МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри
________ В.В. Корольський
«___» _____________2018 р.

Реєстраційний № _______
«___» ____________ 2018р.

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ» НА ПОГЛИБЛЕНОМУ РІВНІ В КУРСІ АЛГЕБРИ ТА ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм-13
ступінь вищої освіти магістр
спеціальності: 014.04 середня освіта (математика)
Іванової Олени Анатоліївни
Керівник:
кандидат пед. наук, ст. викладач
Дереза Ірина Сергіївна

Оцінка:
Національна шкала__________________
Шкала ECTS____ Кількість балів ______
Голова ЕК_______ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Члени ЕК _______ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

_______ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

_______ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

_______ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2018

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. У період стрімкого розвитку суспільства, постає необхідність зміни традиційної парадигми освіти і розроблення єдиної стратегії, що орієнтована на формування і розвиток у підростаючого покоління необхідних навичок життя. Інформаційне суспільство потребує людей здатних до пошуку, самоосвіти упродовж життя, творчого використання отриманих знань, умінь та навичок, самостійності при прийнятті рішень.

Один зі шляхів оновлення змісту сучасної школи є її орієнтація на компетентнісний підхід. Проблему вдосконалення системи освіти шляхом впровадження компетентнісного підходу активно підтримує переважна більшість педагогів-науковців і освітян-практиків. У своїх працях аспекти окресленої проблеми розкривають такі науковці як: Н. М. Бібік [5], Г. Ф. Звєрєва [18], О. О. Клименко [20], О. В. Овчарук [38], С. А. Раков [45] та інші.

Компетентнісний підхід необхідно реалізовувати на всіх рівнях навчання учнів, при вивченні ними всіх навчальних предметів. В реаліях сьогодення для продуктивної діяльності в інформаційному світі потрібна ґрунтовна математична підготовка, оскільки, немає жодної області в математиці, яку не можна застосувати до явищ дійсного світу. Тому необхідно приділяти особливу увагу формуванню у учнів математичної компетентності.

Математична компетентність – вміння бачити і застосовувати математику в реальному житті, а для будь-якого спеціаліста це необхідний елемент його загальної культури [45, с. 15].

При поглибленому вивченні математики є широкі можливості забезпечити не тільки міцне та свідоме оволодіння системою математичних знань та умінь учнями, а й формувати навички та уміння, потрібні у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності.

Розділ алгебри та початків аналізу «Похідна та її застосування» займає значне місце у шкільному курсі математики та на поглибленому рівні його вивчення дає змогу розвивати в учнів просторове та логічне мислення, алгоритмічну, інформаційну та математичну культуру, формує такі позитивні якості учня, як наполегливість, культура думки і поведінки, обґрунтованість суджень тощо. Дана тема має широке застосування в практичній діяльності, а тому займає важливе місце в формуванні математичної компетентності учнів. За її допомогою можна вирішувати завдання з біології, хімії, фізики, техніки, економіки та багатьох інших галузей. Тому незалежно від того, яку професію школярі оберуть в подальшому житті, вони повинні засвоїти базові знання з даної теми, якими будуть користуватися в майбутньому і, при необхідності, поглиблювати.

Проблемою вивчення похідної в шкільному курсі математики займалися такі педагоги-математики, як Т. В. Думанська, Л. С. Капкаєва, О. Е. Корнійчук, В. Д. Погребний, З. І. Слєпкань та інші, всі вони дотримуються думки, що дана тема має велике значення у розвитку учня.

Вище сказане зумовило вибір теми кваліфікаційної роботи: *«Методика навчання теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні в курсі алгебри та початків аналізу»*.

Мета дослідження: удосконалити методику навчання теми «Похідна та її застосування» на засадах компетентнісного підходу в класах з поглибленим вивченням математики.

Мета реалізовується через встановленні нами **завдання**:

1. Проаналізувати психолого-педагогічну, методичну та навчальну літературу з теми дослідження, розкрити теоретичні основи компетентнісно-орієнтованого навчання.
2. Провести логіко-математичний аналіз теми «Похідна та її застосування» з точки зору можливості формування математичної та дослідницької компетентностей.

3. Підібрати і обґрунтувати форми, методи і засоби компетентнісного підходу у навчанні теми «Похідна та її застосування».
4. Розробити систему рівневих завдань, орієнтованих на формування предметної математичної компетентності старшокласників при вивченні теми «Похідна та її застосування».
5. Розробити факультативний курс, спрямований на навчання похідної в курсі алгебри та початків аналізу на засадах компетентнісного підходу.

Об'єкт дослідження – навчання алгебри і початків аналізу на поглибленому рівні у закладах загальної середньої освіти.

Предмет дослідження – методика навчання теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні математичної підготовки старшокласників.

Для розв'язання поставлених у дослідженні завдань використано комплекс взаємопов'язаних **методів дослідження**:

- *теоретичні* – аналіз психолого-педагогічної, методичної, наукової та навчальної літератури з окресленої проблеми;
- *емпіричні* – аналіз досвіду роботи вчителів і результатів навчання учнів з огляду на предмет дослідження.

Практичне значення дослідження. Матеріали кваліфікаційної роботи можуть бути корисними для вчителів математики в питаннях реалізації компетентнісного підходу до навчання теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні в курсі алгебри та початків аналізу, для студентів – майбутніх вчителів математики під час проходження педагогічної практики.

Апробація результатів дослідження. Основні положення кваліфікаційної роботи оприлюднено у тезах «Використання СКМ GeoGebra під час навчання учнів теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні вивчення математики» [13] до конференції «Тенденції та перспективи розвитку науки і освіти в умовах глобалізації», та статті у віснику міжнародного дослідницького центру «Людина: мова, культура, пізнання» на тему «Формування дослідницької компетентності учнів при вивченні теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні» [14].

Структура та обсяг роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів, загальних висновків, списку використаних джерел і додатків. Зміст кваліфікаційної роботи викладено на 87 сторінках. Повний обсяг роботи – 113 сторінок.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ОСОБЛИВОСТЕЙ НАВЧАННЯ ПОХІДНОЇ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ НА ПОГЛИБЛЕНОМУ РІВНІ В КУРСІ АЛГЕБРИ ТА ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

1.1. Компетентнісний підхід у навчанні математики

Система освіти знаходиться у стані постійного оновлення та пошуку, одним із впроваджень є компетентнісний підхід до освіти, який включає в себе формування компетентностей. Перед вчителем постає проблема реалізації компетентнісного підходу у навчальному процесі, зокрема, на уроках алгебри і початків аналізу, при вивченні теми «Похідна та її застосування».

Відокремимо поняття «компетенція» та «компетентність». Г. Ф. Звєрєва говорить про те, що компетенція – це сукупність взаємопов'язаних якостей особистості (знань, умінь, навичок, способів діяльності), які є заданими до відповідного кола предметів і процесів та необхідними для якісної продуктивної дії по відношенню до них, а в свою чергу компетентність – це володіння людиною відповідною компетенцією, що містить її особистісне ставлення до предмета діяльності [11, с. 7]. Тобто компетенція є нормативною, ідеальною метою освітнього процесу, що моделює якості випускника, а компетентність – його результатом, рівнем прояву (сформованості). Поняття «компетенція» пов’язане із змістом сфери діяльності, а «компетентність» – з особистістю, із здатністю особи ефективно діяти у стандартних і нестандартних ситуаціях. У компетентності поєднуються об’єктивно визначені нормативними документами система знань, умінь і навичок, а також особистісна складова – інтереси, прагнення, ціннісні орієнтації, мотиви самореалізації індивіда [11, с. 57].

На 2018-2019 навчальний рік навчальна програма з математики зазнає певних уточнень щодо учнівських компетентностей. Якщо у 2017-2018 році вчитель здебільшого повинен був приділяти увагу навчанню математиці, формуванню інтересу до предмету та інтелектуальному розвитку особистості, мова йшла і про формування життєвих і соціально-ціннісних компетентностей, то у 2018-2019 році навчання математики має зробити певний внесок у формування ключових компетентностей, до яких відносять:

- Спілкування державною (і рідною у разі відмінності) мовами.
- Спілкування іноземними мовами.
- Математична компетентність.
- Основні компетентності у природничих науках і технологіях.
- Інформаційно-цифрова компетентність.
- Уміння вчитися впродовж життя.
- Ініціативність і підприємливість.
- Соціальна та громадянська компетентності.
- Обізнаність та самовираження у сфері культури.
- Екологічна грамотність і здорове життя[34, с. 3-6].

Звісно вчитель математики на уроках повинен приділяти увагу формуванню в учнів всіх перелічених компетентностей, але перш за все математичної компетентності.

М. С. Головань відзначає, що у наукових публікаціях і нормативних документах немає однозначного трактування поняття «математична компетентність». Одні автори тлумачать математичну компетентність як якість особистості, інші – як уміння застосовувати знання та уміння на практиці; як поєднання математичних знань, умінь, досвіду та здібностей людини; як досвід діяльності; як особистісне утворення, що характеризує здатність учня здійснювати математичну діяльність [10, с. 36]. Розглянемо декілька трактувань поняття «математична компетентність» різними педагогами-науковцями у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1.

Трактування поняття «математична компетентність»

Трактування	Автори
Інтегративна особистісна якість, заснована на сукупності фундаментальних математичних знань, практичних умінь і навичок, що свідчать про готовність і здатність здійснювати математичну діяльність [24].	Л. Д. Кудрявцев
Уміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, уміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень [45, с. 15]	С. А. Раков
Системна властивість особистості суб'єкта, що характеризує його глибоку обізнаність в предметній області знань, особистісний досвід суб'єкта, націленого на перспективність у роботі, відкритого до динамічного збагачення, здатного досягати значущих результатів і якості в математичній діяльності [53, с. 68]	Н. Г. Ходирєва

С. А. Раковим до предметно-галузевих математичних компетентностей запропоновано віднести такі компетентності:

1. Процедурна компетентність – уміння розв’язувати типові математичні задачі.
2. Логічна компетентність – володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень.

3. Технологічна компетентність – володіння сучасними інформаційно-комунікаційними технологіями підтримки математичної діяльності.
4. Дослідницька компетентність – володіння методами дослідження соціально та індивідуально значущих задач за допомогою ІКТ та математичних методів.
5. Методологічна компетентність – уміння оцінювати доцільність використання математичних методів та засобів ІКТ для розв'язання [46, с 15-17].

На нашу думку, формування саме дослідницької компетентності у школярів є одним з першочергових завдань, що стоять перед сучасною системою освіти, оскільки вона виховує наполегливість в учня, допомагає закріпити і поглибити знання, поліпшує ефективність та, як наслідок, якість навчання, формує здатність і готовність розв'язувати складні нестандартні задачі, що загалом підвищує інтерес до предмету. І тема «Похідна та її застосування» має широкі можливості у формуванні даної компетентності.

З точки зору компетентнісного підходу дослідницька компетентність розглядається, як інтегральна характеристика особистості учня, що виражається в готовності і здатності самостійно освоювати і отримувати нові знання в результаті перенесення смислового контексту діяльності від функціонального до перетворювального, базуючись на наявних знаннях, вміннях, навичках і способах діяльності [11, с. 56].

Ж. В. Рассказов виділяє наступні структурні компоненти дослідницької компетентності:

- мотиваційний (сформованість інтересу до участі в дослідницькій діяльності і до отримання її результатів);
- інформаційний (володіння вміннями здобувати і обробляти інформацію);

- когнітивний (здатність до використання отриманих знань в різних, в тому числі і в нестандартних ситуаціях, що вимагають дослідницького підходу);
- комунікативний (пов'язаний з уміннями в міжособистісних відносинах, необхідних в дослідницьких колективах);
- рефлексивний (вимагає умінь розпізнавати, оцінювати і аналізувати дослідні явища і ситуації, що виникають в житті, дослідницькі здібності не тільки власні, а й оточуючих людей);
- особистісний (передбачає наявність умінь з приставкою «само-» (самоорганізації, самостійності, самоконтролю, саморозвитку) [37, с. 451-452].

Тобто, дослідницька компетентність передбачає виконання учнями навчальних дослідницьких задач із заздалегідь невідомим для них результатом, направлених на створення уявлень про об’єкт або явище оточуючого середовища, під керівництвом спеціаліста – тобто вчителя.

Необхідність оволодіння математичною компетентність загалом, і дослідницькою компетентністю зокрема, пов'язана з вимогами, які диктує сучасне суспільство. Поява нових форм переробки та отримання інформації, розширення і ускладнення соціального досвіду зумовили значущість даної компетентності. Завдання самого вчителя – організувати дослідницьку діяльність учня, навчити його самостійно здобувати інформацію, формувати власну точку зору, вміти її аргументувати і застосовувати отримані знання на практиці.

Можна зробити висновок, що компетентнісно-орієнтоване навчання спрямоване на практичний результат, що зумовлює принципові зміни в організації освітнього процесу, який бере напрямок на розвиток конкретних цінностей і життєво необхідних знань і умінь учнів.

1.2. Аналіз навчальних програм з математики та підручників для учнів 10-11 класу з алгебри та початків аналізу

Навчальною програмою з математики за 2017-2018 навчальний рік [34] передбачено вивчення алгебри і початків аналізу (АПА) протягом 420 годин, тобто надається 210 годин на навчальний рік, а це 6 годин на тиждень. Тема «Похідна та її застосування» вивчається у 10 класі, на неї умовно відводиться 42 години. У пояснювальній записці зазначено, що дана тема була перенесена до 10 класу нещодавно, тому за відсутністю можливості забезпечити учнів матеріалами вчителю дозволено перенести її до 11 класу, але з 1 вересня 2018 року тему вивчатимуть в 10 класі протягом близько 50 годин, у резерві на навчальний рік знаходиться 22 години і вчитель за потреби може збільшити час вивчення.

На 2018-2019 навчальний рік навчальна програма з математики зазнає певних уточнень щодо формування компетентностей у учнів та наскрізних ліній. Окрім власне математичної компетентності вчителеві на уроках АПА, при викладанні теми «Похідна та її застосування», треба формувати інші дев’ять компетентностей. У навчальній програмі також виокремлюються наскрізні чотири лінії ключових компетентностей а саме: «Екологічна безпека та сталий розвиток», «Громадянська відповідальність», «Здоров'я і безпека», «Підприємливість та фінансова грамотність» [34].

Також, зазначено, що основною метою вивчення теми «Похідна та її застосування» у класі з поглибленим вивченням математики є ознайомлення учнів з використанням поняття і властивостей похідної для розв’язування задач, зокрема визначення властивостей функції, доведення тотожностей, розв’язування рівнянь, нерівностей та їх систем.

Після вивчення даної теми учні повинні:

— **формулювати** означення похідної та **пояснювати** її геометричний і фізичний зміст;

— **знаходити** кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції; **знаходити** похідні функцій;

— **застосовувати** похідну до знаходження проміжків монотонності та екстремумів функції;

— **знаходити** найбільше і найменше значення функції на проміжку;

— **розв'язувати** прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень;

— **застосовувати** результати дослідження функції за допомогою похідної до розв'язування рівнянь і нерівностей та доведення тотожностей і нерівностей;

— **описувати** поняття опуклості функції та точок перегину;

— **застосовувати** другу похідну до знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину;

— **досліджувати** функції за допомогою першої та другої похідних і використовує одержані результати для побудови графіків функцій [34].

Міністерство освіти і науки (МОН) у переліку навчальних програм, підручників та навчально-методичних посібників [41] для вивчення теми «Похідна та її застосування» на поглиблену рівні в 10 класі пропонує підручник А. Г. Мезляка, Д. А. Номіровського, В. Б. Полонського, М. С. Якіра [29] для 11 класу, оскільки навчальна програма була оновлена, а старі підручники залишись дійсними. На нашу думку, в даному підручнику теоретичний матеріал по введенню понять математичного аналізу запропоновано на доступному для учнів рівні при поглибленому вивченні математики. У навчальному тексті кожного параграфа запропоновані приклади розв'язування однієї або кількох типових задач. Для полегшення роботи з підручником, автори вводять умовні позначення, згідно яких можна з'ясувати, що в підручнику присутня рівнева диференціація завдань, вони містяться в досить великій кількості, і для їх розв'язання в повному обсязі не вистачить часу відведеного на тему, але з іншого боку завдяки цьому у вчителя завжди є широкий вибір задач, які можна запропонувати школярам на уроці і в домашньому завданні.

Деякі параграфи містять рубрику «Коли зроблено уроки», в якій для ознайомлення пропонуються доведення теорем, завдяки цьому можна спонукати учнів до самостійної роботи або використовувати матеріал для навчання учнів у математичних гуртках. Також у підручнику знаходяться короткі відомості про вчених-математиків, що може послугувати у якості мотивації учнів.

Тема «Похідна та її застосування» представлена в другому розділі підручника в параграфах з 8 по 17. Нами виконано логіко-математичний аналіз задачного матеріалу з параграфу 10 який має назву «Правила обчислення похідних», його представлено у таблиці 1.2.

Таблиця 1.2.

Логіко- математичний аналіз системи вправ підручника

Види вправ	**Номери з підручника**			
	1 рівень	2 рівень	3 рівень	4рівень
Вправи для створення мотивації	11	22	45	
Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та умінь	7, 8	16, 17, 20, 21, 28	32, 33, 34, 35, 36, 45	53
Вправи спрямовані на виділення суттєвих властивостей			39, 40, 41, 42, 43, 44	
Вправи на базі яких відбувається ілюстрація понять, що вводяться	12, 13, 14, 15	24, 25, 26		

Продовж. табл. 1.2.

Вправи для забезпечення розпізнавання об'єктів, що входять до обсягу нових понять			37, 38, 46	49, 50, 51, 52
Вправи спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння нових понять	1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10	18, 19, 23, 27, 29, 30	45, 47	48, 53

Отже, розглянувши зазначений підручник, можна зробити висновок, що він містить велику кількість задач різного рівня складності, що дозволяє реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні, формувати пізнавальний інтерес до математики. Також, за допомогою даного різноманіття вправ вчитель має змогу впроваджувати компетентнісний підхід та формувати математичну компетентність. Окремо зазначимо, що учні мають змогу розвивати свої здібності до самоосвіти, оскільки після кожного правила або теореми є приклад, який показує принцип їх застосування.

У 2018-2019 навчальному році почав набувати поширення новий підручник таких авторів як А. Г. Мезляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір [28], він ще знаходиться у стадії друку та не всі школи можуть його отримати у паперовому вигляді, але з ним можна працювати в електронному варіанті. Оскільки у концепцію профільного навчання з 2018-2019 року були внесені зміни і вивчення математики відбувається на двох рівнях – базовому та профільному, то зазначено, що для учнів, які навчалися у 8-9 класах за програмою поглибленого рівня, розроблено навчальну програму з математики для продовження поглибленого вивчення. Тому зазначений підручник [28] для профільного рівня, але надано уточнення, що за ним можуть навчатись учні, які починали вивчення математики на поглибленому рівні з 8 класу, тому він містить більший обсяг теоретичного та практичного матеріалу, ніж звичайний підручник профільного рівня.

При вивченні теми «Похідна та її застосування», також можна користуватись підручниками профільного рівня таких авторів як А. Г. Мезляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір [30], Є. П. Нелін, О. Є. Долгова [35], але в такому разі вчитель повинен буде використовувати більшу кількість додаткових дидактичних матеріалів.

Розглянемо особливості викладання теми «Похідна та її застосування» на профільному та поглибленому рівні.

У 2017-2018 навчальному році програмою з математики пропонується вивчати предмет алгебри і початків аналізу на профільному рівні у двох варіантах. Перший передбачає всього 350 годин на рік протягом 175 годин на семестр, тобто 5 уроків АПА на тиждень, при умові, що геометрія буде викладатись 4 години на тиждень, згідно з другим варіантом алгебра вивчається 420 годин на рік, а це 210 годин в семестр і 6 годин на тиждень, 3 години на тиждень – геометрія. Похідна вивчається як частина теми «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» яка вивчається протягом 36 або 48 годин. Що стосується програми з математики за 2018-2019 навчальний рік, то на курс 10 і 11 класів відведено по 210 годин, тобто 6 уроків на тиждень, також передбачений резерв часу у кількості 24 годин. На тему «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» збільшено час до 54 годин.

Зміст навчального теоретичного матеріалу профільного рівня менший у порівнянні з поглибленим рівнем, це прослідковується і при перегляді підручників. Розглянемо підручник А. Г. Мерзляка, Д. А. Номіровського, В. Б. Полонського, М. С. Якіра [30] профільного рівня для визначення відмінностей. Задачний матеріал підручника теж має чотири рівні складності, але в порівнянні з поглибленим рівнем пропонується менша кількість творчих завдань, прикладів на доведення, вправ спрямованих на виділення суттєвих властивостей. Деякі теореми вводяться без доведення, але автори роблять зауваження, що з доведенням учні можуть ознайомитись у підручнику поглибленого рівня для 11 класу. У даному підручнику [30] також доступно вводиться теоретичний матеріал та пропонуються приклади вправ для самостійного опрацювання, на ознайомлення з темою, надана велика кількість задач, але у деяких випадках недостатня для викладання на рівні поглибленого вивчення.

Для порівняння об'єму теоретичного матеріалу на профільному та поглибленому рівнях, пропонуємо вам розглянути таблицю 1.3., де відмінності у програмі виділені курсивом.

Зазначимо, що більша кількість годин на профільному рівні обумовлена тим, що в тему «Похідна та її застосування» входить матеріал про границю та неперервність функції, а на поглибленому рівні на вивчення границі відводиться окрема тема обсягом в 18 годин.

Таблиця 1.3.

Порівняння навчальної програми з теми «Похідна та її застосування» для профільного та поглибленого рівнів 2018-2019 навчальний рік

Профільний рівень 54 години	Поглиблений рівень 50 годин
• Задачі, які приводять до поняття похідної. • Похідна функції, її геометричний і фізичний зміст. Рівняння дотичної до графіка функції. Правила обчислення похідних. Складена функція. Похідна складеної функції. • Похідні степеневої та	• Задачі, які приводять до поняття похідної. • Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст. Рівняння дотичної до графіка функції. Правила обчислення похідних. Складена функція. Похідна складеної функції *та оберненої функції.* • Похідна степеневої,

Продовж. табл. 1.3.

тригонометричних функцій.	тригонометричних *та обернених тригонометричних функцій.* • *Основні теореми диференціального числення.*
• Ознака сталості функції. Достатні умови зростання і спадання функції. Екстремуми функції. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.	• Ознака сталості функції. Достатні умови зростання й спадання функції. Екстремуми функції. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.
• Застосування похідної для розв'язування рівнянь та доведення нерівностей.	• Застосування похідної для розв'язування рівнянь і доведення нерівностей *та тотожностей.*
• Друга похідна. Поняття опуклості функції. Точки перегину.	• *Похідні вищих порядків*. Поняття опуклості функції та точки перегину.
• Знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину.	• Знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину.
• Застосування першої та другої похідних до дослідження функцій і побудови їх графіків.	• Застосування першої та другої похідних до дослідження функцій та побудови їх графіків. *[Нерівність Йєнсена та її застосування.]*
• Застосування похідної до розв'язування задач, зокрема прикладного змісту.	• Застосування похідної до розв'язування задач, зокрема прикладного змісту.

Отже, на профільному рівні учням не пропонується вивчати похідну оберненої функції (похідну обернених тригонометричних функцій), основні теореми диференціального числення, нерівність Йенсена та її застосування, також не розглядається способи застосування похідної для розв’язування тотожностей та не передбачено роботу з похідними порядком вищим за другий.

При вивченні теми вчитель повинен обрати правильну мотивацію для учнів, яка безперечно буде викликати інтерес і спонукати дітей до активної праці на уроці та вдома. Такою мотивацією також може стати інформація про те, що вміння «працювати» з похідною знадобиться на зовнішньому незалежному оцінюванні (ЗНО) і може принести учню велику кількість балів. Сумарний тестовий бал визначає місце абітурієнта в рейтингу вступників, а значить, надає можливість навчатись за державним замовленням.

Коли учні переходять до старшої школи, перед ними постає питання про майбутні іспити. Учні, які навчаються за математичним профілем скоріш за все будуть обирати у вищих навчальних закладах спеціальності пов’язані з математикою, і їм доведеться здавати ЗНО з цієї дисципліни. Тому вчителя на уроках повинні особливо приділяти увагу вправам, які можуть зустрітись в зовнішньому незалежному оцінюванні.

Ми проаналізували програму зовнішнього незалежного оцінювання з математики 2018 року [42], затверджену Міністерством освіти і науки України, та виділили вміння з теми «Похідна та її застосування», якими учень повинен володіти на момент здачі ЗНО (таблиця 1.4.).

Таблиця 1.4.

Витяг з програми ЗНО з математики 2018 року

Назва розділу, теми	**Учень повинен знати**	**Предметні вміння та способи навчальної діяльності**
Розділ: ФУНКЦІЇ		
Похідна функції, її	– означення похідної	– знаходити кутовий

Продовж. табл. 1.4.

геометричний та фізичний зміст. Похідні елементарних функцій. Правила диференціювання	функції в точці; – фізичний та геометричний зміст похідної; – рівняння дотичної до графіка функції в точці; – таблиця похідних елементарних функцій; – правила знаходження похідної суми, добутку, частки двох функцій; – правило знаходження похідної складеної функції	коефіцієнт і кут нахилу дотичної до графіка функції в точці; – знаходити похідні елементарних функцій; – знаходити числове значення похідної функції в точці для заданого значення аргументу; – знаходити похідну суми, добутку і частки двох функцій; – знаходити похідну складеної функції; – розв'язувати задачі з використанням геометричного та фізичного змісту похідної

Бачимо, що в ці вимоги не входить весь матеріал з теми «Похідна та її застосування», але від учня все ж таки потребується значна кількість вмінь, якими він повинен оперувати. І при вивченні теми вчитель може зазначати, що ці вміння також відпрацьовуються в більш складних задачах, як, наприклад, на дослідження функції.

