МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри
________ В.В. Корольський
«___» _____________2018 р.

Реєстраційний № _______
«___» ____________ 2018р.

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ТЕМИ: «ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ, СИСТЕМИ» НА БАЗОВОМУ І ПРОФІЛЬНОМУ РІВНЯХ ПІДГОТОВКИ

Кваліфікаційна робота студента
групи МІм-13
ступінь вищої освіти магістр
спеціальності: 014.04 середня освіта (математика)
Цоуфала Володимира Едуардовича
Керівник:
доктор пед. наук, доцент кафедри математики та методики її навчання
Лов'янова Ірина Василівна

Оцінка:
Національна шкала___________________
Шкала ECTS____ Кількість балів ______
Голова ЕК_______ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Члени ЕК ________ ___________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

________ ___________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

________ ___________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

________ ___________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2018

ЗМІСТ

ВСТУП

Необхідною умовою гуманізації навчального процесу в основній та старшій школі відповідно до закону України «Про освіту» [16], Державною національною програмою «Освіта» (Україна XXI століття) [47], Концепції профільного навчання в старшій школі [29] визначено його диференціацію. Диференційоване навчання на сучасному етапі реалізується через профільну й рівневу диференціації, які створюють оптимальні умови задля врахування навчально-пізнавальних можливостей і потреб різних груп учнів на рівні школи та класу, забезпечують достатню предметну підготовку, яка в подальшому сприятиме виробленню фахово орієнтованих умінь і навичок майбутніх фахівців.

Організація навчання математики у сучасній профільній школі визначає як один із сучасних критеріїв профільного навчання використання навчальних планів трикомпонентної структури, яка включає: 1) базові навчальні предмети; 2) профільні предмети; 3) курси за вибором. У старшій школі вивчення математики диференціюється за 4 рівнями: рівнем стандарту; академічним; профільним; та рівнем поглибленого вивчення математики.

Згідно з оновленою концепцією профільного навчання з 2018-2019 н.р. навчання математики у старшій школі відбуватиметься за 2 рівнями: базовим і профільним. Для учнів, які навчалися у 8-9 класах за програмою поглибленого рівня, розроблено навчальну програму з математики для продовження поглибленого рівня.

Обираючи тему дослідження, ми звернули увагу на те, що в останні роки активізувалася увага до питань диференційованого навчання різних дисциплін і математики зокрема. У психолого-педагогічній та методичній літературі [7, 30, 68] завжди приділялася увага питанням диференційованого навчання маатематики. Сучасні психолого-педагогічні праці не дозволяють говорити про наявність комплексного дослідження, присвяченого проблемі методики вивчення тригонометричних рівнянь і нерівностей у старшій школі на базовому та профільному рівні підготовки.

На сучасному етапі вивченню тригонометричних функцій саме як функцій числового аргументу приділяється велика увага в шкільному курсі алгебри та початків аналізу. Існують різні підходи до навчання цієї теми в шкільному курсі, однак учителеві-початківцю важко зорієнтуватися, який підхід буде найбільш вдалим, який сприятиме виробленню предметних компетентностей. Тригонометричні функції є найбільш зручним засобом для вивчення властивостей усіх функцій, тому їх вивченню слід приділити достатню увагу.

Уже кілька десятиліть поспіль тригонометрія як окрема дисципліна шкільного курсу математики не існує. Елементи тригонометрії вивчаються в курсі геометрії 8-9 класу. Основна вага у вивченні тригонометричних функцій числового аргументу, їх властивості, формул тригонометрії, тригонометричних рівнянь, нерівностей, їх систем припадає на курс алгебри і початків аналізу у старшій школі (26%)

Історично склалось, що тригонометричним рівнянням і нерівностям приділялось особливе місце в шкільному курсі. Ще греки на початку людства вважали, що тригонометрія – найважливіша із наук, і ми поділяємо думку, що тригонометрія є одним із найважливіших розділів шкільного курсу, усієї математики загалом. В умовах профільного навчання математики роль тригонометричного матеріалу в математичній підготовці учнів значно посилилась, що пояснюється великим прикладним потенціалом тригонометрії, її значенням для розвитку функціонального мислення, обчислювальної та графічної культури, математичних здібностей учнів.

Викладене вище засвідчує те, що тема магістерської роботи є актуальною.

Мета роботи: розробити методику вивчення теми «Тригонометричні рівняння, нерівності та системи» на базовому та профільному рівнях підготовки учнів старшої профільної школи.

Мета роботи конкретизується у таких **завданнях**:

1) Дослідити історію розвитку тригонометрії як галузі математичних знань.

2) Розкрити методи розв'язання тригонометричних рівнянь, нерівностей та їх систем в класичному курсі тригонометрії.

3) Проаналізувати чинні програми та підручники для 10-11 класів в аспекті досліджуваної проблеми та з'ясувати особливості навчання теми на різних рівнях математичної підготовки учнів.

4) Розробити методику формування практичної компетентності учнів на базовому рівні підготовки у процесі розв'язання тригонометричних рівнянь.

5) Розробити методику формування ключових і предметних компетентностей учнів у процесі розв'язання тригонометричних рівнянь, нерівностей та систем на профільному рівні підготовки.

6) Підготувати методичні рекомендації щодо вивчення теми на засадах компетентнісного підходу.

Об'єкт дослідження – процес навчання тригонометрії у старшій школі.

Предмет дослідження – методика формування ключових і предметних компетентностей учнів у процесі навчання розв'язування тригонометричних рівнянь, нерівностей та систем на базовому та профільному рівнях підготовки.

Основні **методи дослідження**: теоретичний аналіз; критичний аналіз; теоретичний синтез; спостереження за освітнім процесом у старших класах, бесіди з учителями математики, описовий метод.

Практичне значення роботи полягає в тому, що матеріали дослідження можуть бути використані вчителями у практичній професійній діяльності, ними можуть скористатися студенти під час опрацювання питань з методики навчання математики, у процесі виробничої педагогічної практики у старших класах середньої школи з теми: «Тригонометричні рівняння, нерівності та їх системи».

Апробація дослідження. Результати дослідження відображені в публікаціях: стаття «Розвиток тригонометрії» видана в електронній бібліотеці naurok.com; стаття «Розвиток тригонометрії у стародавній Греції та Індії» у віснику міжнародного дослідницького центру «ЛЮДИНА: МОВА, КУЛЬТУРА, ПІЗНАННЯ» (Том 42 2018 рік). А також оприлюднювалися на V міжнародній науково-практичній конференції «Лабіринти реальності» Канада-Сербія-Азербаджан-Польща-Україна з публікацією статті «Компетентнісний підхід до вивчення математики на базовому і профільному рівнях» у збірнику наукових праць.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, додатків.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Історія розвитку тригонометрії як науки

Історія тригонометрії як науки про співвідношення між кутами і сторонами трикутника та інших геометричних фігур охоплює понад два тисячоліття. Більшість таких співвідношень неможливо відтворити за допомогою звичайних алгебричних операцій, тому було уведено до обігу особливі тригонометричні функції, які відпочатку оформлювали у вигляді таблиць.

Історики справедливо уважають, що тригонометрію створили стародавні астрономи, трохи пізніше її почали використовувати в геодезії й архітектурі задля практичних потреб. З часом сфера застосування тригонометрії постійно розширювалась. Зокрема, нині тригонометрія стає основою при розробленні методології природничих наук, використовується у розробках, які стосуються технічної й інших галузей діяльності. Тригонометричні функції виявились особливо корисними для вивчення коливних процесів, оскільки на них заснований також гармонічний аналіз функцій та інші інструменти аналізу. Доведенням правомірності такого узагальнення слугує висловлення Томаса Пейна, який у своїй книзі «Доба Розуму» (1794) назвав тригонометрію «душею науки».[63]

У наведеній таблиці на основі аналізу літературних джерел [1, 2, 11, 15, 19, 21, 28, 32, 36, 42, 43, 52, 63, 65, 66, 67] відтворено відомості, які засвідчують розвиток тригонометрії, а також її використання в різних галузях у різні часи розвитку науки і виробництва.

Таблиця 1.1

Періоди розвитку науки «Тригонометрія»

Країна	**Досягнення**
Ранній період	
Єгипет, Вавилон, Китай	Зародки тригонометрії в математичних рукописах
Стародавня Греція	Загальне й логічно зв'язне викладення тригонометричних співвідношень. Тригонометрія становить складник астрономічної теорії. Кілька теорем тригонометричного характеру містять «Начала» Евкліда (IV століття до н. е.). У другій книзі «Начал» теорема 12 становить словесний аналог теореми косинусів, зміст якої має таке формулювання: У тупокутних трикутниках квадрат на стороні, що стягує тупий кут, більше (суми) квадратів на сторонах, що містять тупий кут, на двічі взятий прямокутник, поміщений між однією зі сторін при тупому куті, на яку спадає перпендикуляр, і відрізком при тупому куті, який відтинає цей перпендикуляр ззовні.[11] Подальший розвиток тригонометрії пов'язаний з ім'ям астронома Аристарха Самоського (III століття до н. е.). У його трактаті «Про величини і відстані Сонця і Місяця» була поставлена задача про визначення відстаней до небесних тіл; ця задача потребувала обчислення співвідношення сторін прямокутного трикутника при відомому значенні одного з кутів. Водночас Аристарх довів нерівність, яка в сучасних термінах передається такою формулою: $$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b} < \frac{tg\ a}{tg\ b}$$ Наведену нерівність Архімед подає в «Обчисленні піщинок». У працях дослідника, який у своїх дослідженнях (III століття до н. е.) наводить теорему ділення хорд, яка по суті є еквівалентною формулі синуса половинного кута: $$sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$ Перші тригонометричні таблиці були складені у III столітті до н. е. За гіпотезою, такі таблиці були складені Апполонієм Перзьким. Мовою хорд були сформульовані перші відкриті греками тригонометричні співвідношення. Прикладом може слугувати використовувана сучасна формула:

	$$sin^2a + cos^2a = 1$$ у греків викладеній вище формулі відповідала теорема: $$(chord_a)^2 + (chord_{180-a})^2 = d^2$$ Основним досягненням античної тригонометричної теорії став розв'язок у загальному вигляді задачі «розв'язування трикутників», тобто знаходження невідомих елементів трикутника, коли відомі його три елементи (з яких хоча б одним є стороною).[11] Клавдій Птолемей у своїх працях «Географія», «Аналемма» і «Планісферій» наводить докладний виклад застосування тригонометрії у галузі картографії, астрономії й механіки, насамперед на прикладі інженерних розробок.
Наша ера до кінця XIII століття	
Індія	Дослідники змінили деякі концепції тригонометрії, наблизивши й адаптуваши їх до сучасних шляхом здійснення заміни античних хорд на синуси (назва синус походить від слова *тятива* на санскриті) у прямокутному трикутнику. Такі зміни стали початком розвитку тригонометрії як загального вчення про співвідношення у трикутнику, хоча, на відміну від грецьких хорд, індійський підхід обмежувався тільки функціями гострого кута. Вперше ввели до обігу поняття косинуса. Тригонометрія як наука розвивалася переважно у тісному взаємозв'язку з її астрономічним застосуванням, більшою мірою – для використання в теорії руху планет і для вивчення небесної сфери. Задля застосування астрономічних розрахунків було розроблено низку тригонометричних таблиць. Дослідник Брахмагупта (VII століття) відкрив кілька тригонометричних співвідношень, зокрема й ті, що в сучасному запису набули вигляду: $$cos^2a + cos^2a = 1$$ $$sina = \cos(90^o - a)$$
Ісламські країни	У працях аль-Хорезмі й аль-Марвазі (IX століття) розглянуто разом із відомими (ще в епоху індійського бачення розглянутого вчення) синусом і косинусом нові тригонометричні функції: тангенс, котангенс, секанс і косеканс. Так, Ібн Юніс (X століття) відкрив перетворення добутку тригонометричних функцій на суму, наприклад:[11] $$sina * sinb = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$ У IX столітті аль-Хорезмі склав таблиці синусів з кроком 1°, його сучасник аль-Марвазі додав до них перші таблиці тангенсів, котангенсів і косекансів (з тим самим кроком). На початку X століття аль-Баттані опублікував таблиці з кроком

	30'. Варто зауважити, що динаміка у пізнанні окреслених понять засвідчена у працях Ібн Юніса, який наприкінці того ж століття склав таблиці з кроком 1'. При складанні таблиць ключовим питанням було обчислення значення sin 1. Фундаментальне викладення тригонометрії як самостійної науки (як плоскої, так і сферичної) навів перський математик і астроном Насир ад-Дін ат-Тусі у 1260 році.[63]
Викладене вище дозволяє дійти висновку про те, що до кінця XIII століття дослідниками було відкрито базові теореми, що складають зміст тригонометрії. Ідеться про такі тригонометричні аспекти: Вираження будь-якої тригонометричної функції через будь-яку іншу. Формули для синусів і косинусів кратних і половинних кутів, а також для суми і різниці кутів. Теореми синусів і косинусів. Розв’язування плоских і сферичних трикутників. Варто зауважити, що відсутність алгебричної символіки зумовила потребу виражати теореми словесно, де опис почасти мав значний обсяг, водночас по суті і з урахуванням прогресивних досягнень на той час такі докладні описи еквівалентними їх сучасному розумінню.[36]	
Наша ера від XIV століття	
Європа	У роботі Фібоначчі «Практика геометрії» тригонометрія викладається як частина геометрії і як така, що може застосовуватися при інженерних розробках. Трактат європейського математика Леві бен Гершома «Про синуси, хорди і дуги», перекладений латинською мовою 1324 року, містить доведення теореми синусів і п’ятизначні таблиці синусів. Великим досягненням стала монографія Регіомонтана «П’ять книг про трикутники всіх видів» (опублікована у 1462–1464), у якій були зведені опрацьовані й на тогочасному етапі знання з плоскої та сферичної тригонометрії і прикладені семизначні таблиці синусів (з кроком 1') і тангенсів (з кроком 1'). Суттєвим щодо змістового викладу таблиць є те, що саме в таблицях Регімонтана, порушуючи астрономічну традицію, уперше використовувалась десяткова система (а не архаїчна шістдесяткова).[11]
Новий час XVI–XVII століття	
Європа	Укладено 15-значні тригонометричні таблиці Ретика, учня Коперника, з кроком 10"(1551). Термін «тригонометрія» як назву математичної дисципліни увів до обігу німецький математик Б. Пітискус, який опублікував у 1595 році книгу «Тригонометрія, або стислий і ясний трактат про розв’язування трикутників». До кінця XVII століття уведено до обігу сучасні назви

	тригонометричних функцій, унормовано їх класифікаційну номінацію. Застосування Ф. Вієтом в тригонометрії розробленої ним загальної алгебричної символіки дозволило записати в компактному й загальному вигляді тригонометричні тотожності. Прикладом можуть слугувати формули кратних кутів:[42] $\cos ma = cos^m a - \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} cos^{m-2} a\cdot sin^2 a + \cdots$ $\sin ma = mcos^{m-1} a\cdot sina - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} cos^{m-3} a\cdot sin^3 a + \cdots$ У 1630-х роках дослідник Жиль Роберваль на основі результатів дослідження циклоїди накреслив перший графік синусоїди. Науковцем було опубліковано формулу тангенса подвійного кута. Джон Валліс у праці «Механіка» (1670) правильно вказав знаки синуса у всіх квадрантах і вказав, що у синусоїди нескінченно багато обертів. Графік тангенса для першого квадранта вперше накреслив Джеймс Грегорі (1668). Для тригонометричних функцій важливі результати отримав Блез Паскаль (опубліковані у його книзі «Листи А.Деттонвілля про деякі його геометричні відкриття», 1659 рік). У сучасній термінології дослідник Паскаль обчислив інтеграли від натуральних ступенів синуса й косинуса, вказавши на деякі, пов’язані з ними, а також відзначив, що *d(sin x) = cos x dx.*[36]
Новий час XVIII століття	
Європа	Відкриття й подальше застосування радіанної міри кутів (Роджер Котс, 1714). Власне термін «радіан» виник пізніше, його у 1873 році запропонував англійський інженер Джеймс Томсон. Тригонометричні уявлення комплексного числа і формула Муавра: *(cos φ + i sin φ) n = cos n φ + i sin n φ* Початок використання (Ньютон і Грегорі) полярної системи координат, пов’язаної з декартовою тригонометричними співвідношеннями; до загального обігу окреслені координати увів Ейлер (1748). У 1706 році швейцарський математик Якоб Герман опублікував формули для тангенса суми і тангенса кратних кутів. Науковець Йоганн Ламберт у 1765 році знайшов формули, що виражають різні тригонометричні функції через тангенс половинного кута.[43]

1.2. Зміст теми «Тригонометричні рівняння і нерівності» в класичному курсі тригонометрії

Аналіз числених навчальних, навчально-методичних посібників з курсу тригонометрії [5, 6, 10, 34, 36, 39, 41, 64, 69, 71, 73] засвідчив, що представлення змісту теми має класичну схему, за якою розгортання теми будемо представляти і в нашому дослідженні.

Алгоритм подання теми має таку схему: поняття і факти про найпростіші тригонометричні рівняння та тригонометричні рівняння, які зводяться до найпростіших; типи тригонометричних рівнянь, які розв’язуються за методами; системи тригонометричних рівнянь найпростіші тригонометричні нерівності.[43]

1.2.1 Найпростіші тригонометричні рівняння.

Рівняння називається **тригонометричним,** якщо невідома величина знаходиться під знаком тригонометричних функцій.

Найпростішими тригонометричними рівняннями називаються рівняння виду $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\mathrm{tg} x=a$, $\mathrm{ctg} x=a$. Розв’язати найпростіше тригонометричне рівняння – означає знайти множину всіх кутів, що мають дане значення a тригонометричної функції. Розв’язання найпростіших рівнянь визначається стандартними формулами.

Рівняння $\cos x=a$

1) Якщо $|a| > 1$, то $\cos x = a$ не має розв'язків, оскільки $|\cos x| \leq 1$ для будь-якого x.

2). Якщо $|a| < 1$, то враховуючи те, що $\cos x$ – абсциса точки P_t одиничного кола, маємо, що абсцису a, мають дві точки одиничного кола (на осі OX відкладемо число a і через побудовану точку проведемо пряму, перпендикулярну до осі абсцис (Рис. 1.1), яка перетне коло у двох точках (P_{t1} і P_{t2}).

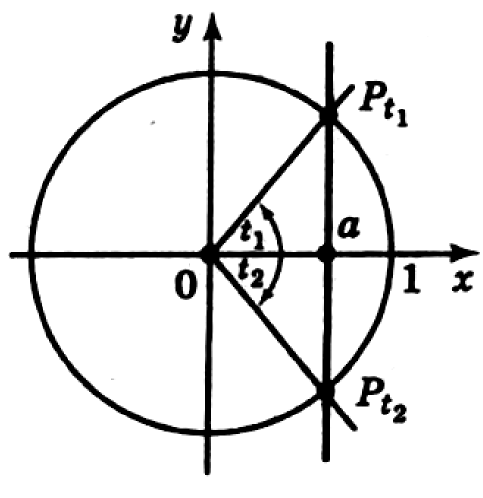


Рис. 1.1

Тоді x_1=*arccos a*+2*πn, nє Z*, x_2=-*arccos a*+2*πn, nє Z*.

Ці розв'язки можна об'єднати $x=\pm \arccos a+2\pi n$, $n\epsilon Z$

3) Якщо $|a| = 1$, то, враховуючи те, що *cosx* – це абсциса точки P_t одиничного кола, абсцису, рівну *1*, має точка P_t утворена із точки $P_0(1;0)$ поворотом на кути $2\pi n$, $n\epsilon Z$. Отже, $x=0+2\pi n=2\pi n$, $n\epsilon Z$,

тобто $x=2\pi n$, $n\epsilon Z$; абсцису рівну -1, має точка P_t утворена з точки $P_0(1;\ 0)$ поворотом на кути $x=\pi+2\pi n$, $n\epsilon Z$, отже якщо $a = -1$, то маємо $x=\pi+2\pi n$, $n\epsilon Z$.

4) Якщо $\cos x = 0$, то маємо $x = \frac{\pi}{2}+ \pi n$, $n\epsilon Z$

Розглянемо приклади.

Приклад 1.1. Розв'язати рівняння: $\cos x= \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$x= \pm \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi n$, $n\epsilon Z$.

Відповідь: $x= \pm \frac{\pi}{6} +2\pi n$, $n\epsilon Z$.

Приклад 1.2. Розв'язати рівняння: $\cos x = \sqrt{2}$.

Відповідь: оскільки $\sqrt{2} >1$, то рівняння коренів немає.

Приклад 1.3. Розв'язати рівняння: $\cos x = 0{,}37$.

$x=\pm \arccos 0{,}37 + 2\pi n$, $n \epsilon Z$.

Відповідь: $\pm \arccos 0{,}37 + 2\pi n$, $n \epsilon Z$.[72]

Рівняння $\sin x=a$

1) Якщо $|a|>1$, то рівняння не має розв'язків, оскільки $|\sin x|\leq 1$ для будь-якого *x*.

2) Якщо $|a|<1$, то, враховуючи те, що sin *x* — ордината точки P_t одиничного кола, то ординату *a*, мають дві точки одиничного кола (на осі *OY* відкладаємо число *a* і через цю точку проведемо пряму, перпендикулярну до осі ординат (рис.1.2), яка перетне коло у двох токах P_{x1} і P_{x2}): $x_1 = \arcsin a+2\pi n$, $n\in Z$,

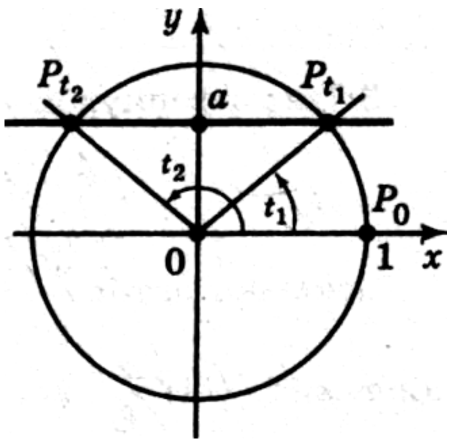


Рис. 1.2

$x_2 = \pi - arcsina + 2\pi n,\ n \in Z.$

Ці дві формули можна записати у вигляді однієї формули:

$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$

Неважко впевнитися, що при:

парному $k = 2n$ маємо $x_1 = arcsina + 2\pi n,\ n \in Z;$

непарному $k=2n+1$ маємо $x_2 = (-1)^{2n+1} arcsina + (2n+1)\pi,\ n \in Z;$

$x_2 = -arcsina + 2\pi n + \pi,\ n \in Z;\ x_2 = \pi - arcsina + 2\pi n,\ n \in Z.$

3) Якщо $a=1$, то, враховуючи те, що $sinx$— це ордината точки P_t одиничного кола, маємо: ординату, рівну 1, має точка P_t утворена із точки $P_0(1;0)$ поворотом на кут $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Отже, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.Якщо $a=-1$, то аналогічно міркуючи, отримуємо $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

4) Якщо $a=0$, маємо $x=0+\pi n;\ x=\pi n,\ n \in Z.$

Розглянемо приклади.

