програме забезпечення для алгебраїчних та геометричних досліджень) – це безкоштовне вільно поширюване середовище математичних обчислень для виконання чисельних розрахунків та символічних перетворень, а також научної візуалізації даних.

Проектом SAGE [74] керує професор факультету математики Вашингтонського університету (м. Сіетл) Вільям Штейн. Кінцевою метою проекту є створення відкритого високоякісного програмного забезпечення як гідної альтернативи комерційним програмним засобам, таким як Maple, Mathematica, MuPAD чи Matlab.

Система SAGE оснащена двома інтерфейсами – локальним інтерфейсом командного рядка (рис. 4.1) та Web-інтерфейсом (рис. 4.2).

```
sage login: sage
Linux sage 2.6.17-12-386 #2 Tue Dec 18 02:08:33 UTC 2007 i686
Програми, включенные в Ubuntu Linux - свободно распространяемое ПО;
SAGE - свободно распространяемое математическое ПО, которое успешно может
работать и с несвободными системами (Matlab, Mathematica, Maple, Magma).
-----
| Sage Version 4.1, Release Date: 2009-07-09                               |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.             |
-----
sage: simplify(3*x^2+5*x+17*x-x^2)
2*x^2 + 22*x
sage: f=(x-1)*(x-1)*(2*x-3); simplify(f)
(x - 1)^2*(2*x - 3)
sage: f.simplify()
(x - 1)^2*(2*x - 3)
sage: expand((x-1)*(x^2-1))
x^3 - x^2 - x + 1
sage: b=(x-1)*(x^2-2*x+2); b
(x - 1)*(x^2 - 2*x + 2)
sage: b.expand()
x^3 - 3*x^2 + 4*x - 2
sage: factor(x^12-1)
(x - 1)*factor(x + 1)*(x^2 + 1)*(x^2 - x + 1)*(x^2 + x + 1)*(x^4 - x^2 + 1)
sage: var('a,b')
(a, b)
sage: factor(a^2-a*b-4*a-4*b)
a^2 - a*b - 4*a - 4*b
sage: _
```

Рис. 4.1. Інтерфейс командного рядка SAGE

Оснащеність Web-інтерфейсом та вільне поширення середовища математичних обчислень SAGE – це основні, але не єдині переваги програми у порівнянні з іншими мережними системами комп'ютерної математики. Серед визначальних характеристик SAGE слід відмітити такі:

- відкритість повнофункціонального Web-сервера системи;
- інтеграція більше 100 математичних пакетів вузької спеціалізації у єдиному середовищі: PARI, GAP, GSL, Singular, MWRANK, NetworkX, Maxima, SymPy, GMP, Numpy, matplotlib та ін.;
- підтримка інтерфейсів до комерційних систем комп'ютерної математики, таких як Maple, Magma, Mathematica і Matlab;
- виконання на Web-сторінках програм, описаних мовами програмування Python, Lisp, Java та ін.;
- спрощеність процедури публікації робочих аркушів у мережі Інтернет;
- наявність режиму спільної роботи (collaborate) з даними певного

робочого аркуша;

- відсутність потреби встановлення спеціального програмного забезпечення для подання математичних виразів у звичній математичній нотації (достатньо виконати дозавантаження математичних шрифтів);
- підтримка технологій LaTeX та Wiki.

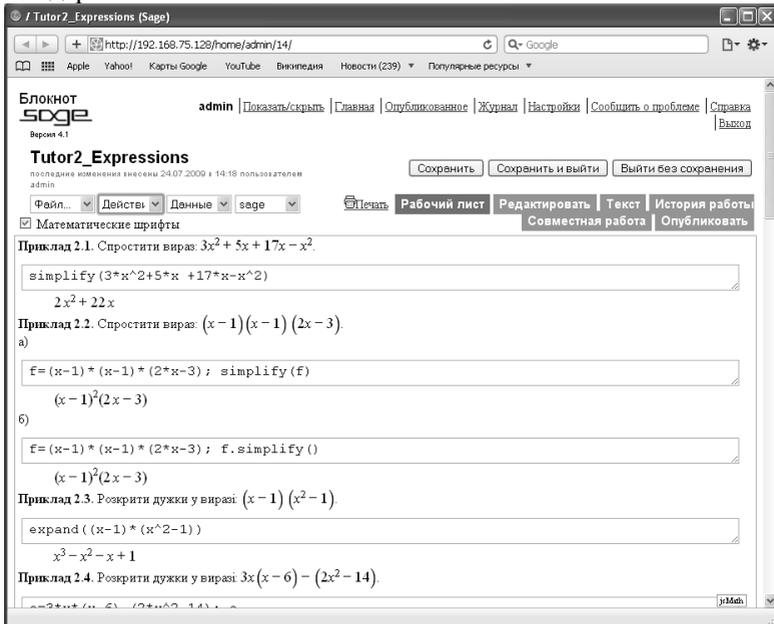


Рис. 4.2. Web-інтерфейс SAGE

Користуючись засобами SAGE є можливість виконати:

- арифметичні операції над числами та обчислення значень числових функцій (таких як, факторіал та ін.) та елементарних математичних функцій;
 - наближені обчислення із заданою точністю;
 - операції перетворення виразів (зведення подібних, розкриття дужок розкладання полінома на множники та інші);
 - обчислення границь послідовностей і функцій;
 - диференціювання та інтегрування функцій;
 - обчислення визначених інтегралів;
 - розв'язування алгебраїчних та трансцендентних рівнянь аналітично, графічно та чисельно;
 - розв'язування диференціальних рівнянь;
 - операції лінійної алгебри (зокрема дії з векторами і матрицями);
 - обчислення комбінаторних виразів;
 - побудови графіків функцій та залежностей між змінними на площині та у просторі, заданих у декартових чи у полярних координатах.
- Більш того, система SAGE може бути ефективно використана у про-

цесі навчання багатьох розділів вищої та прикладної математики, зокрема, алгебри, геометрії, математичного аналізу, методів математичної фізики, теорії чисел, комбінаторики, теорії графів, моделювання, чисельних методів, теорії кодування, паралельних та розподілених обчислень та ін.

Короткий огляд основних прийомів роботи в системі SAGE наведено у посібнику «Основи роботи в SAGE» [56] (див. DVD-додаток). Більш глибоке засвоєння можливостей використання інструментарію SAGE до розв'язування математичних задач рекомендується старшокласникам у формі позаурочної самостійної роботи з інформатики, організованої з використанням технологій дистанційного навчання.

Контрольні питання і завдання

1. Які фактори стали причиною появи та популярності мережних систем комп'ютерної математики?

2. На одному з Web-серверів SAGE (<http://sagenb.org/>, <http://sagenb.kaist.ac.kr/>, <http://sagemath.ru:8000/> чи ін.) зареєструвати власний блокнот, виконати вхід до системи та створити новий робочий аркуш для здійснення обчислень.

3. Визначити поточну версію системи та які математичні пакети інтегровані в SAGE.

4. Виконати дії $2+3$, $7-5$, $3.5*2$, $15/6$, $7/0$, 2^{1000} : а) у різних командних рядках; б) в одному командному рядку.

5. Знайти значення тригонометричних функцій для кутів: а) 27 радіан; б) 27^0 .

6. Обчислити значення числового виразу

$$\frac{\frac{5}{6} - \frac{21}{45}}{1\frac{5}{6}} \cdot \frac{1,125 + 1\frac{3}{4} - \frac{5}{12}}{0,59}$$

7. Виконати: імпортування робочих аркушів з DVD-диску (*.sws) до власного блокноту; перейменувати імпортовані робочі аркуші дописуванням символу `_` та вашого прізвища латиницею (наприклад: Tutor2_Expressions_Ivanov).

8. Виконати обчислення у всіх командних рядках аркушу одночасно. Передбачити виведення результатів: а) у текстовому форматі; б) у звичній математичній нотації.

9. Підготувати SAGE до роботи у локальному режимі, використовуючи ресурси DVD-додатку до посібника та слідуючи рекомендаціям, поданим у додатку А.

10. Виконати завдання:

1) звести подібні та вказати степінь многочлена:

$$3a^2 + 3ax^2 + 5a^3 + 3ax^2 - 8a^2x - 10a^3;$$

2) спростити вираз $2a(a + b - c) - 2b(a - b - c) + 2c(a - b + c)$;

3) подати у вигляді добутку: $5a - 5b - xa + xb - b + a$;

4) проілюструвати покрокову побудову графіка функції виду $y = a\sin(bx + c) + d$. Значення параметрів a , b , c і d обрати самостійно. Додати підписи до побудованих графіків;

5) побудувати графік залежності між полярними координатами ρ і φ (при конкретних a , b) $\rho = a\sin(b\varphi)$;

6) виконати побудову-ілюстрацію правил додавання та віднімання векторів;

7) побудувати циліндр, заданий параметрично;

8) побудувати сферу, вписану в тетраедр;

9) розв'язати рівняння $\frac{x^2 + 1}{x - 4} - \frac{x^2 - 1}{x + 3} = 23$;

10) знайти наближені розв'язки рівняння $\log_2 x - \sin x = 0$;

11) знайти нулі функції $y = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$;

12) розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x + y)(x^2 - y^2) = 16 \\ (x - y)(x^2 + y^2) = 40 \end{cases};$$

13) визначити при яких значеннях параметра a дана система рівнянь: а) має єдиний розв'язок; б) має нескінченну кількість розв'язків; в) не має розв'язків:

$$\begin{cases} (a + 1)x + y = 2 \\ 3x + (a - 1)y = a \end{cases};$$

14) знайти об'єм піраміди, побудованої на векторах $a(-4, 2, 3)$, $b(2, -7, 5)$ і $c(4, 3, 9)$;

15) розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

за формулами Крамера та матричним способом. Перевірити правильність знайдених розв'язків, виконавши одну команду;

16) знайти похідні функції $f(x) = 3x^7 + 5x^3 - 2x + 1$ до 4-го порядку включно. Обчислити $f^{IV}(1)$;

17) дослідити функцію $y = (x + 1)\sin x - x\cos 2x$ засобами SAGE та побудувати її графік;

18) знайти площу фігури, обмежену графіками функцій $y = x^2 - 5x + 4$ та $y = 2x - 2$;

19) обчислити наближено $\log_2(3 + |\sin(x)|)$ для $x = 1$;

20) знайти загальний розв'язок диференціального рівняння руху частинки масою m , яка здійснює пружні коливання з коефіцієнтом пруж-

ності k вздовж вісі Ox : $mx'' + cx' + kx = 0$, де член cx' являє собою опір руху, викликаний тертям ($c > 0$);

21) розв'язати задачу Коші:

$$q'' + \frac{1}{C}q = \sin(2t) + \sin(1 \text{ } t), \quad q(0) = q'(0) = 0, \quad \text{для } C=1/121;$$

22) скласти всі можливі слова із чотирьох літер, які містять двічі літеру "а" і по одному разу літери "b" та "с";

23) вивести всі п'ятизначні числа, що складаються лише з непарних цифр. Підрахувати їх кількість;

24) визначити, скільки існує способів видати 1 гривню копійками цінністю 1, 2, 5, 10, 25 та 50.

4.3. Елементи методики навчання Web-СКМ SAGE за технологіями дистанційного навчання

Враховуючи перспективність мережних технологій у навчанні, а також широкий набір функцій і переваги SAGE, дана система була обрана як інструментальний засіб для підтримки позаурочної самостійної роботи учнів старших класів з розділу «Прикладне програмне забезпечення навчального призначення» шкільного курсу інформатики у формі дистанційного факультативу «Комп'ютерні технології у наукових дослідженнях». *Дистанційний факультатив* розглядається як форма організації самостійного вивчення додаткового навчального матеріалу (за бажанням учня) на засадах змішаної моделі дистанційного навчання, що передбачає інтеграцію елементів його методичної системи з елементами традиційного навчання – 1 година на тиждень у комп'ютерному класі під керівництвом вчителя та самостійна робота учня протягом тижня з системою дистанційного навчання.

Призначення факультативу полягає у поглибленому вивченні розділу «Прикладне програмне забезпечення навчального призначення» шкільного курсу інформатики та формуванні практичних навичок розв'язування математичних задач засобами діяльнісного середовища для алгебраїчних та геометричних досліджень SAGE.

Завдання, що передбачається вирішити в ході опанування змісту дистанційного факультативу:

- сформулювати в учнів поняття «система комп'ютерної математики»;
- визначити характерні риси мережних систем комп'ютерної математики;
- навчити виконувати математичні розрахунки та обчислення у Web-СКМ з їх подальшою публікацією у мережі;
- продемонструвати можливості застосування Web-СКМ для візуалізації математичних об'єктів (виразів, функцій, числових даних, фігур та ін.);
- залучити учнів до дослідницької роботи у проектах з елементами математичного моделювання.

Відмітимо загальні вимоги до знань та умінь, які висуваються до учасників очно-дистанційного навчального процесу за програмою факу-

льтативу «Комп'ютерні технології у наукових дослідженнях».

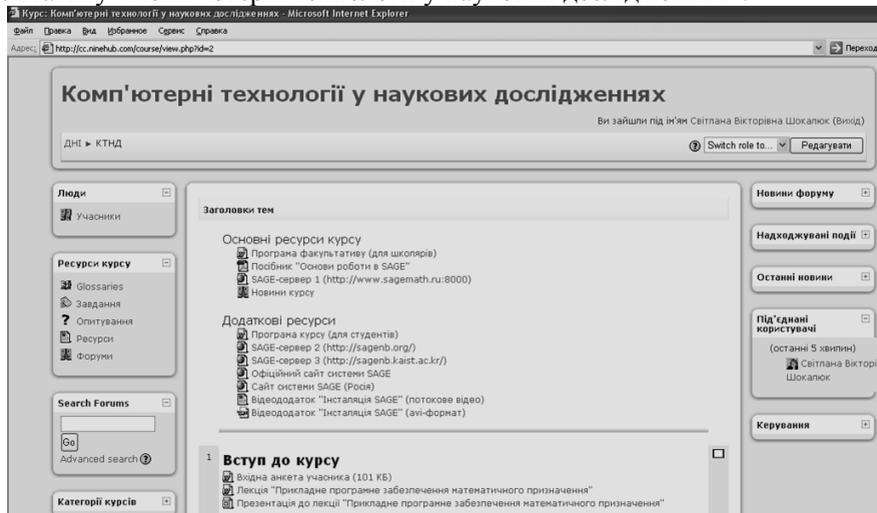


Рис. 4.3. Головне вікно дистанційного факультативу «Комп'ютерні технології у наукових дослідженнях»

Учні повинні *знати*:

- призначення та основні характеристики науково-дослідницького математичного програмного забезпечення;
- відмінності і переваги систем комп'ютерної математики, зокрема Web-CKM;
- послідовність дій для обчислення значень арифметичних виразів;
- допустимі способи розв'язування рівнянь та їх систем;
- основні етапи побудови графіків функцій та залежностей між змінними;
- особливості визначення та принципи роботи з об'єктами лінійної алгебри – векторами та матрицями;
- основні принципи об'єктно-орієнтованого програмування.

Використовуючи інструментарій системи комп'ютерної математики, учні повинні *вміти*:

- здійснювати чисельні розрахунки та символічні перетворення;
- обчислювати значення функції у даній точці;
- виконувати графічні побудови на площині та у просторі, у тому числі, будувати графіки функцій та залежностей між змінними, заданих у декартових чи полярних координатах;
- розв'язувати рівняння та їх системи, зокрема, окремі види звичайних диференціальних рівнянь;
- виконувати аналітичне дослідження функцій із застосуванням апарату диференціального числення;
- знаходити первісну для заданої функції, будувати криволінійну трапецію та обчислювати її площу;
- виконувати основні операції над векторами та матрицями;

– розв’язувати задачі комбінаторики;
 – застосовувати елементи об’єктно-орієнтованого програмування для розв’язування математичних задач.

У відповідності до п. 3.2, матеріали дистанційного факультативу були створені на платформі MOODLE.

Для реалізації очно-дистанційного навчання за принципами відкритого навчання, матеріали дистанційного факультативу виконано у двох варіантах – локальній версії та Інтернет-версії. Локальні версії дистанційного факультативу (див. DVD-додаток) були розміщені на серверах експериментальних навчальних закладів, а Інтернет-версія – на Web-сервері <http://cc.ninehub.com/>.

Зміст навчального матеріалу факультативу (див. табл. 4.1) узгоджено з діючими програмами шкільних курсів інформатики та математики, а також адаптовано під графік навчального процесу у старшій школі.

Таблиця 4.1.

**Зміст навчального матеріалу дистанційного факультативу
 «Комп’ютерні технології у наукових дослідженнях»**

№	Тематичний модуль
	10 клас (2 семестр, 20 тижнів)
1.	Вступ до курсу (2 тижні) Програмні засоби математичного призначення: загальна характеристика, класифікація, системи комп’ютерної математики (СКМ) та Web-СКМ, особливості організації учнівських досліджень засобами Web-СКМ.
2.	Початок роботи у SAGE (2 тижні) Огляд інтерфейсу, основні принципи роботи (операції з файлами системи, правила введення команд, основні математичні функції, ініціалізація процесу обчислень, виклик довідки за контекстом, отримання довідки за об’єктно-орієнтованим принципом побудови системи, одночасна робота з даними всього аркуша, перехід до інтерфейсів інших СКМ та ін.)
3.	LaTeX як засіб візуалізації математичних текстів (2 тижні) Передумови та історія виникнення мови LaTeX. Основні команди написання математичних текстів.
4.	Перетворення виразів (3 тижні) Функції перетворення цілих виразів: зведення подібних, розкриття дужок, розкладання на множники). Функції спрощення раціональних, ірраціональних, трансцендентних та тригонометричних виразів.
5.	Робота з графікою в SAGE (4 тижні) Графічні примітиви на площині. Побудова графіків функцій від однієї змінної та залежностей між змінними, заданих у декартових та у полярних координатах. Комбінування графіків.

№	Тематичний модуль
	<p>Додавання підписів до графічних зображень. Способи збереження зображень у файл.</p> <p>Побудова графічних примітивів у просторі та правильних многогранників. Побудова поверхонь, заданих явно, неявно або параметрично.</p> <p>Підготовка анімованих ілюстрацій.</p>
6.	<p>Розв'язування рівнянь та їх систем (3 тижні)</p> <p>Аналітичний спосіб розв'язування алгебраїчних рівнянь та їх систем. Наближене розв'язування трансцендентних рівнянь (чисельний та графічний способи).</p>
7.	<p>Елементи програмування (4 тижні)</p> <p>Особливості програмування у системі SAGE. Основні типи даних та прийоми роботи з ними. Виведення даних. Організація розгалужених та циклічних обчислень. Правила написання підпрограм-функцій. Застосування стандартних елементів управління (input box, slider та ін.) при програмуванні демонстрацій засобами SAGE.</p>
11 клас (1 семестр, 14 тижнів)	
8.	<p>Операції математичного аналізу (4 тижні)</p> <p>Обчислення границь послідовностей та функцій. Диференціювання функцій, знаходження похідних вищих порядків. Інтегрування функцій, обчислення визначеного інтегралу.</p>
9.	<p>Операції над векторами та матрицями (3 тижні)</p> <p>Визначення вектора та його довжини, знаходження скалярного та векторного добутків векторів.</p> <p>Задання матриць різних видів, додавання та множення матриць, обчислення визначника матриці, знаходження транспонованої та оберненої матриць). Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера.</p>
10.	<p>Диференціальні рівняння (3 тижні)</p> <p>Особливості застосування універсального та спеціалізованого інструментарію до розв'язування звичайних диференціальних рівнянь та ілюстрації його розв'язку.</p>
11.	<p>Елементи комбінаторики (4 тижні)</p> <p>Визначення набору перестановок, кортежів, розміщень та комбінацій (з повтореннями та без); підрахування їх кількості.</p>
12.	Захист проекту

Кожен навчальний модуль включає типові структурні компоненти: урок, відеододатки до уроку, глосарій функцій модуля, завдання для практичного виконання, контрольні питання та тестові завдання.

Типові структурні компоненти модуля

Назва	Призначення
<i>Урок</i>	подання навчальних матеріалів, що містять відомості про призначення та особливості застосування функцій SAGE для розв'язування математичних задач стандартного типу
<i>Відеододатки до уроку</i>	унаочнення прикладів застосування функцій SAGE, виконаних за сценарієм відповідного уроку
<i>Глосарій функцій модуля</i>	забезпечення оперативного пошуку відомостей щодо призначення функцій SAGE та ілюстрації допустимих форматів їх застосування
<i>Завдання для практичного виконання</i>	з одного боку – як засіб формування практичних навичок виконання обчислень у системі SAGE, з іншого – як засіб систематичного поточного контролю за успішністю та якістю опанування навчальним матеріалом
<i>Контрольні питання</i> <i>Тестові завдання</i>	забезпечення контролю за успішністю засвоєння навчальних матеріалів

Подання уроку у форматі опублікованого sws-файла системи SAGE (рис. 4.4) дає змогу учневі в процесі ознайомлення з навчальним матеріалом, перевірити виконуваність програмних кодів системи, не витрачаючи час на операції копіювання.

УРОК 4.1

Тема. SAGE: перетворення виразів.
Мета: засвоїти особливості застосування функцій SAGE для перетворення виразів.

- [1. Зведення подібних членів у виразі.](#)
- [2. Розкриття дужок у виразі.](#)
- [3. Розкладання многочлена на множники.](#)

Для виконання основних операцій перетворення виразів, а саме зведення подібних членів, розкриття дужок та розкладання на множники, у SAGE передбачено такі функції `simplify()`, `expand()` та `factor()` відповідно.

1. Зведення подібних членів у виразі. Для виконання дії зведення подібних членів у виразі у середовищі SAGE може бути застосована функція `simplify()`. При цьому, вираз, що підлягає спрощенню, вказується як параметр даної функції:

```
simplify(2*x^2-3*x+11*x^3-9*x^2+7*x^4)
7x4 + 11x3 - 7x2 - 3x
```

```
var('x,y')
simplify(2*x^2*y-3*y+11*x^3-9*x^2*y+7*x^4)
-7x2y - 3y + 7x4 + 11x3
```

Наведені приклади демонструють лише один із способів застосування функції `simplify()`, а саме: вираз, який підлягає спрощенню, вказується як параметр функції `simplify()`. Даний спосіб є загальноприйнятним, оскільки має місце і в ряді інших систем комп'ютерної математики.

Рис. 4.4. Фрагмент дистанційного уроку до модуля «Перетворення виразів»

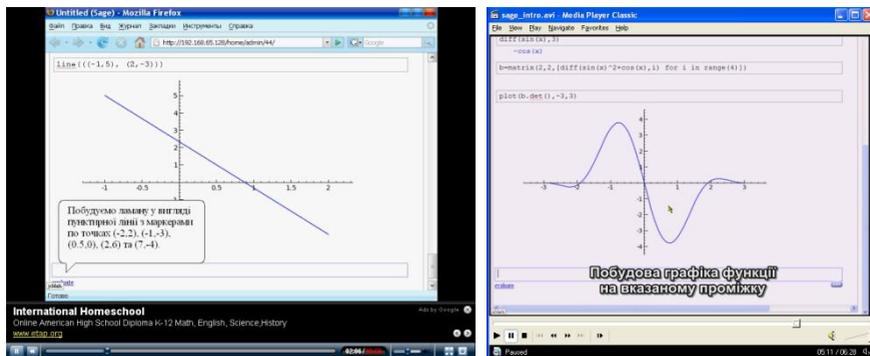
Після ознайомлення з навчальним матеріалом у текстовому форматі учням пропонується закріпити нові знання і переглянути *відеододатки до уроку*. Подання відеоматеріалів у різних форматах (відеофайл та потокове відео) зумовлено тим, що для кожного з них можна зазначити і переваги, і недоліки їх використання при організації дистанційного навчання (див. табл. 4.3).

Таблиця 4.3.

Відеофайл	
Переваги	Недоліки
виконавши єдиний раз експортування відеоресурсу, доступ до його перегляду не регламентується доступом до мережі та серверу дистанційного курсу	добір програмних засобів (відеопрогравача, відеокодеків) для адекватного перегляду навчального відео може стати проблемою для необізнаного в даному питанні учня
Потокове відео	
Переваги	Недоліки
відсутність проблеми добору програмного забезпечення для адекватного перегляду	доступ до перегляду потокового відео регламентується доступом до мережі та серверу дистанційного курсу

Для організації диференційованого навчання завдання для *практичного виконання* надаються учням трьох рівнів складності.

Виконуючи завдання першого рівня, учні мають засвоїти основні прийоми роботи з об'єктами системи та системою взагалі, правила застосування функцій системи та продемонструвати набуті знання для розв'язування завдань за зразком.



а)

б)

Рис. 4.5. Фрагменти відеододатків до модуля «Графічні операції в SAGE» (а) потокове відео, б) відео в аві-форматі)

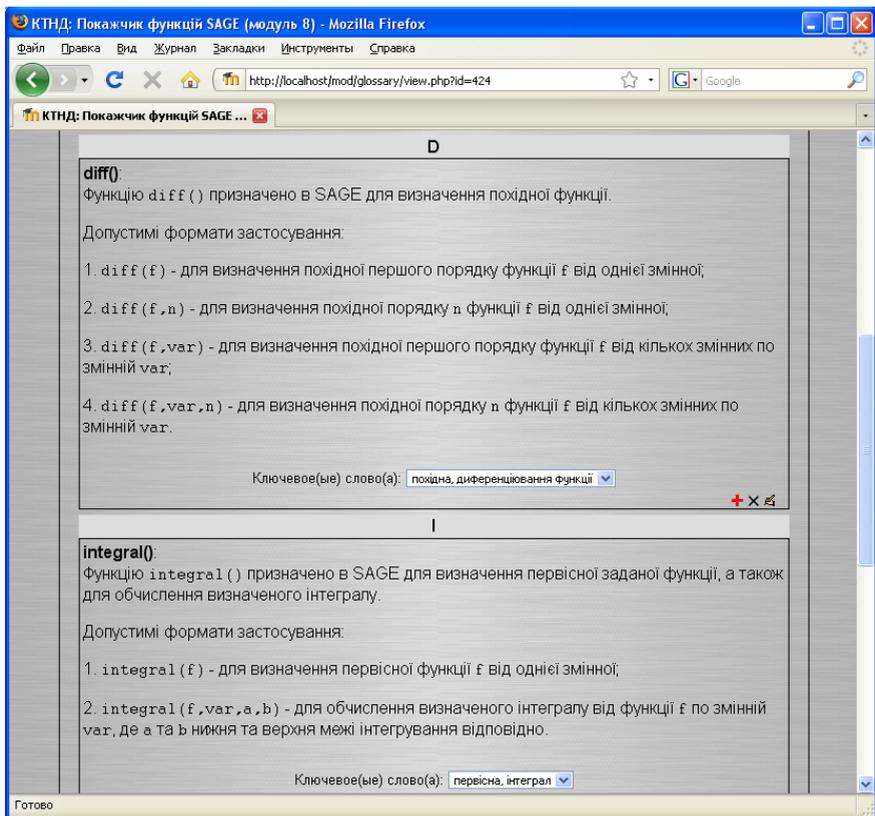


Рис. 4.5. Фрагмент глосарія до модуля «Операції математичного аналізу»

Завдання другого рівня укладені таким чином, щоб учень міг самостійно застосовувати набуті знання в стандартних ситуаціях, використовувати інструментарій системи для розв'язування задач, загальна методика і послідовність розв'язування яких йому знайомі, але умови задач переформульовані.

На третьому рівні учням пропонуються завдання, виконання яких дозволяє перевірити здатність учня самостійно орієнтуватися в нових для нього ситуаціях, уміння скласти план дій і виконувати його, пропонувати новий, невідомий йому раніше інструментарій для розв'язування задач і самостійно орієнтуватися в нових для нього ситуаціях.

Наведемо приклади рівневих завдань до модуля «Операції математичного аналізу» (символам * та ** позначені завдання другого та третього рівня складності позначені відповідно).

1. Обчислити границю: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 3n^2 + 44}{6n^2 - 3n + 7}$; б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{2 - \sqrt{x - 3}}$.

2. Знайти похідну функції: а) $y = (6x^5 - 2x)^8$; б) $y = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$; в) $y = \sqrt{\operatorname{tg} 2x}$.

3. Обчислити значення похідної функції $f(x) = \frac{3x^2 - 7}{\sqrt{2x - 3}}$ в точці $x_0 = 2$.

4. Знайти невизначений інтеграл: а) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x - \sqrt[3]{x^2}}}$.

5. Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^{\pi/2} \left(3 \cos 3x + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \right) dx$.

6*. Довести, що функція $f(x) = 3x - 1$ неперервна в точці $x_0 = 2$.

7*. Для функції $f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 7$ знайти первісну, графік якої проходить через точку $A(1; -4)$.

8*. Знайти суму коренів рівняння $f(x) + 4f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$.

9*. Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 4 - x^2$ та прямою $y = 2 - x$.

10*. Знайти кутівий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x - 2$ в точці $x_0 = -2$.

11*. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = \frac{x^2 + 7x}{x - 9}$ на проміжку $[-4; 1]$.

12*. Дослідити функцію $f(x) = 2x^2 - x^4 - 1$ та побудувати її графік.

13**. Обчислити наближено та порівняти результат з точним значенням:

а) $\frac{(1,05)^3 - (0,89)^4}{(4,1)^5}$; б) $\sqrt[3]{0,988}$.

14**. Знайти похилі та горизонтальні асимптоти кривої $(y - x)x^4 + 8 = 0$. Виконати побудову.

15**. Знайти, при яких значеннях a зростає на \mathbf{R} функція $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{(2a^2 + 1)x^2}{2} + 2ax + a - 3$.

16**. Знайти роботу, необхідну для запуску ракети вагою \mathbf{P} з поверхні Землі вертикально вгору на висоту \mathbf{h} .

17**. При яких значеннях \mathbf{b} і \mathbf{c} парабола $y = x^2 + bx + c$ дотикається прямої $y = 3x - 1$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$? Виконати побудову.

18*. Точка рухається за законом $x(t) = 3t^2 - 5t + 8$ (час t вимірюється в секундах (s), переміщення x - в метрах (m)). Знайти швидкість руху в момент часу $t = 4$.

19** .Визначити масу кулі радіуса r , якщо її густина в кожній точці пропорційна до відстані від центра кулі.

20** . Яку мінімальну роботу треба виконати, щоб насипати купу піску у формі конуса висотою H і радіусом основи R ? Густина піску дорівнює ρ . Пісок піднімають з площини основи конуса.

Рівневі завдання для практичного виконання пропонуються учням як елементи курсу СДН MOODLE, результати виконання яких надсилаються учнями на сервер дистанційного курсу у вигляді sws-файлів та оцінюються вчителем згідно з критеріями, наведеними у таблиці 4.4.

Таблиця 4.4.

**Критерії оцінювання рівня навчальних досягнень учнів
з дистанційного факультативу
«Комп'ютерні технології у наукових дослідженнях»**

Рівні навчальних досягнень	Бали	Критерії оцінювання
I. Початковий	1	Учень має уявлення про системи комп'ютерної математики (СКМ) та їх призначення.
	2	Учень має початкові знання про СКМ, наводить приклади програм даного класу, називає характерні задачі, які можна розв'язувати за допомогою СКМ.
	3	Учень має уявлення про мережні системи комп'ютерної математики (Web-СКМ), виділяє суттєві ознаки програм даного класу; вміє виконати звернення до Web-сервера СКМ.
II. Середній	4	Учень вміє організувати елементарні обчислення без застосування спеціальних функцій Web-СКМ; вміє додавати нові командні рядки та вилучати зайві; має початкові знання про введення команд та їх редагування; вміє отримати контекстну довідку з конкретної функції.
	5	Учень вміє створити новий робочий аркуш для організації обчислень, виконує операції копіювання та перейменування аркуша, вміє імпортувати аркуші з довільних носіїв до власного блоку та зберігати аркуші у спеціальному форматі.
	6	Учень володіє основними навичками роботи у середовищі Web-СКМ; виконує завдання першого рівня складності.
III. Достатній	7	Учень самостійно використовує функції Web-СКМ як у звичному форматі, так і при об'єктному зверненні; вміє організувати виведення результатів у природній математичній формі в окремо взятих полях та на робочому аркуші в цілому; вміє аварійно перервати процес обчислень; має уявлен-

Рівні навчальних досягнень	Бали	Критерії оцінювання
		ня про особливості програмування у середовищі Web-СКМ; знає призначення режиму редагування аркуша та основні прийоми редагування.
	8	Учень самостійно вміє організувати роботу з робочим аркушем у режимі редагування; має початкові знання про призначення мови LaTeX, за допомогою вчителя використовує основні команди LaTeX для коментування результатів обчислень.
	9	Учень вільно володіє навичками роботи у середовищі Web-СКМ в основному режимі – режимі організації обчислень та в режимі редагування; виконує завдання другого рівня складності; має початкові знання про основні прийоми програмування у середовищі Web-СКМ.
IV. Високий	10	Учень досконало знає і використовує інструментарій Web-СКМ (в межах навчальної програми курсу). Самостійно виконує завдання третього рівня складності.
	11	Учень знаходить і використовує додаткові джерела навчальних матеріалів; має уявлення про організацію обчислень засобами інших СКМ у середовищі Web-інтегратора.
	12	Учень має стійкі системні знання про Web-СКМ та продуктивно їх використовує. У процесі виконання завдань проявляє творчий підхід; використовує основні прийоми програмування для розробки програм з елементами управління.

З метою організації оперативного зворотного зв'язку між вчителем та учнем до кожного з модулів курсу включено елементи для організації синхронного та асинхронного режиму спілкування між учасниками навчального процесу - *Чат* і *Форум* відповідно. Перегляд стрічок чату та форумів дозволяє вчителю якісно підготуватися до проведення очної консультації з учнями. Це дає змогу виявити поточні проблеми в роботі над курсом, причину їх появи, з'ясувати їх глибину та підготувати рекомендації для їх вирішення. Таким чином, мають місце як фронтальні консультації із залученням до вирішення наявних проблем всієї групи учнів, які проходять навчання за курсом, так і індивідуальні консультації.

На завершальному етапі навчання за програмою факультативу учням пропонувалося взяти участь у *дослідницьких проектах* міжпредметного характеру.

Окрім того, що робота над дослідницьким проектом є формою узагальнення та систематизації знань учня щодо розв'язування математич-

них задач засобами Web-СКМ, такий вид роботи сприяє комплексному вдосконаленню умінь учня добирати корисні матеріали, звертаючись до послуг Інтернет, опрацьовувати текстові і графічні дані, готувати якісні Web-публікації у гіпертекстовому форматі засобами HTML, а також застосовувати елементи об'єктно-орієнтованого програмування для розробки демонстраційних програм.

Учням, які засвоїли навчальний матеріал факультативу на високому рівні у повному обсязі, виконали всі етапи навчального проектування у відповідності до поставлених вимог, оцінка за роботу над проектом може бути зарахована (за бажанням учня) як оцінка з державної підсумкової атестації з інформатики у відповідності до Листа МОН [24]. У Листі зазначається, що державна підсумкова атестація з інформатики може проводитися усно (за білетами), у тестовій формі (бланкове або комп'ютерне тестування) чи у формі захисту творчих робіт зі створення програмного засобу підтримки навчально-виховного процесу.

Атестація за результатами захисту творчих робіт зі створення програмного засобу підтримки навчально-виховного процесу сприяє: набуттю учнями особистого і професійного досвіду в процесі навчання нестандартними засобами; розвитку пізнавальних, творчих навичок; виробленню прагнення і вмінь самостійно здобувати та використовувати отримані знання; розвитку логічного та критичного мислення.

Виходячи з переліку допустимих напрямів творчих робіт, в якості логічного завершення вивчення факультативу «Комп'ютерні технології у наукових дослідженнях» учням пропонується взяти участь у дослідницьких проектах переважно за двома напрямками – автоматизація наукових досліджень та розрахунків і демонстраційні програми підтримки навчання окремих розділів шкільної математики та інформатики. Тематика проектів подана в таблиці 4.5.

Ефективність розроблених компонентів методики організації самостійної роботи старшокласників з вивчення програмного забезпечення математичного призначення із застосуванням засобів технологій дистанційного навчання підтверджена результатами педагогічного експерименту.

Контрольні питання і завдання

1. Зареєструватися на курсі «Комп'ютерні технології у наукових дослідженнях» за адресою <http://cc.ninehub.com/>.

2. Заповнити вхідну анкету до курсу та слідуючи інструктивно-методичним рекомендаціям з курсу, стати активним учасником дистанційного навчального процесу з опанування можливостей використання інструментарію SAGE для розв'язування математичних задач; рівень засвоєння навчального матеріалу обрати самостійно; тему дослідницького проекту узгодити з викладачем.

Таблиця 4.5.

Перелік тем дослідницьких проєктів

№	Тема проєкту
1.	Розробка програми для демонстрації виконання операцій перетворення виразів
2.	Розробка програми для демонстрації методів наближених обчислень визначеного інтегралу (за формулами прямокутників, трапецій та Сімпсона) у середовищі SAGE (рис. 4.6)
3.	Розробка програми для демонстрації фігур Ліссажу засобами SAGE
4.	Розробка наочностей з теми «Границя функції і неперервність функції. Точки розриву, їх класифікація»
5.	Автоматизація досліджень і побудови графіків циклоїдальних кривих
6.	Розробка програми для демонстрації пошуку наближених значень коренів трансцендентних рівнянь (рис. 4.7)
7.	Розробка власної бібліотеки комбінаторних функцій засобами SAGE
8.	Розробка програми для демонстрації розв'язування комбінаторних задач у середовищі SAGE
9.	Розв'язування геометричних задач засобами GeoGebra у середовищі SAGE (рис. 4.8)
10.	Розв'язування геометричних задач засобами The Geometer's Sketchpad у середовищі SAGE
11.	Побудова фрактальних об'єктів засобами Maxima у середовищі SAGE
12.	Розв'язування задач апроксимації засобами Maple та Mathematica у середовищі SAGE (додаток Г)

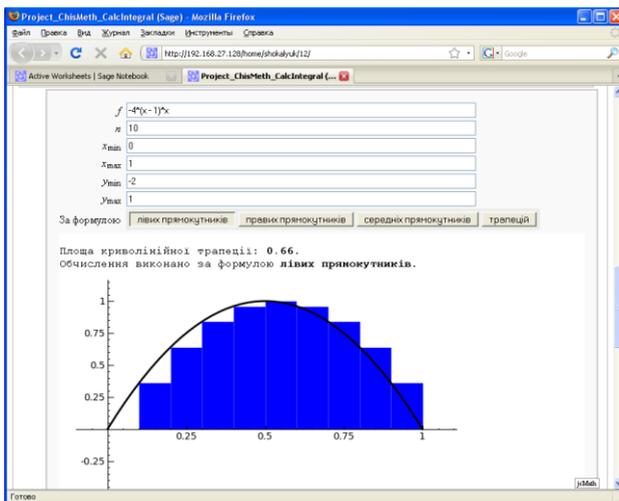


Рис. 4.6. Фрагмент реалізації проєкту
«Розробка програми для демонстрації методів наближених обчислень
визначеного інтегралу у середовищі SAGE»

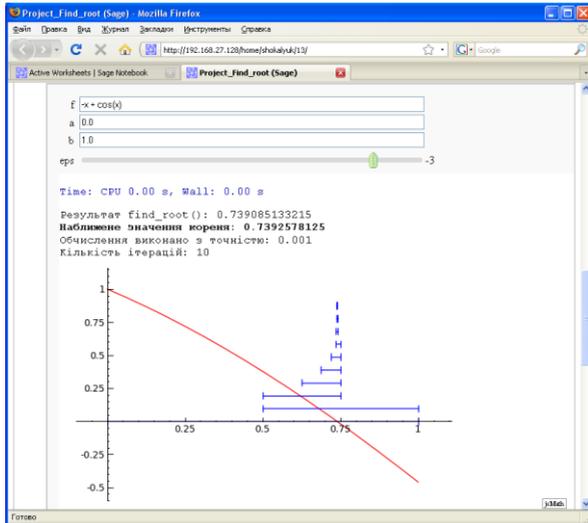


Рис. 4.7. Фрагмент реалізації проекту «Розробка програми для демонстрації пошуку наближених значень коренів трансцендентних рівнянь»

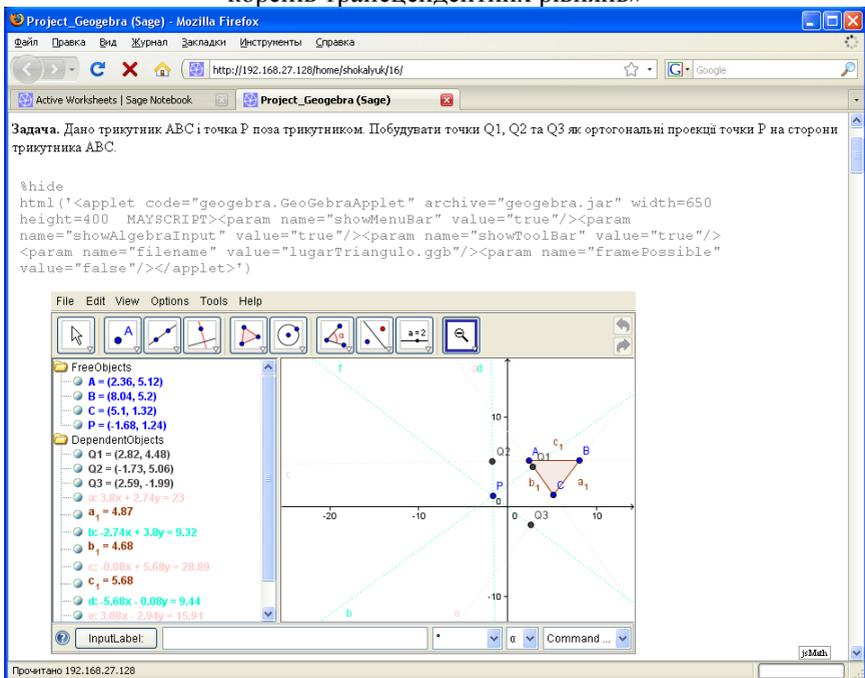


Рис. 4.8. Фрагмент реалізації проекту «Розв’язування геометричних задач засобами GeoGebra у середовищі SAGE»

Висновки до четвертого розділу

1. Поява нового класу програмного забезпечення для розв'язання математичних задач – мережних систем комп'ютерної математики – створює умови для організації якісного дистанційного навчання інформаційних технологій математичного призначення.

2. Дослідження з математики доцільно організувати таким чином, щоб проведення та презентація учнівських математичних досліджень були виконані у єдиному динамічному мережному навчальному Web-середовищі. Такі можливості надає безкоштовна програма SAGE, яка у 2007 році на міжнародних змаганнях була визнана найкращим програмним засобом з відкритим кодом у категорії «Наукове програмне забезпечення».

3. Одночасне вивчення можливостей декількох систем комп'ютерної математики в межах одного середовища, як це пропонує SAGE, є умовою обґрунтованого вибору адекватного до поставленої задачі засобу дослідження.