Звичайно не має гарантії, що задачі відповідні до тих, які зазначені в програмі [42] будуть зустрічатись у самому ЗНО, тому ми також проаналізувавши завдання, які зустрічались на зовнішньому незалежному оцінюванні [52] з 2010 по 2018 рік і з’ясували, що вправи на застосування похідної обов’язково зустрічаються на рівні відкритої форми з короткою або розгорнутою відповіддю, тобто якщо учень претендує на високий бал, то він повинен приділити увагу темі «Похідна та її застосування». Треба також зазначити, що тестові завдання з вибором однієї правильної відповіді можуть містити вправи на знаходження похідної функції.

Так наприклад програма ЗНО 2017 року містить наступне завдання:

Задано функцію $f(x) = x^2 + 3x - 10$.

1	Визначте координати точок перетину графіка функції f з осями координат.
2	Побудуйте графік функції f.
3	Знайдіть похідну функції f.
4	Визначте кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою $x_0 = -1$.

Рис. 1.1. Завдання ЗНО 2017

Як бачимо, щоб виконати дане завдання необхідно знати таблицю похідних, правила обчислення похідної, бути ознайомленим з геометричним змістом похідної та вміти знаходити кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в точці.

Крім цього також зустрічаються задачі на знаходження похідної від складеної функції та застосування правила знаходження похідної суми, добутку, частки двох функцій; на обчислення значення похідної у точці; складання рівняння дотичної до функції у заданій точці.

У ЗНО 2018 року теж було завдання на знаходження похідної (рис.1.2.).

Укажіть похідну функції $f(x) = x(x^3 + 1)$.

А	Б	В	Г	Д
$f'(x) = 4x^3 + 1$	$f'(x) = 4x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$f'(x) = 3x^2 + 1$	$f'(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2}$

Рис. 1.2. Завдання ЗНО 2018

Отже, ми проаналізували навчальні програми з математики за 2017-2018 та 2018-2019 навчальні роки, визначили основні підручники які використовуються при вивчені курсу АПА у 10 класі, порівняли особливості викладання теми «Похідна та її застосування» на поглибленому та профільному рівнях, розглянули програму ЗНО та виділили завдання, які розв'язуються за допомогою похідної.

Можемо сказати, що традиційна методика та сучасні підходи до навчання, які передбачають впровадження компетентнісного підходу у навчальний процес, дають змогу вчителю забезпечити якісну математичну підготовку учнів. Але треба наголосити, що це можливо за умови педагогічної майстерності вчителя. С. У. Гончаренко визначає це поняття як характеристику високого рівня педагогічної діяльності та підкреслює, що педагогічна майстерність ґрунтується на високому фаховому рівні педагога, його загальній культурі та педагогічному досвіді, вказуючи, що необхідними умовами педагогічної майстерності є гуманістична позиція педагога й професійно значимі особистісні риси і якості [12, с. 251].

Впровадження компетентнісного підходу у навчання математики, створює умови для всебічного розвитку дитини, і при цьому від вчителя вимагається розвивати національну свідомість учнів, вміння алгоритмічно мислити, навчати розпізнавати проблеми, що виникають у навколишній дійсності і розв'язувати їх засобами математики, створювати умови для формування позитивних якостей особистості.

1.3. Логіко-математичний аналіз теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні навчання математики з точки зору реалізації компетентнісного підходу

Проведемо логіко-математичний аналіз теми «Похідна та її застосування» з точки зору реалізації компетентнісного підходу, використовуючи підручник А. Г. Мезляка, Д. А. Номіровського, В. Б. Полонського, М. С. Якіра поглибленого рівня навчання [29].

Задачі, що приводять до поняття похідної

Існує декілька методів введення поняття «похідна», наприклад, спочатку вводяться поняття приросту функції і приросту аргументу або вивчення похідної починається з введення границі послідовності і границі функції в точці, або підведення до визначення похідної починається з розгляду руху матеріальної точки і визначення її миттєвої швидкості. У підручнику А. Г. Мерзляка та інших [29] спочатку вводиться поняття приросту функції та її аргументу, тож розглянемо цей спосіб.

Вводиться функція $y = f(x)$ та довільна фіксована точка x_0, яка належить області визначення даної функції. Також зазначають, що x – довільна точка, що лежить в деякому околі точки x_0, а різниця $(x - x_0)$ називається приростом незалежної змінної (аргументу) в точці x_0, і позначається Δx, тобто:

$$\Delta x = x - x_0.$$

Звідки отримується рівність $x = \Delta x + x_0$. Кажуть також, що початкове значення аргументу x_0 отримало приріст Δx. Внаслідок цього значення функції f зміниться на величину $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Ця різниця називається приростом функції f в точці x_0, і позначається Δf, отже маємо:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

$$\Delta f = f(x) - f(x_0).$$

Також зазначається, що для приросту функції $y = f(x)$ прийняте позначення Δy, тобто $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Для більшої наочності учням пропонується рисунок 1.3.

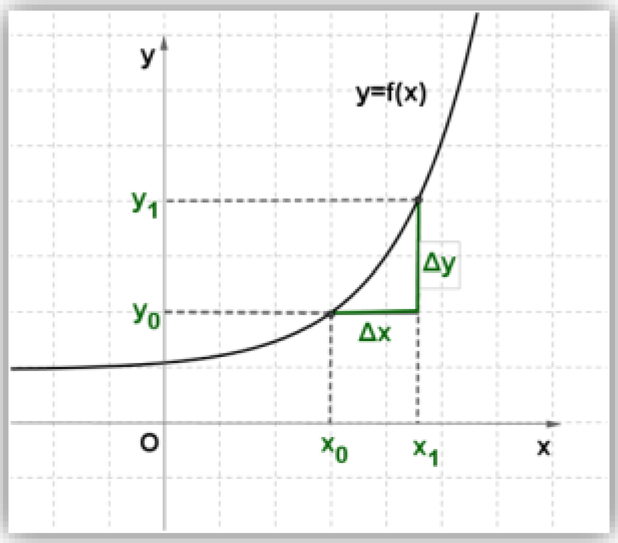


Рис. 1.3. Приріст функції

Для закріплення та кращого розуміння матеріалу розглядаються задачі на знаходження приросту деякої елементарної функції із даним приростом аргументу і фіксованою точкою. Найчастіше для прикладу використовують функції $f(x) = x^2,\ f(x) = \frac{1}{x}$ або функції виду $f(x) = kx + b$.

Перед введенням поняття «похідна» розглядають задачі про миттєву швидкість нерівномірного прямолінійного руху матеріального об’єкта та про дотичну прямої до графіка функції в заданій точці. Дані задачі спрямовані на формування не тільки математичної компетентності, а й основних компетентностей у природничих науках і технологіях, оскільки оперують поняттями, що використовуються у фізиці.

Доцільно при розв’язанні задач, що приводять до поняття похідної, діяти за алгоритмом, як це показано у підручнику В. В. Корольського [22, с. 19] розробленого для вищих навчальних закладів, але при цьому зручніше буде адаптувати для школярів запропоновані ним задачі за допомогою використання наочних даних, наближених до життєвих ситуацій, замість абстрактних об’єктів.

Розглянемо задачу про миттєву швидкість діючи за алгоритмом.

Умова задачі. Нехай автомобіль, рухається прямолінійною ділянкою дороги в одному напрямку зі змінною швидкістю, протягом часу t (тобто на проміжку часу [0;t]) за законом $s = s(t)$, який дозволяє визначити положення автомобіля в будь-який момент часу t_0. Потрібно визначити швидкість автомобіля в будь-який момент часу.

Розв'язання.

1) В заданий момент часу t_0 задають приріст часу Δt, тобто розглядають проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$.
2) Обчислюють приріст відстані Δs, яку проїде автомобіль за час Δt:
$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$$
3) Обчислюють середню швидкість v_c руху автомобіля протягом часу Δt:
$$v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$
4) Обчислюють миттєву швидкість руху, яка відповідає часу $t = t_0$:
$$v(t_0) = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ (t \to t_0)}} v_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

За допомогою такого алгоритму учні вже зможуть приймати активну участь у розв'язанні задачі про дотичну прямої до графіка функції в заданій точці, оскільки матимуть майже готову схему пошуку кутового коефіцієнту дотичної. Завданням вчителя на даному етапі є постановка задачі, розгляд графіка довільної функції та дотичної до неї.

Умова задачі. Розглянемо довільну неперервну функцію $y = f(x)$, графіком якої є крива лінія (рисунок 1.3.). Нехай точки M_0 та M належать цій функції, проведемо січну MM_0 та зафіксуємо точку M_0, а точка M, рухаючись по кривій, наближається до точки M_0, при цьому в граничному положенні при наближенні точки M до точки M_0 січна займе положення прямої M_0T.

Пряму M_0T називають дотичною до даної кривої в точці M_0. Потрібно знайти рівняння дотичної M_0T.

Розв'язання.

Для початку вчитель малює графік довільної функції разом з січною та дотичною. Подібний графік міститься на рисунку 1.4.

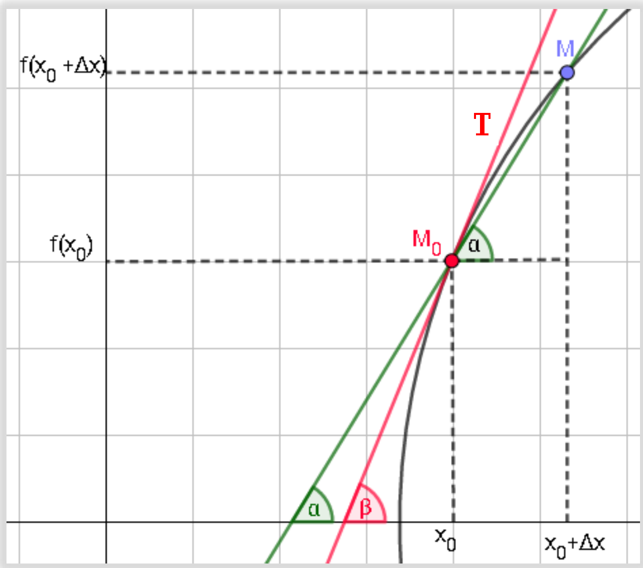


Рис. 1.4. Дотична до графіка функції

Далі пояснюється, що дотичнаM_0T – це пряма, а положення прямої $y =$ $= kx + b$, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ визначається кутовим коефіцієнтом прямої $k = tg\beta$, де β – кут між прямою і додатнім напрямом вісі OX. Отже, провести дотичну до графіка означає знайти число k, а для цього використовують розглянутий вище алгоритмом.

1) Надають аргументу x_0 приросту Δx та одержують нове значення аргументу $x_0 + \Delta x$.
2) Відносно приросту аргументу знаходять відповідний приріст самої функції: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
3) Знаходять кутовий коефіцієнт січної MM_0, який дорівнює $tg\alpha$:

$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

4) Обчислюють кутовий коефіцієнт дотичної M_0T, який дорівнює $tg\beta$:

$$tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Записують рівняння дотичної M_0T у вигляді $y = f(x_0) + k(x - x_0)$, де $k = tg\beta$ і тим самим знаходять розв'язок задачі.

Після розгляду даних задач, що є різними за змістом та призначенням задачі, робиться висновок про те, що отримані відповіді до них свідчать про те, що з математичної точки зору вони ідентичні, тобто базуються на певному загальному понятті, цим поняттям є поняття похідної функції.

Під час розв'язування задач, вчитель наголошує учням на важливість використання символів, що стосуються приросту функції та відношень її до приросту аргументу, для цього розглядаються відповідні вправи [50].

Поняття похідної. Механічний, геометричний, економічний та біологічний зміст похідної

Означення. Похідною функції f в заданій точці x_0 називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції f в точці x_0 до відповідного приросту аргумента, за умови, що приріст аргумента прямує до нуля.

Похідну функції f в заданій точці x_0 позначають за допомогою штриха $f'(x_0)$, знаючи це учні можуть записати подане означення символічною мовою:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

У підручнику А. Г. Мезляка, Д. А. Номіровського, В. Б. Полонського, М. С. Якіра [29, с. 81] надається схема обчислення похідної, але кроки 1) – 4), які були розглянуті в задачах, що приводять до означення похідної, вже задають правила обчислення похідної і учні можуть працювати за цими кроками.

Отже, коли означення було введене, за його допомогою та використовуючи кроки 1) – 4) тренуються знаходити похідні найпростіших функцій в точці, при чому зазначають, якщо функція f має похідну в точці

x_0, то цю функцію називають диференційованою в цій точці, а з диференційованості слідує неперервність.

З метою формування предметної математичної компетентності, для глибшого усвідомлення означення похідної разом з учнями роблять висновок про геометричний та механічний, зміст похідної, на основі розглянутих задач у вигляді таблиці (таблиця 1.5.).

Таблиця 1.5.

Зміст похідної

Механічний зміст похідної $s(t)$ – закон руху матеріальної точки $v(t)$ – миттєва швидкість $s'(t_0) = v(t_0)$	Миттєва швидкість у момент часу t_0 дорівнює похідній функції, що визначає закон руху матеріальної точки по координатній прямій у точці t_0.
Геометричний зміст похідної $f'(x_0) = k(x_0) = tg\beta$, де f – дана функція $\angle\beta$– кут нахилу дотичної до графіка f k – кутовий коефіцієнт дотичної $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$– рівняння дотичної до графіка функції f в точці x_0	Похідна функції в заданій точці є кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка функції в цій точці, тобто дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в заданій точці. (Кут відлічують від додатного напрямку осі OX проти годинникової стрілки.)

Після того, як був розглянутий спосіб знаходження похідної за допомогою означення, починають вивчати таблицю похідних (таблиця 1.6.). З метою формування дослідницької компетентності перед учнями ставлять задачу – вивести похідні зазначених функцій.

Таблиця 1.6.

Таблиця похідних

№	Дана функція	Похідна даної функції
1	$c,\ c - const$	0
2	x	1
3	x^2	$2x$
4	$x^n, n \epsilon R$	nx^{n-1}
5	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
7	$\sin x$	$\cos x$
8	$\cos x$	$-\sin x$
9	$tg\ x$	$\frac{1}{cos^2 x}$
10	$ctg\ x$	$-\frac{1}{sin^2 x}$
11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$acrtg\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$
14	$arcctg\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

В доцільності використання таблиці 1.6. учні переконаються на практиці, але перед цим їм доведеться ознайомитись з загальними методами знаходження похідних різних видів функцій.

Правила обчислення похідних

Правила, за якими прийнято обчислювати похідні суми (різниці), добутку або частки функцій у підручнику [29] сформульовані у наступних теоремах.

Теорема 1 [про похідну суми (різниці) функцій].

У тих точках, у яких є диференційованими функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ також є диференційованою функція $y = f(x) \pm g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$.

Тобто, можна сказати, що похідна суми дорівнює сумі похідних.

Теорема 2 [про похідну добутку функцій].

У тих точках, де є диференційованими функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) \cdot g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$.

Наслідок з теореми про похідну добутку функцій.

У тих точках, де є диференційованою функція $y = f(x)$, також є диференційованою функція $y = kf(x)$, де k – деяке число, причому для всіх таких точок виконується рівність $\left(kf(x)\right)' = kf'(x)$

Для учнів буде простішим таке формулювання даного наслідку, як: постійний множник можна виносити за знак похідної.

Теорема 3 [про похідну частки функцій].

У тих точках, у яких функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є диференційованими і значення функції $y = g(x)$ не дорівнює нулю, функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також є диференційованою, причому для всіх таких точок виконується рівність:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$

Диференціюючи функції, учні обов’язково зіткнуться зі складеними функціями виду $h(x) = f(g(x))$, для таких випадків існує наступна теорема.

Теорема 4 [про похідну складеної функції].

Якщо функція $t = g(x)$ диференційована в точці x_0, а функція $y = f(x)$ диференційована в точці t_0, де $t_0 = g(x_0)$, то складена функція $h(x) = = f(g(x))$ є диференційованою в точці x_0, причому $h'(x_0) = f'(t_0) \cdot g'(x_0)$.

Після теореми 4, з метою формування дослідницької компетентності засобами розвитку дедуктивного методу, перед учнями ставлять питання про зв'язок між похідними взаємно обернених функцій та встановлюють його за допомогою наступної теореми.

Теорема 5 [про похідну оберненої функції].

Нехай оборотна функція $y = f(x)$ має в точці x_0похідну, відмінну від нуля, а обернена до неї функція $x = g(y)$ є неперервною в точці y_0, де $y_0 = f(x_0)$. Тоді функція g диференційована в точці y_0і $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Зазвичай доведення теорем про похідні складеної та оберненої функцій, з метою розвитку дослідницької компетентності, проводять на математичних гуртках або факультативах, але за наявності часу, розглядають доведення і на уроці.

Вчителя намагаються приділяти достатню кількість часу правилам обчислення похідних і, відповідно, застосуванню даних правил на практиці, тому що, як зазначає О. І. Вишенський, під час виконання учнями практичних вправ працюють синтез та аналіз, механізм узагальнення і трансформації, пошук, оскільки вимагається оцінка фактів, активно діє уява [9, с. 126]. Тобто, іншими словами, при виконанні практичних вправ формуються всі компоненти математичної компетентності, зокрема і дослідницька.

Основні теореми диференціального числення

Перед початком введення теорем актуалізуються знання геометричного змісту похідної та рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ в точці x_0 [3, с. 264].

Теорема 6 [Ферма].

Нехай функція f, визначена на проміжку $[a;b]$, у точці $x_0 \in (a;b)$ набуває свого найменшого (найбільшого) значення. Якщо функція f є диференційованою в точці x_0, то$f'(x_0) = 0$.

Далі ілюструють графіки функцій неперервних на відрізку $[a;b]$ і диференційованих на інтервалі $(a;b)$ таких , що функція у точках a і b набуває однакових значень, і на яких видно, що існує щонайменше одна така точка $x_0 \in (a;b)$, що дотична до графіка в точці з абсцисою x_0 є горизонтальною прямою, тобто $f'(x_0) = 0$. Цей висновок підтверджує теорема.

Теорема 7 [Ролля].

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована на інтервалі $(a;b)$, причому $f(a) = f(b)$, то існує така точка $x_0 \in (a;b)$, що $f'(x_0) = 0$.

Після розгляду теореми Ролля, за допомогою рисунка 1.5., роблять перехід до теореми Лагранжа. На рисунку зображають графік функції, неперервної на відрізку $[a;b]$ і диференційованої на інтервалі $(a;b)$. Розглядається трикутник *AMB*, з якого можна знайти кутовий коефіцієнт прямої *AB:*

$$tg \angle BAM = \frac{BM}{AM} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

З рисунка 1.5. видно, що на дузі *AB* існує така точка *C*, що дотична до графіка в цій точці паралельна прямій *AB*.

Кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$ цієї дотичної дорівнює кутовому коефіцієнту прямої *AB*, тобто існує така точка $x_0 \epsilon\ (a;b)$, що:

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

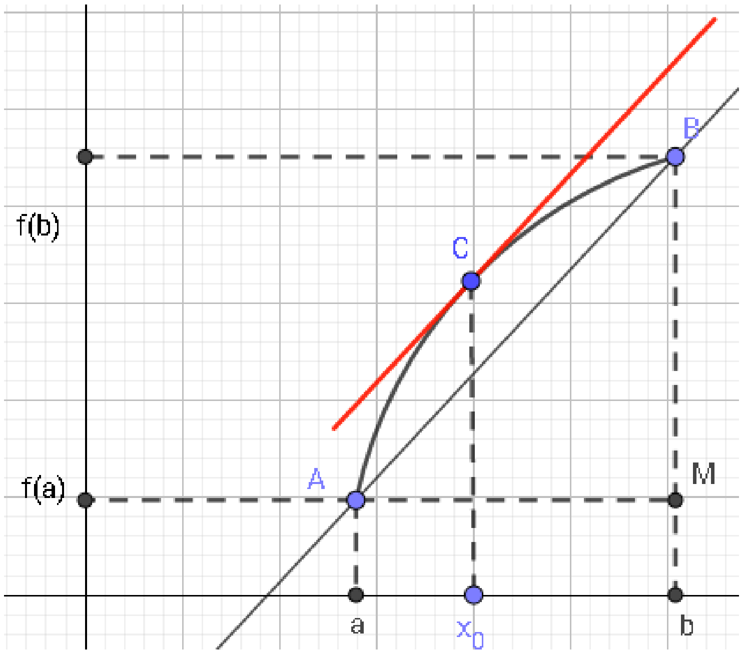


Рис. 1.5. Перехід до теореми Лагранжа

Отримані висновки підтверджує така теорема:

Теорема 8 [Лагранжа].

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована на інтервалі $(a;b)$ то існує така точка $x_0 \in (a;b)$, що $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Зазначені теореми потребують доведення, що як свідчить З. І. Слєпкань [50, с. 414] не викликає в учнів труднощів, тому зазвичай пропонують їм розглядати доведення самостійно. Дане завдання спрямоване на формування такої компетентності як «вміння вчитися впродовж життя» та дослідницької компетентності.

Застосування похідної до дослідження функції

У шкільному курсі АПА на поглибленому рівні за допомогою похідної, функції досліджують на:

1) Монотонність (зростання і спадання).
2) Точки екстремуму і екстремуми функції.
3) Досягнення найбільших і найменших значень на відрізку.
4) Опуклість.

Пояснення ознак зростання, спадання та сталості функцій розпочинають з ілюстрацій графіків відомих учням функцій, таких як парабола, гіпербола, пряма, паралельна вісі Ox. Властивості монотонності цих функцій вже були доведені раніше, тому їх тільки пов'язують з використанням похідної.

Якщо розглядають графік функції $y = x^2$, то показують, що на проміжку $x \in (0; \infty)$, де, як відомо, функція зростає, дотична до графіка в будь якій точці утворює гострий кут з додатнім напрямом вісі Ox, тобто похідна у цих точках додатна, аналогічно показують, що на проміжку $x \in (-\infty; 0)$ похідна від'ємна. У випадку розгляду прямої, паралельної вісі Ox, яка задається функцією виду $y = b$, отримують, що похідна в будь-якій точці буде дорівнювати нулю. Дані спостереження підтверджують наступними теоремами.

Теорема 9 [ознака зростання функції].

Якщо для всіх x з проміжку *I* виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку.

Теорема 10 [ознака спадання функції].

Якщо для всіх x з проміжку *I* виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.

Теорема 11 [ознака сталості функції].

Якщо для всіх x з проміжку *I* виконується нерівність $f'(x) = 0$, то функція f константна на цьому проміжку.

Існують інші методичні підходи введення достатніх умов монотонності функцій. Наприклад, у підручнику М. І. Башмакова [2, с. 82-83] учнів підштовхують до терем 9-11 за допомогою механічного змісту похідної, даний метод використовується і в підручнику А. Г. Мерзляка та інших [29, с. 133], але тільки для виведення ознаки сталості функції.

Теорема 12 [властивість зростаючої (спадної) функції].

Якщо диференційована на проміжку I функція f є зростаючою (спадною), то для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f'(x)$ >0 ($f'(x) < 0$).

Дослідження функцій на монотонність є алгоритмічною вправою, тому зазвичай виокремлюють кроки дослідження на прикладі декількох функцій. Подібний алгоритм виклала у своєму посібнику З. І. Слєпкань [50, с. 413].

Для того щоб знайти проміжки зростання (спадання) функції, потрібно:

1) Знайти область визначення функції та точки розриву.
2) Знайти похідну.
3) Записати і розв'язати нерівність $f'(x) > 0$ і вибрати із множин її розв'язків проміжки, на яких функція визначена. Знайдені проміжки є проміжками зростання функції.
4) Записати і розв'язати нерівність $f'(x) < 0$ і вибрати із множин її розв'язків проміжки, на яких функція визначена. Знайдені проміжки є проміжками спадання функції.

Також показують учням, що теорему про ознаку сталості функції можна використовувати і для доведення тотожностей. Так, якщо вдалося встановити, що похідна функції f на проміжку I дорівнює нулю і для деякого $x_0 \in I$ виконується рівність $f(x_0) = A$, то тим самим установлено, що $f(x) =$ $= A$ для всіх $x \in I$.

При роботі з точками екстремуму і екстремумами функції учням наголошують, що точки максимуму і мінімуму – це точки екстремуму, а значення функції в цих точках максимуму і мінімуму – це екстремум функції. Учні часто плутають ці поняття та допускають помилки.

Перед введенням означення точок максимуму і мінімуму, говорять про окіл точки.

Означення. Інтервал $(a; b)$, який містить точку x_0, називають околом точки x_0.

Далі вводять означення точок максимуму і мінімуму та демонструють їх на графіках. Похідну і точки екстремуму поєднує наступна теорема.

Теорема 13 [про точки екстремуму].

Якщо x_0 є точкою екстремуму функції f, то або $f'(x_0) = 0$, або функція f не є диференційованою в точці x_0 .

Справедливість цієї теореми випливає з теореми Ферма.

Виникає природне запитання: чи обов'язково є точкою екстремуму внутрішня точка області визначення функції, у якій похідна дорівнює нулю або не існує? Відповідь на це запитання заперечна. За допомогою прикладів показують, що рівність нулю похідної в точці x_0 або недиференційовність функції в цій точці є необхідною, але не достатньою умовою існування екстремуму в точці x_0 .