Приклад 1.4. Розв’язати рівняння $sinx=\frac{1}{2}$;

$x=(-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in Z.$

$sinx=-\frac{1}{2};\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in Z.$

Відповідь:$(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in Z;\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in Z$

Приклад 1.5. Розв’язати рівняння:

$sinx = \sqrt{2} - 1.$

Відповідь $(-1)^n arcsin(\sqrt{2}-1)+\pi n,\ n \in Z$.[72]

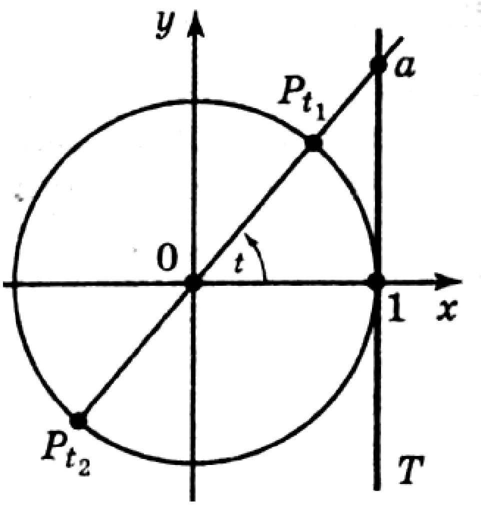


Рис.1.3

Рівняння $tgx=a$

Розв’язування рівняння $tgx=a$ зручно проілюструвати за допомогою лінії тангенсів.

tgx —це ордината точки перетину прямої OP_t з лінією тангенсів. Відкладемо на осі тангенсів число *a*, через цю точку і початок координат проведемо пряму, яка перетне одиничне коло у двох точках P_{t1} і P_{t2}, тоді $x=arctga+\pi n$, $n\epsilon Z$

Отже, рівняння $tgx=a$ при будь-якому значенні а має розв'язок.

Рівняння $ctgx = a$, де $a \neq 0$ рівносильне рівнянню $tgx=1/a$.

Проте можна довести, що розв'язки рівняння $ctgx=a$ можна записати у вигляді: $x=arcctga+\pi n$, $n\epsilon Z$

Розглянемо приклади.

Приклад 1.6 Розв’язати рівняння: $tgx=\sqrt{3}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{3}+\pi n, n\epsilon Z$;

Приклад 1.7 Розв’язати рівняння:$tg\, x=2$.

Відповідь: $arctg2+\pi n\approx 1.1+\pi n, n\epsilon Z$.

Приклад 1.8 Розв’язати рівняння:$ctgx-\sqrt{3}=0$.

$x=\frac{\pi}{6}+\pi n, n\epsilon Z$.

Відповідь: $x=\frac{\pi}{6}+\pi n, n\epsilon Z$[72]

1.2.2. Тригонометричні рівняння, які зводяться до найпростіших.

За допомогою алгебраїчних перетворень або формул тригонометрії деякі рівняння можуть бути зведені до найпростіших тригонометричних рівнянь. Це рівняння, виду $Asin(kx+b)+C=0$, $Acos(kx+b)+C=0$, $Atg(kx+b)+C=0$, $Actg(kx+b)+C=0$. Або рівняння права частина яких – нуль, а ліваа може бути спрощена за допомогою формул тригонометрії або рівняння виду:

$sin(ax+b)=sin(cx+d)$,

$cos(ax+b)=cos(cx+d)$,

$tg(ax+b)=tg(cx+d)$,

$ctg(ax+b)=ctg(cx+d)$,

які у загальному вигляді можна записати так:

T(ax+b)=T(cx+d), де Т – знак будь-якої з тригонометричних функцій.

Ці типи рівнянь називають основними, оскільки до них у процесі розв'язання зводяться будь-які тригонометричні рівняння, що розв'язуються елементарними методами.

Розглянемо розв'язування цих типів рівнянь на прикладах і в загальному вигляді.[58]

Тригометричні рівняння І основного типу: ***AT(ax+b)=C***

Рівняння даного типу розвязуються безпосередньо на основі наступних формул.

1) Якщо *sinz=c* та $|c| \leq 1$,

то $z = (-1)^n arcsinc + \pi n = \begin{cases} arcsinc + \pi 2k \\ -arcsinc + \pi(2k+1) \end{cases}$

2) Якщо *cosz=c* та $|c| \leq 1$,

то $z = \pm arccos + 2\pi n = \begin{cases} arccosc + 2\pi n \\ -arccosc + 2\pi n \end{cases}$

3) Якщо *tgz=c*, то $z = arctgc + \pi n$

4) Якщо *ctgz=c*, то $z = arcctgc + \pi n$

причому параметри *n* всюди приймають різні цілі значення: 0, $\pm 1, \pm 2$ ...

Корисно зауважити, що для рівнянь виду *sinz=c*, при *c=1 та c=-1* перша формула може бути записана в короткому вигляді, а саме:

$$\begin{cases} z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{при с} = 1 \\ z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{при с} = -1 \end{cases}$$

Дійсно, при *c=1* формула буде:

$z = (-1)^n arcsin1 + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{2} + n\pi$

Звідси при парному *n=2к,* $z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, та при непарному п=2к+1,

$z = -\frac{\pi}{2} + \pi(2n+1) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$

Якщо с=-1, то за формулою маємо:

$$z = (-1)^n \arcsin(-1) + \pi n = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \pi n$$

Звідси при парному $n = 2k, z = -\frac{\pi}{2} + \pi \cdot 2k$ при непарному $n = 2k - -1, z = \frac{\pi}{2} + \pi(2k -) = -\frac{\pi}{2} + \pi \cdot 2k$

Такий же результат можна отримати безпосередньо за означення синуса на числовому колі, помітивши, що *sin z=1* тільки в точці **B** де відображаються числа $z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, а *sin z=-1* тільки в точці **B,** де відображаються числа $z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Аналогічними судженнями переконуємося, що розв'язання рівняння *cosz=-1* можна записати у вигляді *z=2πk* а розв'язання рівняння *sin z=-1* у вигляді $z = \pi(2k + 1)$.[58]

Тригонометричні рівняння II типу T(ax+b)=T($a_1 x + b_1$)

Розв'язання рівнянь даного типу засновано на наступних теоремах:

I. Для виконання рівності *sin u=sin v* необхідно і достатньо, щоб виконувалось хоча б одна із умов: *u=v+π·2n* та *u=-v+π(2n+1)*

II. Для виконання рівності *cosu=cosv* необхідно і достатньо, щоб виконувалось хоча б одна із умов *u=v+2πn* та *u=-v+2πn*

III. Для виконання будь-якого із рівнянь:

$$tg\, u = tg\, v$$

$$ctg\, u = ctg\, v$$

необхідно і достатньо, щоб *u=v+πn* та щоб числа *u* та *v* були допустимими значенням аргументів тих функцій, які входять в дане рівняння.[54]

Параметр *n* в усіх випадках є будь-яким числом.

Доведення.

А) Необхідність

Нехай *sinu=sinv,* тоді *sin u-sin v=0* або $2sin\frac{u-v}{2}cos\frac{u+v}{2} = 0$ а це можливо лише в тому випадку, якщо $sin\frac{u-v}{2} = 0$ або $cos\frac{u+v}{2} = 0$.

Перше з цих рівнянь дає: $\frac{u-v}{2} = \pi n$ та $u - v = 2\pi n$ звідки $u=v+\pi\cdot 2n$ друге дає $\frac{u+v}{2} = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ та $u + v = \pi(2n+1)$ звідки $u=-v+\pi(2n+1)$.

Б) Достатність

Нехай $u=v+\pi 2n$, тоді $\sin u=\sin(v+\pi\cdot 2n)=\sin v$

Нехай $u=-v+\pi(2n+1)$ тоді $\sin u=\sin(-v+\pi(2n+1))=\sin(-v+\pi)=\sin v$ в обох випадках отримуємо $sinu=sinv$.

Що і треба було довести.[54]

Приклад 1.9. Розв'яжіть рівняння $4\sqrt{3}tg\left(-\frac{x}{3}\right) - 4 = 0$.

Розв'язання.

Оскільки $tg\left(-\frac{x}{3}\right) = -tg\frac{x}{3}$ то маємо:

$$-4\sqrt{3}tg\frac{x}{3} - 4 = 0;\ -4\sqrt{3}tg\frac{x}{3} = 4; tg\frac{x}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{x}{3} = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi k, k\epsilon Z;\ \frac{x}{3} = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z; x = -\frac{\pi}{2} + 3\pi k, k\epsilon Z$$

Приклад 1.10. Розв'яжіть рівняння $cos^2 4x - sin^2 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу подвійного кута для спрощення лівої частини рівняння, маємо:

$$\cos 8x = \frac{\sqrt{3}}{2}; 8x = \pm arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$$

$$8x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z\ x = \pm\frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{4}, k\epsilon Z$$

Приклад 1.11. Розв'яжіть рівняння: $sin4xcosx-cos4xsinx=-1$

Розв'язання. Спрощуючи ліву частину рівняння, маємо: $sin(4x-x)=-1$, $sin3x=-1$; $3x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\epsilon Z$; $x=-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k\epsilon Z$ [53]

1.2.3. Типи тригонометричних рівнянь

Багато тригонометричних рівнянь, права частина яких дорівнює 0, розв'язуються розкладанням їхньої лівої частини на множники. Під час розв'язування тригонометричних рівнянь цим способом усі члени рівняння переносять у ліву частину і подають утворений вираз у вигляді добутку. Далі використовують необхідну і достатню умови рівності нулю добутку тригонометричних виразів: добуток двох або кількох співмножників дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли принаймні один зі співмножників дорівнює нулю, а інші при цьому не втрачають змісту. Розглянемо цей спосіб.[25]

Тригонометричні рівняння T*(ax+b)*=$T_s(a_1x+b_1)$, у яких T і Ts кофункції

Рівняння даного типу зводяться безпосередньо до основного типу за формулами зведення

Покажемо на конкретних прикладах.

1. Нехай потрібно розв'язати рівняння *sin(ax+b)=cos(a₁x+b₁)* виразимо синус через косинус за формулою зведення і отримуємо $\cos\left(\frac{\pi}{2}-(ax+b)\right)=\cos(a_1x+b_1)$ далі за теоремою маємо: $\frac{\pi}{2}-(ax+b)=\pm(a_1x+b_1)+2\pi n$ звідки $x_1=\frac{b+b_1+2\pi n-\frac{\pi}{2}}{-(a+a_1)}$, якщо $a+a_1\neq 0$; $x_1=\frac{b-b_1+2\pi n-\frac{\pi}{2}}{-(a+a_1)}$, якщо $a+a_1\neq 0$

2. В рівнянні $tg(ax+b)=ctg(a_1x+b_1)$ виразимо наприклад, котангенс через тангенс за формулою зведення $tg(ax+b)=tg(\frac{\pi}{2}-(a_1x+b_1))$, звідки $ax+b=\frac{\pi}{2}-(a_1x+b_1)+\pi n$, $x=\frac{\pi n-(b+b_1)+\frac{\pi}{2}}{(a+a_1)}$, якщо $a+a_1\neq 0$. Так як в рівняння входять функції тангенс та котангенс, які не визначені при деяких значеннях їх аргументів, то слід виключити їх із множини отриманих значень x такі, при яких втрачає сенс хоча б одна з частин рівняння, а саме значення x задовольняюче умову $ax+b=\frac{\pi}{2}+\pi m$ та $a_1x+b_1=\pi m$, де m – будь-яке ціле число.

3. Рівняння *tg(ax+b)*tg(cx+d)=1* зводяться так само до даного типу, а саме, помутивши, що в даному випадку ни один із множників лівої частини не може бути нулем, розділимо на один із них, отримаємо $tg(ax+b)=\frac{1}{tg(cx+d)}$ або *tg(ax+b)=ctg(cx+d)*.[25]

Тригонометричні рівняння типу $f[T(ax+b)]=0$, в яких здійснюються алгебраїчні операції тільки над однією тригонометричною функцією з одним і тим самим аргументом

Попередньо розглянемо цей тип рівнянь на частинних прикладах та поставимо наступні питання:

Чи можуть приймати однакові значення функції: $y=a\sin^2(kx+l)+b\sin(kx+l)+c$ та $y=a_1 sin^2(kx+l)+b_1\sin(kx+l)+c_1$?

Створюємо тригонометричне рівняння

$asin^2(kx+l)+bsin(kx+l)+c=a_1sin^2(kx+l)+b_1\sin(kx+l)+c_1$ або після перетворення

$$(a-a_1)sin^2(kx+l)+(b-b_1)\sin(kx+l)+(c-c_1)=0.$$

Якщо $a-a_1\neq 0$, то заміною $sin(kx+l)=z$ дане рівняння зводиться до квадратного алгебраїчного рівняння $(a-a_1)z^2+(b-b_1)z+(c-c_1)=0$ звідки $z_{1,2}=\frac{b_1-b}{2(a-v_1)}\pm\frac{\sqrt{(b_1-b)^2-4(a-a_1)(c-c_1)}}{2(a-a_1)}$. Позначимо корені коротше $z_1=p_1$, $z_2=p_2$ обратна заміна дає рівняння I типу $sin(kx+l)=p_1$ та $sin(kx+l)=p_2$.

Якщо p_1 и p_2 дійсні числа, не переважаючі за абсолютним значенням, то маємо $kx_1+l=(-1)^n arcsinp_1+\pi n$, $kx_2+l=(-1)^n arcsinp_2+\pi n$, звідки $x_1=\frac{1}{k}(-1)^n\arcsin\ p_1+\pi n-l$, $x_2=\frac{1}{k}(-1)^n arcsin\,p_2+\pi n-l.$ При цих значеннях аргументах дані функції приймають однакові значення.

Окремі види рівнянь типу $f[T(ax+b)]=0$

А) Зведення тригонометричного рівняння до однієї функції одного того самого аргументу.[26]

Досить часто після використання відповідних тригонометричних формул вдається звести рівняння до однієї функції одного й того самого аргументу, після чого застосувати заміну змінних.

Якщо в рівняння входить лише і $tg\ x$ і $ctg\ x$, то після застосування формули $ctgx=\frac{1}{tgx}$ отримаємо рівняння, що містить лише $tg\ x$.

Приклад 1.12. Розв’яжіть рівняння $2tgx+ctgx=-3$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння складається з усіх значень x, крім тих, для яких *cos x = 0* або *sin x = 0*. На ОДЗ рівняння маємо $ctgx = \frac{1}{tgx}$. Запишемо отримане рівняння

$2tgx + \frac{1}{tgx} = -3$ та введемо заміну *tg x=t*. Маємо рівняння $2t + \frac{1}{t} = -3$ коренями якого є числа *-1* і *-0.5*.

1) $t = -1; tgx = -1; x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \epsilon Z.$

2) $t = -\frac{1}{2}; tgx = -\frac{1}{2}; x = arctg\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k,\ k \epsilon Z; x = -arctg\frac{1}{2} +$

$+\pi k, k \epsilon Z.$

Якщо в рівняння входить лише *sin x* і *cos x*, причому хоча б одна з функцій тільки у парних степенях (наприклад, *sin x*), то застосовуємо формулу $sin^2x = 1 - cos^2x$ з подальшою заміною *cosx = t*. Аналогічно застосовуємо формулу $cos^2x = 1 - sin^2x$, якщо cos x входить у рівняння лише у парних степенях.[26]

Приклад 1.13. Розв'яжіть рівняння $6sin^2x+5cos2x-2=0$.

Розв'язання. Оскільки $sin^22x=1-cos^2x$, то маємо

$6(1-cos^22x)+5cos2x-2=0$

$-6cos^22x+5cos2x+4=0$

Робимо заміну *cos2x=t*. Маємо:

$-6t^2 + 5t + 4 = 0;\ t_1 = -\frac{1}{2};\ t_2 = 1\frac{1}{3}.$

Другий корінь не задовольняє рівняння, оскільки $|t| \leq 1$.

Отже, $t = -\frac{1}{2};\ cos2x = -\frac{1}{2}; 2x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \epsilon Z.$

$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \epsilon Z; x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \epsilon Z.$ [22]

Якщо в тригонометричне рівняння входять лише *cos2x* і *cosx*, то застосовуємо формулу $cos\ 2x = 2\ cos^2\ x - 1$ і вводимо заміну *cos x = t*.

Якщо в тригонометричне рівняння входять лише *cos2x* і *sinx*, то застосовуємо формулу $cos2x = 1–2sin^2 x$ і вводимо заміну *sinx=t*.

Приклад 1.14. Розв'яжіть рівняння *cos2x-5sinx-3=0*.

Розв'язання. Маємо $1-2sin^2x-5sinx-3=0$ заміна $sinx=t$

Рівняння $2t^2+5t+2=0$ має корені $t_1 = -\frac{1}{2}$; $t_1 = -2$ з яких лише перший задовольняє умову $|t| \leq 1$. Отже, $sinx = -\frac{1}{2}, x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z$. [20]

Б). Однорідні тригонометричні рівняння та рівняння, що зводяться до однорідних.

Тригонометричні рівняння $asinx + bcosx = 0$, де a і b — числа, $a \neq 0$, $b \neq 0$, називають однорідними тригонометричними рівняннями 1-го степеня відносно $sinx$ і $cosx$.

Ті значення x, при яких $cos\ x = 0$, не є коренями рівняння. Дійсно у разі $cos\ x = 0$ рівняння набуває вигляду $asinx = 0$. Оскільки $a \neq 0$, то матимемо $sinx = 0$. Проте $sinx$ і $cosx$ не можуть одночасно дорівнювати нулю.

Поділивши ліву і праву частини рівняння $asinx + bcosx = 0$ на $cosx \neq 0$, матимемо $atgx + b = 0$, після чого закінчуємо розв'язання.

Приклад 1.15. Розв'яжіть рівняння $2sinx – 7cosx = 0$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на $cos\ x \neq 0$. Матимемо

$$\frac{2sinx}{cosx} - \frac{7cosx}{cosx} = 0;$$

$$2tgx-7=0;$$

$$Tgx=3.5$$

$$x=arctg3.5+\pi k,\ k\epsilon Z.$$

Тригонометричне рівняння $asin^2x+bcosxsinx+ccos^2x=0$, де a, b, c — числа, з яких хоча б два відмінні від нуля, називають однорідними тригонометричними рівняннями другого степеня відносно $sinx$ і $cosx$. Сума показників степенів у всіх доданків при sin x і cos x дорівнює двом.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння (по аналогії з однорідним 1-го степеня) розв'язують, поділивши на $cos^2x \neq 0$ з подальшою заміною $tgx = t$. Якщо ж $a = 0$, то виносимо $cosx$ за дужки та застосовуємо прийом відомий нам з попереднього пункту.[17]

Приклад 1.16. Розв'яжіть рівняння $sin^2x-3cosxsinx-4cos^2x=0$.

Розв'язання. Ті значення х, при яких $cosx = 0$, не є коренями рівняння. Розділимо ліву і праву частини рівняння на $cos^2x \neq 0$.

Маємо

$$\frac{sin^2x}{cos^2x}-\frac{3sinxcosx}{cos^2x}-\frac{4cos^2x}{cos^2x}=0$$

$$tg^2x\text{-}3tgx\text{-}4=0$$

Заміна $tgx = t$, маємо t^2-$3t$-$4=0$; $t_1=-1$; $t_2=4$.

1) $t_1=-1$; $tgx=-1$; $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\epsilon Z$.

2) $t_2=-1$; $tgx=4$; $x=arctg4+\pi m, m\epsilon Z$.

До однорідних можуть зводитися рівняння, які мають зовнішній вигляд, відмінний від зовнішнього вигляду однорідного рівняння. При цьому часто застосовують формули тригонометричних функцій подвійного кута та тотожність $sin^2x+cos^2x=1$. [18]

Приклад 1.17. Розв'яжіть рівняння $5sin^2x\text{-}3cos^2x\text{-}sin2x=2$.

Розв'язання. Застосовуємо формулу $sin2x = 2sinxcosx$ і таку тотожність $2=2\cdot 1=2(sin^2x+cos^2x)$.

Маємо

$5sin^2x\text{-}3cos^2x\text{-}2sincosx=2(sin^2x+cos^2x)$;

$3sin^2\text{-}2sinxcosx\text{-}5cos^2x=0$

Поділимо ліву і праву частини на $cos^2 x \neq 0$.

Маємо $3tg^2x\text{-}2tgx\text{-}5=0$. Заміна $tg\ x = t$. Рівняння $3t^2 — 2t — 5 = 0$ має корені $t_1 = -1$; $t_2 = 5/3$.[18]

Тригонометричні рівняння типу *f(sin(ax+b), cos(ax+b), tg(ax+b), ctg(ax+b), sec(ax+b), cosec(ax+b))=0*, де виконуються алгебраїчні дії над деякими круговими функціями одного аргументу

До цього підтипу віднесемо рівняння виду: $R(sinz, cosz, tgz, ctgz, secz, cscz)=0$.

Такі рівняння зводяться до раціональних алгебраїчних рівнянь за допомогою підстановки $tg\frac{z}{2}=y$.

На справді, використовуючи формули будемо мати:

$$sinz=\frac{sin2(\frac{z}{2})}{1}=\frac{2sin\frac{z}{2}cos\frac{z}{2}}{cos^2\frac{z}{2}+sin^2\frac{z}{2}}=\frac{2tg\frac{z}{2}}{1+tg^2\frac{z}{2}}=\frac{2y}{1+y^2}$$

$$cosz=\frac{sin2(\frac{z}{2})}{1}=\frac{cos^2\frac{z}{2}-sin^2\frac{z}{2}}{cos^2\frac{z}{2}+sin^2\frac{z}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{z}{2}}{1+tg^2\frac{z}{2}}=\frac{1-y^2}{1+y^2}$$

$$tgz=tg2\left(\frac{z}{2}\right)=\frac{2tg\frac{z}{2}}{1-tg^2\frac{z}{2}}=\frac{2y}{1-y^2}$$

$$ctgz=\frac{1}{tgz}=\frac{1-y^2}{2y};secz=\frac{1}{cosz}=\frac{1+y^2}{1-y^2};cscz=\frac{1}{sinz}=\frac{1+y^2}{2y}.$$

У такий спосіб кожна із шести кругових функцій виразилась раціональними операціями через y:

$$\begin{cases} sinz=\frac{2y}{1+y^2},cosz=\frac{1-y^2}{1+y^2},tgz=\frac{2y}{1-y^2} \\ ctgz=\frac{1-y^2}{2y},secz=\frac{1+y^2}{1-y^2},cscz=\frac{1+y^2}{2y} \end{cases}$$

Виконавши заміну в даному рівнянні, отримуємо рівняння: $R(\frac{2y}{1+y^2},\frac{1-y^2}{1+y^2},\frac{2y}{1-y^2},\frac{1-y^2}{2y},\frac{1+y^2}{1-y^2},\frac{1+y^2}{2y})=0$, де над аргументом y виконуються тільки раціональні операції, а тому його можна записати коротше так: $R_1(y)=0$, де через R_1 позначена характеристика всіх раціональних операцій, проведених в рівняннях над y.