Література до розділів 3, 4

1. Аванесов В. С. Дистантное обучение. Теория и методика педагогических измерений [Електронний ресурс] / В. С. Аванесов / Режим доступу : <http://testolog.narod.ru/Theory19.html>
2. Андреев А. А. Дистанционное обучение : сущность, технология, организация / А. А. Андреев, В. И. Солдаткин – М. : Изд-во МЭСИ, 1999. – 196 с.
3. Андрианова Г. А. Виды учебной деятельности школьников в дистанционном обучении [Електронний ресурс] / Г. А. Андрианова // Интернет-журнал "Эйдос". – 2004. – Режим доступу : <http://www.eidos.ru/journal/2001/0516.htm>
4. Биков В. Ю. Дистанційний навчальний процес / В. Ю. Биков, В. М. Кухаренко – К. : Міленіум, 2005. – 292 с.
5. Гриценко В. И. Дистанционное обучение: теория и практика / [В. И. Гриценко, С. П. Кудрявцева, В. В. Колос, Е. В. Веренич] – К. : Наукова думка, 2004. – 376 с.
6. Державна національна програма “Освіта. Україна ХХІ століття”. – К. : Райдуга. – 1994. – 61 с.
7. Державна програма «Інформаційні та комунікаційні технології в освіті і науці» на 2006-2010 роки [Електронний ресурс] – Режим доступу : http://www.mon.gov.ua/laws/KMU_1153.doc
8. Євтеєв В. М. Досвід вивчення інтерактивних Web-технологій в середній школі та педагогічному ВНЗ / В. М. Євтеєв, С. О. Семеріков, І. О. Теплицький // Рідна школа. – 2004. – №2. – С. 46–47.
9. Завизена Н. С. Построение гипертекстовых систем на основе Web-технологий / [Н. С. Завизена, А. И. Теплицкий, С. А. Семериков, А. М. Карашук] – Кривой Рог : КПИ, 1999. – 42 с.
10. Закон України «Про національну програму інформатизації» від 4 лютого 1998 р. №74/98-ВР [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.nbuv.gov.ua/law/98_inf.html
11. Зинченко В. П. Дистанционное образование: к постановке проблемы /

- В. П. Зинченко // Педагогика. – 2000. – №2. – С. 23-34.
12. Інтеграція системи MOODLE в єдиний інформаційний простір навчального закладу // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2007. – №5. – С. 36-37.
 13. Ивановский Р. И. Системы компьютерной математики в школе (первый опыт) [Электронный ресурс] / Р. И. Ивановский – Режим доступа : <http://mas.exponenta.ru/Literatura/total.pdf>
 14. Кателл Дж. П. Виртуальное обучение / Дж. П. Кателл // Информатика и образование. – 2002. – №11. – С. 2-16.
 15. Кашицин В. П. Дистанционное обучение в высшей школе: модели и технология / В. П. Кашицин // Педагогическая информатика. – 1997. – №2. – С. 56-61
 16. Кондратенко С. В. Підготовка студентів щодо використання ІКТ у навчальному процесі до впровадження програми „Intel® Навчання для майбутнього” та в рамках експерименту / С. В. Кондратенко // Модернізація освіти: пошуки, проблеми, перспективи: Матеріали міжнародної науково-практичної конференції (Київ – Переяслав-Хмельницький, 22-25 травня 2006 року). – Київ – Переяслав-Хмельницький, 2006. – С. 242–243.
 17. Кондратенко С. В. Формування загальнонавчальних умінь ліцеїстів під час вивчення математики / С. В. Кондратенко // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : Збірник наукових праць. Випуск 3 : В 3-х томах. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2003. – Т.1 : Теорія та методика навчання математики. – С. 123–126.
 18. Концепція розвитку дистанційної освіти в Україні. – Затверджено Постановою МОН України 20 грудня 2000 р. – К. : НТУ «КПІ», 2000. – 12 с.
 19. Крылова Т. В. Проблемы дистанционного обучения математике / Т. В. Крылова, Е. М. Гулеша // Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО–2005), м. Черкаси. – Черкаси : Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2005. – С. 258–259.
 20. Кухаренко В. М. Дистанційне навчання : Умови застосування. Дистанційний курс : навч. посібник / За ред. В.М. Кухаренка, 3-е вид. / В. М. Кухаренко, О. В. Рибалко, Н. Г. Сиротенко – Харків : НТУ «ХП», «Торсінг», 2002. – 320 с.
 21. Кухаренко В. М. Дистанційне навчання школярів / В. М. Кухаренко // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2006. – №4. – С. 23–26.
 22. Кухаренко В. М. Експеримент «Дистанційне навчання для середньої школи» / В. М. Кухаренко // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2007. – №5. – С. 28–31.
 23. Лаврик Т. В. Дистанційне навчання: історичний аспект / Т. В. Лаврик // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : збірник наукових праць. – Випуск VII : В 3-х томах. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2008. – Т. 3 : Теорія та методика навчання інформатики. – С. 15–19.
 24. Лист МОН «Про порядок закінчення навчального року та проведення державної підсумкової атестації у загальноосвітніх навчальних закладах в 2007/2008 навчальному році» [Електронний ресурс] – Режим доступу : http://www.mon.gov.ua/laws/list_1_9_137_08.doc
 25. Маклаков Г. Ю. Проблеми дистанційного навчання / Г. Ю. Маклаков // Інформатика та інформаційні технології в початкових закладах. – 2008. – №1. – С. 102–103.
 26. Морзе Н. В. Дистанційне навчання і технологія співробітництва / Н. В. Морзе // «Інтернет–освіта – наука – 2002», 3-я міжнар. конф. ІОН–2002. Т. 1. – Вінниця : УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2002. – С. 138–140.
 27. Морзе Н. В. Интерактивные методы в дистанционном обучении / Н. В. Морзе // Образование и виртуальность – 2002 [Сборник научных трудов 6-й Межд. конф. УАДО]. – Харьков – Ялта : УАДО, 2002. – С. 307–314.

28. Морзе Н. В. Методика навчання інформатики. Ч. 1. Загальна методика навчання інформатики / Н. В. Морзе – К. : Навчальна книга, 2003. – 254 с.
29. Морзе Н. В. Особливості організації навчального процесу учнів в системі дистанційного навчання / Н. В. Морзе // Наука і сучасність [Зб. наук. праць]. – К. : Логос, 1999. – Випуск № 2. – Ч. 4 (педагогічні науки) – С. 64–71.
30. Морзе Н. В. Використання нових інформаційних технологій при дистанційному навчанні / Н. В. Морзе, П. С. Ухань // Вісник Академії праці і соціальних відносин [Зб. наук. праць]. – К. : Курс, 1999. – №1. – С. 128–139.
31. Наказ Міністерства освіти і науки України (від 21 січня 2004 р. №40) Про затвердження «Положення про дистанційне навчання» [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://zakon.rada.gov.ua/>
32. Овчарук О. В. Відкрита освіта та дистанційне навчання за рубежом: сучасні тенденції та їх вплив на процеси модернізації освітньої галузі / О. В. Овчарук // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2007. – №2. – С. 46–49.
33. Олійник В. В. Дистанційна освіта за кордоном та в Україні: стислий аналітичний огляд / В. Олійник // Директор школи, ліцею, гімназії. – 2002. – №3. – С. 42–51.
34. Полат Е. С. Педагогические технологии дистанционного обучения : учебное пособие для студ. высш. учеб. заведений / Е. С. Полат, М. В. Моисеева, А. Е. Петров и др. [Под ред. Полат Е. С.] – М. : Издательский центр «Академия», 2006. – 400 с.
35. Полат Е. С. Дистанционное обучение / Е. С. Полат, М. В. Моисеева – М. : Владос, 1998. – 192 с.
36. Полат Е. С. Теория и практика дистанционного обучения / Е. С. Полат // Информатика и образование. – 2001. – №5. – С. 37–42.
37. Попадьяна С. Ю. Исследовательская работа по алгебре с использованием системы компьютерной математики и средства ее реализации в основной и средней школе [Електронний ресурс] / С. Ю. Попадьяна – Режим доступу : www.ict.edu.ru/ft/005185/bytic-2006.pdf
38. Постанова Кабінету Міністрів України (від 23 вересня 2003 р. №1494 м. Київ) Про затвердження «Програми розвитку системи дистанційного навчання» на 2004-2006 роки [Електронний ресурс] – Режим доступу : <http://zakon.rada.gov.ua>
39. Проект «Ліцензійні умови надання освітніх послуг у сфері вищої освіти за дистанційною формою навчання» (від 21 червня 2005 р.). [Електронний ресурс] – Режим доступу : http://ubgd.lviv.ua/UA/zaochka/Lab_SITE/doclym/licenz.htm
40. Рафальська М. В. Комп'ютерні технології у навчанні математики [Електронний ресурс] / М. В. Рафальська – Режим доступу : http://www.donnu.edu.ua/mf/heuristic/dist_conf/Rafalska%20M.pdf
41. Сабанов С. О. Інтеграція системи MOODLE в єдиний інформаційний простір навчального закладу / С. О. Сабанов // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2007. – №5. – С. 36–37.
42. Семенов М. А. Як підготувати дистанційний курс [Методичні поради] / М. А. Семенов, Л. М. Кутепова – Луганськ : ЛДПУ, 2003. – 28 с.
43. Семеріков С. О. Нові засоби дистанційного навчання інформаційних технологій математичного призначення / С. О. Семеріков, І. О. Теплицький, С. В. Шокалюк // Вісник. Тестування і моніторинг в освіті. – 2008. – №2. – С. 42–50.
44. Смирнова-Трибульська Є. М. Дистанційне навчання з використанням системи MOODLE [Навчально-методичний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів] / Є. М. Смирнова-Трибульська / Науковий редактор : д.пед.наук, академік АПН України, проф., М. І. Жалдак. – Херсон : Айлант, 2007. – 492 с.

45. Смирнова-Трибульска Є. М. Досвід використання дистанційного навчання в школі / Є. М. Смирнова-Трибульска, В. В. Сташенко // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2007. – №7. – С. 19–23.
46. Смирнова-Трибульска Е. Н. Основы формирования информатических компетентностей учителей в области дистанционного обучения. [Монография] / Смирнова-Трибульска Евгения Николаевна. / Научный редактор : академик АПН Украины, д.пед.наук, проф., М. И. Жалдак. – Херсон : Айлант, 2007. – 704 с.
47. Смирнова-Трибульска Е. Теоретические и практические аспекты использования в образовании информатических средств Open Source [Электронный ресурс] / Е. Смирнова-Трибульска, Р. Копочек, Д. Виллманн // Интернет-журнал «Эйдос». – 2005. – Режим доступа : <http://www.eidos.ru/journal/2005/0910-14.htm>
48. Сташенко В. Використання технології дистанційного навчання у школі / В. Сташенко // Інформатика та інформаційні технології в початкових закладах. – 2007. – №6. – С. 58–60.
49. Тавгень И. А. Дистанционное обучение: опыт, проблемы, перспективы / И. А. Тавгень – Минск : Изд-во БГУ, 2003. – 218 с.
50. Триус Ю. В. Віртуальне середовище для дистанційного навчання в Internet / Ю. В. Триус, А. П. Мещеряков, Н. О. Коваль // Комп'ютерне моделювання та інформаційні технології в науці, економіці та освіті : Збірник наукових праць – Черкаси : Брама ІСУЕП, 2003. – С. 161–165.
51. Холина Л. И. Дидактические принципы дистанционного обучения / Л. И. Холина, Э. Г. Скибицкий // Новые информационные технологии в университетском образовании : сб. науч. тр. – Новосибирск : Изд-во НИИ МИОО НГУ, 1998. – С. 193–194.
52. Хортон У. Электронное обучение : инструменты и технологии / У. Хортон, К. Хортон [Пер. с англ.] – М. : Кудиц-Образ, 2005. – 264 с.
53. Хуторской А. В. Дистанционное обучение и его технологии [Электронный ресурс] / А. В. Хуторской // Интернет-журнал «Эйдос». – 2005. – Режим доступа : <http://www.eidos.ru/journal/2005/0910-18.htm>.
54. Хуторской А. В. Интернет в школе [Практикум по дистанционному обучению] / А. В. Хуторской – М. : ИОСО РАО, 2000. – 304 с.
55. Шокалюк С. В. Застосування СДН Moodle для навчання комп'ютерної алгебри / С. В. Шокалюк // Міжвузівська науково-практична конференція «Актуальні проблеми технічних, природничих та соціально-гуманітарних наук в забезпеченні цивільного захисту» (3 квітня 2008 року) : Тези доповідей. – Черкаси : АПБ ім. Героїв Чорнобиля, 2008. – С. 56.
56. Шокалюк С.В. Основи роботи в SAGE / Світлана Вікторівна Шокалюк // за ред. академіка АПН України М. І. Жалдака. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2008. – 64 с.
57. Шокалюк С. В. Програмна підтримка навчальних математичних досліджень засобами систем дистанційного навчання / С. В. Шокалюк // Комп'ютерне моделювання та інформаційні технології в науці економіці та освіті : збірник наукових праць. – Відповід. ред. проф. В.М. Соловйов. – Кривий Ріг : КЕІ ДВНЗ „КНЕУ ім. В. Гетьмана”, 2007. – С. 208–210.
58. Dewey, J. Democracy And Education: An Introduction to the Philosophy of Education / Dewey, J.. – New York : Free Press, 1997. – 384 p.
59. Doudiamas, M. MOODLE: Using Learning Communities to Create an Open Source Course Management System / Doudiamas, M. and Taylor, P.C. // Proceedings of the EDMEDIA 2003 Conference, Honolulu, Hawaii.
60. Doudiamas, M. Importing the effectiveness of tools for Internet-based education /

- Dougiamas, M. and Taylor, P.C. // Teaching and Learning Forum 2000, Curtin University of Technology.
61. Dougiamas, M. Interpretive analysis of an internet-based course constructed using a new courseware tool called MOODLE / Dougiamas, M. and Taylor, P.C. // Proceeding of the Higher Education Research and Development Society of Australasia (HERDSA) 2002 Conference, Perth, Western Australia.
 62. Georgiev T. M-learning – a New Stage of E-Learning / Georgiev T., Georgieva E., Smrikarov A. // Proceedings of the 5th International Conference on Computer Systems and Technologies – CompSysTech'2004. – Rousse, 2004. – Pp. IV.28-1 – IV.28-5.
 63. Granville, W.A. Differential Calculus and SAGE / Granville, W.A. – 2008. – X+275 p.
 64. Stein, W. Sage Reference Manual. Release 4.1 / Stein, W. and The Sage Development Team. – July 10, 2009. – XII+3677 p.
 65. Stein, W. Sage Tutorial : www.sagemath.org / Stein, W. – CreateSpace, 2008. – 100 p.
 66. <http://dl.kpi.kharkov.ua> – сайт проблемної лабораторії дистанційного навчання НТУ „ХПІ”
 67. <http://dstudy.ru/> – Все о дистанционном обучении
 68. <http://ostriv.in.ua/> – Шкільний Інтернет-портал «Острів знань»
 69. <http://udec.ntu-kpi.kiev.ua> – сайт Українського центру дистанційної освіти при НТТУ „КПІ”
 70. <http://www.college.ru/> – портал «Открытый Колледж»
 71. <http://www.dl.com.ua> – сайт центру впровадження систем електронного навчання Київського університету імені Тараса Шевченка
 72. <http://www.km-school.ru/> – «КМ-школа»
 73. <http://www.osvita.org.ua/> – освітній портал України
 74. <http://www.sagemath.org/> – офіційний сайт системи SAGE
 75. <http://www.school.ed.net.ua/> – Всеукраїнський шкільний портал
 76. <http://www.teleschool.ru/> – Інтернет-школа «Просвещение.ру» («Телешкола»)

РОЗДІЛ 5. ПЕРСПЕКТИВИ РОЗВИТКУ ТЕХНОЛОГІЙ: ВІД ЕЛЕКТРОННОГО НАВЧАННЯ ДО МОБІЛЬНОГО

Характерною рисою останнього десятиріччя стало активне використання засобів мобільного зв'язку та різноманітних електронних пристроїв. Сучасний мобільний телефон має можливості, що не поступаються комп'ютерам початкового рівня, а в деяких випадках – і середньої потужності. В першу чергу це стосується смартфонів та персональних комунікаторів (КПК із засобами зв'язку). Поширеність серед користувачів мобільного зв'язку смартфонів та персональних комунікаторів, на думку відповідних фахівців, складає біля 10%, і має чітку тенденцію до зростання.

Розвиток інформаційних технологій призвів до появи нового соціального явища – *цифрового бар'єру* (digital divide; інші назви – цифрова нерівність, цифровий поділ): обмеженню можливостей соціальної групи через відсутність в неї доступу до сучасних засобів комунікації, тобто нерівний доступ членів суспільства до ІКТ. Виникнувши в середині 90-х рр., даний термін спочатку характеризував лише можливість доступу до комп'ютерного обладнання, проте згодом став характеризувати інформаційні технології в цілому.

Подолання цифрового бар'єру в системі освіти можливо лише через забезпечення рівного доступу до неї засобами ІКТ, тому цілком природно, що даний напрямок є провідним у вітчизняній методиці навчання математики. Надання закладам освіти засобів сучасних технічних засобів ІКТ створює умови для організації електронного навчання, а їх об'єднання засобами Інтернет – й для організації дистанційного навчання. Водночас поза увагою дослідників залишаються різноманітні електронні пристрої, що не є персональними комп'ютерами, проте за потужністю не поступаються комп'ютерам початкового, а в деяких випадках – і середнього рівня. Це стосується, насамперед, смартфонів та персональних комунікаторів, особливо широко поширених серед учнів старшої школи та студентів. Проте наказом МОН України від 24.05.2007 №420 «Про використання мобільних телефонів під час навчального процесу» заборонено використання мобільних телефонів у загальноосвітніх та професійно-технічних навчальних закладах під час проведення навчальних занять; подібні накази видані й керівниками багатьох ЗВО.

На користь такої заборони наводяться наступні аргументи: «По-перше, наявність телефону дає можливість своєчасно повідомити батькові чи матері про те, що дитина закінчила навчання, та дає можливість оперативного зв'язку дитини з батьками. Але (уявіть ситуацію) коли йде урок і в класі сидить 30 учнів і через кожну хвилину дзвонить мобільний телефон в одного чи іншого учня. Чи можливо в таких умовах проводити повноцінний навчальний процес? По-друге, під час виконання самостійних, контрольних робіт в студентів та учнів часто виникає ідея використовувати мобільний телефон як джерело списування. ... До цих всіх

факторів додається ще одна проблема – більшість школярів користуються телефонами з відеокамерами, і пристроями доступу до мережі Інтернет. Ці телефони перетворюються на засіб поширення юнаками і дівчатами сцен насилля.»

Керівниками багатьох ЗВО також заборонено *використання мобільних телефонів в навчальному процесі*, що призвело до створення унікальної ситуації – офіційної заборони потужного технічного засобу навчання, адже головним аргументом на користь такої заборони є те, що **мобільні пристрої є ефективним засобом ІКТ, не контрольованим викладачем** (мають доступ до Інтернет, можуть бути використані як джерело списування тощо).

На початок 2008 р. в світі нараховувалося більше 1,5 мільярди мобільних телефонів та комунікаторів – майже втричі більше, ніж комп'ютерів. Потужність більшості мобільних пристроїв перевищує потужність персональних комп'ютерів середини 90-х рр., які й досі ефективно використовуються в процесі навчання, тому нехтувати потенціалом цього класу пристроїв лише через організаційні проблеми є, на нашу думку, неприйнятним – так само, як і застосовувати їх без відповідної методики навчання.

Ми визначаємо *мобільне навчання* (mobile learning, M-Learning) як сучасний напрямок розвитку систем дистанційної освіти із застосуванням мобільних телефонів, смартфонів, КПК, електронних книжок. Технологія мобільного навчання передбачає наявність системи дистанційного навчання, яка включає в себе підсистему доступу до локального та віддаленого контенту. В порівнянні з традиційним мобільне навчання надає можливість моніторингу навчання в реальному часі та забезпечує високу насиченість контенту, що дозволяє розглядати його не лише як засіб навчання, а й як інструмент спільної роботи, спрямований на підвищення якості навчання (рис. 5.1).

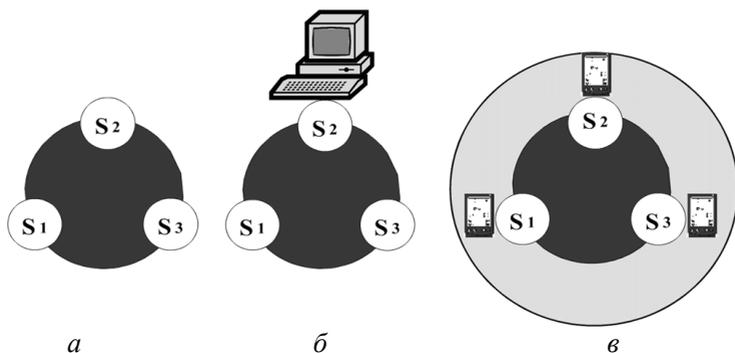


Рис. 5.1. Традиційне, комп'ютерно-орієнтоване та мобільне комп'ютерно-орієнтоване співробітництво

Перша згадка про мобільне навчання зустрічається в роботі Дж. Дьюї «Демократія та освіта» (1916 р.): «Ми побачимо мобільне суспільство, насичене каналами поширення змін, що відбуваються будь-де, лише тоді, коли його члени будуть освічені, ініціативні та адаптивні». За часів Дьюї такими каналами були міграційні потоки, трансатлантичний радіозв'язок і навіть – світова війна, сьогодні таким каналом є, насамперед, Інтернет. Мобільність освіти є принциповою характеристикою єдиного освітнього простору, на формування якого спрямований, зокрема, й Болонський процес.

Свій початок комп'ютеризоване мобільне навчання бере з проекту Dynabook Алана Кея, який наприкінці 50-х рр. працював на Денверській військово-повітряній базі «Рендольф», де писав на машинному кодї програми для ЕОМ Burroughs 220. Саме тоді він стикнувся з проблемою передавання сформованих на цій ЕОМ даних на комп'ютери інших баз. Стандартних форматів та ОС для цих ЕОМ не існувало, тому А. Кею довелося створити мікропрограми, що містили в собі всю необхідну інформацію та після запуску на інших машинах через простий інтерфейс користувача самостійно розгортали необхідні дані. Такі програми А. Кей назвав модулями, які об'єднують дані та код. У 1966 р. він зайнявся науковою діяльністю в галузі молекулярної біології в Університеті штату Колорадо, де запропонував створити системи модулів (об'єктів), що об'єднують дані та алгоритми їх обробки, здатні взаємодіяти один з одним через визначені розробником інтерфейси. При цьому він активно використовував аналогії з біологічними об'єктами та механізмами взаємодії клітин у живому організмі.

Пізніше Алан Кей перейшов до Стенфордської лабораторії штучного інтелекту, а в 1972 р. – у відомий науковий центр Хехох PARC, де й реалізував ці ідеї в новій об'єктній мові Smalltalk (що, до речі, спочатку мала назву Biological System). Саме тоді він запропонував знаменитий термін «об'єктно-орієнтоване програмування» (ООП).

В процесі роботи над Smalltalk А. Кей придумав нову концепцію розробки програмного забезпечення – багатовимірне середовище взаємодії об'єктів з асинхронним обміном повідомленнями. В результаті з'явилась можливість підтримки такого середовища не одним, а багатьма комп'ютерами, об'єднаними в мережу. Працюючи над апаратною реалізацією ООП-системи (проект FLEX (рис. 5.2) – повноцінний персональний комп'ютер, що базувався на об'єктах), Алан Кей вивчав піонерські роботи Сеймура Пейперта та його колег з МІТ з навчання дітей програмуванню мовою Лого. Розробники Лого досліджували дитячі уявлення про графіку та символи, запропонувавши «черепаху», що малювала на планшеті (екрані).

Алан Кей бачив роль персонального комп'ютера як особистісного динамічного середовища (метамедіа), що об'єднувало в собі всі інші середовища: текст, графіку, анімацію і навіть те, що ще не винайдено.

Подальшим розвитком FLEX став проект Dynabook (рис. 5.3) – компактний комп’ютер, легко керований, оснащений клавіатурою чи пером, безпроводною мережею тощо (в сучасних термінах ми можемо назвати Dynabook планшетним портативним комп’ютером). В своїй статті 1972 р. А. Кей визначив ціль проекту як «персональний комп’ютер для дітей будь-якого віку». Smalltalk увібрав у себе багато з даного проекту – в ньому вперше були використані вікна, меню, іконки та маніпулятор «миша». В Smalltalk містяться витoki Microsoft Windows, X Window та MacOS. Інакше кажучи, сучасні інтерфейси користувача еволюціонували паралельно з ООП, а їх формування відбувалося під впливом ідей Л.С. Виготського, Дж. Брунера та С. Пейперта.

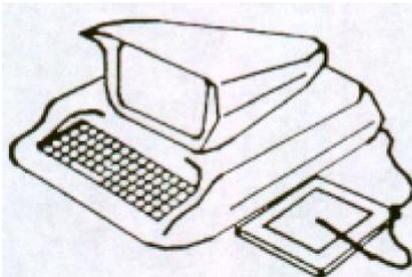


Рис. 5.2. Концепція FLEX

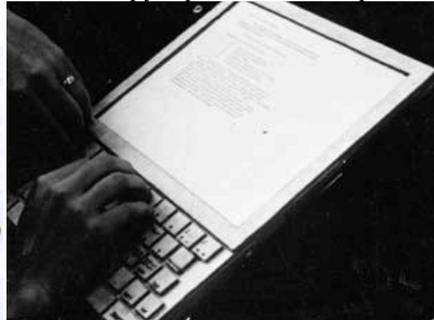


Рис. 5.3. Прототип Dynabook

Сьогодні Алан Кей – активний учасник проекту OLPC (One Laptop Per Child – «Кожній дитині – по ноутбуку»). Незважаючи на високу технологічну досконалість ідей проекту Dynabook – «батька» сучасних мобільних пристроїв, головним в ньому є все ж таки ідея «комп’ютера для навчання», основою якого є особистісна зорієнтованість, висока інтерактивність, навчання через гру, спільне навчання, динамічне моделювання, навчання завжди та всюди.

Еволюцію концепції Dynabook показано у табл. 5.1.

Табл. 5.1.

Еволюція технології та навчальних концепцій

Роки	Апаратура	ПЗ	Мережні засоби	Навчальна концепція
1970-ті	Dynabook Alto	Smalltalk	Arpanet Ethernet	Навчання через відкриття
1980-ті	Xerox Star Apple Lisa Apple Macintosh	C++	TCP/IP Аналоговий стільниковий радіозв’язок	Ситуативне навчання Конструктивістське навчання Навчання у співробітництві
1990-ті	ПК з Windows Ноутбуки	Java	World Wide Web Цифровий стільниковий ра-	Проблемно-орієнтоване навчання Навчання протягом

<i>Роки</i>	<i>Апаратура</i>	<i>ПЗ</i>	<i>Мережні засоби</i>	<i>Навчальна концепція</i>
	КПК		діозв'язок Безпроводні лока- льні мережі	всього життя Соціально- конструктивістське на- вчання
2000- ні	Безпроводні КПК	CORBA	Bluetooth	Неформальне навчання Контекстуальне на- вчання

У 90-х рр. минулого століття в ряді університетів Європи та Азії були розроблені системи мобільного навчання студентів. Значну роль в цьому відіграла піонер КПК – корпорація Palm, яка в рамках проекту PER – Palm Education Pioneers (1999–2002 рр.) виділяла гранти на створення систем мобільного навчання під керуванням PalmOS.

У заключному звіті з проекту були:

- 1) обґрунтовані нові типи навчальної активності, що виникають в процесі застосування КПК;
- 2) визначена роль КПК в тестовому контролі знань учнів;
- 3) сформульовані основні переваги персонального пристрою для навчання – підтримка самостійного навчання, підвищення відповідальності за результати навчання, посилення міжпредметних зв'язків;
- 4) визначені нові форми спільної роботи, в т.ч. – в сфері моделювання;
- 5) показані шляхи інтеграції мобільних та традиційних навчальних технологій.

Незважаючи на штучну прив'язку до використовуваної ОС, в рамках проекту PER були сформульовані практично всі технологічні та педагогічні вимоги до застосування КПК в навчальному процесі.

Цілісна концепція мобільного навчання, запропонована Д. Кіганом у 2001 р., дістала розвиток у роботах Ф. Манг'яваччі, Р. Мейсона, Л. Родіна, М. Рончетті, А. Трифонової та Д. Хойла (2002–2003 рр.).

У 2001 р. Єврокомісія започаткувала проект MOBlearn під керівництвом М. Шарплеса, який сформулював основну ідею проекту – «що навчальне, те – мобільне» – та визначив умови ефективності мобільного навчання:

- 1) конструктивність: навчання є конструктивним процесом пошуку розв'язання задач, що веде до утворення нового досвіду;
- 2) інтеріоризація результатів навчання;
- 3) діалектичність процесу контролю та відображення результатів навчальної діяльності у свідомості її суб'єкта.

В 2002 р. в Канаді створено Консорціум мобільного навчання (The m-Learning Consortium), а в Австралії – державний стандарт на мобільне навчання. В дисертації Фенг-Хуан Ю Янга (2003 р.) запропонована архітектура розподіленої системи мобільного навчання. Нарешті, у 2004 р. корпорацією Intel було розпочато проект «Навчання завжди та всюди», метою якого є надання кожному з учнів персонального доступу до мобільних комп'ютерних пристроїв та забезпечення безпроводного зв'язку у школах.

Серед вітчизняних дослідників мобільного навчання слід відзначити М.А. Григор'єву, яка у 2004 р. запропонувала програму навчального курсу «Застосування мобільних освітніх систем» для студентів педвузів, та І.Є. Мазурка, який у 2005 р. дослідив можливості застосування мобільних пристроїв у школі.

В літературі пропонуються різні визначення мобільного навчання, спільним в яких є те, що за цієї технології навчання фізичне з'єднання з кабельною мережею є непотрібним. Мобільне навчання є, з одного боку, різновидом дистанційного навчання, а з іншого – електронного (рис. 5.4). У порівнянні з електронним та дистанційним навчанням мобільне надає суб'єкту навчання більшу кількість «ступенів вільності» – вищу інтерактивність, більшу свободу руху, більшу кількість технічних засобів, основними з яких є UMPC – ультрамобільні ПК (Intel Classmate, Asus EEE), Tablet PC – планшетні ПК, надпортативні ноутбуки, PDA (персональні цифрові помічники), аудіопрогравачі з можливістю запису та прослуховування лекцій, мультимедійні пугівники по музеях, мультимедійні ігрові консолі, електронні книжки, мобільні телефони, смартфони та багато інших.



Рис. 5.4. Співвідношення електронного, дистанційного та мобільного навчання

Табл. 5.2.

Порівняльний аналіз електронного та мобільного навчання

Електронне навчання	Мобільне навчання
<i>Навчальний процес</i>	
більша частина навчальних матеріалів – текстові та графічні	навчальні матеріали – текстові, графічні, голосові
<i>Взаємодія між викладачем та студентом</i>	
за допомогою електронної пошти з втратами часу на регулярну перевірку пошти	миттєве повідомлення про отримання електронної пошти
асинхронна пасивна комунікація	синхронна миттєва активна комунікація
	інтерактивність

Електронне навчання	Мобільне навчання
	спонтанність
<i>Комунікація між студентами</i>	
безпосередня	безпосередня та опосередкована
через e-mail	через e-mail, SMS, MMS
в окремому приміщенні	миттєва, завжди
через точку доступу до Інтернет	без точки доступу до Інтернет
проблема організації позааудиторної роботи в групах	без географічних обмежень з використанням усіх засобів ІКТ
<i>Зворотний зв'язок зі студентами</i>	
опосередкований через електронну пошту, Web-сайти (форуми, чати тощо)	прямий через мобільні пристрої
асинхронний	синхронний та асинхронний
розподілений у часі	в реальному часі та у зручному режимі
документально оформлений	частково задокументований
<i>Оцінювання та контроль знань</i>	
в аудиторії	в будь-якому місці
у визначений час	будь-коли
обмежений в часі	без обмежень в часі
стандартний тестовий	індивідуалізований (адаптований) тестовий
поганий зворотний зв'язок	насичений зворотний зв'язок
відкладений зворотний зв'язок	миттєвий зворотний зв'язок
тести фіксованої довжини	змінна довжина тесту/час на відповідь
тести та задачі переважно текстові	тести мультимедійні
<i>Подання навчального матеріалу</i>	
застосування однієї мови	автоматичне подання матеріалу різними мовами
класно-урочне подання навчального матеріалу	індивідуальне подання матеріалу з розвиненими засобами комунікації
індивідуалізована, компонентно-орієнтована робота в групі	одночасна спільна робота в групі
отримання результатів іспитів та контролю знань в твердій копії у визначений час	отримання результатів контролю знань в електронному вигляді у будь-який момент часу

Операційні системи та ПЗ персональних та планшетних комп'ютерів не відрізняються від відповідних засобів ПК. КПК та смартфони працюють переважно під керуванням ОС Windows Mobile, що містить такі стандартні додатки, як календар, контакти, голосовий запис, текстовий редактор, електронні таблиці, Pocket Internet Explorer, WindowsMedia Player 9, клієнти VPN, обміну повідомленнями, термінали тощо.

Переваги мобільного навчання у порівнянні з електронним та дис-

танційним: можливість навчання будь-де і будь-коли, нижча ціна мобільних пристроїв у порівнянні з ПК, менші розміри та вага, актуалізація навчання через «моду» на пристрої, підвищена інтерактивність навчання, зручність, портативність, розвинені засоби співробітництва, безперервний доступ до навчальних матеріалів.

Технічно реалізація мобільного навчання можлива у декількох варіантах:

а) WAP-інтерфейс;

б) клієнт-серверна система на основі однієї з систем дистанційного навчання;

в) статичні та динамічні Java-додатки (в т.ч. на основі технології Google Android).

У 2006-2007 н.р. нами проводився педагогічний експеримент із впровадження елементів мобільного навчання математики у старших класах шкіл нового типу м. Кривого Рогу. На початку експерименту в якості платформи для організації дистанційного навчання були обрані персональні комунікатори з операційною системою на основі Windows CE (WinCE, відомою також як Windows Mobile), що має розвинені засоби розробки та широку підтримку серед виробників. Вибір персональних комунікаторів базується на їхній зростаючій поширеності серед учнівської та студентської молоді, ефективних комунікаційних засобах та наявності стандартного ПЗ для роботи з документами в різних форматах.

Стандартне ПЗ КПК не включає систем комп'ютерної математики (СКМ), які інколи вважають занадто «важкими» для даного класу пристроїв. Проте багаторічний досвід експлуатації інженерних калькуляторів з СКМ Derive (класу TI-Nspire CAS) показує її ефективну роботу при суттєво менших обчислювальних ресурсах, ніж ті, що наявні на сучасних КПК.

Тому проблему практично повної відсутності СКМ для WinCE ми почали розв'язувати, саме спираючись на обчислювальні потужності КПК – шляхом запуску ПЗ, розробленого для MS DOS, під керуванням відповідного емулятора цієї операційної системи. Хоча застосовані нами DOS-версії Derive 1.53 та MathCAD 2.5 (рис. 5.5) і були випущені більше десяти років тому, вважати застарілими їх лише через це не варто: символне ядро цих систем було розроблено вже давно і за останні роки суттєво не змінилося, тому як наукова, так і освітня цінність цих систем не була втрачена лише тому, що MS DOS відійшла у минуле. КПК дають друге життя цим компактним та ефективним системам.

В якості мобільної СКМ нами було обрано вільно поширювану систему Maxima. Наявний WinCE-порт цієї системи не розвивається з 2001 р. та не задовольняє сучасним вимогам до ергономіки інтерфейсу користувача (реалізований лише режим командного рядка з текстовим поданням результатів обчислень). Це спонукало нас до його переробки. По-перше, текстовий інтерфейс користувача був замінений на графічний шляхом перенесення на платформу WinCE інтерфейсу wxMaxima. По-друге, була виконана локалізація інтерфейсу за технологією GetText, що

дало можливість вільного вибору мови інтерфейсу (російської, української, англійської тощо). І, нарешті, була виконана оптимізація вихідних текстів Махіма з метою прискорення її роботи.

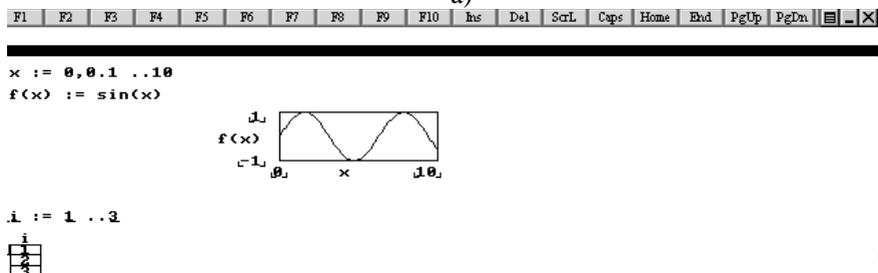
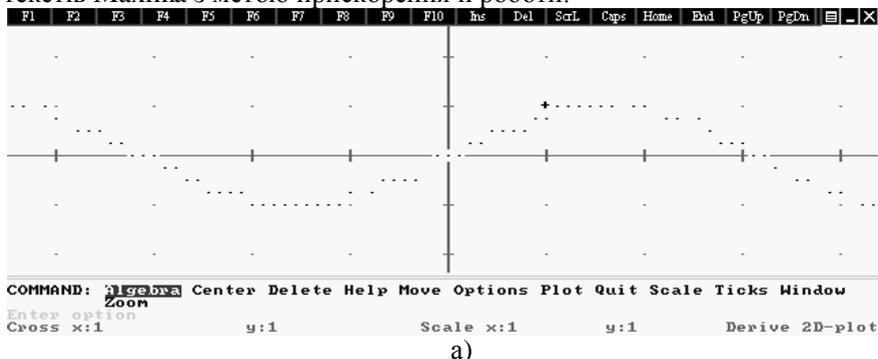


Рис. 5.5. СКМ Derive 1.53 (а) та MathCAD 2.5 (б) на КПК HP Jornada 720

Крім розробленої нами мобільної версії Махіма (рис. 5.6), при навчанні математики на платформі WinCE можна застосувати графічний аналізатор Math Xpander (рис. 5.7, а), середовище динамічної геометрії Euclid (рис. 5.7, б), СКМ Formulae 1 (рис. 5.7, в), теоретико-числовий пакет PARI-GP та інші.

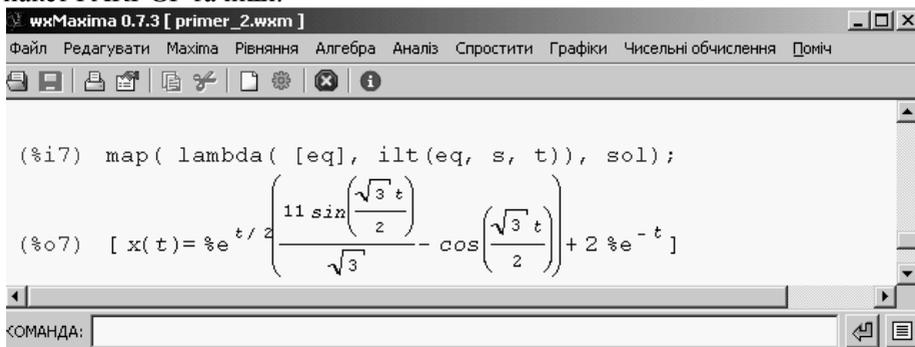
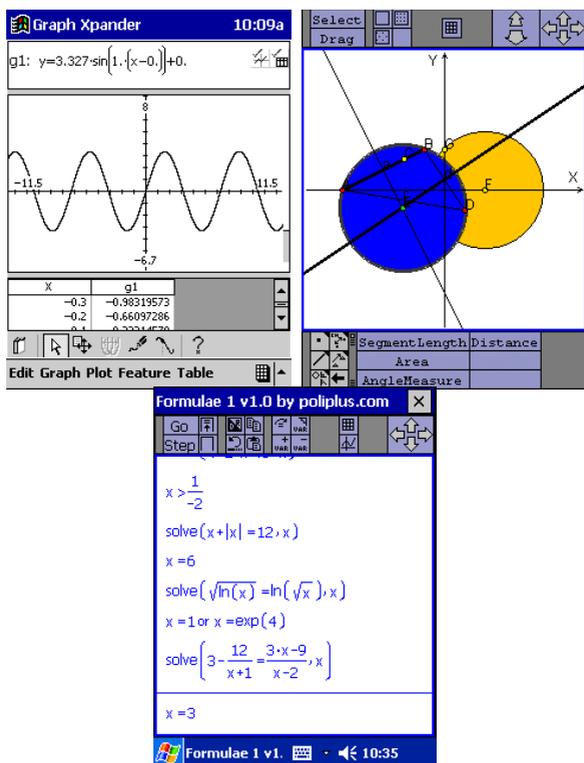


Рис. 5.6. КПК-версія СКМ Махіма 5.13



а)

б)

в)

Рис. 5.7. Математичне ПЗ на КПК Fujitsu Loox

Застосування СКМ для генерації математичних текстів у системах дистанційного навчання (СДН) є перспективною технологією, що об'єднує природну математичну нотацію, властиву СКМ, із розвиненими можливостями MathML та TeX щодо візуалізації математичних текстів. Нами був розроблений генератор формульних виразів MaxTeXML, який використовує Maxima, TeX та MathML, є незалежним від операційної системи та Web-браузера, використовує лише стандартні теги HTML та може бути легко інтегрований у будь-яку як комерційну, так і вільно поширювану СДН (рис. 5.8).

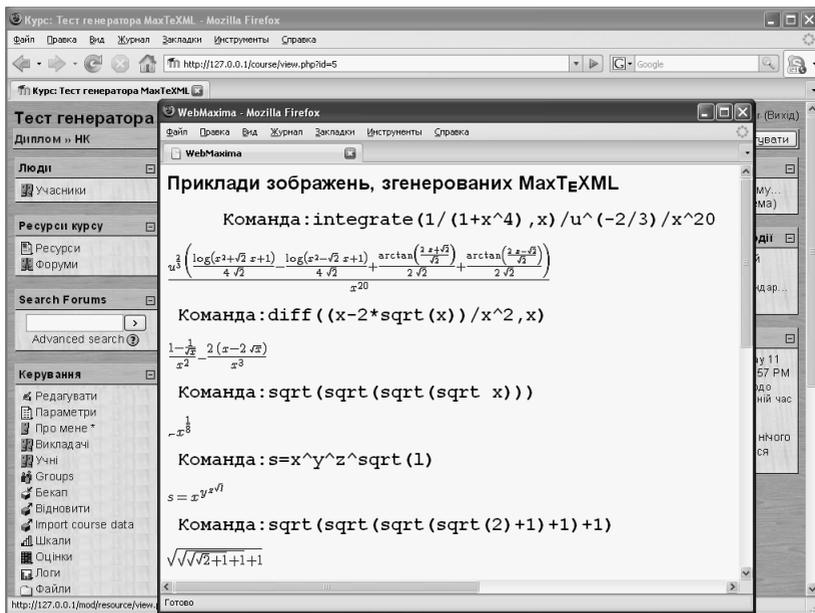


Рис. 5.8. Приклад застосування MaxTeXML у СДН Moodle

За даними на початок 2005 р., 78% університетів та коледжів США використовували безпроводні мережі. Зазначимо, що для вітчизняних навчальних закладів побудова комбінованих мереж на основі провідних та безпроводних технологій сьогодні вже є більш економічно вигідним, ніж розгортання традиційних провідних мереж. Врахування цієї тенденції дозволяє створити такі педагогічні технології, в яких мобільні пристрої стануть основою нової освітньої інфраструктури школи та вузу, а не перешкодою в навчанні. Інтеграція в навчальний процес (замість адміністративних обмежень) передбачає не лише добір відповідного ПЗ для індивідуальної роботи, а й активне використання засобів колективної роботи з виконання навчальних проектів та оцінювання навчальних досягнень.

Так, в лекційних аудиторіях роль студента залишається переважно пасивною: окремі прийоми (питання до аудиторії, бліц-контрольні тощо) не дозволяють підтримувати активність всіх студентів протягом всієї лекції. Перспективним засобом активізації навчальної діяльності є систем зворотного зв'язку (Student Response System – SRS), які дозволяють застосовувати комбінацію з безпроводних мереж, КПК та мультимедійного проектору для подання відповідей в процесі тестування. Прикладом такої системи є Numina SRS, що застосовується в Північно-Каролінському університеті (м. Вілмінгтон, США) при навчанні математики, фізики та хімії (рис. 5.9, 5.10).

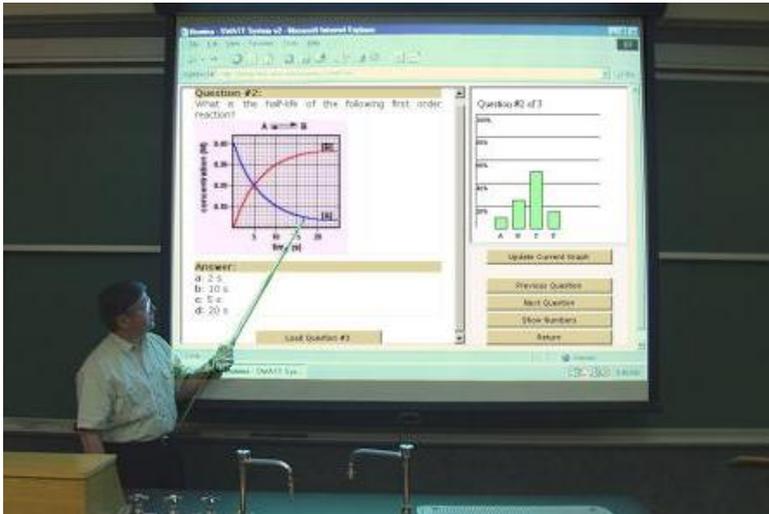


Рис. 5.9. Викладач застосовує Numina SRS у класі

В типовому сеансі роботи Numina SRS студенти використовують комунікатори, щоб відповісти на питання викладача. SRS зберігає їхні відповіді у віддаленій базі даних, відображаючи узагальнені результати на мультимедійній дошці або екрані проектора. Так як SRS є серверними Web-додатками, вони не вимагають спеціального ПЗ на стороні клієнта – лише Web-браузер. Викладач використовує закриті тести, що розміщуються на локальному Web-ресурсі.