Означення. Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають критичними точками функції.

Беручи до уваги дане означення роблять висновок, що точки екстремуму слід шукати серед критичних точок.

Далі розглядають теореми, які є достатніми умовами, що показують, як за допомогою похідної можна знаходити точки екстремуму функції.

Теорема 14 [ознака точки максимуму функції].

Нехай функція f є диференційованою на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$ і неперервною в точці x_0. Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, а для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції f.

Теорема 15 [ознака точки мінімуму функції].

Нехай функція f є диференційованою на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$ і неперервною в точці x_0. Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, а для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції f.

При переході до знаходження максимуму і мінімуму функції звертають увагу на те, що екстремуми характеризують поведінку функції в деякому околі точки x_0, а не на всій області визначення чи на її частині.

На цьому етапі, після вивчення необхідних і достатніх умов існування точок екстремуму, вводять алгоритм дослідження функцій на екстремум.

1) Знайти область визначення функції $f(x)$.
2) Знайти похідну даної функції $f'(x)$та визначити критичні точки.
3) Розмістити критичні точки на координатній прямій в порядку їх зростання та дослідити знак похідної в околах цих точок, зробити висновки щодо точок максимуму і мінімуму.
4) Обчислити максимуми та мінімуму функції, підставивши у формулу $y = f(x)$ значення точок максимуму і мінімуму.

Для функції f неперервної на відрізку $[a; b]$ пошук найбільшого і найменшого значень на цьому відрізку проводять, користуючись такою схемою.

1) Знайти похідну функції $f(x)$.
2) Знайти критичні точки функції $f(x)$, які належать відрізку $[a; b]$.
3) Обчислити значення функції в знайдених критичних точках і на кінцях розглядуваного відрізка.
4) З усіх знайдених значень обрати найбільше і найменше.

Неперервна функція обов'язково набуває найбільшого і найменшого значень і вони можуть досягатись лише у стаціонарних точках і на кінцях відрізка тому не перевіряють достатні умови існування екстремуму функції в стаціонарних точках. Позначають екстремуми на відрізку наступним чином: $\min\limits_{[a;b]} f(x)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x)$.

Також учням зазначають, що за допомогою знань про екстремуми вони можуть розв'язувати задачі, пов'язані з життєвими ситуаціями. Деякі з них виділені у підручнику [29, с. 158]: яку кількість продукції має випустити підприємство, щоб отримати найбільший прибуток, як, маючи обмежені ресурси, виконати виробниче завдання в найкоротший час, як організувати доставку товару по торговельних точках так, щоб витрати палива були найменшими. Запропоновані текстові задачі мотивують учнів до вивчення теми та узагальнять їх знання. Крім цього подібні задачі формують математичну компетентність та такі наскрізні лінії ключових компетентностей, як: «Екологічна безпека та сталий розвиток», «Підприємливість та фінансова грамотність».

Перед тим, як учні починають працювати з поняттям «опуклість функції», їх вчать визначати другу похідну. Для цього розглядають задачу про миттєву швидкість, яка застосовує фізичні поняття та формує не тільки математичну компетентність, а й основні компетентності у природничих науках.

Задача. Нехай матеріальна точка рухається за законом $y = s(t)$ по координатній прямій. Учням вже відомо, що миттєва швидкість $v(t)$ у момент часу t визначається за формулою $s'(t) = v(t)$, тоді розглянемо функцію $y = v(t)$, її похідну в момент часу t називають прискоренням руху і позначають $a(t)$, тобто $v'(t) = a(t)$.

Таким чином, функція прискорення руху – це похідна функції швидкість руху, яка у свою чергу є похідною функції закон руху, тобто:

$a(t) = v'(t) = (s'(t))'$.

У таких випадках говорять, що функція прискорення руху є другою похідною функції $y = s(t)$. Пишуть: $a(t) = s''(t)$.

Далі, зазвичай, наводять декілька графічних прикладі, на яких функції опуклі вгору та вниз на певних проміжках, щоб учні мали змогу розуміти про що йде мова. Показують, якщо графік функції на проміжку розміщений не вище будь-якої своєї дотичної, то функцію називають опуклою вгору на проміжку; якщо графік на проміжку розміщено не нижче від кожної своєї дотичної – опуклою вниз на проміжку. Також розглядають приклади графіків функцій на яких існує точка x_0, яка володіє властивістю, що при переході через неї крива функції переходить з однієї сторони дотичної на іншу, то таку точку називають точкою перегину.

Зв’язок між похідною та визначенням опуклості функції встановлюють наступні теореми.

Теорема 16 [ознака опуклості функції вниз].

Якщо для всіх x з деякого проміжка функції $f(x)$виконується нерівність $f''(x) > 0$, то функція $f(x)$ є опуклою вниз на даному проміжку.

Теорема 17 [ознака опуклості функції вгору].

Якщо для всіх x з деякого проміжка функції $f(x)$виконується нерівність $f''(x) < 0$, то функція $f(x)$ є опуклою вгору на даному проміжку.

Теорема 18 [про точку перегину].

Якщо x_0, є точкою перегину функції $f(x)$ і в цій точці функція двічі диференційована, то $f''(x) = 0$.

Теорема 18 є необхідною, але не достатньою умовою для існування точки перегину. Точка x_0 буде точкою перегину однозначно, якщо функція $f(x)$ при переході через цю точку змінює знак на протилежний.

Для учнів також вводять алгоритм знаходження точок перегину.

1) Знайти область визначення та інтервали на яких функція неперервна.
2) Визначити другу похідну функції.
3) Знайти внутрішні точки області визначення, в яких друга похідна дорівнює нулю.
4) Нанести знайдені точки на координатну пряму і знайти знак другої похідної та характер поведінки функції на кожному інтервалі.
5) Зробити висновки користуючись теоремами 16-18.

Для поглиблення знань учнів про опуклість функції вводять наступну теорему.

Теорема 19.

Якщо функція f опукла вгору на проміжку I, то для будь-яких a і b з проміжку I виконується нерівність:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Ця терема має геометричну інтерпретацію, яку описує малюк 1.6. З даного рисунка видно, що дотична проведена до графіка функції f у точці M. Оскільки функція f опукла вгору, то точка A лежить не нижче від точки A_1 , а точка B – не нижче від точки B_1. Тому середина відрізка AB (точка M) лежить не нижче від середини відрізка A_1B_1 (точка M_1). Це означає, що ордината точки M є не меншою, ніж ордината точки M_1.

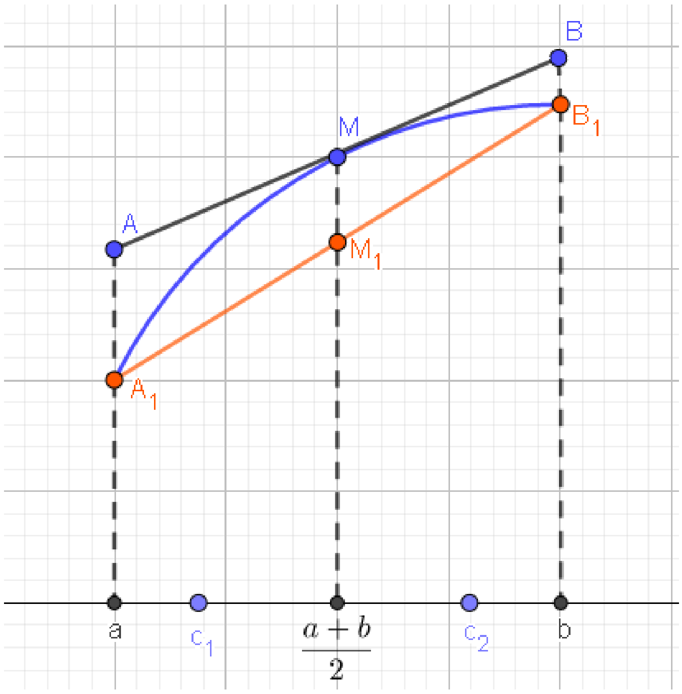


Рис. 1.6. Геометрична інтерпретація нерівності Єнсена

Теорема 19 має узагальнення, яке висвітлено у наступній теоремі:

Теорема 20.

Якщо функція f опукла вгору на проміжку I то для будь-яких $x_1, x_2, \dots, x_n$ з проміжку I виконується нерівність:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{2}$$

Дану нерівність називають нерівністю Єнсена для опуклої вгору функції.

Для опуклої вниз функції f знак нерівності змінюється на протилежний, тобто для будь-яких $x_1, x_2, \dots, x_n$ з проміжку I виконується нерівність:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{2}$$

Після розгляду даних властивостей переходять до задачі, яка потребує всіх знань, умінь і навичок, що учень отримав вивчаючи похідну – до побудови графіка функції.

Учням пояснюють, що існують функції, графіки яких є невідомими, але їх можна побудувати дослідивши ці функції. Дослідження функції за допомогою похідної виконують за алгоритмом:

1) Знайти область визначення функції.
2) Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.
3) Знайти точки перетину з осями координат.
4) Знайти проміжки зростання і спадання.
5) Знайти точки екстремуму і значення функції в точках екстремуму.
6) Знайти проміжки опуклості функції і точки перегину.
7) Побудувати графік функції використовуючи результати досліджень.

Отже, ми розглянули основні теоретичні відомості та рекомендації до вивчення теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні в курсі алгебри і початків аналізу з точки зору впровадження компетентнісного підходу.

Висновки до розділу 1

Нами були розглянуті основні аспекти компетентнісного підходу, який, є одним із сучасних методів модернізації математичної освіти. Для ясності ми розмежували поняття компетенція і компетентність, та зробили акцент на тому, що компетенція є ідеальною метою освітнього процесу, а компетентність – його результатом. Були висвітлені ключові компетентності, формування яких передбачено Державним стандартом, та, зокрема, складові компетентності предметно-галузевої математичної компетентності. Особливу увагу ми приділили дослідницькій компетентності, яка на нашу думку відіграє велику роль у навчанні математики, особливо при вивченні теми «Похідна та її застосування».

Ми провели аналіз навчальних програм з математики та визначили, що за програмою з 1 вересня 2018 року на поглибленому рівні навчання тему «Похідна та її застосування» вивчатимуть в 10 класі протягом 50 годин, та можливе збільшення часу на викладання теми за рахунок резервних годин, які надано у розмірі 22 годин. Також ми розглянули підручники, що Міністерство освіти і науки рекомендує для вивчення теми «Похідна та її застосування» на поглиблену рівні, порівняли особливості викладання теми «Похідна та її застосування» на поглибленому та профільному рівнях. Нами була проаналізована програма зовнішнього незалежного оцінювання, виділено типи задач, які розв'язуються за допомогою похідної.

Був розроблений логіко-математичний аналіз теми «Похідна та її застосування» за підручником А. Г. Мерзляка, Д. А. Номіровського, В. Б. Полонського, М. С. Якіра поглибленого рівня [29], в ході якого ми розглянули основні теоретичні відомості та рекомендації до вивчення теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні на засадах компетентнісного підходу.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ НАВЧАННЯ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ» НА ЗАСАДАХ КОМПЕТЕНТНІСНОГО ПІДХОДУ

2.1. Методика формування предметної математичної компетентності учнів при вивченні теми «Похідна та її застосування»

Перед тим, як переходити до навчання учнів новій темі необхідно скласти календарне планування. Після цього можна починати працювати над наповненням уроків. Проаналізувавши навчальні програми з математики та підручники з АПА ми пропонуємо розширене календарно-тематичне планування теми «Похідна та її застосування» для 2018-2019 навчального року за підручником А. Г. Мезляка, Д. А. Номіровського, В. Б. Полонського, М. С. Якіра [29] поглибленого рівня вивчення математики (Додаток А).

Надамо методичні рекомендації до формування предметних математичних компетентностей теми «Похідна та її застосування», які доповнять існуючи методики навчання учнів даної теми.

Вважаємо, що перед розробкою календарно-тематичного планування та складанням конспектів уроків з теми «Похідна та її застосування», вчитель, після попереднього ознайомлення з метою та цілями вивчення теми, які викладені в навчальній програмі з математики, та з огляду на власні знання, може розробити структурну схему вивчення теми, як показано на рисунку 2.1. Дана схема допоможе виділити основні акценти, і також може бути запропонована учням для ознайомлення з інформацією про теоретичний матеріал, що вони вивчатимуть та поясненням для чого можна застосувати нові знання.

Ми розбили структурну схему (рис. 2.1) на три блоки: мотиваційний, теоретичний та практичний, при чому, в цілях мотивації навчальної діяльності, більш доцільно буде детальніше розповісти про практичний блок, де учні дізнаються про області в яких використовується похідна.

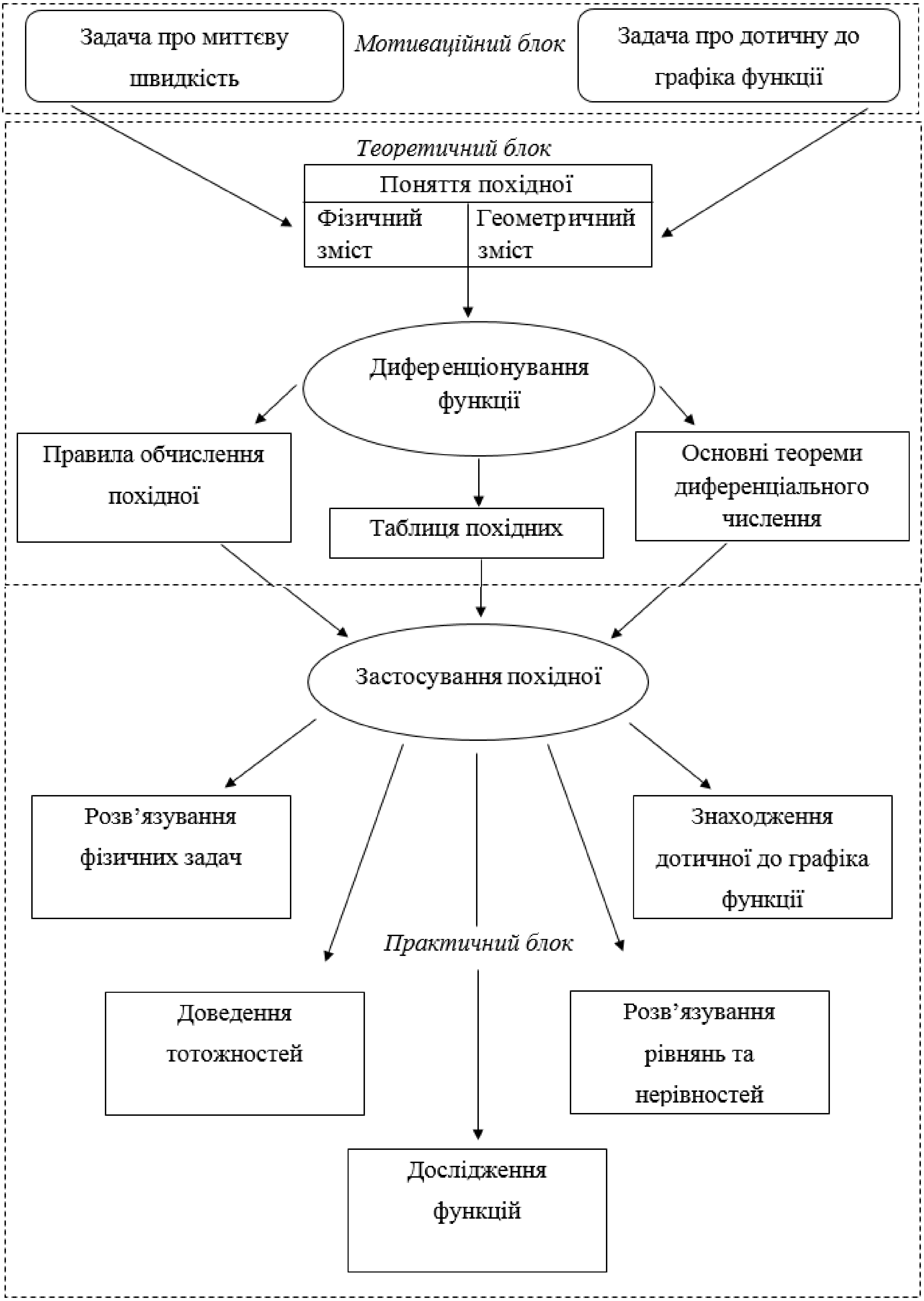


Рис. 2.1. Структурна схема вивчення похідної

Перше з чим зустрічаються учні перед введенням означення похідної – це приріст функції, тому ми розробили завдання, які сприяють більш глибокому розумінню даного поняття. Наприклад у наступній вправі (рисунок 2.2.) учням потрібно вказати де з відмічених областей знаходиться приріст функції, а де приріст аргументу.

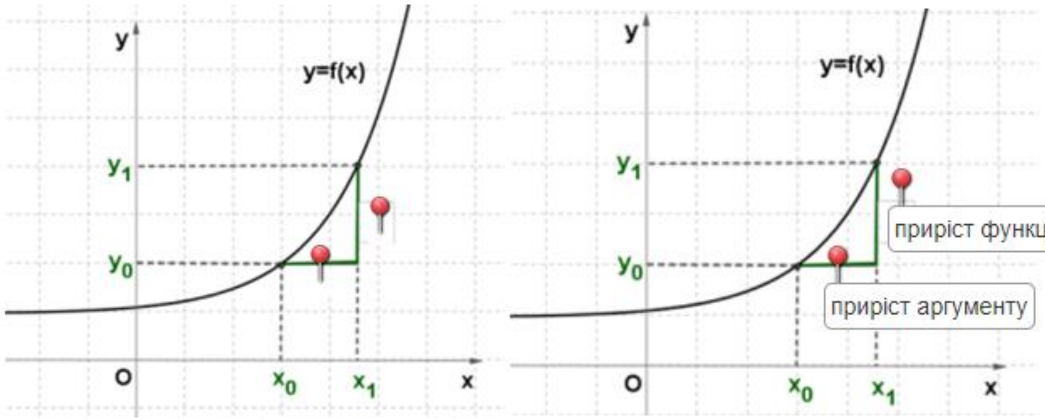


Рис. 2.2. Завдання на приріст функції і аргументу

Дана вправа є нескладною, але з її допомогою можна вирахувати тих учнів, кому є незрозумілими поняття приросту. Також можна запропонувати завдання більш практичного характеру на знаходження приросту функції в заданій точці за графіком при вказаному прирості аргументу, як показано на рисунку 2.3.

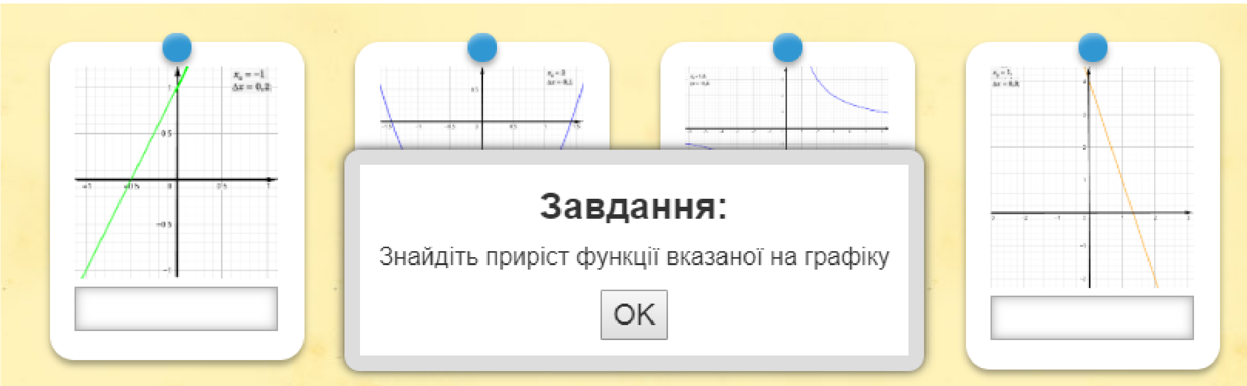


Рис. 2.3. Приріст за графіком

Завдання на використання однієї лише формули є доволі нескладним для класу з поглибленим вивченням математики, тому ми ускладнили його пошуком рівняння функції. Для зручності графіки функції можна збільшувати, як це показано на рисунку 2.4. У підручнику А. Г. Мерзляка та інших [29], подібних вправ немає, але вміння знаходити рівняння функції за її графіком важливе, його необхідно вміти застосовувати, тим паче вправи подібного типу можуть зустрітись на ЗНО.

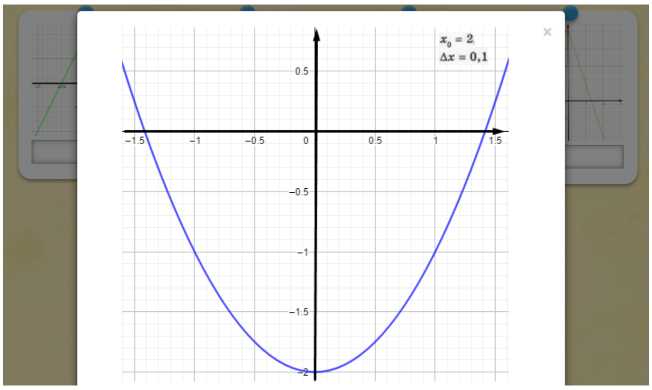


Рис. 2.4. Збільшений графік

Далі продовжуємо вивчення теми «Похідна та її застосування» за допомогою розгляду завдань, що призводять до поняття похідної (про миттєву швидкість і дотичну до графіка функції), вони базуються на поняттях приросту аргументу і приросту функції, тому треба прослідкувати щоб діти орієнтувалися у цих питаннях.

В умовах компетентнісно-орієнтованого підходу можна також вийти за межі шкільного підручника та запропонувати учням економічну задачу про продуктивність праці або біологічну задачу про популяцію мікроорганізмів.

Розглянемо задачу про продуктивність праці.

Умова задачі. Нехай функція $u = u(t)$ виражає кількість виробленої продукціїїu за час t, і необхідно знайти продуктивність праці в момент t_0.

Розв'язання.

1) В заданий момент часу t_0задамо прирістΔt і одержимо нове значення $t_0 + \Delta t$.
2) Обчислюємо приріст кількості виробленої продукціїΔu за час Δt:

$$\Delta u = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$$

3) Знайдемо середню продуктивність праці:

$$z_c = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t}$$

4) Продуктивність праці в момент t_0 можна визначити як граничне значення середньої продуктивності за період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ при Δt прямує до нуля, тобто:

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} z_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t}$$

Отже, дана задача розв'язана, розглянемо задачу про популяцію мікроорганізмів.

Умова задачі. Нехай залежність між кількістю особин популяції мікроорганізмів y та часом її розмноження t задана функцією $p = p(t)$. Необхідно знайти нове значення чисельності популяції, у момент t_0.

Розв'язання.

1) В заданий момент часу t_0 задамо приріст часу Δt, тобто розглянемо проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$
2) Обчислюємо приріст чисельності популяціїΔp за час Δt:

$$\Delta p = p(t_0 + \Delta t) - p(t_0)$$

3) Знайдемо середню продуктивність життєдіяльності популяції:

$$r_c = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p(t_0 + \Delta t) - p(t_0)}{\Delta t}$$

4) Продуктивність життєдіяльності популяції в момент часу t_0 можна визначити за допомогою наступної границі:

$$r = \lim_{\Delta t \to 0} r_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t_0 + \Delta t) - p(t_0)}{\Delta t}$$

Враховуючи запропоновані задачі доцільно також буде розширити таблицю 1.5. про зміст похідної, як запропоновано в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1.

Додатковий зміст похідної

Економічний зміст похідної $u(t)$ –кількість виробленої продукції $z(t)$ – продуктивність праці $u'(t_0) = z(t_0)$	Продуктивність праці в момент часу t_0 дорівнює похідній від обсягу виробленої продукції в

Продовж. табл. 2.1.

	момент t_0.
Біологічний зміст похідної $p(t)$ –кількість особин популяції $r(t)$ – Продуктивність життєдіяльності популяції $p'(t_0) = r(t_0)$	Продуктивність життєдіяльності популяції в момент часу t_0 дорівнює похідній від чисельності популяції в момент часу t_0.

Тема «Похідна та її застосування» доволі складна для розуміння учнів, саме тому вона повинна мати високий рівень наочності, чого можна досягти за допомогою використання інтерактивних вправ. Треба зазначити, що для розвитку сучасних школярів недостатньо традиційної системи навчання, а є необхідним використання поряд з традиційними новітніх методів та засобів навчання. Тому впровадження інформаційно-комунікаційних технологій під час навчання учнів старших класів на сьогоднішній день є однією з умов ефективності освітнього процесу [13].

Беручи до уваги вище сказане ми пропонуємо комп’ютеризувати одну з задач, які приводять до означення похідної, наприклад задачу про дотичну до графіка функції, а саме відтворити рух точки по параболі. За допомогою математичного додатку GeoGebra [58] та інструменту «повзунок», ми розробили імітацію руху точки C, через яку проходить пряма OC, по графіку функції $y = x^2$, для якої OC – січна (рисунок 2.5.). За допомогою додатку ми не перенавантажуємо малюнок зайвими елементами, і природно показуємо рух прямої по кривій. На малюнку також зафіксоване положення дотичної до графіка функції і трикутник, який допоможе учням побачити відношення якому дорівнює кутовий коефіцієнт.