Використовуючи співвідносні методи алгебри, знаходимо дійсні корені цього рівняння: $y=p_1,p_2,\dots,p_m$.

Обратною заміною отримуємо рівняння I типу $tgx\frac{ax+b}{2}=p_1,tg\frac{ax+b}{2}=$ $=p_2,\dots,tg\frac{ax+b}{2}=p_m$[17]

Приклад 1.18. Розв'яжіть рівняння

$$2\sin x\cos 2x-1+2\cos 2x-\sin x=0.$$

Р о з в ' я з а н н я .

Згрупуємо доданки у лівій частині рівняння:

$(2\sin x\cos 2x-\sin x)+(2\cos 2x-1)=0.$

$2\sin x \cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$

$(2\cos 2x - 1)(\sin x + 1) = 0$

Враховуючи умову рівності нулю, маємо:

$2\cos 2x - 1 = 0$ або $\sin x + 1 = 0$.

Кожне з цих рівнянь легко звести до найпростішого:

$$2\cos 2x = 1$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \qquad\qquad \sin x = -1$$

$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \qquad\qquad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

В і д п о в і д ь : $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$[14]

1.2.4. Системи тригонометричних рівнянь.

При розв’язуванні систем тригонометричних рівнянь використовуються ті ж прийоми, що і при розв’язуванні систем алгебраїчних рівнянь, а також формули тригонометрії. Звичайно при розв’язуванні тригонометричних систем останні зводять або до одного рівняння з одним невідомим, або до системи рівнянь відносно самих аргументів або функцій цих аргументів. [27]

Приклад 1.19. Розв’язати систему

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3} \\ cosx + cosy = 1 \end{cases}$$

Розв’язання.

Виразивши *y* через *x* з першого рівняння системи і підставивши в друге, дістанемо рівносильну початковій систему:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2\pi}{3} - x, \\ cosx + cosx\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2\pi}{3} - x, \\ 2cos\dfrac{\pi}{3}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2\pi}{3} - x, \\ x - \dfrac{\pi}{3} = 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{3} - 2\pi n, n\epsilon Z \\ x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z \end{cases}$$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, y = \frac{\pi}{3} - 2\pi n, n\epsilon Z$. [13]

Зауваження. Відповідь можна було б записати в наступній формі :

$$\left\{\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} - 2\pi n\right)\middle| n\epsilon Z\right\}$$

Приклад 1.20. Розв'язати систему

$$\begin{cases} sin(x - 2y) = 0 \\ sin(x + 2y) = 0 \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} sin(x - 2y) = 0 \\ sin(x + 2y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = \pi n \\ x + 2y = \pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{(k+n)\pi}{2} \\ y = \dfrac{(k-n)\pi}{4} \end{cases} n, k\epsilon Z$$

У прикладі 1.20 істотним є використання різних букв (n і k) для позначення цілочисельних параметрів, оскільки знайдені множини не зв'язані між собою. Якщо б ці множини ми записали за допомогою однієї і тієї ж букви, то це привело б до втрати розв'язків.

Відповідь:

$\left\{\left(\frac{(k+n)\pi}{2}, \frac{(k-n)\pi}{4}\right)\middle| n, k\epsilon Z\right\}$ [13]

Приклад 1.27. Розв'язати систему

$$\begin{cases} sin\,x \cdot cosy = 0.5 \\ cosx \cdot siny = -0.5 \end{cases}$$

Розв'язання. Склавши 1 і 2 рівняння системи, дістанемо

$$sinx \cdot cosy + cosx \cdot siny = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow sin(x + y) = 0$$

Зробивши віднімання з першого рівняння другого, дістанемо

$$sinx\cdot cosy - cosx\cdot siny = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \sin(x-y) = 1$$

Таким чином, дістаємо систему, рівносильну початковій:

$$\begin{cases} sin(x+y) = 0 \\ sin(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pi n \\ x - y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} + k\pi \\ y = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} - k\pi, \end{cases} n, k\epsilon Z$$

Відповідь: $\left\{\left((\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} - k\pi\right) \middle| n, k\epsilon Z\right\}$ [3]

Приклад 1.21. Розв’язати систему

$$\begin{cases} sinx - \frac{1}{sinx} = siny \\ cosx - \frac{1}{cosx} = cosy \end{cases}$$

Розв’язання.

ОДЗ: $sinx \neq 0$, $cosx \neq 0$.

Помножимо перше рівняння на $sinx \neq 0$, а друге – на $cosx \neq 0$. Отримали

$$\begin{cases} sin^2x - 1 = sinxsiny \\ cos^2x - 1 = cosxcosy \end{cases}$$

$$\begin{cases} cosxcosxy = -sin^2x \\ sinxsiny = -cos^2x \end{cases} (1)$$

Додаємо рівняння системи (1), будемо мати $cos(y-x)=-1$, звідси $y-x=\pi+2\pi k, k\epsilon Z$, $y=x+\pi+2\pi k$, $k\epsilon Z$. Підставляючи ці значення y в рівняння системи (1), отримаємо

$$\begin{cases} -cos^2x = -sin^2x \\ -sin^2x = -cos^2x \end{cases} (2)$$

з урахуванням ОДЗ, знайдемо

$cos2x=0$

$2x=\frac{\pi}{2} + \pi n$

$x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi n}{2}, n\epsilon Z$

Тоді $y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}+\pi+2\pi k=\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}+2\pi k, n, k\epsilon Z$

Відповідь: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ y=\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}+2\pi k,\ n, k\epsilon Z$.[4]

Приклад 1.22. Розв'язати систему

$$\begin{cases} tgx+ctgx=2sin(y-\frac{3\pi}{4}) \\ tgy+ctgy=2sin(x+\frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

Розв'язання.

ОДЗ: *cosx≠0, sinx≠0, cosy≠0, siny≠0.*

Оскільки $|tgx+ctgx|\geq 2$, а $\left|2sin(y-\frac{3\pi}{4})\right|\leq 2$, то перше рівняння системи рівносильне сукупності двох систем

$$\begin{cases} tgx=1 \\ sin\left(y-\frac{3\pi}{4}\right)=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} tgx=-1 \\ sin\left(y-\frac{3\pi}{4}\right)=-1 \end{cases}$$

З першої системи сукупності знаходимо

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\epsilon Z \\ y=\frac{5\pi}{4}+2\pi n, n\epsilon Z \end{cases}$$

Перевіркою встановлюємо, що знайдений роз'язок задовільняє другому рівнянню даної системи, якщо *k=2m*, $m\epsilon Z$

$$\begin{cases} x=-\frac{\pi}{4}+\pi l, l\epsilon Z \\ y=\frac{\pi}{4}+2\pi t, t\epsilon Z \end{cases}$$

Знайдені роз'вязки не задовільняють другому рівнянню даної системи

Відповідь: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi m, m\epsilon Z\ y=\frac{5\pi}{4}+2\pi n, n\epsilon Z$ [13]

Приклад 1.23. Розв'язати систему

$$\begin{cases} cosx - cosy = \sin(x+y) \\ |x| + |y| = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Розв'язання.

Запишемо дану систему в такому вигляді:

$$\begin{cases} sin\frac{x+y}{2}sin\frac{y-x}{2} = sin\frac{x+y}{2}cos\frac{x+y}{2} \\ |x| + |y| = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Розглянемо два випадки:

1) $sin\frac{x+y}{2} = 0$ звідси *x+y=2πk,* якщо *k=0* оскільки $|x+y| \le |x| + |y| = \frac{\pi}{4}$.

Отже, *x+y=0*, звідси *x=-y;* значить $|x| = |y| = \frac{\pi}{4}$.

2) $cos\frac{x+y}{2} = cos\frac{x+y}{2}$; звідси

$cos\frac{x+y}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y-x}{2}\right) = 0; \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0.$

У цьому випадку ми не отримаємо розв'язка даної системи, так як при $cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0$ маємо $x = -\frac{\pi}{2} - 2\pi k,$ тобто $|x| > \frac{\pi}{4}$; при $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) = 0$ маємо $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, тобто $|y| > \frac{\pi}{4}$.

Відповідь: $x_1 = \frac{\pi}{8}, y_1 = -\frac{\pi}{8}, x_2 = -\frac{\pi}{8}, y_2 = \frac{\pi}{8}$. [12]

1.2.5. Найпростіші тригонометричні нерівності.

Нерівності, що містять невідомі під знаками тригонометричних функцій, називають тригонометричними нерівностями.

Прикладами тригонометричних нерівностей є нерівності

$sinx < \frac{1}{2}, cosx \ge \frac{\sqrt{3}}{2}, 4tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > -\sqrt{3}$ тощо.[51]

До найпростіших будемо відносити нерівності виду *sint>a, cost>t, tgt>a, ctgt>a* та інші, у яких на місці знака > стоїть один із знаків ≥, < або ≤. Загальні формули для розв'язування цих нерівностей є досить громіздкими. Тому розглянемо методи розв'язування цих нерівностей на прикладах. Для наочності будемо використовувати одиничне коло, лінії тангенса і котангенса.

Приклад 1.24. Розв'язати нерівність $sint \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання: $sin\ t$ - це ордината точки одиничного кола, що відповідає куту t. Спочатку позначимо на одиничному колі всі точки, ординати яких більші за $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ці точки знаходяться вище прямої $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис.1.4). Множина всіх таких точок — дуга l. Якщо рухатися по цій дузі проти руху годинникової стрілки, то початкова точка дуги l відповідає куту $arcsin\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, а кінцева — $\pi - arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Кути, що відповідають цим точкам, входять у відповідь (оскільки знак нерівності ≥), а тому на малюнку точки позначені жирно. Таким чином, нерівність $sin\ t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ задовольняють всі значення t такі, що $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$. Оскільки синус є функцією періодичною з найменшим додатним періодом 2π, то множину всіх розв'язків нерівності отримаємо, додавши до чисел $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{3\pi}{4}$числа виду $2\pi k,\ k\epsilon\ Z$. Отже, маємо: $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq$

$$\leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z$$

Відповідь можна подати і так: $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right), k\epsilon Z$. [49]

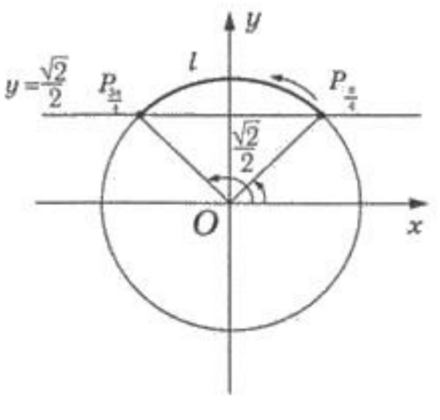


Рис. 1.4

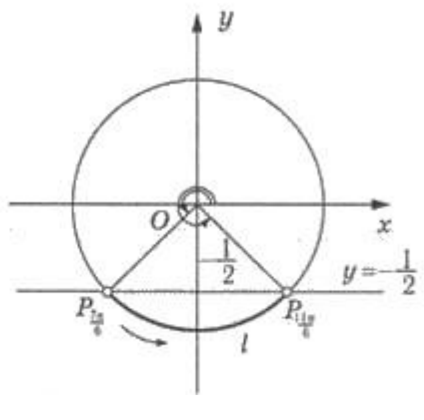


Рис. 1.5

Приклад 1.25 Розв'язати нерівність $sin2x < -\frac{1}{2}$

Розв'язання. Позначимо $2x = t$, маємо нерівність $sin\ t < -\frac{1}{2}$. Позначимо на одиничному колі всі точки, ординати яких менші за$-\frac{1}{2}$, це точки дуги l, які розташовані нижче прямої $y = -\frac{1}{2}$ (рис. 1.5). Кінці цієї дуги — точки, ординати яких дорівнюють $-\frac{1}{2}$; кути, що відповідають цим точкам, не входять у відповідь, оскільки знак нерівності «менше». Тому точки на малюнку «виколоті». Якщо рухатися по дузі l проти годинникової стрілки, то початкова точка дуги l відповідає куту $\pi + arcsin\frac{1}{2} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$а кінцева – куту $2\pi - arcsin\frac{1}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

Ураховуючи періодичність, маємо: $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z.$

Повертаємося до змінної x: $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < 2x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z.$

Розділимо всі три частини подвійної нерівності на 2. Маємо:

$\frac{7\pi}{12} + \pi k < x < \frac{11\pi}{12} + \pi k, k\epsilon Z$

Приклад 1.26. Розв'язати нерівність $cost \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. $cos\ t$ – це абсциса точки одиничного кола, що відповідає куту t. Позначимо на одиничному колі всі точки, абсциси яких менші за $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ці точки розташовані лівіше прямої $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 1.6), утворюють дугу l. Кути, що відповідають крайнім точкам дуги, входять у відповідь (оскільки знак нерівності ≤), тому точки на малюнку позначені жирно. При русі проти годинникової стрілки початкова точка дуги l відповідає куту $arccos\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, а кінцева – куту $2\pi - arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

Ураховуючи періодичність косинуса, отримаємо розв'язки нерівності: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq t \leq \frac{11\pi}{6} + \pi k,\ k\epsilon Z.$ [45]

Приклад 1.27. Розв'язати нерівність $\cos(x + \frac{\pi}{3}) > \frac{1}{2}$

Розв'язання. Позначимо $x+\frac{\pi}{3}=t$, маємо $\cos t>\frac{1}{2}$. На рис. 1.7 виділено відповідну дугу l, її кінцева точка відповідає куту $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, а початкова – куту $\arccos\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{3}$. Маємо: $-\frac{\pi}{3}+2\pi k<t<\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\epsilon Z.$

Повертаємося до змінної x: $-\frac{\pi}{3}+2\pi k<x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\epsilon Z.$

Віднімемо від трьох частин подвійної нерівності $\frac{\pi}{3}$. Маємо:

$-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\epsilon Z.$

$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k<x<2\pi k, k\epsilon Z.$

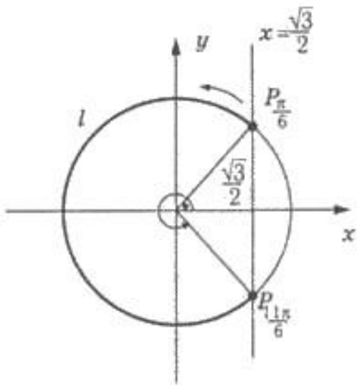


Рис. 1.6

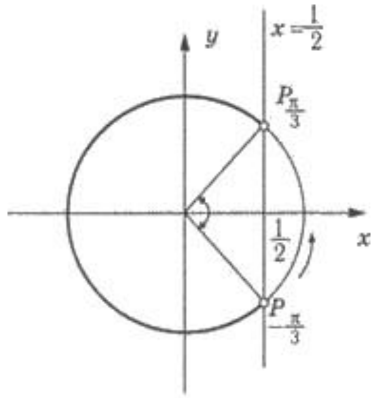


Рис. 1.7

Для ілюстрації розв'язків нерівностей, у яких в лівій частині знаходиться tgx, а в правій — число, ознайомимося з лінією тангенсів.

Розглянемо пряму l, яка є дотичною до одиничного кола і проходить через точку (1;0) (рис. 1.8). Нехай при повороті на кут α початковий радіус OP_0 переходить у радіус OP_α. Нехай пряма OP_α перетинає пряму l у точці D_α. Тоді ордината точки D_α дорівнює тангенсу α.[45]

Приклад 1.28. Розв'язати нерівність $tg\ t\leq\sqrt{3}$.

Розв'язання. Період функції тангенс дорівнює π, тому спочатку знайдемо розв'язки нерівності на проміжку $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, а потім використаємо періодичність. Проведемо лінію тангенсів, tgt - це ордината точки лінії тангенсів, що відповідає куту t. Позначимо на лінії тангенсів точку, ордината якої дорівнює $\sqrt{3}$– точку A (рис. 1.9). Ця точка відповідає куту $arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, а точки лінії тангенсів, у яких ординати менші за $\sqrt{3}$, відповідають кутам від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{3}$. Зауважимо, що кут $\frac{\pi}{3}$ буде входити у відповідь (оскільки знак нерівності ≤), а кут $-\frac{\pi}{2}$- не буде, оскільки $tg(-\frac{\pi}{2})$— не існує. Отже на проміжку $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ нерівність $tg\ t \leq \sqrt{3}$ має розв'язки $-\frac{\pi}{2} < t \leq \frac{\pi}{3}$. Враховуючи періодичність, маємо:[45]

$$-\frac{\pi}{2} + \pi k < t \leq \frac{\pi}{3} + \pi k,\ \ k \epsilon Z.$$

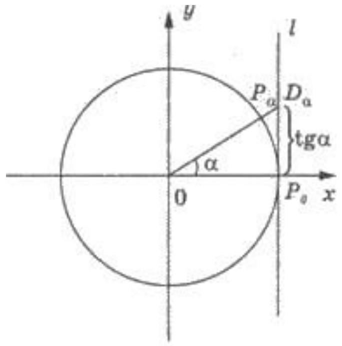


Рис. 1.8

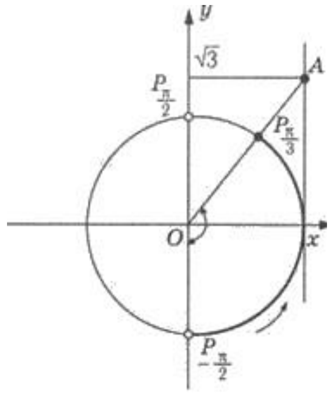


Рис. 1.9

Приклад 1.29. Розв'язати нерівність $tg\ t \geq \sqrt{3}$.

Розв'язання. Використовуючи малюнок та періодичність, маємо:

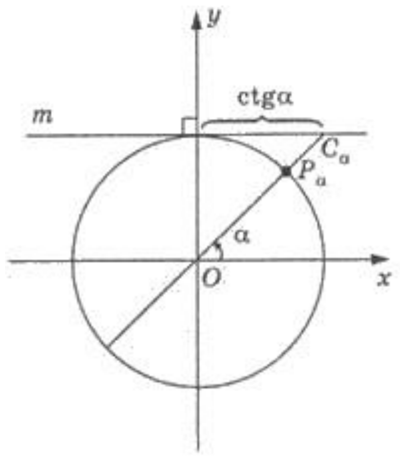
$$\frac{\pi}{3} + \pi k \leq t < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \epsilon Z.$$

Пряму m, яка проходить через точку (0;1) перпендикулярно до осі ординат, називають лінією котангенсів (рис. 1.10). Абсциса точки C_α перетину прямої OP_α з лінією котангенсів дорівнює котангенсу α.[40]

Приклад 1.30. Розв'язати нерівність $ctg\ t > \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання (рис. 1.11). Використовуючи лінію котангенсів, отримаємо розв'язок нерівності на проміжку (0;π); $0 < t < \frac{2\pi}{3}$.

Далі використаємо періодичність: $\pi k \leq t \leq \frac{2\pi}{3} + \pi k,\ \ k \epsilon Z.$ [37]



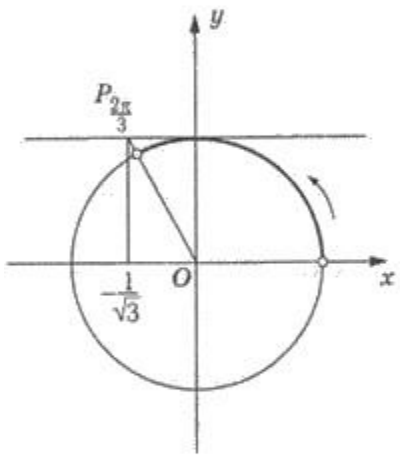


Рис. 1.10 Рис. 1.11

Деякі із досліджуваних типів рівнянь, нерівностей та систем пропонуються для вивчення за програмою рівня стандарту та профільного рівня навчання математики у закладах середньої освіти.

1.3. Компетентісний підхід до вивчення теми

Як зазначається навчальними програмами з математики [33], в основу побудови змісту й організації процесу навчання математики покладено компетентнісний підхід (додаток А), відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності, які сприятимуть здатності учня застосовувати свої знання в реальних життєвих ситуаціях, нести відповідальність за свої дії, брати повноцінну участь у житті суспільства, у подальшому забезпечувати своє фахове самовдосконалення.[22]

Мета базової загальної середньої освіти: розвиток особистості, яка поєднує в собі творчий потенціал до навчання, ініціативність до саморозвитку й самонавчання в сучасних умовах, здатності ідентифікувати себе як важливу і відповідальну складову українського суспільства, яка готова змінювати і відстоювати національні цінності українського народу.

Важливим чинником розвитку такої особистості є формування в учнів умінь застосовувати набуті знання в реальних життєвих ситуаціях, під час розв’язання практичних завдань і здатності визначати й обґрунтовувати власну життєву позицію, застосовувати в подальшій фаховій діяльності набуті предметні знання, виявляти міжпредметні зв’язки під час вивчення математики, розвивати інтегративне бачення спостережуваних явищ.[44]

Науковці наголошують [60, 61, 70], що одним із головних завдань курсу математики на базовому рівні є забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної компетентності.

Практична компетентність передбачає, що випускник загальноосвітнього навчального закладу:

- уміє будувати й досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об’єктів, процесів і явищ, задач, пов’язаних із ними, за допомогою математичних об’єктів, відповідних математичних задач;
- уміє оволодівати необхідною оперативною інформацією для розуміння постановки математичної задачі, її характеру й особливостей; уточнювати вихідні дані, мету задачі, знаходити необхідну додаткову інформацію, засоби розв’язування задачі; переформульовувати задачу; розчленовувати задачі на складові, встановлювати зв’язки між ними, складати план розв’язання задачі; вибирати засоби розв’язання задачі, їх порівнювати й застосовувати оптимальні; перевіряти правильність розв’язання задачі; аналізувати та інтерпретувати отриманий результат, оцінювати його придатність із різних позицій; узагальнювати задачу, всебічно її розглядати; приймати рішення за результатами розв’язання задачі;
- володіє технікою обчислень, раціонально поєднуючи усні, письмові, інструментальні обчислення, зокрема наближені;
- уміє проектувати і здійснювати алгоритмічну й евристичну діяльність на математичному матеріалі;

- уміє працювати з формулами (розуміти змістове значення кожного елемента формули, знаходити їх числові значення при заданих значеннях змінних, виражати одну змінну через інші);
- уміє читати й будувати графіки функціональних залежностей, досліджувати їх властивості;
- уміє класифікувати і конструювати геометричні фігури на площині й у просторі, встановлювати їх властивості, зображати просторові фігури та їх елементи, виконувати побудови на зображеннях;
- вміє вимірювати геометричні величини на площині й у просторі, які характеризують розміщення геометричних фігур (відстані, кути), знаходити кількісні характеристики фігур (площі та об'єми);
- уміє оцінювати шанси настання тих чи інших подій.
- Практична компетентність є важливим показником якості математичної освіти, природничої підготовки молоді. Вона певною мірою свідчить про готовність молоді до повсякденного життя, до найважливіших видів суспільної діяльності, до оволодіння професійною освітою.[48]

Мета навчання математики на профільному рівні полягає в забезпеченні свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін і продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значною математичною складовою.

