

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТІЛ ОБЕРТАННЯ	6
1.1. Предметна математична компетентність та її геометрична складова..	6
1.2. Психологічні особливості учнів профільної школи під час вивчення стереометрії	10
1.2.1. Особливості пізнання старшокласників.....	10
1.2.2. Закономірності розвитку просторової уяви та просторового мислення учнів старшої школи.....	12
1.3. Логіко-дидактичний аналіз теми «Тіла обертання».....	15
Висновки до розділу 1	25
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНА СИСТЕМА ВИВЧЕННЯ ТІЛ ОБЕРТАННЯ В КУРСІ СТЕРЕОМЕТРІЇ.....	26
2.1. Засоби та методи формування предметної математичної компетентності при вивченні теми «Тіла обертання».....	26
2.2. Формування графічних умінь учнів при вивченні тіл обертання	33
2.2.1. Паралельне проектування як метод побудови зображення.	35
2.2.2. Побудова зображень основних тіл обертання.....	38
2.2.3. Рисунки як засіб при розв'язуванні задач	45
2.3. Усні задачі як засіб розвитку просторового мислення учнів при вивченні комбінації геометричних тіл.....	47
2.4. Застосування засобів математичного аналізу для знаходження об'ємів тіл обертання	53
Висновки до розділу 2	60
ВИСНОВКИ.....	62
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	66
Додаток А.....	76
Додаток Б	84

ВСТУП

Протягом усього свого існування людство не перестає поповнювати свої наукові знання в тій чи іншій галузі. Не тільки багато вчених, а й простих людей, цікавилися тілами обертання. Багато реальних об'єктів у живій природі, фізиці, астрономії, географії та інших природничих науках мають форму кулі, сфери, циліндра та конуса. В наш час часто виникає практична необхідність визначати об'єм і площу поверхні об'єктів природи, побуту, виробництва, досліджувати їх розміри, взаємне розташування і т.п. З погляду на це, процес навчання стереометрії, зокрема вивчення тіл обертання, потрібно найперше розглядати комплексно, як надбання учнями необхідних загальнолюдських знань і цінностей, а тому спрямувати на розвиток навчально-пізнавальної та творчої активності учнів і на забезпечення їх потреб та основ життєдіяльності.

Огляд методичної літератури свідчить про важливість вивчення розділу «Тіла обертання» для розвитку логічного і просторового мислення, для загальнокультурного та естетичного виховання учнів.

Суперечності, що існують між різними методологічними підходами до вивчення понять та доведення тверджень, структурування навчального матеріалу в підручниках зі стереометрії, організації навчання в умовах профілізації зумовлює проблему пошуку шляхів реалізації системного підходу до вивчення розділу «Тіла обертання».

Процес вивчення тіл обертання учнями передбачає досягнення двох самостійних, але взаємопов'язаних завдань: опанування учнями змістом конкретного розділу та цілеспрямоване формування у них прийомів розумової діяльності.

Нові вимоги сучасного суспільства, що характеризуються посиленням уваги до особистості учня, до його саморозвитку та самопізнання, разом зі змінами в умовах навчання школярів у класах різних напрямів профілізації, учнів з різним рівнем підготовки та різним рівнем мотивації зумовлюють

необхідність побудови оновленої методичної системи вивчення геометричних тіл.

Актуальність проблеми вивчення тіл обертання також зумовлена реальним станом вивчення розділу «Тіла обертання» учнями старшої школи. Більшість учнів не вміють розв'язувати задачі практичного змісту (тіла обертання). Про це свідчить аналіз діагностичних тестових та контрольних робіт учнів 11 класу, анкетування вчителів, бесіди з учителями та учнями, результати ЗНО.

Таким чином, актуальність дослідження зумовлена:

- потребами особистості у ґрунтовних знаннях властивостей тіл обертання для повсякденного життя та практичної діяльності;
- новими вимогами сучасного суспільства до особистості та відповідними цілями навчання;
- недостатнім рівнем засвоєння значною частиною випускників профільних шкіл знань з розділу «Тіла обертання»;
- потребою вдосконалення методичної системи вивчення геометричних тіл з погляду сучасних наукових теорій;
- відмінностями між різними методологічними підходами до вивчення понять та доведення тверджень, різним структуруванням геометричного матеріалу у підручниках для старшої профільної школи.

Актуальність проблеми дослідження та її недостатня розробленість у методиці навчання геометрії і зумовили вибір теми кваліфікаційної роботи: «Методика вивчення тіл обертання в шкільному курсі геометрії (профільний рівень)».

Мета даної роботи полягає в тому, щоб теоретично обґрунтувати методичну систему вивчення тіл обертання у школах профільного напрямку.

Об'єктом дослідження є процес вивчення стереометрії в 11 класі школах з профільним рівнем вивчення математики.

Предмет дослідження – методична система вивчення тіл обертання. Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

- 1) Провести логіко-дидактичний аналіз теми «Тіла обертання».
- 2) На основі аналізу психолого-педагогічної літератури дослідити фізіологічні та психологічні особливості розвитку старшокласників при вивченні стереометрії.
- 3) Описати методiku вивчення тіл обертання в курсі геометрії старшої школи.
- 4) Підібрати диференційовану систему завдань на тіла обертання з метою формування предметної математичної компетентності.

Апробація кваліфікаційної роботи. Під час написання даної кваліфікаційної роботи було написано статтю та тези на тему «Усні задачі як засіб розвитку просторового мислення учнів при вивченні тіл обертання».

Структура кваліфікаційної роботи. Структура кваліфікаційної роботи обумовлена логікою дослідження і складається з таких частин: вступ, два розділи, висновки, список використаної літератури та додатки.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

1.1. Предметна математична компетентність та її геометрична складова

Одним з основних концептуальних орієнтирів, напрямів розвитку змісту освіти у всьому світі є компетентнісно-орієнтований підхід. На думку сучасних педагогів, набуття життєво важливих компетентностей дає людині можливість орієнтуватись у сучасному суспільстві, сприяє формуванню в особистості здатності швидко реагувати на запити часу.

Більшість учених підкреслюють, що поняття «компетенція» не зводиться ні до знань, ані до вмінь, ані до навичок, під цим терміном розуміється, передусім, коло повноважень якої-небудь організації, установи або особи. У межах своєї компетенції особа може бути компетентною або некомпетентною в певних питаннях, тобто мати компетентність (компетентності) у певній сфері діяльності. Одним із результатів освіти має бути набуття людиною набору компетентностей.

Головним завданням сучасної системи освіти є створення умов для якісної освіти, впровадження компетентнісного підходу, як найважливішої умови, що працює на підвищення якості освіти.

На думку А. В. Хуторського: «Компетентнісно-орієнтований підхід – підхід до організації навчально-виховного процесу, спрямований на набуття особистості певної суми знань і досвіду, що дають змогу їй робити висновки про щось, переконливо висловлювати власні думки, діяти адекватним чином у різних ситуаціях» [90, с.61]. Загалом, компетентнісний підхід в старшій школі орієнтований на всебічний розвиток й підготовку учня до його майбутньої професійної діяльності не лише як компетентного фахівця, а і як високо вихованої, освіченої особистості й передбачає отримання ним як знань, умінь, навичок так і здатності до постійного самовдосконалення,

самоосвіти, прийняття креативних рішень та розвитку гуманістичних цінностей.

Компетентнісний підхід в середній освіті спрямований на розвиток та вдосконалення різних видів компетенцій та компетентностей в учня.

Зазначимо, що компетенція і компетентність – два різних поняття.

На думку В. О. Калініна, компетентність є більш широке поняття, яке характеризує і визначає рівень професіоналізму особистості, а її досягнення відбувається через здобуття необхідних компетенцій, що складають мету професійної підготовки фахівця [36, с.8]. З ним не погоджується М. С. Головань, стверджуючи, що поняття «компетенція» пов'язане зі змістом сфери діяльності, а «компетентність» завжди стосується особи, характеризує її здатність якісно виконувати певну роботу. Ці поняття «знаходяться у різних площинах» [20, с.230].

На основі опрацьованого теоретичного матеріалу розмежуємо ці поняття. Отже, компетенція – це суспільна норма, вимога, яка включає знання, уміння, навички, способи діяльності, певний досвід. Компетенція сама по собі не є характеристикою особистості [5, с.41]. Нею вона стає в процесі засвоєння і рефлексії учня, перетворюючись у компетентність. Компетентність – це здатність застосовувати набуті знання, вміння, навички, способи діяльності, власний досвід у нестандартних ситуаціях з метою розв'язання певних життєво важливих проблем. Компетентність є особистісним утворенням, яке проявляється в процесі активних самостійних дій людини [5, с.42].

Аналізуючи літературу, ми звернули увагу на той факт, що в системі загальної освіти виокремлюють трьохрівневу ієрархію компетентностей:

- 1) ключові компетентності;
- 2) міжпредметні компетентності;
- 3) предметні компетентності [9, с.3].

Такі компетентності, як предметні, формуються засобами навчальних предметів, сюди відноситься і математична компетентність.

Математика – об’єктивно формалізована наука, що вимагає високого рівня абстрагування і відволікання від реальності дійсного світу, потребує активізації конкретизаційних, мотиваційних та діяльнісно-моделюючих процесів в ході її освоєння. Здатність учня розуміти, «відчувати» математику і успішно здійснювати математичну діяльність вчені пов’язують з наявністю розвиненого математичного мислення і володінням математичними здібностями.

Відомий науковець та дослідник С. А. Раков під математичною компетентністю учня розуміє «вміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень» [73, с.8]. Л. Д. Кудрявцев стверджує, що математична компетентність являє собою інтегративну особистісну якість, засновану на сукупності фундаментальних математичних знань, практичних умінь і навичок, які свідчать про готовність і здатність учня здійснювати професійну діяльність [48, с.44].

Наразі є чітке означення поняття математичної компетентності таке: «предметна математична компетентність – це особистісне утворення, що характеризує здатність учня (учениці) створювати математичні моделі процесів навколишнього світу, застосовувати досвід математичної діяльності під час розв’язування навчально-пізнавальних і практично зорієнтованих задач» [43, с.36].

Міра сформованості математичної компетентності визначається шляхом оцінювання рівня засвоєння відповідних предметних і загальнопредметних умінь.

Проведений аналіз наукових публікацій (О. М. Леонт’єв, А. Я. Тихоненко, Ю. В. Трофименко, та ін.) дав змогу об’єднати уміння та способи діяльності, які формуються у процесі навчання математики, в групи умінь, необхідних у повсякденному житті, а саме:

- уміння здійснювати обчислення;

- уміння користуватися інформацією, поданою у різних формах;
- уміння аналізувати, синтезувати, узагальнювати дані;
- уміння обчислювати довжини, площі, об'єми реальних об'єктів.

Згідно з цим переліком, виокремлюють відповідні складові математичної компетентності:

- обчислювальну;
- інформаційно-графічну;
- логічну;
- геометричну.

Опанування учнями перелічених складових математичної компетентності є основою та базисом їх знань із математики в цілому. Особливо складною для учнів є геометрична складова. Оскільки, геометрична складова виявляється у володінні просторовою уявою, просторовими відношеннями, вимірювальними та конструкторськими вміннями та навичками [60].

Аналізуючи програму з геометрії для старшої школи (профільний рівень) [58], зазначаємо, що старшокласники мають опанувати такими предметними геометричними компетенціями:

- предметний вимір – знати й розуміти: аксіоми стереометрії та висновки з них, означення понять многогранника, тіла обертання, властивості зазначених геометричних фігур;
- практичний вимір – застосовувати: вивчені означення, властивості та методи стереометрії під час розв'язування найпростіших задач;
- діяльнісний вимір – уміти: застосовувати вивчене в повсякденному житті [46, с.25].

По закінченню закладів середньої освіти випускники профільних класів повинні вміти:

- наводити приклади просторових фігур;
- називати основні поняття стереометрії;

- розв'язувати задачі високого рівня складності;
- використовувати вивчені формули та вміти їх виводити для розв'язання практичних і прикладних задач;
- зображувати просторові фігури на площині;
- будувати зображення многогранників та тіл обертання;
- вміти знаходити площу та об'єм тіл обертання [58, с.15]

Формування цієї компетенції на уроках геометрії передбачає створення в учнів чітких і правильних геометричних образів, розвиток просторових уявлень, озброєння їх навичками зображення і вимірювання, що мають велике практичне значення.

1.2. Психологічні особливості учнів профільної школи під час вивчення стереометрії

1.2.1. Особливості пізнання старшокласників.

Створюючи умови для розвитку просторової уяви, необхідно враховувати вікову психологію, так як кожен шкільний період має свої особливості: «провідний вид діяльності, переважаючий тип мислення, особливості сприйняття навколишньої дійсності, психологічні потреби та ін. Інтелектуальний розвиток відбувається головним чином в роки вікового дозрівання» [52, с. 15].

До основних психологічних особливостей старшокласника можна віднести:

- прагнення до спілкування з однолітками («гуртування»);
- прагнення до самостійності і незалежності, «емансипації» від дорослих, до визнання своїх прав з боку інших людей;
- розширення пізнавальних інтересів та їх вибірковість;
- активне вдосконалення інтелектуальних процесів: сприйняття стає цілеспрямованою аналітико-синтетичною діяльністю – якісно поліпшуються всі параметри уваги (обсяг, стійкість, інтенсивність, переключення), запам'ятовування;

- прагнення «звести різноманіття засвоєних знань в більш-менш струнку систему поглядів на світ як щось цілісне і закономірне, проявляється тяга до узагальнень» [68, с. 226].

З власної практики, ми бачимо, що сучасні старшокласники почали мислити інакше, сприймати інформацію по-іншому. Вони демонструють унікальні здібності, швидко схоплюють інформацію, легко користуються комп'ютером, смартфоном, ігровою приставкою й іншими технологічними винаходами. Відмінність умов розвитку сучасних підлітків полягає в кількості інформації, яку сприймають учні через різні ЗМІ.

Особливістю мислення учнів старших класів, є кліпове мислення, тобто мислення, при якому людина сприймає навколишній світ, як набір фрагментарних, розрізнених, мало пов'язаних між собою образів.

Проаналізувавши особливості кліпового мислення підлітків, представлені в літературі, ми склали зведену таблицю позитивних і негативних якостей кліпового мислення сучасного старшокласника (Таблиця 1.1).

Таблиця 1.1

Особливості кліпового мислення

Переваги кліпового мислення	Недоліки кліпового мислення
<ul style="list-style-type: none"> • Прискорення реакції, швидко схоплюють інформацію. Швидко приймають рішення. • Захист мозку від інформаційного перевантаження. • Багатозадачність – здатність виконувати кілька дій паралельно. • Розвиває бажання отримувати нову інформацію. 	<ul style="list-style-type: none"> • Відсутність здатності довго концентруватися на одній інформації. • Інформація довго не затримується в свідомості, швидко змінюється новою. • Важко засвоюють прочитаний текст. • Веде до спрощення завдань і їх рішення. • Втрачаючи здатність аналізувати, учні легко піддаються впливу.

Р. М. Грановська зазначає таку особливість підлітків – «люди з кліповим мисленням не можуть проводити глибокий логічний аналіз і не можуть вирішувати досить складні завдання» [44, с.70].

У старших класах активно розвивається абстрактне мислення, аналіз і синтез досліджуваних явищ. На уроках математики школярів привчають до логічності мислення, вмінню розмірковувати, обґрунтовувати і доводити, розрізняти достовірне і можливе. Уроки стереометрії вимагають від учнів добре розвинених просторових уявлень, на основі яких буде розвиватися просторова уява і мислення. Для розв'язування завдань вони повинні будувати «правильні» креслення. Старшокласники звикли до креслення на площині, через це виникають проблеми з уявою геометричної фігури і її положенням на площині.

В силу особливостей сучасних старшокласників можна стверджувати, що враховуючи їх кліповість мислення, необхідно для розвитку просторової уяви використовувати фрагментарну подачу матеріалу з його подальшим аналізом. Подача навчального матеріалу повинна зацікавлювати учнів, викликаючи бажання продовжити вивчення наступного фрагмента. Кліповість мислення стала розвиватися під час появи перших музичних відеокліпів, тому застосування відеороликів та ІКТ при навчанні сприяє більш якісному сприйняттю навчального матеріалу, так як здається підліткам звичним способом подачі інформації [44].

1.2.2. Закономірності розвитку просторової уяви та просторового мислення учнів старшої школи.

Одним з основних завдань вивчення стереометрії в сучасній школі є розвиток просторового мислення, просторової уяви.

Просторове мислення — вид розумової діяльності, що забезпечує створення просторових образів і оперування ними в процесі розв'язання різних практичних і теоретичних задач [77, с.99]. Академік А. Д. Александров зазначає, що завдання викладання геометрії – розвинути в учнів відповідні три якості: просторову уяву, практичне розуміння та логічне мислення.

Уяву можна поділити на: уяву відтворювальну(репродуктивну) та творчу уяву. Уява відтворювальна (репродуктивна) – це творення образів

предметів і явищ, котрих людина не сприймала, але інформацію про них мала в формі словесного відношення, схеми, графіка, креслення; творча уява – це формування нових образів, реалізація яких приводить до створення нових матеріальних цінностей [100, с. 29]. Отже, просторова уява – це вид розумової діяльності, яка забезпечує створення просторових образів і оперування ними в процесі розв’язування практичних і теоретичних задач [100,с.32].

Просторова уява становить важливий компонент у загальній здатності людини до уяви і має істотне значення в ряді відносин. Просторова уява, взагалі необхідна людині для орієнтування в навколишньому світі і в розвинутій формі істотна для багатьох видів діяльності.

Але поняттю «уява» не потрібно прирівнювати поняття «уявлення», адже уявлення – це образи пам’яті, які виникають у свідомості в результаті відображення просторових властивостей і відношень раніше сприйнятих предметів. Термін «просторові уявлення» включає в себе уявлення про форму, положення, розміри тощо.

Просторова уява в шкільному віці виконує ряд функцій:

- пізнання – розширення кругозору;
- розуміння – виявлення істотних властивостей об’єкта;
- прогнозування – визначення можливого результату;
- спогад – відтворення об’єкта і його властивостей, вивчених раніше.

На думку Р. С. Немова уява може бути чотирьох основних видів:

- активна – людина зусиллям волі викликає у себе відповідні образи;
- пасивна – виникає спонтанно, поза волею людини;
- продуктивна – дійсність свідомо конструюється людиною, творчо перетворюючись в його свідомості;
- репродуктивна – відтворення реальності в тому вигляді, якою вона є [62, с. 176].

Багато вчених вважають, що в навчанні найпоширеніша активна репродуктивна уява, коли учень, докладаючи зусилля здатний «відновити конкретний образ наявної ситуації за тими відомостями або інформації, яка йому повідомляється». Наприклад, створення тривимірного образу геометричної фігури на основі її опису або двовимірного зображення.

Очевидно, що наявність просторової уяви робить учня успішнішим не тільки у вивченні стереометрії, а й в тих галузях, де необхідно оперувати уявними образами. При вивченні стереометрії проявляється формальність знань, а також «виявляється не тільки недостатньо сформоване просторове уявлення учнів, але і відсутність вміння виконувати проекційне креслення і оперувати даними на ньому» [34, с.232].

Дослідники, які займалися проблемами просторового мислення та просторової уяви, виділяють ряд умінь, необхідних для їх розвитку, серед яких вміння:

- перетворювати елементи зображень;
- складати розгортки об'ємних фігур за їхніми зображеннями і навпаки;
- подумки фіксувати зміни в образі;
- подумки змінювати структуру об'єкта, його розташування в просторі, «розглядати одну й ту саму фігуру з різних точок зору»;
- розпізнавати фігури або елементи фігур по їх ознаками або властивостями;
- зображати просторові фігури на площині;
- застосовувати навички роботи з проекційними кресленнями;
- давати правильну оцінку розмірів геометричних фігур, їх положень в просторі або площині «на око» [13, с. 71].

Таким чином, можна зробити висновок про те, що просторова уява пов'язана з наочно-образним мисленням, тому для її успішного розвитку необхідна опора на наочний матеріал.

Просторова уява включає в себе ряд умінь, пов'язаних з уявним створенням просторових моделей геометричних об'єктів на основі їх форм, розмірів і співвідношення частин. Зазначені вміння необхідно формувати поетапно, з огляду на досягнутий рівень просторової уяви.

1.3. Логіко-дидактичний аналіз теми «Тіла обертання»

Проаналізувавши навчальну програму з математики, можна помітити, що основною метою вивчення стереометрії є розвиток просторової уяви учнів, освоєння способів обчислення практично важливих геометричних величин та подальший розвиток логічного мислення учнів.

Темі притаманний систематизуючий і узагальнюючий характер викладу, спрямований на закріплення і розвиток умінь і навичок, отриманих в неповній середній школі. При доведенні теорем і розв'язуванні задач активно використовуються вивчені в курсі планіметрії властивості геометричних фігур, застосовуються геометричні перетворення, вектори і координати. Високий рівень абстрактності досліджуваного матеріалу, логічна строгість систематичного викладу з'єднуються із залученням наочності на всіх етапах навчального процесу і постійним зверненням до досвіду учнів. Уміння зображати найважливіші геометричні тіла, обчислювати їх об'єми мають велику практичну значимість.

Вивчення програмного матеріалу дає можливість учням:

- отримати уявлення про широту застосування геометрії в різних галузях людської діяльності; познайомитися з деякими фактами історії геометрії;
- засвоїти систематизовані відомості про просторові форми;
- навчитися проводити аналогію між плоскими і просторовими конфігураціями, бачити спільні і відмінні властивості аналогічних структур на площині і в просторі, використовувати планіметричні відомості для опису і дослідження просторових фігур;

- навчитися ілюструвати і моделювати проєкційним кресленням просторові фігури;
- розв'язувати задачі на знаходження площ поверхонь і об'ємів тіл;
- розв'язувати задачі на доведення;
- опанувати набором прийомів, які часто застосовуються для розв'язання стереометричних задач на обчислення та доведення [58].

Рівень обов'язкової підготовки за темою «Тіла обертання» дає можливість учням навчитися:

- розпізнавати види тіл обертання та їх елементи;
- будувати зображення тіл обертання, їх елементів, перерізів;
- обчислювати основні елементи тіл обертання;
- обґрунтовувати властивості тіл обертання, застосовувати їх до розв'язування задач;
- розпізнавати многогранники і тіла обертання у їх комбінаціях;
- розв'язувати задачі на комбінацію просторових фігур [58].

Виходячи з вимог програми, різні авторські колективи пропонують ряд підручників геометрії для 11 класів (профільний рівень). Розглянемо деякі з них (Таблиця 1.2).

В підручнику Г. П. Бевза (профільний рівень) [18], насамперед вводиться поняття «тіла обертання» в цілому, його властивості. Означення циліндра, конуса, кулі та сфери вводяться після поняття «тіла обертання».

Таблиця 1.2.

Аналіз підручників з геометрії

	Г.П. Бевз та інші (2011 р.)	Г.В. Апостолова (2011 р.)
Місце теми в підручнику	Розділ 3 «Тіла обертання», 11 клас	Розділ 3 «Тіла. Багатогранники. Тіла обертання», 11 клас
Підхід до побудови теми	Є продовженням підручника 10 класу, дозволяє поглибити знання з геометрії	Є продовженням підручника 10 класу, дозволяє поглибити знання з геометрії

Продовж. табл. 1.2.

Розглянуті поняття		Циліндр	§25
		Конус і зрізаний конус	§26
		Куля та сфера	§27
Введення формул		У вигляді міркування з висновком	У вигляді міркування з висновком
Кількість задач	Циліндр	38	31
	Конус і зрізаний конус	42	45
	Куля та сфера	43	45
Додаткові задачі		9	-
Задачі на комбінації		+	+
Наочність		+	+

Після кожного параграфа дається система вправ. Вона послідовна, містить завдання різного рівня складності, а також завдання, що носять практичний характер. В кінці параграфа є додаткові завдання і завдання підвищеної складності. Для розв'язування цих завдань необхідно знати не тільки матеріал вивченого параграфа, а й застосувати знання, отримані при вивченні інших тем. У процесі розв'язування додаткових завдань в учнів розвиваються три якості: просторова уява, практичне розуміння і логічне мислення.