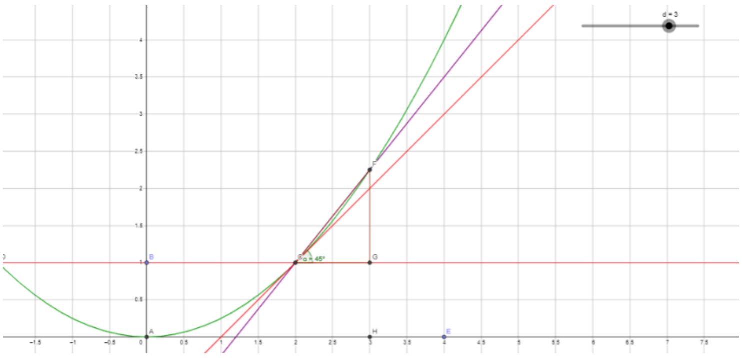


Рис. 2.5. Рух точки по параболі

Вчитель може не встигнути ознайомити учнів зі всіма задачами на уроці і виникає потреба обрати найбільш вдалий приклад, стосовно цього З. І. Слєпкань у своєму підручнику [50, с. 402] рекомендує перш за все надавати перевагу задачі про миттєву швидкість, аргументуючи це тим, що учнів вже знайомили з цим прикладом на уроках фізики, а вчителю математики залишається оформити розв’язання задачі в термінах і символах математики.

Поняття похідної функції є одним з найважливіших понять курсу алгебри і початків аналізу, оскільки це поняття є основним в диференціальному численні, тому необхідно створити умови для того, щоб учні досконало володіли означенням похідної та розуміли його зміст.

При вивченні означення похідної учні іноді губляться і не можуть згадати, наприклад, що похідною функції в заданій точці є число, а не функція, саме тому для відпрацювання означення ми розробили вправу, яка робить акценти на так званих «крихких» моментах, в яких учні допускають помилки.

Як ми бачимо на рисунку 2.6, в означенні пропущені слова та учням потрібно заповнити пропуски дібравши потрібні слова. Дана вправа 2.6. сприяє запам’ятовуванню означення похідної функції в точці, її можна задавати у якості домашнього завдання, щоб учні звернули увагу на потрібні моменти, або на етапі актуалізації знань. Можливо використання подібного типу завдань на самостійній роботі, але вже не в інтерактивній формі.

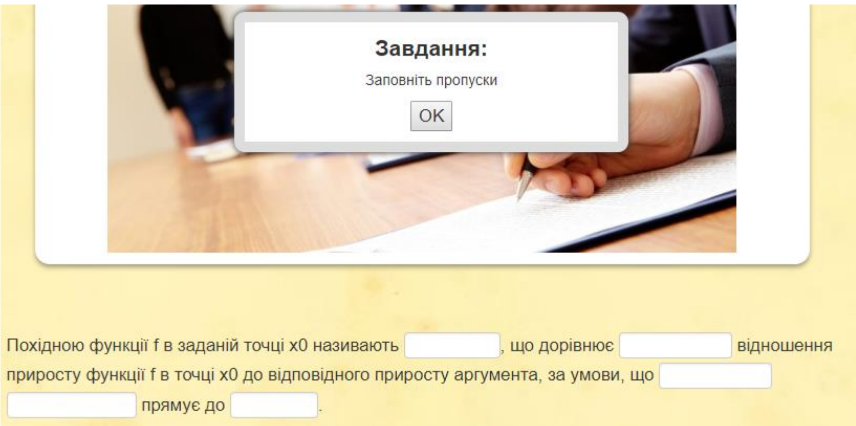


Рис. 2.6. Означення похідної

Після того, як учні розглянули знаходження похідної за допомогою означення, треба пояснити їм, що даний спосіб не завжди раціональний, і перейти до вивчення таблиці похідних (таблиця 1.6.). З метою формування дослідницької компетентності, як предметно-галузевої математичної компетентності, даний перехід можна здійснити дослідницьким шляхом, послідовно доводячи похідні. Але перед цим необхідно ввести означення функції диференційованої на проміжку і розмежувати, що коли похідну шукають у деякій точці, то вона як границя є певним числом, а якщо функція має похідну в кожній точці проміжку, то кожному значенню аргументу відповідає певне значення похідної.

Для вивчення таблиці похідних і правил обчислення похідних можна використовувати широкий спектр різноманітних інтерактивних вправ, наприклад, у формі вікторини з варіантами відповідей, за допомогою завдань на знаходження відповідностей чи вправ на пошук помилок у запропонованих рівняннях.

Вправи на знаходження відповідностей (рисунок 2.7.) не тільки сприяють вивченню та закріпленню таблиці похідних, а й розвиває уважність, виховує наполегливість, не кажучи вже про інформаційну культуру.

Рис. 2.7. Знаходження похідної

Починати опрацювання похідних від складеної функції потрібно з представлення прикладів складових функцій, потім навчити дітей самостійно визначати зовнішню і внутрішню функції, а вже після цього формулювати правило відшукання похідної.

Треба сказати, що таблиця похідних вивчається не вся одразу, а по мірі вивчення правил обчислення похідних (рисунок 2.8.).

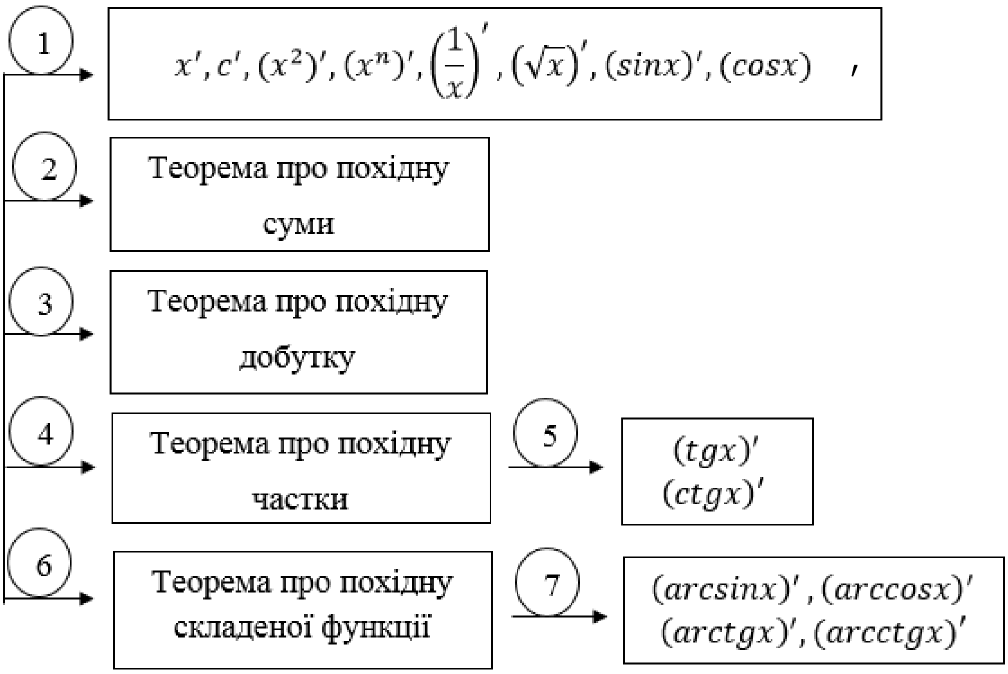


Рис. 2.8. Схема вивчення таблиці похідних

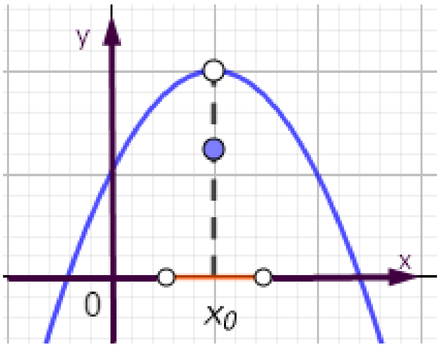
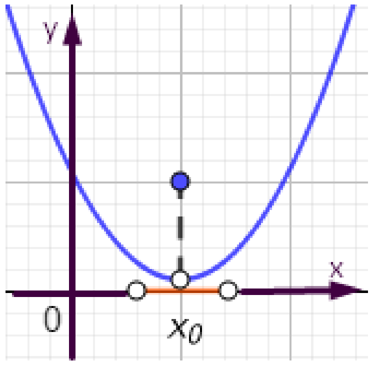
Дана послідовність вивчення обумовлена тим, що істинність деяких похідних доводиться не тільки за допомогою означення, а й за допомогою розглянутих теорем. Нами розроблена схема, з якої видно, що, наприклад, похідну від тангенсу можна вивести з теореми про похідну частки, а похідну арксинусу за теоремою про похідну складеної функції.

Перед тим, як розпочинати вивчати способи застосування похідної до дослідження функції, необхідно провести актуалізації знань та умінь, щоб в учнів не виникало труднощів при роботі з теоремами про зростання і спадання функції, точки екстремуму, екстремуми функції, найбільше і найменше значення на відрізку, опуклість функції.

Так, наприклад, пригадати означення точок максимуму і мінімуму можна за допомогою розробленої нами таблиці 2.2.

Таблиця 2.2.

Точки екстремуму

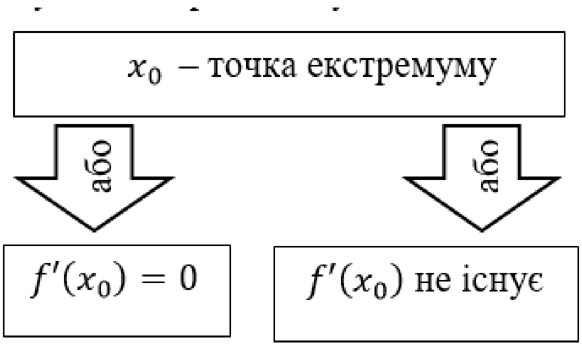
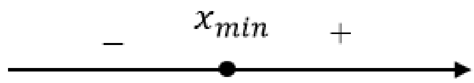
Точка мінімуму	**Точка максимуму**
Точку x_0 називають точкою мінімуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується $f(x_0) \leq f(x)$.  $x_{min} = x_0$ – точка мінімуму $y_{min} = f(x_{min})$– мінімум	Точку x_0 називають точкою максимуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується $f(x_0) \geq f(x)$.  $x_{max} = x_0$ – точка максимуму $y_{max} = f(x_{max})$ – максимум

Після формулювання зазначених теорем, необхідно скласти алгоритми пошуку точок екстремуму, найбільшого і найменшого значення функції на відрізку, проміжків опуклості функції та обов'язково запропонувати кілька прикладів закріплення цих алгоритмів.

Доцільно після опрацювання теоретичного матеріалу про точки екстремуму функції подати учням узагальнений матеріал у вигляді таблиці 2.3.

Таблиця 2.3.

Необхідна і достатня умови існування точок екстремуму

Необхідна умова	**Достатня умова**
В точках екстремуму похідна або не існує, або дорівнює нулю. 	Якщо при переході через точку x_0, у якій функція є неперервною: 1) похідна змінює знак з плюса на мінус, то x_0 – точка максимуму;  2) якщо похідна змінює знак з мінуса на плюс, то x_0 – точка мінімуму. 

У підручнику А. Г. Мезляка, Д. А. Номіровського, В. Б. Полонського, М. С. Якіра поглибленого рівня [29] останній параграф теми «Похідна та її застосування» має назву «Побудова графіків функцій», де потрібними стануть всі набуті знання з даної теми. Головне – це сформулювати разом з учнями алгоритм дослідження функцій за допомогою похідної та на конкретному прикладі показати суть кожного з пунктів, а також досягти послідовності їх виконання. Далі доцільно зробити акцент на розв'язуванні практичних завдань, оскільки з цим матеріалом в учнів можуть виникнути певні труднощі.

Після вивчення кожної нової теми необхідно розв’язувати різнорівневі завдання (початкового, середнього, достатнього і високого рівнів), а також завдання, які допоможуть закріпити новий і дадуть можливість повторити попередній матеріал, мотиваційні задачі та задачі, які допоможуть продемонструвати міжпредметні зв’язки.

Ми підготували систему інтерактивних вправ на платформі LearningApps [59] (Додаток В), що можуть бути використані в різних формах навчальної діяльності, та які допоможуть вивчити означення теми, закріпити знання таблиці похідних, полегшити роботу з основними теоремами диференціального числення.

Звісно, при навчанні учнів темі «Похідна та її застосування» не можна використовувати тільки інтерактивні вправи. Також іноді завдань з підручника може бути не достатньо, тому ми розробили тренувальні вправи (Додаток Б), які можна включати в зміст уроків та пропонувати учням до розв’язання та використовувати для відпрацювання і закріплення навичок і умінь. Дібрані нами тренувальні вправи доцільно пропонувати в якості домашнього завдання.

Ми дібрали вправи на знаходження похідної за допомогою означення в заданій точці, на застосування таблиці похідних, правил обчислення похідних та диференціювання складеної функції, задачі на застосування геометричного змісту, основних теорем диференціального числення, вправи на застосування похідної для дослідження функції. Також окремо ми виділили задачі на розв’язування рівнянь, нерівностей та доведення тотожностей. Таким чином даний тренажер можна використовувати на уроках впродовж усієї теми «Похідна та її застосування».

Оскільки добір задач і вправ для контрольних робіт має відбуватись не по номерам з підручника, а вимагає використання додаткових дидактичних матеріалів, то на поміч вчителю ми розробили контрольні роботи з теми «Похідна та її застосування» (Додаток Г), які можна пропонувати учням, що навчаються на поглибленому рівні вивченні математики.

На сьогодні йде тенденція на впровадження ігор у навчальний процес, то актуально буде виділяти час на уроці для «ігрових хвилинок», наприклад цікава для учнів інтерпретація гри «Хто хоче стати мільйонером» на математичний лад, як показано на рисунку 2.9. Учням пропонуються питання з варіантами відповідей, при чому питання з рівневою диференціацією, тобто чим далі тим складніші завдання.

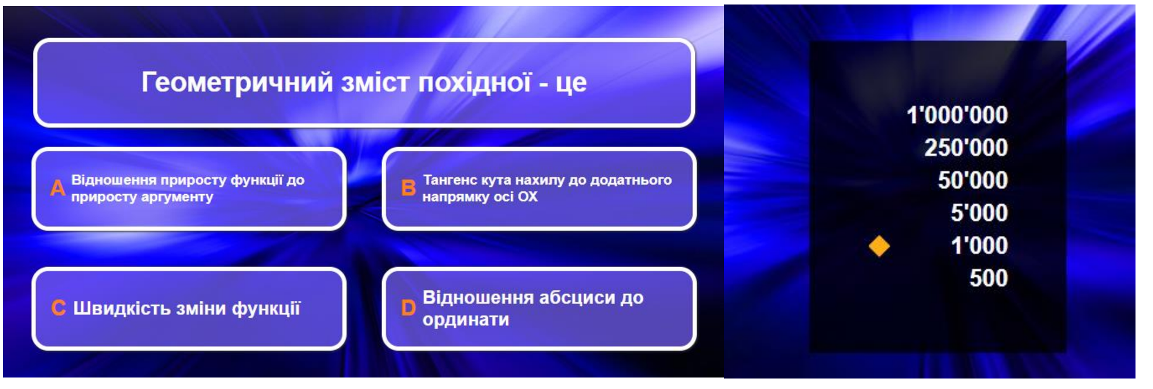


Рис. 2.9. Хто хоче стати мільйонером

На нашу думку, гра дає змогу легко привернути увагу й тривалий час підтримувати в учнів інтерес до тих важливих і складних предметів, властивостей і явищ, на яких у звичайних умовах зосередити увагу не завжди вдається. Багато вчителів сходяться з думкою, що ігрові технології мають місце бути в навчальному процесі.

Вчитель математики А. В. Голич пише у своєму блозі, що виникнення зацікавленості до математики у значної кількості учнів залежить в більшій мірі від методики її викладання, від того, наскільки вдало буде побудована навчальна робота, не мала роль тут відводиться дидактичним іграм на уроках математики – сучасному і визнаному методу навчання і виховання, якому властиві навчальна, виховна і розвиваюча функції [6].

Пропонуємо наступну гру на пошук слів (рисунок 2.10.). Учням потрібно знайти основні поняття теми «Похідна та її застосування», але спочатку треба за означенням зрозуміти про яке саме поняття йдеться мова, а потім шукати слова серед літер.

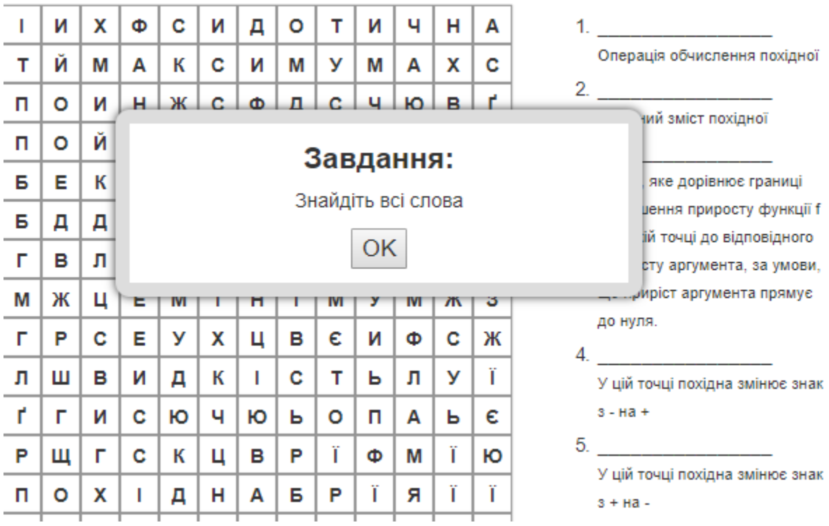


Рис. 2.10. Знаходження слів

Узагальнюючи вправи подібного типу є доцільними навіть при підготовці до контрольної роботи, оскільки вони можуть включати весь спектр теоретичного матеріалу та показати прогалини у знаннях. Таким чином учні дізнаються на що їм треба звернути увагу при підготовці до контрольної вдома.

Отже, існує багато способів формування математичної компетентності, і не останню роль в цьому процесі відіграють інформаційно-комунікаційні засоби, використання яких може забезпечити високий рівень наочності та, як результат, засвоєння матеріалу.

Використання інформаційно-комунікаційних технологій на уроках буде доцільним, оскільки, для навчання, розвитку та виховання сучасних дітей недостатньо традиційної системи навчання, та необхідно використовувати такі методи, прийоми та засоби навчання, які б задовольнили запити суспільства. Тільки за умови, що учням цікаво навчатися, підвищується пізнавальна активність, активізується мислення та розумові процеси, школярі починають працювати більш продуктивно і творчо.

Інформаційно-комунікаційні технології є одним із засобів підвищення рівня знань, мотивації до навчання, інтересу до предмета, в реаліях сьогодення та допомагають виконувати завданням сучасної школи такі як: підвищення ефективності та якості освіти, формування інформаційної культури як основи інформатизації суспільства в цілому, формування творчої, всебічно розвиненої особистості.

2.2. Методика формування дослідницької компетентності учнів при вивченні теми «Похідна та її застосування»

О. О. Клименко виділяє такі напрямки набуття дослідницької компетентності [20, с. 9]:

- формулювати математичні задачі;
- будувати аналітичні моделі задач;
- висувати та перевіряти справедливість гіпотез, спираючись на відомі методи (індукція, аналогія, узагальнення), а також на власний досвід досліджень;
- інтерпретувати результати, отримані формальними методами;
- систематизувати отримані результати, досліджувати межі справедливості отриманих результатів, установлювати зв'язки з попередніми результатами, шукати аналогії в інших розділах математики.

Надамо методичні рекомендації щодо формування дослідницької компетентності при вивченні теми «Похідна та її застосування».

Розроблена нами схема (рис. 2.1.) може бути використана і іншим способом. Запропонувати учням порожній практичний блок і після вивчення відповідної частини теми, вони повинні заповнити пропуски. Саме таке використання даної схеми сприятиме розвитку у учнів дослідницької компетентності.

Для того, щоб учні мали змогу підготуватись до зовнішнього незалежного оцінювання, ми створили курс на платформі Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment, скорочено Moodle [60]. Moodle – це система управління курсами, також відома як система управління навчанням або віртуальне навчальне середовище. Саме тут ми розробили самостійні роботи у формі тестів ЗНО (рисунок 2.11.), але оскільки в електронній формі ми не можемо перевірити виконання завдання з відкритою формою, то останнім завданням кожного тесту є створення доповіді. А працюючи над доповіддю, учні розвивають свої дослідницькі уміння і тим самим продовжує змогу формуватися дослідницька компетентність.

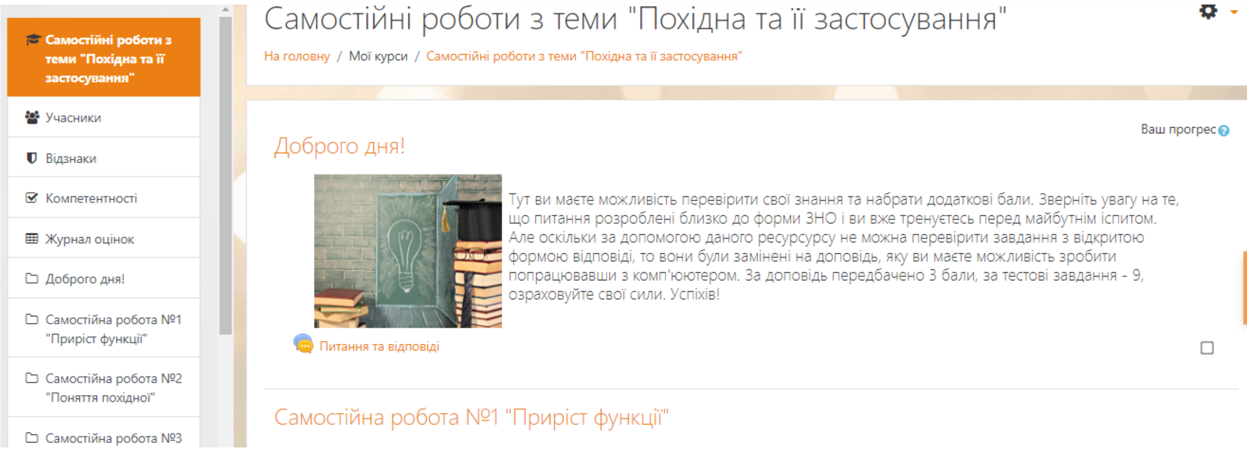


Рис. 2.11. Сайт на Moodle

Ми пропонуємо працювати з даним видом діяльності учням удома за бажанням, не в якості домашнього завдання, а в якості засобу саморозвитку. Мотивацією до виконання самостійних робіт на Moodle є додаткові оцінки та підготовка до ЗНО. Учні матимуть змогу отримати до 12 балів за кожну самостійну роботу, якщо крім тестів будуть виконувати дослідницьку роботу, за яку передбачено від двох до трьох балів в кожній самостійній, залежно від складності. Наприклад, за завдання «Знайдіть хто і коли перший вжив термін «похідна» та «Які ще «імена» похідної можна зустріти в різних мовах» передбачено 2 бали, а на завдання «Відтворіть біологічний або хімічний зміст похідної» – 3. За допомогою даного виду діяльності не тільки формується дослідницька компетентність учнів, а й відбувається мотивація до поглибленого вивчення матеріалу.

Звісно, вчитель повинен наголошувати коли саме учні мають змогу проходити той чи інший тест, але для зручності, у блоці кожної самостійної роботи учні можуть ознайомитись з рекомендаціями, де зазначено, що саме вони повинні знати на момент проходження тестування та надані корисні зауваження, як показано на рисунку 2.12.

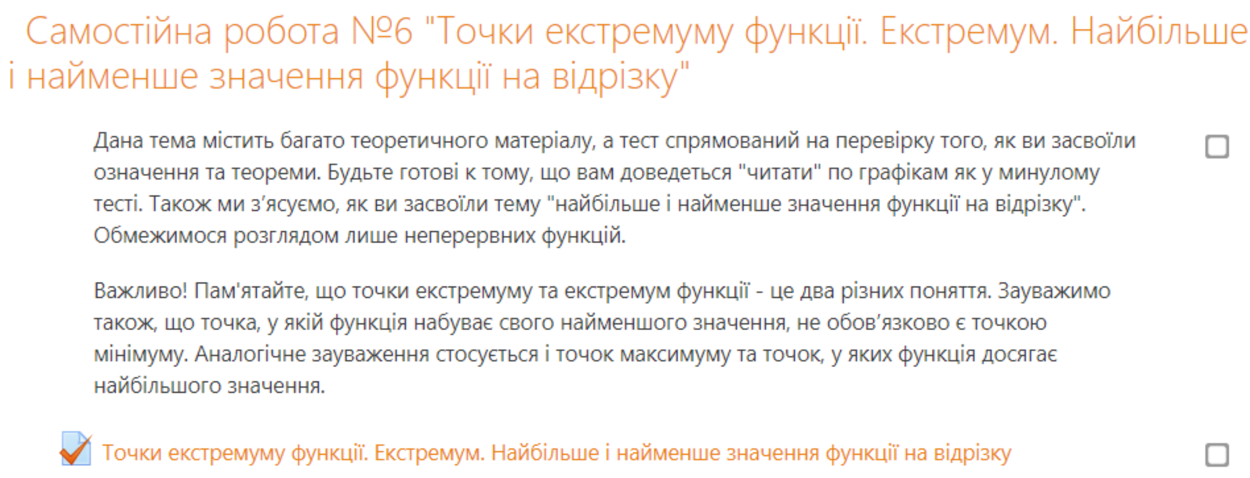


Рис. 2.12. Опис самостійної роботи

Тестові вправи перевіряються автоматично, а дослідницьке завдання вимагає перевірки вчителем, після якої останній затверджує оцінку та програма зберігає її. Результати своєї діяльності учні можуть побачити в «Журналі оцінок» (рисунок 2.13.). Вчитель також може побачити успіхи своїх учнів, «Журнал оцінок» має власне меню набір засобів, доступ до яких можна отримати з блоку «Адміністрування», за допомогою яких спрощується перегляд оцінок для вчителя.