Досягнення зазначеної мети забезпечується виконанням таких ***завдань:***

- формування в учнів наукового світогляду, уявлень про ідеї та методи математики, її роль у пізнанні дійсності, усвідомлення математичних знань як невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві; стійкої мотивації до навчання;
- оволодіння учнями мовою математики системою математичних знань, навичок і вмінь, потрібних у повсякденному житті та майбутній

професійній діяльності, достатніх для успішного оволодіння іншими освітніми галузями знань і забезпечення неперервності освіти;

- інтелектуальний розвиток особистості, передусім розвиток в учнів логічного мислення і просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, пам'яті, уваги, інтуїції;
- екологічне, естетичне, громадянське виховання та формування позитивних рис особистості; формування життєвих і соціально-ціннісних компетентностей учня.[51]

Змістове наповнення програми реалізує компетентнісний підхід до навчання, спрямований на формування системи відповідних знань, навичок, досвіду, здібностей і ставлення, яка надає змогу обґрунтовано судити про застосування математики в реальному житті, визначає готовність випускника школи до успішної діяльності в різних сферах. Передбачається, що випускник загальноосвітнього навчального закладу:

- розпізнає проблеми довкілля, які можна розв'язати математичними методами, формулює їх математичною мовою, досліджує та розв'язує ці проблеми, використовуючи математичні знання та методи, інтерпретує отримані результати з урахуванням конкретних умов і цілей дослідження, застосовує математичні моделі при вивченні профільних предметів (інформатики, фізики, хімії, біології, технологій);
- логічно мислить (аналізує, порівнює, узагальнює і систематизує, класифікує математичні об'єкти за певними властивостями, наводить контрприклади); володіє алгоритмами та евристиками;
- користується джерелами математичної інформації, може самостійно її відшукати, проаналізувати та передати інформацію, подану в різних формах (графічній, табличній, знаково-символьній);
- виконує математичні розрахунки (дії з числами, поданими в різних формах, дії з відсотками, наближені обчислення тощо), раціонально поєднуючи усні, письмові, інструментальні обчислення;

- виконує тотожні перетворення алгебраїчних, показникових, логарифмічних, тригонометричних виразів;
- аналізує графіки функціональних залежностей, досліджує їхні властивості; використовує властивості елементарних функцій при аналізі та описуванні реальних явищ, процесів, залежностей;
- володіє методами математичного аналізу в обсязі, що дозволяє досліджувати властивості елементарних функцій, будувати їх графіки і розв’язувати нескладні прикладні задачі;
- обчислює ймовірності випадкових подій, оцінює шанси їх настання;
- зображує геометричні фігури, встановлює і обґрунтовує їхні властивості; застосовує властивості фігур при розв’язуванні задач; вимірює геометричні величини, які характеризують розміщення геометричних фігур (відстані, кути), знаходить кількісні характеристики фігур (площі, об’єми).[48]

Окрім того, навчання математики має зробити певний внесок у формування 10 ключових компетентностей [33]:

1. Спілкування державною (і рідною у разі відмінності) мовами.
2. Спілкування іноземними мовами.
3. Математична компетентність.
4. Основні компетентності у природничих науках і технологіях.
5. Інформаційно-цифрова компетентність.
6. Уміння вчитися впродовж життя.
7. Ініціативність і підприємливість.
8. Соціальна та громадянська компетентності.
9. Обізнаність та самовираження у сфері культури.
10. Екологічна грамотність і здорове життя.

Тригонометричні рівняння одна з найскладніших тем у шкільному курсі математики. Тригонометричні рівняння виникають при розв’язуванні задач планіметрії, стереометрії, астрономії, фізики та в інших галузях.

Тригонометричні рівняння і нерівності внесені до основного блоку завдань зовнішнього незалежного оцінювання.

Важлива відмінність тригонометричних рівнянь від алгебраїчних полягає в тому, що в рівняннях алгебри кінцеве число коренів, а в тригонометричних – нескінченне, що суттєво ускладнює відбір коренів. Специфікою тригонометричних рівнянь також є неєдині форми запису відповіді.[8]

Проаналізуємо зміст теми на базовому і профільному рівнях математичної підготовки старшокласників (таблиця 1.2) та здійснимо його логіко-математичний аналіз з точки зору можливостей формування компетентностей учнів у навчанні теми на базовому (таблиці 1.3, 1.4, 1.5) і профільному рівнях (таблиці 1.6, 1.7, 1.8).

Логіко-математичний аналіз теми «Тригонометричні рівняння» здійснено за підручником: Мерзляк А. Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018. – 256 с.[11]

Логіко-математичний аналіз теми «Тригонометричні рівняння і нерівності» здійснено за підручником: Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018. – 400с. [34]

Таблиця 1.2

Зміст теми «Тригонометричні функції»

Базовий (18 годин)	Профільний (34 години)
Тема «Тригонометричні функції»	
Синус, косинус, тангенс, кута. Радіанне вимірювання кутів. Тригонометричні функції числового аргументу. Основні співвідношення	Радіанне вимірювання кутів. Синус, косинус, тангенс, котангенс кута. Тригонометричні функції числового аргументу. Періодичність функцій.

між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення.	Властивості та графіки тригонометричних функцій.
Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій. Формули додавання для тригонометричних функцій та наслідки з них. Найпростіші тригонометричні рівняння.	Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення. Тригонометричні формули: формули додавання, формули подвійного аргументу, формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток, формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму, формули пониження степеня, формули потрійного аргументу, формули половинного аргументу. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу.
	Тригонометричні рівняння і нерівності (32 години)
	Обернені тригонометричні функції: означення, властивості, графіки. Найпростіші тригонометричні рівняння. Основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь. Тригонометричні нерівності. Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами. Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції.

Таблиця 1.3

Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу теми

Поняття	Факти	Способи діяльності
Арккосинус числа, арксинус числа, арктангенс числа. Найпростіші тригонометричні рівняння	Формула коренів рівняння $\cos x = b, -1 \le b \le 1,$ Формула коренів рівняння $\sin x = b, -1 \le b \le 1,$ Формула коренів рівняння $tg\ x = b$	Методи зведення тригонометричних рівнянь до найпростіших

Таблиця 1.4

Орієнтована будова системи вправ для введення нового матеріалу

Види вправ	Рівняння cos *x*=b	Рівняння sin *x*=b	Рівняння tg *x*=b
Вправи для створення мотивації для введення нового поняття			
Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та умінь			
Вправи, спрямовані на виділення суттєвих властивостей	15.1, 15.2	16.1, 16.2	16.5, 16.6
Вправи, на базі яких подається ілюстрація понять що вводиться	15.3-15.6	16.3, 16.4	16.7, 16.8
Вправи для забезпечення розпізнав. об'єктів, що входять до обсягу нового поняття	15.7, 15.8	16.9, 16.10	16.11, 16.12
Вправи спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння тексту означення	15.9, 15.10	16.13-16.16	16.17, 16.18

Таблиця 1.5

Орієнтовна система вправ призначених для формування способу діяльності

Основні способи діяльності	Відпрацювання операцій, які формують способи діяльності	Відпрацювання операцій, які входять у спосіб діяльності	Застосування способу діяльності
Методи зведення тригонометричних рівнянь до найпростіших: А) виконання заміни; Б) використання формул тригонометрії;		17.1, 17.2; 17.3, 17.4	17.5, 17.6; 17.7, 17.8

Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учня на профільному рівні підготовки: учень (учениця): **формулює** означення обернених тригонометричних функцій; **обґрунтовує** формули коренів тригонометричних рівнянь $\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a;$ **розв'язує** тригонометричні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами.[36]

Таблиця 1.6

Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу теми

Поняття	Факти	Способи діяльності
Арккосинус числа, арксинус числа, арктангенс числа, арккотангенс числа. Однорідні тригонометричні рівняння *n*-го степеня. Найпростіші тригонометричні нерівності	Формула коренів рівняння *cos x = b, -1 ≤ b ≤1,* Формула коренів рівняння *sin x = b, -1 ≤ b ≤1,* Формула коренів рівняння *tg x = b* і *ctg x = b* Властивості функцій *y*=arcos *x* та *y*=arcsin *x*, *y*=arctg *x*, *y*=arcctg *x*.	Розв'язування рівнянь, які зводяться до найпростіших. Розв'язування тригонометричних рівнянь методом розкладання на множники. Рівносильні переходи під час розв'язування тригонометричних рівнянь. Розвязування найпростіших тригонометричних нерівностей.

Таблиця 1.7

Логіко-математичний аналіз формулювань означень нових понять

Поняття	Формулювання означень	Вид означення
Арккосинус числа	Арккосинусом числа *b*, де |b|≤1, називають таке число *a* з проміжку $[\mathbf{0;\pi}]$, косинус якого дорівнює *b*.	Через найближчий рід та істотні властивості Рід: число Істотні властивості: число *a* з проміжку $[\mathbf{0;\pi}]$, косинус якого дорівнює *b*.
Арксинус числа	Арксинусом числа *b*, де |b|≤1, називають таке число *a* з проміжку $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, синус якого дорівнює *b*.	Через найближчий рід та істотні властивості Рід: число Істотні властивості: число *a* з проміжку $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, синус якого дорівнює *b*.
Арктангенс числа	Арктангенсом числа *b*, де |b|≤1, називають таке число *a* з проміжку $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, тангенс якого дорівнює *b*.	Через найближчий рід та істотні властивості Рід: число Істотні властивості: число *a* з проміжку $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, тангенс якого дорівнює *b*.
Арккотангенс числа	Арккотангенсом числа *b*, де |b|≤1, називають таке число *a* з проміжку	Через найближчий рід та істотні властивості Рід: число

Продовження таблиці 1.7

	[**0;π**], котангенс якого дорівнює b.	Істотні властивості: число a з проміжку [**0;π**], котангенс якого дорівнює b.
Однорідні тригонометричні рівняння n-го степеня.	Рівняння виду $a_0 sin^n x + a_1 sin^{n-1} cosx + ... +$ $+ a_{n-1} sinxcos^{n-1}x + a_n cos^n x = 0$, де $a_0, a_1, ..., a_n$ — дійсні числа, які одночасно не дорівнюють нулю, $n \in N$, називають однорідним тригонометричним рівнянням n-го степеня відносно $sin\ x$ і $cos\ x$.	Через найближчий рід та істотні властивості Рід: рівняння Істотні властивості: Вид рівняння $a_0 sin^n x + a_1 sin^{n-1} cosx + ... +$ $+ a_{n-1} sinxcos^{n-1}x + a_n cos^n x = 0$, де $a_0, a_1, ..., a_n$ — дійсні числа, які одночасно не дорівнюють нулю, $n \in N$.
Найпростіші тригонометричні нерівності	Нерівності виду $f(x) > a$, $f(x) < a$, де f — одна із чотирьох тригонометричних функцій, називають найпростішими тригонометричними нерівностями.	Через найближчий рід та істотні властивості Рід: нерівності Істотні властивості: Вид нерівності $f(x) > a$, $f(x) < a$, де f — одна із чотирьох тригонометричних функцій.

Таблиця 1.8

Орієнтовна система вправ, для формування способу діяльності

Основні способи діяльності	Відпрацювання операцій, які формують способи діяльності	Відпрацювання операцій, які входять у спосіб діяльності	Застосування способу діяльності
Розв'язування рівнянь, які зводяться до найпростіших.	31.1 – 31.2 31.3 – 31.4	31.7 – 31.16	31.17 – 31.14
Розв'язування тригонометричних рівнянь методом розкладання на множники.	32.1 – 32.6	32.7 – 32.16	32.17 – 32.34

Рівносильні переходи під час розв'язування тригонометричних рівнянь.	32.35 – 32.38	32.39 – 32.42	32.43 – 32.46
Розвязування найпростіших тригонометричних нерівностей.	33.1, 33.2	33.3, 33.4	33.5 – 33.12

[38]

Проведений логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу теми засвідчує, що учні опановують наступні предметні математичні компетентності: **розв'язує** найпростіші тригонометричні рівняння – на базовому рівні; **формулює** означення обернених тригонометричних функцій; **обґрунтовує** формули коренів тригонометричних рівнянь $\sin x = a, \cos x = = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a;$ **розв'язує** тригонометричні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами – на профільному рівні. Також тема передбачає формування ключових компетентностей. Методика формування предметних і ключових компетентностей передбачає обгрунтування добору форм і методів навчання теми, які будутьпредставлені у наступному розділі.

РОЗДІЛ 2
ФОРМУВАННЯ КЛЮЧОВИХ І ПРЕДМЕНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ СТАРШОКЛАСНИКІВ У НАВЧАННІ ТЕМИ «ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ»

2.1. Методичні прийоми формування ключових і предметних компетентностей учнів на базовому рівні

За програмою базового рівня найпростіші тригонометричні рівняння вивчаються в темі «Тригонометричній функції». З огляду на зазначене доречним є формування ключових компетентностей учнів протягом вивчення указаної теми.

Така форма навчання як *урок-гра* забезпечує умови формування таких ключових компетентностей: спілкування державною мовою; уміння вчитися; соціальна і громадська компетентності. Наведемо орієнтовний план-конспект уроку-гри (матеріали до уроку дібрані із джерел [5, 10, 31, 34, 35, 39, 46, 64, 69, 71, 73]

<u>Тема уроку:</u> Тригонометричні функції

<u>Мета уроку:</u> узагальнити й систематизувати знання учнів про тригонометричні функції;

Розвивати вміння використовувати властивості тригонометричних функцій для розв`язання вправ, творчу активність, розширювати світогляд учнів; розвивати навички самостійної роботи з додатковою літературою;

Виховувати самостійність мислення, толерантність до міркувань інших учнів, зацікавленість темою, залучати до роботи в групі.

<u>Тип уроку:</u> систематизації та узагальнення знань, урок-гра.

<u>Методи навчання, прийоми:</u> попереджувальне завдання, робота в групах, словесні, наочні, практичні.

<u>Основні терміни і поняття:</u> тригонометричні функції синус, косинус, тангенс, котангенс; оберненні тригонометричні функції, парні та непарні функції, період функції.

<u>Міжпредметні зв'язки:</u> геометрія, література.

<u>Наочність:</u> презентація «Тригонометричні функції», лист самоконтролю, картки – завдання, підручник В. Г. Бевз, Г. П. Бевз «Математика 10».

<u>Технічні засоби навчання:</u> комп`ютер, мультимедіа, програма PowerPoint.

Хід уроку

I. **<u>Організаційний момент.</u>**

«Емоційний термометр». Виберіть картку, колір якої відповідає вашому емоційному стану (на початок роботи).

ДОБРИЙ

ПОГАНИЙ

СЕРЕДНІЙ

II. **<u>Узагальнення і систематизація знань про тригонометричні функції (у вигляді гри).</u>**

Групу об'єднано у команди: **Синус – Косинус – Тангенс - Котангенс**

1. **<u>Привітання команд:</u>**

Команда	Девіз
Синус	«Команда синус просто клас, адже синус – це просто сила. Без синуса немає тангенса і навіть немає котангенса. І косинус нам не суперник, переможемо його»
Косинус	«Тригонометрія – наша стихія. А косинус – наш в ній скачок. І немає в світі функції, Щоб не розв'язати за урок»
Тангенс	«Тангенс – команда наша Тангенс треба знати, щоб з успіхом приміняти. Тангенс – швиденько зростає і рівняння він рішає. Тангенс два рази відкривався, але з π/2 не зрівнявся. І в таблицях розписався. А у нас настрій бойовий. Хочемо ми з вами порішать і успіху вам побажати».
Котангенс	«Будуємо котангенси і добре з цим справляємось».

2. **Привітання гостей** (математичний диктант). Відповісти на питання та вписати до таблиці перші літери відповідей.

1. Синусоїда, косинусоїда, тангенсоїда, котангенсоїда – назви …

(графіків)

2. Вісь Оу – це вісь …

(ординат)

3. Яка функція відсутня:

(синус)

$y = cosx$

$y = tgx$

$y = ctgx$

4.Синус, косинус, тангенс, котангенс – це … функції

(тригонометричні)

5. Я

6. Значення, яке приймає залежна зміна…

(множина)

7. Міра виміру кута…

(радіан)

8. Обернена функція до функції y=tgx …

(арктангенс)

9. Частина кола …

(дуга)

10. І

Перевірка правильності виконання на слайді презентації

1	2	3	4	5	6		7	8	9	10
Г	**о**	**С**	**т**	**я**	**м**		**р**	**а**	**д**	**і**

3. **Розминка** Кожна команда отримує по 3 питання. Правильна відповідь оцінюється в 1 бал. Якщо команда не може відповісти на питання, право відповіді надається іншій команді.

1 команді

1) Яка функція називається зростаючою?

(більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції).

2) Симетрія графіка парної функції. *(відносно осі ОУ).*

3) $y = arccos\ x$. Це зростаюча чи спадна функція? *(спадна)*

2 команді

1) Яка функція називається спадною?

(більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції).

2) Період функції $y = sinx$? *($T = 2\pi$).*

3) $y = arccosx$ – парна чи не парна?

(не має властивостей парності і непарності).

3 команді

1) Яка функція називається парною? *($f(-x) =f(x)$).*

2) Період функції $y = cosx$? *($T = 2\pi$).*

3) $y = arctgx$. Це зростаюча чи спадна функція? *(зростаюча).*

4 команді

1) Яка функція називається непарною? *($f(-x) = -f(x)$).*

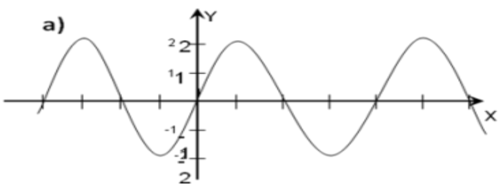
2) $y = arcsinx$. Це зростаюча чи спадна функція? *(зростаюча)*

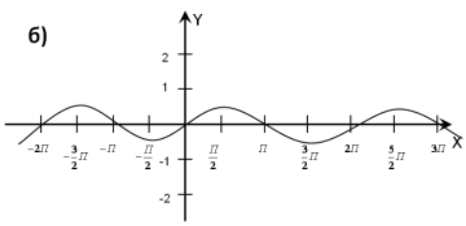
3) Множина значень функції $y = sinx$, $y = cosx$. *($[-1;1]$)*

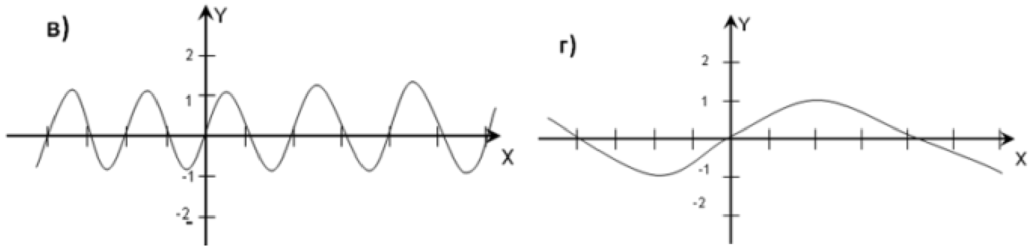
4. **Тестові завдання** (в бланку відповідей відмітити правильну відповідь)

Питання 1.

На якому з малюнків відображений графік функції $y = sin2x$,



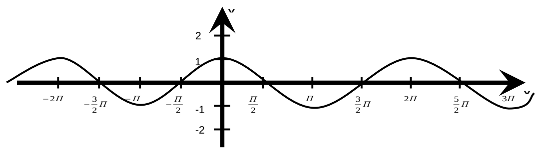
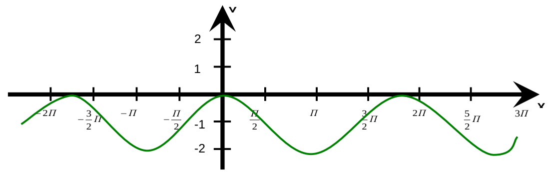
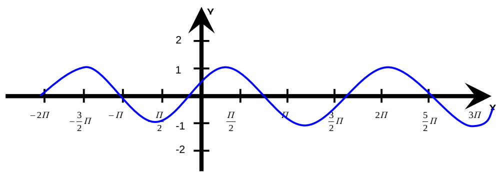
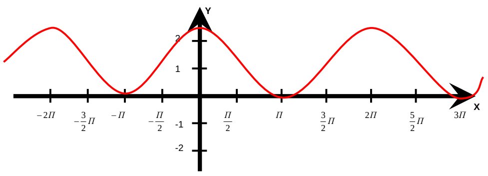




(Відповідь: В)

Питання 2.

Який із малюнків відповідає графіку функції $y = cosx+1$?

А 	Б 
В 	Г 

(Відповідь: Г)

<u>5. Розв’язування вправ </u>(Спростити вирази за картками – завданнями)

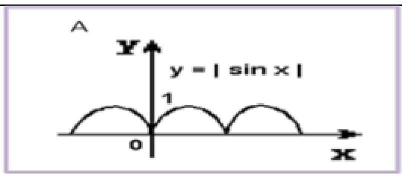
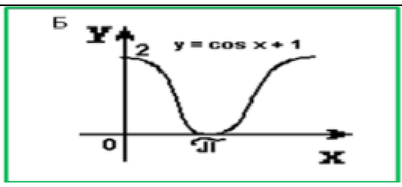
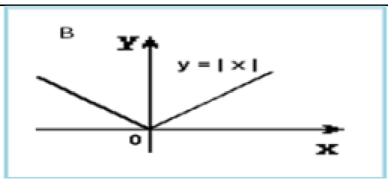
5.1 Конкурс капітанів

Команда	Завдання	Відповіді
1 команда	$(1-cos^2\alpha)(sin^2\alpha+cos^2\alpha\ +3)$	$4sin^2\alpha$
2 команда	$(1-\ sin^2\alpha)(sin^2\alpha+cos^2\alpha)$	$cos^2\alpha$
3 команда	$\dfrac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha-1}$	- 1
4 команда	$\dfrac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha-1}$	- 1

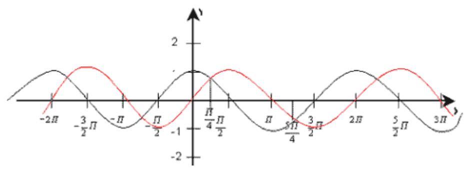
5.2 Конкурс учасників команд

Команда	Завдання	Відповіді
1 команда	$sin\, 310° = \sin(270° + 40°)$	$-cos\ 40^0$
2 команда	$\cos 220° = \cos(180° + 40°)$	$-cos\ 400^2$
3 команда	$\mathrm{tg}\, 300° = \mathrm{tg}(270° + 30°)$	$-\mathrm{ctg}\, 30°$
4 команда	$\mathrm{ctg}\, 200° = \mathrm{ctg}(180° + 20°)$	$\mathrm{ctg}\, 20°$

<u>6. Знайти відповідність</u> (виберіть відповідність між графіком і прислів'ям та впишіть правильну відповідь до таблиці).