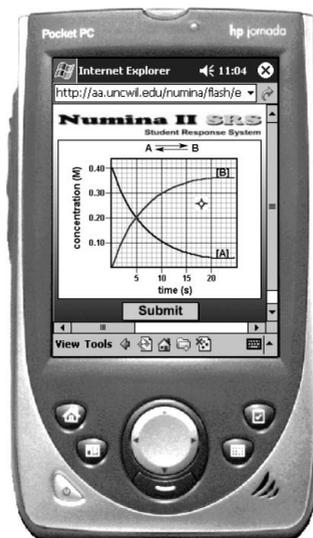


Рис. 5.10. Онлайн-тест на КПК

При застосуванні систем зворотного зв'язку на лекції:

- майже 100% студентів беруть участь у тестуванні (фактором підвищення кількості опитуваних є неpubлічність та анонімність відповідей) на відміну від типових 2-3% студентів, суттєво знижуючи при цьому позанавчальну активність на занятті;
- викладач одразу отримує статистику розуміння студентами лекційного матеріалу;
- викладачі приймають обґрунтовані рішення на основі оперативних результатів зі зміни темпу та організації подання матеріалу;
- майже 100% студентів, що працюють в SRS, надають їй перевагу перед традиційними засобами тестового контролю.

Системи зворотного зв'язку можуть використовуватися не лише з персональними комунікаторами, а й із більш простими мобільними пристроями, проте комунікатори здатні виконувати Flash-додатки, що дозволяють застосовувати мультимедійні інтерактивні тести.

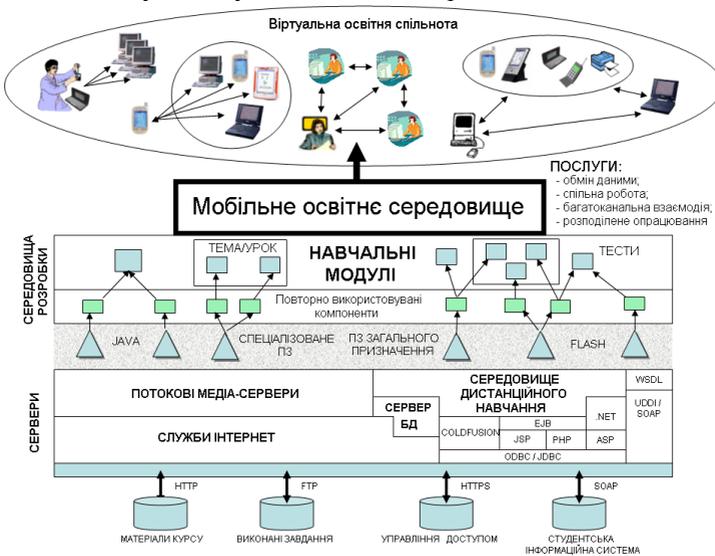


Рис. 5.11. Структура мобільного освітнього середовища

SRS є гарним прикладом реалізації концепції мобільного освітнього офісу. Перетворення мобільного освітнього офісу на *мобільне освітнє середовище* вимагає переходу від застосування розрізнених послуг (електронної пошти, чату, Web, FTP, Telnet) до інтегрованих середовищ навчання (Moodle, WebCT) та колективної роботи (FirstClass, NetMeeting) на основі:

- 1) підтримки різних пристроїв та платформ, об'єднаних як провідними, так і безпроводними мережами;
- 2) застосування клієнт-серверних Інтернет-технологій;
- 3) об'єктно-орієнтованої компонентної архітектури;

- 4) стандартизованих способів обміну даними;
- 5) відкритості та масштабованості (рис. 5.11).

Найбільш суттєвим недоліком КПК при використанні його в якості технічного засобу навчання є малий час автономної роботи, зумовлений, насамперед, застосуванням активної сенсорної панелі та кольорового екрану. Для подолання цього недоліку можна запропонувати системи з енергозберігаючими рефлексивними екранами на основі технології «електронного паперу» («електронних чорнил» – E-Ink).

Пристрої, що використовують папероподібні екрани, позиціонуються переважно як електронні книжки (пристрої для читання – E-Book). Роздільна здатність E-Ink-екранів – 600×800 та вище – дає можливість високоточного відтворення зображень з високим ступенем деталізації, а їхній розмір (6 дюймів та вище) дозволяє зробити процес перегляду більш комфортним, ніж на КПК. Екран, виготовлений за технологією E-Ink, має властивість бістабільності: на підтримку зображення енергія не витрачається, тому, відкривши книгу, ви побачите ту сторінку, на якій вона була закрита. На сьогоднішній день E-Ink – найбільш «зрозуміваюча» технологія, тому що відповідний екран працює у відбитому світлі, найбільш природному для очей.

Електронна книга є лише носієм інформації, тому традиційно складається з двох понять – носій та вміст. Носієм є електронний пристрій, який може бути пристосованим (наприклад, телефон, чиєю основною функцією є дзвонити) чи спеціалізованим. Вміст іноді називають «контентом» – це будь-яка форма зберігання інформації, наприклад текст, відео, аудіо та інші електронні форми. Найчастіше в якості вмісту електронної книги застосовується текст з ілюстраціями, як і в традиційній книзі. Традиційно дослідники, аналізуючи можливості застосування електронних книжок в дистанційному навчанні, головну увагу приділяють засобами обміну контентом. На нашу думку, такий підхід не виправдано звужує можливості застосування електронних книжок у порівнянні з КПК.

Сучасні електронні книги (Sony PRS-505, CyBook, IREX Iiad, IBook eReader V3 та інші) за будовою є потенційно універсальними пристроями, що функціонують під керуванням ОС Linux. В процесі завантаження системи ініціалізується стандартна графічна підсистема X Window, під керуванням якої завантажується головна програма, що надає користувачеві абстракцію книжкової полиці. Вибір файлів (у форматах PDF, DJVU, DOC, RTF, HTML, CHM, LIT, FB2 та ін.) призводить до запуску асоційованих програм.

У листопаді 2007 р. Інтернет-магазин Amazon представив власну електронну книгу – Kindle, яка має вбудовану клавіатуру, засоби зв'язку та необхідне мережне ПЗ. На жаль, висока ціна, жорстка прив'язка до контент-провайдерів США та відсутність офіційних поставок в Україну не дозволяють сьогодні застосувати Kindle у вітчизняній системі освіти, тому для подальшої роботи нами було обрано вітчизняну розробку –

електронну книгу IBook eReader V3 (рис. 5.12).

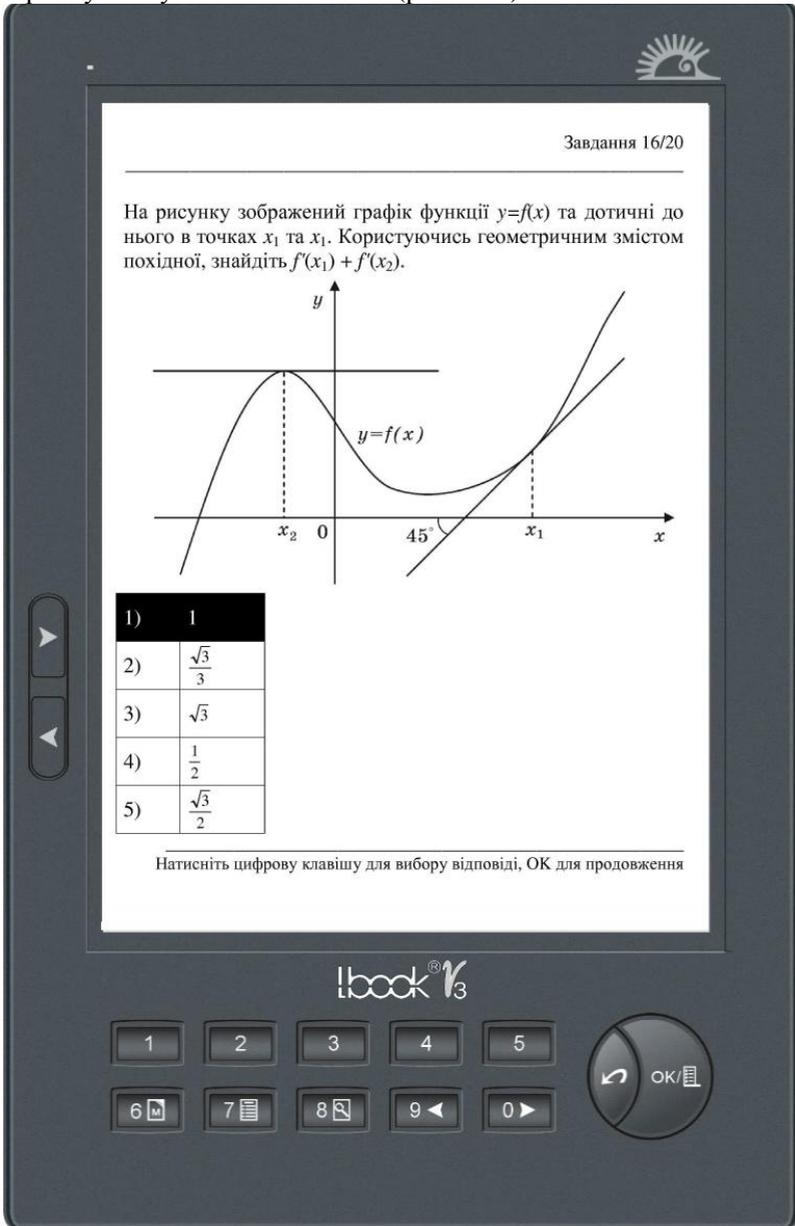


Рис. 5.12. Робота тестової системи на IBook eReader V3

Наявність відкритого пакету розробника для IBook eReader V3 спо-

нукали нас до заміни стандартної книжкової полиці на універсальний файловий менеджер з можливістю запуску як стандартних програм для перегляду, так і завантажених користувачем. Тестування даного рішення виявило наступне:

- відсутність сенсорного екрану компенсується розробкою T9-подібного алгоритму введення тексту (за допомогою наявних 12 кнопок);
- відсутність вбудованих засобів для зв'язку компенсується встановленням карти розширення (за інтерфейсом SDIO);
- властива технології E-Ink низька реактивність екрану не дозволяє застосовувати анімацію зі швидкістю вище 4 кадрів на секунду, проте для більшості навчальних демонстрацій цього цілком достатньо.

Це дозволяє розглядати IBook eReader V3 як нову програмно-апаратну платформу для дистанційного навчання. Для реалізації її потенціалу необхідні як заходи з портування програмного забезпечення (Web-браузера, мережних клієнтів, електронних таблиць, математичних пакетів тощо), так і розробка спеціалізованих SRS-клієнтів для Numina-подібних систем.

При реалізації мобільного навчання використовуються наступні комунікаційні стандарти: GSM, GPRS, UMTS, Wi-Fi, Bluetooth. Інфрачервоний зв'язок можливий, проте не застосовується через малу (1–2 метри) максимальну відстань передачі. Технічні недоліки мобільних пристроїв викликані переважно сучасним станом розвитку технології: обмежений розмір пам'яті, менша (порівняно за ПК) потужність процесора, обмежений ресурс акумуляторів, обмежена роздільна здатність екрану.

Враховуючи, що традиційний WAP-інтерфейс поступово зникає, зосередимо увагу на клієнт-серверних мобільних технологіях, застосування яких в навчальному процесі дає можливість реалізувати концепцію мобільного освітнього середовища, визначальними особливостями якого є можливість завантаження і встановлення програмного забезпечення та наявність розвинених засобів отримання та обробки контенту. Головним компонентом такого середовища є мобільний портал дистанційного навчання (M-портал), вимоги до якого були визначені Ю.В. Триусом.

M-портал – це Internet-сайт, користувачі якого після реєстрації та отримання певних прав можуть використовувати навчальні ресурси, створювати власні мікропортали, відвідувати мікропортали студентів, учителів та інших користувачів в рамках онлайн-спільноти, мати доступ до модулів мобільного навчання та пов'язані з ними системи керування навчанням.

Програмне забезпечення M-порталу має надавати можливості подання навчального контенту, ведення дискусій та передавання повідомлень. Висока інтерактивність M-порталу створює умови для включення суб'єктів навчання в планування, покращення та оцінювання самого навчального процесу.

Сьогодні в одній освітній установі, як правило, застосовуються гіб-

ридні мережі, що об'єднують як стаціонарні, так і мобільні пристрої (рис. 5.13). Г.Г. Швачич, аналізуючи результати впровадження Wi-Fi доступу в Національній металургійній академії України, зазначає, що це, в свою чергу, стимулює студентів до придбання ноутбуків або КПК. Такий позитивний зворотний зв'язок створює можливість швидкого впровадження мобільного навчання.

Така можливість реалізується системою управління навчанням (Learning Management System – LMS), що базується на Web-послугах по обміну XML-контентом за стандартами Simple Object Access Protocol (SOAP), Web Services Description Language (WSDL), Universal Description Discovery and Integration (UDDI). Це створює необхідну основу для переходу від PC-центричних до розподілених мобільних систем, в яких різні пристрої (мобільні комп'ютери, PDA, Tablet PC, смартфони та ін.) мають єдиний доступ до освітніх XML-ресурсів з будь-якого місця.

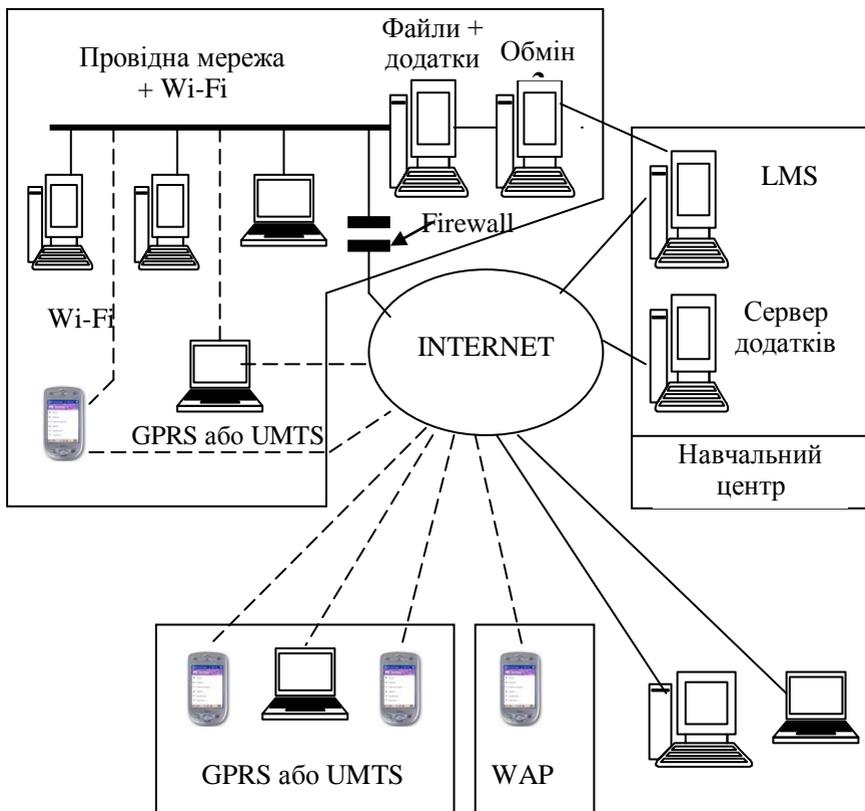


Рис. 5.13. Структура гібридної мережі навчального закладу

При проектуванні архітектури мобільного освітнього середовища необхідно враховувати можливість його розвитку, для чого доцільно застосовувати модульну інтеграцію його компонентів на основі стандартів. На рис. 5.14 показана архітектура Web-послуг комбінованої мережі, наповнення, інтеграція та збереження даних в якій відбувається за стандартом UDDI, інтерфейс описується WSDL, а доступ – SOAP, що дає користувачу можливість взаємодії із зовнішніми додатками незалежно від платформи та системи. Тоді при виборі користувачем мобільного пристрою навчального курсу система вибере саме ті навчальні об'єкти, які підтримує даний пристрій.

Застосування стандартів дозволяє побудувати відкрите, модифіковане та масштабоване plug-and-play середовище мобільного навчання, що надаватиме широкий спектр освітніх послуг.

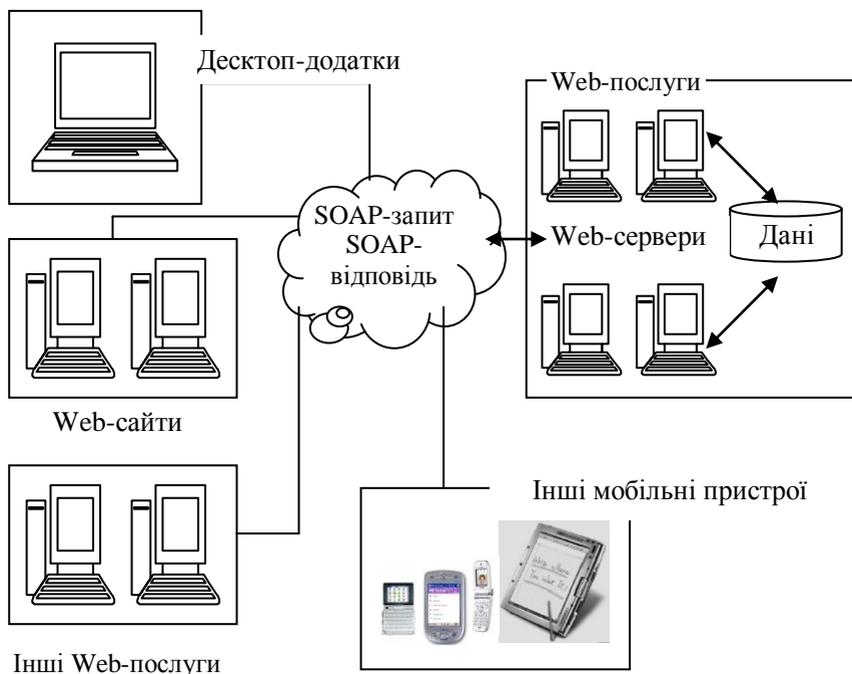


Рис. 5.14. Архітектура комбінованої навчальної мережі

Об'єктно-орієнтована архітектура дозволяє інтегрувати найрізноманітніші системи (бібліотеки, віртуальні та/або реальні лабораторії), керувати навчанням, надавати найрізноманітніші інформаційні послуги. З рис. 5.15 можна побачити, що розглядувана архітектура об'єднує 4 рівні: додатки та послуги, інтегровані за допомогою Web-стандартів, власне Web та мобільне навчання.

Перший рівень – рівень взаємодії між викладачами та студентами – містить різні послуги, що надаються викладачам та студентам додатками різних типів (як комерційними, так і вільно поширюваними).

Другий рівень – рівень Web-послуг, що інтегрують навчальний контент та програмні додатки, представлені в різних форматах. На цьому рівні навчальний матеріал не залежить від застосовуваного мобільного пристрою, а його об'єктно-орієнтована структуризація дає можливість одночасного використання текстових даних, голосу, звуку, відео, тестів та різних виконуваних файлів.

Третій рівень – рівень доставки контенту на різні мобільні та стаціонарні пристрої, що забезпечує доступ користувача до навчальних ресурсів будь-коли та будь-де.

Четвертий рівень – рівень мобільного навчання – включає в себе студентів, викладачів та адміністраторів навчального процесу.

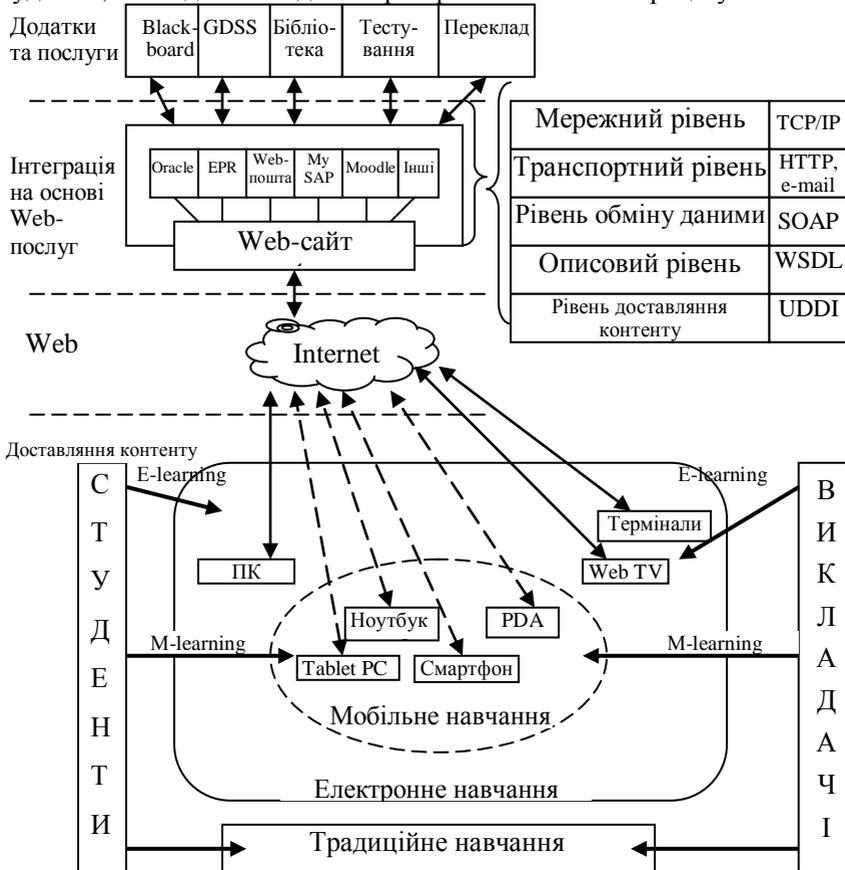


Рис. 5.15. Об'єктно-орієнтована архітектура середовища мобільного навчання

До реалізації мобільного навчання існує два близькі підходи:

1. Мобільне навчання – це електронне навчання за допомогою мобільних пристроїв та безпроводних мереж.

2. Мобільне навчання – це специфічний вид навчання, в якому сам навчальний процес є географічно та ситуаційно залежним.

Ми дотримуємося другого підходу, що враховує специфіку мобільних пристроїв, цільову групу учнів та конкретизує практичну необхідність. За такого підходу учень з'єднаний з учителем постійно за допомогою Інтернет – на відміну від традиційного навчання, де таке об'єднання можливе лише у межах навчального закладу. Учитель відіграє роль консультуючого керівника, що спрямовує діяльність учня на отримання необхідної інформації. Це дозволяє реалізувати проблемне навчання через обговорення дій, що допоможуть учневі оволодіти матеріалом, до усвідомлення необхідного результату та набуття нового знання.

Базові моделі традиційного та мобільного навчання показані на рис. 5.16, 5.17.

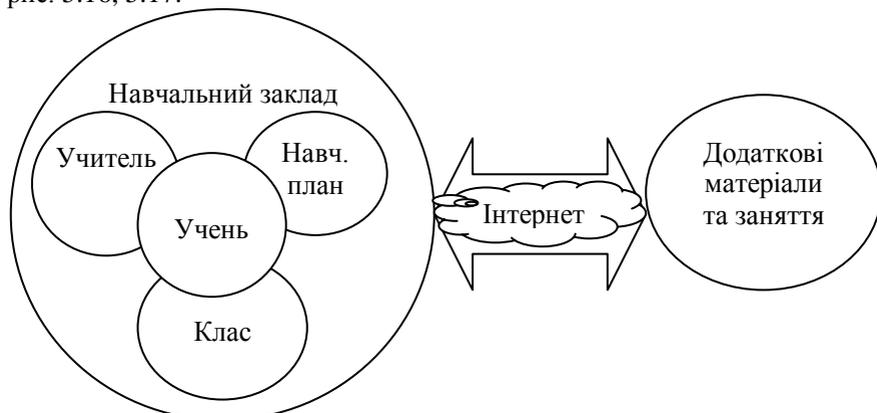


Рис. 5.16. Модель традиційного навчання

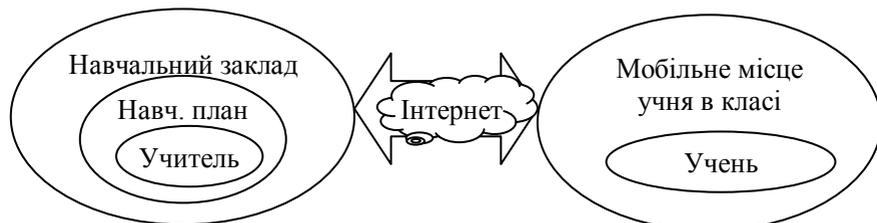


Рис. 5.17. Модель мобільного навчання

В моделі мобільного навчання учень з'єднаний з учителем постійно за допомогою Інтернет – на відміну від традиційного навчання, де таке об'єднання можливе лише у межах навчального закладу. Учитель відіграє роль консультуючого керівника, що спрямовує діяльність учня на

отримання необхідної інформації. Це дозволяє реалізувати в даній моделі проблемне навчання через обговорення дій, що допоможуть учневі оволодіти матеріалом, до усвідомлення необхідного результату та набуття нового знання.

Для ефективної взаємодії у мобільному середовищі як вчителю, так і учневі важливо усвідомлювати соціальну природу навчальної комунікації, яка є умовою якості навчання – інформаційно-комунікативні здатності тут є вирішальними в набутті інформації, знань, досвіду та вмінь.

Мобільне навчання відбувається не в класі, а у певному навчальному просторі. Проте концепція класу (початкової групи) не зникає – класи перестають бути сталим утворенням та стають динамічними, формуючись на кожен предмет окремо. Час навчання визначається кожним учнем окремо та не регламентується шкільними розкладом. Учні швидко усвідомлюють переваги динамічної інтерактивності мобільного навчання, ефективність та багатство комунікацій, якість керованого вчителем доступу до навчальних ресурсів.

Мобільне навчання не зважає соціалізації старшокласників, які є активними користувачами чатів, форумів і онлайн-співтовариств, побудованих на основі сервісів Web 2.0. Так, наприклад, MySpace, який описується як «місце для друзів», в якому надається онлайн-простір для особистих профілів, можливість знаходити інших людей зі спільними інтересами і брати участь у заходах, починаючи від онлайн-чатів до «живих» зустрічей, є одним з п'яти найбільш відвідуваних Web-сайтів у світі. Через засоби соціальних мереж, таких як MySpace, FaceBook, Bebo і Flickr або їхніх російськомовних аналогів «Вконтакте», «Одноклассники.ру», об'єднуючись у групи за інтересами, молоді люди в процесі обміну думками, навичками, текстами програм підвищують власну кваліфікацію в обраній предметній галузі. На основі соціальних мереж з використанням особистісних профілів і програмного забезпечення створюється мережне середовище соціальної солідарності, свободи слова і творчого спілкування.

Наказом МОН України №271 від 24.03.2009 р. «Про продовження Всеукраїнського експерименту щодо навчання вчителів ефективному використанню інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі та підвищення кваліфікації педагогічних працівників за програмою Intel® «Навчання для майбутнього» визначено, що методична та технічна допомога вчителям протягом всього експерименту буде організована за допомогою використання соціальних сервісів Web 2.0. В програмі продовження педагогічного експериментального дослідження пропонується розробити, обґрунтувати, експериментально перевірити та впровадити в систему післядипломної педагогічної освіти дистанційний курс «Використання ІКТ у навчальному процесі» (на основі використання сервісів Web 2.0); створити локалізовану та адаптовану 10-ту версію посібника для вчителів очної і дистанційної форм навчання на осно-

ві застосування соціальних сервісів Web 2.0 та відповідного програмного компакт-диску і матеріалів створеного навчально-освітнього порталу.

Слід також відзначити, що мобільне навчання потребує більше часу, ніж традиційне, а суцільна віртуалізація навчання може призвести до втрати соціальних контактів як між учнем та вчителем, так і між самими учнями. Лише комбінуючи традиційне та мобільне навчання, можна не лише дати професійні знання, а й сформувати загальну культуру особистості. Тому для тих осіб, котрі не мають особливих потреб, доцільно застосовувати мобільні технології дистанційного навчання як допоміжні в процесі традиційного навчання та як основні – в процесі позакласної (зокрема, факультативної) роботи.

До руйнівних організаційних проблем мобільного навчання (за влучними виразом М. Шарплес, «руйномобільного навчання» – *disruptive mobile learning*) відносять: захоплення мобільними іграми, кіберзнущання, втрату вчителем контролю, введення в оману на екзаменах та ін. І, хоча саме таке «вторгнення дому до школи» викликало до життя обговорюваний на початку розділу наказ МОН України, існує й обернена тенденція «вторгнення школи до дому»: батьківській контроль за навчальною діяльністю дитини через шкільний інтранет, постійне відслідковування активності дитини через мобільний телефон та GPS-пристрої, оцінювання позашкільного навчання та ін.

Контрольні питання і завдання

1. Сформулювати основні положення концепції мобільного навчання.
2. Прокоментувати діаграму співвідношення дистанційного, мобільного та електронного навчання.
3. Дослідити структуру мобільного освітнього середовища.
4. Охарактеризувати програмні засоби мобільного навчання.
5. Порівняти базові моделі традиційного та мобільного навчання.

Висновки до п'ятого розділу

1. Удосконалення апаратних характеристик перетворило мобільні пристрої на потужні інтерактивні мультимедійні технічні засоби мобільного навчання – сучасного напряму розвитку систем дистанційного навчання із застосуванням мобільних телефонів, смартфонів, КПК та електронних книжок. Мобільне навчання – це специфічний вид навчання, в якому сам навчальний процес є географічно та ситуаційно залежним.

2. В порівнянні з традиційним у мобільному навчанні забезпечується можливість моніторингу навчання в реальному часі та висока насиченість контенту, що дозволяє розглядати його не лише як засіб навчання, а й як інструмент спільної роботи, спрямованої на підвищення якості навчання.

3. До визначальних можливостей мобільного навчання відносяться:
– динамічне генерування навчального матеріалу у залежності від місцезнаходження учня, типу мобільного пристрою та його використання споживачем;

– розмиття границь між соціумом та класною кімнатою завдяки дозволу застосування мобільних пристроїв в навчанні, коли викладач ставиться в умови, за яких інформація, що раніше існувала в межах класу, змушена конкурувати з інформацією ззовні.

4. Впровадження елементів мобільного навчання в навчальний процес середньої та вищої школи дозволить уникнути негативних наслідків неконтрольованого використання мобільних пристроїв через їх активне залучення до процесу навчання замість адміністративних заборон.

5. Паралельно з використанням традиційних навчальних технологій мобільне навчання сприятиме забезпеченню якості освіти, підвищуючи гнучкість процесу навчання та задовольняючи вимоги безперервної освіти та навчання протягом усього життя. Мобільне навчання може також забезпечити поліпшення можливостей отримання освіти для осіб з обмеженими фізичними можливостями, пропонуючи їм більшу гнучкість і вибір часу і місця навчання через доставляння контенту на їхні мобільні пристрої у відповідності до їхніх потреб.

6. Перспективними напрямками розвитку мобільного навчання є: тестування, навчальні дослідження та навчання в процесі роботи; контекстне навчання, чутливе до часу та місця; мобільні навчальні соціальні мережі; мобільні навчальні ігри; голосовий мобільний подкастинг з інтерактивним оцінюванням.

Література до розділу 5

1. Dewey, J. *Democracy And Education : An Introduction to the Philosophy of Education* / Dewey, J. – New York : Free Press, 1997. – 384 p.
2. Draper, S. W. Electronically enhanced classroom interaction [Electronic resource] / Draper, S. W. // Australian journal of educational technology. – 2002. – №18. – Mode of access to the magazine : <http://www.psy.gla.ac.uk/~steve/ilig/handsets.html#Abstract>
3. Georgiev, T. M-learning – a New Stage of E-Learning / Georgiev, T., Georgieva, E., Smrikarov, A. // Proceedings of the 5th International Conference on Computer Systems and Technologies – CompSysTech'2004. – Rouse, 2004. – P. IV.28-1 – IV.28-5.
4. *Mobile Learning : a Handbook for Educators and Trainers* / Edited by : Agnes Kukulska-Hulme, John Traxler. – Routledge, 2005. – 192 p.
5. Palm^{1M} Education Pioneers Program : Final Evaluation Report. SRI International, September 2002.
6. Sharples, M. *A Theory of Learning for the Mobile Age* / Sharples, M., Taylor, J., Vavoula, G. // *The Sage Handbook of E-learning Research* / R. Andrews & C. Haythornthwaite (eds.). – London : Sage, 2007. – P. 21–47.
7. Shiratuddin, N. *E-Book Technology and Its Potential Applications in Distance Education* / Shiratuddin, N., Landoni M., Gibb, F., Hassan, S. // *Journal of Digital Information*. – 2003. – Volume 3, Issue 4. – February. – E-education : Design and Evaluation.
8. Vetter, R. *Numina II SRS Student Response System Home Page* [Electronic resource] / Vetter, R. – [2000]. – Mode of access: <http://aa.uncw.edu/numina/srs/>
9. Wilensky, U. *Learning through participatory simulations : Network-based design for systems Learning in Classrooms Computer Supported Collaborative Learning* / Wilensky, U., Stroup, W. // Conference on Computer-Supported Collaborative Learning (CSCL '99), Stanford University, California, December 12-15, 1999.
10. Вовк А. І. Архітектура порталу мобільного навчання / Вовк А. І., Гірник А. В., Неминуца А. Ф., Хоменко О. І., Шокалюк С. В., Теплицький О. І. // *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : збірник наукових праць : випуск VII : В 3-х томах. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2008. – Т. 3 : Теорія та методика навчання інформатики. – С. 20–24.*
11. Иващенко В. П. Некоторые особенности реализации беспроводного Internet на базе технологии Wi-Fi / Иващенко В. П., Швачич Г. Г. // *Проблеми підготовки та перепідготовки фахівців у сфері інформаційних технологій : матеріали V Міжнародної науково-технічної конференції «Комп'ютерні технології в будівництві».* – Київ–Севастополь, 18-21 вересня 2007 р. – Кривий Ріг, 2008. – С. 41–43.

12. Мазурок И. Е. Использование мобильных коммуникационных устройств в образовательных целях / Мазурок И. Е., Мазурок Т. Л. // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : збірник наукових праць. – Випуск V : В 3-х томах. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2005. – Т. 3. – С. 175–179.
13. Семеріков С. О. Махіма 5.13 : довідник користувача / Семеріков С. О. ; за ред. академіка АПН України М. І. Жалдака. – К. : Національний педагогічний ун-т ім. М.П. Драгоманова, 2007. – 48 с.
14. Семеріков С. О. Застосування системи комп'ютерної алгебри Махіма для генерування математичних текстів в системі дистанційного навчання / Семеріков С. О., Теплицький І. О. // Актуальні проблеми психології : Психологічна теорія і технологія навчання. – К. : Міленіум, 2007. – Т. 8, вип. 3. – С. 85-95.
15. Семеріков С. О. Нові засоби дистанційного навчання інформаційних технологій математичного призначення / Семеріков С. О., Теплицький І. О., Шокалюк С. В. // Вісник. Тестування і моніторинг в освіті. – 2008. – №2. – С. 42–50.
16. Станіслав Ніколаєнко про використання мобільних телефонів в школі [Електронний ресурс] – 25 травня 2007. – Режим доступу : http://www.loga.gov.ua/oda/about/depart/guon/news/2007/05/25/news_262.html?template=33
17. Теплицький І. О. Модель мобільного навчання в середній та вищій школі / Теплицький І. О., Семеріков С. О., Поліщук О. П. // Комп'ютерне моделювання в освіті : матеріали III Всеукраїнського науково-методичного семінару. – Кривий Ріг, 24 квітня 2008 р. – Кривий Ріг : КДПУ, 2008. – С. 45–46.
18. Теплицький І. О. Новий технічний засіб навчання – електронна книга / Теплицький І. О., Семеріков С. О., Шокалюк С. В., Ліннік О. П. // Рідна школа. – 2007. – №7–8. – С. 53–54.
19. Теплицький О. І. Динамічне графічне об'єктно-орієнтоване моделювання в мультимедіа-середовищі мобільного навчання Squeak / Теплицький О. І., Теплицький І. О., Семеріков С. О. // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наукових праць / Редрада. – К. : НПУ імені М.П. Драгоманова. – №7 (14). – 2009. – С. 49–54.
20. Триус Ю. В. Система дистанційного навчання освітньо-наукового порталу університету / Триус Ю. В., Беседков С. В., Пустовіт В. А., Бодненко Д. М. // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. – Серія 2. – Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук. праць. – К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова. – №3(10). – 2005. – С. 250–266.

РОЗДІЛ 6. ПРОЄКТНІ ТЕХНОЛОГІЇ В НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

6.1. Впровадження STEM-проєктів як один із факторів посилення мотивації учіння математики

Сучасний тренд «STEM-освіта» – концепція інтегрованого навчання учнів за чотирма профільними дисциплінами в міждисциплінарному та прикладному контексті – є надзвичайно актуальним феноменом в аспекті стратегічного розвитку провідних країн світу щодо отримання ними конкурентних переваг у різних сферах людської діяльності. Саме STEM-освіта сприяє підготовці компетентних фахівців для високотехнологічних виробництв і забезпечує високий науковий потенціал держави.

Акронім STEM вживається для позначення популярного напрямку в освіті, що охоплює природничі науки (Science), технології (Technology), інженерію (Engineering) та математику (Mathematics). STEM визначає характерні риси відповідної дидактики, сутність якої виявляється у поєднанні міждисциплінарних практик орієнтованих підходів до вивчення природничо-математичних дисциплін. Водночас, у STEM активно включається сукупність творчих, мистецьких дисциплін, що об'єднані загальним терміном Arts (позначення відповідного підходу – STEM and Arts). Актуальними напрямками STEM and Arts є промисловий дизайн, архітектура, індустриальна естетика [36].

Ми помітили, що у європейському науковому дискурсі наголошується на важливості всіх дисциплін, використанні міждисциплінарних підходів STEAM (літера A – All - всі) і поєднанні природничо-наукових з іншими навчальними дисциплінами, які вивчаються у школі. STEM-освіта – це категорія, яка визначає відповідний педагогічний процес (технологію) формування і розвитку розумово-пізнавальних і творчих якостей молоді, рівень яких визначає конкурентну спроможність на сучасному ринку праці: здатність і готовність до розв'язання комплексних задач (проблем), критичного мислення, творчості, когнітивної гнучкості, співпраці, управління, здійснення інноваційної діяльності.

Аналіз психолого-педагогічної і методичної літератури свідчить про те, що концептуальні підходи та практичні напрями реалізації STEM-освіти цікавлять багатьох багатьох науковців і методистів, зокрема Н. Р. Балик [4], О. Барну [5], І. Василяшко [36], Д. Васильєву [12], С. Волянську, О. Гриб'юк, О. Данилову, В. Єлізарову, Н. Морзе, О. О. Патракеєву [36], Л. Рождественську, В. Юнчик та ін. У роботах дослідників лунає ключова думка – майбутнє за технологіями, а майбутнє технологій – це креативні педагоги нового формату, які здатні своїми знаннями, вмінням зробити привабливими STEM-програми і методи навчання, завдяки яким можна формувати креативних особистостей, спро-

можних генерувати ідеї, застосовувати фундаментальні знання і навички під час вирішення складних завдань у майбутній професійній діяльності. Ми долучилися до висвітлення STEM-підходів у навчанні [28], [31].

Математика є основою STEM, оскільки вона забезпечує математичний апарат для інших STEM-предметів. Впровадження елементів STEM-освіти дає можливість показати міжпредметні зв'язки математики з іншими предметами, а також її прикладну спрямованість.

Саме через застосування програмних засобів у навчальних проєктах з математики ми можемо реалізовувати STEM.

Залучення учнів у STEM може впливати на розвиток наступних навичок: співробітництво (для досягнення інноваційних результатів і розв'язування складних завдань, в команді повинні працювати особистості з різним науковим і технічним бекграундом); комунікативність (навчання в області STEM надає широкі можливості для спілкування “один на один” і “один-до-багатьох”); творчість (з використанням креативних вмінь можна покращити науковий і технологічний проєкт, показати його нерозкриті можливості; критичне мислення (здатність осмислити, вдумливо й обґрунтовано проаналізувати і застосовувати знання).

Метод навчальних проєктів, що ґрунтується на ідеї комплексного використання інноваційних педагогічних технологій та ІКТ, пов'язаний з технологіями навчання у співпраці, модульним, навчанням через дослідження, технологією успіху. У роботі за методом проєктів слід дотримуватися наступних принципів: 1) цілі навчання повинні бути сприйнятими учнями, 2) необхідно забезпечувати об'єктивний контроль якості знань, 3) сприяти розвитку особистості учня. Характерною рисою пропонованої технології є практична спрямованість навчального матеріалу.

Навчальне проєктування не є принципово новою технологією. *Метод проєктів* виник у 20-ті роки минулого століття у США. Спершу його називали «методом проблем» і розвивався він у межах гуманістичного напрямку у філософії та освіті, в педагогічних поглядах та експериментальній роботі Джона Дьюї. У ньому містилися ідеї побудови навчання на активній основі, через доцільну діяльність учня, у співвідношенні з його особистим інтересом саме в цих знаннях. Надзвичайно важливо було показати дитині її особисту зацікавленість у здобутті цих знань, де і яким чином вони можуть їй знадобитися у житті. Проблема мусить бути з реального життя, знайома і значуща для дитини, для її розв'язання дитині необхідно застосувати вже наявні знання та ті, що треба здобути.

Послідовнику Дж. Дьюї – В.Х. Кілпатрику вдалося вдосконалити систему роботи над проєктами. Під проєктом у той час мався на увазі цільовий акт діяльності, в основі якого лежить інтерес дитини. В.Х. Кілпатрик першим запропонував класифікацію проєктів.

У Росії ідеї проєктного навчання виникли практично паралельно з розробками американських вчених. Група науковців під керівництвом

С.Т. Шацького намагалася активно запроваджувати проєктні методи у практику викладання. Однак, через недостатньо продумане і непослідовне використання методу проєктів у навчально-виховному процесі школи у 1931 році метод проєктів був засуджений та заборонений. Відтоді досить тривалий час в Росії і в Україні більше не робилось якихось серйозних спроб відродити метод в освітній практиці. Стрімке повернення до методу проєктів відбулося завдяки впровадженню програми Intel «Навчання для майбутнього» [15], [35], [37].

В основі методу проєктів лежить розвиток пізнавальних навичок учнів, умінь самостійно конструювати свої знання, орієнтуватися в інформаційному просторі, а також розвиток критичного та творчого мислення. Метод проєктів орієнтований на самостійну діяльність учнів – парну, групову, яку учні виконують протягом визначеного проміжку часу. Цей метод органічно поєднується з груповими методами навчання.

Метод проєктів прагматично спрямований на *результат*, який можна отримати при розв'язанні тієї чи іншої практичної чи теоретично значимої проблеми. Цей результат можна побачити, усвідомити, застосувати у реальній практичній діяльності, а значить результат повинен бути матеріальним, тобто відповідно оформленим – відеофільм, альбом, бортжурнал, комп'ютерна газета, альманах тощо.

Для досягнення такого результату треба навчити учнів самостійно мислити, відкривати та розв'язувати проблеми, залучаючи знання з інших областей, уміння прогнозувати результати і можливі наслідки різних варіантів розв'язання, уміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки.

Дослідницькі проєкти – тип проєктів, які потребують добре обміркованої структури, визначеної мети, актуальності предмета дослідження для всіх учасників, соціальної значущості, продуманості методів, у тому числі експериментальних методів опрацювання результатів.

Творчі проєкти – не мають детально опрацьованої структури спільної діяльності учасників, вона розвивається, підпорядковуючись кінцевому результату, прийнятій групою логіці спільної діяльності, інтересам учасників проєкту.

Ігрові проєкти – учасники беруть собі визначені ролі, обумовлені характером і змістом проєкту. Це можуть бути як літературні персонажі, так і реально існуючі особистості, імітуються їх соціальні і ділові стосунки, які ускладнюються вигаданими учасниками ситуаціями.

Інформаційні проєкти – спрямовані на збирання відомостей про який-небудь об'єкт, явище, на ознайомлення учасників проєкту з цими відомостями, їх аналіз і узагальнення фактів.

Практико-орієнтовані проєкти – результат діяльності учасників чітко визначено з самого початку, він орієнтований на соціальні інтереси учасників (документ, програма, рекомендації, проєкт закону, словник тощо).

Проєкт може бути *монопредметним*, *міжпредметним* та *надпредметним* (або *позапредметним*). Монопредметні проєкти можуть бути

успішно реалізовані в умовах класно-урочної системи, інші використовуються як доповнення до урочної діяльності. На практиці частіше доводиться мати справу зі змішаними типами проєктів.

За характером контактів проєкти поділяються на *внутрішні* (організовані всередині однієї школи, регіону чи країни) та *міжнародні*. За кількістю учасників проєкти поділяються на *особисті*, *парні* та *групові*. За тривалістю проведення розрізняють проєкти *короткодійчі* (кілька уроків з програми одного чи кількох предметів), *середньої тривалості* (від тижня до місяця) та *довготривалі* (кілька місяців).