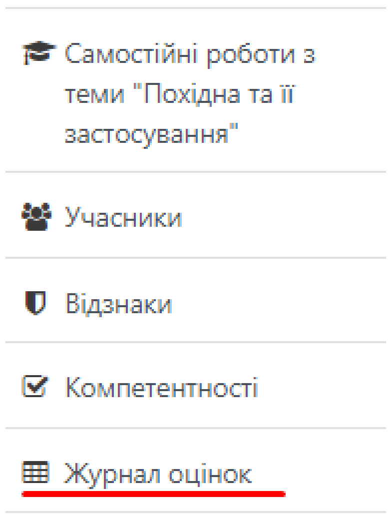


Рис. 2.13. Журнал оцінок

Дані самостійні роботи на Moodle є не єдиним засобом формування дослідницької компетентності, загалом вже з перших уроків тема «Похідна та її застосування» дає простір для формування даної компетентності. При розв'язуванні задач, які приводять до означення похідної, учні можуть діючи за аналогією, за умови якщо вже була розв'язана одна з задач, наприклад про миттєву швидкість, розв'язувати прикладні задачі економічного, біологічного, хімічного змісту. А при вивченні таблиці похідних доцільно проводити доведення похідних елементарних функцій. У підручнику звісно показаний метод доведення за допомогою означення, але оскільки клас з поглибленим вивченням, то їм буде цікаво доводити таблицю похідних і за допомогою геометричного змісту похідної. Даний спосіб можна організувати засобами додатку GeoGebra, що надає високий рівень наочності, а при вивченні теми «Похідна та її застосування» наочність є необхідною складовою уроку, оскільки дана тема є складною для учнів.

Ми розробили конспект уроку, який демонструє як саме можна впроваджувати запропоновані вище способи доведення таблиці похідних, розглянем його.

Конспект уроку

Тема: Вивчення таблиці похідних.

Мета.

навчальна:повторити і узагальнити застосування техніки диференціювання за допомогою означення похідної, організувати діяльність учнів на виведення похідних елементарних функцій;

розвивальна: розвивати аналітичне та критичне мислення, увагу, вміння працювати самостійно, інформаційну культуру учнів;

виховна: виховувати пізнавальний інтерес до математики, наполегливість, працелюбність.

Підручник: А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики (частина 1).

Тип уроку: комбінований урок.

План:

1. Організаційний момент (2 хв.)

2. Актуалізація опорних знань (5 хв.)
3. Дослідницька робота (20 хв.)
4. Розв’язування задач (15 хв.)
5. Підведення підсумків (3 хв.)

Хід уроку

1. **Організаційний момент.**
2. **Актуалізація опорних знань.**

— Пригадати означення похідної (вправа на LearningApps – https://learningapps.org/5559666)

— Як називається математична операція знаходження похідної функції?

— У чому полягає геометричний зміст похідної функції?

— У чому полягає фізичний зміст похідної функції?

3. **Дослідницька робота**

Похідна функції в точці – це число, а похідна функції в довільній точці з області визначення функції – це функція. Знаючи це, похідну функції можна обчислювати простіше, треба тільки зробити узагальнення щодо деяких елементарних функцій.

Розглянемо функцію $y = kx + b$та знайдемо її похідну за означенням.

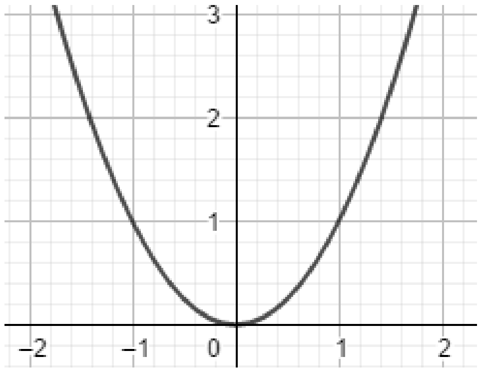
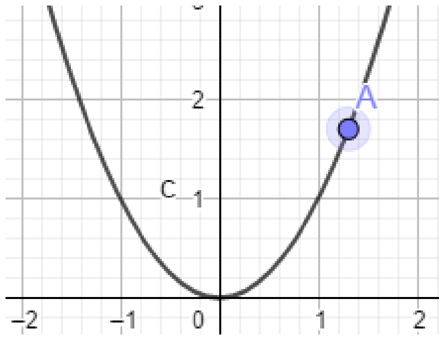
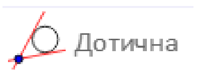
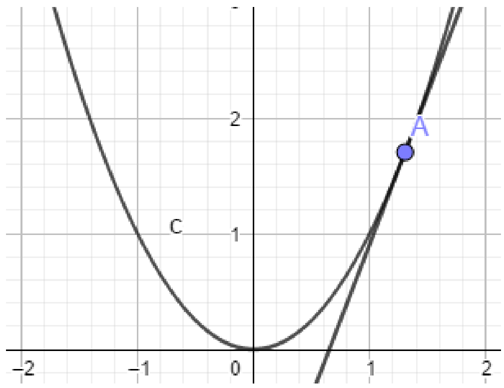
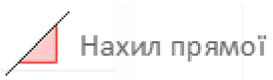
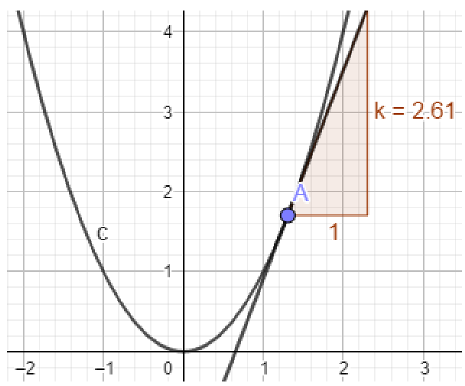
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(kx + k\Delta x + 2b) - kx - b}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k\Delta x + b}{\Delta x} = k$$

Тобто,$(kx + b)' = k$. Якщо припустити, що k = 0, b = C, де С — довільна постійна, то одержимо, що $C' = 0$, тобто похідна сталої дорівнює нуль. Якщо у формулі $(kx + b)' = k$ припустити, що k = 1, b = 0, то одержимо $x' = 1$.

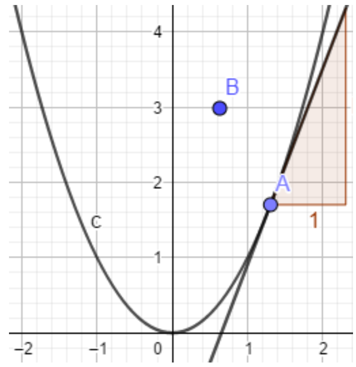
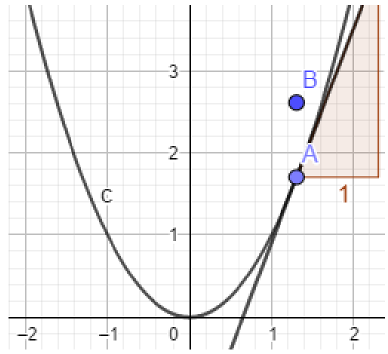
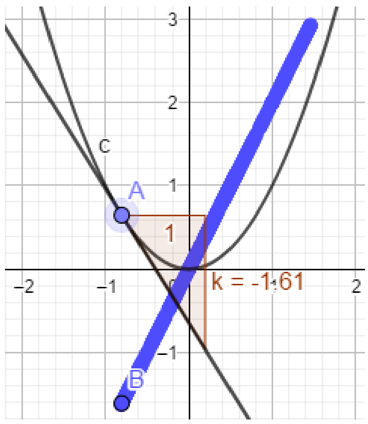
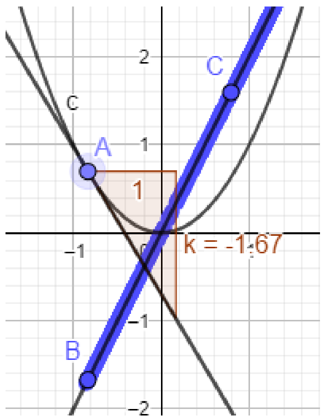
Доведемо, що похідна функції $y = x^2$ дорівнює $y' = 2x$ (побудови виконуються вчителем у GeoGebra, учні записують у зошитах).

Таблиця 2.4.

Доведення таблиці похідних засобами GeoGebra

Крок	Побудова
Відкриваємо GeoGebra та вгорі зліва, в рядку введення формул, записуємо функцію $y = x^2$. Вона автоматично будується.	
За допомогою інструменту  нанесемо на отриманий графік довільну точку.	
Використовуємо інструмент  та будуємо через отриману точку A дотичну. Для цього обираємо інструмент та натискаємо по-черзі на точку і функцію.	
Визначаємо кут нахилу дотичної до додатного напрямку осі абсцис. Обираєм  та клікаєм по дотичній. Спеціально підібрано так, що горизонтальний катет дорівнює 1, а вертикальний катет може змінюватися в	

Продовж. табл.2.4.

залежності від величини кута Для нас важливо позначення k.	
Обираєм довільну точку B за межами параболи.	
У рядку формул записуємо нові координати для цієї точки. Видаляємо попередні координати, пишем $B = (x(A), k)$ та натискаєм кнопку Enter.	
Вказуємо мишкою на точку B і натискаємо праву клавішу мишки, обираємо команду Залишати слід. Вказуємо на точку A і зажимаючи ліву кнопку миші, рухаємо точку A вгору і вниз по параболі.	
Обираеєм інструмент Пряма та проводим пряму через слід, що залишила точка B.	

Продовж. табл. 2.4.

У рядку вводу бачимо рівняння прямої, що залишила точка B і робимо висновки.	g : Пряма (B, C) → y = 2x

За допомогою даного прикладу ми довели, що $(x^2)' = 2x$. А в домашньому завданні ви повинні були дізнатись, використовуючи означення похідної, що$(x^3)' = 3x^2$

Отже, можна помітити закономірність, а саме: показник степеня зноситься наперед як коефіцієнт, а у степені він зменшується на одиницю:

$$x' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$$

Тоді для степеневої функції$y = x^n$ з будь-яким натуральним показником справедлива формула $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Ми можемо записати функції та їх похідні до таблиці і застосувати на наступних уроках за потреби.

4. Розв'язування задач

*Задача 1.*Знайти похідні функцій використовуючи таблицю похідних.

1) $y = x^4$
2) $y = x^{-15}$
3) $y = x^{-2.8}$
4) $y = x^{20}$
5) $y = 5x - 6$
6) $y = 9$
7) $y = \frac{1}{x^{17}}$
8) $y = \frac{1}{x^{-1}}$
9) $y = \frac{1-x}{3}$

Розв'язання:

1) $y' = 4x^3$
2) $y = -15x^{-16}$
3) $y = -2.8 \cdot x^{-3.8}$
4) $y = 20x^{19}$
5) y =5
6) $y = 0$
7) $y = -\frac{17}{x^{18}}$
8) $y = 1$

9) $y = -\frac{1}{3}$

Задача 2. Користуючись означенням похідної, знайдіть $f'(x)$, якщо:

1) $f(x) = \frac{3}{x}$ 2) $y = 4 - x^2$

Розв’язання:

1) $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$ 2) $f'(x) = -2x$

5. Підведення підсумків

Рефлексія.

Домашня робота. Почати оформлювати таблицю похідних та вивчити її. Знайти похідну функції $y = \sqrt{x}$ за допомогою означення та використовуючи GeoGebra.

Підручник № 9.3, 9.11.

Отже, даний конспект уроку демонструє впровадження дослідницької компетентності засобами доведення таблиці похідних за означенням та за допомогою додатку GeoGebra (таблиця 2.4.).

Спостерігаючи за діяльністю учнів на уроках алгебри та початків аналізу, можна зробити висновок, що здебільшого у школярів не сформоване на необхідному рівні вміння розв’язувати нестандартні задачі, виконувати дослідницькі завдання. Це є результатом того, що учні розв’язують однотипні завдання, дотримуючись зразка, що надав їм вчитель. Логіка побудови дослідницької діяльності включає в себе: формулювання проблеми дослідження, висунення гіпотези (для вирішення цієї проблеми), подальшу експериментальну або модельну перевірку висунутих припущень і формування результатів. Вважаємо, що саме така послідовність дій при виконанні нестандартних завдань з теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні буде сприяти формуванню у учнів дослідницької компетентності.

Розглянемо приклад конспекту уроку, що містить нестандартні задачі, при розв'язувані яких, у учнів формується дослідницька компетентність.

Конспект уроку

Тема: Застосування похідної до дослідження функцій та побудови їх графіків.

Мета.

навчальна:закріпити вміння застосовувати похідну для дослідження функції та побудови її графіка;

розвивальна: розвивати аналітичне та критичне мислення, увагу, вміння працювати самостійно;

виховна:виховувати пізнавальний інтерес до математики, наполегливість, працелюбність.

Тип уроку: урок застосування знань, умінь та навичок.

Підручник: А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якірпідручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики (частина 1).

План:

1. Організаційний момент (2 хв.)
2. Актуалізація опорних знань (8 хв.)
3. Розв'язування задач і вправ (30 хв.)
4. Підведення підсумків (5 хв.)

Хід уроку

1. Організаційний момент

2. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування.

- Що називають областю визначення функції?
- Дайте означення похідної функції.
- Які точки називають критичними?

– Що називають проміжками монотонності функції?

– Назвіть умови зростання та спадання функції.

– Що називають екстремальним значення функції?

– Назвіть умови існування точок перегину.

3. Розв'язування задач і вправ

Задача 1. З'ясувати чи є поданий на рисунку графік (де $y = -1$, $y = 1$, $x = -1$ – асимптоти), графіком функції $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$.

Розв'язання:

I. Постановка проблеми

Ставимо перед учнями задачу дізнатись чи є поданий на рисунку 2.14. графік (де $y = -1$, $y = 1, x = -1$ – асимптоти), графіком функції $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$.

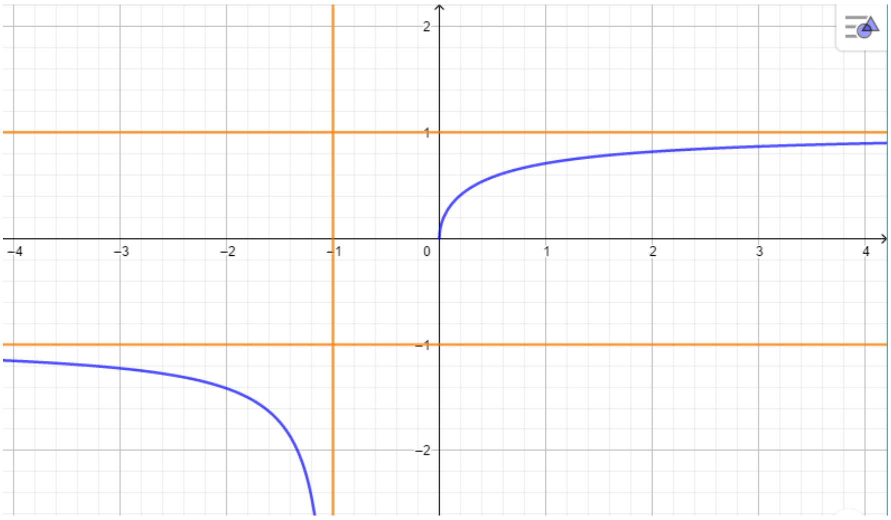


Рис.2.14. Графік

II. Висування гіпотез щодо розв'язання проблеми

Учні повинні прийти до висновку, що дане завдання можна виконати, якщо дослідити властивості даної функції за допомогою методів диференціального числення, які їм вже відомі з попередніх уроків. Після чого в процесі обговорення намічають для себе послідовність кроків виконання завдання.

III. Моделювання розв'язку

1) Область визначення функції.

$x^2 + x > 0$

$x(x+1) > 0$

$x_1 = 0, x_2 = -1$

Отримуємо $D(y) = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$

Розглянемо межі:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-1}} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to -1-0} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} + 1}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$$

Отримуємо, що $x = -1$ – вертикальна асимптота. (*Тут же звертаємо увагу учнів на рисунок 2.14. і робимо відповідний висновок).*

Знайдемо похилі асимптоти виду $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} = 0$$

$$b_1 = \lim_{x \to \infty}(y - kx) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = 1$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty}(y - kx) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = -1$$

Таким чином, $y = 1$ і $y = -1$ – горизонтальні асимптоти. Як видно з рисунку 2.14., графік побудованої функції нескінченно наближається до відповідних прямих.

2) Точки перетину з осями координат.

Функція не має точок перетину з осями координат, оскільки отримані результати не належать області визначення. (*Акцентуємо увагу, що точка* $(0; 0)$ *особлива, оскільки функція до неї нескінченно наближається*).

3) Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 + (-x)}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - x}}$$

Функція не є ні парною ні непарною, ні періодичною. *(Дійсно, на рисунку 2.14., графік не є симетричним ні відносно вісі Оу, ні відносно початку координат. Періодично функція не повторюється).*

4) Монотонність.

Знайдемо першу похідну функції:

$$y' = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + x}}\right)' = \frac{\sqrt{x^2 + x} - \frac{x\cdot(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}}}{\left(\sqrt{x^2 + x}\right)^2} = \frac{2x^2 + 2x - 2x^2 - x}{2\left(\sqrt{x^2 + x}\right)^3} =$$

$$= \frac{x}{2\left(\sqrt{x^2 + x}\right)^3} = \frac{1}{2(x + 1)\sqrt{x^2 + x}}$$

Отже, маємо критичні точки $x = 0$ і $x = -1$.

Дослідимо знак похідної на інтервалах, на які критичні точки ділять область визначення функції. Функція спадає на інтервалі (- ∞; – 1) та зростає на інтервалі (0;+∞) (*Запропонувати учням використовуючи означення зростаючої і спадної функції пояснити, як поводить себе функція на кожному з проміжків. Порівняти свої міркування зі знайденими аналітично результатами).*

5) Точки екстремуму і значення функції в точках екстремуму.

Функція згідно аналітичного розв'язання екстремумів не має (*Запропонувати учням пригадати означення екстремумів функції та за графіком переконатися, що таких точок функція, які володіють вказаними в означеннях властивостями, не має).*

6) Проміжки опуклості і точки перегину.

$$y'' = \left(\frac{x}{2\left(\sqrt{x^2 + x}\right)^3}\right)' = \frac{\sqrt{x^2 + x}^3 - 3x\sqrt{x^2 + x}^2 \cdot \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}}{2\left(\sqrt{x^2 + x}\right)^6} = -\frac{4x^2 + x}{4(\sqrt{x^2 + x})^5}$$

Прирівняємо отриману функцію до нуля і знайдемо наступні точки:

$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = -\frac{1}{4}$. Дослідимо знак похідної на інтервалах, на які дані точки ділять область визначення функції. Функція опукла на інтервалах$(-\infty; 1)$, $(0; +\infty)$, точок перегину немає (*Звернути увагу учнів, що обидві частини графіка функції, дійсно, опуклі догори*).

IV. Висновки та презентація результатів

Отже, графік на рисунку 2.14. є графіком даної функції, оскільки всі дослідженні властивості функції можна «побачити» на побудованому графіку. (*Звертаємо увагу учнів на отриману схему повного дослідження функції та за допомогою створеного алгоритму розв'язуємо наступну вправу*).

Задача 2. Дослідити функціюу$y = x^3 - x^2$ та побудувати її графік за допомогою алгоритму.

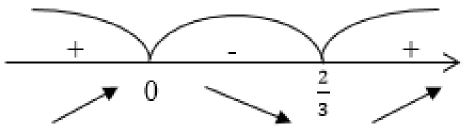
Розв'язання:

Таблиця 2.5.

Розв'язання задачі

№	**Алгоритм**	**Пояснення**	**Хід роботи**
1	$D(y)$	Всі значення, що може приймати аргумент *x*.	$D(y) = R$
2	Дослідити парність (непарність), періодичність функції	Якщо $f(x) = f(-x)$, то функція парна. Якщо $f(x) = -f(x)$, то функція непарна	$y(x) = x^3 - x^2$ $y(-x) = -x^2 - x^2 = -(x^3 + x^2)$ Функція ні парна, ні непарна
3	Знайти точки перетину з віссю Ox	Точки, ордината яких дорівнює 0 ($y = 0$)	$x^3 - x^2 = 0$ $x^2(x - 1) = 0$ $x^2 = 0;\quad x - 1 = 0$ $x_1 = 0 x_2 = 1$

Продовж. табл. 2.5.

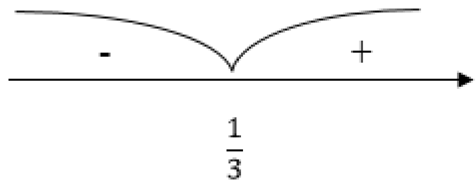
<table>
<tr><td></td><td>Знайти точки перетину з віссю Oy</td><td>Точки, абсциса яких дорівнює 0 (x = 0)</td><td>$0^3 - 0^2 = 0$
$\underline{y = 0}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Знайти похідну та критичні точки</td><td>Критичні точки – точки, в яких похідна дорівнює 0 або не існує.</td><td>$y' = 3x^2 - 2x$
$3x^2 - 2x = 0$
$x(3x - 2) = 0$; $\underline{x = 0}$; $3x - 2 = 0$
$3x = 2$
$x = \frac{2}{3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>Дослідити на монотонність</td><td>Якщо на деякому проміжку y' >0, то функція зростає на цьому проміжку, якщо y' < 0, то функція спадає на проміжку.</td><td>

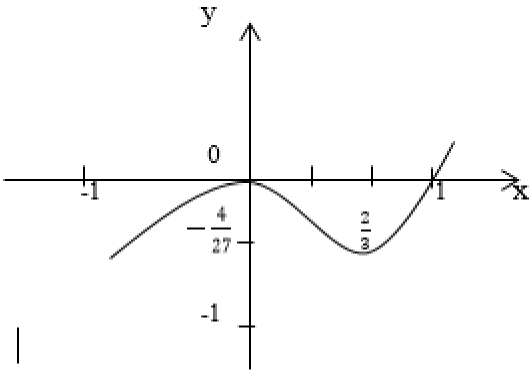
$(0;\frac{2}{3})$функція спадає,
$(-\infty;0)\cup(\frac{2}{3};\infty)$функція зростає</td></tr>
<tr><td>Знайти точки екстремума і екстремальні точки</td><td>Якщо похідна при переході через критичну точку змінює знак «–» на «+», то це точка мінімума; якщо з «+» на «–» – точка максимума.

Екстремальні значення функції $y_{max} = y(x_{max})$ та $y_{min} =$ $= y(x_{min})$</td><td><table>
<tr><td>x</td><td>$(-\infty;\ 0)$</td><td>0</td><td>$(0;\frac{2}{3})$</td><td>$\frac{2}{3}$</td><td>$(\frac{2}{3};+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>↗</td><td>0</td><td>↘</td><td>$-\frac{4}{27}$</td><td>↗</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>max</td><td></td><td>min</td><td></td></tr>
</table>
$x_{max} = 0$
$x_{min} = \frac{2}{3}$
$y_{max} = 0$
$y_{min} = -\frac{4}{27}$</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 2.5.

<table>
<tr>
<td>6</td>
<td>Знайти проміжки опуклості та точки перегину</td>
<td>Для точок перегину функції y виконується $y''(x) = 0$

Якщо $y''(x) < 0$, то функція $y(x)$опукла вгору, якщо $y''(x) >> 0$, то функція опукла вниз.</td>
<td>$$y'' = 6x - 2$$
$$6x - 2 = 0$$
$$x = \frac{1}{3}$$


На проміжку $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ функція опукла вгору, а на проміжку $\left(\frac{1}{3}; \infty\right)$ – вниз</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>Будуємо графік функції</td>
<td></td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Задача 3. Знайти помилку в дослідженні функції $y = x^4 - x^2$.

Розв'язання:

1.Область значень.

$D(y) = R$

2.Точки перетину графіка з осями Ox та Oy

з віссю Ox: $x^4 - x = 0$

$x^2 (x^2 - 1) = 0$

<u>$x = 0$, $x = 1$, $x = -1$</u>

з віссю Oy: <u>$y = 0$</u>

3.Парність (непарність), періодичність функції

Функція непарна, неперіодична.

4.Похідну та критичні точки

$y' = (x^4 - x^2)' = 4x^3 - 2x$

$4x^3 - 2x = 0$

$x = 0, x = \frac{1}{\sqrt{2}}, x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

5.Монотонність, точки екстремуму та екстремальні точки

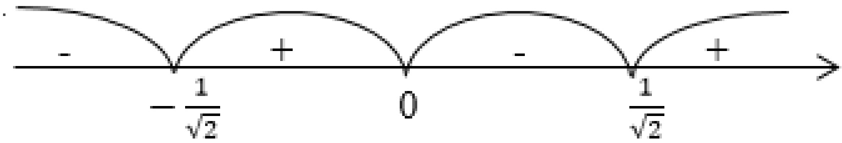


Рис. 2.15. Дослідження функції

$y'(2) = 4 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 28 > 0$

$y'\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$

$y'\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0$

$y'(-2) = 4 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2) = -28 < 0$

x	$(-\infty; -1)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0)$	0	$(0; \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(1; +\infty)$
$y'(x)$	$-$	0	+	0	$-$	0	+
$y(x)$	↘	$-\frac{1}{4}$ *min*	↗	0 *max*	↘	$\frac{1}{4}$ *min*	↗

$$y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$y(0) = 0$

$$y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

6.Побудова графіка.