А		Любиш з гори кататися, люби й сани возити.	1
Б		Як агукнеться, так і відгукнеться.	2
В		Повторення – мать учіння.	3

<u>7. Розв'язати графічно</u> Правильну відповідь записати до листа відповідей

А. рівняння $\sqrt[4]{4x-3}$ Відповідь: 1	Б. нерівність $\cos x \leq \sin x$ Відповідь:П/4+2Пn ≤ X ≤ 5П/4+2Пn, n∈Z
	

8. Конкурс: питання – підказки Правильні відповіді на питання відобразити в таблиці й утворити слово-відповідь.

1. Функція

1) Звичне слово квочки-насідки поставте на перше місце:

2) На друге місце поставте ноту, яка важлива в будь-якому оркестрі:

3) На третьому місці 15-та буква в алфавіті:

4) Одне волосся на мордочці кота:

Відповідь: **Косинус**

1	2	3	4
КО	**СИ**	**Н**	**УС**

2. Функція.

Прочитати навпаки

1) Что кружится, что ложится
И на землю, и на крыши
И о чем поэт зимою
По ночам поэмы пишет?
Это первое словечко.

2) А второе просто «на»

3) Ну, а третье? Угадайте,
Что бежит по проводам?
Напиши, что получилось
И прочти наоборот
Не запутайся, читая,

Обернене слово.

1	2	3
СНЕГ	**НА**	**ТОК**

Відповідь: (снег на ток – **котангенс**)

III. Підведення підсумків.

Рефлексія.

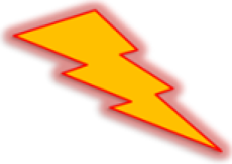
Слово журі.

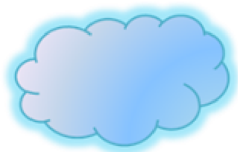
Журналіст:

Всі команди – молодці
Працювали від душі
Знаємо тепер ми і синус і косинус і тангенс і котангенс
І як графік будувати і рівняння як рішать
А просто все це треба добре знать
І ніколи не забувати
Урок успішно пройшов
А це значить, що у нас
Все добре в даний час.

Рефлексія. (Емоційний термометр). Виберіть картку, колір якої відповідає вашому емоційному стану (на кінець роботи).


ДОБРИЙ


ПОГАНИЙ


СЕРЕДНІЙ

IV. Оцінки учням. Домашнє завдання: Підручник В.Г.Бевз, Г.П.Бевз «Математика 10», розділ ІІ, повторити основні формули тригонометрії, підготуватися до контрольної роботи, вирішати завдання домашньої математичної олімпіади.

Предметна математична компетентність учнів, які вивчають тему за програмою базового рівня полягає в розв'язуванні найпростіших тригонометричних рівнянь.

Продемонструємо приклади завдань за допомогою яких можна визначити рівень предметної математичної компетентності учнів з теми: «Тригонометричні рівняння»

Важливе місце у процесі формування компетентностей учнів у навчанні теми відіграє поточний і підсумковий контроль. Доречно на різних етапах вивчення теми пропонувати учням математичні диктанти для перевірки і оцінювання рівня сформованості предметних компетентностей учнів, які подано у додатку Б

Також наведемо приклади самостійних і конторольних робіт з теми на базовому рівні підготовки [9, 23, 24, 50, 55, 59, 62].

Самостійна робота №1 (найпростіші тригонометричні рівняння)

Розв’яжіть рівняння:

А) $sinx = \frac{1}{2}$

Б) $cosx=-0.2$

В) $tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Г) $ctgx=1$

Самостійна робота №2 (тригонометричні рівняння, що розв’язуються як алгебраїчні відносно даної тригонометричної функції)

Розв’яжіть рівняння:

А) $asin^2x+sinx-1=0$

Б) $tg^2x=2tgx$

В) $2cos^2x=3sinx+2$

Самостійна робота №3 (Однорідні тригонометричні рівняння)

Розв’яжіть рівняння:

А) $\sqrt{3}sinx - cosx = 0$

Б) $3sinx \cdot cosx+cos^2x=1$

Самостійна робота №4 (Тригонометричні рівняння, що розв’язуються методом розкладання на множники)

Розв’яжіть рівняння:

А) $2sinx \cdot cos2x-1+2cos2x-sinx=0$

Б) $2\sqrt{3}cosx \cdot tgx+2cosx-\sqrt{3}thx-1=0$

Самостійна робота №5 (Тригонометричні рівняння, що містять функції парних степенів)

Розв’яжіть рівняння:

А) $tg^2x-2sin^2x=1$

Б) $(cosx+sinx)^2=1-cos2x$

Самостійна робота №6 (Тригонометричні рівняння, що містять функції різних аргументів)

Розв’яжіть рівняння:

А) $1+cosx+cos2x=0$

Б) $cos^2x+4sin^2x=2sin2x$

Самостійна робота №7 (Тригонометричні рівняння, що розв'язуються за допомогою формул перетворення суми в добуток)

Розв'яжіть рівняння:

А) $sinx+sin3x=0$

Б) $sinx+sin2x+sin3x+sin4x=0$

Контрольна робота

Варіант 1

1. Розв'яжіть рівняння:

   А) $2sinx-1=0$

   Б) $sin^2x-1=cos^2x$

2. Розв'яжіть нерівність

   $tg\frac{x}{2}+1\leq 0$

3. Розв'яжіть рівняння:

   А) $4sin^2x-sin2x=0$

   Б) $cos5x-cos3x=0$

Варіант 2

1. Розв'яжіть рівняння:

   А) $\frac{1}{2}ctgx+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

   Б) $cos^2x=sinx+1$

2. Розв'яжіть нерівність

   $ctg2x>\sqrt{3}$

3. Розв'яжіть рівняння:

   А) $cos2x-2cosx+1=0$

   Б) $cos3x+cosx-4cos2x=0$

Варіант 3

1. Розв'яжіть рівняння:

   А) $4cosx-1=3$

   Б) $2sin^2x+3cosx=0$

2. Розв'яжіть нерівність

   $tg(-\frac{x}{2})-1<0$

3. Розв'яжіть рівняння:

   А) $\sqrt{3}tgx-\sqrt{3}ctgx-2=0$

   Б) $cos4x-sin2x=1$

Варіант 4

1. Розв'яжіть рівняння:

   А) $\sqrt{3}ctgx-2=1$

   Б) $2cos^2x-3sinx-2=0$

2. Розв'яжіть нерівність

   $ctg(-\frac{x}{2})-\sqrt{3}<0$

3. Розв'яжіть рівняння:

   А) $sin2x+cos2x-cos^2x=0$

   Б) $\frac{1}{5tgx+8}-1=0$

Підсумовуючи, слід відмітити, що організація навчання теми на базовому рівні підготовки учнів повинна мати на меті насамперед формування практичної компетентності старшокласників, предбачати різні нестандартні форми уроків, як от урок-гра, тощо. Обов’язковим має бути моніторинг рівня сформованості предметних математичних компетентностей, який здійснюється під час проведення самостійних і контрольних робіт з теми.

2.2 Методика формування ключових і предметних компетентностей учнів профільних класів

На відміну від програми базового рівня програмою профільного рівня передбачено вивчення окремої теми: «Тригонометричні рівняння і нерівності» (32 год) [56].

Для формування предметних математичних компетентностей (формування означення обернених тригонометричних функцій; обґрунтування формул коренів найпростіших тригонометричних рівнянь; розв’язування тригонометричних рівнянь і нерівностей, зокрема з параметрами) доречно запропонувати систему вправ [23, 24, 50, 55, 57].

Розв’язати рівняння:

1. $24\cos x-8\cos 2x=15$
2. $16\sin x+8\cos 2x=7$
3. $5\sin x+tg\frac{x}{2}=6$
4. $5\cos x+tg\frac{x}{2}=-1$
5. $\cos 3x+2\cos x=0$
6. $\sin 3x-2\sin x=0$
7. $2(1-\sin 2x)-\sin x+\cos x=3$
8. $2(1+\sin 2x)+\sin x+\cos x=3$
9. $\frac{\sin 2x-\cos x}{\cos x}=1$

10. $\frac{sin2x-sinx}{sinx}=1$

11. $\frac{cos4x+2cos^2x-1}{(sinx+1)(sin3x-1)}=0$

12. $\frac{cos4x+2sin^2x-1}{(cosx-1)(cos3x+1)}=0$

13. $\frac{sinx+sin2x-cosx-2cos^2x}{(\sqrt{3}+2sinx)(1-sin2x)}=0$

14. $\frac{sinx-2sin^2x+cosx-sin2x}{(\sqrt{3}-2cosx)(1+sin2x)}=0$

15. $|cos2x| = sin2x - 1$

16. $|sin2x| = cos2x - 1$

17. $4cos|x| - 3sinx = sin|x|$

18. $2sin|x| + cosx = -cos|x|$

19. $\sqrt{3cos2x-1} = \sqrt{2}sinx$

20. $\sqrt{5cos2x-1} = \sqrt{2}cosx$

21. $\sqrt{1-cosx} = -sinx$

22. $\sqrt{1-sinx} = -cosx$

23. $4cos + 1 + \sqrt{-2cos2x} = 0$

24. $2sin3x + 2 - \sqrt{-2sin3x} = 0$

25. $\frac{\sqrt{2}sin2x}{\sqrt{1+cos2x}}=1$

26. $\frac{\sqrt{2}sin2x}{\sqrt{1-cos2x}}=1$

27. $\sqrt{2+x+x^2}\left(2cos\pi x-\sqrt{2}\right)=0$

28. $\sqrt{2-x-x^2}\left(2sin\pi x-\sqrt{2}\right)=0$

29. $|cosx|^{sin^2-sinx}=1$

30. $|cosx|^{cos^2-cosx}=1$

31. $\sqrt{1+sinx}-\sqrt{1-sinx}=1+a$

32. $\sqrt{1-cosx}-\sqrt{1+cosx}=1+a$

Як бачимо, запропоновані вправи поступово ускладнюються і потребують уміння визначатитип рівняння та обирати відповідний спосіб його розв’язання.

Розглянемо, якими методами можна на уроках теми формувати окремі ключові компетентності, визначені програмою профільного рівня:

1) Спілкування державною мовою
2) Спілкування іноземними мовами
3) Математичні компетентності
4) Основні компетентності у природничих науках і технологіях
5) Інформаційно-цифрова компетентність
6) Уміння вчитися впродовж життя
7) Ініціативність і підприємливість
8) Соціальна і громадська компетентність
9) Обізнаність і самовираженість у сфері культури
10) Екологічна грамотність і здорове життя

Відобразимо це у перспективно-тематичному плануванні теми (таблиця 2.1).

Таблиця 2.1

Перспективно-тематичне планування теми

«Тригонометричні рівняння і нерівності»

№	Тема уроку	Тип уроку / Ключові компетентності, які формуються	Мета уроку
1-2	Обернені тригонометричні фукції, означення, властивості, графіки	Урок засвоєння нових знань (1-2) / 1), 3), 6)	чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку; усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві; визначати мету навчальної діяльності, відбирати й застосовувати потрібні

			знання та способи діяльності для досягнення цієї мети;
3-6	Найпростіші тригонометричні рівняння	Урок формування умінь та навичок (3-4) Урок застосування умінь та навичок (5-6) / 1), 3), 4)	доречно та коректно вживати в мовленні математичну термінологію, чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку, аргументувати; усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві; усвідомлення важливості математики як універсальної мови науки.
7-14	Основні способи розв’язування тригонометричних рівнянь	Урок засвоєння нових знань (7-8) Урок формування умінь та навичок (9-10) Урок застосування умінь та навичок (11-14) /1), 3),5)	доречно та коректно вживати в мовленні математичну термінологію, чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку, аргументувати; усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві; діяти за алгоритмом та складати алгоритми.
15-20	Тригонометричні нерівності	Урок засвоєння нових знань (15-16) Урок формування умінь та навичок (17-20) /1), 3),4)	доречно та коректно вживати в мовленні математичну термінологію, чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку, аргументувати; усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві; усвідомлення важливості математики як

			універсальної мови науки.
21-22	Тригонометричні рівняння з параметрами	Урок засвоєння нових знань, формування умінь та навичок (21-22) /1), 3),5)	доречно та коректно вживати в мовленні математичну термінологію, чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку, аргументувати; усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві; діяти за алгоритмом та складати алгоритми.
23-24	Тригонометричні нерівності з параметрами	Урок засвоєння нових знань (23-24) /1), 3),6)	чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку; усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві; визначати мету навчальної діяльності, відбирати й застосовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення цієї мети;
25-26	Рівняння, які містять обернені тригонометричні функції	Урок засвоєння нових знань (25-26) /1), 3),5)	доречно та коректно вживати в мовленні математичну термінологію, чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку, аргументувати; усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві; діяти за алгоритмом та складати алгоритми.
27-28	Нерівності, які містять обернені	Урок засвоєння нових знань,	доречно та коректно вживати в мовленні

	тригонометричні функції	формування умінь та навичок (27-28) /1), 3),4)	математичну термінологію, чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку, аргументувати; усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві; усвідомлення важливості математики як універсальної мови науки.
29-32	Тригонометричні рівняння. Повторення	Урок узагальнення і систематизації знань (29-30) Урок перевірки та корекції знань, умінь та навичок (31-32) /1), 3),6)	чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку; усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві; визначати мету навчальної діяльності, відбирати й застосовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення цієї мети;

Наведемо приклади розробок уроків теми згідно з перспективно-тематичним плануванням.

Урок № 10

Тема уроку: Основні способи розв’язування тригонометричних рівнянь.

Мета:

Навчальна: ознайомити учнів з іншими способами розв'язування тригонометричних рівнянь; навчити раціонально вибирати метод їх розв'язування; удосконалити уміння правильно розв'язувати найпростіші тригонометричні рівняння.

Розвивальна: розвивати навички самоконтролю та взаємоконтролю, логічне мислення, пам’ять, вміння аналізувати ситуацію; творчі здібності та пізнавальну активність.

Виховна: виховувати увагу, активність, інтерес до предмету, правильне математичне мовлення.

Формування компетентностей:

Соціальна компетентність: самостійне розв’язання завдань різними способами і вибір раціональніших, самооцінка і взаємооцінка.

Комунікативна компетентність: стимулювання умінь учнів, коментування розв’язаних завдань, взаємоперевірка вислову власної точки зору.

Інформаційна компетентність: використання додаткової інформації; використання таблиць, схем, опорних конспектів.

Полікультурна компетентність: зв'язок з іншими предметами, життєвими ситуаціями, моделювання.

Продуктивна творча діяльність: використання творчих завдань, складання завдань, питань, алгоритмів.

Тип уроку: формування умінь та навичок.

Обладнання та наочність: мультимедійний комплекс, таблиці «Значення тригонометричних функцій деяких кутів», «Тригонометричні формули», «Формули для розв’язування найпростіших тригонометричних рівнянь», картки з завданнями, картки самоконтролю.

Епіграф:

Краса і багатство тригонометрії – це її формули. Всі вони використовуються при розв’язуванні рівнянь.

Хід уроку

І. Організаційний етап

Викладач перевіряє готовність учнів до уроку, відмічає відсутніх; роздає учням картки самоконтролю і пояснює як треба їх заповнювати.

ІІ. Перевірка домашнього завдання.

1. Перевірка завдання, заданого за підручником.

Перевірити наявність домашніх завдань в зошитах учнів і відповісти на запитання, які виникли в процесі їх виконання.

2. Самостійна робота з подальшою взаємоперевіркою.

Викладач нагадує учням, що на минулому уроці були розглянуті види найпростіших тригонометричних рівнянь та формули для отримання їх коренів, які вони повинні були вивчити на сьогодні.

Робота по картках. Для перевірки знань учням пропонується письмово на окремих аркушах виконати завдання. Після його виконання учні виконують взаємоперевірку за готовими зразками. Кожна правильна комбінація (відповідність) оцінюється 0,5 бала. Загальна кількість балів за це завдання вписується до картки самоконтролю.

1 варіант		2 варіант	
1. $\cos x = 1, \quad x =$	а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$	1. $\sin x = -1, \quad x =$	а) $\pi + 2\pi n$
2. $\sin^2 x - \cos^2 x =$	б) $\cos^2 x$	2. $\sin x \cos x =$	б) $\cos 2x$
3. $1 - \sin^2 x =$	в) $-\cos x$	3. $\cos^2 2x + \sin^2 2x =$	в) -1
4. $tgx = 1, \quad x =$	г) $2\pi n$	4. $\cos^2 x - \sin^2 x =$	г) 1
5. $\cos(\pi + x) =$	д) $-\cos 2x$	5. $ctg(\frac{\pi}{2} + x) =$	д) $-\cos x$
6. $\sin(x - \frac{\pi}{2}) =$	е) $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	6. $\cos(x + \pi) =$	е) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$
7. $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} =$	ж) $-\cos x$	7. $\cos x = -1, \quad x =$	ж) $\frac{1}{2}\sin 2x$
8. $\cos(-\frac{\pi}{3}) =$	з) $\frac{1}{2}$	8. $\sin(-\frac{\pi}{2}) =$	з) $-tgx$
9. $\sin(-\pi) =$	к) 0	9. $\cos(-\frac{\pi}{6}) =$	к) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Відповіді: 1 варіант 1г, 2д, 3б, 4а, 5в, 6ж, 7е, 8з, 9к.

2варіант 1е, 2ж, 3г, 4б, 5з, 6д, 7а, 8в, 9к.

ІІІ. Формулювання теми, мети й задач уроку.

Мотивація навчальної діяльності учнів

Викладач повідомляє дітям, що тригонометричні функції застосовуються в науці та техніці, тому питання про розв'язування тригонометричних рівнянь досить актуально. На уроці будуть розглянуті способи розв'язування тригонометричних рівнянь, які зводяться до найпростіших за допомогою тригонометричних формул або винесенням спільного множника за дужки. Кожен учень повинен з'ясувати для себе міру компетентності з метою подальшого відпрацювання теми.

Формулюється тема, мета та епіграф уроку: «Краса і багатство тригонометрії – це її формули. Всі вони використовуються при розв'язуванні рівнянь».

Викладач пропонує дітям активно попрацювати, бо успіх роботи на уроці буде залежати від праці й внеску кожного з них, радить бути уважними, дружними й толерантними.

IV. Актуалізація опорних знань

Учні розбиваються на три групи. Викладач пропонує усно виконати тестові вправи, використовуючи метод «Мікрофон», який учні передають із групи в групу. Учень, який дав правильну відповідь, набирає 0,5 бала і записує його до картки самоконтролю.

Виконання тестових завдань:

1) Назвати значення **а**, при яких рівняння $sin\ t = a$ має:

а) має один корінь; б) жодного кореня; в) нескінчену множину коренів.

2) Які з наведених тригонометричних рівнянь є найпростішими, а які ні і чому: а) $2cosx = -1$; б) $sin\ x=1$; в) $4tgx=3$; г) $ctg\frac{2x}{3}=0$?

3) Яке з наведених рівнянь не має розв'язків:

а) $sin\ x=\frac{3}{7}$; б) $tg\ x=5$; в) $cos\ x=\frac{5}{2}$; г) $ctg\ x=-10$?

4) Коренем рівняння $tgx=a$ є $t =$

5) Яка рівність є правильною:

а) $cos(-x)=cosx$ б) $arcsin(-x)=arcsinx$ в) $arcctg(-x)=-arcctgx$?

6) Розв'язати рівняння $sinx = \frac{1}{2}$.

7) Знайти помилку:

$$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \qquad n\epsilon Z$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \qquad n\epsilon Z$$

$$\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \qquad n\epsilon Z$$

$$cos^2b\text{-}cos2b\text{=-}sin^2b$$

$$2sinxcosx=sin2x$$

$$tgx \cdot ctgx=1$$

V. Засвоєння знань і вмінь

Викладач нагадує учням, що з шкільного курсу алгебри вони знають, що зведене квадратне рівняння можна розв'язати двома способами: за допомогою дискримінанта або за теоремою Вієта. Тригонометричні рівняння теж можна розв'язувати різними способами. Звертає увагу дітей на висловлювання: «Якщо результат не залежить від способу розв'язування – це математика, а якщо залежить – це бухгалтерія».

Перед нами стоїть задача – показати знання та вміння з розв'язування тригонометричних рівнянь різних типів:

Учням пропонується самостійно розв'язати в зошитах перші три рівняння з подальшою перевіркою (навички самоконтролю) за готовими зразками.

1. $sin\frac{x}{5} = -1$
2. $\sqrt{3}tg2x - 1 = 0$
3. $2cosx+3=0$
4. $sin^2x=0.25$
5. $sin4x\text{-}sin2x=0$
6. $sin7x+sin33=3cos2x$
7. $sin\frac{x}{5} = -1$

8. $\sqrt{3}tg2x - 1 = 0$
9. $2cosx + 3 = 0$

Якщо учні виконали всі три рівняння правильно, то записують до картки самоконтролю – 3 бали.

Проблемні запитання:

Чи є наступне четверте рівняння найпростішим тригонометричним?

Як його розв'язати?

Йде колективне обговорення, після якого рівняння $2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$ розв'язується учнем біля дошки (за необхідності з коментарем).

Пошукова робота.

Далі викладач пропонує розв'язати рівняння $sin^2x = \frac{1}{4}$.

Як розв'язати це рівняння?

Чи розв'язували ви колись подібне?

Учні надають свої пропозиції щодо його розв'язування. Викладач надає можливість учням вибрати один із запропонованих алгоритмів.

Алгоритм розв'язування рівняння $sin^2x = \frac{1}{4}$

1 спосіб:

- З'ясувати чи є дане рівняння найпростішим тригонометричним.
- Застосувати формулу пониження степеня $sin^2 = \frac{1-cos2x}{2}$.
- За допомогою тотожних перетворень звести до найпростішого тригонометричного рівняння.
- Записати відповідь.

2 спосіб:

- Ввести нову змінну $sin\ x = t$ і звести дане рівняння до алгебраїчного.
- Пригадати властивості квадратного кореня.
- Розв'язати найпростіше тригонометричне рівняння.
- Записати відповідь.

Робота в парах. Вибравши алгоритм, учні розв’язують дане рівняння в зошитах. Викладач слідкує за їх роботою.