Реалізація проєкту на практиці набагато складніша будь-якого фронтального заняття, як для учня, так і для вчителя. Проєкт стимулює самостійну активність, але разом з тим перекладає дидактичну відповідальність на учнів. У зв'язку з цим проєктне навчання не повинно повністю замінити традиційне навчання, а бути корисним доповненням до нього, як засіб прискорення росту у особистісному змісті, так і в академічному. При роботі над проєктом кожний учень може віднайти ту справу, яка найбільш відповідає його інтересам та можливостям.

На стадії підготовки проєкту слід дібрати зміст навчального предмету, розробити завдання для учнів, засоби оцінювання учнівських навчальних продуктів, рівня якості знань. Важливо передбачити нюанси впровадження проєктних технологій в умовах класно-урочної системи навчання. Школярі залучаються до активної участі у плануванні роботи, до розробки критеріїв оцінювання навчальних продуктів тощо. Бажано, щоб у процесі навчання учень міг дібрати посильне, цікаве для нього завдання. Діяльність школярів слід планувати так, щоб процес навчання сприяв розвитку навичок мислення високого рівня. Педагогічна таксономія окреслює шість рівнів навчальних цілей – знання, розуміння, використання, аналіз, синтез, оцінювання [15, 29]. Важливо забезпечувати розвиток в учнів умінь аналізувати, класифікувати, передбачати, довести, протиставити, встановити відповідність, висунути гіпотезу, розробити, організувати, написати звіт, створити схему тощо.

Головну роль у детермінуванні творчої поведінки школяра відіграють мотивація, особистісні цінності, індивідуальні риси особистості. Мотивація виконує кілька функцій – спонукує поведінку, спрямовує та організовує її, надає їй особистісного смислу й значення. Важливість розвитку всіх сторін мотиваційної сфери обумовлена тим, що лише у взаємному зв'язку і єдності вони реалізують функції мотивації. Потреба виконує функцію спонукання, ціль – спрямовуючу й організуючу функції, а мотив – смислоутворюючу. Виникнення мотивів навчання не є достатньою умовою для ефективної навчальної діяльності, якщо у школяра не сформоване умінь ставити цілі у навчальній роботі. Щоб збудити інтерес, створивши мотив, а потім відкрити школярам можливість знаходження системи цілей у виучуваному матеріалі, доцільно залучати їх у процесі навчання математики до впровадження навчальних проєктів.

Для підтримання стійкої мотивації необхідно здійснювати відповідний добір змісту навчального матеріалу, щоб не викликати перевантаження або недовантаження школярів; оптимально поєднувати сучасні методи навчання; організовувати й підтримувати плідні стосунки на рівні вчитель – учень та учень – учень (група); забезпечувати позитивне емоційне забарвлення від результатів навчання.

Вивчаючи тему «Відсотки» у 5-6 класах, важливо акцентувати увагу учнів на тому, як знання математики допоможе їм у повсякденному житті. Для цього пропонуємо школярам взяти участь у проєкті «Казкові відсотки» та з'ясувати, як Червона шапочка з однойменної казки зможе краще допомогти бабусі поратися по господарству? Наприклад, де вигідніше купувати речі при відповідних скидках у магазинах, як скомпонувати продукти під час приготування обідів та сніданків, раціональніше розподілити власні кишенькові гроші чи бабусину пенсію тощо? Впроваджуючи зазначений навчальний проєкт, не лише можемо досягати поставлених навчальних цілей, але й здійснювати економічне, моральне виховання наших учнів, розвивати у них позитивні якості особистості.

Проєкт «Цікава математика» доцільно впроваджувати з учнями 5-7 класів з метою покращення їх підготовки до участі в математичних олімпіадах. Майбутніх «олімпійців» можна об'єднати у групи відповідно до типів завдань. «Історики» вивчають та доповідають історію виникнення головоломок, задач на ігрові стратегії, пропонують власну класифікацію подібних задач. «Логісти» розв'язують задачі, пов'язані з парністю/непарністю натуральних чисел, з переливанням рідини з посудин зазначених об'ємів, завдання на зважування монет і виявлення фальшивої. «Стратеги» аналізують задачі, пов'язані з іграми двох осіб. «Пожежники» добирають матеріал про головоломки з сірниками, допомагають іншим учасникам проєкту їх розгадати. «Художники» аналізують задачі, для розв'язування яких найчастіше застосовують метод розфарбовування. Розв'язування даних типів завдань сприятиме розвитку у школярів навичок мислення високого рівня. Враховуючи вік учнів, можна опрацювання певного типу завдань подавати як «відкривання замків», подолання перепон. Наприклад, на шляху до визволення Зачарованої принцеси. Підсумком роботи над проєктом є проведення математичної олімпіади, яка зможе виявити рівень набутих учнями знань та умінь.

Підлітковий вік є сенситивним для утвердження принципів загальнолюдської моралі. Реалізуючи у п'ятому класі міжпредметний проєкт «Пізнаймо рідну Україну», який об'єднує математику, природознавство та українську мову і літературу, акцентуємо увагу на проблемі навчання учнів вибору цінностей (цінностей життя, матеріальних, духовних). Для цього слід у навчальному процесі виділити і використовувати ціннісне наповнення змісту освіти, а вчителю, враховуючи індивідуальні та вікові особливості школярів, транслювати цінності в життєдіяльність п'ятикласників. Один із варіантів відповіді на питання «Як могу стати я

багатшим?» прихований у самій назві навчального проекту. Зазначений проект відповідає освітній галузі «Математика», оскільки відповідні завдання сприятимуть формуванню в учнів уявлень про масштаб, навичок та умінь вимірювання і обчислення відстані між об'єктами, які зображені в певному масштабі, застосуванню їх до розв'язування задач. Учні розроблятимуть екскурсійні маршрути в межах України, визначатимуть відстані між пунктами по карті, обчислюватимуть витрати на проїзд, шукатимуть відомості про історичні та культурні пам'ятки на шляху слідування, випускатимуть газету, створюватимуть Web-сторінки за результатами роботи над проектом.

Підводячи підсумки впровадження того чи іншого проекту, доцільно здійснити його короткий опис на слайді презентації чи в текстовому документі, розмістити написи з переліком виконаних робіт, з цих написів здійснити гіперпосилання на самі роботи (рис. 6.1).

Наведемо приклади проектів, які доцільно реалізувати у процесі навчання математики з використанням ПЗ. Вивчаючи *теорему Піфагора*, важливо дати учням змогу відчутти важливість її практичного застосування. Для цього можна запропонувати міні-проекти «Швидше ходити по прямій», «Як досягнути до недоступного об'єкта?» та інші. Цікаво буде для школярів опрацювати відомості про різні способи доведення теореми Піфагора, підготувати слайди з анімацією, що ілюструють хід доведення. Відомі давньокитайське, давньоіндійське, доведення Евкліда та багато інших. Бажано «відкрити» теорему Піфагора в ході комп'ютерного експерименту, дослідивши, що сума площ квадратів, побудованих проти катетів, рівна площі квадрата, побудованого проти гіпотенузи. Динамічну модель для дослідження створюють за допомогою GRAN-2D, GeoGebra чи DG. Важливо, щоб створені учнями динамічні креслення можна було використати в режимі покрокового відтворення. Послідовно відкриваючи евристичні підказки (словесні чи у вигляді додаткових побудов), відповідаючи на питання, що висвітлюються при натискуванні відповідної кнопки, школяр самостійно просуватиметься до кінцевого результату, висунення гіпотези та її обґрунтування.



Рис. 6. 1. Приклад звітної сторінки з переліком документів до проекту

Одним із «відчутних» продуктів проектного навчання можуть бути добірки розв'язаних завдань зі створеними до них слайдами, що містять динамічні креслення, підказки до ходу розв'язування. Користь від залучення учнів до створення динамічних креслень з підказками до розв'язаних ними задач в тому, що таким чином можна розвивати здібності до рефлексії та корекції навчальної діяльності. Адже учень має мисленно чи письмово пригадати, виявити, усвідомити кожен етап розв'язування задачі. Вичленивши кожен крок, намагатися оптимізувати хід розв'язування. Крім того, учень вчиться ставити питання, щоб спонукати ним до роздумів іншого школяра, який оцінюватиме чи вивчатиме його навчальний продукт. У процесі створення слайдів з підказками до розв'язування задач в учнів удосконалюються уміння аналізувати, синтезувати, порівнювати, розвивається здатність до оціночних суджень.

В наступному проекті пропонуємо учням поміркувати, в чому виявляється краса математики? Як, знаючи математику, можна створювати красиве? Версії учнів будуть, звичайно, різними – краса задач, методу розв'язування, ліній, малюнків тощо. Важливо не пропустити жодної думки, дати можливість кожному висловитися. Можливо, таке спілкування допоможе частині учнів по-новому поглянути на роль математики у його власному житті, а тому пробудить інтерес до її вивчення.

На впровадження проекту, пов'язаного зі створенням паркетів з правильних многокутників, доцільно відвести 5-6 тижнів, тобто весь час, протягом якого вивчається тема «*Многокутники*». Щоб урізноманітнити паркети, зробити їх привабливішими для школярів, а найголовніше, щоб ще більше охопити і втілити у проекті той матеріал, який вивчається на уроках відповідно до програми, доцільно розширити набір фігур для побудови і додати до них вписані у многокутники кола, шести-, трипелюсткові квіти чи інші фігури, що мають симетрію порядку n . Практичним результатом втілення проекту має стати колекція створених учнями паркетів для застеляння підлоги у кабінеті математики. Запропонований міжпредметний проект об'єднує математику та інформатику, креслення та мову, вимагає знань з образотворчого мистецтва і трудового навчання. Він відповідає державному освітньому стандарту та навчальній програмі з освітньої галузі «Математика». Всі навчальні здобутки учнів, їх навчальні продукти можуть перевищувати вимоги стандарту.

В ході реалізації проекту школярі мають відповісти на питання, чи можна вважати геометричні паркети витворами мистецтва, для чого на практиці можуть бути потрібні правильні многокутники, як знання геометрії може вплинути на вибір їхньої професії? Питання спонукатимуть учня до здійснення рефлексії, переосмислення власної діяльності, переоцінки власних здобутків.

Важливо здійснювати особистісний підхід у навчанні математики. «Дизайнерам» варто запропонувати обстежити паркети музеїв, картинних галерей, орнаменти лінолеумів в магазинах будівельних матеріалів.

Тут правильні многокутники можуть перекриватися. Доцільно представити у вигляді діаграми результати дослідження: які види правильних многокутників використовуються у створенні паркетів. «Дизайнери» можуть проводити опитування з питання взаємозв'язків математики, краси і творчості, випускати газету тощо. Групи «математиків», «технологів» більше уваги приділять пошуку алгоритмів побудови. На стадії планування роботи вчитель може запропонувати учням вибрати заняття до душі, відповідно до їхніх здібностей. Такий підхід сприятиме тому, що в учнів розвиватимуться пізнавальні інтереси, з'явиться бажання до пошуку нових фактів, що посилить внутрішню мотивацію. У зв'язку з можливістю вибору завдань і необхідністю досягнення певного рівня навчальних досягнень, потрібно навчати учнів *цілепокладанню*. Найпростіший рівень – вибрати мету з переліку запропонованих. Високий рівень – постійний вияв уміння прогнозувати кінцевий результат, прагнення до досягнення мети, наявність проміжних цілей. Здійснення рефлексії у навчанні (можливо, разом з учителем) допоможе учневі скоригувати мету подальшої роботи, визначити власний навчальний шлях.

Визначимо етапи реалізації проекту відповідно до загальної схеми проектного навчання. *Підготовчий етап* пов'язаний з визначенням теми і мети проекту, постановкою завдання. Вчитель обговорює разом з учнями план проекту, уточнює завдання для кожної з груп, ознайомлює з критеріями оцінювання різних форм звітності. Школярам пропонується опрацювати окремі джерела відомостей як друковані, так і електронні через мережу Internet.

Другий етап включає в себе пошук та аналіз відомостей. Учнім потрібно дізнатися, що таке геометричні паркети, чим однорідні паркети відрізняються від неоднорідних, розглянути різні зразки¹. Паркети, складені з правильних многокутників без перекривання, можуть бути двох видів – однорідними та неоднорідними. Однорідні паркети складаються з кількох видів правильних плиток, а у кожному вузлі сходиться однакова кількість плиток одного і того ж виду. У неоднорідних паркетів у вузлах сходиться різна кількість правильних многокутників.

Бажано, щоб дослідники обґрунтували, чому однорідних паркетів можна скласти лише одинадцять, в той час як кількість неоднорідних необмежена. Покажемо, як можна обґрунтовувати. Оскільки кут правильного n -кутника складає $1/2 - 1/n$ частин повного кута, то будь-якому однорідному паркету відповідає певний набір натуральних чисел $n, p, e,$

i, \dots , які задовольняють рівняння $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} - \frac{1}{e} + \frac{1}{2} - \frac{1}{i} + \dots = 1$. В

цілих числах рівняння має 17 розв'язків, але тільки 11 з них можна реалізувати у вигляді паркетів, плитки яких заповнюють всю площину і не

¹ Бевз Г. П. Геометрія паркетів / Бевз Г. П. – К. : Вежа, 2007. – 88 с. : іл.

перекриваються. Пошук розв'язків рівняння в цілих числах та їх перевірка є нестандартним завданням високого рівня. Наведемо приклади наборів для однорідних паркетів: 1) шість трикутників; 2) чотири квадрати; 3) три шестикутники; 4) квадрат і два восьмикутники; 5) трикутник і два 12-кутники; 6) 12-кутник, 6-кутник, квадрат; 7) трикутник, 2 квадрати, 6-кутник; 8) два квадрати і три трикутники. Неоднорідних паркетів (сходиться різне число правильних многокутників) можна побудувати нескінченно багато. Наприклад, поділити один з шестикутників на трикутники. Відшуковуючи потрібні відомості, учні вчать аналізувати матеріал, оцінювати його з позиції отримати новий продукт, усвідомлюють цей матеріал, розбирають обґрунтування певних фактів.

Третій етап. На уроці у формі проміжного звіту доцільно заслухати теоретиків проекту, уточнити завдання, вимоги. Домашнє завдання, крім традиційних завдань, має передбачати добровільне творче – розробку і виконання ескізу паркету.

Четвертий. На одному з наступних уроків варто заслухати звіт «математиків-істориків». Вони ознайомлюють решту учнів з правилами побудови правильних многокутників за допомогою циркуля та лінійки, розповідають, як це робили древні греки. Школярі готують відомості про внесок математика Гаусса у розв'язання проблеми побудови правильних многокутників, з'ясовують, які з правильних многокутників можуть бути гранями правильних многогранників та який філософський зміст древні греки вкладали у Платонові тіла?

Інша група може звітувати про особливості побудови многокутників за допомогою ПЗ GRAN-2D, DG, GeoGebra. Слід розглянути питання створення макроконструкцій для побудови правильних многокутників за відомою стороною, квітів для оздоблення паркетів. Завдяки створенню та встановленню макроконструкцій вдасться уникнути рутинності численних побудов, а це зробить процес розробки паркетів дійсно творчим.

Оскільки не кожний з многокутників можна побудувати вручну за допомогою циркуля та лінійки, то корисно запропонувати школярам розробити макроконструкції для наближеної побудови n -кутників з використанням ПЗ. Для цього на колі, в яке має бути вписаний n -кутник, вибирають довільну точку і створюють об'єкт *Коло за радіусом*. Точку перетину двох кіл беруть за центр наступного кола. Операцію виконують n разів. Тоді змінюють радіус малого кола так, щоб перша і остання точки співпали. Центри малих кіл будуть вершинами правильного многокутника.

У ході реалізації проекту учні добирають дані і опрацьовують їх у групах. Для кращої організації спільної роботи бажано обрати керівника групи, надавати учасникам диференційовану допомогу, щоб уможливити навчання учнів у «зоні найближчого розвитку». Завдання вчителя – вчасно почути, помітити, підтримати кожного учня, організувати їх співпрацю. Його завдання *не лише передати певну суму знань, але й навчити учнів самостійно їх здобувати і застосовувати*. Робота над на-

вчальним проектом сприяє тому, що в учнів розвиваються здібності до втілювання здобутих знань у духовні та матеріальні форми. Навчання у співпраці формує в учнів уміння розподіляти обов'язки між членами групи, стимулює розвиток здатності до міжособистісного спілкування, добросовісності, почуття обов'язку.

П'ятий етап. Одне з занять доцільно провести у комп'ютерному класі, де учні виконають побудови паркетів за допомогою ПЗ GRAN-2D чи DG, з використанням GeoGebra на мобільних телефонах (рис.6.2.в). Паркети на рис. 6.2 а створено за допомогою макроконструкцій, тому в переліку об'єктів є кола, симетричні точки, точки перетину, середини відрізків. На рис. 6.2 б зображено паркет, який створено за допомогою GRAN-2D з використанням послуги *Об'єкт \ Створення \ Правильний багатокутник*. Для побудови вказуються дві сусідні вершини багатокутника і кількість його сторін. Многокутник розташовується справа від побудованої сторони. Незважаючи на те, що будувати паркети за допомогою ПЗ швидше і приємніше, переконані, що спочатку необхідно сформувати в учнів уміння виконувати побудови багатокутників вручну, оскільки хід побудови цілком співпадає з ходом створення *Макроконструкції*.

Шостий етап. На уроці виводяться формули для радіусів вписаного та описаного кіл, для площі багатокутника, площі кільця, сектора, сегмента. Одночасно з обчисленнями за формулами, слід продемонструвати, як здійснюються обчислення вказаних величин за допомогою ПЗ.

Сьомий етап. Учні виконують розрахунки вартості паркету, враховуючи розміри кімнати, як вручну, так і за допомогою запропонованих ПЗ. Можна скористатися послугами обчислення площ багатокутників, периметрів багатокутників, довжин кіл, площ кругів. Для обчислення вартості викладання паркету можна складати динамічні вирази.

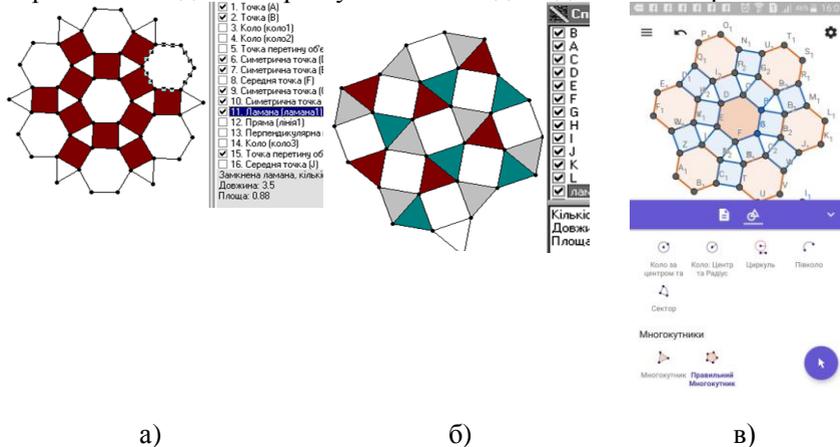


Рис. 6. 2. Однорідні паркети а), б) виконано за допомогою GRAN-2D; в) скріншот побудови з використанням додатка GeoGebra для мобільного.

Заключний етап. Оформлення результатів, презентація розробок, підведення підсумків. Учні створюють паспорт проєкту зазначаючи, скільки і яких матеріалів потрібно придбати, яка їх вартість, загальна вартість проєкту. Публікації, презентації відображають хід дослідження. На сайті подають оголошення про конкурс, його результати, зберігають колекцію створених малюнків. Створюючи презентацію, учні вчаться виступати перед аудиторією, структурувати доповідь, удосконалюють уміння добирати переконливі факти для демонстрації думок, ідей.

При оцінюванні результатів роботи необхідно враховувати, як представлені виконавці проєкту, наскільки зроблене відповідає поставленим завданням, в якому об'ємі дібрано і опрацьовано матеріали, чи відображені результати дослідження? Важливо звернути увагу школярів на наявність посилань на джерела відомостей. Інформатики можуть враховувати наявність в презентаціях заголовків слайдів, анімації, ефектів зміни слайдів, використання різних шрифтів, малюнків, фону, звуків.

Завершити роботу над проєктом необхідно самооцінкою та оцінкою результатів навчання. Для контролю рівня знань учнів можна передбачити написання контрольної роботи і подання відповідей на тестові завдання. Оцінюються всі види робіт, що їх виконували учні в ході реалізації проєкту. Найважливішою для становлення учня як самобутньої особистості є самооцінка. На основі рефлексивних суджень учень має здійснити власну оцінку діяльності: що нового дізнався, чого навчився, що зрозумів; які види роботи виходили краще; які труднощі були, що намагався зробити, щоб їх подолати; які позитивні зміни у нього відбулися.

Математична теорія симетрії, симетрія у живій та неживій природі, інженерії, архітектурі та мистецтві отримали спільне підґрунтя у геометричних перетвореннях.

Створення орнаментів тісно пов'язане з використанням симетричних фігур, потребує виконання геометричних перетворень. А.С. Гурська цитує німецького математика і філософа Германа Вейля: *«Мистецтво орнаменту містить у неявиному вигляді найдавнішу частину відомої нам вищої математики»*¹ (с. 49). Автор подає у посібнику цікавий матеріал, який можна школярам використати у роботі над проєктом «Геометрія українського орнаменту» (детальніше див. розділ 6) (http://wiki.iteach.com.ua/Користувач:Крамаренко_Тетяна_Григорівна).

Для школярів при вивченні теми «Многокутники», «Перетворення фігур» привабливими можуть бути проєкти *«Розмалюй писанку»*, «Геометрія українського орнаменту». Доцільно створити добірки калейдоскопів (див. п. 1.5.3), українських вишиванок, записати мелодії пісень про вишивання, запропонувати презентації про симетрію у живій природі і в архітектурі.

Вивчаючи теми на застосування похідної і визначеного інтеграла,

¹ Гурська А. С. Мова та граматики українського орнаменту : навчально-методичний посібник / Гурська А. С. – К. : Альтернативи, 2003. – 144 с.

доцільно впроваджувати проєкти, в яких розглядати задачі практичного змісту, задачі геометрії, фізики, економіки. У табл. 6.1 подано зміст творчо-пошукових завдань до теми «Застосування визначених інтегралів», які можуть виконувати школярі, готуючись до уроків систематизації і узагальнення у формі конференції. Доцільно наближено обчислити визначені інтеграли за допомогою *GRANI* чи *GeoGebra*. Наведемо приклади завдань на обчислення визначених інтегралів.

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$а) y = 3x - x^2 - 1.5, y = 0.5 \cdot |2x - 3|; б) y = 7 - |x|, y = 0.25 \cdot |4 - x^2|.$$

Щоб обчислити площу фігури за допомогою програмного засобу, потрібно побудувати графіки функцій, наближено визначити межі інтегрування, розташувавши курсор в точках перетину графіків, а потім скористатися послугою *Операції \ Інтеграл (GRANI)*. Для завдання а) спочатку обчислюють площу фігури обмеженої зверху параболою, потім площу фігури, обмеженої кутом, і знаходять різницю знайдених величин.

2. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо прямої $y=0$ криволінійної трапеції, обмеженої кривими $Y=1+0.5\sin 2x$, $x=0$; $x=\pi/2$; $y=1$. Для обчислення за допомогою ПЗ *GRANI* використовують послугу *Інтеграл \ Об'єм тіла обертання \ Вісь Ox*. При цьому зображається тіло обертання.

3. Щоб отримати конус заданого об'єму чи заданої поверхні обертання, слід через параметри подати межі інтегрування і, рухаючи бігунок параметра, дібрати необхідне значення параметра.

4. Ширина річки 20 м, заміри глибини у поперечному перерізі через кожні 2 м наведено в таблиці, де x – відстань від берега, а y – глибина у метрах. Визначити наближено площу поперечного перерізу.

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	0,5	0,8	1,9	2,3	2,9	3,9	3,7	3,1	3,5	2,8	1,5

Щоб побудувати ескіз поперечного перерізу русла, слід обрати тип даних *Ламана* і занести в таблицю координати точок. Щоб можна було скористатися послугою *Операції з ламаними \ Площа многокутника*, необхідно додати ще дві точки $(0,0)$, $(20,0)$ і замкнути ламану. У вікні *Відповідь* отримаємо результат обчислення 51,8 кв. од.

Вивчаючи тему «Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики», школярі проводять різноманітні дослідження: відслідковують курси валют; визначають зріст школярів, вагу, щоб дати рекомендації щодо харчування; досліджують якість знань; мелодійність мови через наявність м'яких приголосних, відповідних голосних букв тощо. Опрацювання результатів дослідження зручно виконувати за допомогою ПЗ *GRANI*, таблиць *Google*. Дослідження показали, що школярам важче скласти практичні рекомендації за частотною таблицею, ніж розрахувати саму таблицю. Тому час, який вивільняється завдяки застосуванню

ПЗ для опрацювання даних, доцільно використати на постановку задачі, на обговорення результатів дослідження.

Таблиця 6.1

Зміст творчо-пошукових завдань для учнівської конференції

№	Зміст завдань, виконавці (подано назви груп)	
1	Історичні	Історична довідка. Підготувати повідомлення про видатних математиків, чий імена пов'язані з розвитком теорії інтегрального числення
2	Математики Інформатики	Методи інтегрування (безпосереднього інтегрування, заміни змінної, інтегрування частинами). Геометричний зміст визначеного інтеграла. Підготувати теоретичні відомості, <ul style="list-style-type: none"> ▪ добірки завдань на обчислення визначених інтегралів; ▪ завдання для розв'язування за допомогою ПЗ.
3	Математики	Задачі геометрії. Підготувати <ul style="list-style-type: none"> ▪ теоретичні відомості (обчислення площі фігури, об'єму тіла, об'єму тіла обертання); ▪ добірки задач на обчислення площі фігури, об'єму тіла, об'єму тіла обертання).
4	Інформатики	Підготувати завдання на обчислення за допомогою ПЗ: <ul style="list-style-type: none"> ▪ площі фігури; ▪ обчислення площі поверхні і об'єму тіла обертання, ▪ вписати у певну криву ламану, оцінити точність обчислення площі фігури, об'єму тіла обертання. Створити презентацію «Об'єми тіл обертання» за допомогою Microsoft PowerPoint, що містить теоретичні відомості
5	Економісти	Економічний зміст визначеного інтеграла. Підготувати теоретичні відомості про <ul style="list-style-type: none"> ▪ визначення коефіцієнта Джинні, ▪ застосування функції Кобба-Дугласа, ▪ визначення середнього часу на випуск одиниці продукції Дібрати відповідні задачі економіки.
6	Фізика Історика	Задачі фізики. Систематизувати типи задач, підготувати формули. Підготувати завдання на обчислення <ul style="list-style-type: none"> ▪ задача на обчислення роботи газу, ▪ роботи для побудови піраміди Хеопса Підготувати і продемонструвати досліди Підготувати історичну довідку про єгипетські піраміди
7		Підготовка матеріалів для випуску «Інформаційного дайджесту»

Вивчаючи тему «Многогранники», доцільно організувати роботу учнів над проектом «Перерізи многогранників площиною» (див. п. 2.1), об'єднавши їх у групи залежно від того, які засоби для побудови будуть застосовуватися – Microsoft PowerPoint, динамічна геометрія GRAN-2D, GeoGebra чи DG, ПЗ GRAN-3D (рис. 6.3). Доцільно так розробити наочності за допомогою названих засобів, щоб можна було покроково відтворити хід побудови перерізу, *вмикати / вимикати* кнопку побудови перерізу, записи ходу побудови, звуковий супровід. Рухаючи точки вздовж ребер чи в зазначених площинах, можна імітувати рух січної площини. При цьому може змінюватися форма перерізу і послідовність кроків побудови.

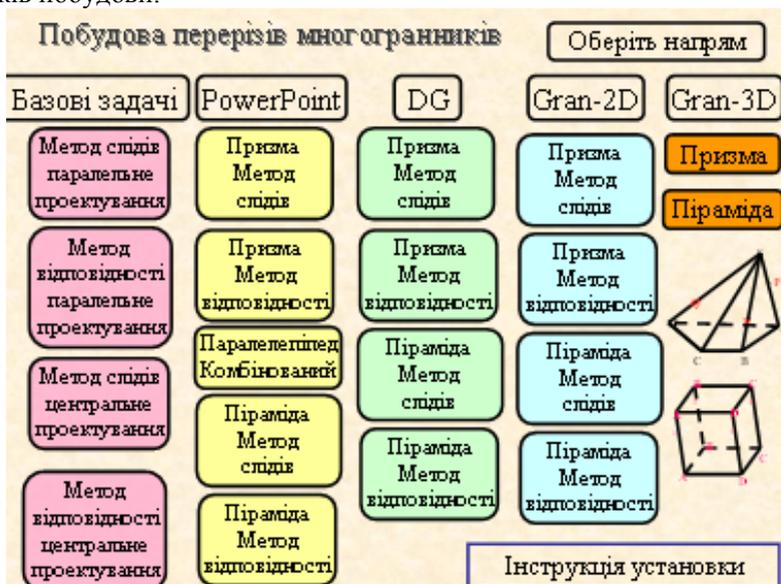


Рис. 6.3. Меню презентації «Перерізи многогранників»

Підсумовуючи, виділимо ті ідеї навчання за методом проєктів, які підкреслюють доцільність його використання в процесі навчання математики:

- сприяють фундаменталізації навчання через глибоке, усвідомлене засвоєння базових знань, що забезпечується за рахунок їх універсального використання в різних ситуаціях, передбачених роботою над проектом;
- забезпечують розвиваюче навчання завдяки комплексному підходу до розробки навчальних проєктів; в тому числі, сприяють розвитку творчих якостей учня, формуванню умінь самостійно конструювати свої знання, умінь орієнтуватися в інформаційному просторі;
- стверджують особистісно орієнтований підхід у навчанні, підвищують внутрішню мотивацію школяра через гармонійне вбудовування освітнього процесу в логіку діяльності учня, що має для нього особистісний зміст.

Контрольні питання і завдання

1. Дібрати матеріали для організації навчання за проектною технологією за обраною темою. Продумати і сформулювати ключові, тематичні та змістові питання для учнів, скласти план проєкту і план його реалізації. Передбачити, як навчання за проектною технологією буде поєднуватися з класно-урочною системою навчання.

2. Звітувати про розроблений проєкт поданням наступних матеріалів:

- *план проєкту*, що містить короткий його опис; ключові, тематичні, змістові питання для розкриття обраної теми; завдання для груп учнів чи індивідуальні; список рекомендованих джерел для використання учнями; перелік необхідного обладнання і матеріалів та ін.;
- *план реалізації проєкту* із зазначеними термінами виконання завдань;
- *учительська презентація* або *сайт* чи *газета*, в якій учитель розкриває завдання для учнів, демонструє зразки виконання завдань;
- *засоби оцінювання* учнівських презентацій, публікацій, сайтів; підготовлені подяки чи інші знаки уваги; електронні таблиці, в яких обчислюються середні бали, вибудовуються рейтинги учнів;
- *приклади учнівських робіт* – презентація, публікація, веб-сторінки, в яких розкриваються поставлені у проєкті питання, реферати, подаються звіти про виконання завдань, зроблено висновки за висунутими гіпотезами;
- *дидактичні матеріали* – опитувальники, що містять текстові поля, поля –прапорці, поля-списки; організаційні діаграми тощо;
- *звітна сторінка* розробленого проєкту з коротким його описом, переліком виконаних робіт, з гіперпосиланнями з переліку на виконані роботи.

3. Проаналізувати, які особистісні якості учнів можна розвивати в ході реалізації розробленого проєкту з використанням ІКТН математики.

4. Для проєкту «Геометрія українського орнаменту» (7-9 клас) розробити завдання для «математиків», які створюють геометричні візерунки, досліджують, які геометричні фігури використовуються в орнаментах. Передбачити завдання для «вишивальниць», «модельєрів сучасного одягу з українським орнаментом», для «художників».

6.2. Методика розробки і упровадження навчальних проєктів

6.2.1. Методичні особливості проведення тренінгу «Intel® Навчання для майбутнього».

Проблемам використання ІКТ в освіті присвячена низка наукових праць В. Ю. Бикова [7], М. І. Жалдака [1], [16-21], С. С. Семерікова [38], Ю. В. Триуса [47], С. А. Ракова [41], Ю. В. Горошка [1], [17], А. М. Стрюка [38], М. В. Попель [38], Ю. В. Єчкало [38], С. В. Шокалюк [38], О. М. Маркової [33] та ін.

Низку актуальних інтерактивних технологій навчання у вищій школі подає Н. П. Волкова [14]. Серед них діалогічно-дискусійні, аналізу

ситуацій, ігрові, навчання у співробітництві, тренінгу, фасилітаційного навчання, ІКТ, гейміфікації. Серед ігрових технологій дослідниця виділяє ділові ігри, роліви, інтерактивні, соціально-психологічні, квести.

Підготовці фахівців за програмою «Intel® Навчання для майбутнього» присвячені окремі роботи Н.В. Морзе та Н. П. Дементієвської [15], [35], [37] та ін. Ключове питання тренінгу: як ефективно використовувати інформаційно-комунікаційні технології для підтримки та оцінювання в процесі навчання учнів і студентів? Про впровадження STEM-проектів як один із факторів посилення мотивації учіння математики мова йшла в п. 6.1. цього навчального посібника [31], [28].

Розглянемо детальніше особливості тренінгу «Intel® Навчання для майбутнього». Такий тренінг доцільний як для підвищення кваліфікації учителів в системі післядипломної освіти, так і в якості навчальної практики при підготовці бакалаврів за спеціальністю 014.04. Середня освіта (Математика), що підтверджує багатолітня практика проведення таких тренінгів у Криворізькому державному педагогічному університеті ([2017/2018 н.р., 2016 / 2017 н. р., презентація Prezi про тренінг](#)).

Для проведення навчальної практики на основі електронних ресурсів [35], [37] нами розроблено електронний навчальний курс [30] (<https://moodle.kdpu.edu.ua/course/view.php?id=429>).

До чого варто привернути увагу майбутніх і практикуючих вчителів? Насамперед, передбачено широке використання сервісів *Веб-2.0: Блоги, Вікі, Сервіси збереження закладок на сайти, Документи Google, Фотосервіси, Геосервіси, Сервіси для онлайнного збереження документів, для створення Карт Знань* та ін. Використовуючи і створюючи власні блоги чи вікі, учасник тренінгу інтерпретує власні знання й поширює їх, більшою мірою стає викладачем. Доцільно, наприклад, через написання блогів модернізувати форми звітності з літньої педагогічної чи виробничої практики студентів: у такій формі подавати щоденник психолого-педагогічних спостережень, звітувати про проведення позакласних та виховних заходів [25], [48]. А саме це і важливо для сучасного напрямку підготовки спеціалістів. *Вікі-сторінки* використовують як для обговорення педагогічних проблем, так і для подання результатів дослідження, у тому числі й учнів. Робота з учнівською вікі має допомогти підготувати майбутніх науковців писати Вікіпедію-енциклопедію. Наразі є можливості писати вікі-сторінки при використанні у навчанні системи управління електронними навчальними курсами MOODLE.

Розглянемо, яке програмне забезпечення і пристрої рекомендуються для застосування. Спостерігається відхід від локальної версії *Microsoft Office* та *перехід до мережного навчання і використання хмарних сервісів, вільного програмного забезпечення*. Насамперед, *хмарних сервісів Google та Microsoft*. Поняття «хмарні інформаційно-комунікаційні тех-

нології» можемо трактувати за О. М. Марковою: це мережні ІКТ, що передбачають централізоване (серверне) мережне зберігання та опрацювання даних (виконання програм), за якого користувач виступає клієнтом (користувачем послуги), а «хмара» сервером (постачальником послуги) [33].

До нових пристроїв відносимо ноут(нет)буки, електронні книжки, планшети, мобільні телефони та ін., які можуть використовувати як учні / студенти, так і викладачі для забезпечення мобільності навчання. Розглядаються також нові форми роботи у мережі. Зокрема розробка спільних текстових документів, документів електронних таблиць, сайтів, блогів, вікі-сторінок. Учасник тренінгу розробляє *Портфоліо* вивчення певної кількогодинної теми, разом з іншими учасниками тренінгу опановує нові форми роботи.

Наразі багато дискусій ведеться з приводу того, як потрібно оцінювати діяльність учнів. У ході роботи над проектом раніше мова йшла про підсумкове оцінювання і розробку вчителем відповідних форм. На сьогодні рекомендується розглядати три форми оцінювання. Вхідне оцінювання здійснюється через визначення навчальних потреб учнів і має в повній мірі враховувати мотиваційний компонент. Розроблено і пропонується викладачам кілька десятків форм для поточного оцінювання, у тому числі оцінювання самоспрямування. Підсумкове оцінювання має відбивати не лише рівень засвоєння матеріалу, але й розвиток навичок мислення високого рівня (аналіз, синтез, оцінювання).

Значна увага приділяється також розвитку навичок ХХІ століття. Використовуючи метод навчальних проєктів, у сучасних учнів потрібно розвивати творчість та інноваційність, критичне мислення та вміння вирішувати проблеми, комунікативні навички та навички співробітництва. Не менш важливо формувати навички працювати з відомостями, медіа та комп'ютерні навички, у тому числі інформаційну грамотність, медіа-та ІКТ-грамотність (грамотність у галузі інформаційно-комунікаційних технологій). А ще сучасним школярам стануть у нагоді набуті життєві навички для майбутнього кар'єрного зростання: гнучкість та пристосовуваність, ініціативність та самоспрямованість, соціальні навички та навички, які пов'язані з співіснуванням різних культур, продуктивність та вміння враховувати кількісні показники, лідерство та відповідальність. Значна увага під час тренінгу приділяється проблемам фасилітації, тобто підтримки учня та студента у навчальній діяльності, у тому числі з використанням інформаційно-комунікаційних технологій.

Доцільно з'ясувати, як сучасні пропозиції щодо методу навчальних проєктів співвідносяться з класно-урочною системою навчання в школах. В оновленій версії тренінгу мова йде про впровадження навчальних проєктів у рамках вивчення певної теми. Це дає тіснішу прив'язку до діючих навчальних стандартів і програм, до можливості використання методу

проектів в умовах класно-урочної системи навчання. Для навчання учасників тренінгу можна використовувати електронний посібник, який містить ресурси і довідник з питань використання програмного забезпечення. У довіднику користувач може робити нотатки та зберігати їх [35], [37].

Викладачам, які бажають удосконалити ІКТ-компетентності, важливо визначити власні навчальні потреби, діагностувати рівень умінь використовувати мережні технології, хмарні технології, щоб отримати цілеспрямовану допомогу. Особлива увага учасників тренінгу звертається на те, як поставити перед собою власні цілі, які реально можна досягти на тренінгу та продовжувати реалізовувати після нього. Важливо кожному учаснику тренінгів усвідомити, як власні цілі навчання допоможуть удосконалити педагогічний досвід та цілеспрямовано підвищувати кваліфікацію.

Навчання сприяє виробленню в учасників тренінгу навичок учителя ХХІ століття: знати та уміти використовувати нові технології, застосовувати смартфони для мобільного навчання школярів, вести блог і залучати за його допомогою учнів до співпраці, рости учнів-творців, застосовувати проектно побудоване навчання та інші навички.

Студенти спеціальності «Математика» з додатковою спеціальністю «Інформатика» у подальшому можуть вести блоги як щоденники психолого-педагогічних спостережень під час літньої педагогічної практики, виробничої практики в школі на четвертому курсі та у магістратурі, у ході асистентської практики у ЗВО. Доцільність таких електронних форм звітності за результатами практики ми досліджували у Криворізькому державному педуніверситеті. За результатами пілотного проекту подали рекомендації: в якості щоденника психолого-педагогічних спостережень доцільно писати блог, розміщуючи у його повідомленнях відеофрагменти та світлини проведених заходів [25], [48].

Оскільки розробка навчальних проектів учнями пов'язана з прикладною спрямованістю навчання, то доцільно запропонувати учасникам тренінгу використовувати збірник компетентнісно орієнтованих задач [13], які охоплюють чотири наскрізні лінії компетентностей в учнів.

6.2.2. Аналіз STEAM-проекту до теми шкільного курсу математики «Геометричні перетворення на площині. Рухи».

Розглянемо [приклад навчального проекту](#), розробленого нами за програмою «Intel® Навчання для майбутнього» до навчальної теми «Геометричні перетворення на площині. Рухи». При розробці проекту використовуються матеріали окремих тем трудового навчання, інформатики, мови та літератури. Дана тема вивчається учнями у дев'ятому класі, приблизний вік учнів 13-14 років.

Основним математичним змістом [проекту «Геометрія українського](#)

[орнаменту](#)», який об'єднає математику, українську мову та літературу, інформатику, історію України і трудове навчання є практичне застосування рухів, різних видів симетрії, паралельного перенесення для виконання українського орнаменту.

Учні мають набути навичок створення математичних моделей реально існуючих об'єктів та застосування математичного апарату для розв'язання прикладної задачі. Учні ознайомляться з різними видами українських орнаментів, які притаманні різним регіонам України. Також вони навчатимуться виконувати вимірювання кутів повороту на малюнку і його симетричне відображення для отримання неповторного українського орнаменту (рис.6.4).

Наведені у [проскті](#) малюнки, ілюстровані приклади містять диференціацію навчального матеріалу для учнів, які цікавляться математикою більш поглиблено. Учні досліджують символіку «Рушника національної єдності» і розробляють проєкт для «Рушника єдності однокласників».



Рис. 6. 4. Фрагмент рушника з українським орнаментом

Учні будуть розробляти інформаційний бюлетень та розробляти веб-сторінки з фотографіями, малюнками та статтями для шкільного веб-сайту, створюватимуть та демонструватимуть власні мультимедійні презентації для учнів класу, набудуть навичок роботи у команді.

Можна переглянути *План вивчення теми "Геометричні перетворення. Рухи"* та *План впровадження проєкту*.

Розглянемо, які навчальні цілі можуть бути досягнуті у процесі роботи над проєктом. Учень/учениця

- наводить приклади фігур та їх образів при геометричних перетвореннях (перетворення руху), указаних у змісті; фігур, які мають центр симетрії, вісь симетрії; рівних фігур;

- пояснює що таке переміщення (рух); образ фігури при геометричному переміщенні; фігура, симетрична даній відносно точки (прямої); симетрія відносно точки (прямої); паралельне перенесення; поворот; рівність фігур;

- формулює означення рівних фігур; властивості переміщення; симетрії відносно точки (прямої); паралельного перенесення; повороту;

- зображує і знаходить на малюнках фігури, в які переходять дані фігури при різних видах переміщень;

- обґрунтовує симетричність двох фігур відносно точки (прямої); наявність у фігури центра (осі) симетрії; рівність фігур із застосуванням переміщень;

- доводить властивості симетрії відносно точки (прямої); паралельного перенесення; повороту;

- застосовує вивчені означення й властивості до розв'язування задач.

По закінченню роботи над проектом учні зможуть знати

- означення симетрії відносно точки; відносно прямої; повороту; паралельного перенесення;

- здійснювати проектну діяльність за заданими умовами;

- графічно відображати творчий задум;

- давати творчу оцінку досконалості результатів проектної діяльності;

- застосовувати принципи конструювання та моделювання у творчій діяльності;

- здійснювати конструювання та моделювання за графічним зображенням, за технічними умовами чи власним задумом.

Учні повинні вміти

- описувати перетворення руху на площині;

- будувати фігури, в які переходять дані фігури при перетвореннях руху;

- наводити приклади предметів навколишнього світу, які мають центр та вісь симетрії; розкласти та створювати об'єкти за допомогою композиції перетворень;

- знаходити приклади рухів в орнаментах; в природі; побуті; мистецтві; архітектурі; літературі;

- швидко та ефективно шукати відомості; • використовувати комп'ютерні технології як інструмент для спілкування;

- критично та компетентно оцінювати відомості;

- здійснювати самоспрямування у власній роботі;

- працювати в команді;

- презентувати власні досягнення; швидко та ефективно шукати відомості, критично та компетентно оцінювати їх, уміти правильно та творчо використовувати дані для вирішення проблем;

Учні мають сформувати навички

- роботи над творчими ідеями для внесення вагомого та корисного вкладу у царину, в яку впроваджується інновація;

- здійснювати вибір та приймати комплексні рішення;

- визначати та ставити суттєві запитання для прояснення різноманітних позицій з питання «Рухів»;

- оформляти, аналізувати та синтезувати відомості для вирішення проблем та відповідей на запитання;

- ефективного спілкування: усного, письмового та за допомогою мультимедіа-засобів в різноманітних формах та в різних умовах;
- базового розуміння етичних/правових питань, пов'язаних з доступом до відомостей та їх використанням;
- використовувати цифрові технології комунікаційних мереж для доступу, управління, інтегрування, оцінювання та створення інформаційних даних для успішного функціонування в суспільстві математичних знань;
- використання комп'ютерних технологій як інструменту для спілкування, досліджень, організації, оцінювання відомостей, володіння базовим розумінням етичних/правових питань, пов'язаних з доступом та використанням.