Підручник Г. В. Апостолової (профільний рівень) [16] є підручником для поглибленого вивчення математики. Відмінність від попереднього підручника полягає в тому, що тема «Тіла обертання» не виділена окремим розділом, а розглядається разом з усією теорією про тіла та багатогранники.

Також відмінність полягає в тому, що поняття «тіла обертання» вводиться через зв'язок з теорією про багатогранники.

В даний час діючих підручників з геометрії для 11 класів тільки двоє. Кожен авторський колектив вносить в зміст своїх підручників щось нове, що відрізняє їх від інших. Школа і вчителі мають право вибирати ті з них, які, на їхню думку, дадуть оптимальний рівень знань з геометрії учням того чи іншого класу.

Логіко-математичний аналіз теми «Тіла обертання» будемо проводити за підручником Г. П. Бевза (профільний рівень)[18].

На вивчення даної теми в 11 класі за підручником Г. П. Бевза відводиться 25 годин.

Вивчення круглих тіл (циліндр, конус, куля) і їх поверхонь завершує знайомство учнів з основними просторовими фігурами. Вводяться поняття циліндричної і конічної поверхонь, циліндра, конуса, зрізаного конуса. За допомогою розгорток визначається площа їх бічних поверхонь, виводяться відповідні формули. Потім даються означення сфери і кулі, вводиться рівняння сфери і з його допомогою досліджується питання про взаємне розташування сфери і площини. У завданнях розглядаються різні комбінації круглих тіл і многогранників, зокрема, описані і вписані призми і піраміди.

Аналіз теоретичного і задачного матеріалу теми дозволяє виділити наступні навчальні завдання теми:

- визначити новий вид тіл – тіла обертання (циліндр, конус, куля), довести, що дані тіла є тілами обертання;
- вивчити дані тіла, виявити їх властивості, властивості їх перетинів;
- вивести формули площ поверхонь циліндра і конуса і рівняння сфери;
- встановити три випадки взаємного розташування площини і сфери на основі аналогії з планіметрії;
- вивчити ознаку і властивість дотичної до сфери як взаємодоповнюючі теореми;

- формування узагальненого прийому розв'язування задач на обчислення довжин, кутів і площ просторових фігур;
- формування логічних і графічних умінь у ході розв'язування задач на доведення [18].

Результати аналізу теоретичного матеріалу теми «Тіла обертання» представлені в Табл.1.3 – Табл.1.5.

Таблиця 1.3

Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу

	Поняття	Факти	Способи діяльності
Нові	Тіло обертання, циліндр, основи циліндра, радіус циліндра, бічна поверхня циліндра, твірна циліндра, висота циліндра, конус, радіус конуса, бічна поверхня конуса, твірна конуса, висота конуса, зрізаний конус, куля, діаметр кулі, радіус кулі, сфера, комбінація тіл, вписані і описані тіла.	Теорема про дотичну до кулі площину	<ul style="list-style-type: none"> • Розпізнавати види тіл обертання та їх елементи; • будувати зображення тіл обертання, їх елементів, перерізів; • обчислювати основні елементи тіл обертання; • обґрунтовувати властивості тіл обертання, застосовувати їх до розв'язування задач; • розпізнавати многогранники і тіла обертання у їх комбінаціях; • розв'язувати задачі на комбінацію просторових фігур.
Базові	Тіло, прямокутник, прямокутний трикутник, радіус, діаметр, коло, круг, дотична площина	—	Вміти задавати вісь обертання, та фігуру обертання.

Таблиця 1.4.

Логіко-математичний аналіз формулювання означень нових понять теми

Поняття	Формулювання означення	Вид означення, характеристичні властивості
Тіло обертання	Тілом обертання називаються об'ємні тіла, що виникають при обертанні плоскої фігури, обмеженої кривою, навколо осі, що лежить в тій же площині.	Рід і видова відмінність
Циліндр	Циліндром називається тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони.	Через найблищий рід й істотні властивості

Продовж. табл. 1.4

Бічна поверхня циліндра	Сторона АВ, паралельна осі циліндра, описує криву поверхню, яку називають бічною поверхнею циліндра.	Через найблищий рід й істотні властивості
Висота циліндра	Довжина твірної – висота циліндра; вона дорівнює відстані між площинами основ.	Рід і видова відмінність
Конус	Конусом називається тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його катета.	Через найблищий рід й істотні властивості
Бічна поверхня конуса, основа конуса. Радіус конуса	Якщо прямокутний трикутник ОРА обертати навколо катета РО, його гіпотенуза РА опише бічну поверхню, а катет ОА – круг – основу конуса. Радіус цього круга, називають радіусом цього конуса.	Рід і видова відмінність
Твірна конуса	Відрізок, який сполучає вершину конуса з будь-якою точкою кола його основи, – твірна конуса.	Рід і видова відмінність
Зрізаний конус	Зрізаним конусом називають частину конуса, що лежить між основою і площиною, паралельною основі.	Через найблищий рід й істотні властивості
Куля	Кулею називається тіло, утворене обертанням круга навколо його діаметра.	Через найблищий рід й істотні властивості
Сфера	Сферою називається фігура, утворена обертанням кола навколо його діаметра.	Через найблищий рід й істотні властивості
Діаметр кулі	Відрізок, який сполучає дві точки поверхні кулі та проходить через центр, – діаметр кулі.	Рід і видова відмінність
Діаметральна площина	Площина, яка проходить через діаметр кулі, – діаметральна площина.	Рід і видова відмінність
Великий круг	Переріз кулі діаметральною площиною називають великим кругом.	Рід і видова відмінність
Радіус кулі	Будь-який відрізок, що сполучає центр кулі з якою-небудь точкою його поверхні, називають радіусом кулі.	Рід і видова відмінність
Кульовий сегмент	Частина кулі, яку відтинає площина, називається кульовим сегментом.	Через найблищий рід й істотні властивості
Кульовий шар	Частина кулі, яка міститься між двома паралельними січними площинами, називається кульовим шаром.	Через найблищий рід й істотні властивості

Продовж. табл. 1.4

Кульовий сектор	Тіло, утворене обертанням опуклого кругового сектора навколо радіуса, що обмежує його, називається кульовим сектором.	Через найблищий рід й істотні властивості
Куля, вписана у многогранник	Куля називається вписаною у многогранник, якщо вона дотикається до кожної грані многогранника.	Через найблищий рід й істотні властивості
Многогранник, вписаний у сферу	Многогранник називається вписаним у сферу, якщо всі його вершини лежать на сфері.	Через найблищий рід й істотні властивості
Призма, вписана у циліндр	Призма називається вписаною у циліндр, якщо основи призми вписано в кола основ циліндра.	Через найблищий рід й істотні властивості
Піраміда, вписана в конус	Піраміда називається вписаною в конус, якщо їхні вершини збігаються, а основу піраміди вписано в коло основи конуса.	Через найблищий рід й істотні властивості

Таблиця 1.5

Орієнтована будова системи вправ для введення нового поняття

Види вправ (за цільовим призначенням)	Номери із підручника
Вправи для створення мотивації та введення нового поняття	№898, №899, №900, №901, №903, №904, №905, №906, №907, №908, №909, №910, №911, 912, №934, №936, №938, №939, №975, №976, №977, №978, №979, №980, №981, №982, №983, №1020, №1021, №1022, №1023, №1024, №1025, №1026, №1027, №1066, №1067, №1068, №1069, №1070, №1071, №1072.
Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та вмінь	№913, №914, №915, №916, 917, №944, №945, №946, №947, №948, №949, №950, №951, №952, №953, №984, №986, №987, №990, №991, №992, №993, №1028, №1029, №1030, №1031, №1032, №1033, №1034, №1073, №1076, №1077, №1078.
Вправи, спрямовані на виділення суттєвих властивостей та на побудову об'єктів, що мають такі властивості	№905, №906, №907, №908, №909, №910, №912, №940-948, №984, №985, №986, №989, №990, №992, №993, №994, №996, №997, №998, №999, №1000, №1008, №1009, №1015, №1042-1046, №1079-1087.

Продовж. табл. 1.5

Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та вмінь	№913, №914, №915, №916, 917, №944, №945, №946, №947, №948, №949, №950, №951, №952, №953, №984, №986, №987, №990, №991, №992, №993, №1028, №1029, №1030, №1031, №1032, №1033, №1034, №1073, №1076, №1077, №1078.
Вправи, спрямовані на виділення суттєвих властивостей та на побудову об'єктів, що мають такі властивості	№905, №906, №907, №908, №909, №910, №912, №940-948, №984, №985, №986, №989, №990, №992, №993, №994, №996, №997, №998, №999, №1000, №1008, №1009, №1015, №1042-1046, №1079-1087.
Вправи, на базі яких відбувається ілюстрація поняття, що вводиться	№905-912, №940, №941, №980, №994-1012, №1028, №1029, №1030, №1031, №1033-№1041, №1073-1078.
Вправи для забезпечення розпізнання об'єктів, що входять до обсягу нового поняття	№918-925, №954, №957, №958, №959, №962, №963, №965, №966-№969, №1005-1015, №1047-1059, №1079, №1081, №1082, №1083-№1087, №1092-1104.
Вправи, спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння тексту означення	№926-930, №954-969, №1001-1013, №1042-1055, №1095-1109.

Матеріал теми викладений дедуктивно, логічно строго, учні готові до сприйняття матеріалу.

Теоретичний матеріал теми носить розповідний характер: в ній багато означень, немає теорем, нові формули виводяться уже з відомих. Виклад матеріалу добре подається та ведеться за рисунками.

Таблиця 1.6

Схема-орієнтир проведення логіко-математичного аналізу структури формулювання математичного твердження

Етапи проведення логіко-математичного аналізу структури формулювання математичних тверджень	Результати
Формулювання твердження	Дотична до кулі площина перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.
Встановлення виду твердження	Просте.
Виділення роз'яснювальної частини	Поняття площини.
Виділення умови	Площина дотична до кулі в певній точці.

Продовж. табл. 1.6

Виділення вимоги	Дана площина перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.
Формулювання твердження, рівносильного даному	Якщо площина дотикається до кулі в деякій точці, до якої проведено радіус, то ця площина перпендикулярна даному радіусу.

При розв'язуванні завдань даної теми є можливості формування прийомів аналогії, узагальнення, конкретизації.

У темі присутні комбіновані завдання, завдання не тільки на застосування даної теми, але і на застосування знань з інших тем і розділів курсу.

Тут представлені завдання на відпрацювання теорем і провідних понять теми, що розглядаються в підручнику. Завдання представлені як на обчислення, так і на доведення.

Весь задачний матеріал можна розбити на блоки (Таблиця 1.7).

Таблиця 1.7

Логіко-математичний аналіз системи вправ (на знаходження площі тіла обертання), призначених для формування способу діяльності

№	Основні способи діяльності	Відпрацювання операцій, які формують спосіб діяльності	Відпрацювання послідовності операцій, які входять у спосіб діяльності	Застосування способу діяльності
1.	Знаходження площі перерізу	№902, №914, №917, №938, №980, №10 №1036, №1037, №1072, №1081.	№924, №1001.	№985, №989.
2.	Знаходження площі тіла обертання	№915, №942, №989, №992, №993, №1079, №1082, №1087.	№1012, №1052, №1092,	№1013, №1100.
3.	Знаходження площі елементів тіл обертання	№940, №941, №945-947, №981, №982, №990, №1030, №1031, №1084, №1086.	№961-964, №999, №1008, №1088.	№967, №968, №1101.
4.	Побудова тіл обертання	№904-912, №1074-1078	№920, №921, №922, №923	№926-930, №1056-1062.

Багато завдань, для виконання яких використовуються відразу декілька різних формул.

В цілому система вправ задовольняє принципу повноти і принципу безперервного повторення.

Основний упор при вивченні матеріалу цього розділу робиться на розв'язування задач. Так як учні нерідко припускаються помилок в зображенні циліндра, конуса і сфери, вчителю слід акцентувати їх увагу (не особливо вдаючись до теорії) на правильному зображенні цих фігур, використовуючи готові рисунки. З метою економії навчального часу на виконання рисунків зручно використовувати шаблони для зображення тіл обертання; при розв'язуванні деяких завдань доцільно зображувати не самі тіла обертання, а їх осьовий переріз [18].

Особливу роль на уроці мають завдання по готовому рисунку. Вони не тільки економлять навчальний час, а й дозволяють концентрувати увагу учнів на найбільш істотних моментах поточного матеріалу.

А для більш глибокого розуміння учнями теми «Тіла обертання», що розглядається в даній темі, можемо запропонувати структурно-логічну модель (див. рис. 1.1).



Рис. 1.1. Структно-логічна модель основних понять теми «Тіла обертання»

Висновки до розділу 1

Однією із можливостей використання уроків математики в основній школі, як бази для формування навчальних компетенцій учнів, є формування математичної компетентності учнів. Математична компетентність учня сприяє адекватному використанню математики для вирішення виникаючих у повсякденному житті проблем.

В результаті цього виокремлюють такі складові математичної компетентності: обчислювальну, інформаційно-графічну, логічну, геометричну.

Опанування учнями перелічених складових математичної компетентності є основою та базисом їх знань із математики в цілому. Особливо складною для учнів є геометрична складова, формування якої передбачає створення в учнів чітких і правильних геометричних образів, розвиток просторових уявлень і озброєння їх навичками вимірювання, що мають велике практичне значення.

Під час аналізу наукової літератури було виявлено що для розвитку в учнів старшої школи математичної компетентності, необхідно враховувати особливості кліпового мислення учнів.

Було проведено логіко-дидактичний аналіз змісту шкільних підручників з геометрії, який дозволяє зробити висновок, що під час вивчення теми «Тіла обертання» учні навчаються:

- наводити приклади просторових фігур;
- називати основні поняття стереометрії;
- розв'язувати задачі високого рівня складності;
- використовувати вивчені формули та вміти їх виводити для розв'язання практичних і прикладних задач;
- зображувати просторові фігури на площині;
- будувати зображення многогранників та тіл обертання;
- вміти знаходити площу та об'єм тіл обертання [58].

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНА СИСТЕМА ВИВЧЕННЯ ТІЛ ОБЕРТАННЯ В КУРСІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

2.1. Засоби та методи формування предметної математичної компетентності при вивченні теми «Тіла обертання»

Як було зазначено раніше, одним з основних завдань вивчення стереометрії у сучасній школі є розвиток просторового мислення. Для розвитку просторового мислення в учнів можна розробити спеціальне інформаційне середовище навчання тіл обертання, що ґрунтується на особливостях кліпового мислення старшокласників, що одночасно з цим буде формувати і розвивати предметну математичну компетентність.

До інформаційного середовища навчання тіл обертання, окрім загальноприйнятих елементів таких, як підручники, посібники, методична література тощо, можна включати наступні елементи:

- 1) Комплекс комп'ютерних програм, які дозволяють краще вивчати дану тему.
- 2) Комплекс візуальних інформаційних схем, моделей, зошитів, конспектів, таблиць з теоретичного матеріалу, системи візуальних задач на тіла обертання та їх методичний супровід [49].

Широкі можливості для формування математичної компетентності відкриваються при використанні різних наочностей та технічних засобів навчання. З метою розвитку просторових уявлень та формування геометричних компетентностей, які в свою чергу є складовими предметної математичної компетентності в процесі вивчення теми «Тіла обертання» на нашу думку, доцільно використовувати моделювання, технічні засоби навчання і роботу з розгортками.

При проведенні логіко-дидактичного аналізу, було виявлено, що при вивченні теми «Тіла обертання» спочатку, необхідно з'ясувати з учнями поняття «крива поверхня», яке пов'язане з поняттям «площина». У відомій системі аксіом Гільберта поняття «площини» вважається поняттям основним.

У елементарних курсах геометрії поняття «площини» базується на такій аксіомі: «Якщо дві будь-які точки A та B прямої лежать на площині, то й усі інші точки прямої AB лежать на цій площині [17, с.136]» і формулюється таке означення площини: «Площина – це поверхня, яка повністю містить, кожному прямю, що з'єднує будь-які її точки [17, с.137]».

Криві поверхні можуть бути найрізноманітнішої форми. Але елементарний курс стереометрії обмежується вивченням найпростіших кривих поверхонь, а саме тих, що належать до групи так званих поверхонь обертання. Ось чому вивчення цієї теми починається із з'ясування поняття про поверхню обертання. З'ясовуючи це поняття, треба насамперед звернути увагу учнів на дві основні лінії: на вісь обертання і на твірну, зауваживши, що ми вивчатимемо тільки такі поверхні обертання, у яких твірна і вісь обертання лежать у одній площині. При цьому, бажано під час повторення, показати учням, які складні поверхні утворюються, коли твірна і вісь обертання не лежать в одній площині. Як приклад, можна, за допомогою інформаційно-комунікаційних засобів продемонструвати, поверхню, яка утворюється обертанням навколо деякої вісі прямої, мимобіжної до цієї осі.

При розгляді тіл обертання необхідно з'ясувати з учнями, що характер поверхні обертання залежить від двох факторів: від форми твірної і від положення цієї твірної відносно осі [18]. Це бажано проілюструвати на відповідних моделях або за допомогою комп'ютера, оскільки ступінь засвоєння матеріалу учнями залежить від ступеня ілюстрації.

Тому, зазвичай використовують два способи ілюстрування певної ситуації, за допомогою наочних приладів (моделей, схем, таблиць, коли учні самостійно створюють власні моделі на свої робочих місцях). Інший спосіб, спосіб з використанням ІКТ (мультимедійні презентації, проектор, інтерактивна дошка і.т.д.) [27, с.5].

Дуже велике значення мають наочні приладдя під час вивчення тіл обертання, особливо на перших уроках, коли формуються перші уявлення про циліндр, конус, сферу та кулю, оскільки під час розглядання такої

моделі, учні чітко бачуть фігуру у житті, можуть її туркнутися, побачити її особливості. Тому під час вивчення тіл обертання доцільно використовувати моделі (макети) тіл обертання.

Виділяють такі види моделей тіл обертання:

- Монолітні моделі тіл обертання (дерев'яні, залізні, бляшані, фанерні).

На цих моделях добре демонструвати форму геометричної фігури, але зовсім неможливо досліджувати залежність між її елементами [21].

- Прозорі моделі (скляні, моделі з пластмаси і нитяні). Їх перевага перед монолітними у тому, що вони не тільки створюють повне уявлення про форму тіла обертання, але дають змогу продемонструвати взаємне розміщення їх елементів і встановити взаємний зв'язок між ними [21].

Моделі можна використовувати з різною педагогічною спрямованістю:

- 1) Демонстрація моделі з метою полегшення сприймання теоретичного матеріалу та формування математичних понять.
- 2) Моделі можуть виступати у ролі ілюстрації окремих теоретичних положень.
- 3) Макети доцільно використовувати для спростування неправильних уявлень та покращення просторової уяви учнів.
- 4) Модель – це дієвий засіб вироблення окомірних навичок.
- 5) Макети виступають також як тренувальне поле для здійснення прямих та обернених операцій. Наприклад, маючи вже готову фігуру, завжди можна виконати зворотний процес: розгорнути фігуру та отримати аркуш паперу, з якого її виготовили. Зручно використовувати макет як засіб демонстрації взаємозв'язку та перетворення плоских та об'ємних фігур.
- 6) Цілком очевидно, що макети фігур – це також допоміжний матеріал під час розв'язування задач.
- 7) Виготовлення макету може бути одним з видів домашнього завдання.

Також необхідно акцентувати увагу учнів на тому, що тіла обертання використовуються в повсяденному житті, в науці та техніці. Можна

запропонувати учням, щоб вони самостійно вдома виконали дослід, про вимірювання залежності об'ємів циліндра та конуса, використовуючи стакан і фігуру циліндричної форми.

Доцільно використовувати також таблиці, схеми, які показуються залежність термінів при вивченні даної теми. Завдяки використанню схем та таблиць зростає вибірковість уваги учнів та її залежність від спрямованості інтересів, що є характерним для кліпового мислення учнів.

При вивченні тіл обертання невід'ємною складовою є виготовлення просторових фігур з розгорток (див. рис. 2.1). Це дозволяє розвивати критичне мислення учнів та покращити уявлення про тіла обертання [92]. Учням можна спочатку запропонувати готові заготовки, а вже потім розгортки, у яких не вистачає певних елементів.

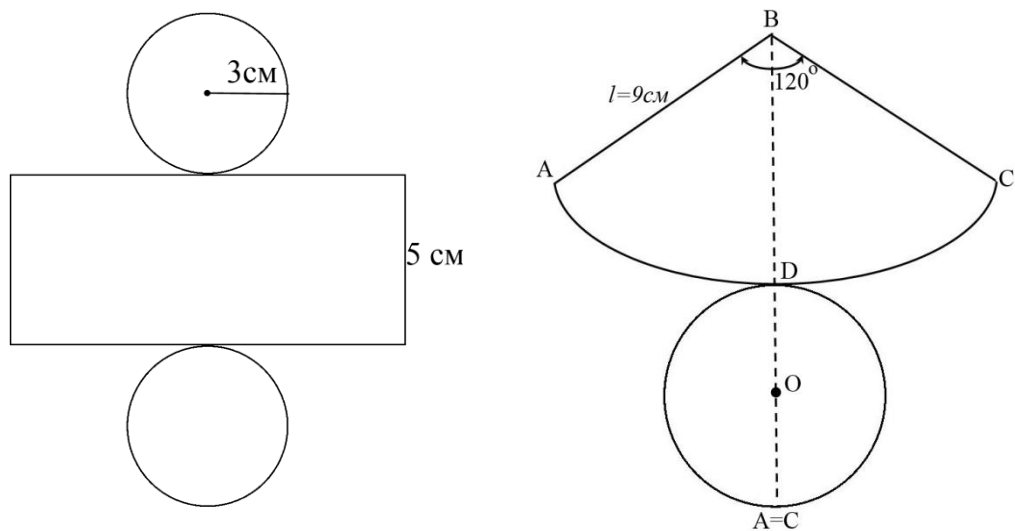


Рис.2.1. Розгортки циліндра і конуса

На кінець вивчення теми можна запропонувати учням виготовити наочні посібники. Ця робота потребує від них і певних знань з теми «Тіла обертання», і досить розвинутої просторової уяви та сформованої предметної компетентності. Робота з виготовлення саморобних навчальних наочних посібників проводиться під керівництвом вчителя у класі, в позаурочний час, у гуртках і на факультативах. Приклад фрагмента такого посібника подано в Додатку А (Фрагмент навчального наочного посібника з теми «Тіла обертання»).

Ілюструвати поверхні обертання, утворені внаслідок обертання певної площини доцільно за допомогою інформаційно-комунікаційних засобів. На нашу думку, вміле поєднання ІКТ із традиційними методами викладання при вивченні теми «Тіла обертання» дасть бажаний результат: високий рівень знань із даної теми; усвідомлення їхнього практичного застосування. Використання нових засобів навчання є способом підтримки зацікавленості даною темою [66].

Використання ІКТ допомагає учням розвивати образне мислення, вміння аналізувати, порівнювати при вивченні тіл обертання.

Навчання з використанням ІКТ передбачає використання різних засобів, а саме:

- друкованих матеріалів;
- презентацій навчального призначення;
- електронних видань;
- комп'ютерних лабораторних практикумів;
- демонстраційних програм;
- моделюючих програм;
- обчислювальних програм;
- стимуляторів розрахунків;
- програм розв'язування задач;
- електронних розв'язників;
- комп'ютерних тренажерів;
- комп'ютерних тестів.

Багато вчителів у своїй практиці активно застосовують інформаційно-комунікаційні засоби саме на етапі пояснення матеріалу, оскільки воно дає візуалізацію матеріалу, підвищує мотивацію, дає можливість акцентувати увагу на важливих моментах, дозволяє автоматизувати контроль часу.