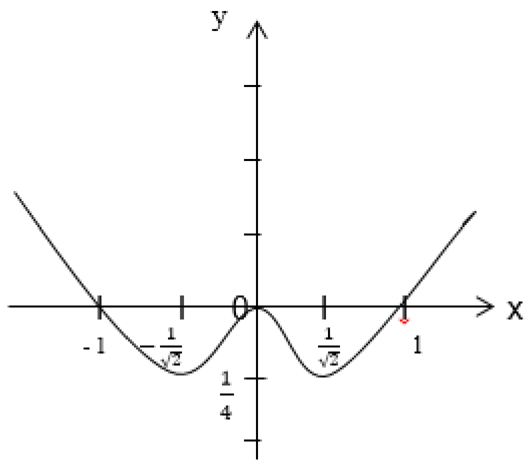


Рис. 2.16. Графік функції

4. Підведення підсумків

Рефлексія.

Домашнє завдання. Дослідити функції за алгоритмом та побудувати їх графіки:

1) $y = 2x^3 - x^2 + 5$

2) $y = \frac{4-x}{x-2}$.

За допомогою розглянутого конспекту уроку можна побачити, що виконання запропонованої послідовності дій, які випливають з логіки побудови дослідницької діяльності (формулювання проблеми дослідження, висунення гіпотези для вирішення цієї проблеми і подальшу експериментальну або модельну перевірку висунутих припущень), при розв'язуванні нестандартних завдань з теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні, сприяють формуванню дослідницької компетентності.

Вважаємо, що виконання таких завдань, сприяє формуванню в учнів дослідницької компетентності, оскільки вимагає від учнів використовувати отриманні знання та відпрацьовані алгоритми в нових ситуаціях.

Оскільки для формування дослідницької компетентності необхідно установлювати зв'язки з попередніми результатами, будувати аналітичні моделі та формулювати математичні задачі, то на уроках доцільно пропонувати задачі прикладного змісту та схему їх розв'язування, розглянемо на прикладі наступної задачі.

Задача 1. Молодий підприємець Юрій в період економічної кризи вирішив викупити нерентабельне переробне підприємство і запросив економіста Германа допомогти з розрахунками по оптимізації витрат. Одна із задач, поставлених перед Германом, була наступна: знайти, за яких умов витрата жерсті на виготовлення консервних банок циліндричної форми заданої ємності буде найменша.

Розв'язання.

Перший етап. Складання математичної моделі.

Складання моделі полегшується тим, що відома форма банки і обумовлено, що вона повинна бути заданої ємності. Це істотно для складання моделі. Істотним є також вимога, щоб витрата жесті виготовлення банки була мінімальною. Ця вимога означає, що площа повної поверхні банки, що має форму циліндра, повинна бути найменшою; істотні і розміри банки. Несуттєві для складання математичної моделі чисельне значення ємності банки і вид консервів, для яких банка призначена.

Позначивши ємність банки через V $(\text{од.дов.})^3$, Сформулюємо задачу: Визначити розміри циліндра з об'ємом $V(\text{од.дов.})^3$ так, що б площа його повної поверхні була найменшою.

Для розв'язання завдання позначимо радіус основи циліндра через x, а висоту його через h (всі вимірювання в сантиметрах). Тоді об'єм циліндра $V = \pi x^2 h \to h = \frac{V}{\pi x^2}$. Повна поверхня циліндра $S = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 +$ $+\frac{2\pi x V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x} = \frac{2\pi x^3 + 2V}{x}$.

Отже, $S(x) = \frac{2\pi x^3 + 2V}{x}$.

Оскільки змінна x може набувати тільки додатні значення, то розв'язання задачі зводиться до знаходження найменшого значення $S(x)$ на проміжку $(0; \infty)$.

Другий етап. Робота з складеною моделлю.

Знайдемо похідну $S'(x)$:

$S'(x) = \left(\frac{2\pi x^3+2V}{x}\right)' = \frac{4\pi x^3-2V}{x^2}$.

Для знаходження критичних точок розв'язуємо рівняння $S'(x) = 0$.

Корінь рівняння: $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

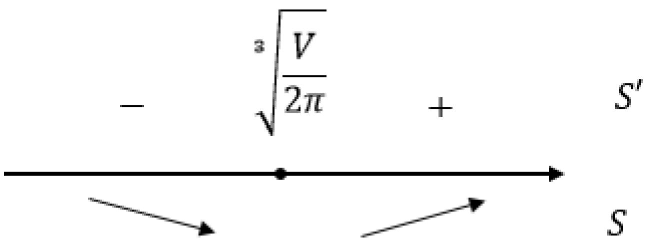


Рис. 2.17. Дослідження на точки екстремуму

Отже, в точці $x = S(x)$ маємо мінімум. Отже, функція в цій точці досягає найменшого значення. Таким чином, площа повної поверхні циліндра, що має об'єм V, буде найменшою при $h = 2x = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$, тобто коли циліндр рівносторонній.

Третій етап. Відповідь на питання задачі.

Найменша витрата жерсті на виготовлення консервних банок циліндричної форми заданої ємності буде досягнуто за умови, що діаметр основи і висота банки рівні між собою.

Даний вид задач є дуже змістовним і потребує неабияких логічних міркувань, але надає високий рівень наочності та дозволяє показати методи використання похідної в житті, тому є дуже доцільним. Ми дібрали декілька задач прикладного змісту, які також можна пропонувати учням.

Задача 2. Сашко вирішив зробити своїй мамі подарунок до 8 березня і замовив у друга Дениса шкатулку з дорогоцінного металу. В майстерню він приніс шматок листа з цього металу розміром 32 см. на 20 см. Потрібно виготовити відкриту зверху коробку найбільшої місткості, вирізаючи по кутах квадрати і загинаючи кромки, що залишилися. (*Відповідь: при х = 4 см об'єм шкатулки буде найбільший).*

Задача 3. Легенда про заснування Карфагена свідчить, що коли фінікійський корабель пристав до берега, місцеві жителі погодилися продати прибулим стільки землі, скільки можна застелити шкурою бика. Але хитра фінікійська цариця Дідона розрізала цю шкуру на ремінці, зв'язала їх і відгородила ременем велику ділянку землі, що примикала до моря. Вважаючи берег моря прямолінійним, а огороджену ділянка прямокутною, спробуйте приблизно визначити, яку площу мала змогу, зайняти Діодона, якщо розмір шкури 4 $м^2$, а ширина ремінців, на які Дідона її розрізала, 1 мм. (*Відповідь: 1 км*^{2}).

Задача 4. Паперовому змію, який має форму кругового сектора, бажають надати таку форму, щоб він вміщав в даному периметрі $P = 80$ см найбільшу площу. Якими мають бути розміри паперового змія? (*Відповідь: 20, 40*).

Задача 5. Функція прибутку фірми має вигляд: $P(Q) = R(Q) - C(Q) = = \frac{2}{5}Q^2 - 4Q + 20$, де $R(Q)-$ виручка, $C(Q)-$ витрати. Скільки слід фірмі виробляти продукції, якщо її виробничі потужності обмежені обсягом виробництва $Q = 3$. (*Відповідь: при Q=3 вигідно нічого не виробляти*).

Після розв'язання подібних задач можна запропонувати учням попрацювати над проектом, який буде показувати в яких сферах нашого життя можна використовувати похідну. Діти повинні розуміти, що за допомогою похідної можна розв'язувати різнопланові задачі практичного характеру.

Необхідність оволодіння учнями дослідницької компетентності пов'язана з вимогами, які диктує сучасне суспільство. Поява нових форм переробки та отримання інформації, розширення і ускладнення соціального досвіду зумовили значущість даної компетентності. Завдання самого вчителя – організувати дослідницьку діяльність учня, навчити його самостійно здобувати інформацію, формувати власну точку зору, вміти її аргументувати і застосовувати отримані знання на практиці.

Варто відзначити, що в науковій літературі з методики навчання математики проблема залучення учня до навчально-дослідницької діяльності реалізується через розв'язання спеціальних дослідницьких завдань або через додаткову роботу над завданням, що ми і показали у даній роботі.

Результатом сформованості даної компетентності є здатність учня переносити дослідницький підхід на різні сфери діяльності і застосовувати її в різних ситуаціях, що говорить про багатофункціональність, універсальність і надпредметність дослідницької компетентності.

2.3. Методи, засоби і форми компетентнісного підходу до навчання теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні математичної підготовки учнів

У школі урок залишається основною формою організації навчального процесу. Сучасний урок, зорієнтований на реалізацію компетентнісного підходу в навчанні, має вирішувати ряд завдань. Це зокрема:

- підвищеним рінння мотивації учнів;
- використання суб'єктивного досвіду набутого учнями;
- ефективне та творче застосування знань та досвіду на практиці;
- формування у учнів навичок отримувати, осмислювати та використовувати інформацію з різних джерел;
- здійснення організаційної чіткості та оптимізації кожного уроку;
- підвищення рівня самоосвітньої та творчої активності учнів;
- створення умов для інтенсифікації навчально-виховного процесу;
- наявність контролю, самоконтролю та взаємоконтролю за процесом навчання;
- формування моральних цінностей особистості; розвиток соціальних та комунікативних здібностей учнів;
- створення ситуації успіху [57].

Розроблені нами уроки (пункт 2.2) відповідають вимогам компетентнісного підходу та передбачають не лише організацію навчально-пізнавальної діяльності, а й інтелектуальний розвиток, формують в учнів потребу в знаннях, активності, самостійність, працьовитість, дисциплінованість.

Урок вважають основною формою навчальної діяльності, але слід також пам’ятати про важливість проведення факультативів з теми дослідження, якщо підійти творчо до даного виду навчальних занять, то можна вирішити проблему мотивації і зацікавленості учнів у вивченні похідної шляхом розмаїття видів діяльності. Також факультативи допоможуть закріпити знання, уміння і навички, отримані на уроках та поглиблять їх.

Факультатив (від франц. facultatif – необов'язковий, від лат. facultas – можливість, здатність) – навчальний предмет, курс, який учні або студенти вищого навчального закладу вивчають за бажанням з метою поглиблення й розширення наукових і прикладних знань [33].

О. М. Саломатнікова вбачає наступне призначення (спрямування змісту) факультативних курсів [49, с. 7]:

- розвиток творчих здібностей учнів відповідно до їхніх пізнавальних інтересів;
- орієнтація на формування здатності особи до самовизначення, на підготовку учнів до активної інтелектуальної праці;
- реалізація ідей загального, інтелектуального та морально-етичного розвитку особистості;
- сприяння глибшому ознайомленню з одним або кількома предметами певної освітньої галузі;
- створення оптимальних умов для роботи з інтелектуально та творчо обдарованими учнями.

Тобто, можна сказати, що факультативні заняття як одна з форм навчально-виховного процесу в школі ставить своєю метою розвиток пізнавальних інтересів, здібностей та формування професійної орієнтації учнів, оволодіння методами наукових досліджень.

З метою впровадження компетентнісного підходу ми розробили факультативний курс для вивчення у 10 класі, який має назву «Похідна та її застосування». Мета факультативного курсу – систематизувати та поглибити знання учнів про похідну та її застосування до розв'язання задач різних типів. Курс, як ми бачимо з таблиці 2.6. розрахований на 10 годин, тобто по одній годині на тиждень.

Таблиця 2.6.

Розподіл навчального часу

№	Тема	Кількість годин
1	Похідна функції (застосування означення похідної, відпрацювання таблиці похідних, розв'язування задач геометрії, фізики, економіки, біології)	2
2	Застосування похідної до розв'язування задач на дослідження функції (знаходження екстремумів, проміжків зростання спадання та опуклості функції)	5
3	Застосування похідної до розв'язування задач (розв'язування рівнянь, нерівностей, доведення тотожностей)	3
	РАЗОМ	10

Детальніше розглянемо зміст навчального матеріалу та вимоги до навчальних досягнень учнів при роботі на факультативному занятті за допомогою таблиці 2.7.

Таблиця 2.7.

Зміст навчального матеріалу та вимоги до навчальних досягнень учнів

Кількість годин	Зміст навчального матеріалу	Математичні компетентності учнів
3	**Тема 1. Похідна функції**	
3	• задачі, приводять до поняття похідної; • формулювання означення похідної за допомогою «чотирьох кроків»;	• формулює та розуміє означення похідної; • знаходить похідну функції в точці; • застосовує похідну до
	• усвідомлення геометричного та ме-ханічного змісту похідної; • похідні функцій; правила диференціювання; • похідні складеної та оберненої функції;	наближених обчислень; • знає та вміє застосовувати таблицю похідних; • диференціює складні та обернені функції;
5	**Тема 2. Застосування похідної до розв'язування задач на дослідження функції**	
1	• Основні теореми диференціального числення;	• Знає та вміє застосувати теореми Ферма, Ролля, Лагранжа;
1	• зростання і спадання функції; • необхідна і достатня умова екстремуму; • знаходження найбільшого і найменшого значень	• формулює умови зростання, спадання функції, екстремуму; • усвідомлює зміст критичних і стаціонарних точок;

Продовж. табл. 2.7.

1	функції;	• розв'язує задачі на знаходження найбільшого і найменшого значень функції;
1	• опуклість функції; • точки перегину; • теорема Йєнсена;	• описує поняття опуклості функції та точок перегину; • формулює та застосовує ознаки опуклості функції вниз та догори, теорему про точки перегину; • відтворює теорему Йєнсена;
1	• застосування похідної до дослідження функції, побудова графіку функції;	• вміє знаходити екстремуми функції, • визначає проміжки зростання та спадання функції; • досліджує функцію на опуклість та асимптоти; • будує графік;
1	• прикладні міжпредметні задачі	• розв'язує задачі геометрії, фізики, економіки, біології засобами диференціального числення;
2	**Тема 3. Застосування похідної до розв'язування задач**	
2	• розв'язування рівнянь, нерівностей, доведення тотожностей;	• застосовує похідну для доведення тотожностей та нерівностей, а також для

Продовж. табл. 2.7.

		розв’язування рівнянь і нерівностей;

Структура вивчення даної теми хоча й відповідає класичній схемі її подання в загальноосвітній школі, проте має деякі особливості. Ефективність факультативного заняття значною мірою залежить від ступеня творчого управління вчителем цим процесом, крім того хоч ми і говоримо про класи з поглибленим рівнем, але мотивувати учнів відвідувати факультативи необхідно, саме тому ми пропонуємо проводи даний вид занять використовуючи нестандартні технології, такі як: обговорення проблеми в загальному колі під час засвоєння вмінь та навичок, розв’язування складних задач або для пошуку різних способів розв’язування однієї задачі; мозковий штурм під час закріплення вмінь та навичок; групова робота під час інтенсивної перевірки обсягу й глибини наявних знань.

Одним із прикладів групової роботи є технологія «Карусель». Вчитель об’єднує учнів по-троє у групи, кожен член групи має відповідний номер від одного до трьох, утворені групи займають парту у класі утворюючи коло та отримують завдання обмежене часом. Після того, як запланований на виконання завдання час сплинув, перші номери залишаються на місцях, другі номери переходять по колу до наступної групи, а треті номери перестрибують через одну групу і також змінюють положення, рух відбувається за годинниковою стрілкою (рисунок 2.18.). З кожною зміною груп вчитель дає дітям нове завдання.

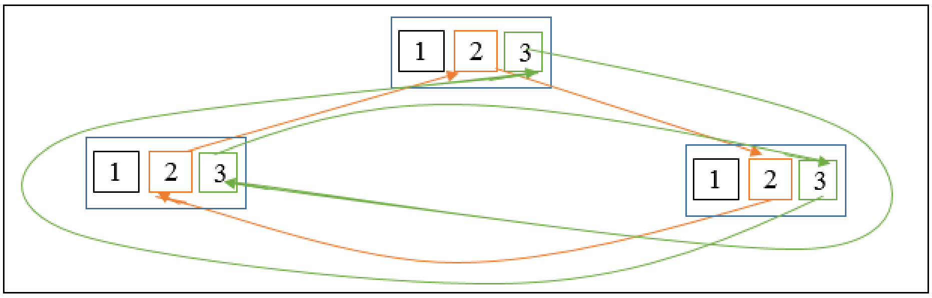


Рис. 2.18. Схема зміни учнів в групі

Дану технологію можна використовувати під час факультативного заняття з теми «Застосування похідної до розв’язування задач на дослідження функції», метою якого є застосування похідної до дослідження функції та побудова графіку функції таким чином: пропонуємо учням функцію, кожен етап її дослідження розв’язується у різних групах. Таким чином учні відпрацьовують навички дослідження функції, мають змогу виправити помилки, допущені з минулою групою або навпаки переконуються у правильності розв’язку.

Крім того заняття, присвячені застосуванню похідної до дослідження функції і побудови графіка, необхідно побудувати таким чином, щоб не лише навчити учнів алгоритму дослідження, а й виховати у них графічну культуру, сформувати вміння бачити, читати й розуміти графіки для подальшого застосування цих знань під час розв’язування задач, і робота в групах та читання графіків інших команд допоможе у цьому.

В класах з профільним вивченням математики недостатньо обмежитися розглядом застосування похідної до розв’язування задач з алгебри та геометрії. Доцільно розглянути використання похідної також в інших сферах людської діяльності, зокрема у фізиці, економіці, біології, виробництві, підприємництві. На факультативному зайнятті присвяченому міжпредметним зв’язкам доцільним буде використання технології «Акваріум», вона полягає у тому, що вчитель об'єднує дітей у дві-чотири групи і пропонує завдання для виконання та, можливо, необхідну інформацію, одна з груп сідає в центр класу (або на початку середнього ряду в класі, де стоять парти) та утворює своє маленьке коло. Учні цієї групи починають обговорювати план розв’язування запропонованої вчителем задачі. Групі, що працює, для виконання завдання необхідно прочитати вголос ситуацію, обговорити її в групі, використовуючи метод дискусії, дійти спільного розв’язку за певний період часу.

Всі інші учні класу мають тільки слухати, не втручаючись в хід обговорення та робити помітки етапів розв’язування задачі. Після закінчення часу відведеного на розв’язання, група займає свої місця, а клас обговорює доцільність обраного методу розв’язання задачі та правильність розв’язку.

Після цього місце в «Акваріумі» займає інша група та оговорює наступну задачу. Усі групи по черзі мають побувати в «Акваріумі», і діяльність кожної з них мусить бути обговорена класом.

Прикладні задачі передбачають використання логічного мислення та потребують ідей, за допомогою роботи у групі можна швидше прийти до консенсусу та знайти шляхи розв’язання задачі. А обговорення з класом може допомогти знайти альтернативні методи розв’язування та сприятиме розвитку математичної мови.

Також у нашому факультативі пропонується разом з класичними задачами на застосування похідної розглянути нетрадиційне її використання: розв’язання рівнянь і нерівностей, доведення тотожностей, що для дітей, які навчаються на профільному рівні повинно бути доведене до автоматизму.

На факультативних зайняттях вчитель має відійти від традиційної форми уроку та запропонувати нестандартні технології. Це в свою чергу буде слугувати мотивацією учнів до відвідування факультативних занять та послугує поглибленню знань з теми «Похідна та її застосування», оскільки вчить учнів працювати у нестандартних умовах, пробуджує творчу активність, вчить спиратися на отриманий раніше досвід з інших областей знань.

Отже, з метою формування в учнів математичної компетентності ми розробили систему інтерактивних вправ і рівневих завдань та факультативний курс до теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні математичної підготовки учнів.

Висновки до розділу 2

З метою формування предметної математичної та дослідницької компетентності у другому розділі ми розробили систему інтерактивних вправ на платформі LearningApps, метою яких є застосування, поглиблення, перевірка знань з теми «Похідна та її застосування». У ході роботи ми також запропонували способи використання програми GeoGebra у якості урочної та домашньої діяльності, розробили конспекти уроків, в яких передбачено використання інформаційно-комунікаційних технологій.

За допомогою інформації, яку ми отримали опрацювавши програму зовнішнього незалежного оцінювання, нами був створений курс на платформі Moodle, що містить самостійні роботи з теми «Похідна та її застосування». Даний курс спрямований на підготовку учнів до ЗНО та формування дослідницької компетентності за допомогою виконання пошуково-дослідницької роботи.

Для поглиблення знань з теми «Похідна та її застосування» та додаткової мотивації учнів ми розробили факультативний курс з методичними рекомендаціями, в яких висвітлені переваги використання нестандартних технологій під час проведення факультативів.

Була розроблена система рівневих завдань, орієнтованих на формування предметної математичної компетентності та дослідницької компетентності при вивченні теми «Похідна та її застосування».

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження, присвячене удосконаленню методики навчання теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні вивчення математики.

В ході написання даної кваліфікаційної роботи розглянуто можливості впровадження компетентнісного підходу у навчання математики учнів старшої школи. Розкрито основні поняття компетентнісного підходу, ключові компетентності та предметно-галузеві математичні компетентності.

У роботі проаналізовано науково-методичну та навчальну літературу з теми дослідження, зроблено аналіз навчальних програм з математики профільного і поглибленого рівня та аналіз підручників для учнів 10-11 класу з алгебри та початків аналізу.

Виконано логіко-математичний аналіз теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні навчання математики з точки зору реалізації компетентнісного підходу. В ході даної роботи було розроблені узагальнюючи таблиці, календарне планування та структурна схема вивчення теми.

Розкрито методичні особливості навчання учнів теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні та розроблено методику формування предметної математичної компетентності та дослідницької компетентності учнів при вивченні даної теми.

У роботі представлено інтерактивні та тренувальні вправи, система рівневих завдань з теми, самостійні і контрольні роботи, конспекти компетентнісно-орієнтованих уроків. На платформі Moodle створено сайт з самостійними роботами до теми, які передбачають виконання дослідницького завдання для формування дослідницької компетентності. Розробили факультативний курс «Похідна та її застосування» для підтримки вивчення теми в класі. Розробили та запропонували фори роботи із динамічною математичною програмою GeoGebra. Виділили способи застосування інформаційно-комунікаційних технологій на уроках з теми «Похідна та її застосування», з метою формування математичної і, зокрема, дослідницької компетентності.

Підготовлені методичні рекомендації щодо вивчення теми на засадах компетентнісного підходу на поглибленому рівні математичної підготовки учнів.

Поставлена мета досягнута, завдання виконані повністю. Проведене дослідження не вичерпує всіх проблем удосконалення математичної підготовки учнів старшої школи, і дослідження, сфокусовані на удосконалення компетентнісно-орієнтованої методики навчання теми «Похідна та її застосування» є перспективними.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ачкан В. В. Використання прикладних задач у процесі вивчення похідної у курсі алгебри та початків аналізу в класах різних профілів / В. В. Ачкан, О. В. Ніколаєва // Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). – Бердянськ: БДПУ, 2011. – № 2. – 360 с.

2. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 классов средней школы / Башмаков Марк Иванович. – 2-е издание. – М.: Просвещение, 1992. – 351 с.

3. Бевз Г. П. Методика викладання математики. Навчальній посібник / Бевз Григорій Петрович. – 3-те видання, доповнене і перероблене.– К.: Вища школа, 1989. – 369 с.

4. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие / Берман Георгий Николаевич – 22-е изд., перераб. – СПБ., Изд-во «Профессия», 2001. – 432 с.

5. Бібік Н. М. Компетентністна освіта – від теорії до практики / Н. М. Бібік., І. Г. Єрмаков, О. В. Овчарук. – К.: Плеяда, 2005. – 120 с.

6. Блог вчителя математики Голич А. В. [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://teacherslifesite.wordpress.com/.– Назва з екрану. – Мова укр.

7. Ващенко Г. Г. Загальні методи навчання: підручник для педагогів / Ващенко Григорій Григорович. – 1-е видання. – К.: Українська видавнича спілка, 1997. – 441 с.

8. Виленкин Н. Я. Математический анализ: учебное пособие / Н. Я. Виленкин, С. И. Шварцбруд. – М.: Просвещение, 1973. – 512 с.

9. Вишневський О. І. Теоретичні умови сучасної української педагогіки: посібик для студентів вищих навчальних закладів / Вишневський Олег Іванович. – Дрогобич: Коло, 2003. – 528 с.

10. Головань М. С. Математична компетентність: сутність та структура / М. С. Головань. // Науковий вісник Східноєвропейського національного університету. – 2014. – № 1. – С. 35–39.

11. Головань М. С. Сутність та зміст поняття «дослідницька компетентність» / М. С. Головань, В. В. Яценко // Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі: збірник наукових праць. Випуск VII.– Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2012. – с. 55-62.

12. Гончаренко С. У. Український педагогічний словник / Гончаренко Семен Устинович. – К.: Либідь, 1997. – 376 с.

13. Динамічна І. С. Використання СКМ GeoGebra під час навчання учнів теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні вивчення математики / І. С. Дереза, О. А. Іванова // Новітні комп'ютерні технології. – Кривий Ріг: Видавничій центр ДВНЗ «Криворізький національний університет», 2018. – Том XVI. – с. 269-274.