У поданій нижче таблиці представлено основні етапи проекту, методи та інструменти оцінювання (табл. 6.2).

Таблиця 6.2.

Етапи проекту, методи та інструменти оцінювання

Методи оцінювання	Інструменти оцінювання
На початку проекту	
<p>Використовуються такі методи оцінювання як опитування; перегляд та обговорення презентації вчителя; робота з таблицями.</p> <p>Визначення попередніх знань учнів щодо теми та того, що саме вони знають, відбувається при заповненні ними Опитувальника у формі діаграми (текстовий документ з схематичною діаграмою) та таблиці З-Х-Д (Знаю, Хочу дізнатися, Дізнався). Учні знайомляться з нотатками вчителя, з Презентацією основних питань, де визначають основні запитання, над якими потрібно буде працювати під час вивчення теми. Вчитель знайомить учнів з переліком навичок 21 століття та спрямовує учнів на набуття цих навичок та їх самооцінку.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Таблиця «З Х Д»; • Опитувальник за темою проекту; • Презентація основних питань • Опитування на знання основних понять до теми Опитувальник "Що знаю і вмію?"
Впродовж роботи над проектом	
<p>Використовують для оцінювання учнів наступні методи:</p> <ul style="list-style-type: none"> • консультації (on-line); • продовження роботи з таблицями З-Х-Д; • самостійну роботу учнів з листами оцінювання проекту та кінцевого продукту проекту (само- і взаємооцінювання); • робота з опитувальниками до теми. 	<ul style="list-style-type: none"> • Таблиця «З Х Д»; • Листи оцінювання проекту та кінцевого продукту проекту; • Форма самоспрямування роботи у групі; • Форма самоспрямування власного навчання • Форма оцінювання

<p>Учні також використовують Форму оцінювання самоспрямування власного навчання та навчання у групі; листи оцінювання проекту та кінцевого продукту проекту (само- і взаємооцінювання). Результати роботи подають в онлайн-таблиці для контролю роботи над проектом.</p>	<p>веб-ресурсів</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Онлайн-таблиця для контролю; ● Опитувальник до теми ● Опитувальник (локальна v)
<p>Наприкінці роботи над проектом</p>	
<p>Використовують такі методи оцінювання як демонстрація (захист проекту); робота з таблицями; анкетування; аналіз онлайн-таблиці та листів оцінювання. Періодичний перегляд та читання записів та коментарів учнів на сайті чи в групі проекту дозволяє оцінити розуміння учнів і, при необхідності, скерувати їх навчання в потрібному напрямку. Учні разом з учителем переглядають таблицю 3-Х-Д оцінюють та самооцінюють, наскільки записи у колонках 2 і 3 можна співставити. Заповнюються листи оцінювання проекту, проводиться анкетування; результати висвітлюють у google-таблиці. Під час виступу з презентацією використовують форму оцінювання презентації. Контрольний список для оцінювання однолітками математичної презентації призначений для учнів, які дають зворотній зв'язок на виступ однолітків з демонстрацією їх проектної групової роботи з математики. Використовують Форму оцінювання проекту з балами для підсумкового оцінювання та лист-контроль Оцінювання навичок спільної діяльності роботи в групі та вклад, який зробив кожен учень в роботу групи і наскільки його вклад був цінним. Учні здійснюють рефлексію щодо формування навичок 21 століття.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ● Таблиця «3 Х Д»; ● Презентація основних питань ● Лист оцінювання проекту та кінцевого продукту проекту; ● Форма оцінювання презентації; ● Форма оцінювання блогу; ● Форма оцінювання сайту ● Лист-контроль Оцінювання навичок спільної діяльності; ● Онлайн-таблиця для контролю; ● Опитувальники з матеріалами до теми; ● Тексти письмової роботи.

Детальніше зупинимося на діяльності учнів та вчителя на кожному з етапів розробки проекту.

I етап – Підготовчий.

До початку роботи над проектом вчитель

- створює сайт проекту, де висвітлюються посилання на корисні джерела відомостей та інтернет-ресурси, закладки на сайти, які будуть використовуватися в проекті;

- передбачає різні варіанти для online консультацій учнів.

До початку роботи над проектом вчителю потрібно:

- разом з учнями переглянути буклет учителя про формування навичок мислення високого рівня (файл може бути створений за допомогою Publisher), попередньо завантажити перелік навичок 21 століття;
- розглянути основні терміни та основні поняття до теми, що вивчається;
- пересвідчитися, що учні знають, як користуватися програмними засобами GeoGebra і Gran-2D, якщо передбачається їх використання;
- перевірити, чи учні знають, як шукати відомості в мережі Інтернет, зберігати їх та документувати; здійснити роботу з учнями щодо пошуку та оцінювання ними веб-ресурсів та дотримання законів про авторське право;
- переконатися, що учні попередньо мають відповідні навички роботи з MS Word, MS PowerPoint, MS Publisher чи хмарними сервісами Google, пошуковими серверами, відомостями в мережі Інтернет (збереження, пошук, перегляд), мають навички створювати блоги, сайти та забезпечити можливості навчання тих, хто таких навичок не має. При потребі можна використати опитувальник "Що знаю і вмю для роботи над проєктами?".

II етап – Мотиваційний етап.

Перший тиждень

- Перед учнями ставиться ключове питання: що нас об'єднує? Під час проведення мозкового штурму відбувається його обговорення.
- Визначаються можливі напрями, які могли б дати відповідні набори даних. Обговорюються та оцінюються ідеї учнів, які вони пропонують.
- Вчитель пропонує учням презентацію основних питань. Тематичні та змістові питання допоможуть учням зрозуміти тему та мету даного проєкту.
- Вчитель обговорює з учнями, наскільки є доцільним для запропонованої теми знання про геометричні перетворення.
- Щоб перевірити рівень володіння учнями записами основних математичних понять, а учні усвідомили і оцінили власні попередні знання та з'ясувати, що саме вони знають з теми проєкту «Геометрія українського орнаменту», всім класом заповнюють дві перші колонки таблиці З-Х-Д (знаю – хочу дізнатися).
- Щоб оцінити попередні знання учнів для виконання проєкту виконується завдання по заповненню графічних схем.
- Учні формують 4 групи, обирають одну з тем для дослідження; обирають спосіб представлення результату своєї роботи.
- Використовуючи буклет про метод навчальних проєктів, учні пригадують разом з учителем основні етапи здійснення навчального дослідження про відмінності орнаментів у різних регіонах України.

- Вчитель повідомляє, наприклад, що на сайті проекту створено сторінку для рефлексії учнів на кожному кроці роботи над проектом. Цю ж сторінку можна використовувати для проведення консультацій online. Консультації можна отримувати, якщо використовувати і сервіс *Google Групи*, інструмент *Форум* (MOODLE), спілкування у групі з використанням *Viber* чи *Messenger*.

- Вчитель повідомляє, що використовує доступну учням онлайн-таблицю для контролю, в якій відображається результат просування кожної групи над дослідженням.

- Оскільки для дослідження учні будуть використовувати Інтернет, то кожній групі доцільно ознайомитися з критеріями оцінювання інтернет-ресурсів; презентацією «Пошук відомостей у мережі Інтернет»

- Варто провести міні-лекцію «Авторські права в мережі Інтернет».

- Для оцінювання роботи в групі та вкладу, який вніс кожен учень в роботу групи і наскільки його вклад був цінним, керівники груп отримують лист-контроль «Оцінювання навичок спільної діяльності».

- Для забезпечення диференціації навчання вчитель рекомендує учням використовувати форму оцінювання самоспрямування роботи у групі, а також форму оцінювання самоспрямування власного навчання.

Учитель пропонує учням форму оцінювання проекту та кінцевого продукту проекту і проводить її обговорення. Ця форма містить огляд очікувань від створеного ними учнівського проекту. Учитель просить учнів використовувати Форму, щоб допомогти їм відслідковувати свій прогрес у просуванні до завершення проекту і те, як відбувається їх навчання.

III етап – Конструктивний етап.

Вчитель пропонує учням використати документ *Контрольний список Оцінювання веб-сайту*, *Оцінювання публікації*, *Оцінювання презентації* (*Форма 1*, *Форма 2*), щоб допомогти учням планувати та стежити за своїм прогресом. Попередньо відбувається обговорення цих форм з керівниками груп, щоб переконатися, що вони розуміють критерії оцінювання перед початком роботи. Рефлексія та консультації, взаємооцінювання відбувається протягом всієї роботи.

Одним із документів фасилітації є Презентація основних питань вчителя. Учитель у роботі має дотримуватися стратегій фасилітації.

Для забезпечення диференційованого підходу у навчанні вчитель використовує у роботі доцільні стратегії навчання і оцінювання обдарованих учнів та [учнів з обмеженими можливостями](#)

Другий тиждень

Учні, ознайомившись зі своїми тематичними питаннями, протягом першого тижня займаються

- пошуком відомостей,
- складають план діяльності для впровадження своїх планів,
- визначаються зі способом представлення результату роботи та
- та використовують *Форми оцінювання самоспрямування* у навчанні ([Форма1]; [Форма2]).

Учителю доцільно провести рефлексію з учнями та індивідуальні консультації з кожною групою, скоригувати їх діяльність, надати певні рекомендації та спрямувати роботу над питаннями.

Третій-четвертий тиждень

Вивчаючи на уроках матеріал теми, учні в позаурочний час працюють також над створенням презентації, публікації чи веб-сторінок.

- **I група, «Історики».** Можуть знайти історичні факти про походження українських орнаментів; дослідити семантику орнаментів; знайти цікаві відомості про вишивання рушників у різних регіонах України; проаналізувати, які геометричні перетворення зустрічаються в цих орнаментах. За результатами дослідження учні можуть підготувати публікацію на сайті чи в блозі (наводимо приклад публікації, створеної за допомогою Publisher, [можна публікацію завантажити і переглянути](#)). У процесі роботи вони користуються критеріями *оцінювання публікацій*.

- **II група, «Математики»** досліджують властивості різних видів рухів, готують повідомлення, з якими виступають на заняттях протягом другого і третього тижнів вивчення теми. Для успішних виступів учні готують презентацію ([приклад презентації](#)). При цьому керуються формою з *критеріями оцінювання*. Крім того добирають відеофрагменти про вишивання, про поєднання кольорів тощо.

- **III група, «Дизайнери»** досліджують, як виконують геометричні перетворення за допомогою системи динамічної геометрії *GeoGebra* або *GeoGebra* і виступають з повідомленнями на заняттях, допомагають всім учням виконувати ці перетворення за допомогою засобів. А також «дизайнери» добирають колекцію фотографій, малюнків з вишиваним одягом із різних регіонів України, аналізують, які перетворення використовують не лише в орнаменті, але й взагалі у конструкції. Вони, приміром, можуть [розробити сторінку на сайті](#).

- **IV група, «Вишивальниці»** шукають відомості про «*Рушник національної єдності*», про що створюють сторінку на сайті проекту, а також організують всіх вишивати «*Рушничок єдності класу*», використовуючи елементи українського орнаменту.

- **V група учнів, «Писанкарі»** готують матеріал про орнаменти у писанкарстві, а також колекцію картинок з писанками і власних писанок, яку демонструють під час захисту проекту. *Результати роботи представляють на сторінках сайту*. Розробляючи сторінки сайту, учні використовують *критерії оцінювання учнівського веб-сайту*.

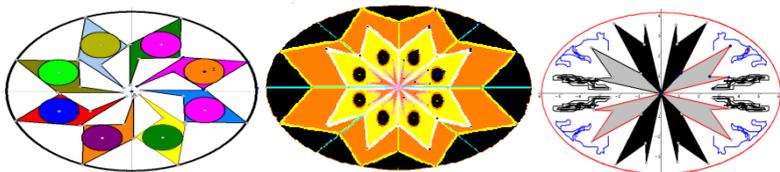


Рис. 6. 5. Візерунки для писанок

Учні усіх груп розглядають застосування перетворення симетрії, повороту, паралельного перенесення до розв'язування задач.

П'ятий тиждень

Перед завершенням роботи учні, використовуючи *Критерії оцінювання підсумкової роботи*, перевіряють свою роботу та коригують навчальні потреби.

- Кожна група подає вчителю лист-контроль оцінювання самоспрямування роботи у групі; оцінювання навичок спільної діяльності.
- Перед захистом всі групи можуть обмінятися контрольними списками (Учнівська презентація ходу та результатів проєкту, Учнівська публікація чи Учнівський сайт тощо) та по ходу захисту оцінюють своїх товаришів. **Наразі це зручно робити, якщо до створеного і розміщеного, наприклад, на Google-диску документа надати учням доступ з правом його редагування.**

У призначений вчителем день захисту проєкту під час виступу з презентацією використовують форму оцінювання презентації. Контрольний список для оцінювання однолітками математичної презентації призначений для учнів, які дають зворотній зв'язок на виступ однолітків з демонстрацією їх проєктної групової роботи з математики. **Подаємо приклади окремих робіт учнів:**

- учнівський веб-сайт, на сторінках якого представлено матеріали кожної з груп проєкту;
- учнівська презентація - звіт про роботу над проєктом (рис.6.6); учнівська публікація (необхідно файл завантажити і переглянути за допомогою Publisher)

IV етап – захист проєкту

• Щоб перевірити рівень володіння учнями навчальним матеріалом, відбувається підсумкове оцінювання вмінь і навичок та заповнюється і обговорюється [третя колонка таблиці З-Х-Д. Учні разом з учителем переглядають таблицю З Х Д оцінюють та самооцінюють, наскільки записи у колонках 2 і 3 можна співставити.

- **Учні можуть писати підсумкову письмову роботу**
- Підбиваються підсумки і виставляються учням оцінки.

• Після представлення всіх результатів відбувається узагальнююче обговорення ключового питання.

Доцільно для подальшої участі учнів у навчальних проєктах здійснити рефлексію.



Мистецтво орнаменту містить у неясному вигляді найдавнішу частину відомої нам вищої математики
Герман Вейль



Ексклюзив від Юлії Тимошенко



Традиційний український одяг у сучасній обробці

У попередок Юлія Тимошенко вирішила виглядати бездоганно від коси до підборів. На урочистих зборах у ласного блоку вона, вдуже за останні кілька місяців, з'явилася у національному вбранні ексклюзивної ручної роботи. На сцену палацу "Україна" Тимошенко вийшла, як завжди, у всьому білому. Але цього разу око БЮТівців і гостей урочистого зібрання радував не новий "Луї Віттон", а святкова вишиванка, а до неї розшиті жилі тка і довга снідиця у кількох кремових і зеленуватих тонах. На питання, хто саме робив костюм, Тимошенко відповіла, що це була "колективна праця". "Це історична традиційна вишиванка, яка зібрана за спеціальними історичними книжками. Проте не все у вбранні Тимошенко цього дня було "колективною працею" українських майстрів. Над деякими попрацювали і французи

Створено за допомогою GRAN

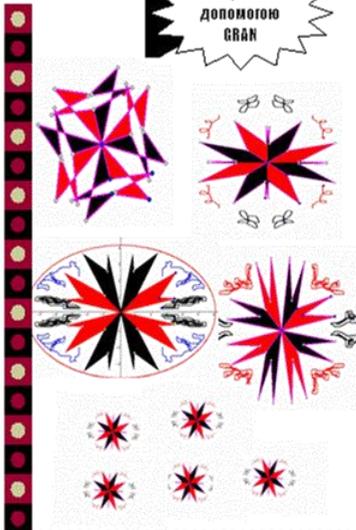


Рис. 6. 6. Газета до проєкту «Геометрія українського орнаменту»

Приклади розроблених проєктів за вибраними темами елементарної математики (дата звернення 06.08.2019):

Статистика 1	Теорія ймовірностей	Графіки функцій
Правильні многокутники	Десяткові дробі 1	Лінійна функція
Подібні трикутники	Десяткові дробі 2	Прямокутні трикутники
Коло і круг	Тіла обертання	Золотий перетин

Відзначимо, які з **ключових компетентностей**, перерахованих в ст.12 Закону України «Про освіту» [22], і необхідних сучасній людині для успішної життєдіяльності, можуть набуватися у роботі над наведеним вище навчальним проєктом. Це вільне володіння державною мовою; математична компетентність; компетентності у галузі природничих наук, техніки і технологій; інноваційність; інформаційно-комунікаційна компетентність; навчання впродовж життя; культурна компетентність.

Спільними для всіх ключових компетентностей є такі вміння: читання з розумінням, уміння висловлювати власну думку усно і письмово, критичне та системне мислення, здатність логічно обґрунтовувати позицію, творчість, ініціативність, вміння конструктивно керувати емоціями, оцінювати ризики, приймати рішення, розв'язувати проблеми, здатність співпрацювати з іншими людьми.

При цьому учні / студенти **набуватимуть і предметної математичної компетентності**, розвиваючи її мотиваційний, когнітивний, операційно-процесуальний складники. Саме завдяки STEM-освіті («наука» + «технології» + «інжиніринг» + «математика») з використанням мобільних технологій вдається реалізувати усі дієві засоби засвоєння математики: математичні практикуми з завданнями дослідницького характеру; навчальні проєкти; демонстрація експериментів з їх аналізом, що систематизує отримані знання; навички розв'язування математичних задач.

6.3. Блог вчителя математики як продукт навчання методом проєктів.

Блог (англ.blog, від web log, «мережевий журнал чи щоденник подій») – це веб-сайт, головний зміст якого – записи, зображення чи мультимедія, що регулярно додаються. Для блогів характерні короткі записи тимчасової значущості.

Блоги використовують для здійснення рефлексії (написання особистих думок та вражень від процесу навчання) – одноосібно чи у групі. Сучасні блоги можуть успішно використовувати філологи для представлення творів для публічного обговорення, власних есе як певного підсумку вивчення теми. За допомогою коментарів до блогу можна забезпечувати зворотний

зв'язок «викладач-студент», «студент-студент», «вчитель-учень» [25-27], [39], [48]. Перевага використання блогів у тому, що вони доступні для читання і написання у довільному місці при наявності мережі Інтернет, зокрема через мобільні телефони. Блоги на хмарних сервісах можна розгорнути як повноцінні сайти.

Блог – це те віртуальне середовище, де вчитель може якісно презентувати свою педагогічну діяльність або свої уподобання, швидко публікувати власні думки, отримувати коментарі на них, спілкуватися з колегами та ін. Наведемо приклади, з якою метою педагоги можуть використовувати блоги та сайти. Для студента блог можна використовувати у якості щоденника індивідуальних спостережень під час літньої практики в оздоровчих таборах, під час виробничої практики у школі. Адміністрація школи через блоги і сайти може ознайомлювати педагогічний колектив та батьків з нормативними документами, наказами по школі, робити об'яви, привітання тощо. Класний керівник у своєму блозі може висвітлювати організаційну роботу, спілкуватися з учнями класу та батьками. Тут зручно подавати новини, світлини, відомості про конкурси, термінові заходи та умови участі тощо. Може бути блог певного гурту чи навчальної дисципліни, конкурсу, виховного заходу тощо.

Детальніше зупинимося на призначенні блогу вчителя-предметника. Учитель може у блог розміщувати навчальні матеріали, новини науки, математичні цікавинки, розповідати про типові помилки при виконанні учнями математичних завдань, подавати складні завдання, відеоматеріали, рекомендувати підручники, матеріали для підготовки до ЗНО, робити різного роду оголошення, повідомляти домашні завдання, надавати на перегляд кращі роботи учнів тощо.

Перед початком створення блогу рекомендуємо переглянути відеоурок з оглядом кращих блогів учителів математики та відеоурок створення і наповнення блогу учителя математики з використанням інструменту Blogger сервісів Google. За поданими QR-кодами доступні уроки електронного курсу на платформі MOODLE, добірки кращих блогів учителів математики, зокрема [25], [39], [48], поради розробнику.



[Огляд блогів](#)



[Добірка кращих блогів](#)



[Дистанційний урок](#)



[Відеоурок створення блогу](#)

Для ведення блогу доцільно на мобільний телефон завантажити додаток *Blogger* чи відкрити Blogger через Google-акаунт на комп'ютері (рис.7.1). Далі обираємо [вкладку Створити блог](#), записуємо назву блогу (рис.7.2), адресу (наприклад, vasilenkooksana.blogspot.com), вибираємо тему, яку пізніше можна змінити. Адреса блогу вводиться латиницею. Цей запис буде відображатися в адресному рядку блогу. Доцільно скласти адресу з транслітерованого англійською мовою прізвища та імені автора. На завершення створення блогу обирають «*Створити блог*».

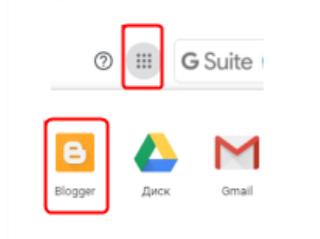


Рис. 6. 7. Вхід у Blogger через Google-акаунт

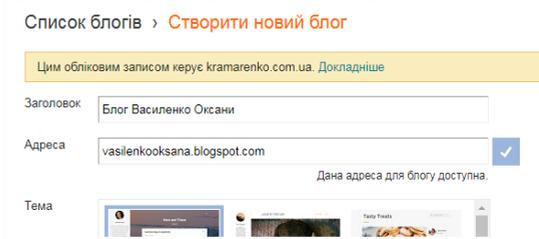


Рис. 6.8. Створення заголовку блогу, запис адреси блогу, вибір теми оформлення.

1. В основному блоці доцільно розмістити сторінки, які міститимуть важливі для вчителя матеріали. Наприклад, посилання на *методичні і нормативні матеріали, рубрики «Математика, 5-6 клас», «Геометрія, 7-9 клас», «Алгебра, 7-9 клас», «Корисні посилання», «Засоби навчання математики», «Підготовка до ЗНО»* тощо. Подаємо ланцюжок використання інструментів для створення і налаштування сторінок: *Відкрити блог за допомогою Blogger → Сторінки (рис. 6.9) → Нова сторінка → Ввести заголовок сторінки, додати текст – Створити*. У подальшому для редагування сторінки потрібно *Відкрити блог за допомогою Blogger → обрати Сторінки-Редагувати → Оновити*.

Переглянути блог



Публікації

Усі (51)

Опубліковані (51)



Статистика



Коментарі



Прибутки



Сторінки



Макет



Тема



Налаштування

Рис. 6. 9.

2. Для того, щоб додати до блогу гаджет «Сторінки», потрібно відкрити блог за допомогою *Blogger*, обрати *Макет/Дизайн (рис. 6.9)*. Потім у верхній чи бічній колонці додати гаджет «Список сторінок» (рис.6.10). Далі біля тих сторінок, які будуть включені у список, проставити відмітки. Нижче налашту-

вати порядок розташування сторінок шляхом перетягування відповідних піктограм. У подальшому при додаванні нової сторінки потрібно редагувати список. Для цього *Відкрити блог за допомогою Blogger* → *обрати Макет/Дизайн* → *знайти доданий гаджет Список сторінок* → *редагувати список* (рис. 6.11).

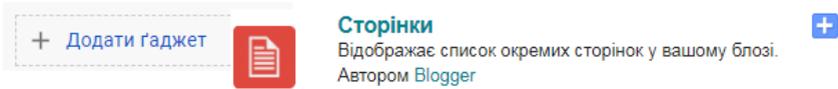


Рис. 6. 10. Додати гаджет Сторінки.

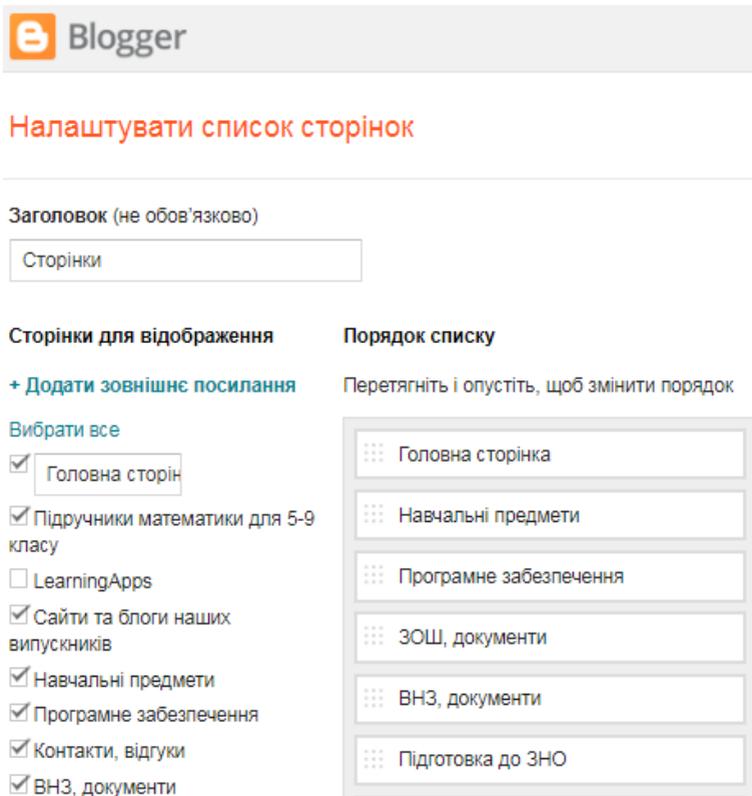


Рис. 6. 11. Налаштування списку сторінок.

3. Для створення нового допису (публікації, повідомлення) блогу необхідно обрати *Публікації* → *Новий допис*. Створення публікації передбачає формулювання її назви, яка записується у відповідному полі зверху, введенні й редагуванні основного тексту, який подається на сто-

рінці документа (рис. 6.12). Опишемо детальніше панель інструментів, яка розташована нижче поля для введення назви. Ця панель містить інструменти для форматування тексту (стиль, розмір, колір), додавання різноманітних елементів публікації (зображення, відео, спеціальних символів), створення гіперпосилань (прив'язати), формування списків, перевірки орфографії тощо (рис. 6.12).

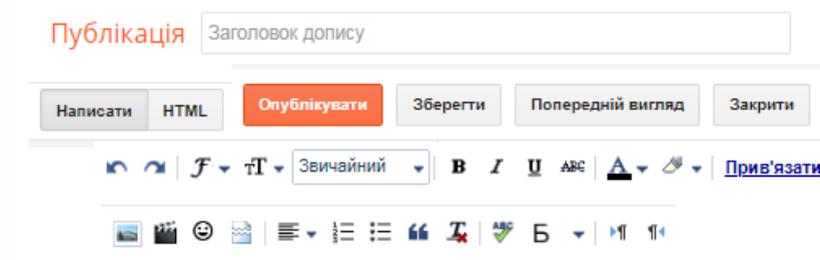


Рис. 6. 12. Панель інструментів для створення публікації.

4. При додаванні повідомлень потрібно дотримуватися академічної доброчесності, не порушувати авторських прав. Одне з повідомлень може бути про те, як створювати блог і використовувати його у навчанні. До цього повідомлення варто додати доцільний текст з посиланням на джерела відомостей (*Посилання / Прив'язати*). Можна додати відповідні малюнки, завантаживши їх з мережі за URL, з власного комп'ютера чи телефона, відео з YouTube про створення чи редагування блогу. Для компактного розміщення і подання матеріалів читачу доцільно використовувати *Розрив переходу*. Не завадить створити власне повідомлення про використання хмарних сервісів Google. Наприклад, про використання текстового редактора, таблиць чи форм Google з додаванням відео, малюнків, гіперпосилань на джерела. Можна поділитися повідомленням про важливість запровадження STEM-освіти, скориставшись посиланням <http://yakistosviti.com.ua/uk/22-sichnia>.

Щоб додати потрібне відео, потрібно його відкрити на YouTube, скопіювати адресу, тоді адресу додати у рядку про автора.

5. Щоб до повідомлень додати презентацію, текстовий документ чи таблицю, доцільно спочатку переглянути **відповідний відеоурок**. Потрібно створити презентацію чи завантажити і відкрити її засобами Google. Далі *обрати Файл → Опублікувати в Інтернеті → Вбудувати → Налаштувати параметри презентації → Скопіювати запропонований код*. Отриманий для презентації код *вписують до повідомлень блогу у режимі HTML*, а переглядають у режимі *Читання* (рис. 6.12).

6. *Гаджети* – невеликі інформаційні блоки, які можуть містити опитування, архів повідомлень, профіль адміністратора блогу, список

постійних читачів блогу, посилання на Інтернет-сайти, вибрані публікації тощо. Блогосфера Blogger пропонує сотні готових гаджетів, які можна використати в блозі. Гаджети можуть збагачувати зовнішній вигляд блогу, підвищувати його «інтерактивність», полегшувати користування інформаційними ресурсами блогу тощо.

7. Доцільно до публікацій додавати ключові слова для прискорення пошуку – *Мітки* (рис. 6.13). Потім до блоку з гаджетами чи до основного блоку потрібно додати гаджет *Мітки* (рис. 6.14). Для цього обирають *Макет / Дизайн* → *Додати гаджет Мітки* → *Зберегти композивання*.

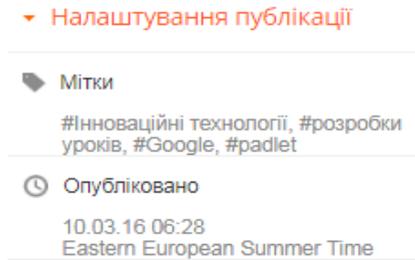


Рис. 6. 13. Налаштування міток.

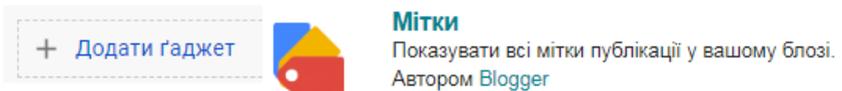


Рис. 6. 14. Додавання гаджета *Мітки*.

8. Учителю надзвичайно зручно використовувати у роботі вбудовані у блог календарі подій, добірки цитат відомих людей тощо. Наприклад, на сайті українського ділового мовлення (режим доступу: <https://www.dilovamova.com/index.php?page=10>) пропонують скористатися кодами для календарних інформерів. Для цього додають гаджет → обирають *HTML / JavaScript* (рис. 6.15) → *вписують код* `` → *зберігають композивання*.

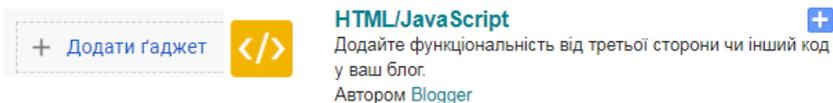


Рис. 6. 15. Додавання гаджету *HTML / JavaScript*.

У процесі вивчення курсу / проходження тренінгу учасники розробляють блог вчителя-предметника чи сайт, додають доцільні наочності. Зрештою, щоб пришвидшити створення блогу, можна окремі сторінки чи повідомлення імпортувати з шаблону. Розроблений блог чи сайт таким чином є одним із продуктів навчання за проектними технологіями.

РОЗДІЛ 7. ПІДВИЩЕННЯ КВАЛІФІКАЦІЇ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ З ВИКОРИСТАННЯ ІКТН

7.1. Про підвищення кваліфікації педагогічних та науково-педагогічних працівників відповідно до Закону України «Про освіту».

Розглянемо окремі положення Закону України «Про освіту» [22], зокрема, що передбачено законом для отримання вищої освіти та навчання дорослих, зокрема перепідготовки та підвищення кваліфікації учителів. Навчання впродовж життя – одна із ключових компетентностей, необхідних сучасній людині для успішної життєдіяльності. Сприяння такому навчанню названо серед засад державної політики у сфері освіти. Складовою освіти впродовж життя є освіта дорослих, яка, зокрема, може реалізуватись як післядипломна освіта, професійне навчання працівників, курси перепідготовки та/або підвищення кваліфікації, безперервний професійний розвиток. Під компетентністю розуміють динамічну комбінація знань, умінь, навичок, способів мислення, поглядів, цінностей, інших особистих якостей, що визначає здатність особи успішно соціалізуватися, провадити професійну та/або подальшу навчальну діяльність [22, стаття 1, п.15].

Підвищення кваліфікації - це набуття особою нових та/або вдосконалення раніше набутих компетентностей у межах професійної діяльності або галузі знань. Курси підвищення кваліфікації проводяться для набуття здобувачем освіти нових компетентностей у межах професійної діяльності або галузі знань [22, стаття 18].

Прикметно, що відтепер на законодавчому рівні передбачено, що післядипломна освіта може включати здобуття другої (наступної) вищої освіти. І слід сказати, така форма освіти дорослих все більше набирає популярності.

Стаття 51 Закону, у якій ідеться про сертифікацію педагогічних працівників, містить дуже багато невідомих. Усі відразу звертають увагу на те, що за наявності сертифіката (який, до речі, буде дійсним протягом лише трьох років, тоді як обов'язкову атестацію педпрацівник має проходити не рідше одного разу на п'ять років), вчителю встановлюватиметься доплата у розмірі 20 відсотків від посадового окладу. Ця норма Закону набрала чинності з 1 січня 2019 року. Апробується процедура сертифікації, мають бути визначені спеціально уповноважені державою установи, які будуть здійснювати цю сертифікацію, Кабінет Міністрів затверджує положення про ці установи. Крім того, і самі Положення про сертифікацію педагогічних працівників повинні бути затверджені Кабміном. З того, як буде прописана задекларована сертифікація в підзаконних актах, можна буде сказати, наскільки ця норма Закону сприятиме підвищенню професійного рівня вчителів.

Детальніше зупинимося на статті 54, в якій виписані права та обов'язки педагогічних, науково-педагогічних і наукових працівників, інших осіб, які залучаються до освітнього процесу. Зокрема, педагогічні, науково-педагогічні та наукові працівники **зобов'язані постійно підвищувати свій професійний і загальнокультурний рівні та педагогічну майстерність і мають право на:**

академічну свободу, включаючи свободу викладання, свободу від втручання в педагогічну, науково-педагогічну та наукову діяльність, вільний вибір форм, методів і засобів навчання, що відповідають освітній програмі; педагогічну ініціативу;

розроблення та впровадження авторських навчальних програм, проєктів, освітніх методик і технологій, методів і засобів, насамперед методик компетентнісного навчання;

користування бібліотекою, навчальною, науковою, виробничою, культурною, спортивною, побутовою, оздоровчою інфраструктурою закладу освіти та послугами його структурних підрозділів у порядку, встановленому закладом освіти відповідно до спеціальних законів;

підвищення кваліфікації, перепідготовку;

вільний вибір освітніх програм, форм навчання, закладів освіти, установ і організацій, інших суб'єктів освітньої діяльності, що здійснюють підвищення кваліфікації та перепідготовку педагогічних працівників;

доступ до інформаційних ресурсів і комунікацій, що використовуються в освітньому процесі та науковій діяльності.

У ст. 59 йде мова **про професійний розвиток та підвищення кваліфікації педагогічних і науково-педагогічних працівників.**

Зокрема, професійний розвиток педагогічних і науково-педагогічних працівників передбачає постійну самоосвіту, участь у програмах підвищення кваліфікації та будь-які інші види і форми професійного зростання. Заклади освіти, в яких працюють педагогічні та науково-педагогічні працівники, сприяють їхньому професійному розвитку та підвищенню кваліфікації.

Підвищення кваліфікації може здійснюватися за різними видами (навчання за освітньою програмою, стажування, участь у сертифікаційних програмах, тренінгах, семінарах, семінарах-практикумах, семінарах-нарадах, семінарах-тренінгах, вебінарах, майстер-класах тощо) та у різних формах (інституційна, дуальна, на робочому місці (на виробництві) тощо).

Педагогічні та науково-педагогічні працівники мають право підвищувати кваліфікацію у закладах освіти, що мають ліцензію на підвищення кваліфікації або провадять освітню діяльність за акредитованою освітньою програмою. Результати підвищення кваліфікації у таких закладах освіти не потребують окремого визнання і підтвердження.

Педагогічні та науково-педагогічні працівники мають право підвищувати кваліфікацію в інших суб'єктів освітньої діяльності, фізичних та юридичних осіб. Результати підвищення кваліфікації педагогічного (науково-педагогічного) працівника у таких суб'єктів визнаються окремим рішенням педагогічної (вченої) ради. Умови і порядок визнання результатів підвищення кваліфікації у таких суб'єктів визначаються відповідно до частини шостої цієї статті. Вид, форму та суб'єкта підвищення кваліфікації обирає педагогічний (науково-педагогічний) працівник.

В. Г. Бевз акцентує увагу на тому, що учителів, насамперед майбутніх, слід готувати до роботи в школі відповідно до останніх нововведень, зокрема до реалізації основних положень Концепції Нової Української Школи. Студентів бажано стимулювати до ознайомлення з новими нормативними документами, вивчення передового педагогічного досвіду, участі в різного роду фахових тренінгах тощо. В університеті майбутні вчителі мають оцінювати свої досягнення не тільки як студенти, а більшою мірою – як фахівці-педагоги: якого нового і корисного досвіду набули, які технології засвоїли, як працювати за новими підручниками, які засоби доцільно використовувати, як урізноманітнювати форми навчання тощо. З цією метою доцільно пропонувати студентам брати участь у різноманітних тренінгах і семінарах, що проводять провідні фахівці в галузі нових технологій навчання. Визначаючи зміст навчання методики математики в педагогічному університеті слід враховувати зміни, що на практиці відбуваються у навчальних закладах різного рівня [6, с. 16-17]. На кожному етапі навчання учителю слід здійснювати рефлексію стосовно набутого досвіду і постійно дбати про його поповнення та удосконалення.

Науковим засадам методичної підготовки майбутнього вчителя математики присвячені наукові праці І. А. Акуленко [32], Н. А. Тарасенкової [32], О. І. Матяш[34]. Як зазначає Н. А. Тарасенкова [46], ними розроблено дистанційний тренінг для учителів математики «Удосконалення засобів навчання математики (за класами)», який адресовано вчителям математики основної і старшої профільної школи, а також викладачам математики ЗП(ПТ)О і ЗВО 1-2 рівнів акредитації, які проводять освітню діяльність на основі базової освіти і забезпечують здобуття повної загальної середньої освіти разом із спеціальною. Метою тренінгу є поглиблення теоретичних та практичних знань і вмінь його учасників, формування загальних, спеціальних, професійних компетентностей, достатніх для ефективного розв'язування стандартних і нестандартних комплексних проблем, виконання завдань інноваційного характеру, опанування загальних засад методології професійної педагогічної діяльності.

У програмі тренінгу 3 навчальні блоки:

- Дидактична аналітика (Емоційна оцінка навчального тексту; Дидактичний аналіз навчального тексту; Дидактичний аналіз задачного блоку);

- Створення Google Документів (Google Форм; аналогів завдань у Google Формах; Google Тестів);

- Конструювання засобів навчання (допоміжних запитань за теоретичним матеріалом; системи запитань і завдань для актуалізації базових знань і вмінь; завдань для К-підсумку уроку; з'ясування особливостей будови та побудова компетентнісно орієнтованих задач).

Для підвищення кваліфікації учителів математики з питань використання ІКТ у навчанні математики **нами розроблено програму дистанційного тренінгу і ресурси авторського курсу «Інформаційно-комунікаційні технології навчання математики»** [29]. Програму тренінгу і основні ресурси буде представлено у пункті 7.3 даного навчального посібника.

7.2. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології як основа підвищення кваліфікації сучасного педагога

Систематичне підвищення кваліфікації педагога будь-якого рангу (вчителя загальноосвітньої школи, викладача вузу) є необхідною умовою підтримання професійного рівня фахівця для використання розмаїття сучасних освітніх технологій, спрямованих на підготовку школярів і студентів для майбутньої професійної діяльності. Для того, щоб ця умова була не лише необхідною, але й достатньою, потрібно забезпечити оптимальний процес підвищення кваліфікації педагогів. Особливо це стосується короткотривалих курсів підвищення кваліфікації учителів, які в сучасних умовах реалізуються в інститутах безперервної освіти та на кафедрах педагогічних університетів. Вирішення проблеми оптимізації КПК повинне враховувати не тільки короткотривалі терміни їх проведення (2–4 тижні), але й значні обсяги різнобічних знань з різних навчальних предметів, результатів наукових досліджень сьогодення, новітніх методик викладання дисциплін базової кваліфікації педагога.

Можливості такої оптимізації полягають не стільки у вивченні новітніх методів навчання на КПК, скільки у їх застосуванні у відповідних умовах освітньої діяльності педагога. При цьому слід виходити з того, що сучасний етап розвитку інформаційної сфери суспільства вимагає зміщення уваги методики навчання саме на засоби накопичення та зберігання необхідних відомостей, дозування їх об'єму з метою використання у навчальному процесі. Вказаним вимогам у значній мірі відповідають інформаційно-комунікаційні технології.

Використовуючи засоби ІКТ, значну частину даних можна подавати у цифровій формі, придатній для комп'ютерного опрацювання, адже сьогодні у світі нараховується понад мільярд комп'ютерів, призначення яких – зберігання, опрацювання й передавання інформації в цифровій формі з наступним її використанням у будь-якій іншій формі, зручній для користувача.

Одне з головних завдань освіти в умовах розвитку інформаційного суспільства – навчити учнів і студентів використовувати сучасні ІКТ. У зв'язку із цим виникає нагальна потреба в прискоренні підготовки та перепідготовки викладачів та фахівців у сфері ІКТ.

Використання ІКТ на курсах підвищення кваліфікації педагогів дозволяє одержати значно більш вагоме, ніж сукупність деяких додаткових знань з дисциплін їх фахового профілю, включаючи і методику викладання. Більше того, навчання вчителів використанню ІКТ значно підвищить їх можливості з дослідницької роботи. У контексті вище сказаного деталізація поняття інноваційні інформаційно-комунікаційні технології розуміється у процесі КПК вчителів як інструмент розщеплення базису знань на первинний і вторинний. В якості первинного базису виступають універсальні форми навчальних комунікацій викладачів КПК та їх слухачів, засвоєння актуальних фахових знань. У кожному комуні-

кативному акті використовується поряд зі звичайною мовою мова інформатики, наукова мова. Вторинний базис – це багаторівневий комплекс конкретно-змістових знань навчальної дисципліни, які можуть бути базою для розв’язання численних соціально-значущих задач: педагогічних, економічних, екологічних, інформаційних тощо. Слухача курсів в першу чергу цікавлять можливості впровадження ІКТ у навчальний процес. Для нього важливо знати, як інтегруються ІКТН з традиційною методичною системою навчання, з педагогічними технологіями особистісно орієнтованого навчання, проблемного навчання; як забезпечити диференціацію та індивідуалізацію навчання школярів. Безперечно, що слухачам КПК потрібно розкривати напрямки підвищення ефективності традиційних методів навчання за допомогою ІКТ.

Умови, в яких здійснюється освітня діяльність вчителів шкіл, є різними і дуже складними, щоб їх можна було відобразити в рамках однієї моделі КПК вчителів. У межах кожного трактування навчального процесу завжди перетинаються фактори найрізноманітнішої природи. І якщо говорити про науково-фаховий рівень слухачів КПК, то ймовірно він буде різним. Пояснюється це не тільки умовами проживання і праці вчителів, але й тим, що цей рівень створюється роками на основі вивчення і удосконалення відпрацьованих програмою підходів, прийомів та методів викладання навчальних дисциплін. При цьому роками складається звичка вчителя не відриватися від суб’єкта навчання – від учня. Ця звичка є значною технологічною перепорою до сприйняття можливостей ІКТ. Тому викладачі, які працюють на КПК, повинні знайти можливості переконати слухачів у тому, що ІКТН навпаки дають можливість більш об’єктивно виявляти властивості конкретного суб’єкта навчання, враховуючи його здібності. Іншими словами, потрібно у процесі роботи КПК сформувати у слухачів розуміння того, що процес навчання учня є певною стадією науково-пізнавальної еволюції, яка значно прискорюється на допомогу ІКТ.