При вивченні теми «Тіла обертання» застосування ІКТ допоможе зробити матеріал більш наочним й доступним. Для цього в практичній

діяльності зазвичай використовують загальновідомі програмні продукти (Microsoft Mathematics 4.0, Жива геометрія, GeoGebra, Динамічна геометрія (DG), GRAN-1, GRAN-3D, Cabri 3d).

Покажемо, як можна використовувати GeoGebra та Cabri 3d для розв'язування задач на тіла обертання.

Задача 1. Знайти площу поверхні тіла, яке утворюється при обертанні трикутника зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см навколо середньої за довжиною сторони (див. рис. 2.2) [17, с.120].

Задача 2. Вершини рівностороннього трикутника зі стороною $5\sqrt{3}$ см лежить на поверхні кулі, а відстань від центра кулі до площини трикутника дорівнює 12 см. Знайти площу поверхні кулі (див. рис. 2.3) [17, с.120].

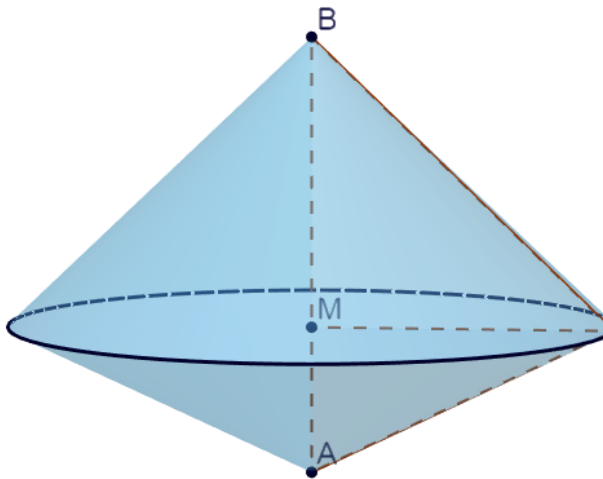


Рис. 2.2.

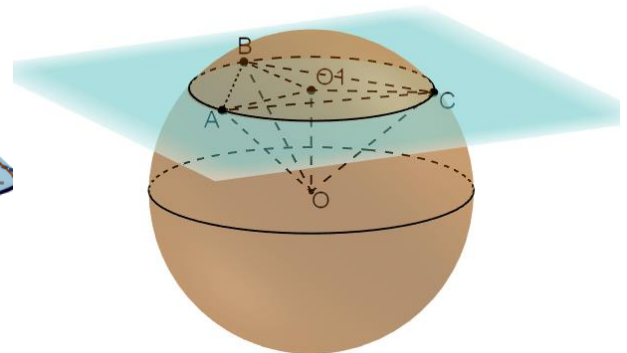


Рис. 2.3.

Задача 3. Знайти двогранний кут α при основі правильної чотирикутної піраміди, якщо радіус описаної навколо піраміди кулі у три рази більший радіуса вписаної в неї кулі [17, с.123].

Рухаючи незалежну вершину піраміди (див. рис. 2.4), спостерігаємо за значеннями даного відношення a і шуканого лінійного кута. Бачимо, що a двічі набуває значення 3. Отже, існують два розв'язки цієї задачі. У другому випадку (див. рис. 2.5) центр описаної кулі лежить поза пірамідою.

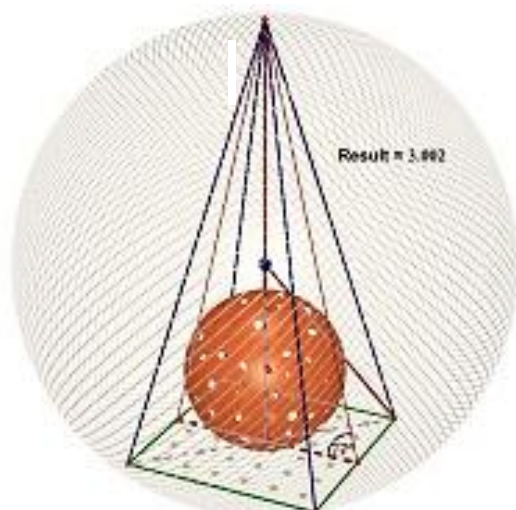


Рис. 2.4.

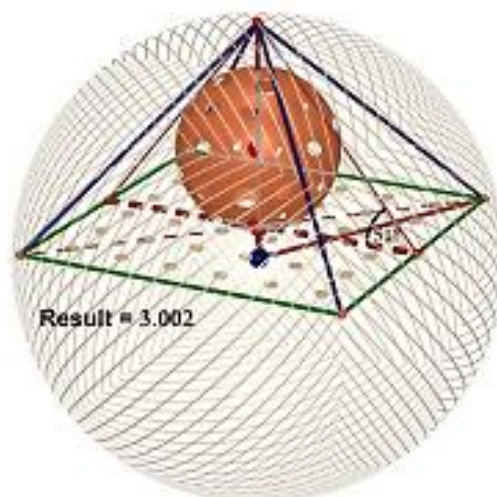


Рис. 2.5

Подібні моделі можна демонструвати (виконувати) перед розв'язуванням з метою вивчення конфігурації і пошуку способу розв'язування, а також подальшої перевірки відповіді. Після одержання відповіді цікаво створити точну модель. Взагалі, спектр моделей, з точки зору технологій їх застосування, дуже широкий. Обрати тип допоможе практика застосування динамічних рисунків.

Такі динамічні рисунки в задачах і не тільки дозволяють вчителю краще пояснити матеріал теми спираючись на кліпове мислення учнів. Зокрема, інтегрування звичайного уроку з комп'ютером дозволяє вчителю перекласти частину своєї роботи на ПК, роблячи при цьому процес навчання більш цікавим, різноманітним, інтенсивним; стає більш швидким процес запису означень, теорем та інших важливих частин матеріалу, тому що вчителю не доводиться повторювати текст кілька разів, учням не доводиться чекати, поки вчитель повторить саме потрібний йому фрагмент [3].

Із викладеного вище можна зазначити, що під час уроку необхідно використовувати як наочні засоби, так і ІКТ, адже кожна із наочностей певним чином допомагають формувати і розвивати математичну компетентність. Приклади фрагментів уроку з використанням ІКТ в Дадатоку Б (Фрагменти уроків).

2.2. Формування графічних умінь учнів при вивченні тіл обертання

Формування в учнів міцних вмінь та навичок є одним з головних завдань навчання математики. Утворення умінь є складним процесом аналітико-синтетичної діяльності кори великих півкуль головного мозку, в ході якого створюються й закріплюються асоціації між завданням, необхідні для його виконання, знаннями та їх застосуванням на практиці.

Вчитель, щоб викликати в учнів наочне просторове уявлення геометричних образів, поєднує рисунок разом з викладом теоретичних міркувань та пояснень, враховуючи особливості мислення старшокласників.

Тому під час вивчення курсу стереометрії перед вчителем постає завдання навчити учнів зображати стереометричні фігури та їх комбінації, тобто виробити в них вміння виконувати побудови, спираючись на раніше сформовані просторові уявлення [55].

Зазначимо, що у загальній системі навчання вміння виконувати зображення просторових фігур можна вважати частковим, оскільки воно входить в загальне вміння – розв'язувати стереометричні задачі. Якщо ж розглядати вміння зображати стереометричні фігури та їх комбінації як загальне, то воно складається з таких часткових умінь:

- 1) аналіз умови, переведення словесних даних в графічний образ;
- 2) виділення суттєвих ознак та властивостей геометричного образу і його числових характеристик;
- 3) вибір просторового положення даного образу та його структури задля унаочнення зображення;
- 4) побудова зображення просторового образу, за допомогою методу паралельного проектування (косокутного або ортогонального);
- 5) позначення на рисунку даних елементів й добування шуканих елементів в разі необхідності;

б) побудова базових планіметричних фігур, що є складовими стереометричного зображення задля полегшення сприйняття й усвідомлення завдання [55, с.21].

Перші три часткові вміння пов'язані з оперуванням геометричними образами. Відбувається графічна обробка прочитаного в умові задачі та створення образу, можливо навіть дещо загального. Виділення суттєвих ознак та властивостей, а також урахування числових характеристик графічного образу уточнює його, перетворюючи спочатку утворений уявою образ на той, що відповідає умові. Наступні два часткові вміння є безпосереднім демонструванням учнями їх вмілості виконувати просторові зображення. Важливим є крок переходу від образу до зображення [84]. Саме вміння учнів втілити побачене в своїй уяві на папері й визначає рівень їх знань, вмінь і навичок зображати стереометричні фігури та їх комбінації. На цьому етапі відбувається акумулювання вивченого ними раніше теоретичного матеріалу та застосування певних елементарних побудов.

Але побудова рисунків за правилами будь-якого наперед обраного методу проектування потребує виконання тих чи інших графічних операцій, розв'язання певних конструктивних задач, які абсолютно незрозумілі учням, і як наслідок заважатимуть і ускладнюватимуть процес навчання.

Найбільш наочні зображення можна дістати при центральному проектуванні. Це пояснюється тим, що саме розглядання предмета вже є начебто центральним його проектуванням на сітчатку ока. Проте, розглядаючи невеликі предмети з великої відстані, центральне проектування можна наближено прийняти за паралельне. Тому в педагогічному процесі застосовують зображення, побудовані тільки паралельним проектуванням, при чому рисунок необов'язково вважати проекцією самого оригіналу, таке зображення в стереометрії називають проекційним рисунком (вільним зображенням) [92].

В стереометрії є певні вимоги до побудови рисунка, які виділив професор М. Ф. Четверухін:

1. Рисунок має бути правильним, тобто всі його елементи побудовані за допомогою одного й того ж методу проектування.

2. Рисунок має бути наочним, тобто такий, що дає повне уявлення про оригінал, який зображується; сприяє розвитку просторового мислення, допомагає знаходити правильні шляхи розв'язання задачі.

3. Рисунок має бути простим у побудові, тобто всі побудови мають бути зрозумілі учням і не обтяжувати викладання матеріалу [93, с.86].

Тільки при цих вимогах можна одержати хороше зображення, яке виконане за короткий час.

2.2.1. Паралельне проектування як метод побудови зображення.

Щоб добитись свідомого та простого виконання побудов зображень тіл обертання, необхідно щоб учні добре знали паралельне проектування та основні його властивості.

Сьогодні основним підручником для 10-11 класів профільної школи є підручник Г. П. Бевза [18]. Тому надалі будемо спиратися на тематичне планування курсу стереометрії за цим підручником.

Ознайомлення учнів з паралельним проектуванням як методом побудови зображення треба провести в 10 класі в темі «Паралельність прямих і площин» на уроці «Зображення просторових фігур на площині», давши учням означення і зазначені вище властивості паралельного проектування. Доведення цих властивостей дасть учням більш повну уяву про паралельне проектування як метод побудови рисунків [55, с.142].

Зупинимося детальніше на методі паралельного проектування та його властивостях. Варто зазначити, що паралельна проекція є важливим випадком центральної проекції, коли центром симетрії виступає нескінченно віддалена (невласна) точка. При цьому всі проекційні лінії, що проходять через таку невласну точку, – паралельні. Тому і сама проекція дістала назву паралельна, на відміну від центральної проекції (з власним центром).

Під час пояснення паралельного проектування вчителіві слід дати кілька означень, якими будуть оперувати під час викладення теоретичних основ властивостей паралельних проєкцій.

Означення 1. Зображенням фігури назвемо проєкцію фігури, яка подібна до оригіналу [17, с.126].

Означення 2. Пряма AA_1 , що визначає напрям проектування, називається проєкційною прямою [17, с.132].

Означення 3. Проєкцією фігури на площину називається множина всіх тих і тільки тих точок, кожна з яких є проєкцією хоча б однієї точки даної фігури. Перетворення однієї фігури в іншу паралельним проектуванням називають перспективно-афінним або спорідненим перетворенням [17, с.132].

Означення 4. Площина, яка паралельна напрямку проектування (проєкційній прямій), називається проєкційною площиною [17, с.133].

Після того, як вчитель пояснив весь зміст означень, пов'язаних з паралельним проектуванням, доцільного зупинись на його властивостях.

Властивості паралельного проектування:

1. Проєкція точки є точка.
2. Проєкція прямої (непаралельної напрямку проектування) є пряма.

Наслідок 1. Проєкцією відрізка є відрізок.

Наслідок 2. Проєкцією променя є промінь.

3. Відношення довжин відрізків прямої дорівнює відношенню довжин їх проєкцій.

Наслідок. При проектуванні середина відрізка переходить у середину його проєкції.

4. Проєкції паралельних прямих паралельні між собою.

Наслідок. Паралельне проектування зберігає співнапрявленість (протилежну спрявленість) променів [17, с.140].

5. Відношення довжин проєкцій паралельних відрізків дорівнює відношенню довжин цих відрізків.

6. При ортогональному проектуванні проекція відрізка прямої дорівнює відрізку, помноженому на косинус кута його нахилу до площини проєкцій [17].

Враховуючи нескладність доведення властивостей, можна викласти всі властивості з доведенням на одному уроці. Але обов'язково треба наголосити на існуванні частинного випадку паралельного проектування, з яким учні познайомляться пізніше.

Саме після цього варто використати 2 години на ознайомлення учнів з основними побудовами просторових плоских фігур та їх комбінацій на площині, спираючись на основні побудови з курсу планіметрії [55].

З ортогональним проектуванням природньо було б познайомити учнів наприкінці теми «Перпендикулярність прямих і площин», давши означення ортогонального проектування. Також, необхідно зазначити, що при ортогональному проектуванні основи певних фігур будуть проектуватися у відрізки.

Отже, при горизонтальному розміщенні основи призми, піраміди, циліндра чи конуса не слід їх проектувати на вертикальну площину, застосовуючи ортогональне проектування. Але і косокутне проектування не завжди доцільне.

Тому напрям проєкційних прямих слід вибирати хоч і довільно, але так, щоб він не був паралельним жодній грані многогранника або площині основи циліндра чи конуса. При косокутному проектуванні можливості вибору напрямку проектування є необмеженими, тому не потрібно обирати зручне положення самої фігури, на відміну від ортогонального проектування. Для унаочнення зображення многогранників, циліндра і конуса, по можливості варто, розташовувати так, щоб їх висоти займали вертикальні положення і зображалися вертикальними відрізками [55].

Зображення піраміди, призми, циліндра чи конуса зазвичай починається із зображення їх основ – многокутника чи круга.

Розглянемо деякі зображення просторових фігур (тіл обертання).

2.2.2. Побудова зображень основних тіл обертання

Розгляд побудов зображень геометричних тіл на площині краще проводити в темі «Тіла обертання» при вивченні певного тіла після введення його означення.

Перше з чим треба ознайомити учнів – це правила оформлення рисунка:

1) Але краще вписану і описану фігури, їх елементи При виконанні рисунків просторових фігур використовують різні типи ліній:

- суцільні – для зображення видимого контуру;
- штрихові – невидима частина рисунка;
- штрихпунктирні – для зображення осей симетрії, осей обертання.

2) Допоміжні лінії проводяться товщиною в $\frac{1}{3}$ основних.

3) Лінії креслять олівцем, а буквенні позначення роблять чорнилом (пастою). Часто для виділення окремих елементів або частин рисунка користуються кольоровими олівцями, ручками або фломастерами, крім червоного кольору.

4) Зображаючи комбінації геометричних фігур, зокрема многогранників і круглих тіл, вписану фігуру зображають штриховими лініями (як невидиму) або суцільними, вдвоє тоншими, ніж лінії видимого контуру, вважаючи описану фігуру прозорою.

зображати різними кольорами, уникаючи при цьому червоного і вважаючи кожна з фігур самостійною.

Частіше геометричні тіла розглядаються такими, що стоять на горизонтальній площині, тому, щоб побудувати зображення того чи іншого трьохвимірного об'єкта, необхідно перш за все побудувати зображення його основи, а потім – зображення його елементів (висоти, вершин, ребер тощо) [21].

Іноді можна обмежуватися зображенням відповідного перерізу фігури наприклад, коли розглядають конус, циліндр, фігури обертання, комбінації фігур обертання з многогранниками тощо.

1. Побудова зображення циліндра.

Спочатку проводимо вертикальну пряму, відмічаємо на ній (довільно) проєкції центрів основ циліндра – точки O і O_1 (див. рис.2.6).

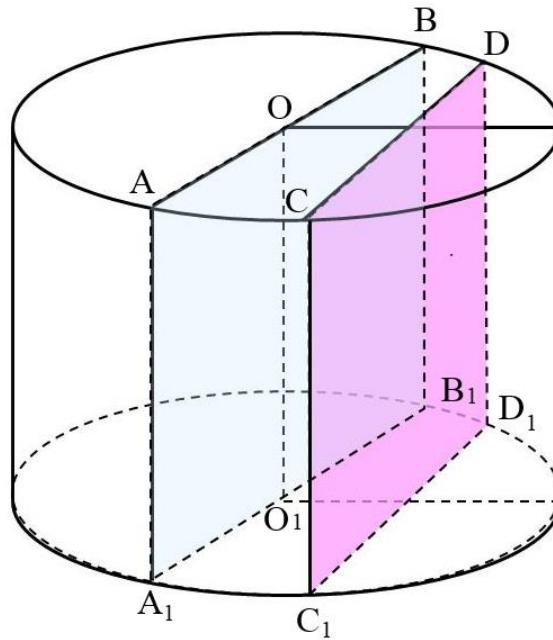


Рис. 2.6. Побудова циліндра та його перерізу

З допомогою шаблону еліпса зображаємо основи циліндра, розмішуючи еліпс так, щоб його центр співпав з відміченими точками, а мала вісь еліпса розміщувалась вздовж проєкції осі циліндра. З'єднаємо відрізками відповідні кінці великих осей еліпсів, що зображають основи, і отримаємо зображення контурних (крайніх видимих) твірних циліндра [33].

Якщо в задачі вимагається розглянути осьовий переріз циліндра, то краще його провести під деяким кутом до площини основи циліндра. Це надає зображенню більшої об'ємності. Для цього в одній з основ будують діаметр, наприклад AB . Через його кінці проводять прямі, паралельні осі циліндра, до перетину з другою основою – твірні циліндра. Таким чином отримують осьовий переріз ABB_1A_1 .

Паралельний переріз циліндра можна зобразити, провівши в одній з основ довільну хорду, а через її кінці прямі, паралельні осі циліндра, – твірні циліндра – до перетину з другою основою. І ми одержимо переріз CDD_1C_1 , який має форму прямокутника.

2. Побудова зображення конуса.

Побудуємо спочатку зображення основи конуса у вигляді еліпса, користуючись при цьому шаблоном (див. рис.2.7).

На продовженні малої осі еліпса відмічають вершину конуса S . З точки S проводять дотичні SC і SD до побудованого еліпса, які є крайніми видимими твірними конуса [33, с.39].

Слід наголосити учням на тому, що переріз проведений через контурні твірні не є осьовим.

Щоб побудувати осьовий переріз конуса, проводять діаметр основи конуса AB і сполучають його кінці з вершиною конуса. ASB – осьовий переріз конуса.

Щоб побудувати переріз конуса площиною, паралельною площині основи конуса, використовують шаблони еліпсів, подібних до того, який зображає основу конуса.

Малу вісь такого еліпса розміщують на висоті конуса, а контурні твірні мають служити дотичними до нього (див. рис. 2.7).

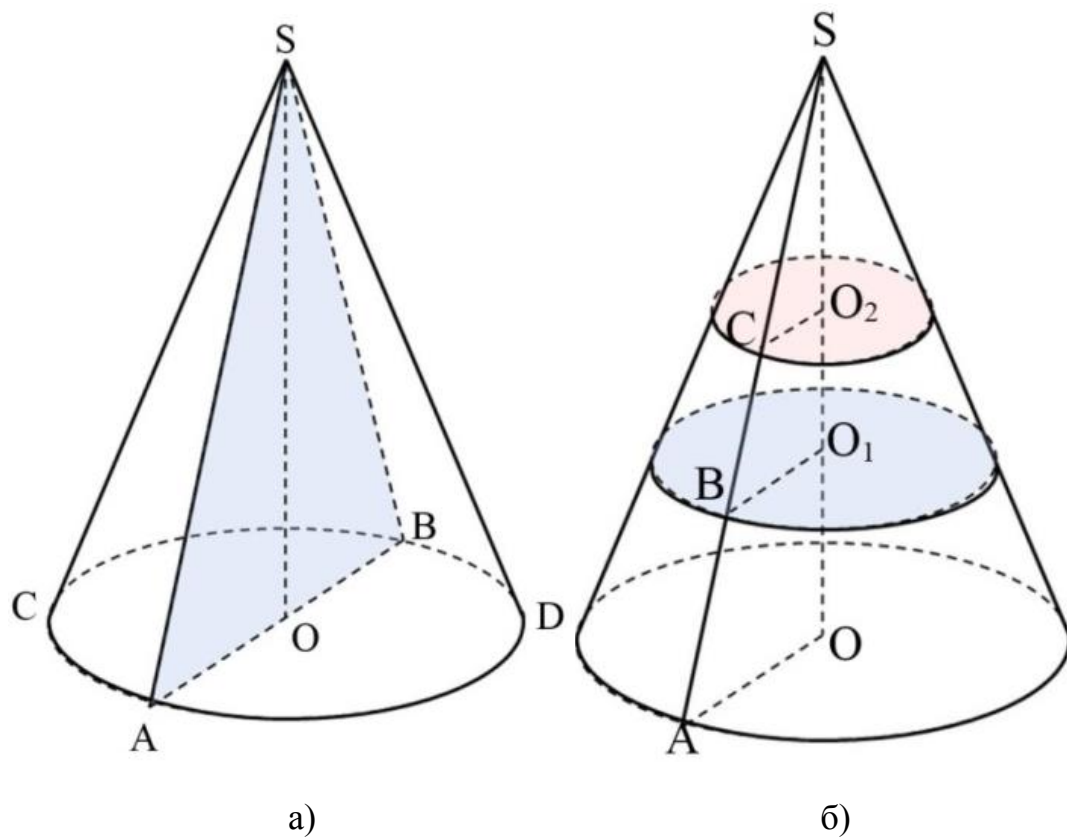


Рис. 2.7. Побудова конуса та його перерізу

3. Зображення зрізаного конуса

Зображення зрізаного конуса можна виконати за допомогою шаблонів двох подібних еліпсів, розмістивши їх так, щоб їх центри і малі осі розміщувались на одній вертикальній прямій.

Після цього провести спільні зовнішні дотичні до цих еліпсів. Відрізки між точками дотику будуть зображати контурні твірні (див. рис. 2.8).

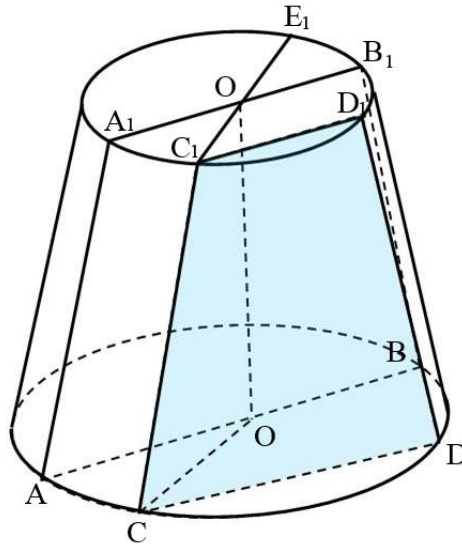


Рис.2.8. Побудова зрізаного конуса

Для побудови осьового перерізу зрізаного конуса проводимо паралельні діаметри основ AB і A_1B_1 . Будуємо твірні AA_1 і BB_1 . Отже, AA_1B_1B – осьовий переріз зрізаного конуса.

Для того, щоб побудувати переріз зрізаного конуса, що має форму трапеції і проходить через хорду нижньої основи CD , будуємо діаметр CE . Потім будуємо паралельний йому діаметр C_1E_1 другої основи, проводимо $CD \parallel C_1D_1$ і твірні CC_1 і DD_1 (див. рис. 2.8).