14. Дереза І. С., Формування дослідницької компетентності учнів при вивченні теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні / І. С. Дереза, О. А. Іванова // ВІСНИК Міжнародного дослідного центру: «Людина: мова, культура, пізнання»: наук. журн.: за заг. ред. В. В. Корольського. – Кривий Ріг: КДПУ, МДЦ «ЛМКП», 2018. – Том 42. – с. 171-178.

15. Дубовик В. П. Вища математика: Навчальний посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрнік. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

16. Жалдак М. І. Математика з комп'ютером: посібник для вчителів / М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко. – 3-е видання. – К.: Видавництво НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. – 315 с.

17. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. І. Допрофільна підготовка: Факультативи та курси за вибором / Упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. – Х.: Вид-во «Ранок», 2011. – 320 с.

18. Звєрєва Г. Ф. Компетентнісний підхід до навчання учнів на уроках математики: Методичний посібник для вчителів / Зверєва Галина Іванівна. – Харків: РМК Московського РУО, 2008. – 81 с.

19. Капкаева Л. С. Теория и меодика обучения математике в 2 частях / Капкаева Лидия Семёновна. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – Часть 2: учебное пособие для СПО. – 191 с.

20. Клименко О. О. Компетентнісний підхід до навчання учнів на уроках математики / О. О. Клименко // Управління освіти, сім’ї, молоді та спорту Білгород-Дністровської міської ради, 2018. – 56 с.

21. Колмогоров А. М. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебное пособие для общеобразовательных организаций / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын // Под редакцией А. М. Колмогорова. – 26-е издание. – М.: Просвещение, 2018. – 384 с.

22. Корольський В. В. Математичний аналіз. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної / Корольський Володимир Вікторович. – Кривий Ріг, 2013.– ч. 2-а. – 393 с.

23. Кривенко Я. В. Формирование исследовательской компетентности старшеклассников в условиях профильной школы : дис. на соиск. уч. ст. канд. пед. наук / Кривенко Ян Васильевич // Тюменский областной государственный институт развития регионального образования. Омск. гос. пед. ун-т. – Омск, 2006. – 191с.

24. Кудрявцев Л. Д. Мысли о современной математике и ее изучении / Кудрявцев Лев Дмитриевич. – М.: Наука, 1977. – 65 с.

25. Кудрявцев Л. Д. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: Учебное пособие / Л. Д. Кудрявцев., А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин // Под ред Л. Д. Кудрявцева – 2-е изд., перераб – М. ФИЗМАТЛИТ, 2003 – 496 с.

26. Логвіненко Н. М. Факультативи як форма організації диференціації та індивідуалізації навчання старшокласників /

Н. М. Логвіненко // Українська література в загальноосвітній школі: наук.-метод. журнал, 2010. – № 9. – с. 43-48.

27. Математика. 5-11 класи: навчальні програми, методичні рекомендації щодо організації навчально-виховного процесу в 2017/2018 навчальному році / Укладач Б. В. Кудренко. – Харків: Вид-во «Ранок», 2017.– 144 с.

28. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу :початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу., проф. рівень: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2018. – 512 с.: іл.

29. Мерзляк А. Г. Алгебра : підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики: у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2011. – Ч. 1. – 256 с.: іл.

30. Мерзляк А. Г. Алгебра: підручник для 11 класу для профільного та академічного рівня вивчення математики / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2011. – 431 с.: іл.

31. Методика вивчення математики / Укладач Звєрєва Г. Ф. – Харків, 2016. – 80 с.

32. Методичний пошук вчителя математики: зб. наук. праць за матеріалами І Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., 16 березня 2017 р. / Міністерство освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. – Вінниця, 2017 – 269 с.

33. Навчальні матеріали онлайн. Факультативи, спецкурси і спецсемінари як форми організування навчання [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://pidruchniki.com/70153/pedagogika/fakultativi_spetskursi_spetsseminari_formi_organizuvannya_navchannya. . – Назва з екрану. – Мова укр.

34. Навчальні програми МОН (математика) [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу:

http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/navchalni-programy.html. – Назва з екрану. – Мова укр.

35. Нелін Є. П. Алгебра. 11 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень, профільний рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Х.: Гімназія, 2011. – 448 с.: іл.

36. Нелін Є. П. Алгебра в таблицях: учбовий посібник для учнів 7-11 класів / Нелін Євген Петрович – 3-е видання. – Х.: Гімназія, 2011. – 128 с.: іл.

37. Обухов А. С. Исследовательская деятельность как способ формирования мировоззрения / А. С. Обухов //Народное образование, 1999. – № 10. – с. 158-161.

38. Овчарук О. В. Компетентності як ключ до оновлення змісту освіти / О. В. Овчарук // Стратегія реформування освіти в Україні. – К.: КІС, 2003. – С.68-75.

39. Паламарчук В. Ф. Школа учит мыслить: методические рекомендации / Паламарчук Валентина Фёдоровна. – 2-е издание, дополненное и переработанное. – М.: Просвещение, 1987. – 208 с.

40. Педагогика: учебное пособие для студентов педагогических институтов / Под. ред. Ю. К. Бабанского. – М.: Просвещение, 1983. – 608 с.

41. Перелік навчальних програм, підручників та навчально-методичних посібників, рекомендованих Міністерством освіти і науки України для використання в основній і старшій школі загальноосвітніх навчальних закладів з навчанням українською мовою [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://imzo.gov.ua/pidruchniki/pereliki/. – Назва з екрану. – Мова укр.

42. Програма зовнішнього незалежного оцінювання з математики 2018 року [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: http://testportal.gov.ua/progmath/. – Назва з екрану. – Мова укр.

43. Про структуру навчального року та навчальні плани загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу:

https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/plany/list_struktura.pdf . – Назва з екрану. – Мова укр.

44. Радченко А. А. Ігрові методи та прийоми. Відкритий урок / Радченко А. А. – К, 2012. – № 10. – с. 47-49.

45. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: монографія / Раков Сергій Анатолійович. – Х. : Факт, 2005. – 360 с.

46. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій: дис. доктора пед. наук / Раков Сергій Анатолійович. – К., 2005. – 503 с.

47. Рассказова Ж. В. К вопросу о сущности исследовательской компетентности старшеклассников общеобразовательной школы / Ж. В Рассказова // Молодой ученый. – 2012. – №4. – С. 450-452.

48. Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии / Рубинштейн Сергей Леонидович. – СПб.: Питер, 1999. – 706 с.

49. Саломатнікова О. М. методичні рекомендації та поради щодо використання варіативної складової робочого навчального плану з математики / О. М. Саломатнікова управління освіти херсонської міської ради, 2012. – 34 с.

50. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге видання, доповнене і перероблене / Слєпкань Зінаїда Іванівна. – К.: Вища школа, 2006. – 582 с.: іл.

51. Слівінська Л. А. Урок на тему: «Застосування похідної до дослідження функцій» / Л. А. Слівінська // Методичний вісник. – 2015. – №4.– с. 37-42

52. Тести ЗНО онлайн з предмета «Математика» [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://zno.osvita.ua/mathematics/. – Назва з екрану. – Мова укр.

53. Ходырева Н. Г. Становление математической компетентности будущего учителя при подготовке в педагогическом вузе / Н. Г. Ходырева // Педагогические проблемы становления субъектности школьника, студента, педагога в системе непрерывного образования. – Выпуск 3. – Волгоград: Издатедьство ВГИПК РО, 2001. – С. 67–70.

54. Хуторский А. В. Компетенции в образовании: опыт проектирования: сборник научных трудов / Хуторской Андрей Викторович. – М.: Научно-внедренческое предприятие «ИНЭК», 2007. – 327 с.

55. Чайка В. М. Основи дидактики / В. М. Чайка. – К.: Академвидавництво, 2011. – 238 с.

56. Чепіль М. М. Педагогічні технології / М. М. Чепель, Н. З. Дудник // К.: Академвидавництво, 2012. – 222 с.

57. Шаран О. Конспекти уроків з теми «Комплексні числа» [Електронний ресурс] // Поглиблене вивчення математики. – Режим доступу: https://volrmk.at.ua/serednia/matematuka/02/4/5.pdf. – Назва з екрану. – Мова укр.

58. GeoGebra [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://www.geogebra.org.– Назва з екрану. – Мова англ.

59. LearningApps [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://learningapps.org/. – Назва з екрану. – Мова укр.

60. MoodleCloud [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://algebra10.moodlecloud.com/course/view.php?id=2. – Назва з екрану. – Мова англ.

ДОДАТКИ

Додаток А

Таблиця А.1.

Календарно-тематичне планування

№	Тема	Години	Примітка
1	Приріст функції та її аргумента.	1	Задачі у LeaningApps
2	Задачі, які приводять до поняття похідної. Похідна функції.	2	Розгляд задачі про дотично до графіка функції у GeoGebra
3	Геометричний і фізичний зміст похідної.	2	Узагальнююча таблиця
4	Вивчення таблиці похідних.	2	Доведення похідної функції за допомогою GeoGebra. Виконання вправи у LeaningApps. Конспкт уроку.
5	Правила обчислення похідних.	2	
6	Розв’язування задач. *Самостійна робота*	3	Виконання вправи у LeaningApps
7	Складена функція. Похідна складеної функції та оберненої функції.	1	
8	Похідна тригонометричних та обернених тригонометричних функцій.	1	
9	Розв’язування задач. *Самостійна робота.*	2	Тренувальні вправи
10	Рівняння дотичної до графіка функції	2	Виконання вправи у LeaningApps
11	Розв’язування задач. *Самостійна робота.*	1	
12	Узагальнення і систематизація знань.	2	Тренувальні вправи
13	**Контрольна робота № 1 з теми: «Похідна функції».**	1	Контрольна робота

Продовж. табл.А.1.

14	Аналіз контрольної роботи. Робота над помилками	1	
15	Основні теореми диференціального числення. *Самостійна робота.*	2	Виконання вправ у LeaningApps
16	Достатні умови зростання і спадання функції. Ознака сталості функції.	3	Узагальнююча таблиця
17	Застосування похідної для доведення і розв'язування тотожностей та нерівностей.	1	Тренувальні впрвави
18	Екстремуми функції. *Самостійна робота.*	3	Узагальнуюча таблиця
19	Застосування похідної для доведення і розв'язування тотожностей та нерівностей.	1	Тренувальні впрвави
20	Найбільше і найменше значення функції на проміжку. *Самостійна робота.*	2	Виконання вправи у LeaningApps
21	Застосування похідної до розв'язування задач прикладного змісту.	1	Прикладні задачі
22	Похідна другого порядку.	1	
23	Поняття опуклості функції та точки перегину. *Самостійна робота.*	3	
24	Застосування похідної для доведення і розв'язування тотожностей та нерівностей.	1	Тренувальні впрвави
25	Застосування похідної до дослідження функцій та побудови їх графіків.	3	Конспект уроку
26	*Самостійна робота*	1	
27	Застосування похідної до розв'язування задач прикладного змісту.	2	
28	Узагальнення і систематизація знань	2	Виконання вправ у LeaningApps. Тренувальні

Продовж. табл. А.1.

			Впрвави
29	**Контрольна робота № 2 з теми: «Застосування похідної до розв'язування задач»**	1	Контрольна робота

Додаток Б

Тренувальні вправи

1. Пропедевтика до вивчення таблиці похідних

1.1. Знайти приріст заданої функції у точці $x_0 = 2$, якщо приріст незалежної змінної дорівнює 2

$y = x^3$ $\qquad y = \frac{1}{x}$ $\qquad y = \sqrt{x}$

1.2. Використовуючи означення похідної, знайти похідні функції в заданій точці

І рівень	ІІ рівень	ІІІ рівень
$y = 4x + 3, x_0 = -2$	$y = (x - a)(x - b), x_0 = -1$	$y = \sqrt{1 - \sqrt{x}}, x_0 = 1$
$y = x^3 - 2x + 3, x_0 = 4$	$y = \frac{1}{x^2}, x_0 = 7$	$y = \frac{\sqrt[3]{x} + 7}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}, x_0 = 1$
$y = 2\sqrt{x}, x_0 = 9$	$y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}, x_0 = 3$	$y = \frac{4x + 2}{3x + 1}, x_0 = 3$
$y = \sqrt[3]{x^2}, x_0 = 5$	$y = 3sin2x, x_0 = \frac{\pi}{6}$	$y = \frac{x}{3 + 6x}, x_0 = -2$
$y = \sqrt{x^2 - 1}, x_0 = 3$	$y = 2x + \sqrt{2x}, x_0 = 3$	$y = \sqrt{x}(x^3 - \sqrt{x} + 1), x_0 = 1$
$y = cosx, x_0 = \frac{\pi}{4}$	$y = (x - 5)^2, x_0 = 5$	$y = cos3x^2 + 1, x_0 = \pi$
$y = x^2 + 6x - 7, x_0 = 6$	$y = 0{,}5 - 3(a - x)^2, x_0 = 2$	$y = 3ax^2 + 2ax + 2a, x_0 = 5$

2. Задачі на застосування таблиці похідних, правил обчислення похідних та диференціювання складеної функції

2.1. Користуючись таблицею похідних та правилами обчислення похідних знайдіть похідні наступних функцій

І рівень	ІІ рівень	ІІІ рівень
$y = x^2$	$y = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x^3}$	$y = (x - 1)\sqrt{x}$

$y = x^2 + 2x + 3$	$y = (2x^2 + 3)(x^3 + 1)$	$y = \frac{x^3 - 2}{5 - x^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y = 2xcosx$	$y = cosxsinx$
$y = 1 - 2x^3$	$y = x^2\sqrt{x}$	$y = tgxcosx$
$y = \frac{1}{x^7}$	$y = \frac{x + 2}{x - 1}$	$y = \frac{sinx - cosx}{sinx + cosx}$
$y = \frac{x + 2}{3}$	$y = sinx + 2cosx$	$y = \frac{(x - 2)^2}{x + 3}$
$y = x^2(3x + 5)$	$y = xtgx$	$y = x - tgx$
$y = 2sinx$	$y = \frac{x^5}{5}sinx$	$y = (sinx + cosx)^2$
$y = \sqrt[4]{x^5}$	$y = \frac{7}{5x - 3}$	$y = ctgxsinx$
$y = \frac{2}{\sqrt[5]{x^2}}$	$y = \frac{sinx}{x}$	$y = \frac{sinx}{x^2 + x - 1}$

2.2. Знайти похідні використовуючи правило диференціювання складеної функції

III рівень

$y = cosx^2$

$y = \sqrt{x^5}$

$y = sin2x$

$y = \sqrt{1 + sinx}$

$y = \sqrt{1 + cos^2x}$

$y = arctg(1 - x^2)$

$y = xarcsin\sqrt{x}$

$y = \frac{2sin^2x}{cos2x}$

$y = arcsin\sqrt{sinx}$

$y = \frac{\sqrt[9]{4x^5+2}}{3x^4}$

$y = arctg\,\frac{x+1}{x-1}$

$y = 3cos^2x - cos^3x$

3. Задачі на застосування геометричного змісту похідної

3.1. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до функції

$y = x^2$

1) в початку координат;

2) в точці $(3;\ 9)$;

3) в точці $(-2;\ 4)$.

3.2. У яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до кубічної параболи $y = x^3$ дорівнює 3?

3.3. В якій точці дотична до параболи $y = x^2$ утворює з віссю Ox кут 45°?

3.4. Чи може дотична до кубічної параболи $y = x^3$складати з віссю Ox тупий кут?

3.5. Під яким кутом синусоїда перетинає вісь абсцис.

3.6. Скласти рівняння дотичної до графіка функції в заданій точці

1) $y = sinx, x = \frac{5\pi}{2}$

2) $y = x^3, x = 2.$

3) $y = \sqrt{5 - x^2}, x = 1$

4) $y = arctg2x, x = 0$

5) $y = \frac{x^3 + 2x^2}{(x-1)^2}, x = -2$

6) $y = 4ctgx - \frac{cosx}{sin^2x}, x = \frac{\pi}{2}$

3.7. В якій точці дотична до параболи $y = x^2$

1) паралельна прямій $y = 4x - 5$;

2) перпендикулярна до прямої $2x - 6y + 5 = 0$.

4. Задачі на застосування основних теорем диференціального числення

4.1. Перевірити чи виконується теорема Ролля для наступних функцій, для якого значення?

1) $y = x^2 - 4x + 3, x \in [1; 3]$

2) $y = \frac{x^2-4x+3}{x-2}, x \in [1;3]$

3) $y = x(x^2-1), x \in [-1;1]$

4) $y = x(x^2-1), x \in [0;1]$

5) $y = \sqrt[3]{x^2-3x+2}, x \in [1;2]$

4.2. Записати теорему Лагранжа для наступних функцій:

1) $y = \frac{1}{x}, x \in [1;2]$

2) $y = x^2-3x+1, x \in [1;2]$

3) $y = sin\frac{\pi x}{2}, x \in [1;2]$

4) $y = sin3x, x \in [x_1;x_2]$

5) $y = arcsin2x, x \in [x_0;x_0+\Delta x]$

4.3. Використовуючи теорему Ферма довести, що задана функція не набуває ні найбільшого, ні найменшого значення в заданій точці.

1) $y = x^2+4x+4, x = 0$

2) $y = \frac{1}{1-x} - x - \frac{1}{x}, D(y): (1;3), x = 2$

3) $y = sinx + cosx^3, D(y): [1;2], x = \frac{\pi}{2}$

4) $y = \sqrt[3]{x^2}, x = 1$

5) $y = (x^2+6x+8)(x^2+14x+48), x = -3$

5. Задачі на застосування ознак спадання і зростання функції, на знаходження точок екстремуму та екстремуму

5.1. Проаналізуйте властивості функцій, графіки яких зображено на рисунку Б.1. Дайте відповідь на запитання.

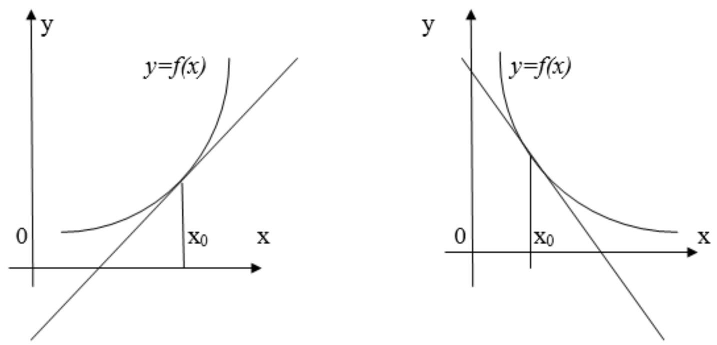


Рис. Б.1. Графіки функцій

1) Якою є функція в точці x_0 (зростаюча, спадна)?
2) Сформулюйте геометричний зміст похідної.
3) Яким є значення похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0?
4) Чи є зв'язок між значенням похідної і поведінкою функції? Який саме?
5) Спробуйте сформулювати ознаки зростання і спадання функції.

5.2. Показати, що функція $y = x^3 - x$ зростаюча.

5.3. Показати, що функція $y = arctgx - x$ спадна.

5.4. На малюнку 2 зображений графік похідної функції $y = f\ (x)$, визначеної на відрізку $[-5; 5]$. Знайдіть точку мінімуму функції $y = f(x)$ на цьому відрізку.

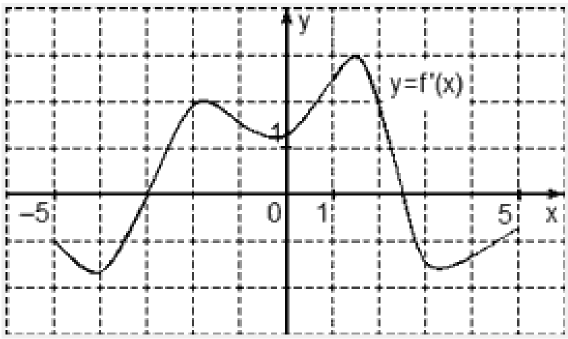


Рис. Б.2. Знайти точки мінімуму

5.5. На малюнку 3 зображений графік похідної функції $y = f(x)$, визначеної на відрізку $[-3;\ 7]$. Знайдіть точку максимуму функції $y = f(x)$ на цьому відрізку.

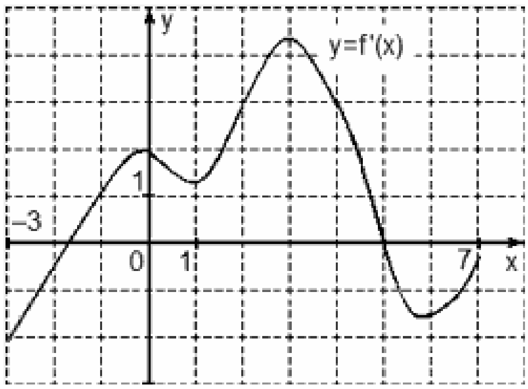


Рис. Б.3. Знайти точки максимуму

5.6. На малюнку 4 зображений графік похідної функції $y = f(x)$, визначеної на відрізку $[-6; 4]$. Знайдіть кількість точок максимуму функції $y = f(x)$, що належать відрізку $[-4; 3]$.

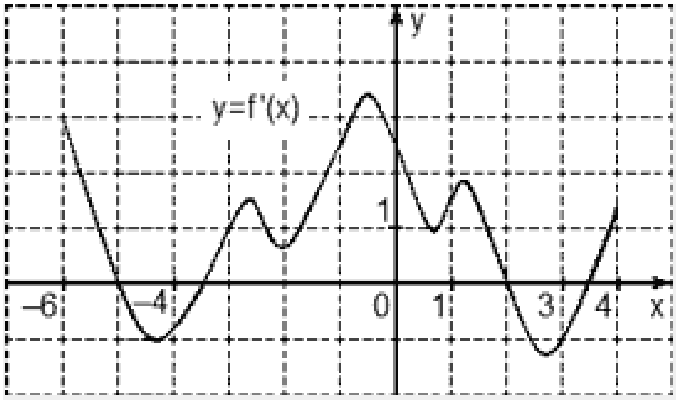


Рис. Б.4. Знайти кількість точок максимуму

5.7. Визначити проміжки монотонності та екстремуми функції.

I рівень	II рівень	Ш рівень
$y = \frac{1}{2}x^4$	$y = x - \sqrt{x}$	$y = \sqrt[3]{x^2}(x-1)$
$y = 12x - x^3$	$y = x\sqrt{x-3}$	$y = sin2x - x\sqrt{2}$
$y = 2x^3 - 3x^2$	$y = \frac{x^2-4}{x}$	$y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$
$y = \frac{1}{3}(x^3 - 8x^2 + 5x)$	$y = \frac{1}{x^2-7x+12}$	$y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$ $a > 0$
$y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$	$y = \frac{6-x^3}{x^2}$	$y = -4\frac{(x+2)^2}{x^2+4}$
$y = (x-2)^2$	$y = \frac{x^3}{x^2-1}$	$y = sinx\, sin(x - \frac{\pi}{4})$
$y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3$	$y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$	$y = cosx + \frac{x}{2}$

5.8. Знайти найменше і найбільше значення функції на вказаних інтервалах.

І рівень	ІІ рівень	ІІІ рівень
$y = 3x^2 - 3x^3$ $[-1; 3]$	$y = \sqrt{5 - 4x}$ $[-1; 1]$	$y = 2tgx - tg^2x$ $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$
$y = x^2 - 4x + 6$ $[-3; 10]$	$y = \sqrt{100 - x^2}$ $[-6; 8]$	$y = sin2x - x$ $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ $[-1; 1]$	$y = \frac{x-1}{x+1}$ $[0; 4]$	$y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$ $[0; 3]$
$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ $[-1; 2]$	$y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$ $[-4; -1]$	$y = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{1-x}$ $(0; 1), a > 0, b > 0$
$y = x + 2\sqrt{x}$ $[0; 4]$	$y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ $[-2; 4]$	$y = arctg\frac{1-x}{1+x}$ $[0; 1]$

6. Задачі на дослідження функції на опуклість, вігнутість точки перегину

6.1. З'ясувати, опукла або увігнута лінія $y = x^5 - 5x^3 - 15x^2 + 30$ в околі точок $(1;\ 11)$ і $(3; 3)$.

6.2. З'ясувати, опукла або увігнута лінія $y = arctgx$ в околі точок $\left(1; \frac{\pi}{4}\right)$ та $\left(-1; -\frac{\pi}{4}\right)$.

6.3. Показати, що графік функції $y = arctgx$ всюди увігнутий.

6.4. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і увігнутості функцій.

І рівень	ІІ рівень	ІІІ рівень
$y = x^3 - 3x^2 + 2$	$y = \frac{x}{(x-1)^2}$	$y = \sqrt[3]{x^2(x+1)}$
$y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$	$y = \frac{6(x-1)}{3 + x^2}$	$y = a - \sqrt[3]{x - b}$
$y = x^4 - 12x^3 + 48x^2$	$y = \frac{16}{4x - x^3}$	$y = sinx$

$y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$	$y = \frac{9 - x^2}{4 - x^2}$	$y = sinx + \frac{1}{2}x$
$y = (x + 1)^4$	$y = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$	$y = sin2x - x$
$y = (x + 2)^6 + 2x + 2$	$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$	$y = tgx\ cosx$

7. Задачі на дослідження функцій

7.1. Використовуючи похідну дослідити функції та побудувати їх графіки

I рівень	II рівень	Ш рівень
$y = x^3 + 3x$	$y = \frac{4 - x}{x - 2}$	$y = sinx - 2x$
$y = \frac{2x^3}{3} + x$	$y = x + \frac{1}{x^2}$	$y = 2sinx - cos2x$
$y = \frac{3x^2}{2} - x^3$	$y = \frac{x^4 - 8}{(x + 1)^4}$	$y = tgx + x$
$y = 2x^3 - x^2 + 5$	$y = \frac{16}{4x^2 - x^3}$	$y = 3 + \sqrt[3]{x + 3}$
$y = (x + 3)^2(x - 1)^2$	$y = \frac{x^3}{1 - x^2}$	$y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

8. Задачі на розв'язування рівнянь, нерівностей, доведення тотожностей

8.1. За теоремою Ролля довести, що рівняння $x^2 + 7x - 1 = 0$ має лише один дійсний корінь.