Якщо виконати вказані вище умови навчання слухачів КПК, то педагоги, що підвищують кваліфікацію, неминуче приходять до необхідності використання інформаційних ресурсів та інформаційно-комп’ютерних засобів як важливого компонента підвищення своєї кваліфікації. Слухачам КПК стає зрозумілим наступне:

– впровадження ІКТН у традиційне навчання змінює: інформаційно-освітній простір суспільства за рахунок прискорення процесів навчання та підвищення якості кваліфікації підготовки та перепідготовки фахівців; способи навчання та співробітництва між учасниками навчального процесу; методи та засоби інтелектуальної інформаційної взаємодії;

– розвиток сучасного процесу підвищення кваліфікації фахівця в такому інформаційно-освітньому просторі характеризується створенням мережних організацій, формуванням онлайн-нових співтовариств, соціальних мереж тощо. Самі ж освітні технології, методи навчання й навіть сама дидактика в значній мірі зазнають змін, пов’язаних із широким за-

стосуванням та розвитком дистанційного навчання;

– темп зміни рівня кваліфікації педагога в інформаційному суспільстві, а також зміна всіх видів його соціальної й професійної діяльності, педагогічних взаємин і зв'язків надзвичайно прискорюється. Тому специфікою ІКТ, яку необхідно враховувати в процесі підвищення кваліфікації, є висока швидкість мінливості самого інформаційно-освітнього середовища. Інформаційні системи супроводу навчального процесу та опрацювання ресурсів постійно розвиваються, змінюється їхня структура, підвищується складність, росте кількість можливостей. Постійне відставання фахівців у реальній професійній діяльності від темпу зміни можливостей технологій і методів навчання в сучасному інформаційно-освітньому просторі вимагає постійного підвищення кваліфікації педагога;

– традиційна схема перепідготовки вчителів, за якої раз на кілька років вони проходять експрес-перепідготовку з відривом від виробництва, в умовах стрімкої зміни самої системи освіти не може задовольнити потреби ні суспільства, ні учасників освітнього процесу. Вимога постійного підвищення кваліфікації вчителів обумовлює необхідність широкого залучення засобів електронного, дистанційного та мобільного навчання у процес перепідготовки педагогів.

Зрозуміло, щоб усе вище сказане було більш переконливим для слухачів, структурам, що організують КПК, необхідно сформувати відповідне функціональне наповнення діяльності викладача при дистанційній реалізації процесу перепідготовки.

На спільних методичних семінарах кафедр математики та інформатики і прикладної математики Криворізького державного педагогічного університету з'ясовано, що зміст будь-якої навчальної дисципліни являє собою масив спеціальних знань, який має монологічну модель побудови з визначеною ієрархією використання базових та похідних понять, що відрізняються по мірі їх втілення у навчальний процес нормами їх викладання. Компетентна робота з усіма названими характеристиками навчальної інформації повинна бути передумовою застосування ІКТ як у процесі традиційного навчання, так і при дистанційному навчанні. Важливо визначити, на які складові повинен бути розділеним універсум змісту математичної теорії, які ті функціональні категорії, що визначають його розподіл на основні типологічні одиниці таким чином, щоб у результаті використання ІКТ виявилось внутрішнє зв'язане, цілісне сприйняття сутності математичної дисципліни.

Тому далі зупинимось на деяких питаннях інтеграції традиційних методів вивчення математики і ІКТ.

ІКТ і евристичний метод навчання. Евристичний метод навчання – це метод, який дозволяє викладачу, замість переказу навчального матеріалу і демонстрації традиційних методів розв'язку практичних задач та прикладів в готовому вигляді, спрямовувати мислення учнів до «перевірки» теорем і їх доведення, до самостійного формулювання озна-

чень, до самостійного формулювання умов задач і їх розв'язку [1]. Серед закономірностей мислення особливе місце мають евристичні процеси мислення [2]. Втілення евристики в навчання математики потребує перебору багатьох варіантів пошуку розв'язків розв'язання навчальної проблеми. Але для цього викладач не завжди має необхідний час і дидактичні можливості. Засоби ІКТ і сучасних комп'ютерів повністю забезпечують такі можливості і значно підвищують мобільність і дидактичну ефективність такої складової евристики, як евристична бесіда. За допомогою ІКТ можливо більш мотивовано і переконливо підвести учня до потрібного висновку як в процесі вивчення умов навчального завдання, так і в процесі розв'язку завдання. ІКТ ефективно допомагають вчителю в складанні рекомендацій для самостійного пошуку розв'язків набору подібних практичних задач та прикладів. Важливим завданням КПК вчителів математики є переконання слухачів у тому, що основним предметом навчальної евристичної діяльності є навчальна задача, сама постановка якої в багатьох випадках передбачає умови використання ІКТ для її розв'язку [1; 2]. Дійсно при формуванні умов задачі її постановці для розв'язку завжди виділяють такі компоненти, які мають чітко визначне інформаційне навантаження. Це стосується багатьох задач шкільного курсу математики: задач на обчислення, на побудову, на доведення, на доведення, на з'ясування і ін.

Слухачі КПК розуміють те, що розв'язання різноманітних математичних задач є специфічною інтелектуальною діяльністю людини. Але до цього варто додати те, що з виникненням поняття штучного інтелекту розв'язувати задачі і доводити теореми навчали і комп'ютер. Це дає можливість успішно використовувати комп'ютер для навчання математиці, у тому разі і на засадах використання евристичного навчання.

Досвід показує [3; 4], що у загальному випадку евристична модель розв'язання математичної задачі з використанням ІКТ будується в системі таких понять: «задача», «умови задачі», «варіанти методів розв'язання задачі», «пошук методу розв'язку», «алгоритм розв'язку задачі», «евристика розв'язку». При цьому під «евристикою розв'язку», по великому рахунку, розуміють відкриття нового алгоритму, тобто знаходження нового методу розв'язання задачі певного типу. Але в умовах шкільного навчального процесу ми розуміємо інше значення евристики в контексті розв'язку задачі – це реалізація принципів та засобів, які спрямовані на пошук учнем «методів розв'язання задачі» серед добре відомих подібних методів.

ІКТ і метод проблемного навчання (МПН). Як відомо, сутність методу проблемного навчання базується на множині понять, основними з яких є проблемна ситуація і проблема. Реалії сучасного досвіду використання проблемного навчання при вивченні математики свідчать про те, що вчителі намагаються створювати саме проблемні ситуації в межах одного уроку або в межах окремої теми, що вивчається. Вихід з пробле-

мної ситуації учні можуть знайти самостійно шляхом використання засвоєних раніше теоретичних знань і відпрацьованих при розв'язку практичних задач, умінь і навичок. Зрозуміло, що МПН потребує прояву високої творчої активності учнів на протязі малого проміжку часу. Ці обставини вимагають від вчителя певного ризику при втіленні в поточний навчальний процес будь-яких методів активного навчання, у тому числі і МПН. Невпевненість у результатах призводить до того, що викладачі перестають застосовувати МПН. Подолати цю негативну ситуацію допомагають ІКТН. Пояснюється це тим, що викладач може за допомогою ІКТН реалізувати дві речі, пов'язані з ризиком використання МПН. Перше – ефективно контролювати час розв'язання навчальної проблемної ситуації, передбачивши досить короткі проміжки часу для використання учнями (чим менше час, тим менше ризик). Друге – виконати структурування завдання для створення проблемної ситуації. Якщо викладач оволодіє і першим і другим, він буде впевнено використовувати МПН та інші активні методи в своїй фаховій діяльності. Останнє може бути одним з дидактичних завдань організаторам КПК вчителів математики.

Використання МПН в інтеграції з ІКТ повинно базуватися на певній сукупності дидактичних принципів, таких як:

- індивідуальний підхід до кожного учня;
- забезпечення учнів можливістю достатньою кількістю аудіо-матеріалів;
- максимально можливе надання свободи в розв'язуванні проблемної ситуації;
- формування в учнів вмінь та навичок працювати з інформацією;
- формування в учнів навичок самоконтролю при розв'язуванні проблемних ситуацій.

При застосуванні МПН в інтеграції з ІКТН його можливо вважати проблемно-евристичним, тому в цьому випадку спостерігається наочна компонента практичної проблеми і демонстрації пошуку методів і способів її розв'язання.

ІКТ і естетичне виховання. Важливою компонентою процесу вивчення математики є естетичне виховання учнів. В контексті сказаного бажано привернути увагу слухачів КПК вчителів математики до перспективи використання ІКТ з метою естетичного виховання учнів. Зрозуміло, що поняття «красиве» зручніше усього пов'язувати з мистецтвом, природою, літературою тощо. Але, ще Аристотель стверджував, що «...ті, хто запевняє, що математичні науки нічого не говорять про прекрасне..., помиляються... Саме головні форми прекрасного це – порядок «у просторі», співрозмірність і визначеність, – математичні науки більш за усе і показують саме це». Сама внутрішня логіка математики є одним з важливіших компонентів математичної естетики, чіткість, лаконізм, символіка логічних дій, логіка математичних висновків, доведень, твер-

джен є проявом краси в математиці [5].

Дійсно, і в геометрії, і в алгебрі міститься багато цікавого, що має пряме відношення до естетичних норм виховання майбутнього громадянина. Тому важливим завданням КПК вчителів математики повинно бути ознайомлення слухачів з можливостями ІКТ в естетичному вихованні учнів при вивченні питань, пов'язаних з дзеркальною, переносною, поворотною, орнаментальною симетрією, які природним чином супроводжують вивчення властивостей геометричних фігур та тіл, таких як правильні багатокутники, багатогранники, а також мають місце при розв'язку задач на побудову і ін. При вивченні алгебри ІКТ мають ефективне використання при дослідженні функції та побудові їх графіків, при цьому важливо не помітити «красоту» різного виду парабол, гіпербол, їх комбінацій тощо. Слухачам КПК важливо показати можливості ІКТ в питаннях взаємозв'язку математики з архітектурою, поезією, літературою, різного роду художнім мистецтвом.

ІКТН в інтеграції з самоосвітою викладачів. Вище були розглянуті приклади напрямків використання ІКТ в фаховій діяльності вчителів математики загальноосвітніх шкіл, професійно-технічних коледжів та училищ. Зрозуміло, що на протязі короткотривалих КПК слухачі не в змозі засвоїти на належному фаховому рівні можливі напрямки використання ІКТ. Навчання на КПК повинно стати поштовхом для подальшого вивчення вчителем можливостей ІКТ з метою їх використання в повсякденній фаховій діяльності. Але для того, щоб цей поштовх перетворився в систематичну самоосвіту вчителя організаторам КПК потрібно врахувати особливості мотивації слухачів до оволодіння ІКТ. Історія теоретичного підходу до навчання дорослих бере початок у 1973 році завдяки науковим працям Ноулза [6]. Пропонована нами теорія навчання дорослих (андрагогіка) ґрунтується на наступних принципах

- доросла людина намагається самостійно приймати рішення;
- для дорослого учня особистий досвід – найважливіше джерело отримання знань, він набагато ефективніше навчається в групах, обговорюючи проблеми, а не просто слухаючи ту чи іншу інформацію;
- у дорослої людини в підсвідомості присутнє поняття «цілі навчання», вона орієнтується на завдання, що їх ставлять перед нею події реального життя;
- дорослі – великі прагматики, вони зацікавлені в отриманні знань і навичок, які можна застосовувати з користю.

Усім названим принципам відповідають слухачі КПК.

Кафедра Криворізького державного педагогічного університету має значний досвід навчальної діяльності на КПК вчителів математики. Щорічно слухачами КПК є більше ста вчителів м. Кривого Рогу. Безпосереднє спілкування зі слухачами, проведення серед них спеціально розроблених анкет з метою з'ясування змісту навчального плану для різних

категорій вчителів свідчить про те, що їх, в першу чергу, цікавлять ті питання, які відповідають їхнім потребам на даний момент, щоб навчання було спрямованим на підняття ефективності їх практичної діяльності в школах, орієнтувало на оволодіння ними сучасними педагогічними технологіями. Слухачам КПК вчителів математики і викладачам КПК повинно бути зрозуміло, що інформаційні компетентності виходять сьогодні на перший план в роботі шкіл, тому зміст самоосвіти сучасного вчителя математики повинен бути пов'язаний з підвищенням його фахової інформаційної ефективності шляхом забезпечення доступу до ІКТ, одержання комп'ютерної підготовки, навчання навичкам роботи з інформацією, вихованням відповідної культури поведінки в інформаційному суспільстві. З цією метою в останній час досліджуються і розвиваються різні аспекти застосування ІКТ у процесі навчання математики засобами дистанційного навчання.

Нами було виконано порівняльний аналіз технологій застосування розподілених ресурсів в освітніх і навчальних цілях. У процесі очного навчання на курсах були визначені як проблеми й запити різних груп слухачів, так і пріоритети в особистісному розвитку слухача курсів, проведено навчання використанню нових електронних програмних (пакетів GRAN, DG, ТерМ тощо) і апаратних засобів (ноутбуки, мультимедійні проектори і дошки тощо), змінам технологій і методик навчання математики на основі засобів ІКТН, застосуванню проектних та тренінгових технологій.

Дослідження можливостей сприйняття гіпертекстової аудіовізуальної структурованої інформації слухачами курсів підвищення кваліфікації у процесі їхньої роботи з інтелектуальними навчальними середовищами вітчизняного виробництва дозволило сформулювати принципи використання розподілених інформаційних ресурсів. Найбільш суттєвими з них: інтерактивність інформаційної взаємодії між учасниками освітнього процесу; забезпечення індивідуальності траєкторії навчання, що залежить від рівня початкової підготовленості й професійних інтересів; наявність інформаційного середовища та інформаційних ресурсів фахової кафедри.

За результатами експериментальної роботи була сформульована головна умова забезпечення неперервності процесу підвищення кваліфікації: розвиток інформаційної інфраструктури, що поєднає інформаційні й обчислювальні ресурси за допомогою цифрових телекомунікацій. В якості інтеграційної основи була запропонована відкрита система Joomla, на основі якої побудовано сайт Криворізького державного педагогічного університету, та система дистанційного навчання MOODLE, що містить матеріали для самоосвіти педагогів з ІКТН. Для супроводу курсів підвищення кваліфікації були розроблені електронні навчальні матеріали нового покоління, що дозволили переглянути зміст і організаційні форми навчальної діяльності й перепідготовки викладацьких кадрів.

Наприклад, при розгляді теми «Вдосконалювання керування загальноосвітніми установами на основі автоматизації процесів інформаційно-

методичного забезпечення» акценти були зроблені на використання баз і банків даних науково-педагогічної інформації, інформаційно-методичних матеріалів, виявленні особливостей «відкритої освіти» як стосовно реалізації потенціалу Інтернет, так і в напрямку інформаційної взаємодії між учасниками процесу перепідготовки, які можуть взаємодіяти в освітніх цілях, поза залежністю від територіального розташування й обирати рівень перепідготовки залежно від своєї підготовленості, інтересів і переваг. Слухачі курсів зробили висновок, що необхідна наявність інформаційного середовища для використання розподіленого інформаційного ресурсу та реалізації інформаційної взаємодії. Рішенням проблеми формування інформаційно-освітніх ресурсів і забезпечення доступу до них може бути створення регіональних ресурсних центрів, у тому числі центрів відкритої та дистанційної освіти.

Інтеграція традиційних та інноваційних ІКТН забезпечує інтерактивність взаємодії суб'єктів освіти як синхронно в реальному часі (чат, Skype-зв'язок, ICQ, віртуальні дошки та кімнати), так й асинхронно (форуми, електронна пошта). Особистісно-зорієнтований, креативний та мобільний характер – основні риси навчання цього типу, ціль якого – творча самореалізація педагога в процесі підвищення кваліфікації [7], [8], [9]. Серед технологій, що використовуються в процесі підвищення кваліфікації, можна виділити:

- інформаційно-розвиваючі когнітивні технології, орієнтовані на оволодіння більшим запасом інформації, формування нової системи знань, оволодіння й вільне оперування знаннями;
- технології, орієнтовані на розвиток розумової активності (розвиваюче, проблемне навчання);
- діяльнісні технології, орієнтовані на оволодіння способами професійної й навчальної діяльності;
- особистісно-зорієнтовані технології, спрямовані на формування активності особистості в навчальному процесі та ін.

Ефективною формою підвищення кваліфікації вчителів є захист впускних робіт із творчими відкритими завданнями, проведення віртуальних педагогічних конференцій, проєктів і конкурсів за допомогою електронної пошти або з використанням форумів. Всі ці заходи сприяють переходу в процесі перепідготовки вчителів від знанневого до компетентнісного підходу, коли набуті знання стають особистим ресурсом педагога, який здатний вільно застосовувати його у відповідній ситуації, діючи ефективно й адекватно.

Праця фахівця будь-якої спеціальності спрямована на певний об'єкт (предмет) діяльності й полягає у виконанні визначених виробничих функцій. Вона пов'язана з конкретною системою діяльності та реалізується за допомогою відповідної системи засобів цієї діяльності. Тобто праця фахівця пов'язана з конкретною технологією або є елементом цієї технології.

В умовах інформаційного суспільства життєвий цикл ІКТ стає мен-

шим, ніж термін професійної діяльності вчителя. За цих умов домінуючим напрямком в післядипломній освіті стає формування здатності педагога на основі відповідної фундаментальної освіти перебудувати систему власної професійної діяльності з урахуванням соціально значущих цілей та нормативних обмежень – тобто самоформувати особистісні характеристики фахівця. Якщо визначити за головну мету діяльності системи підвищення кваліфікації підготовку такого фахівця, то процес перепідготовки доцільно організувати таким чином, щоб забезпечувалася всебічний розвиток різних ІКТ-компетентностей.

Застосування компетентнісного підходу до післядипломної освіти ні в якому разі не замінює традиційних для вітчизняної освіти ЗУНів, а створює передумови для більшого та гнучкішого наближення результатів освіти до потреб та вимог ринку праці, подальшого розвитку освітніх технологій та системи освіти в цілому. Тому під ІКТ-компетентністю вчителя математики ми розуміємо впевнене оволодіння всіма складовими ІКТН для розв'язання питань, що виникають у навчальній та іншій діяльності вчителя. Таким чином, ІКТ-компетентність стає першим кроком на шляху до досягнення освітніх цілей.

Інтегративна інформаційна компетентність включає дві групи базових компетентностей:

1) компетентність роботи з інформацією: усвідомлення потреби в інформації; пошук шляхів заповнення прогалин у знаннях; розробка стратегії пошуку інформації; відбір, порівняння й оцінка інформації; систематизація, обробка й відтворення інформації; синтез існуючої інформації, створення на її основі нового знання;

2) компетентність роботи з ІКТ: використання стандартного програмного забезпечення, технічних пристроїв; здійснення інформаційного пошуку в Інтернеті; налагодження спілкування за допомогою Інтернет-технологій.

Є.М. Смирнова-Трибульська визначає у фахівця три рівні сформованості компетентностей з ІКТ: базовий рівень (елементарний), середній рівень (системний), просунутий рівень (функціональний) [10, с. 170].

До *базового* рівня віднесено володіння основними прийомами і методами роботи з персональним комп'ютером (робота в операційній системі, інсталяція програм, їх запуск, робота з ними, нескладне опрацювання даних за допомогою офісних програм, збереження результатів роботи та ін.); ознайомлення з етичними і правовими нормами, авторським правом щодо використання інтелектуальних (зокрема, електронних) ресурсів, ліцензійного програмного забезпечення тощо; володіння прийомами і методами роботи в локальній і глобальній комп'ютерних мережах (робота з Web-браузером, пошук необхідних відомостей в мережі, запис на власний комп'ютер, використання мережі для комунікації з іншими користувачами в синхронному і асинхронному режимі).

До *середнього* рівня сформованості компетентностей з ІКТ віднесено уміння знаходити і отримувати за допомогою глобальної комп'ютерної

мережі актуальні відомості і методичні матеріали з предмету; уміння розробляти електронні дидактичні і методичні матеріали, зокрема, текстові, мультимедійні презентації, нескладні Web-сторінки; знання принципів створення, сприйняття і дії засобів мультимедіа; мультимедійні педагогічні програмні засоби, що передбачають зворотний зв'язок; методичні, дидактичні матеріали для проведення занять з навчального предмету і для реалізації міжпредметних проєктів; уміння створювати мережні освітні ресурси та ін.; використання дистанційних форм навчання для самонавчання, самоосвіти, професійного зростання і вдосконалення.

Просунутий рівень характеризується володінням широким спектром ІКТ і умінням використовувати їх для проведення різних видів занять і позаурочних заходів; володіння методикою використання ІКТ в освітньому процесі; зокрема у сфері використання дистанційних форм навчання для підготовки, організації і проведення окремих уроків та дистанційних тематичних курсів; розробки дистанційних курсів.

Вчителю можна вважати підготовленим до використання ІКТ у професійній діяльності, якщо у нього наявні компетентності в областях:

а) розуміння і використання термінології, засобів (устаткування), інструментів (програмного забезпечення) і методів ІКТ;

б) ІКТ розглядаються вчителем як складовий елемент свого робочого місця;

в) усвідомлена роль і потреба використання ІКТ у викладанні навчального предмета;

г) сформовані правові, етичні і суспільні аспекти доступу до ІКТ та їх використання.

Показником сформованості інформаційної компетентності в процесі перепідготовки стає створення нових інформаційних продуктів (проєктів, моделей, презентацій, посібників, розробок і ін.). Таким чином, компетентнісний підхід може служити методологічною базою для розробки нових засобів навчання математики. У зв'язку з цим актуальним представляється обґрунтування психолого-педагогічних вимог до електронного навчання, процесу розробки та використання інформаційних ресурсів в освітньому процесі в рамках інноваційної компетентнісної парадигми тощо.

Таким чином, реалізація компетентнісного підходу в процесі підготовки та перепідготовки фахівців, інтеграція в процесі навчання традиційних засобів ІКТ, інноваційного електронного (зокрема, дистанційного та мобільного) навчання математики дозволяє створити нові типи засобів навчання, видозмінює форми навчання, модифікує цілі та зміст навчання математики, породжує нові методи навчання, тобто змінює всю методичну систему навчання. Підсумовуючи вище сказане, приходимо до наступного висновку: оволодіння ІКТ слухачами КПК передбачає два напрямки підвищення кваліфікації вчителів математики: 1 – змістовно-прикладний; 2 – загальнокультурний. До змістовно-прикладного напрямку слід віднести: оволодіння конкретним змістом математичних

дисциплін з метою поширення фахових знань; засвоєння нових методичних методів навчання з використанням ІКТ. Загальнокультурна складова містить формування уявлення про ІКТ як частину загальносуспільної культури сучасності, її ролі в подальшому розвитку цивілізації, розвитку за допомогою ІКТ новітнього стилю мислення щодо пізнання навколишнього світу і розвитку особистості.

В подальших розділах посібника пропонуються окремі компоненти комп'ютеризованої методичної системи навчання математики та розглядаються її інноваційні властивості, які можуть бути запропоновані для вивчення слухачами КПК з метою їх використання в майбутній фаховій діяльності вчителів математики загальноосвітньої школи.

Література:

1. Самыгин С. И. Педагогика и психология высшей школы / С. И. Самыгин. – М. : Феникс, 1998. – 544 с.
2. Груденов Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики : кн. для учителя / Я. И. Груденов. – М. : Просвещение, 1990. – 224 с.
3. Карамішева Н. В. Логіка. Пізнання. Еврика : посібник [для студентів та аспірантів] / Н. В. Карамішева. – Львів : Астролябія, 2002. – 342 с.
4. Іваненко Л. О. Використання евристичної моделі мислення при розв'язуванні математичної задачі / Л. О. Іваненко // Збірник тез доповідей Міжнародної науково-методичної конференції «Евристичне навчання математики». – Донецьк, 2005. – С. 36-37.
5. Каменская М. В. Некоторые вопросы эстетического воспитания при обучении математике / М. В. Каменская, М. В. Писклёнова // Збірник тез доповідей Міжнародної науково-методичної конференції «Евристичне навчання математики». – Донецьк, 2005.
6. Сиротенко Г. О. Шляхи оновлення освіти : Науково-методичний аспект. Інформаційно-методичний збірник. – Х. : Основа, 2003. – 96 с.
7. Жалдак М. І. Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики / М. І. Жалдак // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Зб. наук праць / Редкол. – К. : НПУ ім. М.П. Драгоманова. – Випуск 7. – 2003. – С. 3-16.
8. Семеріков С. О. Фундаменталізація навчання інформаційних дисциплін у вищій школі : монографія / Науковий редактор академік АПН України, д.пед.н., проф. М.І. Жалдак. – Кривий Ріг : Мінерал ; К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2009. – 340 с. : іл. – Бібліогр.: с. 284–339.
9. Семеріков С. О. Нові засоби дистанційного навчання інформаційних технологій математичного призначення / С. О. Семеріков, І. О. Теплицький, С. В. Шокалюк // Вісник. Тестування і моніторинг в освіті. – 2008. – №2. – С. 42–50.
10. Смирнова-Трибульська Е.Н. Теоретико-методические основы формирования информационных компетентностей учителей естественно-научных дисциплин в области дистанционного обучения : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.02 / Е. Н. Смирнова-Трибульська. – К., 2008. – 676 с.

7.3. Програма тренінгу «ІКТН математики» і ресурси електронного навчального курсу

Програма тренінгу [«Інформаційно-комунікаційні технології навчання математики»](#) для підвищення кваліфікації учителів математики, зокрема і майбутніх учителів спеціальності 014.04 Середня освіта. Математика, з використання ІКТН розроблена к. пед. н., доцентом, доцентом кафедри математики і методики її навчання Криворізького державного педагогічного університету **Т.Г. Крамаренко**. Рецензенти програми: **Жалдак М. І.** – завідувач кафедри теоретичних основ інформатики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова, академік АПН України, доктор педагогічних наук, професор; **Корольський В.В.** – завідувач кафедри математики та методики її навчання Криворізького державного педагогічного університету, кандидат технічних наук, професор.



7.3.1. Вступ

Особистісна орієнтація освіти, запровадження освітніх інновацій, інформаційно-комунікаційних технологій навчання, створення індустрії сучасних засобів навчання і виховання, забезпечення ними навчальних закладів є пріоритетними напрямками державної політики щодо розвитку освіти в Україні. На сьогоднішній день здійснюється широкомасштабна програма інформатизації освіти і науки, відбувається інтенсивний пошук методик комп'ютерно-орієнтованого навчання. Поряд з традиційними методами, формами та засобами у процесі навчання учнів / студентів все більшої ваги набувають комп'ютерно-орієнтовані. Ефективне використання інформаційно-комунікаційних засобів навчання математики дозволяє здійснювати навчання розвиваючими методами, серед яких чільне місце посідає дослідницький підхід у навчанні, що в найбільшій мірі відповідає компетентнісній парадигмі сучасної освіти.

Предметом пропонованого тренінгу є інформаційно-комунікаційні технології навчання математики, включаючи комп'ютерно-орієнтовані засоби, методи і форми навчання.

Міждисциплінарні зв'язки: методика навчання математики, інформаційно-комунікаційні технології в освіті.

Тренінг «Інформаційно-комунікаційні технології навчання математики» органічно доповнює професійну математичну і методичну підготовку учителя розглядом основних аспектів теорії та практичного застосування інформаційно-комунікаційних засобів навчання математики. Курс є інтегрованим і опирається на знання слухачів, уміння і навички, отримані з інформаційних технологій, і методики навчання математики.

У процесі проведення тренінгу слухачі мають набути власного дос-

віду постановки і проведення навчальних досліджень на основі комп'ютерного моделювання у середовищах підтримки математичної діяльності; добору засобів та методів навчання з використанням програмних засобів; підготовки дидактичних матеріалів, засобів наочності тощо. Тренінг орієнтовано на активні форми навчання: проведення навчальних експериментів, підготовку дидактичних та методичних матеріалів, розробок уроків алгебри і геометрії, доповідей, презентацій, використання електронних навчальних курсів і засобів спілкування у мережі. Продуктом проектної діяльності слухачів є створення і наповнення доцільним змістом, власними розробками блогу учителя математики, складання добірок електронних наочностей для навчання математики, наповнення розробленими добірками електронного навчального курсу в системі управління електронними навчальними курсами MOODLE.

Для забезпечення навчального процесу необхідно мати підключення до мережі Інтернет з можливістю працювати з хмарними сервісами Google чи Microsoft, вільним програмним забезпеченням [LearningApps](#), системою динамічної математики GeoGebra чи спеціалізованими програми і пакетами GRAN і DG; програмним забезпеченням для мультимедійної дошки, наприклад, Interwrite; мультимедійними комплексами «Математика, 5 клас», «Математика, 6 клас», бібліотеками електронних наочностей «Алгебра, 7-9 клас», «Геометрія, 7-9 клас», «Геометрія, 7 клас», «Геометрія, 8 клас», «Геометрія, 9 клас», рекомендованими МОН України для використання у загальноосвітніх навчальних закладах (*перелік засобів з гіперпосиланнями на джерела подано далі*).

Програма тренінгу передбачає різні форми діяльності слухачів: самостійну роботу з програмним забезпеченням; роботу в парах та групах; колективне обговорення, наприклад, онлайн чи через форум асинхронно сучасних проблем, що стосуються впровадження інформаційно-комунікаційних технологій у навчальний процес; інтерактивні методи навчання; постійне використання хмарних технологій навчання та Інтернет-ресурсів для розроблення матеріалів при створенні власного портфоліо; виконання завдань; оцінювання згідно критеріїв створених колегами навчально-методичних матеріалів.

В основу концептуальних засад тренінгу покладено проектну методiku на основі самостійної (індивідуальної чи групової) дослідницької діяльності слухачів; шляхи ефективного використання ІКТ у навчальному процесі; формування професійних компетентностей, навичок мислення високого рівня, навичок критичного мислення, навичок ХХІ століття, орієнтування при плануванні навчального матеріалу на вимоги державних загальноосвітніх стандартів для учнів та зміст державних навчальних програм з різних навчальних предметів для середньої школи.

Навчання за кожним модулем має подібну структуру: обговорення в парах чи в малих групах завдань для домашнього виконання та внесення

до складових портфоліо відповідних змін; обговорення актуальних проблем, пов'язаних з ефективним використанням інформаційно-комунікаційних та інноваційних педагогічних технологій у навчальному процесі; розроблення відповідних електронних наочностей, планів чи планів-конспектів уроків; оцінювання в групах розроблених складових портфоліо за спеціальними критеріями та вимогами до них, що включають групи вимог: ефективне застосування комп'ютерних технологій; навчання і розвиток учнів (розвиток навичок мислення високого рівня) завдяки їх самостійній дослідницькій діяльності із застосуванням знань.

7.3.2. Мета і основні завдання тренінгу:

- поглиблення знання слухачів з методики навчання математики та інформаційних технологій; зокрема про методичну систему навчання математики з використанням ІКТН; про сутність, психолого-педагогічні засади і технологічні основи впровадження ІКТН математики;
- вироблення у слухачів практичних умінь і навичок застосування педагогічних програмних засобів, електронних навчальних курсів, хмарних та дистанційних технологій у процесі навчання математики;
- забезпечення умов для неперервної самоосвіти на основі систематичної самостійної роботи слухачів; для підвищення рівня знань і розвитку творчих здібностей особистості, алгоритмічного, логічного мислення.

Метою тренінгу є поглиблення теоретичних та практичних знань і вмінь його учасників, формування загальних, спеціальних, професійних компетентностей, достатніх для ефективного розв'язування стандартних і нестандартних комплексних проблем, виконання завдань інноваційного характеру, опанування загальних засад методології професійної педагогічної діяльності

Основні завдання вивчення дисципліни «Інформаційно-комунікаційні засоби навчання математики»:

- надати студентам знання щодо використання комп'ютерно-орієнтованих технічних засобів навчання, спеціального програмного забезпечення для навчання математики в загальноосвітніх закладах, щодо володіння методикою використання системи дидактичних засобів, створення дидактичних засобів і навчання учнів виготовленню моделей;
- забезпечити у студентів необхідні уміння для використання технічних засобів навчання, відповідних програмних засобів навчально-виховного призначення для підтримки педагогічного процесу, підготовки до уроку математики з використанням засобів ІКТ і складання плану або плану-конспекту уроку, виходячи із завдань уроку і програмних вимог; для добору засобів наочності, інформаційно-комунікаційні засобів навчання;

- сприяти систематизації у студентів знань, умінь та навичок з питань психолого-педагогічних особливостей використання ІКТ у навчанні.

В результаті вивчення навчальної дисципліни / тренінгу студент повинен

знати:

- основні компоненти комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання; зокрема засоби навчання математики;

- діяльнісні середовища професійного призначення, зокрема педагогічні програмні засоби навчання математики, і їх використання в навчальному процесі;

- технології розв'язування математичних задач з використанням засобів сучасних інформаційних технологій, зокрема системи динамічної математики;

- організаційні форми навчання математики; зокрема урок; типи і структуру уроків;

- системи опрацювання текстів; графічних відомостей.

вміти:

- використовувати ІКЗН для підготовки супроводу, аналізу, коригування навчального процесу, управління навчальним процесом;

- добирати раціональні методи і засоби навчання, враховуючи індивідуальні особливості учнів, їх нахили і здібності;

- поєднувати традиційні методичні системи навчання із новими інформаційно-комунікаційними технологіями;

- на основі розуміння сутності неформалізованих, творчих компонент мислення учня здійснювати постановку проблеми і добір потрібних операцій з використанням ІКЗН, що приводять до її розв'язування.

7.3.3. Структура навчальної дисципліни, аналіз змістових модулів.

№ ЗМ	Теми змістових модулів	Комбіноване навчання (год.)		Дистанційне (год.)
		АР	СР	СР
Змістовий модуль 1. Мережні технології у практиці роботи вчителя				
1.1	Хмарні сервіси Google / Microsoft.	1 (4)	6 (3)	7
1.2	Сервіси Web 2.0 для підтримки процесів навчання.	2	4	6
1.3.	Дистанційні технології навчання.	1 (4)	6 (3)	7
	Всього:	4 (10)	16 (10)	20
Змістовий модуль 2. Електронні засоби навчального призначення				

2.1.	Програмні засоби «Бібліотека електронних наочностей «Геометрія, 7-9 клас», «Геометрія, 7 клас»	1 (2)	3 (2)	4
2.2.	Програмно-методичний комплекс "Математика, 5-6 клас".	1 (2)	3 (2)	4
2.3.	Бібліотека електронних наочностей «Алгебра, 7-9 клас».	1 (2)	3 (2)	4
2.4.	Опрацювання статистичних даних (Microsoft Excel, GeoGebra, Google-таблиці).	1 (2)	3 (2)	4
	Всього:	4 (8)	12 (8)	16
Змістовий модуль 3. Системи динамічної математики				
3.1.	Дослідження властивостей геометричних перетворень. Електронні інструменти для здійснення геометричних перетворень фігур.	1 (2)	3 (2)	4
3.2.	Розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля та лінійки з використанням електронних інструментів.	1 (2)	3 (2)	4
3.3.	Динамічна геометрія. Навчальні дослідження властивостей фігур, відшукання геометричних місць точок.	1 (2)	3 (2)	4
3.4.	Побудова графіків функціональних залежностей, розв'язування задач шкільного курсу алгебри.	1 (4)	5 (2)	6
	Всього:	4 (10)	14 (8)	18
Змістовий модуль 4. Мультимедійна дошка				
4.1.	Технологія розробки уроку з використанням мультимедійної дошки.	1 (2)	2	4
4.2.	Розробка уроку з використанням програмного забезпечення для мультимедійної дошки	2	2	4
4.3.	Демонстрація, рецензування, удосконалення розроблених уроків для мультимедійної дошки.	1 (2)	2	4
	Всього:	4 (6)	6	12
	Всього за тренінг:	16 (34)	48 (32)	66

Зміст, ключові поняття теми, рекомендовані джерела

Змістовий модуль 1.

Мережні технології у практиці роботи вчителя (10 год.)

Тема 1.1. Хмарні сервіси Google (4 год.)

Мета: формування поняття про комп'ютерно-орієнтовану методичну систему навчання; характеристика і порівняння традиційних та комп'ютерно-орієнтованих методів, засобів і форм організації навчання; удосконалення умінь використання хмарних сервісів Google в практиці роботи учителя.

Основні питання:

- Поняття про комп'ютерно-орієнтовану методичну систему навчання математики. Сутність поняття «інформаційно-комунікаційні технології навчання». Традиційні та комп'ютерно-орієнтовані методи, засоби і форми організації навчання.

- Хмарні сервіси Google.

Ключові поняття:

- комп'ютерно-орієнтована методична система навчання, комп'ютерно-орієнтовані методи, засоби, форми організації навчання, електронний навчальний курс, педагогічний програмний засіб навчання, програмно-методичний комплекс, система комп'ютерної математики, програмний засіб навчального призначення, інформаційно-комунікаційні технології навчання;

- документи Google, Google-диск, Blogger, YouTube, календар Google

Самостійна та індивідуальна робота: опрацювання відповідних розділів навчального посібника, ресурсів електронного курсу, участь в обговоренні педагогічних проблем за темою заняття, розробка і наповнення блогу учителя математики з використанням інструменту Blogger (головний продукт проектної діяльності).

Джерела¹: п. 1.1, п. 1.2, п. 6.2, п. 6.3; [14], [29, тема 1], [25-27], [39], [48], [19], [47].

Тема 1.2. Сервіси Web 2.0 для підтримки процесів навчання, [LearningApps](#) (4 год.)

Мета: висвітлення психолого-педагогічних аспектів застосування ІКТН математики, формування поняття інноваційних інформаційно-комунікаційних технологій навчання; удосконалення умінь використання мережних технологій в практиці роботи учителя, формування умінь розробляти дидактичні матеріали та проводити опитування учнів з ви-

¹ Тут і далі у списку джерел на першому місці буде вказано розділи та відповідні пункти даного навчального посібника.

користанням мережних технологій.

Основні питання:

- Психолого-педагогічні аспекти застосування ІКТН математики.
- Співробітництво у мережі, сервіси Web 2.0
- Використання LearningApps.org для розробки дидактичних матеріалів.
- Подання розроблених матеріалів в експериментальному курсі на платформі Moodle.

Ключові поняття:

LearningApps.org, Сервіси Web 2.0.

Самостійна та індивідуальна робота: розробка дидактичних засобів за обраною темою уроку з використанням LearningApps.org, зокрема кросвордів і ребусів до обраних тем шкільного курсу математики.

Джерела: п. 2.10, [29, тема 2], [14], [24], [відеоуроки](#).

Тема 1.3. Дистанційні технології у навчанні школярів. MOODLE (2 год.)

Мета: Формування умінь у слухача курсу створювати найпростіший електронний курс на платформі Moodle, додавати ресурси, елементи курсу, розробляти за допомогою шаблону тестові завдання, імпортувати їх до категорій питань.

Основні питання:

- Загальні відомості про структуру електронного навчального курсу.
- Загальні відомості про Moodle.
- Ресурси Moodle, елементи дистанційного курсу.
- Розробка за допомогою шаблону тестових завдань, імпортування питань у категорії Moodle.

Ключові слова: інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання, дистанційні технології навчання, електронний навчальний засіб, електронний навчальний курс, Moodle, модульне-об'єктно-орієнтоване середовище для навчання, дистанційний курс, ресурс курсу, елемент курсу, форум, чат.

Самостійна та індивідуальна робота: додавання ресурсів та елементів курсу, розробка тестових завдань за технологіями Moodle за обраною темою уроку.

Джерела: п. 3.2, п. 4.1, п. 4.2, [29, тема 8], [3], [45], [відеоуроки](#).

Змістовий модуль 2. Електронні засоби навчального призначення (8 год.)

Тема № 2.1. Програмні засоби «Бібліотека електронних наочностей «Геометрія, 7-9 клас»», «Геометрія, 7 клас» (2 год.)

Мета: формувати вміння і навички майбутніх вчителів математики використовувати «Бібліотеку електронних наочностей «Геометрія, 7-9

клас»», «Геометрія, 7 клас» для супроводу уроку, для підготовки до уроку, складання плану-конспекту уроку; формувати вміння редагувати електронні наочності засобу і створювати нові у режимі «Конструктор».

Основні питання:

- Ознайомлення з електронними підручниками в режимі «Уроки»;
- Прослуховування і редагування фрагментів уроків;
- Створення електронних наочностей у режимі «Конструктор»;
- Виконання тестових завдань;
- Розробка плану-конспекту уроку за обраною темою.

Ключові слова: бібліотека електронних наочностей, геометрія, електронний підручник, електронний навчальний засіб, електронний навчально-методичний комплект, редагування уроку, редагування кроку уроку; тест, план-конспект уроку.

Самостійна та індивідуальна робота: розробка плану-конспекту уроку за обраною темою геометрії з використанням бібліотек електронних наочностей.

Джерела: основні: п. 1.51, п. 1.52; [29, тема 4], [1-4], [10]; додаткові [13], [24], [44]. [5], [6], [15].

Тема 2.2. Програмно-методичний комплекс "Математика, 5-6 клас" (2 год.)

Мета: формувати вміння і навичок майбутніх вчителів математики використовувати програмно-методичний комплекс «Математика, 5-6 клас» для супроводу уроку, для підготовки до уроку, складання плану-конспекту уроку; формувати вміння редагувати електронні наочності засобу і створювати нові у режимі «Конструктор», проводити урок з використанням мережі

Основні питання:

- Ознайомлення з структурою і змістом електронного підручника;
- Прослуховування і редагування фрагментів уроків;
- Створення електронних наочностей у режимі «Конструктор»;
- Виконання тестових завдань;
- Робота з програмно-методичним комплексом у мережі;
- Розробка плану-конспекту уроку за обраною темою.

Ключові слова: програмно-методичний комплекс, «Математика, 5-6 клас», електронний підручник, електронний навчальний засіб, редагування уроку, редагування кроку уроку; тест, план-конспект уроку.

Самостійна та індивідуальна робота: розробка плану-конспекту уроку математики в 5 чи в 6 класі за обраною темою з використанням завдань з бібліотеки електронних наочностей.

Джерела: основні: п. 1.3; [29, тема 3], [10], [8], [9], [22]; допоміжні [11], [13], [24], [44], [20], [21].

Тема 2.3. Бібліотека електронних наочностей «Алгебра, 7-9 клас» (2 год.)

Мета: Ознайомити слухачів курсу з програмними модулями, інструментами засобу «Бібліотека електронних наочностей «Алгебра, 7-9 клас»», формувати уміння та навички по застосуванню засобу для конструювання уроків алгебри, здійснення символічних перетворень виразів. у навчанні алгебри, здійснення графічних побудовань. Розвивати самостійність у вивченні нових засобів, творчий підхід до розробки нових завдань до уроку, критичність мислення.

Основні питання:

- Програмні модулі бібліотеки електронних наочностей «Алгебра, 7-9 клас» (опорні конспекти, середовище розв'язування).
- Конструювання уроку алгебри
- Проведення фрагментів уроку
- Тотожні перетворення раціональних виразів.
- Розв'язування рівнянь вищих степенів, квадратних нерівностей.
- Графічне розв'язування систем рівнянь.
- Побудова графіків функцій за допомогою елементарних перетворень графіків.

Ключові слова: алгебра, бібліотека електронних наочностей «Алгебра, 7-9 клас», електронний навчальний засіб, персоніфікація, конструювання уроку, опорний конспект, режими проведення уроку, «середовище розв'язування», електронний зошит; тотожні перетворення раціональних виразів, рівняння, що зводиться до квадратного, квадратна нерівність; «середовище «Графіки»», графічний спосіб розв'язування, елементарні перетворення графіків функцій.

Самостійна та індивідуальна робота: розв'язування завдань з бібліотеки електронних наочностей, розробка власних завдань, конструювання уроку з використанням бібліотеки електронних наочностей.

Джерела: п. 1.4.1, п. 1.4.2; [29, тема 7], [16]; допоміжні [13], [24], [44].

Тема 2.4. Опрацювання статистичних даних (Excel / Gran1 / таблиці Google) (2 год.)

Мета: формування умінь і навичок опрацювання статистичних даних за допомогою програмних засобів Microsoft Office Excel / Gran1 / Google таблиці.

Основні питання:

- Опрацювання статистичних даних за допомогою Microsoft Office Excel (пакет аналізу).
- Опрацювання статистичних даних за допомогою Microsoft Office Excel / Google таблиці (вбудовані функції).
- Опрацювання статистичних даних за допомогою Gran1.

Ключові слова: алгебра, педагогічний програмний засіб GRAN1, електронний навчальний засіб; Microsoft Office Excel; пакет аналізу, вбудовані функції; задача, динамічні графіки, графічний спосіб розв'язування, елементарні перетворення графіків функцій; Google таблиці.

Самостійна та індивідуальна робота: опрацювання статистичних даних за певним варіантом чи самостійно зібраних.

Джерела: основні п. 2.9; [19], [16], [17], [13]; допоміжні [20], [21], [24].

Змістовий модуль 3. Системи динамічної математики DG/Gran/GeoGebra (10 год.).

Тема 3.1. Дослідження властивостей геометричних перетворень. Електронні інструменти для здійснення геометричних перетворень фігур (2 год.).

Мета: формувати вміння використовувати програмні засоби GRAN-2D / DG / GeoGebra на етапі формування понять, дослідження властивостей переміщення, перетворення подібності; формування вміння розробляти самостійно електронні наочності; використовувати для супроводу уроку електронний навчально-методичний комплект «Геометрія, 9 клас». Формувати мотиваційно-творчу спрямованість особистості, розвивати творчий інтерес, потяг до пошуку нових даних, пізнавальної самостійності.

Основні питання:

- Геометричні перетворення фігур: рухи, гомотетія, перетворення подібності.
- Аналіз електронних наочностей до теми «Перетворення фігур» з електронного навчально-методичного комплексу «Геометрія, 9 клас».
- Аналіз електронних наочностей, розроблених за допомогою DG / GRAN-2D / GeoGebra.
- Створення динамічних креслень за видами перетворень. Дослідження властивостей геометричних перетворень на основі комп'ютерних експериментів.