Відповіді учні записують на дошці та порівнюють результати отримані при розв’язуванні різними способами. Далі діти здійснюють самоконтроль за готовим розв’язанням.

Правильна відповідь оцінюється в два бали.

Робота в малих групах.

Для розв’язування наступного рівняння $sin2x\text{-}sinx=0$ учні об’єднуються в групи (по 4 чол.).

Пошукова робота. Викладач надає можливість учням скласти алгоритм одного з способів розв’язування рівняння, використовуючи підказку та розв’язати його. Записи ведуться на окремих аркушах. Вибір правильного алгоритму – 0,5 бал, правильно розв’язане рівняння – 2,5 бали.

Скласти алгоритм розв’язування рівняння $sin4x\text{-}sin2x=0$ двома способами.

- Застосувати формулу синуса подвійного кута.
- Винести спільний множник за дужки.
- За допомогою тотожних перетворень звести до найпростішого тригонометричного рівняння.
- Записати відповідь.
- Добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю.
- Застосувати формулу перетворення суми(різниці) тригонометричних функцій у добуток.
- Розв'язати найпростіше тригонометричне рівняння.

Представники груп записують відповіді на дошці. Перевіряється розв’язання за готовими зразками. Учні груп, які отримали правильні відповіді, записують до карток самоконтролю відповідні бали.

Алгоритм розв’язування рівняння $sin4x\text{-}sin2x=0$

1-й спосіб:

- Застосувати формулу синуса подвійного кута.
- Винести спільний множник за дужки.
- Добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю.
- За допомогою тотожних перетворень звести до найпростішого тригонометричного рівняння.
- Записати відповідь.

sin4x-sin2x=0

2sin2xcos2x-sin2x=0

sin2x(2cos2x-1)=0

sin2x=0 або 2cox2x-1=0

$$x=\frac{\pi n}{2}, n\epsilon Z \text{ або } x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\epsilon Z$$

2 –спосіб:

- Застосувати формулу перетворення суми(різниці) тригонометричних функцій у добуток.
- Добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю.
- Розв'язати найпростіше тригонометричне рівняння.
- Записати відповідь.

sin4x-sin2x=0

$$2sin\frac{4x-2x}{2}\cdot cos\frac{4x+2x}{2}=0$$

2sinx·cos3x=0

sinx=0 або cos3x=0

$$x=\frac{\pi n}{2}, n\epsilon Z \text{ або } x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\epsilon Z$$

Далі викладач разом з учнями обговорюють спосіб розв’язування рівняння $cos9x+cos5x=\sqrt{3}cos2x$. Учні, по черзі, виходять до дошки і записують кожен етап розв’язання (при необхідності його коментують).

VI. Домашнє завдання

1. Повторити формули для розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.

2. Розв'язати рівняння № 8, 9, 4 (застосувати формулу додавання).

3. Творче завдання. Скласти два тригонометричних рівняння, подібних до № 5, 6. Умову та розв'язання записати на окремих аркушах.

VII. Підсумок уроку

1. Учні обчислюють кількість балів за картками самоконтролю та віддають їх викладачеві.

2. Відповідають на запитання:

1) Про що ви дізналися на уроці?

2) Які способи розв'язування тригонометричних рівнянь ви запам'ятали?

3) Під час виконання яких завдань ви відчули труднощі?

3. Рефлексія.

Якщо ви не той, хто на вершині, це не значить, що ви той, хто внизу.

Учні малюють в зошитах ескіз гори. Позначають своє місцезнаходження до вершини гори, яке відповідає рівню отриманих на уроці знань.

4. Дякую за співпрацю та старання!

Урок № 29-30

Тема уроку: Тригонометричні рівняння. Повторення

Мета уроку:

Дидактична: систематизувати і узагальнити знання учнів по темі: «Тригонометричні рівняння». Розглянути поширені види раціональних рівнянь та способи їх розв'язання.

Виховна: виховувати у учнів уявлення про місце математики у системі наук та роль математичого моделювання у розв'язуванні практичних задач

Розвивальна: розвивати у учнів вміння гарно висловнлювати свої думки.

Тип уроку: узагальнення і систематизації знань.

Форма уроку: урок КВК

Структура уроку:

1. Мотивація навчальної діяльності учнів
2. Повідовмлення теми, мети і задач уроку
3. Узагальнення окремих фактів, подій, явищ
4. Повторення і узагальнення понять і засвоєння відповідної їм системи знань
5. Повторення осноаних теоретичних положень і систематизація ведучих ідей науки
6. Підведення підсумків
7. Домашнє завдання

Хід уроку

1) Організаційний момент
2) Вступне слово вчителя
3) Диктант-мовчанка
4) Усне опитування
5) Тестове завдання та розв’язування найпростіших тригонометричних рівнянь
6) Лото по методам розв’язання рівнянь
7) Розв’язання рівнянь біля дошки
8) Творчий розділ
   a. Виїзний конкурс
   b. Конкурс капітанів
   c. Розгадування кросворду
9) Підведення підсумків
10) Домашнє завдання

Вступне слово вчителя

Як і будь-яка наука тригонометрія виникла із життєвих потреб людини. Розвиток мореплавства вимагав вміння визначати положення корабля у морі по сонцю та зірками.

Війни вимагали вміння визначати великі відстані і складати карти місцевості. Замлеробцю треба було знатизміну пори року, щоб своєчасно виконувати необхідні сільськогосподарські роботи.

Повсякденне життя стало нестерпним без календаря.

Все це і багато інших причин призвело до необхідності розвивати астрономію – науку про рух небесних світил, а розвиток астрономії неможливий без розвитку тригонометрії (науку про вимір трикутників).

Ця наука виникла багато років тому у народів, які розвивали торгівлю і сільське господарство: вавілоняни, греки, індійці, китайці.

Відомо, що в одному із китайських рукописві датованого 2637р. до н.е. збереглися відомості з астрономії де застосовуються обчислення тригонометричного характеру.

Отже, тригонометрія, одна із найдавніших найук, якого оволоділо людство., не витрачає своєї актуальності і важливості в наші часи.

«Математична наука, як столітній дуб, розкинула свої могутні віти, що не один математик, самий «могутній», вже не взмозі вивчити всю математику цілком, а вибирає лише одну якусь гілку».

Маркушевич А.І.

Тема нашого уроку:

Розв’язування тригонометричних рівнянь

безумовно являється невеликою частиною розділу «Тригонометрія», але без оволодіння цією частиною неможливе подальше заглиблення в неосяжний світ тригонометрії.

Тому мета уроку:

«повторити всі відомості про тригонометричні рівняння, їх способи види і способи розв'язання, з'ясувати даної теми, даного розділу в системі математики, як науки»

Відомий вчений математик Колмогоров казав:

«математичні відомості можуть застосовуватися вміло із користю тільки в тому випадку, коли, вони засвоєні творчо»

Отже, сьогодні на уроці ми попрацюємо над темою *«Тригонометричні рівняння»* у клубі веселих та кмітливих команд Синус і Косинус

1) Команда «Синус» працюватиме під девізом *(лунає девіз)*
2) Команда «Косинус» змагатеметься зі своїм суперником під девізом *(лунає девіз)*

Все, що сьогодні трапиться на уроці побачить і оцінить вельме шановне журі у складі:

Розминка

1. Диктант-мовчанка

Щоб розв'язати рівняння треба його спростити, удосконалити, а це в тригонометрії можливо лише за допомогою формул, зараз командам пропонується диктант.

Синус	$\cos(\alpha+\beta)$	*Косинус*	$\sin(\alpha+\beta)$
	$\cos 2\alpha$		$\sin 2\alpha$
	$\cos 3\alpha$		$\sin 3\alpha$
	$\cos\alpha\cos\beta$		$\sin\alpha\sin\beta$

Щоб перемогти суперника треба гарно його знати, от і команди проявлять свої знання *«синуси»* про косинус, а *«косинуси»* про синус.

2. Усний двобій

«Синус»

1) Назвіть функції, обернені до функцій $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tg\, x$?
   $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=arctg\, x$
2) Які тригонметричні рівняння являються найпростішими?
   $\sin x=a$, $\cos x=a$, $tg\, x=a$

3) Коли найпростіші тригонометричні рівняння розв'язуються за формулами часткових випадків. Поясніть на прикладі рівняння *sin x=a*

a=-1	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\epsilon Z$
a=0	$x=\pi k,\ k\epsilon Z$
a=1	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\epsilon Z$

4) Як розв'язати рівняння *ctg x=a?*

Звести до рівняння $tg\ x = \frac{1}{a}$

«Косинус»

1) Які рівняння називають тригонометричними?

Рівняння які місять змінну під знаком тригонометричної функції

2) Запишіть фомули для розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь

cos x = a	$\|a\|\leq 1$	$x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\epsilon Z$
sin x = a		$x=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\ k\epsilon Z$
tg x = a	*a - довільне*	$x=arctg\ a+\pi n,\ n\epsilon Z$

3) Перерахуйте формули часткових випадків для рівнянь *cos x =a*, *tg x =a*.

cos x=1	$x=2\pi n,\ n\epsilon Z$	*tg x=1*	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\epsilon Z$
cos x=0	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\epsilon Z$	*tg x=0*	$x=\pi n,\ n\epsilon Z$
cos x=-1	$x=\pi+2\pi n,\ n\epsilon Z$	*tg x=-1*	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\epsilon Z$

4) Як бути, коли *ctg x=0?* Це частковий випадок $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\epsilon Z$

Лото

По методам розв'язування рівнянь

Учні отримують таблицю із методами розв'язання рівнянь та конверт з рівняннями. Задача: *розподілити рівняння згідно їх типу по гаманцям.*

Вчитель: крім найпростіших існують складні тригонометричні рівняння, задача їх розв’язати значно полегшується, якщо вірно визначити тип рівняння.

Тригонометричні рівняння, що зводяться до квадратних	*24cos-8cos2x=15* $16sinx+8cos^2x=7$
Однорідні тригонометричні рівняння	$2sin^2x\text{-}sin2x=1$
Рівняння, що розв’язуються за допомогою універсальної підстановки	*sin3x-cos3x=1*
Рівняння, що розв’язуються методом введення допоміжного кута	$sin2x\text{-}\sqrt{3}cos2x=1$ $\sqrt{3}sinx+cosx=2$
Рівняння, у яких ліва частина розкладається на множники	$sin2x+2cos^2x=0$ *sin4x+sin2x=sin6x*

«Предмет математики настільки серйозний,
що корисно інколи робити його трішечки цікавим»
Б.Паскаль

Виїзний конкурс

Від команди «Синус» запрошуються:

Від команди «Косинус» запрошуються:

Ваша задача за отой час, поки буде проводитися конкурс капітанів скласти якомога більше слів із літер слова.

Закономірність

Конкурс капітанів

До дошки викликаються капітани команд: *«Синус» і «Косинус»* –

Вам пропонується за 5 хвилин скласти казочку про тригонометричні функції та рівняння з математичним змістом.

Поки готуються капітани і триває виїзний конкурс попрацюємо з кросвордом:

						Т	А	Н	Г	Е	Н	С
						О						
	А					Т						
Т	Р	И	Г	О	Н	О	М	Е	Т	Р	І	Я
	К					Ж						
	С					Н						
	И		К	О	Р	І	Н	Ь				
	Н		О			С						
	У		С			Т						
	С		И									
			Н									
			У									
			С									

По горизонталі (Синус)

1) Відношення синуса до косинуса
2) Розділ математики, який вивчає тригонометричні функції та їх властивості
3) Значення змінної *x* при якому рівняння обертається у вірну рівність

По вертикалі (Косинус)

1) Функція, обернена до функції $y=sin\ x$
2) Абсциса точки одиничного кола
3) Рівність, справедлика при будь-яких значеннях змінної

(заслуховувалися капітани і виїзний конкурс)

Підведення підсумків

Слово журі

Матеріали до уроку узагальнення і систематизації знань та реалізації міжпредметних зв’язків теми подано у додатку В.

Для відпрацювання предметних математичних компетентностей з теми слід запропонувати наступну систему вправ на розв'язування тригонометричних рівнянь:

1) $sin5x - sinx = sin7x - sin3x$ $(x=\pi n,\ n\epsilon Z)$
2) $cos3x + sin3x = cosx + sinx$ $(x=\pi n,\ n\epsilon Z)$
3) $cosx + cos2x + cos3x + cos4x = 0$ $(x = \pi n - \frac{\pi}{2}, n\epsilon Z)$
4) $cosx - cos7x = cos2x - cos8x$ $(x = 2\pi n, n\epsilon Z)$
5) $6sin^2x - 3sinxcosx + cos^2x = 2(cos^2x + sin^2x)$ $(x = 2\pi n, n\epsilon Z)$
6) $4sin^2x - sin2x = 1$ $(x = \pi n - \frac{3\pi}{4}, n\epsilon Z)$
7) $sin^2x - sin2x + 2cos^2x = 0{,}5$ $(x = 4\pi + \pi n, n\epsilon Z)$
8) $3sin^2x + sinxcosx = 1$ $(x = \pi n - \frac{3\pi}{4}, n\epsilon Z)$
9) $tgx = tg2x$ $(x = \pi n, n\epsilon Z)$
10) $ctgx = tg2x$ $(x = \pi n - \frac{\pi}{2}, n\epsilon Z)$
11) $tg4x = tgx$ $(x = \pi n, n\epsilon Z)$
12) $tgx = ctg2x$ $(x = 6\pi + \pi n, n\epsilon Z)$
13) $sinx + cosx = 1$ $(x = 2\pi n, n\epsilon Z)$
14) $\sqrt{3}sinx + cosx = 1$ $(x = 2\pi n, n\epsilon Z)$
15) $sinx - 2cosx = 1$ $(x = 2\pi + 2\pi n, n\epsilon Z)$
16) $sin^2x + sin^23x = 1$ $(x = 2\pi n - \frac{7\pi}{8}, n\epsilon Z)$
17) $cos^2x + cos^22x = 1$ $(x = \pi n - \frac{\pi}{2}, n\epsilon Z)$
18) $sin^2x + cos^24x = 1$ $(x = 2\pi n, n\epsilon Z)$
19) $cos^2x + cos^23x = 1$ $(x = 2\pi n - \frac{7\pi}{8}, n\epsilon Z)$
20) $cos^2x - sin^2x = 1$ $(x = \pi n, n\epsilon Z)$
21) $si\,n\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ $(x = 4\pi - 4\pi n, n\epsilon Z)$
22) $cos3x = \frac{1}{2}$ $(x = 2\pi n - \frac{\pi}{9}, n\epsilon Z)$
23) $tg\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ $(x = \frac{\pi n}{2}, n\epsilon Z)$

24) $ctg\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad (x=\frac{\pi}{6}-\pi n, n\epsilon Z)$

25) $sin^4x+cos^4x=1$ $\quad (x=\pi n, n\epsilon Z)$

26) $3sin^2x=cos^2x$ $\quad (x=\pi n-\frac{5\pi}{6}, n\epsilon Z)$

27) $sinx\cdot cosx+sin^2x\text{-}cos^2x=1$ $\quad (x=\pi n+\frac{\pi}{2}, n\epsilon Z)$

28) $1\text{-}cosx=tgx\text{-}sinx$ $\quad (x=2\pi n, n\epsilon Z)$

29) $sin^{10}x+cos^{10}x=\frac{29}{16}cos^4 2x$ $\quad (x=2\pi n-\frac{7\pi}{8}, n\epsilon Z)$

30) $2+cos4x=5cos2x+8sin^6x$ $\quad (x=\pi n-\frac{7\pi}{4}, n\epsilon Z)$

31) $sin^2x+\frac{1}{2}sin2x=1$ $\quad (x=\pi n-\frac{3\pi}{4}, n\epsilon Z)$

32) $tg2x+ctgx=0$ $\quad (x=\pi n-\frac{\pi}{2}, n\epsilon Z)$

33) $cos(\frac{\pi}{4}+x)+cos(\frac{\pi}{4}\text{-}x)=1$ $\quad (x=2\pi n-\frac{\pi}{4}, n\epsilon Z)$

34) $sin3x=cosx\text{-}sinx$ $\quad (x=\pi n-\frac{11\pi}{12}, n\epsilon Z)$

35) $sin2x=cosx$ $\quad (x=\pi n-\frac{\pi}{2}, n\epsilon Z)$

Також пропонуємо варіанти завдань тематичної атестації
Варіант 1

1. $sinxcosx+cosxsin2x=0$
2. $sin3x+sinx=0$
3. $sinx+cos2x=-2$
4. $5(cosx+sinx)^2\text{-}(cos+sinx)+7=0$

Варіант 2

1. $cos2xsin3x+sin2xcos3x=0{,}5$
2. $cos10x+cos12x=0$
3. $sin2x\text{-}\sqrt{3}cos2x=1$
4. $3sin^2xcos(\frac{3\pi}{2}+x)+3sin^2xcosx\text{-}sinxcos^2x\text{-}sin^2(x\text{-}\frac{\pi}{2})cosx=0$

Варіант 3

1. $sinxcos3x+cosxsin3x=1$
2. $sin7x\text{-}sin2x=0$

3. *cos2x-sinx=-2*
4. *cos3x+2cosx=0*

Варіант 4

1. *cos5xcos2x-sin5xsin2x=0*
2. *cos9x-cosx=0*
3. *cos3x+*$\sqrt{3}$*sin3x=-1*
4. *sin3x+2sinx=0*

Подамо розв'язання завдань варіанту 4

1. *cos5xcos2x-sin5xsin2x=0*

cos7x=0

$7x = \pi n + \frac{\pi}{2}, n\epsilon Z$

$x = \frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{14}, n\epsilon Z$

2. *cos9x-cosx=0*

cos9x=cosx

9x=x+2πn

8x=2πn

$x = \frac{\pi n}{4}, n\epsilon Z$

3. *cos3x+*$\sqrt{3}$*sin3x=-1*

$x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n\epsilon Z$

4. *sin3x+2sinx=0*

$5\sin x-4\sin^3 x=0$

$-\sin x(4\sin^2 x-5)=0$

$\sin x(4\sin^2 x-5)=0$

sinx=0 *або* $4\sin^2 x-5=0$

$(x = \pi n, n\epsilon Z)$

Завдання теми «Тригонометричні рівняння нерівності та системи» зустрічаються серед завдань ЗНО, тому важливо надати необхідну допомогу учням у повторенні теми під час підготовки до ЗНО (таблиця 2.2).

Таблиця 2.2

Матеріал для підготовки учнів до ЗНО

Рівняння	Умова	Множина розв'язків
	$\lvert a\rvert>1$	*Розв'язків немає*
	$\lvert a\rvert\le 1$	$x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\epsilon Z$
	$a=-1$	$x=\pi+2\pi n,\ n\epsilon Z$
	$a=0$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\epsilon Z$
	$a=1$	$x=2\pi n,\ n\epsilon Z$
$\sin x = a$	$\lvert a\rvert>1$	*Розв'язків немає*
	$\lvert a\rvert\le 1$	$x=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\ k\epsilon Z$
	$a=-1$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\epsilon Z$
	$a=0$	$x=\pi k,\ k\epsilon Z$
	$a=1$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\epsilon Z$
$tg\, x = a$	a - *довільне*	$x=arctg\, a+\pi n,\ n\epsilon Z$
	$a=-1$	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\epsilon Z$
	$a=0$	$x=\pi n,\ n\epsilon Z$
	$a=1$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\epsilon Z$
$ctg\, x = a$	a - *довільне*	$x= arcctg\, a+\pi n = arcctg\,\frac{1}{a}+\pi n,\ n\epsilon Z$
	$a=-1$	$x=\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\epsilon Z$
	$a=0$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\epsilon Z$
	$a=1$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\epsilon Z$

Також на етапі підготовки учнів до складання ЗНО слід звернути увагу на уміння виділяти типи запропонованих тригонометричних рівнянь, тому доречно запропонувати «Шпаргалку – Основні типи тригонометричних рівнянь», яка містить описання рівнянь певноготипу і приклади цих рівнянь (таблиця 2.3).

Таблиця 2.3

Шпаргалка. Основні типи тригонометричних рівнянь

Тип рівняння	Приклади
Рівняння, що зводятся до алгебраїчних – це рівняння, до складу яких входять однакові або різні тригонометричні функції одного аргументу.	$a\cdot sin^2x + b\cdot sin\,x + c = 0$ $a\cdot tg^2 3x + b\cdot tg^2 3x + c = 0$ $a\cdot sin^2x + b\cdot cos\,x + c = 0$ $a\cdot tgx + b\cdot ctg\,x = 0$ $a\cdot cos^2x + b\cdot cos\,x + c = 0$ $a\cdot ctg^2 2x + b\cdot ctg^2 2x + c = 0$ $a\cdot cos^2x + b\cdot sin\,x + c = 0$
Однорідними відносно $sin\,x$ і $cos\,x$ називаються рівняння, в яких сума показників степенів при $sin\,x$ і $cos\,x$ у всіх членів такого рівняння однакова. Ця сума називається **степенем однорідності** рівняння або **показником однорідності**.	$a\cdot sin\,x+b\cdot cos\,x=0$ $a\cdot sin^2x + b\cdot sin\,x\cdot cos\,x + c\cdot cos^2x = 0$ $a\cdot sin^3x + b\cdot sin^2x\cdot cos\,x ++c\cdot sin\,x\cdot cos^2x+d\cdot cos^3x = 0,$
Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток.	*Наприклад* $sin(15^o + x)+sin(45^o - x)=1$ $2sin\frac{15^o+x+45^o-x}{2}\cdot cos\frac{15^o+x-45^o+x}{2}=1$ $2sin\,30^o\cdot cos(x-15^o)=1$ $2\cdot\frac{1}{2}\cdot cos(x-15^o)=1$ $cos\,(x-15^o)=1$ $x-15^o=360^o\cdot n,\ n\epsilon Z;$ $x=15^o+360^o\cdot n,\ n\epsilon Z.$ ***Відповідь:*** $15^o+360^o\cdot n,\ n\epsilon Z.$

Рівняння, що розв'язу за допомогою понижен степеня	*Наприклад* $cos^2\frac{3x}{2}=\frac{1}{4}$ $\frac{1+cos3x}{2}=\frac{1}{4}$ $1+cos3x=\frac{1}{2}$ $cos3x=-\frac{1}{2}$ $3x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n, n\epsilon Z$ $3x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\epsilon Z$ $x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}, n\epsilon Z$ ***Відповідь:*** $x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}, n\epsilon Z$

У **рівняннях, що розв'язуються розкладанням на множники** усі члени рівняння переносять у ліву частину і подають утворений вираз у вигляді добутку, використовуючи всі відомі способи розкладання на множники, а саме: винесення спільного множника за дужки, спосіб групування, застосування формул скороченого множення, штучні способи та використання тригонометричних формул. Далі використовують необхідну і достатню умови рівності нулю добутку тригонометричних виразів: добуток кількох співмножників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли прийнаймі один із співмножників дорівнює нулю, а інші при цьому втрачають смислу.