8.2. Використовуючи теорему Лагранжа доведіть нерівність

1) $|sina — sinb| \leq |a - b|$

2) $|artgx - arctgy| \leq |x - y|$

8.3. Довести нерівність:

1) $\sqrt{1 + x} \leq 1 + \frac{x}{2}$, при $x > 1$

2) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, a > 0, b > 0$

3) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 2$ при $x > 1$

4) $sinx + tgx > 2x, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

5) $\frac{tgx_2}{tgx_1} > \frac{x_2}{x_1}$ за умови $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$

8.4. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^5 + 4x + cosx = 1$

2) $x^3 + 6x + 2\sqrt{10 + x} = cos\pi x$

3) $\sqrt{5 - x} + \sqrt{x - 3} = x^2 - 8x + 18$

4) $\sqrt{x + 7} + \sqrt{1 - x} = x^2 + 6x + 13$

5) $\begin{cases} x - y = sinx - siny \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$

8.5. Довести тотожність:

1) $2sin^2x = -cos2x$

2) $arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$

3) $arctgx = arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

4) $3arcsinx - 3\arccos(3x - 4x^3) = \pi,$ якщо $|x| \leq \frac{1}{2}$

5) $2arctgx + arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi, & x \geq 1 \\ -\pi, & x \leq 1 \end{cases}$

Додаток В

Інтерактивні вправи

1. Означення похідної – https://learningapps.org/5559666
2. Приріст функції та приріст аргументу– https://learningapps.org/5559786
3. приріст функції, вказаної на графіку– https://learningapps.org/5560052
4. Похідна фугкції –https://learningapps.org/5579387
5. https://learningapps.org/5892016

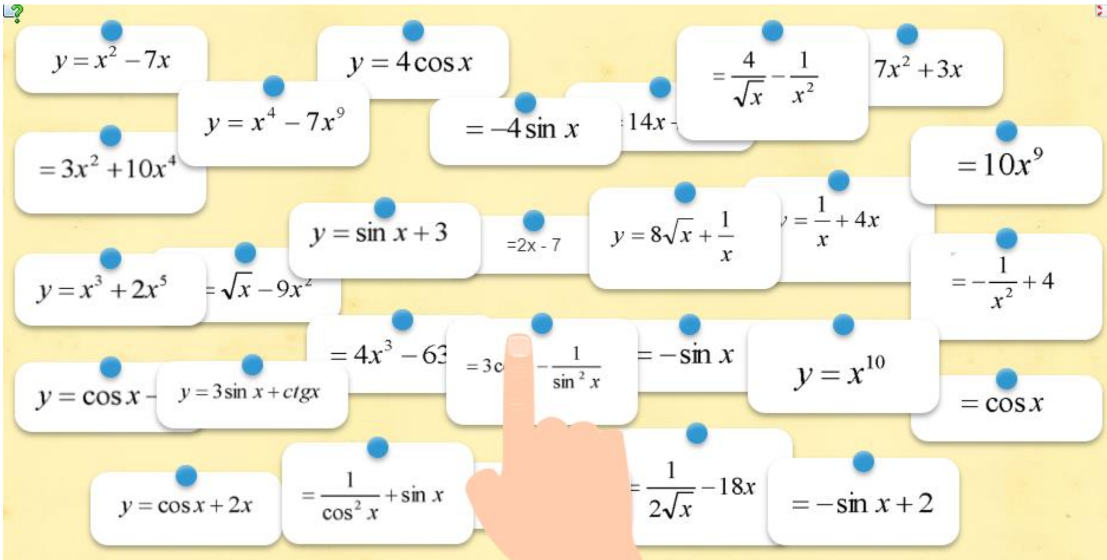


Рис. В.1. Знайти похідну до кожної функції

6. https://learningapps.org/5892010

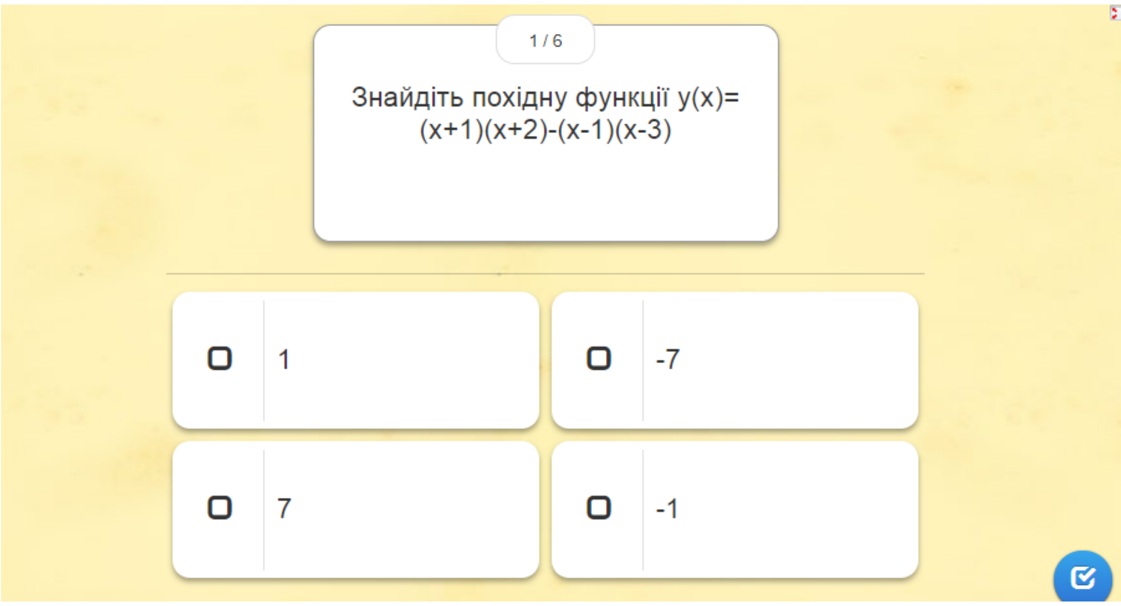


Рис. В.2. Дайте відповідь на питання

7. https://learningapps.org/5892022

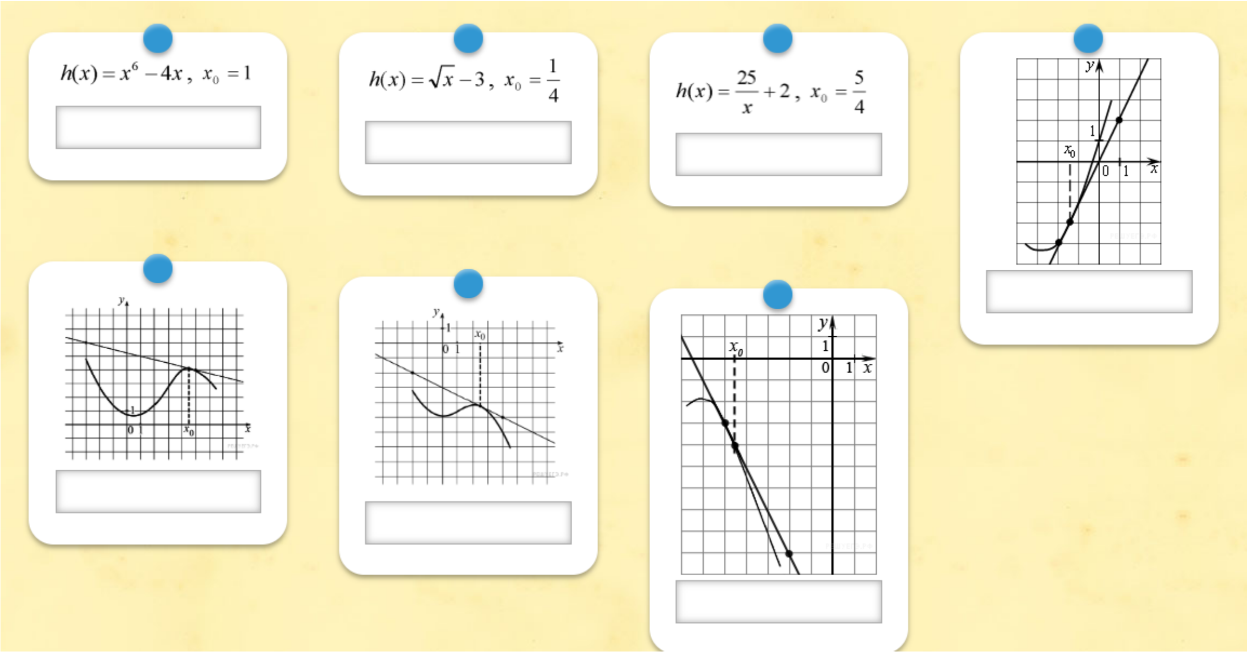


Рис. В.3. Знайти тангенс кута

8. https://learningapps.org/5815961

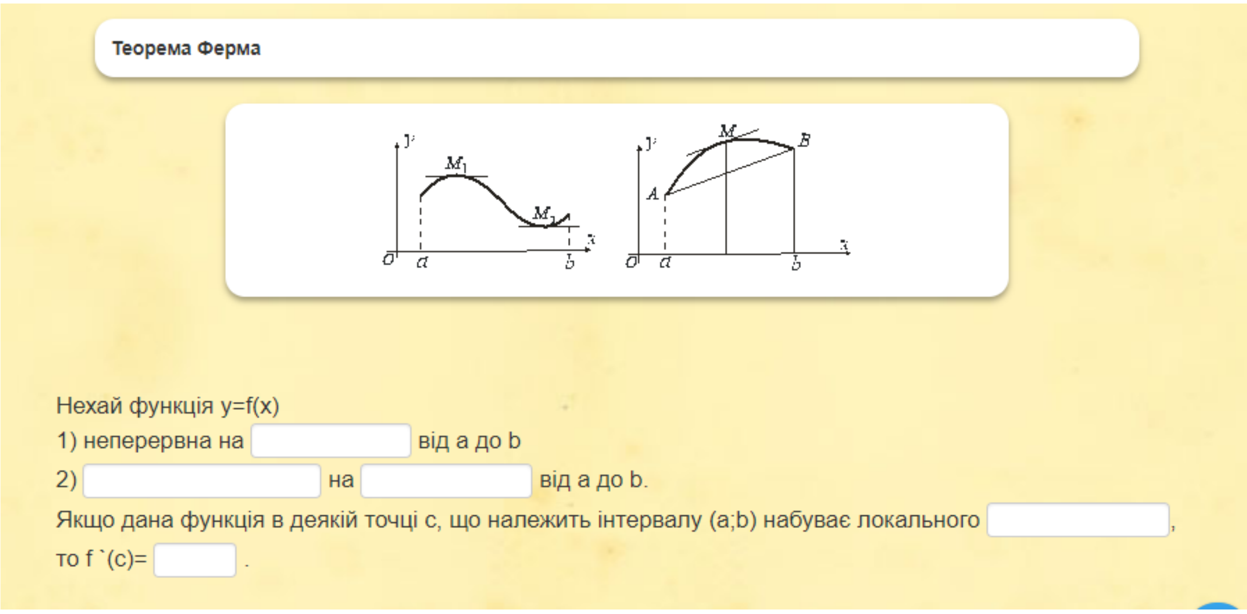


Рис. В.4. Теорема Ферма

9. https://learningapps.org/5819238

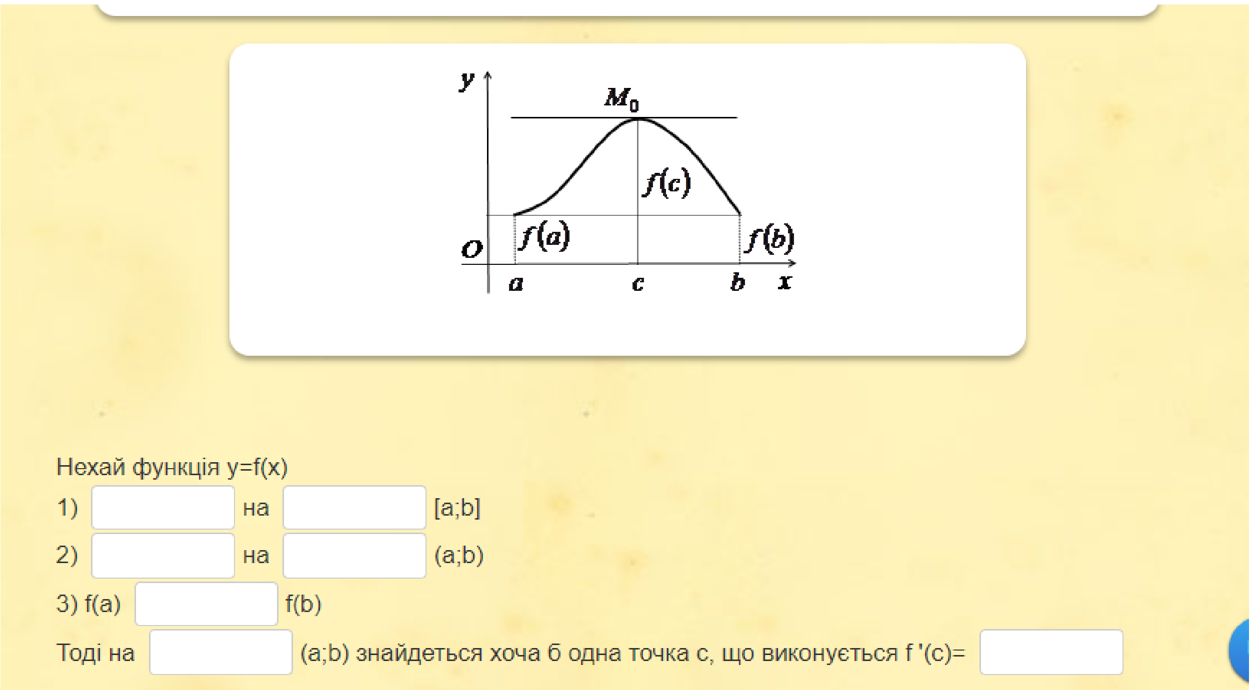


Рис. В.5. Теорема Ролля

10.https://learningapps.org/5819250

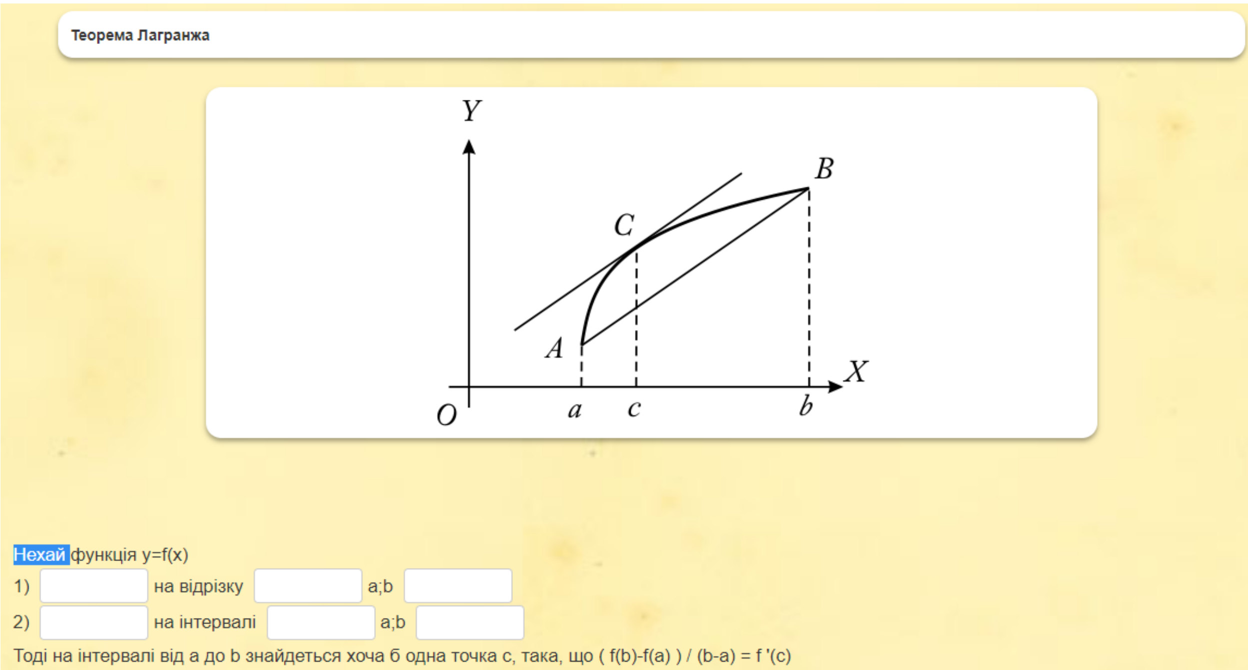


Рис. В.6. Теорема Лагранжа

11.https://learningapps.org/5894047

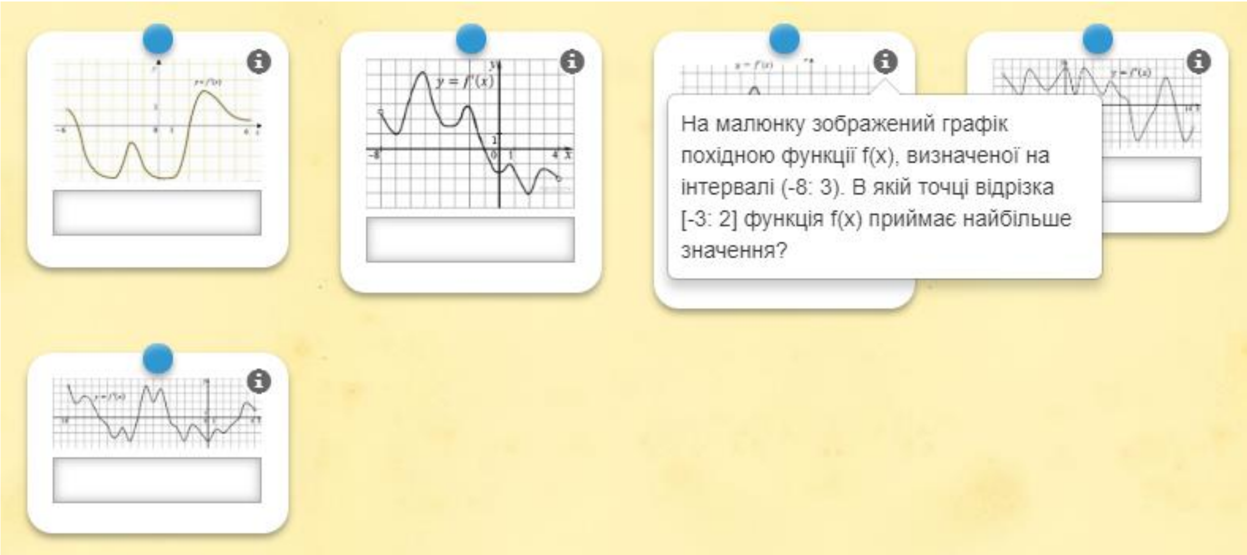


Рис. В.7. Виконати завдання за допомогою малюнків

12. Хто хоче стати мільйонером – https://learningapps.org/5579466

13.Сканфорд «Терміни» – https://learningapps.org/5579694

14.https://learningapps.org/5894097

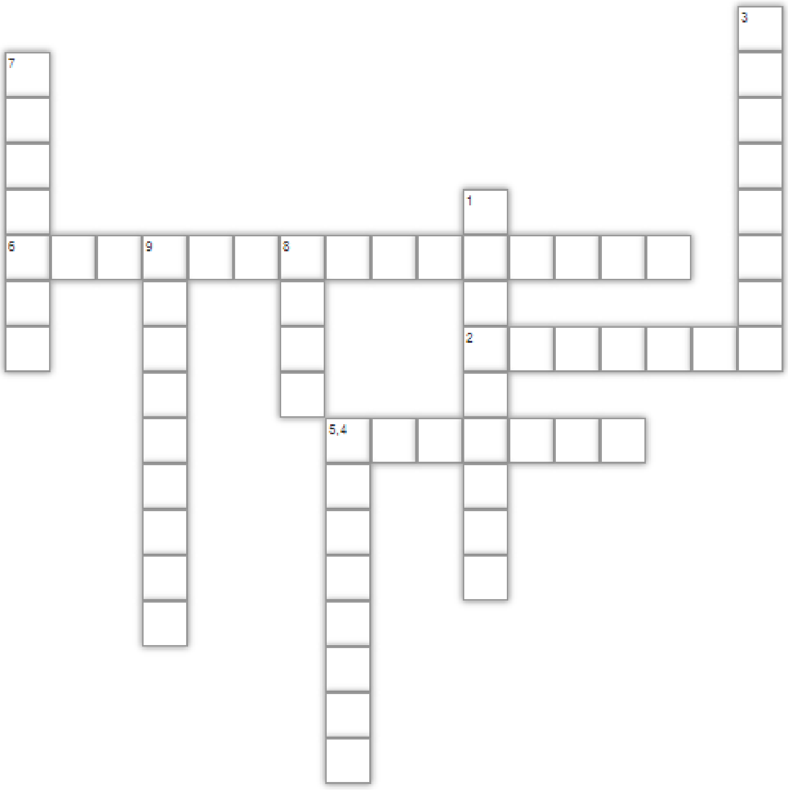


Рис. В.8. Кросворд

Додаток Г

Контрольна робота № 1 з теми «Похідна функції»

1. Знайти похідні поданих функцій.

а) $y = 3x^2 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2} + 5$ в) $y = \frac{cosx}{x - \sqrt[3]{x}}$

б) $y = sinx \cdot arctgx$ г) $y = x \cdot arctg\sqrt{x}$

2. Чи буде дотична до графіка функції $y = x^3 - x$ у точці з абсцисою $x = 0$ паралельна прямій:

а) $y = 2x - 1$ в) $y = x + 1$

б) $y = -x + 2$ г) $y = -x - 2$

3. Знайти кут нахилу дотичної до графіка функції $y = \frac{2\sqrt{5-7x}}{7}$ у точці з абсцисою $x = \frac{2}{7}$.

4. Рух точки відбувається за законом $S(t) = t^2 - 4t + 6$. У який момент часу швидкість руху дорівнює нулю?

5. Скласти рівняння дотичної до лінії $y = 4x - sinx + 12$ у точці з абсцисою $x = 0$.

6. На малюнку зображений графік функції $y = f\,(x)$ і дотична до нього в точці з абсцисою x_0. Знайдіть значення похідної $f\,'(x)$ в точці x_0.

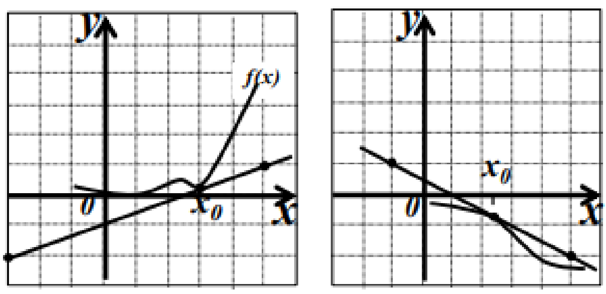


Рис. Г.1. Графік функції і дотична до нього

7. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 + 3x - 8$, яка паралельна прямій $y = 9x - 1$

8. Знайдіть значення x, при яких значення похідної функції $y = \frac{x+1}{x^2+3}$ додатні.

Контрольна робота № 2 з теми: «Застосування похідної до розв'язування задач»

1. Знайти критичні точки функції$y = x^2 + 5x - 2$.
2. На малюнку зображений графік похідної функції $f(x)$, визначеної на інтервалі $(-11;\ 3)$. Знайдіть проміжки зростання функції $f(x)$. У відповіді вкажіть довжину найбільшого з них.

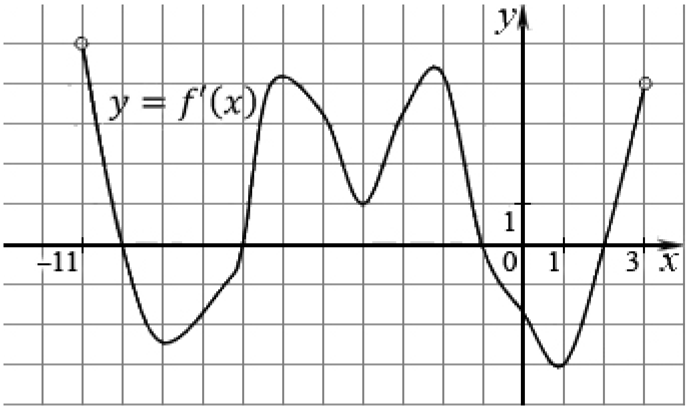


Рис. Г.2. Проміжки зростання функції

3. Вкажіть невід'ємну точку максимуму функції $y = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2$.
4. Знайдіть суму найбільшого та найменшого значень функції $y = x + \frac{1}{x}$ на проміжку $x \in \left[-2; \frac{1}{2}\right]$.
5. Знайдіть точки перегину та інтервали опуклості і увігнутості функції $y = x^4 - 4x^2$.
6. Дослідіть функцію $y = 3x - x^3$і побудуйте її графік.