Ключові слова: бібліотека електронних наочностей, електронний навчально-методичний комплект, редагування уроку; динамічна геометрія, педагогічний програмний засіб, електронні наочності; геометрія, перетворення фігур, рух, подібність.

Самостійна та індивідуальна робота: створення добірки динамічних креслень за видами перетворень.

Джерела:

GeoGebra: п. 1.6, розділ 2, п. 2.1, п. 2.4; [29, тема 6], [1], [42]; [13].

GRAN1: п. 1.4.3, розділ 2; [1], [17], [7], [24], [19].

GRAN-2D: п. 1.5.3, розділ 2, п. 2.1, п. 2.4; [18], [24], [17].

DG: п.1.5.3, розділ 2, п. 2.1, п. 2.4; [41], [23].

Тема 3.2. Розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля та лінійки з використанням електронних інструментів (2 год.)

Мета: Формування умінь і навичок студентів розв'язувати задачі на побудову за допомогою циркуля та лінійки вручну; використовувати електронний навчально-методичний комплект «Геометрія, 7 клас» і педагогічний програмний засіб GRAN-2D / GeoGebra для супроводу уроку під час вивчення теми «Задачі на побудову»; створювати динамічні креслення за допомогою засобу динамічної геометрії, об'єкти-написи, об'єкти-кнопки для проведення дослідження можливості виконання пропонуванних побудов.

Основні питання:

- Перегляд і обговорення уроків геометрії «Задачі на побудову» з електронного навчально-методичного комплекту «Геометрія, 7 клас».
- Найпростіші побудови за допомогою циркуля та лінійки, етапи розв'язування задач на побудову, методи розв'язування (допоміжного трикутника, геометричних місць точок).
- Інструменти засобу динамічної геометрії.
- Виконання побудов за допомогою засобу.
- Поняття динамічного опорного конспекту як організаційно-методичної основи навчального дослідження.

Ключові слова: бібліотека електронних наочностей, електронний навчально-методичний комплект, редагування уроку; динамічна геометрія, програмний засіб DG / GRAN-2D / GeoGebra; геометрія, задача на побудову, динамічний опорний конспект, електронний навчальний курс, Moodle.

Самостійна та індивідуальна робота: розв'язування обраної задачі на побудову з використанням електронних інструментів, розробка динамічного опорного конспекту.

Джерела:

GeoGebra: п. 1.6, розділ 2, п. 2.3; [29, тема 6], [1], [42]; [13].

GRAN-2D: п. 1.5.3, розділ 2, п. 2.3; [18], [24], [17].

DG: п.1.5.3, розділ 2, п. 2.3; [17], [41], [23].

Тема 3.3. Динамічна геометрія. Навчальні дослідження властивостей фігур, відшукування геометричних місць точок (2 год.).

Мета: Формування умінь і навичок використання засобів динамічної геометрії для створення електронних наочностей для дослідження властивостей фігур, відшукування геометричних місць точок; розвиток творчих здібностей учнів, зокрема, уміння генерувати здогадки, висувати нові ідеї, шукати закономірності в результаті узагальнення результатів експерименту, проведеного з використанням програмного забезпечення.

Основні питання:

- Дослідницькі інструменти систем динамічної геометрії. Динамічні вирази.
- Етапи навчального дослідження та їх підтримка засобами пакетів динамічної геометрії.
- Навчальні дослідження типу пошук властивостей та їх підтримка засобами динамічної геометрії.
- Порівняльний аналіз систем динамічної геометрії.
- Динамічний опорний конспект як організаційно-методична основа навчального дослідження.
- Створення наочностей для дослідження до уроку.

Ключові слова: бібліотека електронних наочностей, електронний навчально-методичний комплект, редагування уроку; динамічна геометрія, педагогічний програмний засіб GRAN-2D / GeoGebra; геометрія, задача на дослідження, комп'ютерний обчислювальний експеримент, геометричне місце точок, динамічний опорний конспект, електронний навчальний курс, Moodle.

Самостійна та індивідуальна робота: створення наочностей для навчального дослідження і висування гіпотез до уроку геометрії за обраною темою.

Джерела:

GeoGebra: п. 1.6, розділ 2, п. 2.2; [29, тема 6], [1], [42]; [13].

GRAN1: п. 1.4.3, розділ 2; [1], [17], [7], [24], [19].

GRAN-2D: п. 1.5.3, розділ 2, п. 2.2; [18], [24], [17].

DG: п.1.5.3, розділ 2, п. 2.2; [17], [41], [23].

Тема 3.4. Побудова графіків функціональних залежностей (2 год.).

Мета. Ознайомити слухачів курсу з інструментами засобу GRAN1 / GeoGebra, сформувати вміння та навички по застосуванню засобу для побудови графіків різних типів функціональних залежностей; дослідження властивостей функцій за допомогою динамічних графіків. Розвивати самостійність у вивченні нових засобів, творчий підхід до розробки нових завдань до уроку, критичність мислення, творчість.

Основні питання:

- Інструменти засобу GRAN1 / GeoGebra.
- Побудова динамічних графіків лінійної, квадратичної, степеневі, дробово-раціональної і тригонометричних функцій; дослідження властивостей функцій.
- Побудова графіків елементарних функцій шляхом геометричних перетворень.
- Побудова і дослідження графіків функцій, заданих явно і неявно

в декартових координатах

- Побудова малюнків графіками функцій.
- Побудова і дослідження графіків функцій, заданих, у параметричній формі, у полярних координатах.

Ключові слова: алгебра, педагогічний програмний засіб GRAN1, система динамічної математики GeoGebra, електронний навчальний засіб; динамічні графіки, графічний спосіб розв'язування, елементарні перетворення графіків функцій; електронний навчальний курс, Moodle.

Самостійна та індивідуальна робота: створення наочностей за обраною темою з використанням додатків для мобільних телефонів GeoGebra, побудова малюнка графіками функціональних залежностей.

Джерела:

GeoGebra: п. 1.6, розділ 2; [29, тема 6], [1], [42]; [13].

GRAN1: п. 1.4.3, розділ 2; [1], [17], [7], [24], [19].

GRAN-2D: п. 1.5.3, розділ 2; [18], [24], [17].

DG: п.1.5.3, розділ 2; [41], [23].

Тема 3.5. Розв'язування завдань шкільного курсу алгебри (2 год.).

Мета. Ознайомити слухачів курсу з інструментами засобу GRAN1 / GeoGebra, сформувати вміння та навички по застосуванню засобу для побудови графіків різних типів функціональних залежностей; дослідження властивостей функцій за допомогою динамічних графіків, розв'язування завдань шкільного курсу алгебри. Розвивати самостійність у вивченні нових засобів, творчий підхід до розробки нових завдань до уроку, критичність мислення, творчість.

Основні питання:

- Побудова графіків функцій; дослідження властивостей функцій.
- Розв'язування завдань шкільного курсу алгебри
 - рівнянь, нерівностей та їх систем графічним способом,
 - побудова геометричних місць точок;
 - обчислення площі криволінійної трапеції, об'єму тіла обертавання;
 - задачі лінійного програмування;
 - задачі математичної статистики.

Ключові слова: програмний засіб GRAN1, система динамічної математики GeoGebra, електронний навчальний засіб; задача, динамічні графіки, графічний спосіб розв'язування, елементарні перетворення графіків функцій.

Самостійна та індивідуальна робота: удосконалення наочностей, створених за обраною темою з використанням додатків для мобільних телефонів GeoGebra, та малюнків графіками.

Джерела:

GeoGebra: п. 1.6, розділ 2; [29, тема 6], [1], [42]; [13].

GRAN1: п. 1.4.3, розділ 2; [1], [17], [7], [24], [19].

GRAN-2D: п. 1.5.3, розділ 2; [18], [24], [17].

DG: п.1.5.3, розділ 2; [41], [23].

Змістовий модуль №4. Мультимедійна дошка.

Тема 3.6. Використання у навчанні математики мультимедійної дошки (2 год.)

Мета: формування умінь і навичок використовувати у навчанні математики мультимедійну дошку, активатор сенсорної поверхні для супроводу уроку, для підготовки до уроку і розробки уроків за допомогою програмного забезпечення Interwrite Workspase для дошки Interwrite DualBoard.

Основні питання:

- Панель інструментів засобів, призначення інструментів;
- Ознайомлення з режимами роботи засобів на прикладі розроблених наочностей;
- Технологія навчання математики з використанням мультимедійної дошки.
- Створення електронних наочностей до уроку за обраною темою.

Ключові слова: сенсорна дошка, мультимедійна дошка, інтерактивна дошка, проектор, стилус (маркер), дошка Interwrite DualBoard, програмне забезпечення Interwrite Workspase, калібрування дошки, активатор сенсорної (інтерактивної) поверхні, калібрування комплексу; електронні наочності для уроку, план-конспект уроку, електронний навчальний курс, Moodle.

Самостійна та індивідуальна робота: аналіз запропонованих уроків для мультимедійної дошки, матеріалів для опанування програмного забезпечення, добір матеріалу для власного уроку.

Джерела: п. 2.10; [29, тема 5], [31], [11], [24].

Тема 3.7. Використання у навчанні математики мультимедійної дошки (2 год.)

Мета: формування умінь і навичок використовувати програмне забезпечення Interwrite Workspase для мультимедійної дошки Interwrite DualBoard для розробки уроків.

Основні питання:

- Технологія навчання математики з використанням мультимедійної дошки.
- Створення електронних наочностей до уроку за обраною темою, рецензування розроблених уроків.

Ключові слова: сенсорна дошка, мультимедійна дошка, інтерактивна дошка, проектор, стилус (маркер), дошка Interwrite DualBoard, про-

грамне забезпечення Interwrite Workspase, електронні наочності для уроку, план-конспект уроку.

Самостійна та індивідуальна робота: створення електронних наочностей до уроку за обраною темою, рецензування розроблених уроків.

Джерела: Джерела: п. 2.10; [29, тема 5], [31], [11], [24].

Тема 3.8. Демонстрування розроблених наочностей для уроків математики на мультимедійній дошці (2 год.)

Мета: формування умінь і навичок використовувати у навчанні математики мультимедійну дошку для супроводу уроку.

Основні питання:

- Калібрування дошки, калібрування комплексу;
- Панель інструментів засобів, призначення інструментів;
- Демонстрування електронних наочностей до уроку.

Ключові слова: сенсорна дошка, мультимедійна дошка, інтерактивна дошка, проектор, стилус (маркер), дошка Interwrite DualBoard, програмне забезпечення Interwrite Workspase, калібрування дошки, електронні наочності для уроку, план-конспект уроку.

Самостійна та індивідуальна робота: удосконалення створених електронних наочностей до уроку за обраною темою, рецензування розроблених уроків, рефлексія.

Джерела: п. 2.10; [29, тема 5], [31], [11], [24].

Методи навчання

Методи організації та управління процесом засвоєння наукових відомостей: проблемний, частково-пошуковий, дослідницький методи навчання, використання методу доцільно дібраних завдань; використання методу демонстраційних прикладів.

Методи здійснення навчально-пізнавальної діяльності: навчання через практичну діяльність; спрямованість на конкретний власний результат; застосування ІКТ для реалізації педагогічних ідей; дослідницька самостійна проектна діяльність; використання інтерактивних методів навчання; цілеспрямованість на успіх у всіх видах діяльності; побудова вправ при ознайомленні з інформаційно-комунікаційними технологіями за принципом: від простого до складного; формування навичок роботи в малих групах та парах; формування навичок критичного мислення та навичок мислення високого рівня – аналіз, синтез, оцінювання.

Методи стимулювання навчальної діяльності: навчальні диспути, обговорення важливих педагогічних проблем з колегами; проектування всіх видів діяльності; можливість самостійного виконання завдання за комп'ютером; використання методу проектів.

Методи мотивації: пояснення, роз'яснення, розгляд педагогічних ідей.

Методи контролю

Поточний (усне опитування, перевірка домашнього завдання, тестування) та підсумковий контроль – демонстрація та оцінювання розробленого портфоліо (залік). Система оцінювання – накопичувальна. Шкала оцінювання – 100-бальна.

Курс/тренінг закінчується захистом кожним студентом створеного протягом вивчення матеріалу власного портфоліо, що містить блог вчителя математики, розроблені плани-конспекти 3 уроків – математики, геометрії, алгебри, дидактичні матеріали для учнів та методичні матеріали для вчителя. При захисті розробленого студентом Портфоліо, його складові оцінюються іншими студентами за допомогою спеціальних вимог.

Методичне забезпечення

Електронний навчальний курс «Інформаційно-комунікаційні технології навчання математики», розроблений на платформі MOODLE. Електронні підручники та посібники, зразки електронних документів, методичні рекомендації до виконання завдань, ілюстративні матеріали, базова та додаткова література.

7.3.4. *Ресурси електронного навчального курсу «Інформаційно-комунікаційні технології навчання математики»*

(Режим доступу: <https://moodle.kdpu.edu.ua/course/view.php?id=40>)

1. Хмарні технології у практиці роботи вчителя

- [1.1. Приклади використання хмарних сервісів](#) (Google-сторінка)
- [1.2. Приклади розроблених сайтів та блогів учителів математики](#) (Сторінка)
- [1.3. Кращі блоги студентів спеціальності "Математика"](#) (Сторінка)
- [1.4. Рекомендації для розробки блогу](#) URL (веб-посилання)
- [1.5. Створення блогу вчителя математики за шаблоном](#) (Сторінка)
- [1.6. Урок створення блогу вчителя](#)
- [1.7. Як використовують хмарні технології для розвитку учнів](#) (Тест)
- [1.8. Хмарні технології у практиці роботи вчителя](#) (Форум)

2. Хмарні сервіси для розробки дидактичних засобів

[LearningApps.org](#), [Фабрика кросвордів](#), [Форми Google](#)

- [2.1. Відомості про хмарний сервіс LearningApps \(інтерактивні вправи\)](#) (Сторінка)
- [2.2. Відомості про хмарний сервіс "Фабрика кросвордів"](#) (Сторінка)
- [2.3. Опитувальник \(форми Google\)](#) URL (веб-посилання)
- [2.4. Ребуси \(вербальні і математичні\)](#) (Сторінка)
- [2.5. Урок "Хмарний сервіс LearningApps"](#)
- [2.6. Лабораторна робота №2. Дві вправи в LearningApps](#) (Завдання)
- [1L. Вправа на класифікацію \(learningapps.org\)](#) (SCORM пакет)
- [2L. Вправа "Геометричні перетворення" \(learningapps.org\)](#) (SCORM пакет)
- [Розгадайте ребус! \(1 варіант\)](#) (SCORM пакет)
- [Розгадайте математичні ребуси!](#) (SCORM пакет)

3. Математика 5-6 клас. Електронний засіб навчального призначення

<http://rozumni.net/catalog/products/matematyka/>

- [3.1. Матеріали і відомості про розробників засобу](#) (Сторінка)
- [3.2. Відеоуроки по використанню засобу](#) (Сторінка)
- [3.3. Приклад розроблених уроків математики у 5-му класі](#) (Сторінка)
- [3.4. Основні відомості про засіб "Математика 5-ий клас"](#) (Урок)
- [3.5. Лабораторна робота №3. Урок математики в 5-6 класі](#) (Форум)

4. Геометрія 7-9 клас. Електронні засоби навчального призначення.

<http://rozumni.net/catalog/products/matematyka/>

- [4.1. Відомості з посібника про засіб "Бібліотека наочностей "Геометрія, 7-9 клас"](#) (Сторінка)
- [4.2. Матеріали і відомості про розробників засобу](#) (Сторінка)
- [4.3. Короткі відомості про засіб "Геометрія, 8 клас"](#) URL (веб-посилання)
- [4.4. Приклад розробленого за допомогою засобу уроку](#) URL (веб-

посилання)

[4.5. Відеоуроки \(Скрінкасти\). БН "Геометрія, 8 клас"](#) (Сторінка)

[4.6. Урок. Геометрія 7, 8, 9 клас.](#)

[4.7. Лабораторна робота №4. Геометрія, 7-9 клас](#) (Завдання)

5. Мультимедійна дошка

[5.1. Відомості про мультимедійні дошки](#) (Сторінка)

[5.2. Інтерактивні уроки для мультимедійної дошки Panaboard](#) URL (веб-посилання)

[5.3. Матеріали для мультимедійної дошки InterWrite](#) (Сторінка)

[5.4. Як записати відеоуроки / скрінкасти](#) (Сторінка)

[5.5. Лабораторна робота №5-6. Мультимедійна дошка \(розробка уроку\)](#)

Форум

[5.6. Записати скрінкаст розробленого до уроку алгебри](#) (Завдання)

6. Система динамічної математики GeoGebra

[M1 Робота з додатком для мобільного телефона GeoGebra «Геометрія»](#) URL (веб-посилання)

[M2. Завдання для роботи з мобільним додатком «Графічний калькулятор»](#) URL (веб-посилання)

[M3. Завдання для роботи з мобільним додатком «3D-геометрія»](#) URL (веб-посилання)

[6.1. Основні відомості про GeoGebra](#) (Сторінка)

[6.2. Відеоуроки, коди приєднання, закладки \(GeoGebra\)](#) (Сторінка)

[6.3. GeoGebra. Геометричні перетворення фігур](#) (Сторінка)

[6.4. Задачі на побудову з використанням Gran-2D](#) URL (веб-посилання)

[6.5. Математичні "відкриття" за допомогою динамічної геометрії](#) (Сторінка)

[6.6. Завдання на побудову графіків функцій та дослідження](#) URL (веб-посилання)

[6.7. Лабораторна робота №7. Виконати завдання на побудову](#) (Форум)

[6.8. Лабораторна робота №8. Малюнок графіками функціональних залежностей](#) (Форум)

Приклади розроблених в GeoGebra завдань

[6.9. Приклад використання геометричних перетворень "Писанка"](#) (SCORM пакет)

[6.10. Писанка від Руслана Шпоньки](#) (SCORM пакет)

[6.11. Задача на побудову](#) (SCORM пакет)

[6.12. Приклад завдання 1 на дослідження «Властивості перетворення подібності»](#) (SCORM пакет)

[6.13. Приклад 2 на дослідження "Властивості похилих"](#) (SCORM пакет)

[6.14. Приклад побудови малюнка графіками функціональних залежностей](#)

[тей \(SCORM пакет\)](#)

[6.15. Побудова графіків \(математичне моделювання\)](#) (SCORM пакет)

[6.16. Окремі роботи з офіційного сайту GeoGebra](#) (Сторінка)

[6.17. Малюнки графіками \(Світлани Параскевич\)](#) URL (веб-посилання)

[6.18. Про розвиток креативності учнів](#) URL (веб-посилання)

[6.19. Побудова перерізів многогранників](#) URL (веб-посилання)

Для тих, хто хоче вміти більше. Додаткові завдання.

[6.20. Додаткове Д/З 1. Задача на побудову](#) (Форум)

[6.21. Додаткове Д/З. 2. Записати скрінкаст до задачі на побудову](#) (Завдання)

[6.22. Додаткове Д/З 3. Завдання на дослідження за темою уроку геометрії](#) (Форум)

7. Бібліотека електронних наочностей "Алгебра 7-9".

[7.1. Матеріали розробників БН "Алгебра, 7-9 клас"](#) (Сторінка)

[7.2. Відеоуроки по використанню бібліотеки електронних наочностей "Алгебра, 7-9 клас"](#) (Сторінка)

[7.3. Програмно-методичний комплекс "ТерМ"](#) (Сторінка)

Для тих, хто хоче вміти більше. Додаткові завдання.

[7.4. Додаткове Д/З №4. БН "Алгебра, 7-9 клас"](#) (Завдання)

8. MOODLE. Технології дистанційного навчання

[8.1 Основні відомості про Moodle](#) (Сторінка)

[8.2. Приклад дистанційного уроку для курсу на платформі Moodle](#) URL (веб-посилання)

[8.3. Перелік відео для розробки дистанційного курсу \(на допомогу початківцю\)](#) (Сторінка)

Для тих, хто хоче вміти більше. Додаткові завдання.

[8.4. Додаткове Д/З 5. Розробити дистанційний урок за обраною темою](#) (Завдання).

Література до розділів 6, 7

1. Mathematics with a computer [Electronic Resource] / M. I. Zhaldak, Y. V. Goroshko, E. F. Vynnychenko, G. Y. Tsybko. – Kyiv, National Dragomanov Pedagogical University, 2016. – 305 с. – Mode of access : <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyky-ta-pidruchnyky> (date of appeal: 18.06.2018).
2. STEAM-центр [Електронний ресурс] / STEM в Україні. – Режим доступу: <https://sites.google.com/site/steamcentr/home/stem-v-ukraieni>. – (дата звернення 18.05.2019).
3. Анисимов А. М. Работа в системе дистанционного обучения Moodle. Учебное пособие 2-е изд.испр. и дополн./ А.М. Анисимов. –Харьков: ХНАГХ, 2009. – 292 с.
4. Балик Н. Р. Формування STEM-компетентностей у процесі підготовки майбутніх учителів до впровадження STEM-освіти [Електронний ресурс] / Н. Р. Балик, Г. П. Шмигер, Я. П. Василенко. – 2017. – Режим доступу: http://elar.fizmat.tnpu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/1007/Balyk_Shmyger_Vasylenko_Stem.pdf?sequence=1 (дата звернення 18.05.2019).
5. Барна О. В. STEM-освіта: реальні кроки до успіху [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://www.youtube.com/watch?v=oAigBUCILzo> (дата звернення 18.05.2019).
6. Бевз В. Г. Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики / В. Г. Бевз // Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики: зб. наук. праць за матеріалами Міжнар. наук.-практ. конф., 30 травня – 1 червня 2018 р. / М-во освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. – Вінниця : ТОВ «Нілан-ЛТД», 2018. – С. 15-17.
7. Биков В. Ю. Хмарні технології, ІКТ-аутсорсинг і нові функції ІКТ підрозділів освітніх і наукових установ / В. Ю. Биков // Інформаційні технології в освіті. – 2011. – №10. – С. 8–23.
8. Ботузова Ю. В. Динамічні моделі GeoGebra на уроках математики як основа STEM-підходу [Електронний ресурс] / Ю. В. Ботузова // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2018. – Випуск 3 (17). – С. 31-35. – Режим доступу : <https://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/publ/1-1-0-403> (дата звернення 30.06.2019).
9. Васильєва Д. В. Методика навчання математики учнів 5–6 класів з використанням мультимедійної дошки : автореф. дис. на здобуття наукового ступеня канд. пед. наук : 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)» / Д. В. Васильєва ; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – Київ, 2013. – 20 с.
10. Васильєва Д. В. Мультимедіа на уроках математики. 5–6 класи / Д. В. Васильєва. – Київ : Ред. газет природничо-математичного циклу, 2013. – 128 с.
11. Васильєва Д. В. Мультимедійна підтримка уроків математики в 5 – 6 класах: навчально-методичний посібник/ Д. В. Васильєва. – Київ : Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 48 с.
12. Васильєва Д. В. Урізноманітнення форм навчання математики в контексті STEM-освіти [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.youtube.com/watch?v=MshUSDfSYwU> (дата звернення 20.11.2018).
13. Васильєва Д. В. Збірник задач з математики. 5-9 класи : наскрізні лінії компетентностей та їх реалізація / Д. В. Васильєва, Н. І. Василюк. – Київ : Видавничий дім «Освіта», 2017. – 112 с.
14. Волкова Н. П. Інтерактивні технології навчання у вищій школі : навчально-методичний посібник / Н. П. Волкова. – Дніпро : Університет імені Альфреда Нобе-

ля, 2018. – 360 с.

15. Дементієвська Н. П. Як можна комп'ютерні технології використати для розвитку учнів та вчителів? / Н. П. Дементієвська, Н. В. Морзе // Актуальні проблеми психології : Психологічна теорія і технологія навчання / за ред. С. Д. Максименка, М. Л. Смольсон. – Київ : Міленіум, 2005. – Т. 8, вип. 1. – С. 23–38.

16. Жалдак М. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : підручник для студентів фізико-математичних та інформативних спеціальностей педагогічних університетів [Електронний ресурс] / М. І. Жалдак, Н. М. Кузьміна, Г. О. Михалін. – 3-тє вид., перероб. і доп. – Київ : Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, 2017. – 707 с. – Режим доступу: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyky-ta-pidruchnyky> (дата звернення: 30.06.2019).

17. Жалдак М. І. Математика с компьютером: пособие для учителей [Электронный ресурс] / М. И. Жалдак, Ю. В. Горошко, Е. Ф. Винниченко. – Киев : Изд-во НПУ имени М. П. Драгоманова, 2015. – 308 с. – Режим доступа: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyky-ta-pidruchnyky> (дата обращения: 30.06.2019).

18. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках геометрії: посіб. для вчителів [Електронний ресурс] / М. І. Жалдак, О. В. Вітюк. – Київ : РННЦ „ДІНІТ”, 2004. – 168 с. – Режим доступу: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyky-ta-pidruchnyky> (дата звернення: 30.06.2019).

19. Жалдак М. І. Система підготовки вчителя до використання ІКТ у навчальному процесі / М. Жалдак // Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах. – 2011. – № 4–5. – С. 76–83.

20. Жалдак М. І. Початки стохастики : факультативний курс для учнів старшої школи [Електронний ресурс] / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, І. М. Біляй. – Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2014. – 163 с. – Режим доступу: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyky-ta-pidruchnyky> (дата звернення: 30.06.2019).

21. Жалдак М. І. Стохастика : посіб. [для вчителів] [Електронний ресурс] / М. І. Жалдак, І. М. Біляй. – Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. – 304 с. – Режим доступу: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyky-ta-pidruchnyky> (дата звернення: 30.06.2019).

22. Закон України «Про освіту» [Електронний ресурс]. – 2017. – Режим доступу: <http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/2145-19> (дата звернення: 26.02.2019).

23. Крамаренко Т. Використання мультимедійної дошки під час навчання геометричних перетворень на площині [Електронний ресурс] / Т. Крамаренко // Математика в сучасній школі. – 2013. – № 9. – С. 38–43. – Режим доступу: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/jspui/handle/0564/577> (дата звернення: 26.02.2019).

24. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером [Електронний ресурс] : навч. посіб. / Т. Г. Крамаренко; за ред. М. І. Жалдака. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. – 272 с. – Режим доступу: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/jspui/handle/0564/570> (дата звернення: 26.02.2019).

25. Крамаренко Т. Г. Блог «Шаблон блогу "Літня педагогічна практика студентів"» [Електронний документ] : [блог] / Т. Г. Крамаренко ; Криворізький держ. пед. ун-т. – Електрон. дані. – Режим доступу: <https://litnjapraktika.blogspot.com/> (дата звернення: 30.06.2019).

26. Крамаренко Т. Г. Блог «Щоденник тренінгу «Intel Навчання для майбутнього» [Електронний документ] : [блог] / Т. Г. Крамаренко ; Криворізький держ. пед.

ун-т. – Електрон. дані. – Режим доступу: <https://kramarenko2014.blogspot.com/> (дата звернення: 30.06.2019).

27. Крамаренко Т. Г. Блог Тетяни Крамаренко «Математика + ІКТ» [Електронний документ] : [блог] / Т. Г. Крамаренко ; Криворізький держ. пед. ун-т. – Електрон. дані. – Режим доступу: http://kramarenko12.blogspot.com/p/blog-page_28.html (дата звернення: 30.06.2019).

28. Крамаренко Т. Г. Впровадження STEM-технологій у навчанні математики : презентація [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/handle/0564/2512> (дата звернення: 18.05.2019).

29. Крамаренко Т. Г. Електронний навчальний курс «Інформаційно-комунікаційні засоби навчання математики в середній школі» [Електронний ресурс] / Т. Г. Крамаренко ; Криворізький держ. пед. ун-т. – Режим доступу: <http://moodle.kdpu.edu.ua/course/view.php?id=40> (дата звернення: 30.06.2019).

30. Крамаренко Т. Г. Електронний навчальний курс «Навчальна практика за технологією "Intel Навчання для майбутнього"» [Електронний ресурс] / Т. Г. Крамаренко ; Криворізький держ. пед. ун-т. – Режим доступу: <https://moodle.kdpu.edu.ua/course/view.php?id=429> (дата звернення: 30.06.2019).

31. Крамаренко Т. Г. Проблеми підготовки учителя до впровадження елементів STEM-навчання математики [Електронний ресурс] / Т. Г. Крамаренко, О. С. Пилипенко // Науковий журнал «Фізико-математична освіта». – Режим доступу <https://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/publ/1-1-0-441> (дата звернення: 18.05.2019).

32. Кузьмінський А. І. Наукові засади методичної підготовки майбутнього вчителя математики / А. І. Кузьмінський, Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко. – Черкаси: Вид. від. ЧНУ імені Богдана Хмельницького, 2009. – 320 с.

33. Маркова О. М. Хмарні технології як засіб навчання основ математичної інформатики студентів технічних університетів : дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : 13.00.10 [Електронний ресурс] / Маркова Оксана Миколаївна. – Кривий Ріг, 2018. – с. 327. – Режим доступу: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/3148>.

34. Матяш О. І. Теоретико-методичні засади формування методичної компетентності майбутнього вчителя математики до навчання учнів геометрії : монографія / Ольга Іванівна Матяш; науковий редактор д.пед.н., проф. О. І. Скафа. – Вінниця : ФОП Легкун В.М., 2013. – 450 с.

35. Методичні рекомендації для проведення тренінгу для вчителів : матеріали навчальної програми Intel «Навчання для майбутнього. 10 версія» [Електронний ресурс] / Корпорація Intel, Інститут комп'ютерних технологій США; адаптовано для використання в Україні; загальна редакція: Н. П. Дементівська, Н. В. Морзе, Т. В. Нанасва. – Київ, 2011. – Режим доступу: <http://iteach.com.ua/> (дата звернення: 18.02.2017).

36. Методичні рекомендації щодо впровадження STEM-освіти у загальноосвітніх та позашкільних навчальних закладах України на 2017/2018 н.р. / І. П. Василяшко, С. Л. Горбенко, О. В. Лозова, О. О. Патрикеева // Методист. – Київ : Видавництво «Шкільний світ», 2017. – № 8 (68). – С. 37–43.

37. Морзе Н. В. Intel. Навчання для майбутнього [електронний посібник] : адаптація до укр. видання / Н. В. Морзе, Н. П. Дементівська. – Київ, 2010. – Режим доступу : <http://iteach.com.ua/> (дата звернення: 18.02.2017).

38. Новітні комп'ютерні технології [Електронний ресурс]. – Кривий Ріг : Видавничий центр Криворізького національного університету, 2019. – Том XVII : спецвипуск «Хмарні технології в освіті». – 230 с. : іл. – Режим доступу:

<https://ccjournals.eu/ojs/index.php/nocote/issue/view/82> (дата звернення: 18.06.2019).

39. Попель С. М. Творчий вчитель [Електронний документ] : [блог] / С. М. Попель ; Вишнівчицька ЗОШ І-ІІІ ст. Тернопільської обл. – Електрон. дані. – Режим доступу: <http://popsml1.blogspot.com/> (дата звернення: 30.06.2019).

40. Практикум з опанування пакету динамічної математики GeoGebra : GeoGebraBook [Електронний ресурс] / Гризун Л.Е., Пікалова В.В, Русіна І.Д., Цибулька В.А. - [Kharkiv GeoGebra Institute](http://www.geogebra.org/m/jjqf2vfk). – Режим доступу: <https://www.geogebra.org/m/jjqf2vfk> (дата звернення 06.07.2019).

41. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ / Сергій Анатолійович Раков. – Харків: Факт, 2005. – 360 с.

42. Ракута В.М. Система динамічної математики GeoGebra як інноваційний засіб для вивчення математики / В.М.Ракута // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2012. – №4 (30). – Режим доступу: <https://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/download/700/524> (дата звернення: 30.06.2019).

43. Скафа О. І. Евристичне навчання математики: комп'ютерно-орієнтовані уроки: навч.-метод. посібник (друге видання) / О. І. Скафа, О. В. Тутова. – Донецьк : ДонНУ, 2013. – 399 с.

44. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підруч. [для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів] / З.І. Слєпкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

45. Смирнова-Трибульська Є.М. Дистанційне навчання з використанням системи MOODLE / Євгенія Миколаївна Смирнова-Трибульська // Навчально-методичний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів (Гриф МОН України). Науковий редактор: академік АПН України, д.пед.н., професор М.І.Жалдак, Херсон: Видавництво «Айлант», 2007. – 492 с.: іл.

46. Тарасенкова Н. А. Підвищення кваліфікації учителів математики в умовах компетенізації освіти / Н. А. Тарасенкова // Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2019), м. Черкаси, 11–12 квітня 2019 р. – Черкаси: Вид. ФОП Гордієнко Є.І., 2019. – С. 18-19.

47. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики : монографія / Юрій Васильович Триус. – Черкаси : Брама-Україна, 2005. – 400 с.

48. Шпонька Р. Ю. Блог вчителя математики та інформатики Шпоньки Руслана [Електронний документ] : [блог] / Р. Ю. Шпонька ; Криворізький держ. пед. ун-т. – Електрон. дані. – Режим доступу: <http://ruslanshponka.blogspot.com/> (дата звернення: 30.06.2019).

Список програмних засобів, настанов користувача

1. Hohenwarter M. GeoGebra Help 3.2 [Електронний ресурс] / М. Hohenwarter, J. Hohenwarter – Режим доступу : <http://static.geogebra.org/help/docu/en.pdf> (дата звернення 30.06.2019).

2. Геометрія, 7 клас [Електронний ресурс] : мультимедійний підручник. Режим доступу: – <http://rozumni.net/catalog/products/matematyka/geometriya-7-kl/> (дата звернення: 30.06.2019).

3. Геометрія, 8 клас [Електронний ресурс] : мультимедійний підручник. Режим доступу: <http://rozumniki.net/catalog/products/matematyka/geometriya-8-kl/> (дата звернення: 30.06.2019).
4. Геометрія, 9 клас [Електронний ресурс] : мультимедійний підручник. Режим доступу: <http://rozumniki.net/catalog/products/matematyka/geometriya-9-kl/> (дата звернення: 30.06.2019).
5. Електронний навчально-методичний комплект для загальноосвітніх навчальних закладів «Геометрія, 7 клас». – К.: ДП «ІПІТ», 2008. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: процесор x86, 1100 MHz; 128 Мб RAM, CD-ROM Windows 98/XP.
6. Електронний навчально-методичний комплект для загальноосвітніх навчальних закладів «Геометрія, 7 клас». Настанова користувача. – К.: ДП «ІПІТ», 2008. – 30 с.
7. Жалдак М.І. Програмний засіб GRAN1, версія 1.1. [Електронний ресурс] / М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко. – Київ, 2012. – Режим доступу: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/index.php/uk/zavantazhyty/category/1-gran1> (дата звернення: 30.06.2019).
8. Математика, 5 клас [Електронний ресурс] : мультимедійний підручник. Режим доступу: <http://rozumniki.net/catalog/products/matematyka/matematyka-5-kl/> (дата звернення: 30.06.2019).
9. Математика, 6 клас [Електронний ресурс] : мультимедійний підручник. Режим доступу: <http://rozumniki.net/catalog/products/matematyka/matematyka-6-klas/> (дата звернення: 30.06.2019).
10. Методичні рекомендації щодо використання програмного засобу навчального призначення «Геометрія, 8 клас» для загальноосвітніх навчальних закладів під час проведення уроку вчителем та в процесі самостійної роботи учнів. – К.: ДП «ІПІТ», 2008. – 10 с.
11. Офіційний сайт розробників програмного забезпечення Interwrite Workspase для дошки Interwrite DualBoard [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://interwrite-workspace.software.informer.com/download/>.
12. Офіційний сайт розробників системи CLMS MOODLE [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.moodle.org>.
13. Офіційний сайт розробників системи динамічної математики GeoGebra – Dynamic MathematicsforEveryone [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.geogebra.org/>.
14. Програмне забезпечення для розробки блогів Blogger. – Режим доступу: <https://www.blogger.com/>.
-

15. Програмний засіб “Бібліотека електронних наочностей ”Геометрія, 7-9 клас”. – К. Мальва, 2006. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: процесор x86, 1100 MHz; 128 Мб RAM, CD-ROM Windows 98/XP.

16. Програмний засіб «Бібліотека електронних наочностей «Алгебра 7-9 клас» для загальноосвітніх навчальних закладів України», версія 1. – Херсон, 2006. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: Pentium, тактова частота – від 1100 MHz, 128 Мб RAM, CD-ROM Windows XP.

17. Програмний засіб GRAN-2D, версія 1.1. [Електронний ресурс]. – Київ, 2012. – Режим доступу: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/gran-2d> (дата звернення: 30.06.2019).

18. Програмний засіб GRAN-3D, версія 1.1. [Електронний ресурс]. – Київ, 2012. – Режим доступу: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/gran-3d> (дата звернення: 30.06.2019).

19. Програмний комплекс «GRAN», версія 1.0. – К. : Республіканський навчально-методичний центр «Дініт», 2003. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: Pentium, тактова частота – від 1100 MHz, 64 Мб RAM, CD-ROM Windows 98/XP.

20. Програмно-методичний комплекс навчального призначення “Математика, 5-6 клас” для загальноосвітніх закладів версія 1.0 . – Рівне.: ПП Контур плюс, 2006. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: Pentium, тактова частота – від 1100 MHz, 128 Мб RAM, CD-ROM Windows 98/XP.

21. Програмно-методичний комплекс навчального призначення “Математика, 5-6 клас” для загальноосвітніх закладів: Настанова користувача. – Версія 1.0. – Рівне.: ПП Контур плюс, 2006. – 44 с.

22. Програмно-методичний комплекс навчального призначення “Математика, 5-6 клас” для загальноосвітніх закладів: Методичні рекомендації по використанню ПМК при проведенні уроку та при самостійній роботі учнів. – Версія 1.0. – Рівне.: ПП Контур плюс, 2006. – 26 с.

23. Програмно-методичний комплекс навчального призначення «Динамічна геометрія DG» для загальноосвітніх закладів, версія 1.0. – Харків, 2002. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM): 12 см. – Системні вимоги: Pentium, тактова частота – від 1100 MHz, 64 Мб RAM, CD-ROM Windows 98/XP.

24. Сервіс Web 2.0 LearningApps.org для підтримки процесів навчання та викладання за допомогою інтерактивних модулів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://learningapps.org/>.

ДОДАТКИ

А. Підготовка SAGE до роботи

А.1. Інсталяція

Для розгортання SAGE на сервері класу або локальному комп'ютері необхідно скопіювати робочі файли SAGE та встановити VMware Player. Виконуваний файл виду `мова_sage_setup.exe` (де мова – `russian` або `ukrainian` – відповідає поточній локалізації інтерфейсу користувача) запропонує шлях до місця розташування SAGE, створить посилання у меню і на робочому столі та, за відсутності, встановить VMware Player. Зверніть увагу, що каталог, куди встановлюється SAGE, має бути доступним для запису для тих користувачів, що будуть його використовувати.

А.2. Запуск сервера

При першому запуску VMware Player пропонується погодитись із ліцензійною угодою на безоплатне використання даного програмного забезпечення необмежений час.

Запуск відбувається при виборі посилання на SAGE у меню або на робочому столі.

Після завантаження Linux у вікні VMware Player необхідно перейти до нього натисканням `Ctrl-G`, у відповідь на запрошення «`sage login:`» для запуску Web-СКМ ввести «`notebook`» та натиснути `Enter` і `Ctrl-Alt` (рис. А.1).

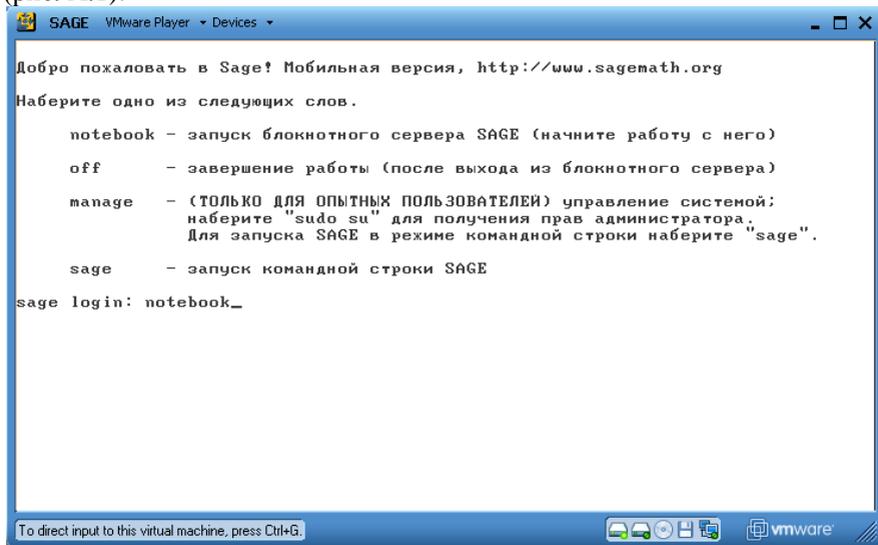


Рис. А.1

А.3. З'єднання з сервером

Запуск блокнутого серверу супроводжується виведенням вказівки стосовно IP-адреси, звернення до якої дасть доступ до Web-інтерфейсу SAGE (рис. А.2). Цю адресу можна застосовувати як на тому ж комп'ютері, де працює сервер SAGE, так і в мережі комп'ютерного кла-су (за відповідного налаштування параметрів мережі).

Откройте браузер (желательно – Firefox) по адресу `http://192.168.75.128`
Запуск сервера может занять некоторое время (10 секунд и более).
Если адрес недоступен, после запуска сервера нажмите кнопку обновления
в окне Вашего Web-браузера.
(Переключитесь сюда и нажмите `Ctrl-C` для остановки блокнутого сервера)

Рис. А.2

На рис. А.3 показано вікно реєстрації користувача. Створювати власний обліковий запис не обов'язково – можна увійти під ім'ям admin (без уведення паролю).

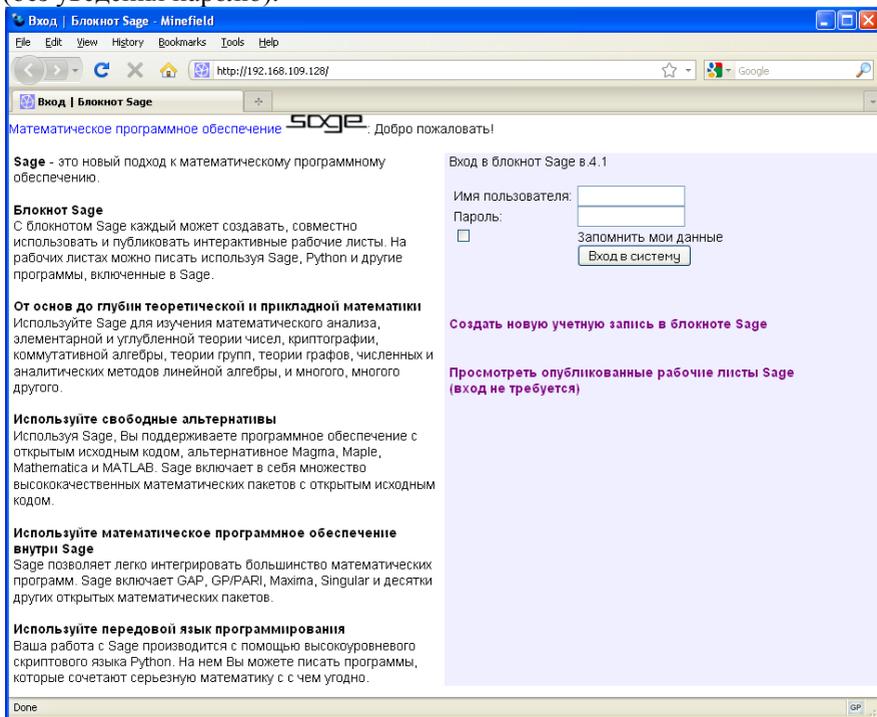


Рис. А.3

А.4. Зупинка серверу

Завершення роботу серверу виконується за необхідності одним з двох способів:

1) закриттям вікна VMware Player: блокнутий режим серверу при цьому зберігається, тому при наступному завантаженні SAGE у відпо-

відь на запрошення «sage login:» вводити «notebook» непотрібно;

2) натисканням Ctrl-C у вікні VMware Player та введенням «off» у відповідь на запрошення «sage login:»: блокує режим серверу при цьому не зберігається.