4. Зображення кулі

Зображення кулі треба розпочинати з побудови зображення великого круга кулі – еліпса (див. рис. 2.9).

На великій осі еліпса AB , як на діаметрі, проводимо коло з центром в точці O . Через один з кінців малої осі CH , наприклад C , проводимо промінь $CD \parallel AB$ до перетину з колом.

На продовженні малої осі по обидві сторони від центра O відкладаємо відрізки $OE=OF=CD$. Точки E і F є зображенням полюсів кулі. Доведення такого розміщення полюсів не варто давати всім учням. Малий круг кулі зображають шаблоном довільного еліпса, який дотикається до обрису зображення кулі.

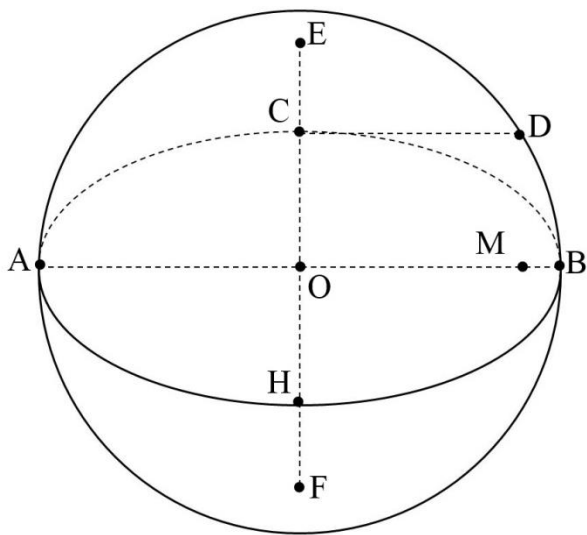


Рис. 2.9. Побудова кулі

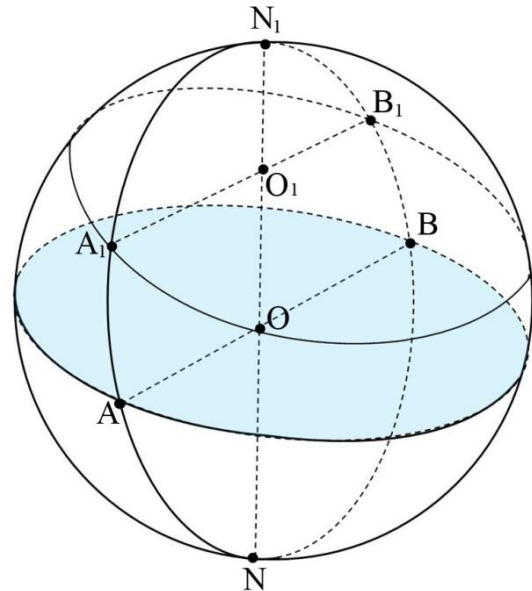


Рис. 2.10. Побудова перерізу кулі

Для зображення на одному рисунку великого і малого кругів кулі, розміщених у паралельних площинах, користуються шаблонами подібних еліпсів, розміщуючи їх малі осі на одному діаметрі (див. рис. 2.10).

5. Зображення комбінацій тіл

Оскільки всі круглі тіла зображаються в ортогональній проекції, то й многогранники, що знаходяться з ними в комбінації, мають зображатися в ортогональній проекції.

Головним правилом при побудові комбінацій тіл є те, що побудова починається з зображення круглого тіла.

Для всіх комбінацій основних геометричних тіл не можна визначити певне місце при викладенні теоретичних відомостей курсу стереометрії. Багато з них мають зображатись при розв'язуванні конкретних задач, тому деякі комбінації не пов'язані з якимись конкретними темами викладу навчального матеріалу. Розглянемо основні комбінації тіл.

1) *Комбінації циліндра і правильної призми.* Побудову зображення таких комбінацій можна викласти після введення означення вписаної в циліндр та описаної навколо циліндра призми в темі «Циліндр».

a) Правильна призма, вписана в циліндр.

Розглянемо побудову цієї комбінації на прикладі правильної чотирикутної призми (див. рис. 2.11а).

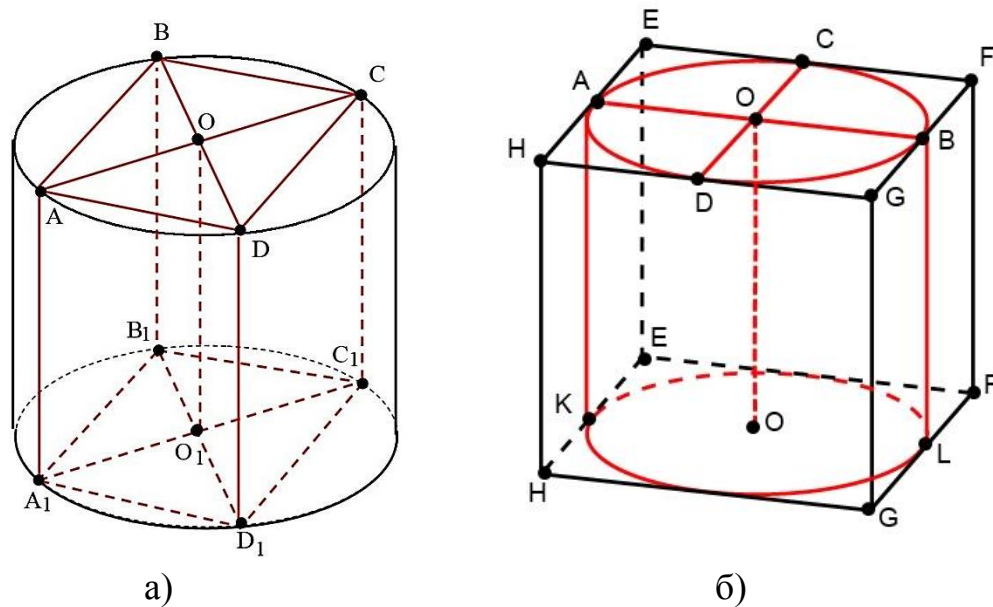


Рис.2.11. Комбінація правильної чотирикутної призми та циліндра

Знаючи основні побудови плоских просторових фігур та їх комбінацій на площині, побудови зображень просторових геометричних тіл, учні можуть вже виконувати певну їх послідовність:

1. Побудувати циліндр.
2. В верхню основу циліндра вписати квадрат $ABCD$ – основу призми.
3. Через вершини чотирикутника $ABCD$ провести твірні циліндра.
4. Послідовно сполучити кінці твірних.

б) Циліндр, вписаний в правильну призму.

Нехай маємо правильну чотирикутну призму. Тоді дана побудова зводиться до послідовності таких побудов:

1. Побудувати зображення циліндра.
2. Навколо верхньої основи циліндра опишемо квадрат.

3. Навколо нижньої основи – чотирикутник, сторони якого відповідно паралельні сторонам квадрата (див. рис. 2.11б).

Решту побудов аналогічних комбінацій з правильною трикутною і правильною шестикутною призмами можна запропонувати учням зробити вдома.

2) *Комбінації конуса і правильної піраміди.* Побудову зображення цих комбінацій доцільно було б подати після введення означення вписаної в конус та описаної навколо конуса піраміди в темі «Конус».

а) Правильна піраміда, вписана в конус.

Розглянемо побудову відносно правильної трикутної піраміди (див. рис. 2.12а):

1. Побудувати конус.
2. Вписати в основу конуса основу правильної піраміди – правильний трикутник ACB .
3. Сполучити вершину конуса S з вершинами основи піраміди.

б) Конус, вписаний в правильну піраміду.

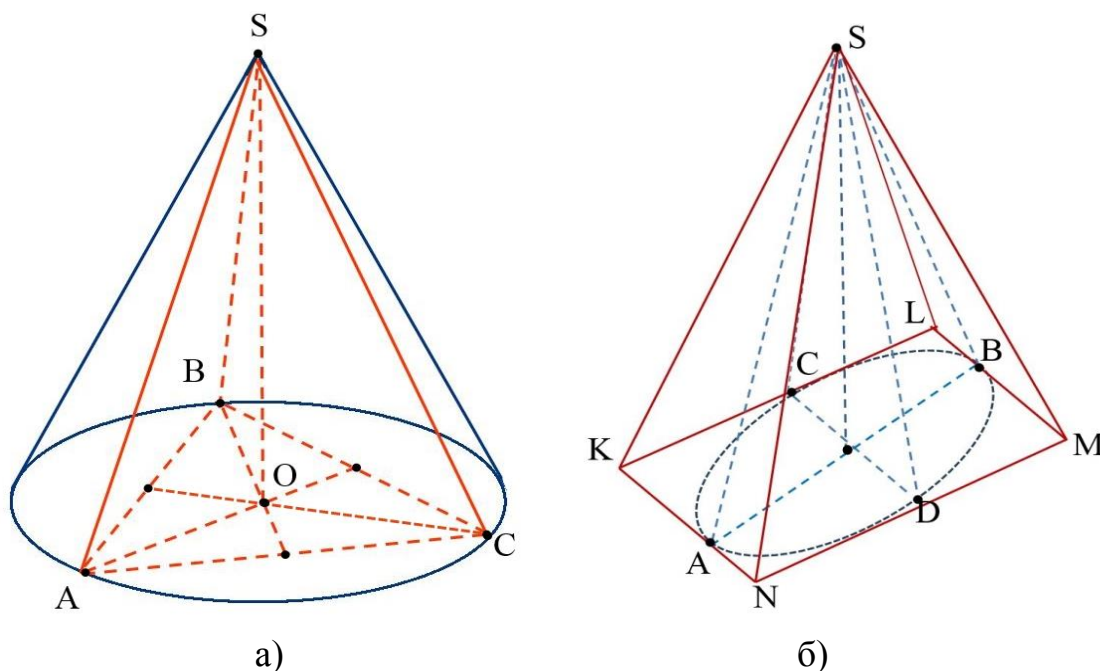


Рис. 2.12. Зображення комбінації конуса та піраміди

Розглянемо побудову відносно правильної чотирикутної піраміди (див. рис. 2.12б.)

1. Побудуємо конус.
2. Навколо основи конуса опишемо основу піраміди – квадрат $KLMN$.
3. Сполучимо вершину конуса S з вершинами основи піраміди.

2.2.3. Рисунки як засіб при розв'язуванні задач

Дуже важливу роль у розв'язуванні геометричних задач та доведенні теорем має рисунок. Він допомагає учню більш конкретно уявити собі ті абстрактні геометричні об'єкти, що даються в умові задачі чи формулюванні теореми, розібратися у взаємному розміщенні всіх тих ліній, кутів і площин, про які йде мова в задачі і які треба розглянути, щоб розв'язати її.

Вдало виконаний рисунок дає можливість швидше знайти план і шляхи розв'язання задачі.

Одна з вимог щодо математичних записів розв'язування завдань така: математичні записи, малюнки та графічні ілюстрації мають бути чіткими, акуратно записаними і зручними для читання.

Але, перш ніж розв'язувати які-небудь задачі на фігури обертання, треба навчити учнів зображати їх. Мало показати, як це робити, необхідно закріпити набуте вміння на вправах, зокрема й таких.

1. Нарисуйте циліндр.
2. Нарисуйте циліндр, висота якого втричі більша від діаметра основи.
3. Нарисуйте рівносторонній циліндр.
4. Нарисуйте циліндр і який-небудь його осьовий переріз.

Аналогічні вправи слід пропонувати учням і про конус та зрізаний конус.

Також будуть доцільні вправи на комбінації геометричних тіл, які були згадані в пункті раніше.

1. Нарисуйте правильну трикутну призму, описану навколо кулі.
2. Нарисуйте правильну зрізану чотирикутну піраміду, вписану в сферу.
3. Нарисуйте правильну трикутну піраміду, описану навколо циліндра.
4. Нарисуйте сферу, описану навколо прямої призми, в основі якої лежить прямокутний трикутник.

Такі вправи сприяють вихованню графічної культури унів. До того ж вони ніби розчленовують на частини ті труднощі, з якими стикаються учні під час розв'язування стереометричних задач.

Зрозуміло, що вчитель повинен не тільки пропонувати учням вправи й оцінювати їх виконання, а й навчати, як ці вправи виконувати. Іноді досить поради, як краще розмістити фігуру, з чого починати рисунок, як усунути недоліки, а іноді й самому слід показати, як треба рисувати подібні комбінації фігур [33].

Наприклад, розглянемо деякі задачі (без готового рисунка) на комбінацію тіл обертання.

Задача. Дано кулю вписану в правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a , а бічне ребро піраміди нахилене до основи під кутом φ . Знайдіть радіус кулі [16].

Зображення такого рисунка виконується в такий спосіб (див. рис. 2.13):

1. Будуємо кулю.
2. За допомогою трафарета еліпса, подібного до зображення великого круга, будуємо малий круг, паралельний великому. Цим самим ми визначили площину основи вписаної піраміди. Основа піраміди – квадрат.
3. Впишемо в побудований еліпс квадрат.
4. З'єднаємо полюс кулі S з вершинами основи піраміди.

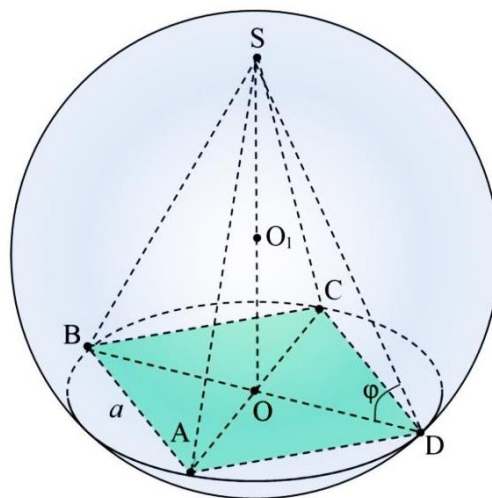


Рис.2.13

Серед задач зустрічаються такі, в яких розглядаються тіла обертання, утворені обертанням плоскої фігури навколо прямої проведеної по відношенню до фігури певним чином (див. рис. 2.14).

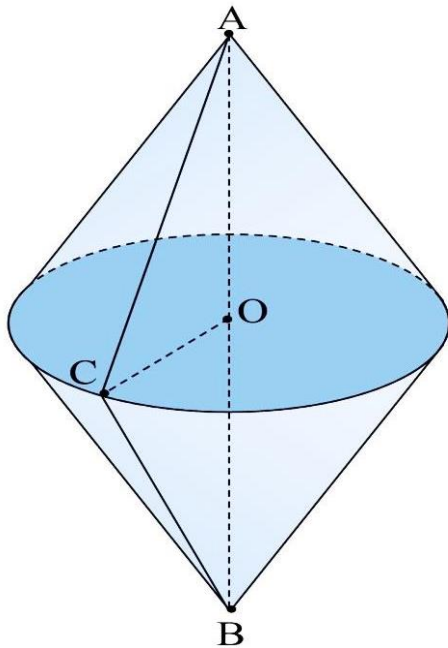


Рис.2.14

В таких задачах побудова зображення тіла обертання виконується в такий спосіб:

1. Будують фігуру, симетричну відносно осі обертання.
2. Зображають шлях зовнішніх точок у вигляді еліпсів, подібних між собою і розташованих так, що малі осі лежать на осі обертання.
3. Проводять крайні видимі (контурні) твірні.
4. Але для розв'язання таких задач краще обмежитись осьовим перерізом.

2.3. Усні задачі як засіб розвитку просторового мислення учнів при вивченні комбінації геометричних тіл

Тема «Комбінації геометричних тіл» посідає особливе місце в шкільному курсі стереометрії.

Засвоєння системи понять, умінь, алгоритмів даної теми відбувається в процесі розв'язування задач, серед яких слід виділити так звані усні задачі. Вважається, що для їх розв'язання потрібний додатковий час на уроці. На нашу думку, з цим не можна погодитися, оскільки саме в процесі розв'язування усних задач, зокрема, при вивченні стереометрії:

- активізується просторова уява учнів;
- засвоюються базові поняття певної теми та співвідношення між ними;
- економиться навчальний час в процесі уроку;
- відбувається підготовка учнів до розв'язування певних типів завдань ЗНО.

Основним засобом розвитку просторового мислення учнів є розв'язування стереометричних задач, зокрема, з теми «Комбінації геометричних тіл».

У більшості випадків задачі, що розв'язуються на уроках стереометрії оформлюються на дошці та в зошитах учнів письмово: виконуються відповідний рисунок, записується розв'язання (хід міркувань), формулюється відповідь. При цьому роль усних задач недооцінюють.

Взагалі, усні задачі активізують розумову діяльність учнів, уяву, увагу, спостережливість, пам'ять, швидкість реакції, підвищують інтерес до навчального матеріалу.

Усні задачі, що розв'язуються на початку уроку, допомагають учням швидко включитися в роботу, в середині або наприкінці уроку служать своєрідною розрядкою після напруги і втоми, викликаних письмовою або практичною роботою.

За формою сприйняття усні задачі поділяються на такі що:

- 1) виконуються учнями з використанням зорової опори (готові рисунки, моделі);
- 2) виконуються учнями без зорової опори.

Сформулюємо деякі загальні методичні рекомендації щодо організації навчальної діяльності учнів, пов'язаної з розв'язуванням усних задач.

1. Починати краще з усних задач, в яких пропонуються готові рисунки або моделі. Рисунки можуть бути пред'явлені в підручнику, на дошці або плакатах, на мультимедійній дошці.

2. Запропоновані рисунки повинні містити максимальну інформацію, задану в умові задачі (прямі кути, паралельність, перпендикулярність, довжини відрізків, рівні відрізки, тощо).

3. При розв'язуванні деяких усних задач дозволяється робити певні записи та письмові обчислення. При цьому не слід вимагати від учнів переносити рисунок в зошит, писати «дано», «знайти» або «довести».

4. В подальшому учням пропонується самостійно виконувати рисунки (ескізи) за умовою усної задачі, сформульованої вчителем.

5. Якщо передбачається, що учні будуть виконувати усну задачу без зорової опори, то пред'явити її можна або у вигляді письмового тексту, або прочитати в голос, при цьому чітко, повільно, з необхідними акцентами.

Розв'язання усних задач з теми «Комбінації геометричних тіл» базується на поняттях, що характеризують певні бінарні відношення, а саме: «тіло, вписане в інше тіло» і «тіло, описане навколо іншого тіла». Нагадаємо, що куля називається вписаною у многогранник, якщо вона дотикається до кожної грані многогранника. Многогранник називається вписаним у сферу, якщо всі його вершини лежать на сфері. Аналогічні означення можна сформулювати і для інших фігур, вписаних одна в одну. Але слід мати на увазі, що такі загальні означення не гарантують однозначного розміщення вписаних фігур. Для однозначного завдання комбінацій розглядуваних тіл слід уточнити, як саме вписано одне з них у друге. Для пар «призма – циліндр» і «піраміда – конус» прийнято домовленість, яку виражають такими означеннями: «Призма називається вписаною у циліндр, якщо основи призми вписані в кола основ циліндра. Піраміда називається вписаною в конус, якщо їхні вершини збігаються, а основу піраміди вписано в коло основи конуса. Якщо одне тіло вписане в інше, друге тіло називають описаним навколо першого» [18, с.209].

Розглянемо приклади усних задач, коли за одним готовим рисунком формулюється декілька завдань.

I. Усні задачі за готовим рисунком

1. Сфера вписана в циліндр, твірна якого дорівнює 10 см (див. рис. 2.15).

Визначити:

- 1.1. радіус основи циліндра (5 см);
- 1.2. площу основи циліндра (25π см²);
- 1.3. площу осьового перерізу циліндра (100 см²);
- 1.4. площу бічної поверхні циліндра (100π см²);

1.5. площу повної поверхні циліндра ($150\pi \text{ см}^2$);

1.6. площу поверхні сфери ($100\pi \text{ см}^2$).

2. В циліндр вписана правильна шестикутна призма, висота якої дорівнює 12 см (див. рис. 2.16). Радіус основи циліндра дорівнює половині висоти призми.

2.1. Чому дорівнює діагональ AD ? (12 см)

2.2. Чому дорівнює сторона основи призми? (6 см)

2.3. Яка фігура є осьовим перерізом циліндра? (Квадрат)

2.4. Чому дорівнює площа осьового перерізу циліндра? (144 см^2)

2.5. Чому дорівнює площа основи циліндра? ($36\pi \text{ см}^2$)

2.6. Чому дорівнює діагональ AC (розглянути трикутник ACD)? ($6\sqrt{3} \text{ см}$)

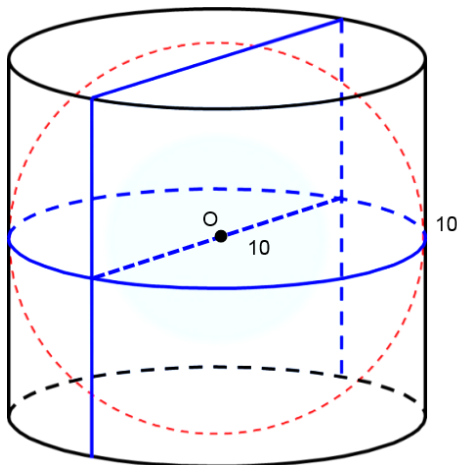


Рис.2.15

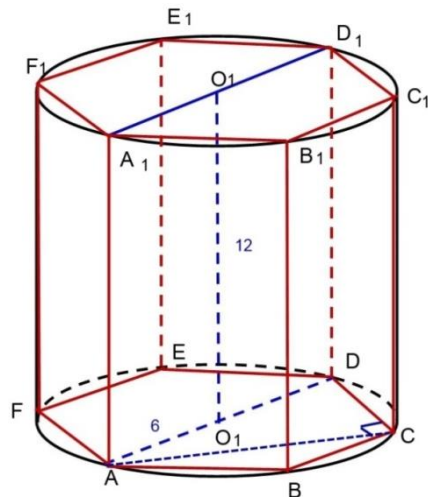


Рис.2.16

3. У циліндр вписано трикутну призму, де $AC = 12 \text{ см}$, $BC = 16 \text{ см}$, AB проходить через центр основи циліндра. Висота призми дорівнює 10 см (Рис.2.17). Знайти:

3.1. радіус основи циліндра (10 см) ;

3.2. площу основи циліндра ($100\pi \text{ см}^2$) ;

3.3. площу основи призми (96 см^2) ;

3.4. площу бічної поверхні циліндра ($200\pi \text{ см}^2$) ;

3.5. площу бічної поверхні призми (480 см^2) ;

3.6. площу повної поверхні циліндра ($400\pi \text{ см}^2$) ;

3.7. площу повної поверхні призми (672 см^2).

4. Піраміду $SABC$ вписано в конус. $AC = BC = 8 \text{ см}$, $SO = 16 \text{ см}$ (див. рис.2.18).

4.1. Встановити вид трикутника ABC (прямокутний рівнобедрений трикутник).

4.2. Знайти радіус основи конуса. ($4\sqrt{2} \text{ см}$)

4.3. Знайти площу основи піраміди. (32 см^2)

4.4. Знайти площу основи конуса. ($32\pi \text{ см}^2$)

4.5. Знайти бічне ребро піраміди. ($12\sqrt{2} \text{ см}$)

4.6. Знайти площу осьового перерізу конуса. ($64\sqrt{2} \text{ см}^2$)

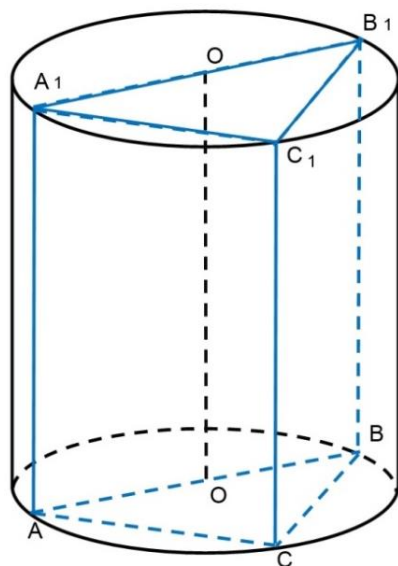


Рис.2.17

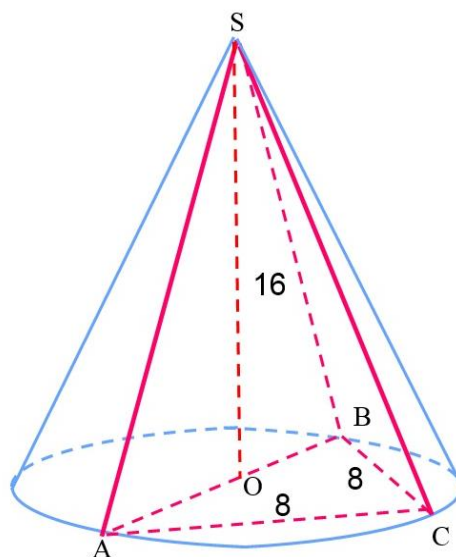


Рис.2.18

Наведемо приклади усних задач на дослідження та обчислення, в яких не пропонується готовий рисунок.