Деякі тригонометричні рівняння під час перетворень можуть бути зведені до рівності тригонометричних функцій. Такі рівняння розв'язуються на основі рівності однойменних тригонометричних функцій.

1) Для того, щоб синуси двох аргументів були рівні, необхідно і достатньо виконання однієї з двох умов:

$$\sin x=\sin y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x+y=\pi+2\pi k, k\epsilon Z \\ x-y=2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.$$

2) Для того, щоб косинуси двох аргументів були рівні, необхідно і достатньо виконання однієї з двох умов:

$$\cos x=\cos y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=2\pi k, k\epsilon Z \\ x-y=2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.$$

3) Для того, щоб тангенси двох аргументів були рівні, необхідно і достатньо одночасне виконання двох умов:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \epsilon Z \\ x - y = \pi k, k \epsilon Z \end{cases}$$

Підсумовуючи, слід відмітити, що розробляючи методичні основи формування компетентностей учнів під час навчання теми «Тригонометричні рівняння» у змісті навчання передбачалося формування предметних математичних компетентностей учнів з теми, а різноманітними формами пред’явлення змісту забезпечується формування ключових компетентностей.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження, присвячене розробці методики вивчення теми «Тригонометричні рівняння, нерівності та системи» на базовому та профільному рівнях підготовки учнів старшої профільної школи, спрямовано на винайдення шляхів формування компетентностей учнів у процесі навчання теми.

Задля цього у роботі проведено ретельний аналіз літератури і досліджено історію розвитку тригонометрії як галузі математичних знань, що дозволить майбутньому вчителеві грамотно підходити до питань формування математичної компетентності учнів.

Розкрито методи розв’язання тригонометричних рівнянь, нерівностей та їх систем в класичному курсі тригонометрії, які є основою шкільного курсу і можуть бути представлені учням, як узагальнення їх знань на профільному рівні підготовки.

Аналіз чинних програм та підручників для 10-11 класів в аспекті досліджуваної проблеми дав можливість з’ясувати особливості навчання теми на різних рівнях математичної підготовки учнів та розробити методику формування практичної компетентності учнів на базовому рівні підготовки у процесі розв’язання тригонометричних рівнянь. Елементи методики подано як в основній частині роботи так і в додатках, розробки уроків різних типів, системи вправ з теми орієнтовані на формування ключових компетентностей учнів у процесі розвязування тригонометричниз рівнянь, передбачених програмою.

Розроблено методику формування ключових і предметних компетентностей учнів профільних класів у процесі розв’язання тригонометричних рівнянь, нерівностей та систем. Розроблено систему вправ як для відпрацювання предметних математичних компетентностей з теми так і для моніторингу рівня сформованих компетентностей.

Підготовлені методичні рекомендації щодо вивчення теми на засадах компетентнісного підходу на профільному рівні підготовки.

Поставлена мета досягнута, завдання розв’язані. Перспективу подальших досліджень вбачаємо дослідженні широкого застосування ІКТ до формування компетентностей учнів у навчанні теми «Тригонометричні рівняння».

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аналітична геометрія / О.А. Борисенко, Л.М.Ушакова. – Харків : Основа, 1993. – 192 с.

2. Александрова Н. В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник, изд. 3-е. — СПб. : ЛКИ, 2008. — 248 с.

3. Аджиєва А. Тригонометричні рівняння / А. Аджиєва // Математика. Додаток до газети «Перше вересня». – 2001. – № 33.

4. Адрова И. А. Модульний урок в X класі по темі «Рішення тригонометричних рівнянь» / И.А. Адрова, И.В. Ромашко // Математика в школі. – 2001. – № 4. – С. 28–32.

5. Бабенко С.П. Усі уроки алгебри і початків аналізу. 11 клас. II семестр. Академічний рівень // С.П. Бабенко. – Харків : Основа, 2011. – 253 с.

6. Бардушкін В. Тригонометричні рівняння. Відбір коріння / В.Бардушкін, О. Прокоф’єв. // Математика. – 2005. – №12. – С. 23–27.

7. Бевз Г.П. Методика викладання математики. / Г.П.Бевз. – К.: Радянська школа, 1989. – 320 с.

8. Вигодський Я.Я. Довідник по елементарній математиці. – Київ, 2003. – 345 с.

9. Голобородько В.В. Алгебра і початки аналізу. Самостійні і контрольні роботи. / В.В. Голобородько, А.П.Єршова. – К., 2004.

10. Гальперіна А.Р. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень: Збірник завдань для контролю знань / А.Р. Гальперіна, І.О.Золотарьова. – Харків : Вид-во «Ранок», 2010. – 176 с.

11. Гетманцев В. Д. Математика. Тригонометрія : посіб. [для слухачів підгот. відділень та вступників до пед. ін-тів] / В.Д. Гетманцев, О.Ф.Саушкін. – Київ : Либідь, 1994. – 144 с.

12. Гилемханов Р. Г. Звільнімося від зайвої роботи (при рішенні однорідних тригонометричних рівнянь) / Р.Г. Гилехамов // Математика в школі. – 2000. – № 10. – С. 9.

13. Городніченко В.Д.Тригонометрія. Конкурсні задачі / В.Д.Городніченко // Математика в школах України. – 2011. – № 1–2. – С. 34–39.

14. Довідник з елементарної математики. Геометрія, тригонометрія, векторна алгебра / за ред. П.Ф. Фільчакова. – 2-е вид. – Київ : Наука, 1967. – 439 с.

15. Глейзер Г. И. История математики в школе. IX-X классы. Пособие для учителей. / Г. И. Глейзер — М. : Просвещение, 1983. — 352 с.

16. Закон України про освіту / Відомості Верховної Ради (ВВР), 2018, № 38-39, ст.380)

17. Игудисман О. Математика на устном экзамене / О. Ігудисман О. – Москва : Айрис прес, Рольф, 2001. – 159 с.

18. Істер О.С. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики – 11 клас / О.С. Істер, О.І. Глобін, І.Є. Панкратова. – Київ : Центр навч.-метод. літератури, 2011. – 112с.

19. Історія тригонометрії. Електронний ресурс. – Режим доступу https://www.turkaramamotoru.com/uk97-209105.html

20. Каплун О. І. Алгебра і початки аналізу + геометрія. 10 клас: навчально-методичний посібник / О.І. Каплун. – Харків : ФОП Співак В. Л., 2010. – 320 с.

21. История математики под редакцией А. П. Юшкевича в трёх томах, М.: Наука, 1970.

22. Кириченко Т. Ф. Методические рекомендации для студентов-заочников по решениям математических задач / Т.Ф. Кириченко. – Ленинград, 1987. – 53 с.

23. Ивлев Б.М. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 10 класса / Б.М.Ивлев, С.М.Саакян, С.И.Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1990. – 176 с.

24. Капіносов А.М. Дидактичні матеріали для різнорівневого навчання. Алгебра 10 клас. / А.М. Капіносов. – К.: А.С.К., 1997. – 80 с.

25. Кожеуров П.Я. Курс тригонометрии для техникумов / П.Я.Кожеуров. – Москва : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1953. – 296 с.

26. Кожеуров П.Я. Тригонометрия / П.Я. Кожеуров. – [6-е издание]. – Москва : Гос. изд-во «Физ.-мат. литературы», 1961. – 329 с.

27. Кожеуров П.Я. Тригонометрия / П.Я. Кожеуров [7-е видання]. – Москва : Гос. изд-во «Физ.-мат. литературы», 1963. – 342 с.

28. Кранц П. Сферическая тригонометрия / П. Кранц. – Москва : URSS.ЛКИ, 2007. – 93 с.

29. Концепція профільного навчання в старшій школі. Електронний ресурс. Режим доступу: http://osvita.ua/legislation/Ser_osv/37784/

30. Лов'янова І.В. Дидактичні основи навчання математики. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів / І.В.Лов'янова. – Кривий Ріг: КДПУ, 2009. – 192с.

31. Македонська С.І. Побудова графіків тригонометричних функцій / С.І. Македонська // Математика. – 2003. – березень (№12) – С. 8–11.

32. Матвиевская Г.П. Становление плоской и сферической тригонометрии. Из истории математических идей / Г.П. Матвиевская. – Москва : Знание, 1982. – 64 с.

33. Математика. Навчальна програма. Рівень стандарту. Профільний рівень – Електронний ресурс. Режим доступу https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

34. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики // А.Г. Мерзляк, Д.А.Номіровський В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Харків : Гімназія, 2010. – 415 с.

35. Мерзляк А.Г. Алгебра. 11 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики // А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Харків: Гімназія, 2009. – 379 с.

36. Мерзляк А.Г. Тригонометрія. Вчимося розв’язувати задачі // А.Г.Мерзляк, В.Б. Полонський, Ю.М. Рабінович, М.С. Якір. – Київ : Генеза, 2008. – 312 с.

37. Мирошин В. Отбор корня в тригонометрических уравнениях / В.Мирошин // Математика. – Додаток до газети «Перше вересня». – 2006. – № 17. – С. 56–59.

38. Мордкович А. Г. Алгебра і початки аналізу. 10-11 кл.: Підручник для загальноосвітніх установ / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2000. – 336с.

39. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загально-освіт. навчальн. закладів : академ. рівень / С. І. Нелін. – Харків : Гімназія, 2010. – 416 с.

40. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Є.П. Нелін / [2-ге вид., виправ. і доп.]. – Харків : Світ дитинства, 2006. – 448 с.

41. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 11 кл. загаль-ноосвіт. навч. закладів / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова / [2-ге вид., виправл. і доп]. – Харків : Світ дитинства, 2006. – 416 с.

42. Пандул И.С. Сферическая тригонометрия и сферическая астрономия применительно к решению инженерно-геодезических задач / И.С. Пандул. – Ленинград : ЛГИ, 1982. – 99 с.

43. Пичурин Л. Ф. Про тригонометрию и не только о ней / Л.Ф.Пичурин. – Москва : Просвещение, 1985. – 128 с.

44. Пінчук О.П. До проблем формування ключових компетенцій у старшокласників. Роль математики та інформатики у вирішенні цієї проблеми / О.П. Пінчук // Наука і сучасність: зб. наук. пр. / Нац. пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Київ, Логос, 2002. – Том XXXIII. – С.109–116.

45. Погребиський І. Б. Тригонометрія : посіб. для учителів / І.Б.Погребиський, П.Ф. Фільчаков. – Київ : Рад. шк., 1951. – 251с.

46. Перебийніс С.М. Тригонометрія у таблицях, схемах та розв'язках. 10 клас / С.М. Перебийніс. – Тернопіль: Мандрівець, 2014. – 80 с.

47. Про Державну національну програму «Освіта» (Україна XXI століття). Електронний ресурс. Режим доступу: http://zakon.rada.gov.ua/laws/show/896-93-%D0%BF

48. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : [монографія] / С.А. Раков. – Харків : Факт, 2005. – 360с.

49. Резуненко В.О. Тригонометричні рівняння і нерівності для старшокласників і абітурієнтів / В.О. Резуненко, В.О. Ярмак. – Харків : Вид. група «Основа», 2011. – 94 с.

50. Тематична атестація. Математика. 10 клас. – Тернопіль : СМП Астон, 2000. – 80 с.

51. Решетников Н. Н. Тригонометрия в школе / Н.Н. Решетников. – Москва : Педагогический университет, 2006. – 278 с.

52. Рыбников К. А. История математики в двух томах. — М. : Изд. МГУ, 1960. — Т. I.

53. Рижков М. О. Матеріали для факультативних занять, спецкурсів, гуртків. Математика 8-11 / М.О. Рижков. – Харків : Вид. група «Основа», 2008. – 96 с. – (Б-ка журн. «Математика в школах України». – Вид. 9 (69)).

54. Роганін О. М. Математика : Практичний довідник / О.М. Роганін, О.І. Каплун. – Харків : ФОП Співак Т. К., 2009. – 416 с

55. Слєпкань З.І. Збірник завдань для ДПА з математики. Алгебра і початки аналізу. 11 клас. / З.І. Слєпкань. – Харків, «Гімназія», 2002. – 160 с.

56. Сипченко Т.М. Календарно-тематичний план з математики. 5–11 класи / Т. М. Сипченко. – 2-ге вид., перероб. і доп. – Харьков: Видавництво «Ранок», 2011. – 128 с.

57. Сканави М.И. Элементарная математика / М.И.Сканави. – М., 1974.– 592 с.

58. Смоляков А. Н. Прийоми рішення тригонометричних рівнянь / А.Н.Смоляков, П.Ф. Севрюков // Математика в школі. – 2004. – № 1. – С. 24–26.

59. Тригонометричні функції. Завдання та розв'язки. – К.: Видавничий дім «Перше вересня», 2016. – Серія «Бібліотека «Шкільного світу»».

60. Тарасенкова Н. А. Зміст і структура математичної компетентності учнів загальноосвітніх навчальних закладів / Н. А. Тарасенкова, В. К. Кірман // Математика в школі. – 2008. – No 6. – С. 3–9.

61. Тарасенкова Н.А. Засоби перевірки математичної компетентності в основній школі / Н.А. Тарасенкова, І.М.Богатирьова, О.М.Коломієць, З.О.Сердюк // Science and education a new dimension. – III (26), Issue: 71. – Budapest: SCASPEE, 2015. – P. 21-25.

62. Титаренко О.М. 5770 задач з математики з відповідями. – 2–ге вид. випр. / О.М. Титаренко. – Харків : ТОРГСІНГ ПЛЮС, 2007. – 336 с.

63. Титаренко О.М. Форсований курс шкільної математики : [навчальний посібник] / О.М. Титаренко. – Харків : Торсінг, 2003. – 368 с.

64. Токарева А. Тригонометричні нерівності / А. Токарева // Математика. // Додаток до газети «Перше вересня» № 44, 2002 р

65. У світі математики : [збірник науково-популярних статей]. – Випуск10. – Київ : Радянська школа, 1979. – 207 с.

66. У світі математики : [збірник науково-популярних статей]. – Випуск 14. – Київ : Радянська школа, 1983. – 255 с.

67. У світі математики : [збірник науково-популярних статей]. – Випуск 9. – Київ : Радянська школа, 1978. – 236 с.

68. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о педагогической психологии / Л.М. Фридман. – М.: Просвещение, 1983. — 160 с.

69. Фурман М. С. Збірник задач з алгебри і початків аналізу. 11 клас. – Харків : Вид. група «Основа», 2010. – 159 с.

70. Ходырева Н.Г. Методическая система становления готовности будущих учителей к формированию математической компетентности школьников : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Н.Г. Ходырева. – Волгоград,– 2004. – 179 с.

71. Цукарь А.Я. Вправи практичного характеру з тригонометрії / А.Я.Цукарь // Математика в школах України. – 1993. – №3. – С. 45–50.

72. Шабашова О. В. Прийоми відбору коренів в тригонометричних рівняннях / О.В. Шабашова // Математика в школі. – 2004. – №1. – С.20–24.

73. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. – Київ : Зодіак-ЕКО, 2002. – 272 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Ключові компетентності

	Ключові компетентності	Компоненти
1	Спілкування державною (і рідною у разі відмінності) мовами.	***Уміння:*** ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі інформації, поданої в різних формах (у таблицях, діаграмах, на графіках); розуміти, пояснювати і перетворювати тексти математичних задач (усно і письмово), грамотно висловлюватися рідною мовою; доречно та коректно вживати в мовленні математичну термінологію, чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку, аргументувати, доводити правильність тверджень; поповнювати свій словниковий запас. ***Ставлення:*** розуміння важливості чітких та лаконічних формулювань. ***Навчальні ресурси:*** означення понять, формулювання властивостей, доведення теорем, розв’язування задач.
2	Спілкування іноземними мовами.	***Уміння:*** спілкуватися іноземною мовою з використанням числівників, математичних понять і найуживаніших термінів; ставити запитання, формулювати проблему; зіставляти математичний термін чи буквене позначення з його походженням з іноземної мови, правильно використовувати математичні терміни в повсякденному житті. ***Ставлення:*** усвідомлення важливості вивчення іноземних мов для розуміння математичних термінів та позначень, пошуку інформації в іншомовних джерелах. ***Навчальні ресурси:*** тексти іноземною мовою з використанням статистичних даних, математичних термінів.

3	Математична компетентність.	***Уміння:*** оперувати числовою інформацією, геометричними об’єктами на площині та в просторі; встановлювати відношення між реальними об’єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо); розв’язувати задачі, зокрема практичного змісту; будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, інтерпретувати та оцінювати результати; прогнозувати в контексті навчальних та практичних задач; використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях. ***Ставлення:*** усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві, розвитку технологічного, економічного і оборонного потенціалу держави, успішного вивчення інших дисциплін. ***Навчальні ресурси:*** розв'язування математичних задач, зокрема таких, що моделюють реальні життєві ситуації.
4	Основні компетентності у природничих науках і технологіях.	***Уміння:*** розпізнавати проблеми, що виникають у довкіллі і які можна розв’язати засобами математики; будувати та досліджувати математичні моделі природних явищ і процесів. ***Ставлення:*** усвідомлення важливості математики як універсальної мови науки, техніки та технологій. ***Навчальні ресурси:*** складання графіків та діаграм, які ілюструють функціональні залежності результатів впливу людської діяльності на природу.

5	Інформаційно-цифрова компетентність	***Уміння:*** структурувати дані; діяти за алгоритмом та складати алгоритми; визначати достатність даних для розв'язання задачі; використовувати різні знакові системи; знаходити інформацію та оцінювати її достовірність; доводити істинність тверджень. ***Ставлення:*** критичне осмислення інформації та джерел її отримання; усвідомлення важливості ІКТ для ефективного розв'язування математичних задач. ***Навчальні ресурси:*** візуалізація даних; побудова графіків та діаграм, зображень стереометричних фігур за допомогою програмних засобів.
6	Уміння вчитися впродовж життя	***Уміння:*** визначати мету навчальної діяльності, відбирати й застосовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення цієї мети; організовувати та планувати свою навчальну діяльність; моделювати власну освітню траєкторію, аналізувати, контролювати, коригувати та оцінювати результати своєї навчальної діяльності; доводити правильність власного судження або визнавати помилковість. ***Ставлення:*** усвідомлення власних освітніх потреб та цінності нових знань і вмінь; зацікавленість у пізнанні світу; розуміння важливості вчитися впродовж життя; прагнення до вдосконалення результатів своєї діяльності. ***Навчальні ресурси:*** моделювання власної освітньої траєкторії; статистична інформація; історичні задачі; завдання ймовірнісного змісту.

7	Ініціативність і підприємливість	***Уміння:*** генерувати нові ідеї, вирішувати життєві проблеми, аналізувати, прогнозувати, ухвалювати оптимальні рішення; використовувати критерії раціональності, практичності, ефективності та точності, з метою вибору най кращого рішення; аргументувати та захищати свою позицію, дискутувати; використовувати різні стратегії, шукаючи оптимальних способів розв'язання життєвого завдання. ***Ставлення:*** ініціативність, відповідальність, упевненість у собі; переконаність, що успіх команди – це й особистий успіх; позитивне оцінювання та підтримка конструктивних ідей інших. ***Навчальні ресурси:*** задачі підприємницького змісту (оптимізаційні задачі).
8	Соціальна та громадянська компетентності	***Уміння:*** висловлювати власну думку, слухати і чути інших, оцінювати аргументи та змінювати думку на основі доказів; аргументувати та відстоювати свою позицію; ухвалювати аргументовані рішення в життєвих ситуаціях; співпрацювати в команді, виділяти та виконувати власну роль в командній роботі; аналізувати власну економічну ситуацію, родинний бюджет, користуючись математичними методами; орієнтуватися в широкому колі послуг і товарів на основі чітких критеріїв, робити споживчий вибір, спираючись, зокрема, і на математичні дані. ***Ставлення:*** ощадливість і поміркованість; рівне ставлення до інших незалежно від статків, соціального походження; відповідальність за спільну справу; налаштованість на логічне обґрунтування позиції без передчасного переходу до висновків; повага до прав людини, активна позиція щодо боротьби із дискримінацією. ***Навчальні ресурси:*** задачі соціального змісту.

9	Обізнаність та самовираження у сфері культури	***Уміння:*** здійснювати необхідні розрахунки для встановлення пропорцій, відтворення перспективи, створення об'ємно-просторових композицій; унаочнювати математичні моделі, зображати фігури, графіки, рисунки, схеми, діаграми. ***Ставлення:*** усвідомлення взаємозв'язку математики та культури на прикладах з архітектури, живопису, музики та ін.; розуміння важливості внеску математиків у загальносвітову культуру. ***Навчальні ресурси:*** математичні моделі в різних видах мистецтва.
10	Екологічна грамотність і здорове життя.	***Уміння:*** аналізувати і критично оцінювати соціально-економічні події в державі на основі статистичних даних; враховувати правові, етичні, екологічні і соціальні наслідки рішень; розпізнавати, як інтерпретації результатів вирішення проблем можуть бути використані для маніпулювання. ***Ставлення:*** усвідомлення взаємозв'язку математики та екології на основі статистичних даних; ощадне та бережливе відношення до природних ресурсів, чистоти довкілля та дотримання санітарних норм побуту; розгляд порівняльної характеристики щодо вибору здорового способу життя; власна думка та позиція до зловживань алкоголю, нікотину тощо. ***Навчальні ресурси:*** навчальні проекти, задачі соціально-економічного, екологічного змісту; задачі, які сприяють усвідомленню цінності здорового способу життя.

Додаток складено на основі джерела [33].

Додаток Б

Дидактичний матеріал для оцінювання і контролю знань учнів

Математичний диктант 1. **Радіанне вимірювання кутів. Синус, косинус, тангенс, котангенс кута**.

I варіант	II варіант
1. Запишіть формулу переходу від радіанної міри кута до градусної	1. Запишіть формулу переходу від градусної міри кута до радіанної
2. Подайте в градусах кут, радіанна міра якого $\frac{\pi}{5}$	2. Подайте в градусах кут, радіанна міра якого $\frac{\pi}{9}$
3. Виразіть у радіанах кут 140°	3. Виразіть у радіанах кут 150°
4. Кутом якої чверті є кут α, якщо α=$\frac{2\pi}{3}$	4. Кутом якої чверті є кут α, якщо α=$\frac{4\pi}{3}$
5. Чи існує кут, косинус якого дорівнює -1,4?	5. Чи існує кут, синус якого дорівнює 1,03?
6. Чи існує кут, тангенс якого дорівнює 6?	6. Чи існує кут, котангенс якого дорівнює 0,3?
7. Знайдіть найбільше значення виразу 1- sinα	7. Знайдіть найменше значення виразу 2+ cosα
8. Обчисліть ctg$\frac{\pi}{6}$ tg $\frac{\pi}{3}$	8. Обчисліть ctg$\frac{\pi}{4} -$ tg $\frac{\pi}{6}$
9. Обчисліть sin60° cos45°	9. Обчисліть sin45° cos60°
10. Чи можлива рівність sinα=$\frac{\sqrt{2}+1}{\pi}$?	10. Чи можлива рівність cosα =$\sqrt{3} - 2,1$?
11. Знайдіть довжину дуги кола радіусом 10 м, якщо її стягує центральний кут $\frac{\pi}{10}$	11. Знайдіть довжину дуги кола радіусом 8 м, якщо її стягує центральний кут $\frac{\pi}{16}$
12. Обчисліть площу сектора, якщо радіус круга 2 см, а радіанна міра центрального кута $\frac{3\pi}{4}$	12. Обчисліть площу сектора, якщо радіус круга 3 см, а радіанна міра центрального кута $\frac{5\pi}{3}$

Математичний диктант 2. **Тригонометричні функції числового аргументу, їх властивості**.