Б. SAGE: «швидка допомога»

Команда SAGE	Інтерпретація
<i>Базові команди</i>	
<Shift>+<Enter>	обчислити вираз
com<tab>	видати список команд, які починаються з <i>com</i>
command?	надати контекстну довідку з команди <i>command</i>
command??	вивести програмний код команди <i>command</i>
_	звернутися до результату попередньої команди
% <i>package_name</i>	перейти до пакету з іменем <i>package_name</i>
<i>Основні константи та функції</i>	
π =pi, e =e, i =i, ∞ =oo	
sin, cos, tan, sec, csc, cot, sinh, cosh, tanh, sech, csch, coth log, ln, exp, abs, sqrt, factorial, floor, ceil	
var('x ₁ x ₂ ... x _n ') або var('x ₁ , ..., x _n ')	означити x ₁ , ..., x _n як символні змінні
f(x)=x^2 f=lambda x: x^2 def f(x): return x^2	визначити функцію на прикладі $f(x) = x^2$
<i>Операції над виразами</i>	
factor(<i>exp</i>)	розкласти на множники
expand(<i>exp</i>)	розкрити дужки
simplify(<i>exp</i>)	звести подібні без розкриття дужок
RR(<i>exp</i>)	отримати числове значення виразу
<i>Побудова графічних зображень</i>	
point((<i>(x₁, y₁) , ..., (x_n, y_n)</i>), <i>options</i>)	побудувати множину точок на площині
arrow(<i>(x₁, y₁) , (x₂, y₂)</i> , <i>options</i>)	побудувати стрілку (вектор)
line(<i>[(x₁, y₁) , ..., (x_n, y_n)]</i> , <i>options</i>)	побудувати лінію на площині по точках, заданих у вигляді списку
polygon(<i>[(x₁, y₁) , ..., (x_n, y_n)]</i> , <i>options</i>)	побудувати зафарбований багатокутник

Команда SAGE	Інтерпретація
<code>circle((x,y),r,options)</code>	побудувати коло
<code>disk((x,y),r,(angle1,angle2),options)</code>	побудувати сектор круга
<code>plot(f(x),x_min,x_max,options)</code> <code>parametric_plot((f(t),g(t)),</code> <code> t_min,t_max,options)</code> <code>polar_plot(f(t),t_min,t_max,options)</code>	побудувати графік функціональної залежності, заданої аналітично, параметрично та у полярних координатах
<code>bar_chart([list_of_numerical_data])</code>	побудувати стовпчикову діаграму
<code>contour_plot(f,(xmin,xmax),(ymin,ymax),/</code> <code> options)</code>	побудувати контурні лінії для функції від двох змінних
<code>plot_vector_field((f,g),(xmin,xmax),(ymin,ymax))</code>	побудувати векторне поле для двох функцій від двох змінних
<code>circle((1,1),1)+</code> <code> line([(0,0),(2,2)])</code>	задати комбінацію графіків
<code>animate([об'єкт₁, ..., об'єкт_n],</code> <code>options).show(delay=20)</code>	із заданим інтервалом циклічно показати перераховані об'єкти
<code>point3d([(x₁,y₁,z₁),..., (x_n,y_n,z_n)],options)</code>	побудувати множину точок у просторі
<code>line3d([(x₁,y₁,z₁),..., (x_n,y_n,z_n)],</code> <code> options)</code>	побудувати ламану у просторі
<code>sphere((x,y,z),r,options)</code>	побудувати сферу
<code>tetrahedron((x,y,z),size,options)</code>	побудувати тетраедр
<code>cube((x,y,z),size,options)</code>	побудувати куб
<code>octahedron((x,y,z),size,options)</code>	побудувати октаедр
<code>dodecahedron((x,y,z),size,options)</code>	побудувати додекаедр
<code>icosahedron((x,y,z),size,options)</code>	побудувати ікосаедр
<code>plot3d(f(x,y),</code> <code> [x_b,x_e],[y_b,y_e],options)</code> <code>parametric_plot3d((f(t),g(t),h(t)),</code> <code> [t_b,t_e],options)</code> <code>list_plot3d([(x₁,y₁),..., (x_n,y_n)],</code> <code> options)</code>	побудувати поверхню, задану функцією двох змінних, параметрично та переліком точок
<i>Розв'язання рівнянь</i>	
<code>f(x)==g(x)</code>	задати рівняння
<code>solve(f(x)==g(x),x)</code>	розв'язати рівняння аналітично
<code>solve([f(x,y)==0,g(x,y)==0],x,y)</code>	розв'язати систему рівнянь аналітично
<code>find_root(f(x),a,b)</code> або <code>find_root(f(x)==0,a,b)</code>	знайти наближено нулі функції або корені рівняння

Команда SAGE	Інтерпретація
<i>Лінійна алгебра</i>	
<code>vector([1,2])</code>	задати вектор
<code>matrix([[1,2,3],[4,5,6]])</code>	задати матрицю
<code>identity_matrix(n)</code>	задати одиничну матрицю розмірності n
<code>zero_matrix(n,m)</code>	задати нульову матрицю розмірності $n \times m$
<code>diagonal_matrix([a₁₁, a₂₂, ..., a_{nn}])</code>	задати діагональну матрицю з діагональними елементами $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$
<code>random_matrix(Ring, nrow, ncol)</code>	задати матрицю випадкових чисел з кільця <i>Ring</i> (ZZ, QQ, RR, CC)
<code>det(A)</code>	обчислити визначник (детермінант) матриці A
<code>inverse(A)</code> або A^{-1}	знайти матрицю, обернену до матриці A
<code>A.transpose()</code>	виконати транспонування матриці
<i>Початки аналізу</i>	
<code>limit(f(x), x=a)</code>	обчислити границю
<code>limit(f(x), x=a, dir='minus')</code>	обчислити ліву границю
<code>limit(f(x), x=a, dir='plus')</code>	обчислити праву границю
<code>diff(f(x), x)</code>	обчислити похідну
<code>derivative(f(x,y), x)</code>	обчислити похідну
<code>integral(f(x), x)</code>	обчислити інтеграл
<code>integrate(f(x), x, a, b)</code>	обчислити інтеграл
<code>sum([f(i) for i in [k..n]])</code>	обчислити суму елементів ряду
<code>prod([f(i) for i in [k..n]])</code>	обчислити добуток елементів ряду
<code>taylor(f(x), x, x₀, n)</code>	виконати розкладання у ряд Тейлора
<i>Диференційні рівняння</i>	
<code>desolve(de, vars)</code>	знайти загальний розв'язок звичайного диференційного рівняння de відносно змінних $vars$
<code>desolve_laplace(de, vars, ics)</code>	знайти розв'язок задачі Коші для звичайного диференційного рівняння de за початкових умов ics , використовуючи перетворення Лапласа
<code>desolve_system(de, vars, ics)</code>	знайти розв'язок задачі Коші для системи звичайних диференційних рівнянь

Команда SAGE	Інтерпретація
<i>Елементи комбінаторики</i>	
permutations (set)	визначити множину перестановок
arrangements (set, k)	визначити множину розміщень без повторень
permutations_iterator (set, k)	визначити множину розміщень з повтореннями
combinations (set, k)	визначити множину комбінацій (сполук) без повторень
combinations_iterator (set, k)	визначити множину комбінацій (сполук) з повтореннями
tuples (set, k)	визначити множину кортежів
number_of_permutations (set)	обчислити кількість перестановок
number_of_arrangements (set, k)	обчислити кількість розміщень
number_of_combinations (set, k)	обчислити кількість комбінацій
number_of_tuples (set, k)	обчислити кількість кортежів
fibonacci (n)	визначити n -ий елемент послідовності чисел Фібоначі
euler_number (n)	визначити n -ий елемент послідовності чисел Ейлера

В. Фрагмент реалізації проєкту «Розв’язування задач апроксимації засобами Maple та Mathematica у середовищі SAGE»

```
@interact
def maple_approx_MNK(X=input_box([17,18,19,21,23,24,25,26]), \
  Y=input_box([18,20,21,24,25,27,28,29])):
  if (len(X)==len(Y)):
    maple.eval('Xm:='+str(X))
    maple.eval('Ym:='+str(Y))
    maple.eval('with(stats)')
    y1_str=maple.eval('fit[leastsquare][[x,y], \
  y=a*x^3+b*x^2+c*x+d, {a,b,c,d}] ([Xm,Ym])'); y1_str
    y1(x)=sage_eval(y1_str[4:], locals={'x':x})
    time y1(x)
    print 'y1(x):'+jsmath(y1(x))
    y2_str=maple.eval('fit[leastsquare][[x,y], \
  y=a*x^2+b*x+c, {a,b,c}] ([Xm,Ym])')
    y2(x)=sage_eval(y2_str[4:], locals={'x':x})
    time y2(x)
    print 'y2(x):'+jsmath(y2(x))
    y3_str=maple.eval('fit[leastsquare][[x,y], \
```

```

y=a*x+b, {a,b}]] ([Xm,Ym] ')
y3(x)=sage_eval(y3_str[4:], locals={'x':x})
time y3(x)
print 'y3(x):'+jsmath(y3(x))
p=points([(X[i],Y[i]) for i in range(len(X))],\
         rgbcolor='black',pointsize=30,alpha=0,\
         faceted=True)
p1=plot(y1(x), (x,-1,30), rgbcolor='red')
p2=plot(y2(x), (x,-1,30), rgbcolor='blue')
p3=plot(y3(x), (x,-1,30), rgbcolor='green')
f=p1+p2+p3+p
show(f, xmin=-1, xmax=30, ymin=-10, ymax=30, aspect_ratio=1)
else: print "ERROR!!!"

```

Interact_Approximate_MNK_In_MAPLE (Sage) - Mozilla Firefox

Файл Правка Вид Журнал Закладки Инструменты Справка

http://192.168.27.128/home/shokalyuk110/

Interact_Approximate_MNK_In_...

X [17, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27]

Y [18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 29, 31]

Time: CPU 0.00 s, Wall: 0.00 s

y1(x):

$$\frac{55081}{4330876}x^3 - \frac{1828663}{2165438}x^2 + \frac{85158009}{4330876}x - \frac{13255677}{98429}$$

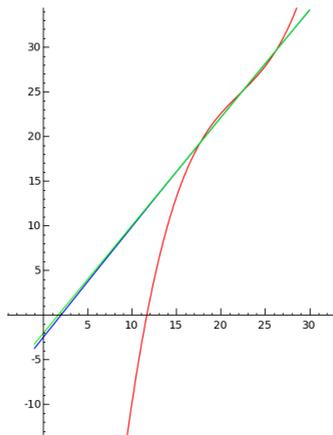
Time: CPU 0.00 s, Wall: 0.00 s

y2(x):

$$-\frac{21}{21890}x^2 + \frac{136751}{109450}x - \frac{498}{199}$$

Time: CPU 0.00 s, Wall: 0.00 s

y3(x):

$$\frac{1147}{950}x - \frac{39}{19}$$


Г. РОЗРОБКА ПРАКТИЧНОГО ЗАНЯТТЯ З ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Розробка Пилипенко Ольги Сергіївни

Тема: Побудова графіків тригонометричних функцій.

Мета:

– *освітня:* сформувати навички студентів застосовувати способи перетворення графіків до побудови графіків тригонометричних функцій; узагальнити, систематизувати і розширити знання і вміння з побудови графіків тригонометричних функцій; формувати навички використання комп'ютерних технологій на уроках математики;

– *виховна:* виховувати культуру введення записів на дошці і у зошитах, культуру математичного мовлення;

– *розвиваюча:* розвивати аналітичні здібності (вміння аналізувати, порівнювати, виділяти головне); розвивати навички креслення і самоконтролю.

Обладнання: лінійка, мультимедійна дошка, проектор.

Програмні засоби: система динамічної математики GeoGebra, Microsoft PowerPoint

Література:

1. Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підручник для 9 класу // А. Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х. : Гімназія, 2017 – 416 с.

2. Саакян С. М. Задачи по алгебре и началам анализа для 10-11 классов // С. М. Саакян, А. М. Гольдман, Д. В. Денисов. – М.: Просвещение, 1990 – 256 с.

Хід роботи

I. Організаційна частина. Повідомлення теми, мети та завдання.

II. Актуалізація опорних знань.

1. Сформулюйте правило побудови графіка функції $y = kf(x)$.

$$y = kf(x) \rightarrow y = f(x)$$

Якщо $k > 1$, то розтяг від осі Ox в k разів.

Якщо $0 < k < 1$, то стиск до осі Ox в $\frac{1}{k}$ разів.

2. Сформулюйте правило побудови графіка функції $y = f(kx)$.

$$y = f(kx) \rightarrow y = f(x)$$

Якщо $k > 1$, то стиск до осі Oy в k разів.

Якщо $0 < k < 1$, то розтяг від осі Oy в $\frac{1}{k}$ разів.

3. Приклади 1-2 в GeoGebra. Викладач перетягує повзунок, студенти називають функцію, графік якої зображено. Наприклад, $y = 2\cos x$, $y = \frac{1}{2}\cos x$, $y = -\cos x$, $y = \sin 2x$, $y = \sin \frac{1}{2}x$, $y = \sin(-x)$.

4. Побудова графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ за точками (слайд 1).

5. Правило побудови графіків функцій з модулем. $y = f(x) \rightarrow y = |f(x)|$. Щоб побудувати графік модуля функції, треба зберегти частину графіка $y = f(x)$, розташовану вище осі Ox , а частину графіка, розташовану нижче, відобразити симетрично відносно осі Ox . $y = f(x) \rightarrow y = f(|x|)$ частину графіка функції $y = f(x)$, яка лежить лівіше осі Oy , відкидаємо, а частину графіка, розташовану правіше осі ординат, зберігаємо, і її ж відображаємо симетрично щодо осі Oy .

6. Приклади 3-4 в GeoGebra. Студенти називають функцію графік якої зображено. $y = \operatorname{tg} x$, $y = |\operatorname{tg} x|$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \operatorname{ctg}|x|$.

7. Яку функцію називають парною (непарною)? Функція $y = f(x)$ називається парною (непарною), якщо для довільного x з області визначення функції виконується рівність $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

8. Назвіть властивість графіка парної і непарної функції. Парна функція – графік симетричний відносно осі ординат; не парна – графік симетричний відносно початку координат.

III. Застосування знань, умінь та навичок.

1. Визначте парність функції (слайд 2).

1. $f(x) = \sin 3x$; Непарна
2. $f(x) = \operatorname{ctg} 7x$; Непарна
3. $f(x) = x \operatorname{tg} 2x$; Парна
4. $f(x) = x^3 - \sin 2x$; Непарна
5. $f(x) = 2 + x \cos x$; Ні парна, ні непарна
6. $f(x) = |\operatorname{tg} 10x|$; Парна

7. $f(x) = \cos 4x$. Парна
8. $f(x) = \operatorname{tg} 8x$. Непарна
9. $f(x) = x \sin 5x$. Парна
10. $f(x) = \operatorname{ctg} 6x - x^5$. Непарна
11. $f(x) = 3 - x \operatorname{ctg} 2x$. Парна
12. $f(x) = |\sin 9x|$. Парна

2. Побудуйте графіки функцій (слайд 3).

Побудови здійснюються одночасно як вручну, так і з використанням системи динамічної математики GeoGebra.

178. a) $y = 1 + \sin 2x$;

б) $y = \cos 2x - 1$.

179. a) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

180. a) $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$;

б) $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$.

181. a) $y = \sin |x|$;

б) $y = \operatorname{tg} |x|$.

207. a) $y = \sqrt{1 - \sin^2 2x}$;

б) $y = \sqrt{1 - \cos^2 2x}$.

208. a) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$;

б) $y = \operatorname{tg}(-2x) \operatorname{ctg} 2x$.

209. a) $y = \frac{|x|}{x} \cdot \operatorname{tg} x$;

б) $y = \frac{|x|}{x} \cdot \operatorname{ctg} x$.

210. a) $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$;

б) $y = \frac{\cos x}{|\cos x|}$.

211. a) $y = \cos x + |\cos x|$;

б) $y = \sin x - |\sin x|$.

212. a) $y = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + |x|\right)}{\cos x}$;

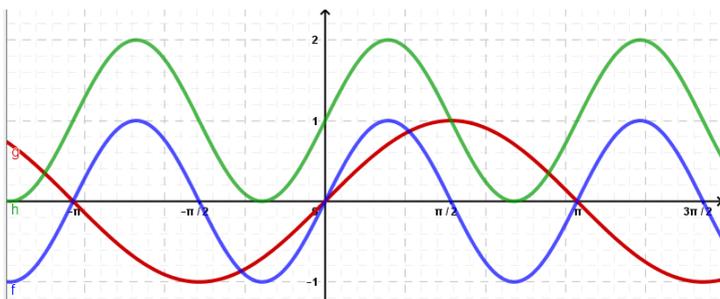
б) $y = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + |x|\right)}{\sin x}$.

213. a) $y = 5x \sqrt{x} \cdot \sqrt{-\sin^2 x}$;

б) $y = 3x^3 \sqrt{-\cos^2 x}$.

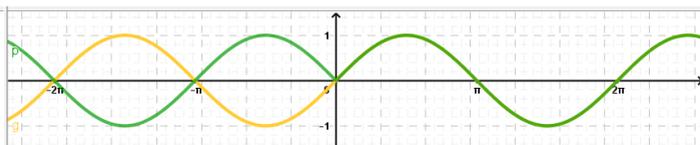
178. a)

- $g(x) = \sin(x)$
- $f(x) = \sin(2x)$
- $h(x) = 1 + \sin(2x)$

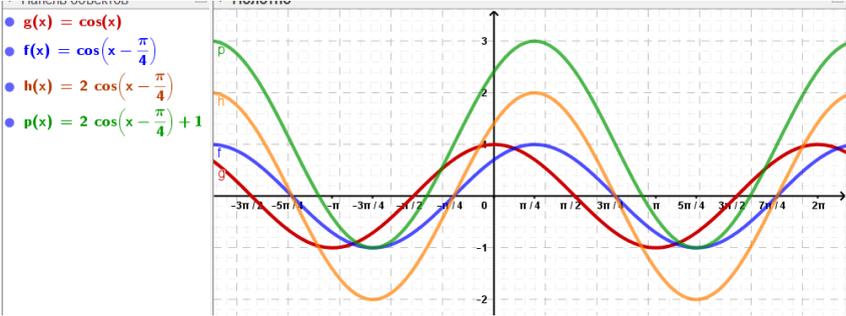


181. a)

- $g(x) = \sin(x)$
- $p(x) = \sin(|x|)$

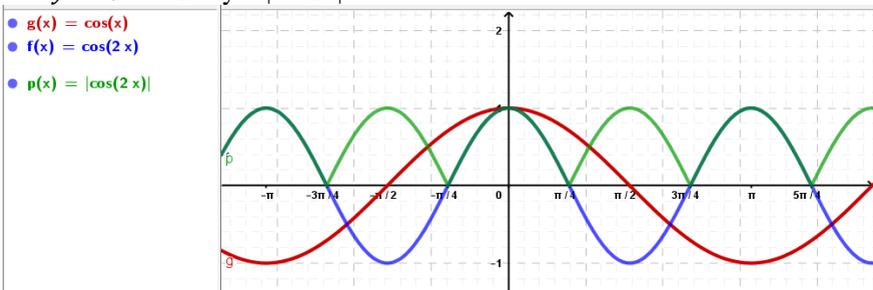


180. a)



207. a) $y = \sqrt{1 - \sin^2 2x}$

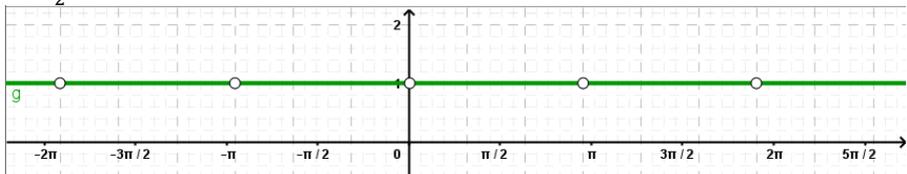
$y = \sqrt{\cos^2 2x} \quad y = |\cos 2x|$



208. a) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 1$

$D(f): \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{x}{2} \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



210. a) $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} = \begin{cases} 1, & \sin x > 0 \\ -1, & \sin x < 0 \end{cases}$

$D(f): \sin x \neq 0$

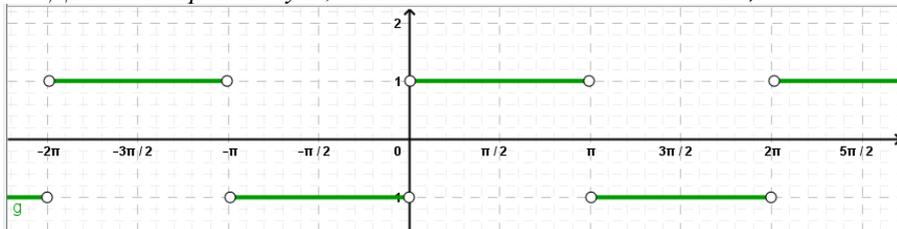
$x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\sin x > 0$ В межах одного оберту одиничного кола: $0 < x < \pi$

Додаємо період синуса, тобто $2\pi n$: $2\pi n < x < \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

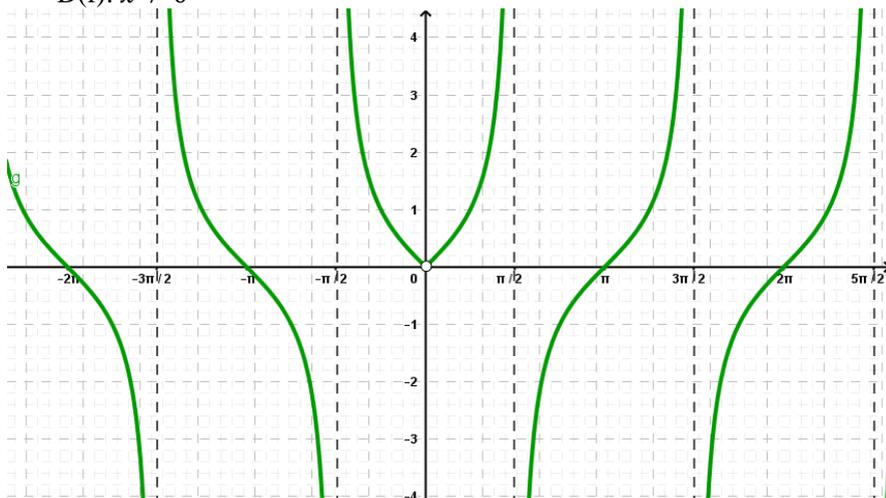
$\sin x < 0$ В межах одного оберту одиничного кола: $\pi < x < 2\pi$

Додаємо період синуса, тобто $2\pi n$: $\pi + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



$$209. \text{ a) } y = \frac{|x|}{x} \cdot \operatorname{tg} x = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x > 0 \\ -\operatorname{tg} x, & x < 0 \end{cases}$$

$$D(f): x \neq 0$$



$$211. \text{ a) } y = \cos x + |\cos x| = \begin{cases} 2\cos x, & \cos x \geq 0 \\ 0, & \cos x < 0 \end{cases}$$

$$D(f):$$

$\cos x \geq 0$ В межах одного оберту одиничного кола: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Додаємо період косинуса, тобто $2\pi n$: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$n=1: -\frac{\pi}{2} + 2\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi; \quad \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$$

$$n=0: -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \quad n=-1: -\frac{\pi}{2} - 2\pi < x < \frac{\pi}{2} - 2\pi; \quad \frac{-5\pi}{2} < x < \frac{-3\pi}{2}$$

$\cos x < 0$ В межах одного оберту одиничного кола: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

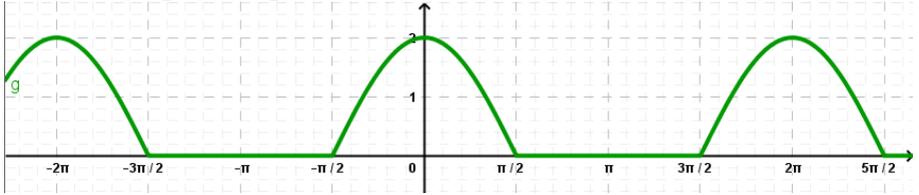
Додаємо період синуса, тобто $2\pi n$: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$n=1: \frac{\pi}{2} + 2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi$$

$$\frac{5\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{2}$$

$$n=0: \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$n=-1: -\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$$

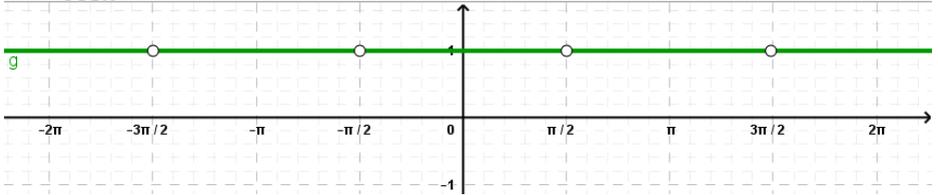


$$212. \text{ a) } y = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + |x|)}{\cos x}$$

$$D(f): \cos x \neq 0$$

$$x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = \frac{\cos|x|}{\cos x} = 1$$

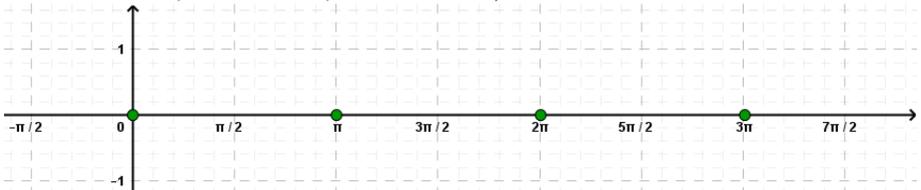


$$213. \text{ a) } y = 5x\sqrt{x} \cdot \sqrt{-\sin^2 x}$$

$$D(f): \begin{cases} x \geq 0 \\ -\sin^2 x \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 0 \\ \sin^2 x \leq 0 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$$

$$x = \pi n, n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$n=0: x=0; n=1: x=\pi; n=2: x=2\pi; n=3: x=3\pi$$



IV. Підбиття підсумків, повідомлення домашнього завдання.

Завершити розв'язування номерів а) №178-181, 207-213.

Д. РОЗРОБКА УРОКУ ГЕОМЕТРІЇ ЗА ТЕМОЮ «ПІРАМІДА. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ».

**Розробку підготував Шпонька Руслан Юрійович
і провів за нею урок у ході виробничої практики в 11 класі
Криворізької гімназії №95 (профільне вивчення математики).**

Мета уроку:

– *навчальна*: засвоїти відмінності між поняттями «кут між площинами» та «двогранний кут»; вивчити поняття «зовнішнє коло трикутника», набути вміння та навичок розв'язувати задачі на піраміду, один з двогранних кутів якої тупий;

– *виховна*: виховувати графічну культуру учнів, формувати вміння аргументувати власну думку;

– *розвивальна*: розвивати логічне мислення, просторову уяву, зорову та слухову пам'ять.

Тип уроку: комбінований.

Обладнання: мультимедійна дошка, комп'ютер.

Програмне забезпечення: СКМ GeoGebra.

ХІД УРОКУ

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ МОМЕНТ

Перевірка готовності учнів до уроку. Підготовка динамічних електронних наочностей, виконаних в системі комп'ютерної математики GeoGebra. Налаштування комп'ютерної техніки.

II. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

1. Чи варто розрізняти міру двогранного кута з кутом між площинами?

Так, за аналогією до понять «кут між прямими» та «кут між променями». Дійсно, двогранний кут – фігура, утворена двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує; кут на площині – фігура, яка складається із точки – вершини кута і двох півпрямих, що виходять з цієї точки. Кут між прямими визначається мірою гострого кута, що утворений перетином цих прямих, тоді як кут між площинами має міру гострого двогранного кута, що утворений перетином цих прямих.

2. В яких межах може змінюватися кут між площинами? А міра двогранного кута?

Кут між площинами може змінюватися в межах від 0 до 90° , міра двогранного кута – від 0 до 360° .

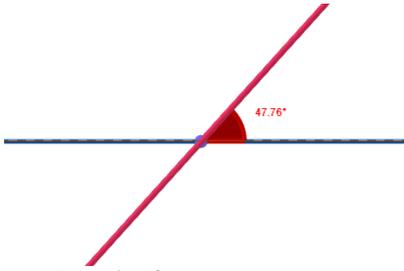


Рис. 1. Кут між прямими

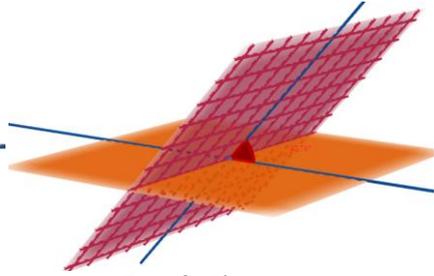


Рис. 2. Кут між площинами

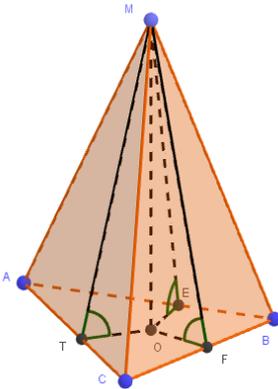


Рис. 3. Вершина піраміди рівно-віддалена від вершин її основи

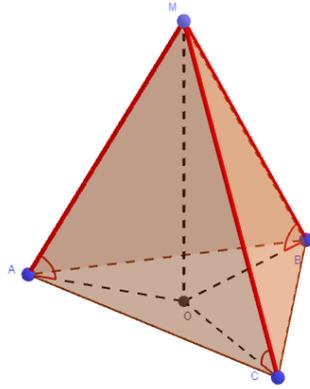


Рис. 4. Вершина піраміди рівно-віддалена від ребер її основи

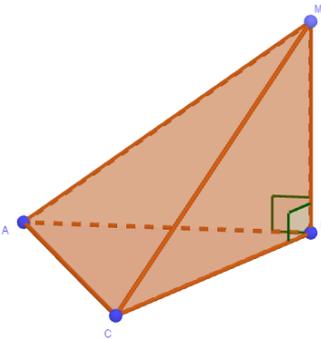


Рис. 5. Одне з бічних ребер піраміди перпендикулярне до площини основи

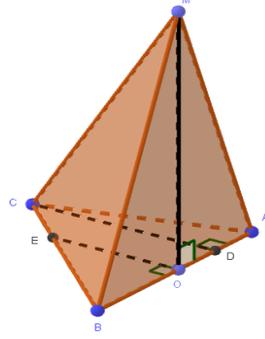


Рис. 6. Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до площини основи

3. Продовжіть думку:

– якщо всі бічні ребра піраміди рівні, то основа висоти цієї піраміди є центром описаного навколо її основи кола;

– якщо всі ребра піраміди нахилені до площини основи під однаковим кутом, то *основа висоти цієї піраміди є центром описаного навколо її основи кола*;

– якщо всі двогранні кути при ребрах основи піраміди рівні, то *основа висоти піраміди є центром вписаного в її основу кола*;

– якщо висота піраміди є її бічним ребром, то *дві грані піраміди, які містять це ребро, перпендикулярні до площини основи*;

– якщо одна з граней піраміди перпендикулярна до площини її основи, то *висота цієї грані є висотою піраміди, тобто основа піраміди належить ребру основи піраміди*.

III. МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ, ПОВІДОМЛЕННЯ ТЕМИ ТА МЕТИ УРОКУ

На попередніх уроках розв'язано чимало задач на різні види пірамід, однак всі ці задачі стосувалися многогранників, у яких всі двогранні кути гострі або один двогранний кут прямий. Сьогодні на уроці розглянемо такі піраміди, у яких один двогранний кут тупий, і з'ясуємо, як будувати зображення цих пірамід. Розв'язуючи задачі, познайомимося також із новим поняттям – «зовнівписане коло трикутника», а також визначимо, як це коло пов'язане з трикутними пірамідами, площини бічних граней яких утворюють з площиною основи рівні кути. Отже, тема уроку – «Піраміда. Розв'язування задач».

IV. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРЕНУВАЛЬНИХ ЗАДАЧ

Задача 1. В основі піраміди лежить трапеція $ABCD$, у якій $AB = CD = 2$ см, $BC = 4$ см, $AD = 6$ см. Грані SAB і SCD перпендикулярні до площини основи, а двогранний кут при ребрі AD дорівнює 30° . Знайдіть висоту піраміди і двогранний кут при ребрі BC .

Коментар до задачі. Оскільки в піраміді дві несуміжні грані SAB і SCD перпендикулярні до площини основи, відрізки AB і CD – бічні сторони трапеції (не перетинаються), то ці грані не мають спільних ребер і мають лише одну спільну точку – вершину S піраміди. Тоді S належить прямій перетину площин (SAB) і (SCD) . Ці міркування приводять до побудови грамотного рисунка до задачі.

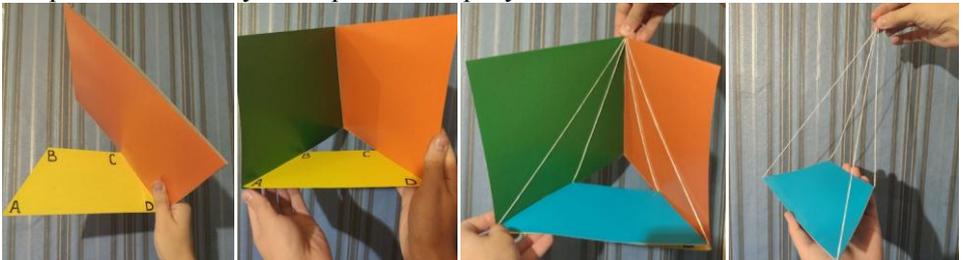
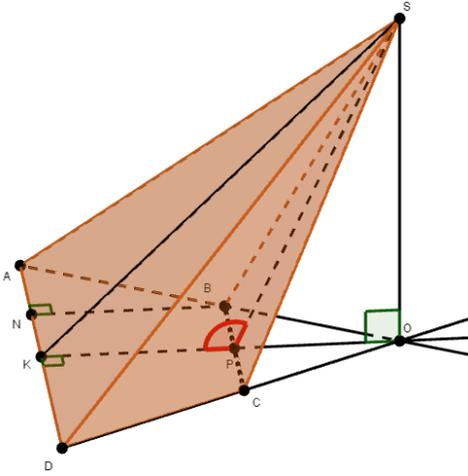


Рис. 7. Паперова модель до задачі та модель з ниток



ДАНО:
 $SABCD$ – піраміда,
 $ABCD$ – трапеція,
 основа піраміди,
 $AB = CD = 2$ см,
 $BC = 4$ см,
 $AD = 6$ см,
 $(SAB) \perp (ABC)$,
 $(SCD) \perp (ABC)$,
 $\angle((SAB), (ABC)) = 30^\circ$.
 Знайти висоту піраміди і двогранний кут при ребрі BC .

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай SO – висота піраміди, SO – пряма перетину площин (SAB) і (SCD) , O – точка перетину прямих AB і CD . Побудуємо $OK \perp AD$. Оскільки $SO \perp (ABC)$, SK – похила, OK – її проекція, то за теоремою про три перпендикуляри $SK \perp AD$. Тоді $\angle SKO = 30^\circ$ – лінійний кут двогранного кута при ребрі AD .

Нехай $OK \cap BC = P$, $\angle SPK$ – лінійний кут двогранного кута при ребрі BC .

$$BN \perp AD; AN = \frac{AD-BC}{2} = 1 \text{ см.}$$

У прямокутному $\triangle ANB$ $\cos \angle BAN = \frac{AN}{AB} = \frac{1}{2}$ см. Звідси $\angle BAN = 60^\circ$. Тоді $\angle AOD = 180^\circ - (\angle BAN + \angle CDA) = 180^\circ - 2 \cdot \angle BAN = 60^\circ$. Отже, $\triangle AOD$ – рівносторонній. За теоремою Піфагора $BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{3}$ см.

$$\text{Оскільки } \triangle AOD \text{ – рівносторонній, то } OK = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ см.}$$

Розглянемо $\triangle SOK$ ($\angle BAN = 90^\circ$): $\frac{SO}{OK} = \text{tg } \angle SKO$; $SO = OK \cdot \text{tg } \angle SKO = 3$ см.

Розглянемо $\triangle SOP$ ($\angle SOP = 90^\circ$): $OP = OK - KP = OK - BN = 2\sqrt{3}$ см; $\text{tg } \angle SPO = \frac{SO}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle SPO = \text{arctg } \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\angle SPK = \pi - \angle SPO = \pi - \text{arctg } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{ВІДПОВІДЬ: } 3 \text{ см; } \pi - \text{arctg } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Додаткове запитання до задачі 1. Якби треба було знайти кут між площиною грані SBC і площиною основи піраміди, то яку б мали відповідь до задачі? ($\angle SPO = \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$)

Задача 2. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при вершині та радіусом R описаного кола. Площина кожної бічної грані піраміди утворює з площиною основи кут α . Знайти площу бічної поверхні піраміди.

Коментар до задачі. Слід зауважити, що твердження «двогранні кути при ребрах основи піраміди рівні» і «площини бічних граней утворюють з площиною основи піраміди рівні кути» не є рівнозначними. Дійсно, коли площини бічних граней утворюють з площиною основи піраміди рівні кути, то можливі два випадки: або всі двогранні кути при ребрах основи рівні (гострі), або один з двограних кутів при основі піраміди тупий. З'ясуємо, в яку точку площини основи проєктується вершина піраміди в другому випадку.

V. ПОВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Означення. Зовнівписаним колом трикутника називають коло, яке дотикається до однієї із сторін трикутника та продовжень двох інших його сторін.

Теорема. Якщо в трикутній піраміді площини бічних граней утворюють з площиною основи рівні кути, то основа висоти піраміди є або центром вписаного в основу піраміди кола, або центром зовнівписаного кола трикутника-основи піраміди.

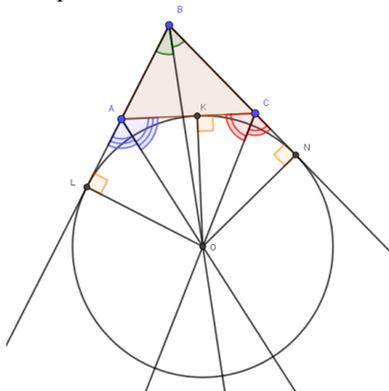


Рис. 8. Зовнівписане коло $\triangle ABC$, яке дотикається до сторони AB

Обґрунтуємо істинність другого висновку теореми, будуючи рисунок до задачі 2.

V. ЗАСТОСУВАННЯ НАБУТИХ ЗНАТЬ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Розв'яжемо задачу 2, домовившись розглядати зовнівписане коло, яке дотикається до сторони BC рівнобедреного $\triangle ABC$ ($AB = AC$).

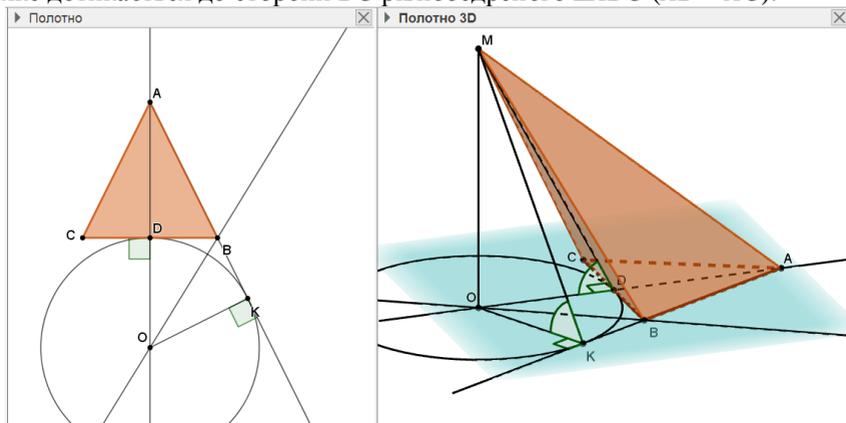


Рис. 9. Динамічна модель до задачі, виконана на мультимедійній дошці в GeoGebra під час уроку

ДАНО:

$MABC$ – піраміда, $\triangle ABC$ – основа піраміди,
 $AB = BC$, $\angle BAC = \beta$,
 R – радіус описаного навколо $\triangle ABC$ кола,
 $\angle((ABC), (MAB)) = \angle((ABC), (MBC)) = \angle((ABC), (MAC)) = \alpha$.

Знайти $S_{\text{бічн}}$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай основа висоти піраміди знаходиться зовні $\triangle ABC$, MO – висота піраміди $MABC$, O – центр зовнівписаного кола $\triangle ABC$.

Нехай $AD \perp BC$; оскільки у $\triangle ABC$ $AB = AC$, то $\angle CAD = \angle DAB$, $CD = DB$. Точка O належить прямій AD , $OK \perp AB$, тобто $OK = OD$.

Оскільки $MO \perp (ABC)$, MK і MD – похилі, OK і OD – їх проекції, $OK \perp AB$, $OD \perp BC$, то за теоремою про три перпендикуляри маємо, що $MK \perp AB$ і $MD \perp BC$. Тоді $\angle MKO = \angle MDO = \alpha$ – як кути між бічними гранями і площиною основи.

Розглянемо $\triangle ABC$: за наслідком з теореми синусів $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{BC}{\sin \beta} = 2R$.

Тоді $BC = 2R \sin \beta$, $DB = \frac{1}{2}BC = R \sin \beta$; за наслідком з теореми синусів $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AB}{\sin(90^\circ - \frac{\beta}{2})} = \frac{AB}{\cos \frac{\beta}{2}} = 2R$, $AB = AC = 2R \cos \frac{\beta}{2}$.

Розглянемо $\triangle ODB$ ($\angle ODB = 90^\circ$):

$$\angle DBO = \frac{1}{2} \angle CBK = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle CBA) = \frac{\pi + \beta}{4};$$

$$\frac{OD}{BD} = \operatorname{tg} \angle DBO, \text{ тому } OD = BD \cdot \operatorname{tg} \angle DBO = R \sin \beta \operatorname{tg} \frac{\pi + \beta}{4}.$$

Розглянемо $\triangle MOD$ ($\angle MOD = 90^\circ$):

$$\frac{OD}{MD} = \cos \angle MDO, MD = \frac{OD}{\cos \angle MDO} = \frac{R \sin \beta \operatorname{tg} \frac{\pi + \beta}{4}}{\cos \alpha} = MK.$$

$$\begin{aligned} \text{Знайдемо площу бічної поверхні піраміди: } S_{\text{бічн}} = S_{\triangle MAB} + S_{\triangle MBC} \\ + S_{\triangle MAC} = \frac{1}{2} \cdot MD \cdot P_{\triangle ABC} = \frac{R^2 \sin \beta \operatorname{tg} \frac{\pi + \beta}{4} (\sin \beta + 2 \cos \frac{\beta}{2})}{\cos \alpha} \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

$$\text{ВІДПОВІДЬ: } \frac{R^2 \sin \beta \operatorname{tg} \frac{\pi + \beta}{4} (\sin \beta + 2 \cos \frac{\beta}{2})}{\cos \alpha} \text{ кв. од.}$$

Додаткові запитання до задачі 2:

1. Чи одержали б ту ж саму відповідь, якби розв'язували задачу для випадку, коли всі двогранні кути при основі піраміди рівні? (*Ні, одержали б іншу відповідь, враховуючи розміщення висоти піраміди*)

2. Чи одержали б ту ж саму відповідь, якби будували зовнівписане коло, що дотикається до бічної сторони $\triangle ABC$? (*Ні, одержали б іншу відповідь, враховуючи довжину OD*)

VI. РЕФЛЕКСІЯ, ПІДВЕДЕННЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Продовжіть думку:

- ❖ Сьогодні на уроці я пригадав ...
- ❖ Сьогодні на уроці я дізнався ...
- ❖ З уроку мені запам'яталось ...
- ❖ На уроці мені сподобалося (не сподобалося) ...
- ❖

VII. ПОВІДОМЛЕННЯ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

1. Вивчити теоретичний матеріал уроку.

2. Поміркувати, чи існує чотирикутна піраміда, в якій площини бічних граней утворюють з площиною основи рівні кути, а один з двогранних кутів при основі – тупий.

3. Розв'язати задачу 2 для випадку, коли всі двогранні кути при основі піраміди $MABC$ гострі (тобто точка O є центром вписаного в $\triangle ABC$ кола).

Доречно запропонувати учням відсканувати QR-код з посиланням на GeoGebraBook «Наочності до уроку», що містить також домашнє завдання.



Навчальне видання

Крамаренко Тетяна Григорівна
Корольський Володимир Вікторович
Семеріков Сергій Олексійович
Шокалюк Світлана Вікторівна

ІННОВАЦІЙНІ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Науковий редактор
дійсний член АПН України
М.І. Жалдак

Комп'ютерний набір та верстка

Т.Г. Крамаренко,
С.О. Семеріков,
С.В. Шокалюк

Підп. до друку 11.11.2019
Папір офсетний №1
Ум. друк. арк. **26,1**

Формат 80×84 1/16
Зам. №3803
Тираж 300 прим.

Віддруковано у КП «Жовтнева районна друкарня»
50014, м. Кривий Ріг, вул. Електрична, 5. Тел. (056) 407-29-02

E-mail: k_mathematics@kdpu.edu.ua