II. Усні задачі без готового рисунка

1. Назвіть тіла, утворені обертанням:

1.1. прямокутника навколо своєї сторони (циліндр);

1.2. прямокутного трикутника навколо свого катета (конус) ;

1.3. прямокутного трикутника навколо гіпотенузи (комбінація конусів із спільною основою) ;

1.4. рівнобічної трапеції навколо осі симетрії (зрізаний конус);

- 1.5. кола навколо діаметра (сфера);
- 1.6. круга навколо діаметра (куля);
- 1.7. кола навколо прямої, яка його не перетинає і лежить в площині цього кола (тор).
2. Чи можна вписати:
 - 2.1. будь-який конус в кулю? (Можна)
 - 2.2. кулю в конус? (Можна)
 - 2.3. у циліндр пряму призму, в основі якої лежить квадрат? (Можна)
 - 2.4. у циліндр пряму призму, в основі якої лежить ромб? (Не можна)
 - 2.5. у циліндр пряму трикутну призму? (Можна)
3. Чи можна в перерізі конуса площиною отримати:
 - а) чотирикутник; б) нерівнобедрений трикутник; в) правильний трикутник?
4. Чи завжди висота конуса, вписаного в трикутну піраміду, є і висотою піраміди? (Завжди)
5. Знайдіть радіус кулі, вписаної в куб з ребром a см. ($\frac{a}{2}$ см)
6. Чому дорівнює висота зрізаного конуса, у який вписано кулю радіуса R см. ($2R$ см)
7. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник зі стороною a . Чому дорівнює висота піраміди, вписаної у цей конус? ($\frac{a\sqrt{3}}{2}$ см)

Під час розв'язування усних задач учням із початковим рівнем навчальних досягнень можна запропонувати повторити алгоритм розв'язання задачі. Такий диференційований підхід сприяє мобілізації уваги, формує і покращує основи просторового мислення й спонукає до активної участі в роботі не тільки сильних, але й слабких, неуважних учнів.

Задачі, які ми запропонували з даної теми, доцільно використовувати як перед поясненням нового матеріалу (їх можна вважати підготовкою до сприйняття теоретичного матеріалу), так і після пояснення нового матеріалу (для перевірки глибини засвоєння нового матеріалу).

Розв'язування усних задач з теми «Комбінації геометричних тіл» сприяє досягненню наступних цілей:

- удосконалюється уявлення про фігуру, яка обертається;
- розкриваються властивості тіл обертання;
- виробляється в учнів вміння знаходити і формулювати стереометричні задачі, аналогічні до раніше розв'язаних, або відомих результатів планіметрії;
- удосконалюється просторове мислення;
- виробляється в учнів вміння знаходити нестандартні шляхи до розв'язання усних задач.

2.4. Застосування засобів математичного аналізу для знаходження об'ємів тіл обертання

Подібно до того, як для фігур на площині вводиться поняття площі, так і для тіл у просторі вводиться поняття об'єму. В підручнику Г.П. Бевза (профільний рівень) [18] тема «Об'єми геометричних тіл» вивчається відразу після теми «Тіла обертання», вона є останньою темою в шкільному курсі стереометрії. В даному підручнику вивчення об'ємів тіл обертання відразу починається з поясненням того, що ж називають об'ємом тіла обертання. Окремим параграфом виділено тему «Обчислення об'ємів тіл обертання за допомогою інтегралу».

Вивчення даної теми доцільно починати з пояснення того, як знаходиться об'єм певного тіла Ω за допомогою поперечних перерізів.

Нехай тіло Ω , міститься між двома паралельними площинами α і β (див. рис. 2.19). Введемо систему координат так, щоб вісь Ox була перпендикулярна до площин α і β , і позначимо буквами a і b абсциси точок перетину осі Ox з цими площинами ($a < b$). Будемо вважати, що площини α і β не пертинають тіло Ω , а лише дотикаються до нього. Але й домовимося вважати їх січними площинами [7, с. 45].

Позначимо $S(x)$ – площа відповідного перерізу і припустимо, що $S(x)$ – неперервна функція на числовому відрізку $[a; b]$.

Розіб'ємо числовий відрізок $[a; b]$ на n рівних відрізків точками $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ і через точки з абциссами x_k , проведемо площину, перпендикулярну до вісі Ox (див. рис. 2.19а) [7].

Ці площини розбивають тіло Ω на n тіл: $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$. Якщо площина перерізу $S(x)$ – круг, то об'єм тіла Ω_i (зарисованого на рис. 2.19.) приблизно дорівнює об'єму циліндра з основою $S(x_k)$ і висотою $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (див. рис. 2.19б). Тоді, об'єм k -го шару наближено дорівнює $S(x_k) \Delta x$, а об'єм усього тіла буде дорівнювати

$$\Delta V \approx S(x_1)\Delta x + S(x_2)\Delta x + \dots + S(x_k) \Delta x. \quad (3.1.)$$

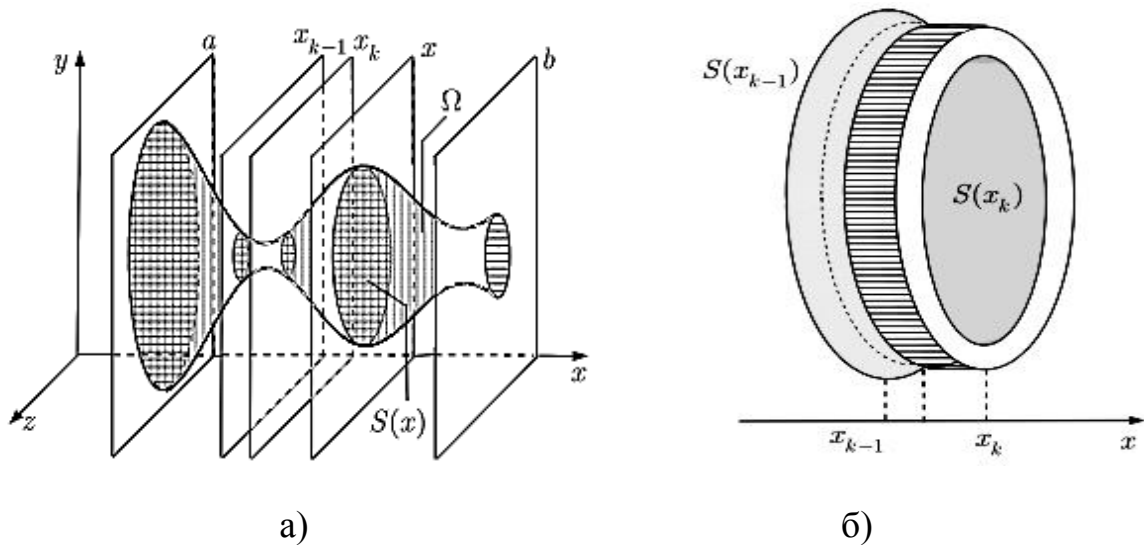


Рис.2.19

Якщо ця сума має границю, коли $\Delta x \rightarrow 0$, то її природньо взяти за об'єм заданого тіла

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n S(x_k) \Delta x \quad (3.2.).$$

В такому разі, за означенням інтеграла маємо [7]:

$$V = \int_a^b S(x) dx \quad (3.3.)$$

Розглянемо приклад. Нехай дане тіло – довільний циліндр, площа основи якого S , а висота h (див. рис. 2.20.) [7, с. 36]. Розмістимо систему координат

так, щоб одна основа циліндра була у площині yz , а площина другої основи перетинала вісь Ox у точці h .

Кожна січна площина, перпендикулярна до осі Ox , перетинає даний

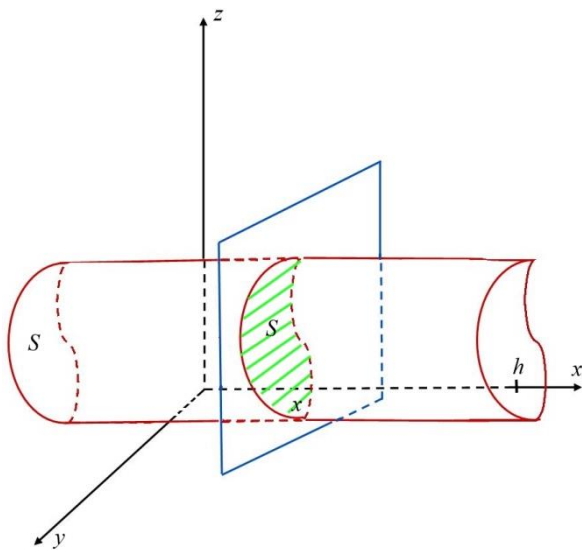


Рис.2.20

циліндр по фігурі, що дорівнює основі; площа кожного такого перерізу дорівнює S .

Тому об'єм даного циліндра дорівнює:

$$V = \int_0^h S dx = Sx|_0^h = Sh. \quad (3.4.)$$

На основі цього необхідно уточнити, що таким способом можна вивести і формулу для захоження об'єму конуса, і сформулювати теорему.

Теорема 1. Об'єм конуса дорівнює одній третині добутку площі його основи на висоту [18, с.196].

$$V = \frac{1}{3}Sh. \quad (3.5.)$$

Доцільно на даному етапі пояснити доведення даної теореми.

Доведення. Нехай дано конус, площа основи якої S , а висота h .

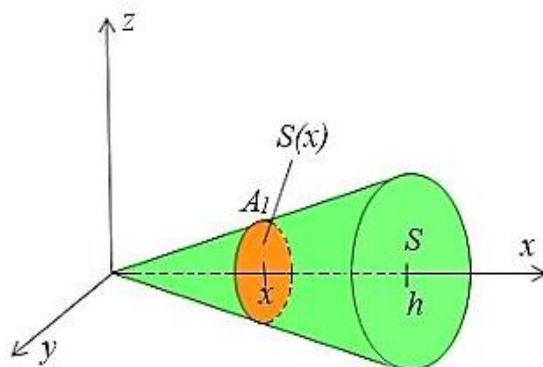


Рис. 2.21

Візьмемо її вершину за початок координат, а вісь x направимо перпендикулярно до площини основи (див. рис. 2.21). Кожна січна площина, перпендикулярна до осі x , перетинає конус по колу, подібному основі. Якщо січна площина віддалена

від початку координат на x , тоді відповідна

площа перерізу $S(x)$ задовольняє умову $S(x): S = x^2 : h^2$ (3.6.).

Звідси $S(x) = \frac{S}{h^2} x^2$ (3.7.).

Ця функція квадратична, тому і неперервна на $[0;h]$. Отже, об'єм даного конуса:

$$V = \int_0^h \frac{S}{h^2} x^2 dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} Sh, \quad (3.8.)$$

$$V = \frac{1}{3} Sh. \quad (3.9.)$$

Що і треба було довести.

Після доведення даної теореми, можемо довести теорему про об'єм зрізаного конуса.

На етапі доведення слід враховувати особливості кліпового мислення учнів, адже доведення теореми для учнів буде доволі тяжке.

Теорема 2. Об'єм зрізаного конуса, площі основ якого S і S_1 , а висота h , можна знаходити за формулою [18, с. 198]

$$V = \frac{1}{3} h(S + \sqrt{SS_1} + S_1). \quad (3.10.)$$

Доведення

Якщо P – вершина конуса, частиною якої є даний зрізаний конус, то об'єм зрізаного конуса дорівнює різниці об'ємів двох конусів. Площі S і S_1 їхніх основ відносяться як квадрати відстаней від відповідних площин до вершини P . Тому, якщо $PO_1 = x$, то

$$\frac{S}{S_1} = \frac{(x+h)^2}{x^2}, \quad (3.11.)$$

звідки

$$x = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}. \quad (3.12.)$$

Отже, об'єм даної зрізаної піраміди: $V = \frac{1}{3}(x+h) \cdot S - \frac{1}{3}xS_1 =$

$$= \frac{1}{3}(hS + x(S - S_1)) = \frac{1}{3} \left(hS + \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}} \cdot (S - S_1) \right) = \frac{1}{3} h(S + \sqrt{SS_1} + S_1).$$

Тобто $V = \frac{1}{3} h(S + \sqrt{SS_1} + S_1). \quad (3.13.)$

Що і треба було довести.

Розглянемо приклади задач на знаходження об'ємів тіл обертання за допомогою поперечного перерізу (використовуючи визначений інтеграл).

Задача 3.1. Нещодавно археологи при розкопуванні стародавніх поселень знайшли жертвне місце, яке їх дуже зацікавило. Після досліджень було з'ясовано, що це тіло, утворене обертанням параболи $y = x^2 + 1$, навколо вісі Ox (x вчені вимірювали в метрах), обмеженої лініями $x=2$, $y=0$. Причому він був з каменю густиною $2500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Яку масу каменя використали на виготовлення цього жертвенника стародавні майстри? ($m = V \cdot \rho$)

Задача 3.2. Знайти об'єм тіла, утвореного перетином поверхні $x + y + z^2 = 1$ та прямих $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Задача 3.3. Знайти об'єм тіла, утвореного перетином поверхні $x + y - z^2 = 1$ та прямих $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Задача 3.4. Знайти об'єм тіла, утвореного перетином циліндричних поверхонь $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$.

Але учні повинні розуміти і той факт, що тіла обертання – це не лише звичні нам тіла обертання (циліндр, конус, куля), а й тіла утворені в результаті обертання певних кривих.

Нехай дана неперервна функція $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ (див. рис. 2.22.).

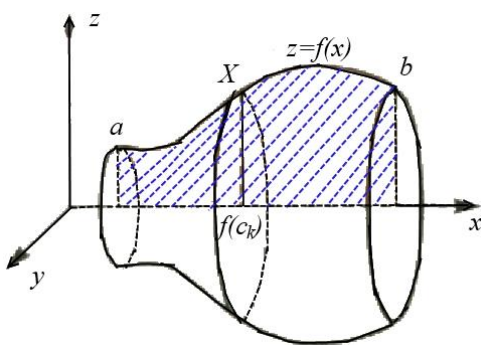


Рис.2.22

Побудуємо криволінійну трапецію AA_1BB_1 , обмежену графіком $y = f(x)$, віссю Ox і двома прямими $x=a$ і $x=b$, і будемо обертати її навколо своєї осі Ox . Отримане при цьому тіло називається тілом обертання [7].

Для обчислення об'єму цього тіла розіб'ємо інтервал $[a; b]$ на ряд частинних інтервалів точками $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ і проведемо через ці точки площини, які перпендикулярні осі Ox . Об'єм тіла обертання також розіб'ється на ряд частинних об'ємів ΔV_i . Величину ΔV_i можна вважати приблизно рівною

об'єму циліндра з висотою Δx_k і радіусом основи $f(c_k)$, де $x_{k-1} \leq x_k \leq x_k$.

Таким чином,

$$\Delta V_i \approx \pi(f(c_k))^2 \Delta x_k. \quad (3.14)$$

Об'єм тіла обертання V наближено рівний сумі частинних об'ємів:

$$\begin{aligned} V &\approx \pi(f(c_1))^2 \Delta x_1 + \pi(f(c_2))^2 \Delta x_2 + \pi(f(c_3))^2 \Delta x_3 + \dots + \pi(f(c_n))^2 \Delta x_n = \\ &= \sum_{k=1}^n \pi(f(c_k))^2 \Delta x_k, \text{ де } k = \overline{1 \dots n}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Об'єм V буде знайдений точніше, чим менші частинні інтервали Δx_k .

Вираз $\sum_{k=1}^n \pi(f(c_k))^2 \Delta x_k$ є інтегральна сума функції $\pi(f(c_k))^2$ на інтервалі $[a; b]$, границя якої при $\max \Delta x_k \rightarrow 0$ дорівнює визначеному інтегралу. В кінці маємо

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \pi(f(c_k))^2 \Delta x_k, \text{ або } V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (3.16)$$

На основі цього можемо сформулювати теорему.

Теорема 2. Нехай задано деяку криволінійну трапецію, обмежену лініями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$. Тоді об'єм тіла, утвореного обертанням цієї криволінійної трапеції навколо осі Ox , дорівнює [18, с. 199]

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (3.17)$$

Розглянемо приклади задач на знаходження об'єму тіла обертання за допомогою визначеного інтегралу.

Задача 3.5. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням площини навколо вісі OX , яка обмежена заданими кривими.

- 1) $y = x^2$; $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$;
- 2) $y = \sqrt{x}$; $x = 1$; $x = 4$; $y = 0$;
- 3) $y = \sqrt{x}$; $x = 1$; $y = 0$;
- 4) $y = 1 - x^2$; $y = 0$;
- 5) $y = 2x$; $y = x + 3$; $x = 0$; $x = 1$;
- 6) $y = x + 2$; $y = 1$; $x = 0$; $x = 2$;
- 7) $y = \sqrt{x}$; $y = x$;
- 8) $y = 3x$, $y = 0$, $x = 2$;

$$9) \quad y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 2;$$

$$10) \quad y = x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2;$$

$$11) \quad y = x^3, \quad y = 1, \quad x = 2;$$

Задача 3.6. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням кривої:

а) навколо осі Ox ; б) навколо осі Oy .

$$1) \quad y = 2x - x^2, \quad y = 0;$$

$$2) \quad y = \sin x, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

$$3) \quad y = 3 \left(\frac{x}{2} \right)^2, \quad y = 3 \left| \frac{x}{2} \right|;$$

$$4) \quad y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad 0 \leq x < \infty;$$

Задача 3.7. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x$; $x = 1$; $x = 3$.

Задача 3.8. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = \frac{4}{x}$; $y = 1$; $y = 4$.

Задача 3.9. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями: $y = x^2$, $y = x$.

Задача 3.10. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ординат криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

$$x^2 + y^2 = 64, \quad y = -5, \quad y = 5, \quad x = 0.$$

Задача 3.11. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням дуги гіперболи $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$, навколо її уявної вісі, де $-3 \leq x \leq 3$, $-5 \leq y \leq 5$.

Під час вивчення даної теми учням можна запропонувати вионати домашню самостійну роботу, яка складається з диференційованої системи завдань. Приклади завдань диференційованої системи завдань. Приклади завдань диференційованої системи завдань з теми «Знаходження об'ємів тіл обертання за допомогою інтеграла» подано у Додатку В.

Висновки до розділу 2

Аналіз методичної літератури дав можливість записати основні завдання вивчення теми «Тіла обертання»:

1. Формування та розвиток математичної компетентності та її геометричної складової.
2. Формування та удосконалення простової уяви про тіла обертання.

Було виявлено, що для реалізації цих завдань, вчитель повинен вміти пояснити матеріал на високому рівні, а це не можливо без застосування наочного приладдя (моделей тіл обертання, схем, таблиць і т.д.) та ІКТ.

Показано, що дуже велике значення мають наочні приладдя під час вивчення тіл обертання, особливо на перших уроках, коли формуються перші уявлення про циліндр, конус, сферу та кулю, оскільки під час розглядання такої моделі, учні чітко бачуть фігуру у житті, можуть її туркнутися, побачити її особливості. Використання засобів інформаційно-комунікаційних технологій, а саме програмних засобів GeoGebra та Cabri 3d під час уроку на тему «Тіла обертання», для створення віртуальних моделей комбінацій геометричних тіл дають можливість учням з'ясувати взаємне розташування тіл, їх розміри, практично підтвердити як теоретичні відомості, так і висунуті гіпотези.

Одним із пунктів геометричної складової математичної компетентності є вміння будувати стереометричні рисунки. З'ясовано, що саме з побудовою правильного стереометричного рисунка тіла обертання в старшокласників виникає найбільше труднощів. На жаль, цьому питанню дуже мало відводиться місця у сучасних підручниках зі стереометрії для старших класів. Ми показали, яким чином можна пояснити учням правильну побудову тіла обертання і показали, що рисунок має бути для учня тим знаряддям, яке допомагає ясніше уявити собі взаємне розміщення тіла обертання у просторі. Треба пам'ятати, що під час розв'язування задачі рисунок буде виконувати позитивну роль тільки тоді, коли він правильно буде відображати і форму, і співвідношення тих геометричних об'єктів, які

входять до складу задачі. Учитель повинен навчити учнів робити аналіз задачі, тільки тоді можна розраховувати на самостійне розв'язання ними задач. Учні самі повинні прийти до висновку, що необхідно зробити деякі побудови. Тільки після того, як учні засвоять правила побудови основних геометричних тіл, можна дозволяти розв'язування задач за допомогою ескізів, виносних малюнків, зовсім без малюнків.

Для засвоєння системи понять, умінь, алгоритмів даної теми, яке відбувається в процесі розв'язування задач, ми виділили так звані усні задачі і розробили систему усних задач за готовим рисунком та систему усних задач без готового рисунка. Вони направлені на формування геометричної складової математичної компетентості.

Окремим пунктом, виділили розв'язування об'ємів тіл обертання за допомогою визначеного інтеграла. Саме застосування визначеного інтеграла для знаходження об'ємів тіл обертання надасть можливість учневі: розвивати логічне мислення, просторову уяву; розвивати прийоми узагальнення, синтезу та порівняння; навчитись застосувати визначений інтеграл на практиці та в житті.

ВИСНОВКИ

У ході написання дипломної роботи були вирішені всі поставлені завдання, тим самим мета дипломної роботи була досягнута. Було здобуто такі результати:

- 1) Проведено логіко-дидактичний аналіз теми «Тіла обертання».
- 2) На основі аналізу психолого-педагогічної літератури досліджено особливості кліпового мислення старшокласників.
- 3) Показано засоби і методи формування математичної компетентності з урахуванням особливостей кліпового мислення учнів при вивченні теми «Тіла обертання».
- 4) Проаналізовано стан проблеми формування в учнів старших класів умінь будувати рисунки геометричних тіл та їх комбінацій.
- 5) Розроблено і обґрунтовано методику наскрізного формування у старшокласників умінь виконувати побудови зображення тіл обертання, їх комбінацій, під час диференційованого навчання курсу стереометрії у профільній школі.
- 6) Розроблено фрагмент довідника з теми «Тіла обертання».
- 7) Розроблено конспекти уроків до даної теми.
- 8) Розроблено систему усних задач для формування і розвитку просторової уяви учнів.
- 9) Підібрано диференційовану систему завдань на тіла обертання з метою формування предметної математичної компетентності.
- 10) Підібрано диференційовану систему задач на знаходження об'ємів тіл обертання за допомогою визначеного інтеграла з метою формування предметної математичної компетентності.

Отримані результати дослідження, умови їх створення, апробування та оцінювання дають підстави зробити наступні висновки:

- 1) Математична компетентність являє собою інтегративну особистісну якість, засновану на сукупності фундаментальних математичних знань,

практичних умінь і навичок, які свідчать про готовність і здатність учня здійснювати професійну діяльність. Засоби навчання, такі як наочні приладдя та ІКТ, дозволяють вчителю більш глибоко пояснити матеріал, тим самим краще формувати та розвивати предметну математичну компетентність та просторву уяву.

- 2) Основними особливостями кліпового мислення старшокласників є те, що вони демонструють унікальні здібності, швидко схоплюють інформацію, легко користуються комп'ютером, смартфоном, ігровою приставкою й іншими технологічними винаходами. Відмінність умов розвитку сучасних підлітків з таким мисленням полягає в кількості інформації, яку сприймають учні. Тому знаючи особливості кліпового мислення учнів старших класів, вчителеві легше побудувати структуру уроку, підібрати диференційовану системи завдань на тіла обертання для кращого формування математичної компетентності.
- 3) Уміння виконувати побудови зображень стереометричних фігур на площині необхідні фахівцям у багатьох сферах діяльності. Найбільша відповідальність за їх формування в нинішніх умовах покладена на шкільний курс геометрії, зокрема, стереометрії. У сучасній методичній літературі методика формування і розвитку вмінь старшокласників будувати зображення стереометричних фігур та їх комбінації фактично не вироблена, що призводить до невміння учнів будувати зазначені зображення під час розв'язування задач, доведення теорем тощо.
- 4) Оскільки зображення в курсі стереометрії мають здебільшого ілюстративний характер, то для їх побудови, що переконливо доведено в наукових дослідженнях професора М. Ф. Четверухіна та його послідовників, в педагогічному процесі слід застосовувати вільне паралельне проектування з дотриманням відповідних принципів побудови та вимог до рисунка. Для простоти виконання побудовані

зображення можуть бути як неповними за певних умов, так і повними, метрично невизначеними.

- 5) Уміння будувати зображення просторових фігур та їх комбінацій є складними вміннями, тому вони мають бути структуровані на елементарні вміння, з яких формуються більш складні, поки не сформуються узагальнені вміння, яких повинні набути учні на кінець вивчення курсу стереометрії. Така ієрархія вмінь має бути чітко прописана в програмі з геометрії для старшої школи в розділі «Вимоги до підготовки учнів» у вигляді компетентностей, якими мають оволодіти старшокласники під час вивчення курсу стереометрії.
- 6) В процесі розв'язування усних задач, зокрема, при вивченні стереометрії: активізується просторова уява учнів; засвоюються базові поняття певної теми та співвідношення між ними; економиться навчальний час в процесі уроку. Основним засобом розвитку просторового мислення учнів є розв'язування стереометричних задач, зокрема, з теми «Комбінації геометричних тіл».
- 7) Для досягнення позитивних результатів у формуванні в учнів математичної компетентності необхідно використовувати таблиці, схеми, наочні моделі тіл обертання та їх комбінацій, добірки орієнтованих усних задач, добірки орієнтованих базових задач, комп'ютерні, анімаційні динамічні 3-D моделі.
- 8) Привертати особливу увагу учнів до розв'язування задач на знаходження об'ємів тіл обертання за допомогою визначеного інтеграла, оскільки в нашому житті зустрічаються багато нестандартних тіл обертання.
- 9) Розроблена методика формування у старшокласників математичної компетентності та просторового мислення під час вивчення теми «Тіла обертання» у профільній школі, може бути використана вчителями математики, студентами математичних спеціальностей.

Виконане дослідження не вичерпує досліджуваної проблеми формування математичної компетентості при вивченні теми «Тіла обертання» та відкриває подальші перспективи у таких напрямках:

- реалізація міжпредметних зв'язків алгебри і початків аналізу та стереометрії, креслення і стереометрії, інформатики і стереометрії та фізики та стереометрії;
- навчання учнів елементам комп'ютерної графіки під час вивчення тіл обертання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Аксютіна І. В. Методика формування просторової уяви учнів на факультативних заняттях / І. В. Аксютіна, Ю. А. Шукліна // Інженерно-будівельний вісник Прикаспію. – 2013. – №1(4). – С. 49-64.
2. Биданов Н. Методика використання відеоматеріалів в навчальному процесі [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://si-sv.com/publ/1/metodika/14-1-0-557>. – Назва з екрана.
3. Биков В. Ю. Проблеми інформатизації/ В. Ю. Биков // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2001. – №5. – С.8-12.
4. Бібік Н. М. Компетентісна освіта – від теорії до практики / Н. М. Бібік, І. Г. Єрмаков, О. В. Овчарук. – К.: Пляда, 2005. – 120 с.
5. Бібік Н. В. Компетентісний підхід: рефлексивний аналіз // Компетентісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи: Бібліотека з освітньої політики / За загальною редакцією О.В. Овчарук. – К.: «К.І.С.», 2004. – С. 45-50.
6. Бікбаєва А. В. Проблеми виникають у учнів при вивченні стереометрії [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.scienceforum.ru/2015/1029/9548>. – Назва з екрана.
7. Боровик В. Н. Курс вищої геометрії: навч. посібник / В. Н. Боровик, В. П. Яковець. – Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. – 464 с.
8. Бреус І. А. Розвиток просторового мислення учнів в умовах отримання додаткового математичної освіти / І. А. Бреус // Інноваційна наука. – 2016. – №12. – С. 47-50.
9. Бродський Я. Компетентісний підхід у навчанні математики / Я. Бродський, С. Великодний, О. Павлов // Математика в школі. – 2011. – №10. – С. 2-9.
10. Буйницька О. П. Інформаційні технології та технічні засоби навчання/ О. П. Буйницька. – К.: Центр учбової літератури, 2012. – 239 с.

11. Василенко А. В. Моделювання як засіб просторового мислення / А. В. Василенко // Викладач XXI століття. – 2012. – №3. – С. 141-144.
12. Василенко А. В. Розвиток просторового мислення учнів в процесі навчання геометрії: психологічний аспект / А. В. Василенко // Викладач XXI століття. – 2010. – №2. – С. 170-174.
13. Василенко А. В. Психолого-педагогічні умови розвитку просторового мислення учнів / А. В. Василенко // Наука і школа. – 2013. – № 12– С. 69-72.
14. Василенко А. В. Рівні розвитку просторового мислення учнів на уроках геометрії / А. В. Василенко // Наука і школа. – 2011. – №.6 – С 62-65.
15. Вітюк О. В. Розвиток образного мислення учнів при вивченні стереометрії з використанням комп'ютера: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Вітюк Олександр Володимирович; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К., 2001. – 20 с.
16. Геометрія 11кл.: підруч.для загальноосвіт.навч.закл.: академ. рівень, профіл. рівень / Г. В. Апостолова; упорядкув. завдань Ліпчевського Л. В. [та ін.]. – К.: Генеза, 2011. – 304 с.
17. Геометрия 10-11 класы: учебник для загальнообразовательных учреждений: базовый и профильный уровень / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. В. Кадомцев.]. – 22-ге вид. – М.: Просвещение, 2013. – 255 с.
18. Геометрія 11кл.: підруч.для загальноосвіт.навч.закл.: академ. рівень, профіл. рівень / Г.П. Бевз, В.Г.Бевз, Н.Г. Владімірова, В.М. Владіміров. – К.: Генеза, 2011. – 256 с.
19. Глобін О. Компетентнісний підхід у навчанні та стандарт шкільної математичної освіти / О. Глобін // Математика в школі. – 2011. –№11-12 – С. 2-6.
20. Головань М. С. Компетенція та компетентність: порівняльний аналіз понять / М. С. Головань // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. – 2011. – №8. – С. 224-233.
21. Гольдберг Я. Є. З чого починається розв'язання стереометричної задачі: посібник для вчителя / Я. Є. Гольдберг. – К.: Рад. шк., 1990. – 118 с.

22. Грамбовська Л.В. Комп'ютерні динамічні моделі як засіб дидактичного забезпечення процесу навчання геометрії в сучасній школі/ Л. В. Грамбовська, О.М. Яковчук // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2010. – №7. – С.14-17.
23. Давлетов Р. Х. Використання відеоуроків на уроках математики в світлі інноваційних підходів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.prodlenka.org/index.php?option=com_mtree&task=att_download&link_id=156490&cf_id=24. – Назва з екрана.
24. Державний стандарт базової та повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – Електронні дані. – Режим доступу: www.mon.gov.ua. – Назва з екрана.
25. Жалдак М.І. Використання комп'ютера в навчальному процесі має бути педагогічно виваженим і доцільним / М. І. Жалдак // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2011. – №3. – С. 3-12.
26. Жалдак М.І. Математика з комп'ютером / М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко – К: РННЦ ДІНІ, 2004. – 258 с.
27. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики / М.І. Жалдак, О.В. Вітюк - К: РННЦ ДІНІТ, 2004. – 168 с.
28. Жук Ю.О. Діалектика педагогічного знання в умовах комп'ютерно-орієнтованого процесу навчання / Ю. О. Жук // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2011. – №4. – С.3-6.
29. Заболотний В. Ф. Формування методичної компетентності вчителя математики засобами мультимедіа: [монографія] / В. Ф. Заболотний. – Вінниця: Едельвейс і К, 2009.– с. 453.
30. Заїкіна Т. В. Формування просторової уяви в комп'ютерному предметному середовищі для досягнення високого рівня геометричній підготовки учнів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.rusnauka.com/7_PNI_2015/Pedagogica/5_188725.doc.htm. – Назва з екрана.

31. Замазий О. С. Психолого-педагогические проблемы развития пространственного восприятия / О. С. Замазий // Ведомости Тульского государственного университета. Гуманитарные науки. – 2013. – С. 249-253.
32. Зверева Г. Ф. Компетентнісний підхід до навчання учнів на уроках математики / Г. Ф. Зверева, В. В. Сердюк // Математика в школах України. – 2010. – №9. – С. 2-7.
33. Зенгин А. Р. Основные принципы построения изображений в стереометрии: пособие для учителей / А. Р. Зенгин. – М.: Учпедгиз., 1962. – 108 с.
34. Зепнова Н. Н. Розвиток просторового мислення школярів – запорука успішного вивчення точних дисциплін у ВНЗ / Н. Н. Зепнова // Вісник ІрГТУ. – 2012. – №6. – С. 231-237.
35. Зимова І. А. Ключові компетентності - нова парадигма результату освіти / І. А. Зимова // Вища освіта сьогодні. – 2003. – №5. – С. 34-42.
36. Калінін В. О. Формування професійної компетентності майбутнього вчителя засобами діалогу культур: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: 13.00.04 «Теорія та методика професійної освіти» / В. О. Калінін. – Житомир, 2005. – 20 с.
37. Касьяненко М. Д. Педагогіка співробітництва. Навч. посібник / М. Д. Касьяненко. – К.: Вища шк., 1993. – 320 с.
38. Кларин М. В. Инновационные модели обучения в зарубежных педагогических поисках / М. В. Кларин. - М.: Академия, 1984. – 222 с.
39. Клочко В. І. Нові інформаційні технології навчання математики в технічній вищій школі : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.02 / Клочко Віталій Іванович. – Вінниця, 1998. – 396 с.
40. Ковальчук М.Б. Педагогічні програмні засоби при розв'язуванні стереометричних задач // Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету. Серія: Педагогіка і психологія. – Випуск 10. – Вінниця: РВВ ДП «Державна картографічна фабрика», 2004.–С. 48-55.

41. Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи / [Під заг. ред. О. В. Овчарук]. – К.: К.І.С., 2004. – 112 с.
42. Компетентнісний підхід до вивчення природничо-математичних дисциплін у закладах середньої ланки освіти: Збірник матеріалів Всеукраїнської студентської науково-практичної конференції (21-22 квітня 2005 року). – Херсон, 2005. – 176 с.
43. Концепція профільного навчання у старшій школі (11.09.2009) [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – Електронні дані. – Режим доступу: www.mon.gov.ua. – Назва з екрана.
44. Коногорська С. О. Вікові особливості розвитку просторового мислення підлітків і старших школярів: їх взаємозв'язок з навчальною успішністю / С. О. Коногорська // Вісник Бурятського державного університету. – 2014. – №5. – С. 59-65.
45. Корольський В.В. Математична понятійна компетентність: теоретико-методологічні основи дослідження, структура та рівні / В. В. Корольський, А. М. Капіносів // Педагогіка вищої та середньої школи. – 2012. – №34. – С. 431-436.
46. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером / Т. Г. Крамаренко. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. – 271 с.
47. Крамаренко Т. Г. Роль курсу «Інформаційно-комунікаційні засоби навчання» у формуванні дидактичних умінь майбутнього вчителя / Т. Г. Крамаренко // Педагогіка вищої та середньої школи : зб. наук. праць / редкол.: В. К. Буряк, Л. В. Кондрашова, Г. Б. Штельмах та ін. – Кривий Ріг, 2008. – Вип. 21. – С. 396–403.
48. Кучай О. В. Компетенція і компетентність – відображення цілісності та інтеграційної суті результату освіти / О. В. Кучай // Рідна школа. – 2009. – №11. – С. 44-48.
49. Лепський М. М. Нарисна геометрія: посібник для педагогічних інститутів / М. М. Лепський. – К.: Рад. шк., 1961. – 118 с.

50. Лернер Г. И. Психология восприятия объемных форм (по изображениям) / Г. И. Лернер. – М.: Из-во Моск. ун-та, 1980. – 136 с.
51. Лісова Т. В. Формувати «середовищну освіту» (Педагогічна підтримка самоосвітньої компетентності учнів на уроках математики) / Т. В. Лісова // Математична газета. – 2012. – №6. – С. 9-12.
52. Литвиненко В. Н. Задания на развития пространственных представлений: Книга для учителя / В. Н. Литвиненко. – М.: Просвещение, 1991. – 127 с.
53. Лоповок Л. М. Зображення круглих тіл: Посібник для вчителів середньої школи / Л. М. Лоповок. – К.: Рад. шк., 1961. – 64 с.
54. Мерзляк А. Г. Алгебра та початки аналізу. 11 клас. Академічний рівень, профільний рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2011. – 431 с.
55. Мишин В. И. Методика преподавания математики в средней школе / В. И. Мишин – М: Просвещение, 1987. – 414 с.
56. Морзе Н. В. Методика навчання інформатики. В 4-х частинах / Н. В. Морзе. – К: Навчальна книга, 2003. – Ч. 1. Загальна методика навчання інформатики.– 254 с.
57. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх закладів. Академічний рівень. [Електронний ресурс]. – 25 с. – Режим доступу: http://www.osvitamraj.org.ua/attachments/385_matem_ak.pdf
58. Навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів Профільний рівень. [Електронний ресурс]. – 28 с. – Режим доступу: http://osvita-novog.at.ua/metod/10-11_matem_prof.pdf
59. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх закладів [для класів з поглибленим вивченням математики]. [Електронний ресурс]. – 37 с. – Режим доступу: http://www.osvitamraj.org.ua/attachments/385_matem_pr.pdf

60. Нагорна Н. В. Формування у студентів понять компетентності й компетенції / Н. В. Нагорна // Виховання і культура. – 2007. – №1-2. – С. 266-268.
61. Нелін Є. П. Алгебра та початки аналізу. 11 клас. Академічний рівень, профільний рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова – Харків: Гімназія, 2011. – 447 с.
62. Психологія: учебник для бакалавров / Р. С. Немов. — М.: Издательство Юрайт, ИД Юрайт, 2014. — 639 с. — Серия: Бакалавр. Базовый курс.
63. Нікітін О. О. Технічні засоби навчання. Конспект лекцій / О.О.Нікітін. – [Електронний ресурс]. – Хмельницький : ХНУ. – 2011 р. – 35 с. – Режим доступу: http://lubbook.net/book_314.html
64. Панина Т. С. Современные способы активизации обучения: учебное пособие для студ. высш. учеб. заведений / Т. С. Панина, Л. Н. Вавилова; Под ред. Т. С. Паниной. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 176 с.
65. Пасічник Н. Формування соціальної компетентності випускника школи на уроках математики / Н. Пасічник, Г. Пасічник// Математика в сучасній школі. – 2012. – №7-8. – С. 36-39.
66. Педагогічні технології. Навч. посібник / О. С. Падалка (ред.), А. М. Нісінчук (ред.), І. О. Смолюк (ред.), О. Т. Шпак (ред.). – К.: Вид. «Українська енциклопедія ім. М.П. Бажана», 1995. – 255 с.
67. Педагогічний програмний засіб для загальноосвітніх навчальних закладів «Алгебра, 11 клас». – К: Мальва, 2006. – 160 с.
68. Подаев М. В. Динамическая визуализация геометрических понятий как способ развития пространственных представлений подростков / М. В. Подаев // Весник Томського державного педагогічного університету. – 2009. – №9(87). – С. 91-93.
69. Пометун О. І. Компетентнісний підхід – найважливіший орієнтир розвитку сучасної освіти / О. І. Пометун // Рідна школа. – 2005. – Січень. – С.65-69.

70. Прокопенко І. Ф. Педагогічна технологія: Посібник / І. Ф. Прокопенко, В. І. Євдокімов. - Х.: Основа, 1995. - 105 с.
71. Прус А. В. Збірник задач з методики навчання математики / А. В. Прус, В. О. Швець. – Житомир: «Рута», 2011. – 388 с.
72. Раков С. А. Математична освіта: компетентісний підхід з використанням ІКТ / С. А. Раков– Х: Факт, 2005. – 360 с.
73. Раков С. А. Три виміри логіко-математичної компетентності / С. А. Раков, О. П. Вашуленко, В. П. Горох // Вісник тестування і моніторинг в освіті. – 2009. - №12.- С. 6-15.
74. Раков С. А. Формування математичних компетентностей вчителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.02 / Раков Сергій Анатолійович ; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К., 2005. – 343 с.
75. Ракута В. М. Система динамічної математики GeoGebra як інноваційний засіб для вчителя математики [Електронний ресурс] / В. М. Ракута. - Інформаційні технології і засоби навчання. 2012. №4 (30). – Режим доступу до журналу: <http://www.journal.iitta.gov.ua>
76. Савченко В. М. Зображення фігур в математиці / В. М. Савченко. – К.: Вища школа, 1978. – 136 с.
77. Саніна Є. І. Розвиток просторового мислення в процесі навчання стереометрії / Є. І. Саніна, О. А. Гришина // Вісник РУДН, серія Психологія та педагогіка. – 2013. – №4. – С. 99-102.
78. Сверчевська І. А. Компетентісний підхід до навчання учнів доведенням тверджень про геометричні тіла / І. А. Сверчевська // Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. – 2005. – Випуск 25. – С. 213 – 215.
79. Сверчевська І. А. Психолого-педагогічні умови підвищення продуктивності вивчення геометричних тіл / І. А. Сверчевська // Вісник ЖДУ імені Івана Франка. – 2004. – Вип. 19. – С. 213 – 217.

80. Свєрчєвськє І. А. Розвиток умінь старшокласників розв'язувати конструктивні задачі / І.А.Свєрчєвськє // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк: Вид-во ДонНУ. – 2008. – Вип. 30. – С. 148-157.
81. Свєрчєвськє І. А. Усні завдання з теми «Об'єми тіл обертання. Площа сфєри» / І. А. Свєрчєвськє // Математика в школі. – 2005. – № 3. – С. 5 – 11.
82. Свєрчєвськє І. А. Усні завдання з теми «Тіла обертання. Площа поверхні» / І. А. Свєрчєвськє // Математика в школі. – 2003. – № 9. – С. 11 – 16.
83. Сенчілов В. В. Застосування інтерактивних технологій при вивченні курсу геометрії в школі [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://e-koncept.ru/2013/13197.htm> – Назва з екрана.
84. Система динамічної математики «GeoGebra» [Електронний ресурс]. – Зальцбург, 2002. – Режим доступу: <http://www.geogebra.com>
85. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні основи навчання математики / З. І. Слєпкань. – К.: Радянськє школа, 1983. – 192 с.
86. Слєпкань З. І. Методика навчання математики / З. І. Слєпкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 510 с.
87. Тарасєнкова Н. Зміст і структура математичної компетентності учнів загальноосвітніх навчальних закладів / Н. Тарасєнкова, В. Кірман // Математика в школі.– 2008. – №6. – С. 3-9.
88. Трєтякова А. І Прикладна спрямованість математики / А. І. Трєтякова. – Харків: Основа, 2006. – 40 с.
89. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о пед. Психологии. — М.: Просвещение, 1983. — 160 с.
90. Хуторський А. В. Ключові компетенції як компонент особистісно-орієнтованої парадигми освіти / А. В. Хуторський // Народна освіта. – 2003. – № 2. – С. 58 – 64.

91. Черкасов Р. С. Методика викладання математики / Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – Харків: Основа, 1992. – 304 с.
92. 9. Четверухин Н.Ф. Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии. – М.: Учпедгиз, 1946. – 286 с.
93. Четверухин М.Ф. Изображение фигур в курсе геометрии: Пособие для учителей. — М.: Учпедгиз, 1958. – 216 с.
94. Четверухин Н.Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже. – 3-е изд. – М.: Учпедгиз, 1955.– 225 с.
95. Шакірова К. Б. Система комп'ютерного моделювання maple для вирішення стереометричних задач шкільного курсу геометрії [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://philology-and-culture.kpfu.ru/?q=system/files/C%2084-88.pdf>. – Назва з екрана.
96. Шамова Т.І. До питання про методи викладання і навчання / Т. І. Шамова // Рад. педагогіка. – 1974. – № 1. – С. 14 - 44.
97. Шишкіна М. П. Методологічний підхід до оцінювання якості програмних засобів навчання / М. П.Шишкіна // Нові технології навчання: наук.-метод. зб. / МОН України, Ін-т інновац. технологій і змісту освіти. – К., 2010. – Вип. 61. – С. 22–28.
98. Шокалюк С. В. Методичні засади комп'ютеризації самостійної роботи старшокласників у процесі вивчення програмного забезпечення математичного призначення : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 – теорія та методика навчання (інформатика) / Світлана Вікторівна Шокалюк ; Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова. – Київ, 2010. – 21 с.
99. Янтранова С. С. Развитие пространственного мышления средствами информационных технологий / С. С. Янтранова // Весник Бурятського державного університета. – 2012. – №15. – С. 75-81.
100. Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников/ И.С. Якиманская. – М.:Педагогика, 1980. – 240 с.

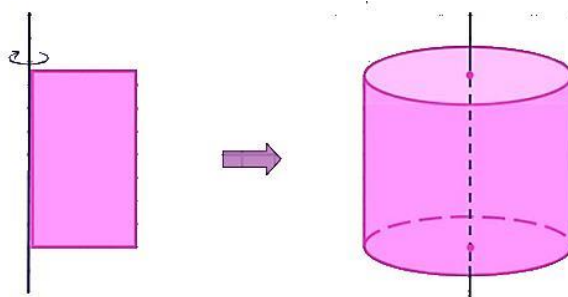
Додаток А

Фрагмент навчального наочного посібника з теми
«Тіла обертання»

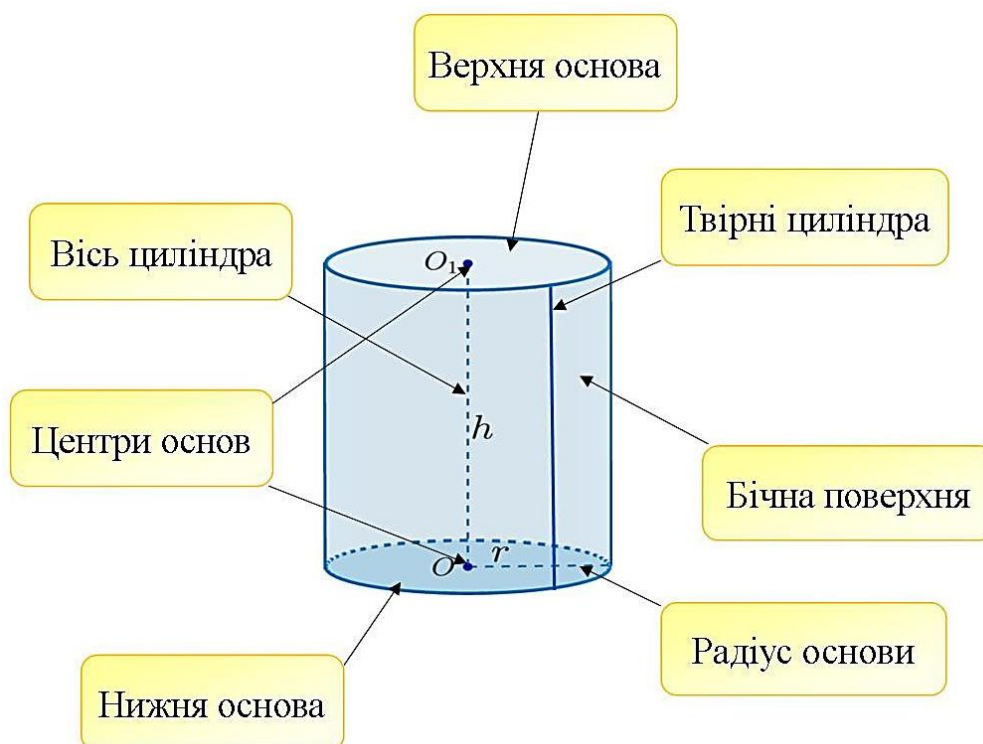
ЦИЛІНДР

Означення

Циліндром називається тіло, утворене обертанням прямокутника навколо однієї із його сторін.



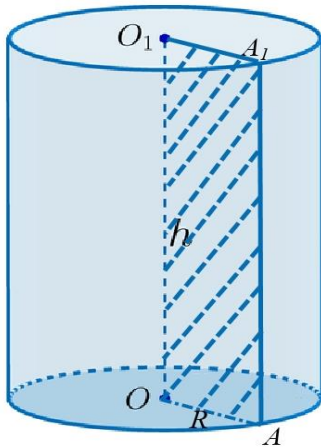
ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТИ ЦИЛІНДРА



ВЛАСТИВОСТІ ЦИЛІНДРА

- 1) Основи циліндра рівні і паралельні.
- 2) Твірні циліндра паралельні і рівні.
- 3) Висота циліндра (відстань між площинами основ) дорівнює твірній.

$$h = AA_1 = OO_1$$



- 4) При обертанні прямокутника навколо його сторони як осі утворюється циліндр.

OAA_1O_1 – прямокутник – OO_1 – вісь утвореного циліндра ($OO_1 \parallel AA_1$).

Радіус основи циліндра $R = OA = O_1A_1$	Висота циліндра $H = AA_1 = OO_1$
---	--------------------------------------

- 5) Площа основи циліндра: $S_{\text{осн}} = \pi R^2$.

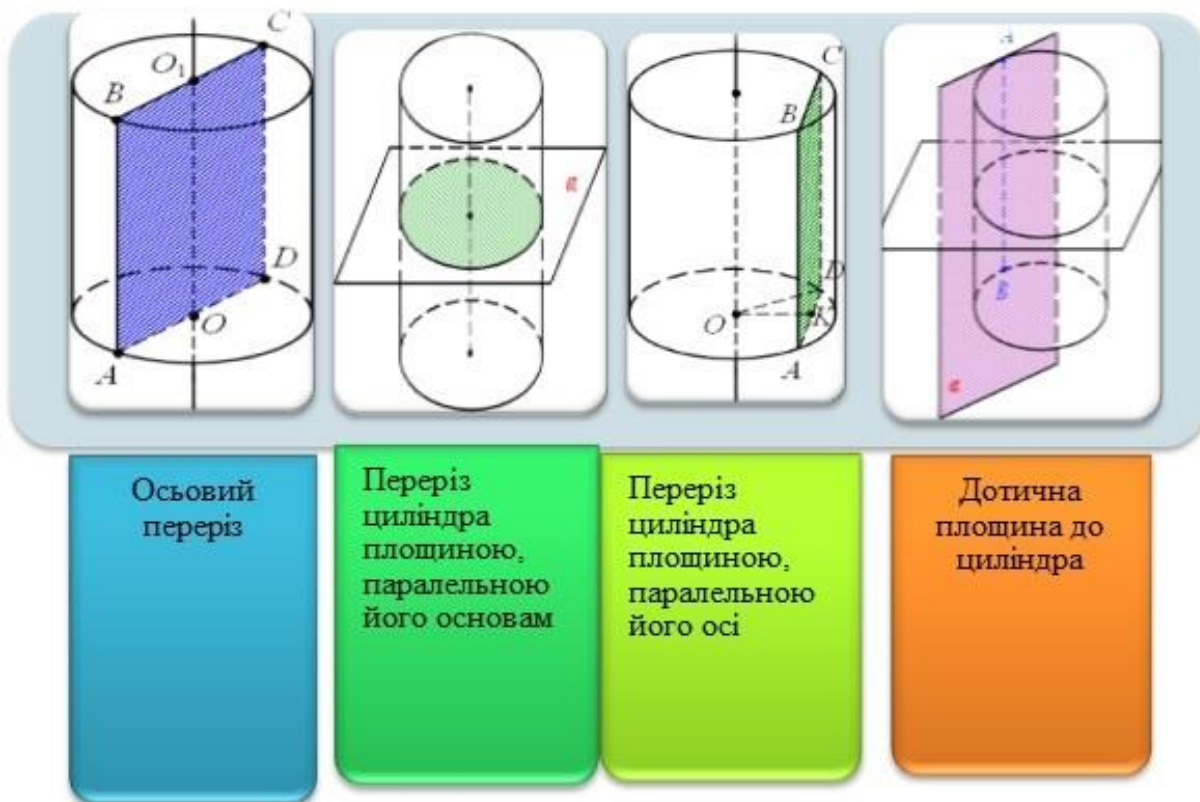
Площа бічної поверхні циліндра: $S_{\text{біч}} = 2\pi RH$.

Площа повної поверхні циліндра:

$$S_{\text{пов}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{біч}} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R(H + R); \quad S_{\text{пов}} = 2\pi R(H + R).$$

- 6) Об'єм циліндра: $V = S_{\text{осн}} \cdot H = \pi R^2 H$.

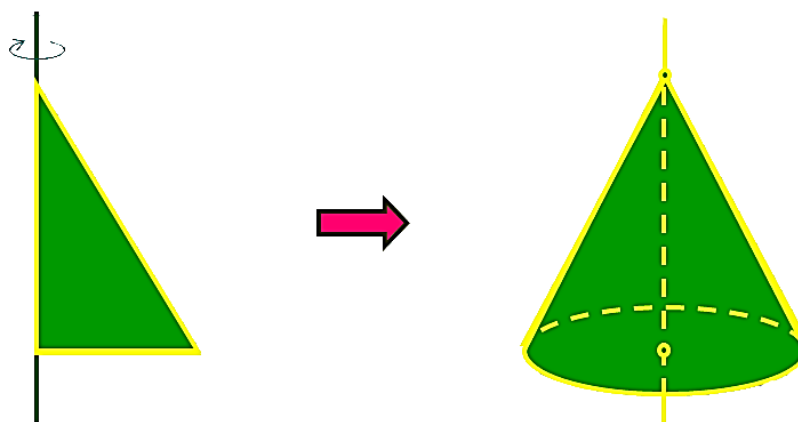
ПЕРЕРІЗИ ЦИЛІНДРА ПЛОЩИНАМИ



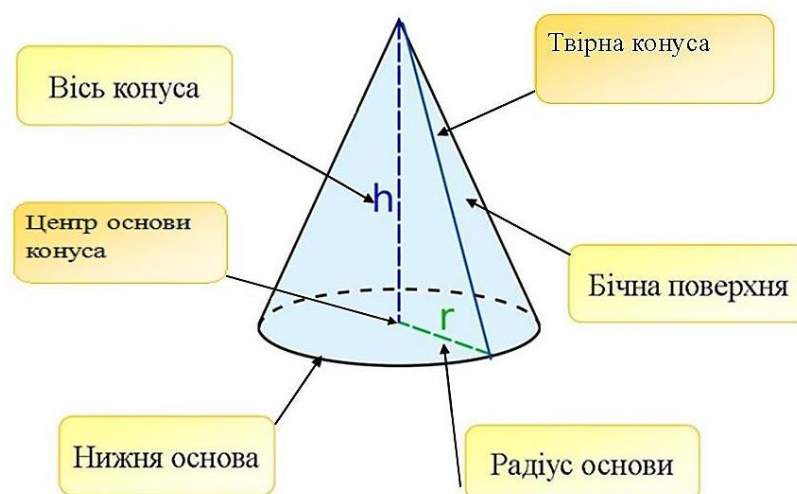
КОНУС

Означення

Конусом називається тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо однієї зі сторін, що прилягає до прямого кута.



ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТИ КОНУСА



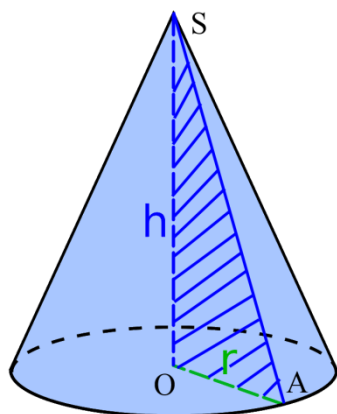
ВЛАСТИВОСТІ КОНУСА

- 1) Твірні конуса рівні.
- 2) Висота конуса

$$h = OS$$

- 3) При обертанні прямокутного трикутника навколо його катета як осі утворюється конус.

SOA – прямокутний трикутник ; SO – вісь утвореного конуса, SA – твірна.



<i>Радіус основи конуса</i>	<i>Висота конуса</i>
$R = OA$	$H = OS$

- 4) Площа основи конуса: $S_{\text{осн}} = \pi R^2$.

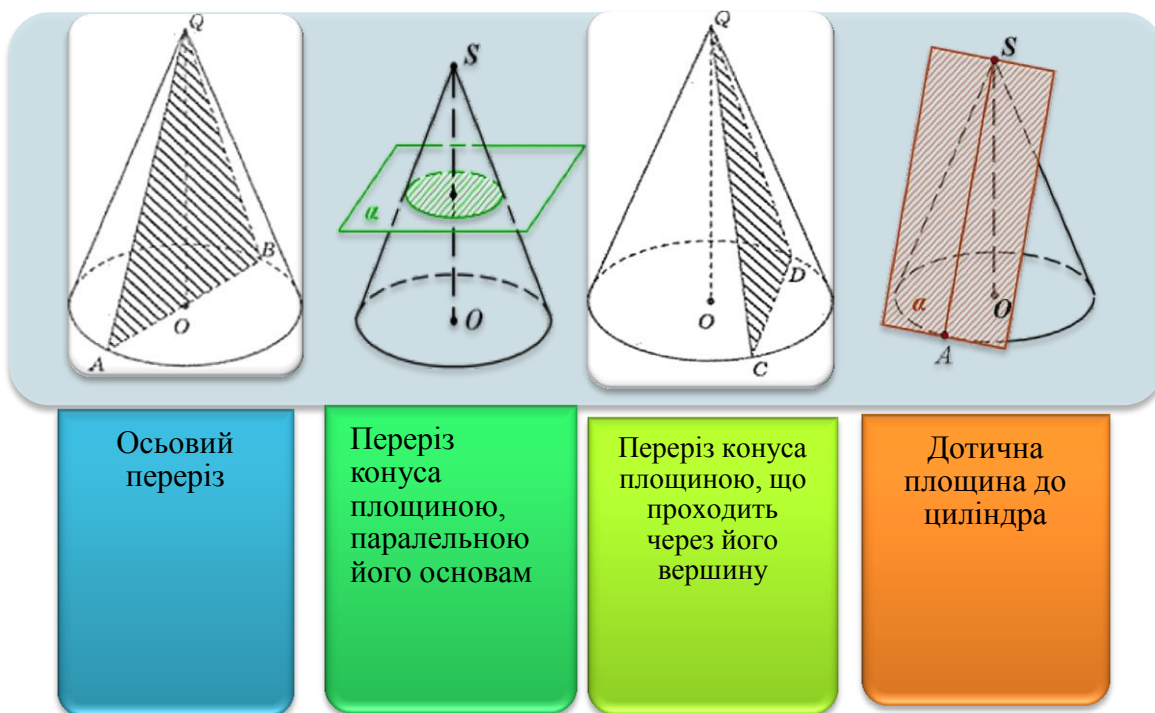
Площа бічної поверхні конуса: $S_{\text{біч}} = \pi Rl$.

Площа повної поверхні конуса:

$$S_{\text{пов}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{біч}} = \pi R^2 + \pi Rl = \pi R(l + R); \quad S_{\text{пов}} = \pi R(l + R).$$

- 5) Об'єм конуса: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.

ПЕРЕРІЗИ КОНУСА ПЛОЩИНАМИ

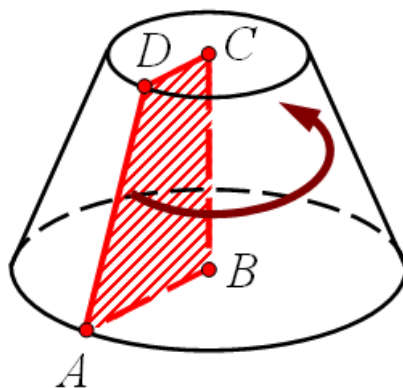


ЗРІЗАНИЙ КОНУС

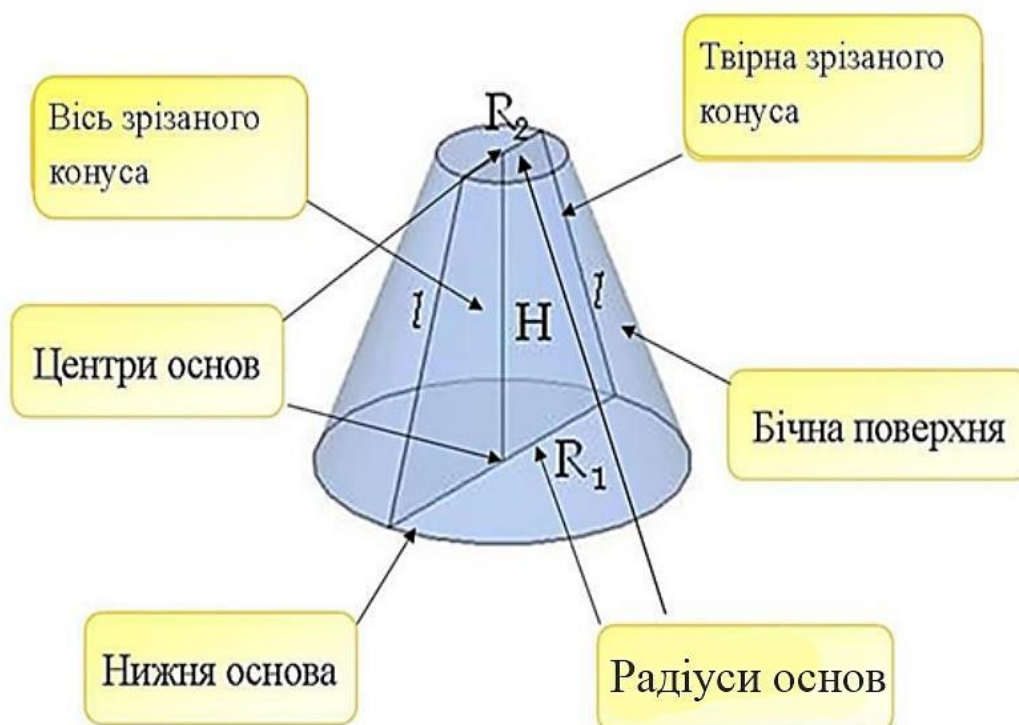
Означення

Якщо задано конус і проведено площину, яка паралельна його основі й перетинає конус, то ця площина відтинає від нього менший конус.

Частина заданого конуса, що залишилася, називається зрізаним конусом.



ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТИ ЗРІЗАНОГО КОНУСА

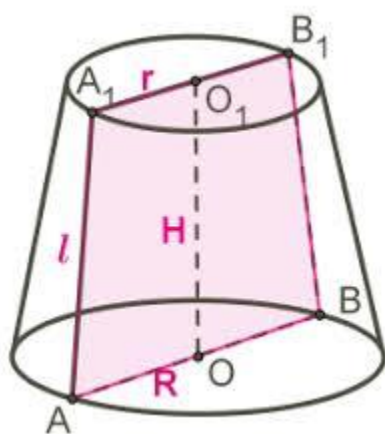


ВЛАСТИВОСТІ ЗРІЗАНОГО КОНУСА

- 1) Твірні конуса рівні.
- 2) Висота зрізаного конуса

$$h = OO_1$$

- 3) При обертанні прямокутної трапеції навколо її осі: OAA_1O_1 – прямокутна трапеція; OO_1 – вісь утвореного зрізаного конуса.



$$S_{\text{біч}} = \pi(R + r)l.$$

Радіус основи конуса	Висота циліндра
$R = OA$	$H = OO_1$

- 4) Площа основи зрізаного конуса:

$$S_{\text{н.осн}} = \pi R^2; S_{\text{в.осн}} = \pi r^2.$$

- 5) Площа бічної поверхні зрізаного конуса:

Площа повної поверхні зрізаного конуса:

$$S_{\text{пов}} = S_{\text{н.осн}} + S_{\text{в.осн}} + S_{\text{біч}} = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi(R + r)l = \pi(R^2 + r^2) + \pi(R + r)l = \pi R(l + R) + \pi r(l + r).$$

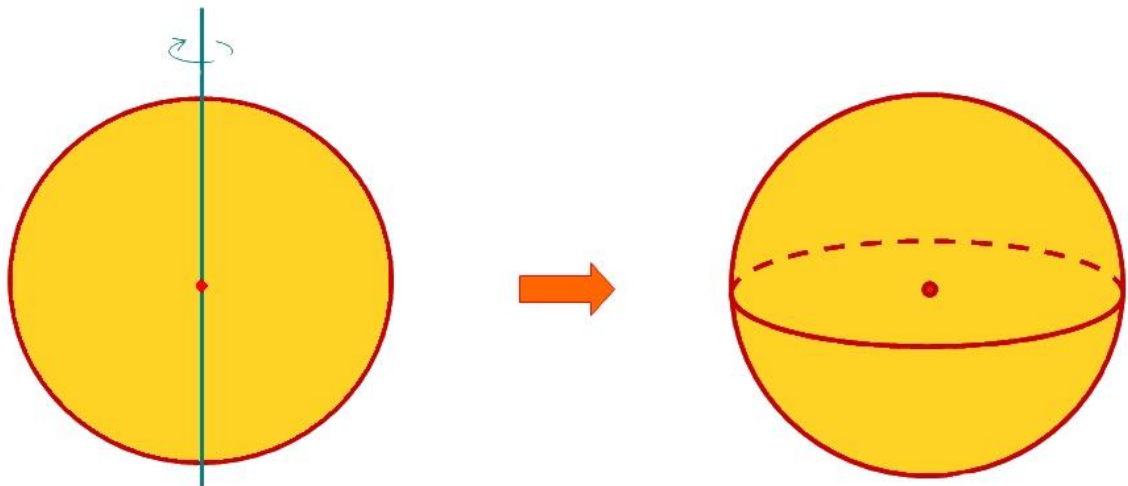
$$S_{\text{пов}} = \pi R(l + R) + \pi r(l + r).$$

б) Об'єм зрізаного конуса: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2).$

СФЕРА ТА КУЛЯ

Означення

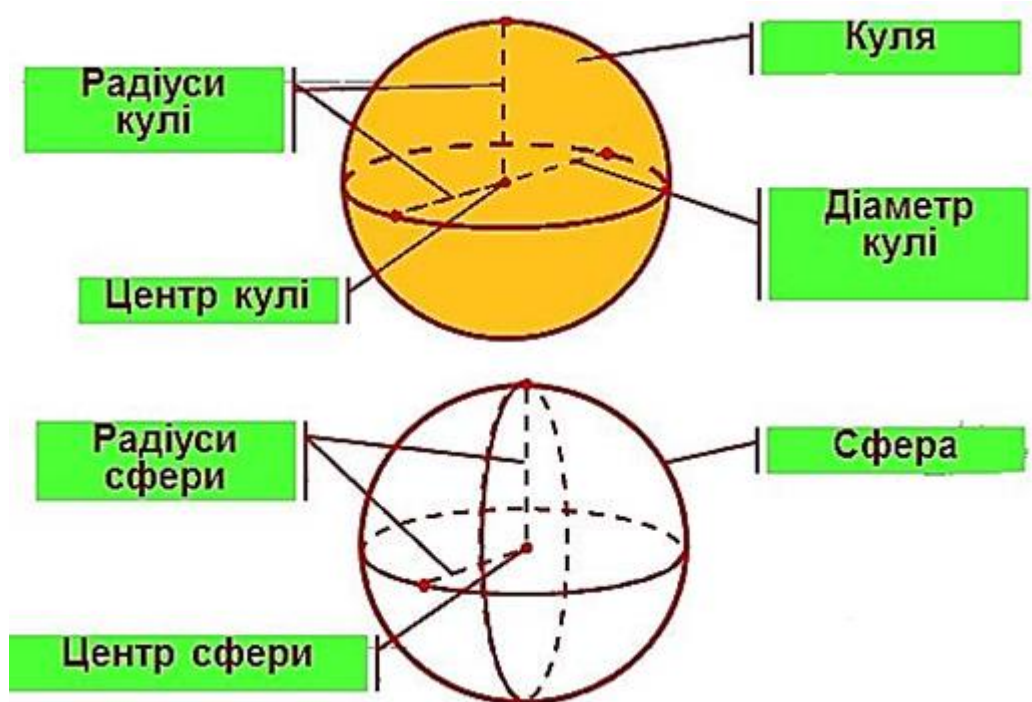
Куля – тіло, утворене обертанням круга навколо його діаметра. Поверхня кулі називається сферою або кульовою поверхнею.



Площа сфери: $S = 4\pi R^2$

Об'єм кулі: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТИ СФЕРИ ТА КУЛІ



Додаток Б

Фрегменти уроків на тему «Тіла обертання»

Урок №1

Тема: Циліндр.

Мета уроку:

•*Навчальна:* закріпити знання учнів про циліндр, удосконалити вміння і навички у застосуванні цих знань при розв'язуванні задач, показати практичне застосування тіл циліндричних форм.

•*Розвивальна:* розвивати вміння працювати самостійно а також самостійно здобувати знання; розвивати логічне мислення, просторову уяву, увагу, пам'ять; формувати зацікавленість у вивченні теми «Циліндр» ; розвивати бажання застосовувати набуті знання, вміння та навички у своїй професії.

•*Виховна:* виховувати позитивне ставлення до навчання, наполегливість, прагнення до самовдосконалення, прищеплювати любов до математики.

Тип уроку: урок закріплення знань, навичок учнів.

Обладнання: моделі циліндрів, презентації до уроку, мультимедійний проектор, комп'ютер, роздатковий матеріал (тексти задач, тести), картки із словами «так», «ні».

План уроку

1. Організаційний момент.
2. Мотивація навчальної діяльності.
3. Закріплення нових знань, умінь та навичок.
4. Розв'язування задач.
5. Підсумки уроку.
6. Домашнє завдання.

Хід уроку

I. Організаційний момент.

Перевірка наявності учнів, налаштування до роботи.

II. Мотивація навчальної діяльності.

Сьогодні на уроці ми поговоримо про циліндри як тіла обертання. Основну увагу будемо приділяти прямим циліндрам, а також розглянемо їх використання в навколишньому світі та у вашій професії. **Слайд 2**



Тема уроку:
Циліндр

Мета уроку:

- закріпити знання про циліндр
- ознайомитися із використанням циліндра у повсякденному житті та у професії учнів
- навчитися розв'язувати задачі з використанням циліндра

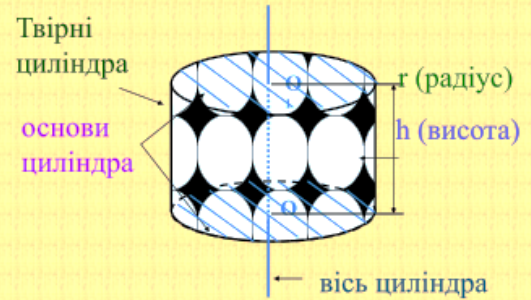
В центрі дошки пишу слово «Циліндр» і пропоную учням згадати слово чи словосполучення, які асоціюються з цими словами.



III. Закріплення нових знань, умінь та навичок.

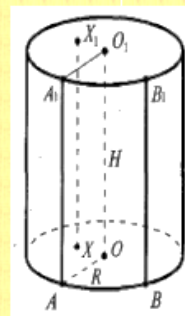
Діяльність вчителя	Діяльність учнів
<p>Отже, до презентації підготувалися добре. А тепер розпочнемо презентацію. Творче завдання ви виконували в парах, і я надаю слово нашим учням: «Ви презентуєте циліндр перед слухачами аудиторії, які про неї мало що знають, або навіть нічого не знають. Я прошу зробити презентацію так, щоб слухачі вас зрозуміли, запам'ятали представлений вами матеріал і їм було цікаво вас слухати.</p>	<p>(Презентацію проводять двоє учнів, використовуючи моделі циліндрів, різні слайди.)</p> <p>1-й учень:</p> <p>До вашої уваги її величність циліндр(демонстрація кількох моделей). Прямим круговим циліндром називається тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони. Слайд 3</p> <div data-bbox="868 875 1509 1368" data-label="Image"> </div> <p>2-й учень:</p> <p>Елементи циліндра: основи, твірні, радіус, висота, вісь. Слайд 4</p>

**Елементи циліндра:
основи, твірні, радіус, висота, вісь.**



1-й учень:

Круги – основи циліндра. Радіуси кругів – радіуси циліндра. OA і O_1A_1 –



Круги – **основи** циліндра.
Радіуси кругів – **радіуси** циліндра.
 OA і O_1A_1 – **радіуси**
Відрізки, що сполучають відповідні
точки кіл кругів, – **твірні**.
 AA_1 ; BB_1 – **твірні** циліндра
Вісь циліндра – пряма, яка
проходить через центри основ.
 OO_1 – **вісь**
Висотою циліндра називається
відстань між площинами його
основ.

радіуси. **Слайд 5**

2-й учень:

Відрізки, що сполучають відповідні точки кіл кругів, – твірні. AA_1 ; BB_1 ; – твірні циліндра.

1-й учень:

Вісь циліндра – пряма, яка проходить через центри основ. OO_1 – вісь.

2-й учень:

Висотою циліндра називається

відстань між площинами його основ.

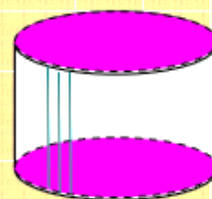
1-й учень:

Властивості циліндра **Слайд 6**

1. Основи циліндра рівні й паралельні.
2. Твірні циліндра паралельні і рівні.
3. Висота циліндра дорівнює твірній.

Властивості циліндра

1. Основи циліндра рівні й паралельні.
2. Твірні циліндра паралельні і рівні.
3. Висота циліндра дорівнює твірній.



2-й учень:

Перерізи циліндра:

- переріз циліндра площиною, паралельною його осі, є прямокутник

- переріз циліндра площиною паралельною його основам, є круг, який дорівнює

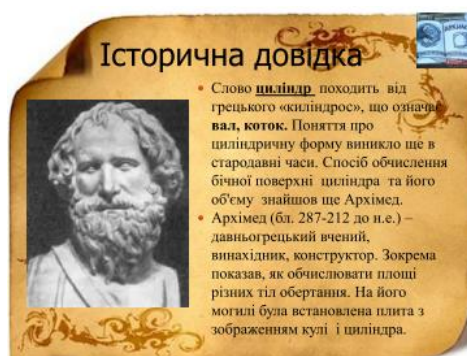
основі

- переріз циліндра площиною, яка проходить через його вісь, називається

осьовим перерізом. **Слайд 7**

«Історична довідка»

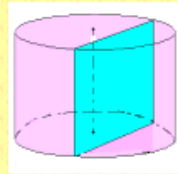
Слайд 8



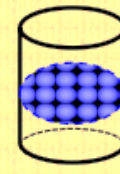
Слово циліндр походить від

грецького «киліндрос», що означає вал, коток. Поняття про циліндричну форму виникло ще в стародавні часи. Спосіб обчислення бічної поверхні циліндра та його об'єму знайшов ще Архімед. Архімед (бл. 287-212 до н.е.) – давньогрецький учений, винахідник, конструктор. Зокрема показав, як обчислювати площі різних тіл обертання. На його могилі була встановлена плита з зображенням кулі і циліндра.

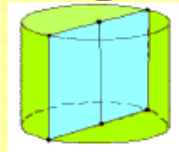
Перерізи циліндра



Переріз циліндра площиною, паралельною його осі, є прямокутник.



Переріз циліндра площиною паралельною його основам, є круг, який дорівнює основі



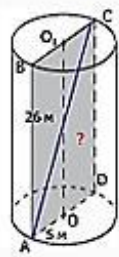
Переріз циліндра площиною, яка проходить через його вісь, називається осьовим перерізом.

IV. Розв'язування задач.

Діяльність вчителя	Діяльність учня
<p>Як ви бачите, тіла циліндричної форми дуже поширені і у вашій професії, тому нам важливо вміти розв'язувати задачі на циліндри.</p> <p>Задача 1. Висота циліндра $AB=6$ см, радіус основ $CB=8$ см. Знайдіть довжину відрізка AC.</p>	<p>Учні розв'язують біля дошки і поступово вчитель показує розв'язання задачі на слайді.</p> <div data-bbox="842 1624 1436 2056" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p style="text-align: center;">Розв'язування задач</p> <p>Задача 1. Висота циліндра дорівнює 5 см. На відстані 4 см від його осі проведено переріз, перпендикулярний основам циліндра. Знайти радіус основи, якщо діагональ перерізу дорівнює 13 см.</p> <p>Дано: циліндр, OO_1 – висота, $OO_1 = 5$ см, AA_1B_1B – переріз циліндра, A_1B_1 – діагональ перерізу, $A_1B_1 = 13$ см. Знайти: AO – ?</p> <p style="text-align: center;">Розв'язання</p> <p>Розглянемо трикутник AKO. $AO = R = \sqrt{AK^2 + KO^2}$ $AK = \frac{1}{2} \cdot A_1B_1$ З трикутника AA_1B_1: $AB = \sqrt{A_1B_1^2 - BB_1^2}$ $AB = \sqrt{169 - 25} = 12$ см $AK = 12 : 2 = 6$ см $AO = \sqrt{6^2 + 16} = \sqrt{52}$ см $= 2\sqrt{13}$ см.</p> <p>Відповідь: $AO = 2\sqrt{13}$ см</p> </div>

Задача 2. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут 60° . Знайти висоту циліндра.

Розв'язування задач



Задача 2. Радіус циліндра - 5 м, а діагональ осьового перерізу - 26 м. Знайдіть: а) висоту циліндра; б) площу осьового перерізу.


Дано: циліндр, OO_1 - висота, OA - радіус, $OA = 5$ м, $ABCD$ - осьовий переріз, $AC = 26$ м, Знайти: а) $OO_1 = ?$; б) $S_{ABCD} = ?$

Розв'язання

$OO_1 = CD$. Трикутник ACD - прямокутний, тому за теоремою Піфагора: $CD^2 = AC^2 - AD^2$

$AD = 2 \cdot 5 = 10$ м, $CD = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24$ м,
 $S_{ABCD} = 24 \cdot 10 = 240$ м².

Відповідь: $OO_1 = 24$ м, $S_{ABCD} = 240$ м².



V. Підсумки уроку.

На сьогоднішньому уроці ми побачили, що математика на кожному кроці нашого життя. Без математики неможливе оволодіння знаннями необхідними для одержання професій.

VI. Домашнє завдання.

Вивчити п.52-56, №196, №198 [18, с.195]

Урок №2

Тема уроку: Куля і сфера. Переріз кулі площиною. Дотична площина до кулі.

Мета уроку:

- Формувати поняття кулі і сфери, центра кулі (сфери), радіуса, діаметра, діаметральної площини, великого кола та круга, дотичної площини до кулі.
- Вчити знаходити елементи кулі (сфери) та визначати взаємне розміщення площин і кулі у просторі.
- Вчити застосовувати знання теореми про переріз кулі площиною для розв'язування задач.
- Виховувати інтерес до геометрії. Активізувати навчання шляхом використання привабливих і швидкозмінних форм подачі інформації.

Обладнання: Інтерактивна дошка, моделі кулі, таблиці з зображенням кулі (сфери), робочий зошит з друкованою основою. Педагогічний програмний засіб (ППЗ) «Геометрія 11».

Тип уроку: засвоєння нових знань.

План уроку


1. Організаційний момент.
2. Мотивація навчальної діяльності. Перевірка домашнього завдання.
3. Актуалізація опорних знань.
4. Вивчення нового матеріалу.
5. Закріплення нових знань, умінь та навичок.
6. Підсумки уроку.
7. Домашнє завдання.

Хід уроку

I. Організаційний момент.

II. Мотивація навчальної діяльності. Перевірка домашнього завдання.

Вирішуються організаційні питання щодо початку уроку. Збирають зошити з домашнім завданням для наступної перевірки. На партах для кожного учня приготовлені робочі зошити з друкованою основою.

 <p>Тіла обертання</p> <p>Куля. Сфера Геометрія 11 клас</p>	<p>Повідомлення теми уроку:</p> <p>Куля і сфера. Переріз кулі площиною. Дотична площина до кулі.</p>
--	--

III. Актуалізація опорних знань.

(З використанням інтерактивної дошки) Учні працюють в зошитах з друкованою основою з наступною перевіркою роботи.

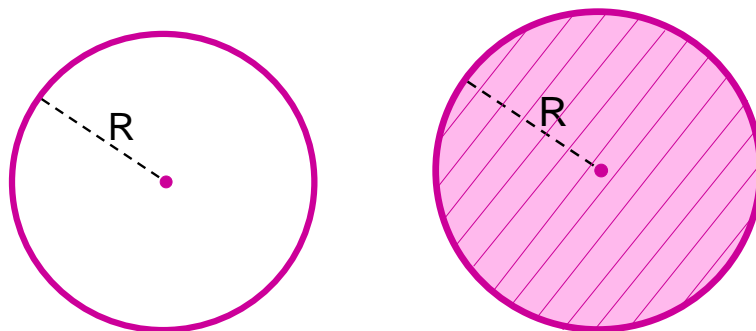
1) Встановити логічні пари:

1. Геометрична фігура, що складається з усіх точок площини, рівновіддалених від однієї точки цієї площини ...
 - A) Куля
 - B) Коло
 - B) Сфера
2. Геометричне тіло, що утворюється від обертання круга (півкруга) навколо діаметра...
 - Г) Круг
 - Д) Інша відповідь
3. Тіло, що складається з усіх точок простору, які знаходяться від даної точки на відстані, не більшій за дану ...
4. Геометрична фігура, яка утворюється від обертання кола (півкола) навколо діаметра ...
5. Поверхня, яка складається із всіх точок простору, що знаходяться на даній відстані від даної точки ...

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					
5					

2) **Встановити відповідні пари:**

1. Довжина кола ...
 - A) $4\pi^2$
2. Площа квадрата із стороною 2π ...
 - B) $2\pi R$
3. Площа круга ...
 - B) πR^2
4. Довжина півкола ...
 - Г) $2\pi R^2$
5. Подвоєна площа круга ...
 - Д) Інша відповідь



	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					
5					

3) **В прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$)**

1. Відношення прилеглого катета до гіпотенузи ...
 - A) $2R$
2. Відношення протилежного катета до гіпотенузи ...
 - B) $\sin \alpha$
 - B) $\cos \alpha$
3. Відношення протилежного катета до ...
 - Г) $\operatorname{tg} \alpha$

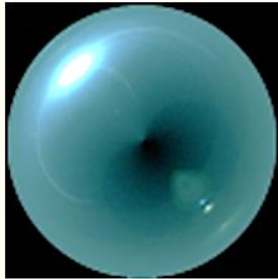
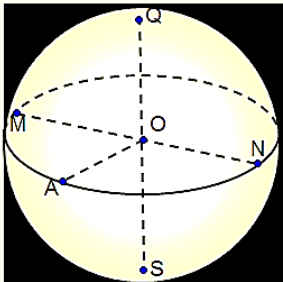
- прилеглого ...
4. Відношення прилеглого катета до протилежного ...
5. Відношення сторони трикутника до синуса протилежного кута

Д) $\operatorname{ctg} \alpha$

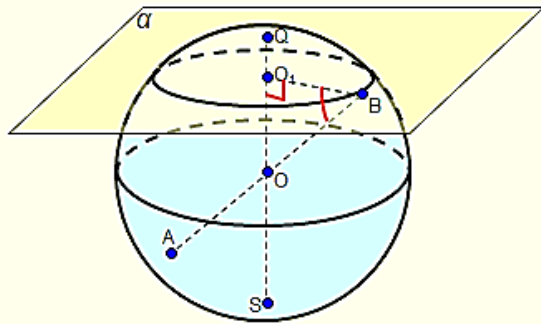
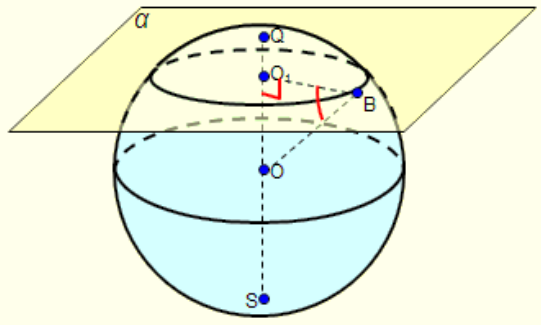
	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					
5					

IV. Вивчення нового матеріалу.

Використовуючи педагогічний програмний засіб (ППЗ) «Геометрія 11», демонструються динамічні фрагменти уроку «Куля і сфера»: означення кулі і сфери, як тіла обертання; означення радіуса та діаметра кулі (сфери); діаметрально протилежних точок; січної площини; формулюються основні властивості перерізів кулі площинами, дається означення дотичної до кулі (сфери) площини та її властивості.

Діяльність вчителя	Діяльність учнів
<p>Куля, сфера.</p>  <p>Кулею називається тіло, що складається з усіх точок простору, які знаходяться від даної точки на відстані, не більшій за дану.</p> <p>Межа кулі називається кульовою поверхнею або сферою.</p> <p>Точки сфери є всі точки кулі, які віддалені від центра на відстань, що дорівнює радіусу.</p>	<p>Учні уважно слухають вчителя і записують означення до зошитів.</p>
<p>Куля, сфера.</p>  <p>O – центр кулі, $OM = ON = OA = OS = OQ = OS$ – радіус, $MN = SQ$ – діаметр.</p>	<p>Учні уважно слухають новий матеріал.</p>

V. Закріплення нових знань, умінь та навичок.

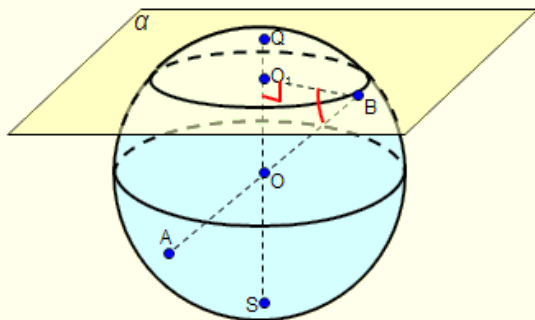
Діяльність вчителя	Діяльність учнів
<p>Закріплюється теорема про переріз кулі площиною: Будь-який переріз кулі площиною є круг. Центр круга є основою перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину.</p> <p>Площина перетинає кулю. Діаметр, проведений в одну із точок поверхні кулі, має довжину $2\sqrt{3}$ см і утворює з площиною кут 60°. Знайдіть довжину лінії перетину.</p> 	<p>Вчитель розв'язує задачу біля дошки, а учні з місця відповідають на питання вчителя.</p>
<p>Закріплення теореми про переріз кулі площиною. Обернена задача розв'язується з коментуванням. Учні працюють в робочих зошитах.</p> <p>Площина перетинає кулю. Площа перерізу дорівнює 2π см². Знайти радіус кулі, якщо кут нахилу цього радіусу до площини перерізу – 45°.</p> 	

Закріплення теореми про переріз кулі площиною.

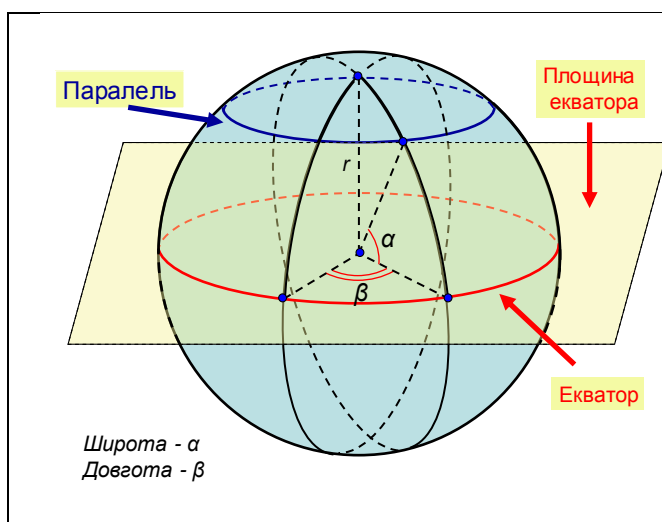
Розв'язування задачі записується на дошці.

Учні працюють в робочих зошитах.

Площина перетинає кулю. Діаметр, проведений в одну із точок поверхні кулі, має довжину $2\sqrt{3}$ см і утворює з площиною кут 60° . Знайдіть довжину лінії перетину.



Задача. Розв'язування задач з використанням географічних координат:



1) Знайдіть довжину паралелі, широта якої α , якщо радіус землі (кулі) дорівнює R .

2) Радіус Землі 6,4 тис. км. Який шлях проходить за добу внаслідок обертання землі місто Київ. Широта якого $50^\circ 27'$?

VI. Підсумок уроку

- Що називається кулею? Сферою?
- Чому ці геометричні тіла називають тілами обертання?
- Назвіть основні елементи кулі та сфери.
- Чим являється переріз кулі площиною?
- Де лежить центр цього перерізу?
- Яке взаємне розташування площини і кулі?
- Яка площина називається дотичною до кулі площиною?
- Скільки спільних точок має з кулею дотична площин



VII. Домашнє завдання:

п. 58 -61, Теорема (Про переріз кулі з площиною), № 210, 212 [18, с.198];

Творче завдання: На яку найбільшу кількість частин можуть розділити простір поверхня куба та сфери?

Додаток В

Диференційована система завдань

з теми «Обчислення об'ємів тіл обертання за допомогою інтеграла»

1 рівень

- 1.1. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі OX фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$. ($\frac{15}{2}\pi$ куб. од.)
- 1.2. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі OX фігури, обмеженої лініями $y = x^3$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$. ($\frac{128}{7}\pi$ куб. од.)
- 1.3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі OX фігури, обмеженої лініями $y = 1 - x^2$, $y = 0$. ($\frac{16}{15}\pi$ куб. од.)
- 1.4. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі OX фігури, обмеженої лініями $y = \frac{1}{2}x^3 + 4$, $x = -2$, $x = 0$. ($\frac{198}{7}\pi$ куб. од.)
- 1.5. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі OX фігури, обмеженої лініями $y = -\sqrt[4]{x}$, $x = \frac{1}{16}$, $x = 16$, $y = 0$. ($\frac{1365}{32}\pi$ куб. од.)
- 1.6. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі OX фігури, обмеженої лініями $y = (x - 2)^2$, $y = 4$. ($\frac{256}{5}\pi$ куб. од.)
- 1.7. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі OX фігури, обмеженої лініями $y = e^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$. ($\frac{1}{2}e^{-2}(e^4 - 1)\pi$ куб. од.)
- 1.8. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі OX фігури, обмеженої лініями $y = -\sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 6$, $y = 0$. ($\frac{35}{2}\pi$ куб. од.)
- 1.9. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі OX фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 3$, $x = 2$, $x = 5$, $y = 0$. ($\frac{4398}{5}\pi$ куб. од.)

1.10. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі OX фігури, обмеженої лініями $x = y^4$, $x = 16$. ($\frac{8192}{9}\pi$ куб. од.)

2 рівень

2.1. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі абсцис фігури, обмеженої кривою $y = \sin(x + 1)$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$

$$\left(\left(-\frac{1}{2}\pi \sin \frac{2\pi}{3} \cos 2 \right) \text{ куб. од.} \right)$$

2.2. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі абсцис фігури, обмеженої кривою $y = \sin(x) - 1$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6}$.

$$\left(\left(\frac{1}{4}\pi(2\pi - \sqrt{3}) \right) \text{ куб. од.} \right)$$

2.3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі абсцис фігури, обмеженої кривою $y = \cos(x) - 2$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{6}$.

$$\left(\left(\frac{1}{4}\pi(6\pi + \sqrt{3} - 16) \right) \text{ куб. од.} \right)$$

2.4. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі абсцис фігури, обмеженої кривою $y = \operatorname{tg}(x - 3)$, $y = 0$, $x = 0$; $x = 1$.

$$\left(\left(\pi(\operatorname{tg}(3) - \operatorname{tg}(2) - 1) \right) \text{ куб. од.} \right)$$

2.5. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі абсцис фігури, обмеженої кривою $y = |x - 1|$, $y = 0$, $x = 0$; $x = 2$.

$$\left(\frac{2}{3}\pi \text{ куб. од.} \right)$$

2.6. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі абсцис фігури, обмеженої кривою $y = \sin(2x)$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$.

$$\left(\frac{1}{4}\pi^2 \text{ куб. од.} \right)$$

- 2.7. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі абсцис фігури, обмеженої кривою $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x\right)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$.
 $\left(\left(\sqrt{27} - \pi\right)\pi\right)$ куб. од.)
- 2.8. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі абсцис фігури, обмеженої кривою $y = |-x| + 3$, $y = 0$, $x = -5$, $x = 5$.
 $\left(\frac{250}{3}\pi\right)$ куб. од.)
- 2.9. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі абсцис фігури, обмеженої кривою $y = |\cos x|$, $y = 0$, $x = -\pi$, $x = \pi$.
 (π^2) куб. од.)
- 2.10. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі абсцис фігури, обмеженої кривою $y = e^{-\frac{x}{3}}$, $y = 0$, $x = -5$, $x = 0$.
 $\left(\frac{1}{2}3e^3\sqrt[3]{e} - 3\right)\pi$ куб. од.)

3 рівень

- 3.1 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = 1 - x^2$; $y = (1 - x)^2$ навколо вісі OX . $\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ куб. од.)
- 3.2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = \sqrt{x + 3}$; $y = (x + 3)^2$ навколо вісі OX . $\left(\frac{3}{10}\pi\right)$ куб. од.)
- 3.3 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = -(x + 2)$; $y = x^2 + 8x + 16$ навколо вісі OX .
 $\left(\frac{72}{5}\pi\right)$ куб. од.)
- 3.4 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = 6 - \frac{3}{2}x^2$; $y = \frac{5}{2}x^2 + 2$ навколо вісі OX . $\left(\frac{656}{15}\pi\right)$ куб. од.)
- 3.5 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x$; $y = x^{\frac{2}{3}}$, $x=0$, навколо вісі OY . $\left(\frac{1}{36}\pi\right)$ куб. од.)

- 3.6 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = \sqrt{x}$; $y = |(x - 4)^2 - 1|$, на інтервалі $[1; 2]$ навколо вісі OX . ($\frac{104}{15}\pi$ куб. од.)
- 3.7 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = \cos x$; $y = \sin x$, $x = 0$ на інтервалі $[0; \frac{\pi}{4}]$ навколо вісі OX . ($\frac{1}{2}\pi$ куб. од.)
- 3.8 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = \frac{4}{x}$; $y = \frac{1}{4}x^3$ на інтервалі $[1; 2]$ навколо вісі OX . ($\frac{759}{112}\pi$ куб. од.)
- 3.9 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = 6 - x^2$; $y = |x|$ навколо вісі OX . ($\frac{1312}{15}\pi$ куб. од.)
- 3.10 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 20$; $y = |x^2 - 12x + 35|$ на інтервалі $[5; 7]$ навколо вісі OX . ($\frac{251}{30}\pi$ куб. од.)