I варіант	II варіант
1. Кутом якої чверті є кут α, якщо sinα > 0, cosα < 0?	1. Кутом якої чверті є кут α, якщо sinα < 0, cosα < 0?

2. Визначте знак добутку sin15° cos160°	2. Визначте знак добутку cos55°sin170°
3. Знайдіть значення виразу sin(-30°)	3. Знайдіть значення виразу cos (-45°)
4. Чи можлива рівність sinα=$\frac{\pi}{2}$?	4. Чи можлива рівність cos α=$\frac{\pi+1}{4}$?
5. Спростіть вираз cos α + cos (-α)	5. Спростіть вираз tgα + tg(-α)
6. Знайдіть значення виразу tg(60°+180°·5)	6. Знайдіть значення виразу sin(60°+360°·3)
7. Обчисліть sin420°	7. Обчисліть cos390°
8. Обчисліть ctg450°	8. Обчисліть tg540°
9. Чому дорівнює cos$\frac{5\pi}{2}$?	9. Чому дорівнює ctg $\frac{7\pi}{2}$?
10. Знайдіть значення виразу sin45° + sin(-45°)	10. Знайдіть значення виразу cos 60° + cos (-60°)
11. Порівняйте cos156° і sin156°	11. Порівняйте cos285° і sin285°
12. Порівняйте tg 77° і ctg 98°	12. Порівняйте tg 127° і ctg 8°

Математичний диктант 3. **Періодичність тригонометричних функцій**

I варіант	II варіант
1. Укажіть найменший додатній період функції y = cos x	1. Укажіть найменший додатній період функції y = sin x
2. Укажіть найменший додатній період функції y = ctg x	2. Укажіть найменший додатній період функції y = tg x
3. Знайдіть найменший додатний період функції y = sin3x	3. Знайдіть найменший додатний період функції y = cos8x
4. Знайдіть найменший додатний період функції y = ctg9x +6	4. Знайдіть найменший додатний період функції y = tg19x +4
5. Знайдіть найменший додатний період функції y = −0,7 cos(0,4x −1)	5. Знайдіть найменший додатний період функції y = −0,1cos (0,6x + 4)
6. Знайдіть найменший додатний період функції y = 2 sin x cosx	6. Знайдіть найменший додатний період функції y = $\cos^2 x - \sin^2 x$
7. Обчисліть tg 930°	7. Обчисліть ctg 1140°
8. Обчисліть cos 1110°	8. Обчисліть cos780°
9. Знайдіть найменший додатний період функції y = cos 3x cos $\frac{\pi}{7}$ –sin3x sin $\frac{\pi}{7}$	9. Знайдіть найменший додатний період функції y = sin 4xcos $\frac{\pi}{5}$ – cos4xsin $\frac{\pi}{5}$

10. Знайдіть найменший додатний період функції y = cos3x + sin4x	10. Знайдіть найменший додатний період функції y = ctg4x + tg 3x

Математичний диктант 4. **Формули додавання**

I варіант	II варіант
1. Запишіть формулу косинуса суми	1. Запишіть формулу косинуса різниці
2. Запишіть формулу синуса різниці	2. Запишіть формулу синуса суми
3. Запишіть формулу тангенса різниці	3. .Запишіть формулу тангенса суми
4. Знайдіть значення виразу sin60°cos15°− cos60°sin15°	4. Знайдіть значення виразу sin40°cos5°+ cos40°sin5°
5. Спростіть вираз cos2α cos3α − sin2α sin3α	5. Спростіть вираз cosα cos5α + sinα sin5α
6. Знайдіть значення виразу $\frac{\text{tg}19°+\text{tg}\,11°}{1-\text{tg}19°\text{tg}11°}$	6. Знайдіть значення виразу $\frac{\text{tg}72°-\text{tg}\,12°}{1+\text{tg}72°\text{tg}12°}$
7. Знайдіть значення виразу $\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$	7. Знайдіть значення виразу $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{7\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$
8. Спростіть вираз cosα cosβ – cos(α+β)	8. Спростіть вираз cosα sin β + sin(α–β)
9. Обчисліть tg 15°	9. Обчисліть tg 105°
10. Обчисліть cos 8° cos37° − cos 82° cos 53°	10. Обчисліть cos 78° cos18° + cos 12° cos72°

Математичний диктант 5. **Формули зведення**

I варіант	II варіант
1. Спростіть вираз $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$	1. Спростіть вираз $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
2. Спростіть вираз $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$	2. Спростіть вираз $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$
3. Спростіть вираз $\text{tg}\,(3\pi - \alpha)$	3. Спростіть вираз $\text{ctg}\,(8\pi - \alpha)$
4. Спростіть вираз $\text{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} + 4\beta\right)$	4. Спростіть вираз $\text{tg}\left(\frac{5\pi}{2} - \beta\right)$
5. Зведіть до тригонометричної функції гострого кута sin 260°	5. Зведіть до тригонометричної функції гострого кута cos 290°

6. Зведіть до тригонометричної функції гострого кута cos 0,7π	6. Зведіть до тригонометричної функції гострого кута sin 1,1π
7. Спростіть вираз $\sin^2(180°–\alpha) + \sin^2(90°+\alpha)$	7. Спростіть вираз $\sin^2(180°+\alpha) + \sin^2(270°+\alpha)$
8. Знайдіть значення виразу sin 210°	8. Знайдіть значення виразу cos 300°
9. Знайдіть значення виразу tg $\frac{4\pi}{3}$	9. Знайдіть значення виразу ctg $\frac{5\pi}{6}$
10. Спростіть вираз $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\pi+\alpha) + \cos(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$	10. Спростіть вираз $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \operatorname{tg}(\pi+\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Математичний диктант 6. **Тригонометричні функції числового аргументу. Тригонометричні тотожності**

І варіант	ІІ варіант
1. Виразіть у радіанах кут α = 40°	1. Виразіть у радіанах кут α = 80°
2. Знайдіть sinα, якщо cosα = $\frac{4}{5}$ і - кут І чверті	2. Знайдіть cosα, якщо sin α= $\frac{3}{5}$ і α - кут І чверті
3. Спростіть вираз $\operatorname{tg}^2\alpha(\sin^2\alpha–1)$	3. Спростіть вираз $\operatorname{ctg}^2\alpha(1–\cos^2\alpha)$
4. Знайдіть значення виразу $\cos\frac{12\pi}{11}\cos\frac{\pi}{11} + \sin\frac{12\pi}{11}\sin\frac{\pi}{11}$	5. Знайдіть значення виразу $\sin\frac{12\pi}{11}\cos\frac{\pi}{11} – \cos\frac{12\pi}{11}\sin\frac{\pi}{11}$
5. Спростіть вираз $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$	6. Спростіть вираз $\sin^2(\pi-\alpha) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$
6. Спростіть вираз $\frac{1+\cos 4\alpha}{1-\cos 4\alpha}$	7. Спростіть вираз $\frac{1-\cos 8\alpha}{1+\cos 8\alpha}$
7. Перетворіть на суму добуток 2sinα cos5α	8. Перетворіть на суму добуток 2 cosα cos7α
8. Обчисліть $\cos\frac{3\pi}{10} + \cos\frac{7\pi}{10}$	9. Обчисліть $\sin\frac{3\pi}{10} - \sin\frac{7\pi}{10}$
9.Спростіть вираз $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ +tgαctgα	9. Спростіть вираз $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$ +tgαctgα
10. Знайдіть cos 2α, якщо cosα = $\frac{1}{3}$	10. Знайдіть cos 2α, якщо sin α = $-\frac{1}{4}$
11. Обчисліть $\sin\frac{\pi}{8}$	11. Обчисліть $\cos\frac{\pi}{12}$

ВІДПОВІДІ								
МД 1			МД 2			МД 3		
	І в.	ІІ в.		І в.	ІІ в.		І в.	ІІ в.
1	П$_{рад}$=$\frac{п\cdot180°\cdot}{\pi}$	$n°=\frac{п\pi}{180}$	1	ІІ чв.	ІІІ чв.	1	2π	2π
2	36°	20°	2	–	+	2	π	π
3	$\frac{7\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{6}$	3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	3	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
4	ІІ чв	ІІІ чв	4	ні	ні	4	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{19}$
5	ні	ні	5	2 cos α	0	5	5π	$\frac{10\pi}{3}$
6	так	так	6	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	6	π	π
7	2	1	7	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	7	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
8	3	$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$	8	0	0	8	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
9	$\frac{\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	9	0	0	9	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
10	так	так	10	0	1	10	2π	π
11	π	$\frac{\pi}{2}$	11	<	>			
12	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{15\pi}{2}$	12	>	<			

МД 4			МД 5			МД 6		
	І в.	ІІ в.		І в.	ІІ в.		І в.	ІІ в.
1	cos(α+β)= cosαcosβ– sinαsin β	cos(α–β)= cosαcosβ+ sinαsin β	1	cosα	sinα	1	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{4\pi}{9}$
2	sin(α–β)= sinα cosβ – cosα sinβ	sin(α+β)= sinα cosβ +cosαsinβ	2	–sinβ	cosβ	2	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
3	tg(α–β)= $\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$	tg(α+β)= $\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$	3	–tgα	–ctgα	3	– sin^{2}α	cos^{2}α
4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	4	–tg4β	ctgβ	4	–1	0
5	cos5α	cos4α	5	–sin80°	sin20°	5	2sin^{2}α	2sin^{2}α
6	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	6	–cos0,3π	– sin 0,1π	6	ctg^{2}2α	tg^{2}4α
7	–1	1	7	1	1	7	sin6α– sin4α	cos6α+ cos8α
8	sinαsinβ	sinαcosβ	8	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	8	0	0
9	$2-\sqrt{3}$	$-2-\sqrt{3}$	9	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	9	$\frac{1}{cos^2\,\alpha}$	$\frac{1}{sin^2\,\alpha}$
10	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	10	0	$\frac{1}{cos^2\,\alpha}$	10	$-\frac{7}{9}$	$\frac{7}{8}$
						11	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Додаток складено на основі джерела [53].

Додаток В

УРОК-КЕЙС «ТРИГОНОМЕТРІЯ»

Рівень (клас): 10

Тема: Тригонометричні формули

Мета уроку:

Дидактична: Формувати в учнів систему практичних і наукових знань, умінь та навичок з теми: «Тригонометричні формули», зокрема, засвоєння й закріплення основних математичних формул, виведення нових формул множення тригонометричних функцій, повторення законів, теорій та правил, наукових понять з фізики, астрономії, біології та інших навчальних дисциплін, де використовується тригонометрія, із застосуванням вправ, завдань і дидактичних матеріалів; Систематизувати знання учнів з метою всебічного осмислення ними даної теми.

Розвивальна: Навчитися аналізувати об’єкти, знаходити закономірності, робити самостійні висновки з прочитаного й побаченого. Удосконалювати, розвивати уміння та навички щодо розв’язання задач на застосування тригонометричних формул. Продовжити роботу з розвитку логічного мислення, математичної мови й пам’яті, математичного аналізу й синтезу.

Виховна: Продовжити формування навичок естетичного оформлення записів у зошитах. Привчати до вміння спілкуватися та вислуховувати інших. Виховувати свідому дисципліну. Розвивати творчу самостійність та ініціативу. Стимулювати мотивацію та інтерес до вивчення тригонометрії.

Тип уроку:

Розгортка за предметами

Історія
Астрономія
Фізика
Біологія
Музичне
виховання

Фізична культура
Креслення
Алгебра

Вступне слово вчителя

Тригонометрія виникла з практичних потреб людини. За її допомогою ще з давніх часів люди визначали відстань до недосяжних предметів, складали географічні карти, здійснювали виміри землі й розрахунки в будівництві. Тобто тригонометрія у своєму базовому стані носила геометричний характер. Згодом тригонометрія набувала аналітичного наповнення та тригонометричні залежності стали рисрозглядати як функції.

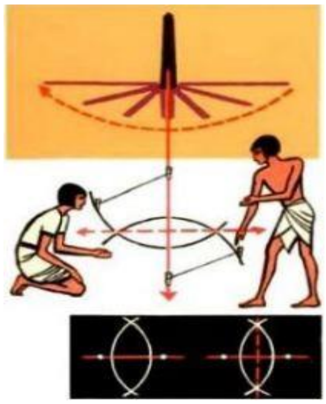


рис.В.1

Учні повідомляють підготовлений матеріал

Історія

Історія тригонометрії бере початок у Стародавній Греції більш ніж 3000 років тому.

Одним із найважливіших досягнень тих часів є визначення співвідношення катетів і гіпотенузи в прямокутних трикутниках, яке пізніше отримало назву теореми Піфагора.

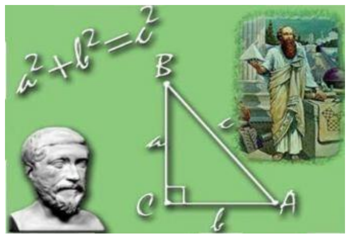


Рис. В.2

Історія розвитку тригонометрії у Стародавній Греції пов'язана з ім'ям астронома Клавдія Птоломея – автора геоцентричної системи світу до Коперника. Грекам не були відомі синуси, косинуси й тангенси. Вони користувалися таблицями, які дозволяли знаходити значення хорди кола за допомогою дуги, якою вона стягувалася. Одиницями для виміру хорди були градуси, хвилини й секунди. Один градус дорівнювався до одної шістдесятої радіусу.

Рис.В.3

Варто наголосити на тому, що дослідження давніх греків сприяли в подальшому динамічному розвитку сферичної тригонометрії.

Зокрема, Евклід у своїх «Початках» наводить теорему про закономірності співвідношень об’ємів куль різного діаметра. Відкриття, які зробив науковець у цій галузі, стали своєрідним поштовхом у розвитку суміжних галузей знань. Прикладом може слугувати засотосувана нині технологія астрономічних приладів, теорія картографічних проекцій, система небесних координат тощо.

У IV столітті центром розвитку математики стала Індія, де індійські математики були першими в застосуванні тригонометрії для здійснення астрономічних розрахунків. Доробки індійських науковців стали надбанням сучасної астрономічної науки.

Історія виникнення тригонометрії як відокремленого розділу математичного навчання розпочалася в Середньовіччі, коли дослідники замінили хорди на синуси. Це відкриття дозволило ввести функції, що стосуються дослідження сторін і кутів прямокутного трикутника. Зазначені відкриття дозволяють поступове відокремлення тригонометрії від астрономії, а також формування тригонометрії як розділу математики. Перші таблиці синусів відтворені і проведені через 3^0, 4^0, 5^0 Аріабхатою.

Пізніше були запропоновані докладні варіанти таблиць, зокрема, Бхаськара розробив таблицю синусів через 1^0.

Історія тригонометрії в Європі має початками XII століття, коли англієць Річард Уоллінгфордский написав «Чотири трактати про прямих і звернених хордах».

До XV століття багато авторів у своїх працях згадують про тригонометричні функції, ставши предметом пильної уваги у другій половині XVI століття (Микола Коперник, Йоганн Кеплер, Франсуа Вієт).

Коперник відвів тригонометрії кілька глав свого трактату «Про обертання небесних сфер» (1543 р.). Трохи пізніше, в 60-х роках XVI століття, Ретик – учень Коперника – наводить у своїй праці «Оптична частина астрономії» п’ятнадцятизначні тригонометричні таблиці.

Франсуа Вієт у «Математичному каноні» (1579 р.) надає ґрунтовну й систематичну характеристику пласкої та сферичної тригонометрії (незважаючи на подекуди констатацію фактів без достатнього доведення).

Додання тригонометрії сучасного змісту і виду стало заслугою Леонарда Ейлера. Його трактат «Введення в аналіз нескінченних» (1748) містить визначення терміна «тригонометричні функції», яке еквівалентно сучасному.

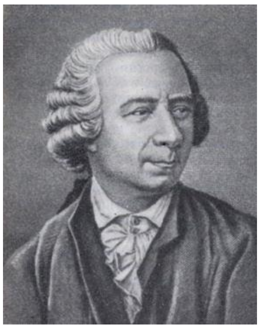


рис. В.4

Дослідник зміг визначити зворотні функції, причому визначення тригонометричних функцій на всій числовій прямій стало можливим завдяки дослідженням Ейлера не тільки допустимих негативних кутів, але і кутів більших за 360^0.Саме він у своїх роботах уперше довів, що косинус і тангенс прямого кута негативні. Розкладання цілих ступенів косинуса і синуса теж стало заслугою цього вченого. Загальна теорія тригонометричних рядів і вивчення збіжності отриманих рядів не були об’єктами досліджень Ейлера. Працюючи над розв’язанням суміжних завдань, науковець здійснив багато відкриттів у тригонометричній галузі. Роботи науковця сприяли подальшому розвитку тригонометрії.

Астрономія

Необхідність у розв’язанні трикутників актуалізувалася під час розвитку астрономії. Тому протягом тривалого часу тригонометрія вивчалася й розвивалася як один із розділів астрономії. На будь-якій кулі, як і на поверхні Землі, відстані між точками можна розраховувати за кутами, під якими їх видно з центра кулі.

Задачу про визначення усіх елементів, так званих, сферичних трикутників розв’язав Франсуа Вієт.

За правилами сферичної тригонометрії здійснюється перетворення азимутальних і екваторіальних координат.

У сучасній математиці ці перетворення координат описуються матрицями перетворень.

На ілюстрації положення зірки А визначається вектором, три складові якого визначаються проекціями зірки на площину горизонту (площину xy) і вісь зеніт-надир (вісь z). Таким чином, положення зірки задається трьома координатами: x, y, z.

Рис. В.5

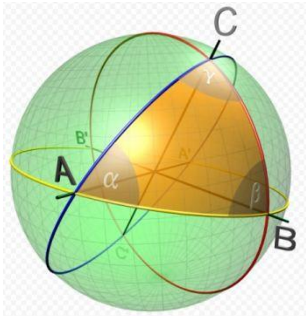


Рис. В.6

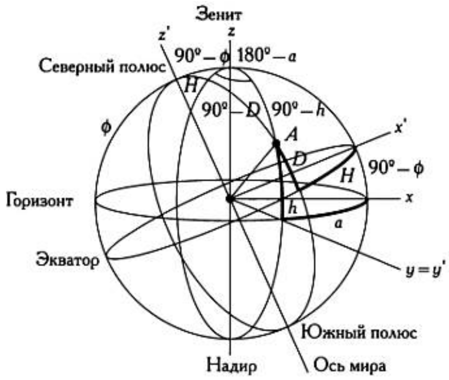


Рис. В.7

Отже, в горизонтальних координатах положення зірки А можна визначити як вектор (r • cos(h) • cos(a), r • cos(h) • sin(a), r • sin(h)).
Аналогічно визначається положення зірки щодо небесного екватора (площини x'y') та осі світу (осі z'), тобто осей екваторіальних координат *x'y'z'*: (*r • cos(D) • cos(H), r • cos(D) • sin(H), r • sin(D)*). Як показано на попередньому малюнку, ми можемо перейти від координат x, y, z до координат *x'y'z* 'всього лише виконавши поворот щодо осі y, яка збігається з віссю y' на кут (90^0-ϕ), де ϕ - широта. У результаті x перейде у вісь x' вісь z - у вісь *z'*. Матриця перетворень щодо другої осі (*осі y=y '*) для кута (90^0-ϕ) записується так:

$$\begin{pmatrix} \cos(90^0-\phi) & 0 & \sin(90^0-\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(90^0-\phi) & 0 & \cos(90^0-\phi) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} rcosDcosH \\ rcosDsinH \\ rsinH \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & cos\,\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\phi & 0 & \sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rcoshcosa \\ rcoshsina \\ rsinh \end{pmatrix}$$

маємо

Отже, формули перетворення координат записуються так:

cosDcosH=sinφcoshcosa+cosφsinh

cosDsinH=coshsina

sinD=-cosφcoshcosa+sinφsinh

Ті ж співвідношення, що виводяться за допомогою матриці перетворень, можна отримати за формулами сферичної тригонометрії Бесселя, розглянувши трикутник «полюс-зеніт-зірка».

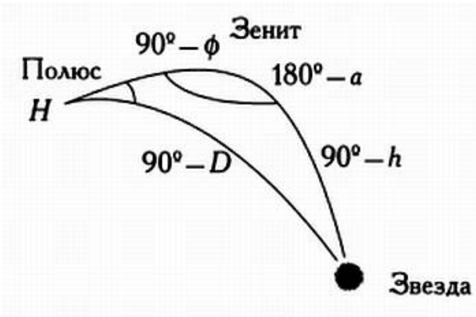


Рис. В.8.

Сферичний трикутник «полюс-зеніт-зірка» як і раніше широко використовується в сферичній або позиційній астрономії, так як він містить всю інформацію, представлену на попередній ілюстрації. Слід враховувати, що сторонами цього трикутника є дуги великого кола небесної сфери.

Отже, їх довжина вимірюється в градусах, однак, за традицією, часовий кут і пряме сходження відраховуються в годинах, хвилинах і секундах. Перейти від годин до градусів дуже просто - достатньо врахувати, що 360^0 еквівалентні 24 годинам або, що аналогічно, 15^0 еквівалентні 1 годині.

Фізика

Розглядаючи графіки тригонометричних функцій, можна згадати, що в повсякденному житті є схожі криві.

Наприклад, хвилі на морі мають форму, що нагадує синусоїду. І це не випадково, оскільки багато фізичних величин періодично змінюються і можуть бути описані за допомогою тригонометричних функцій.

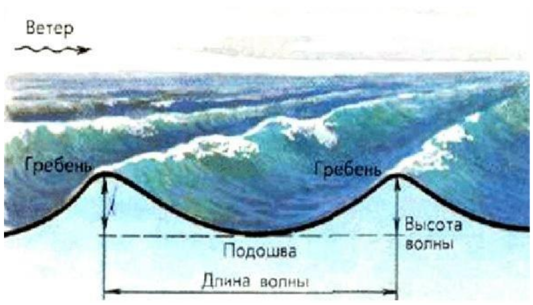


Рис. В.9

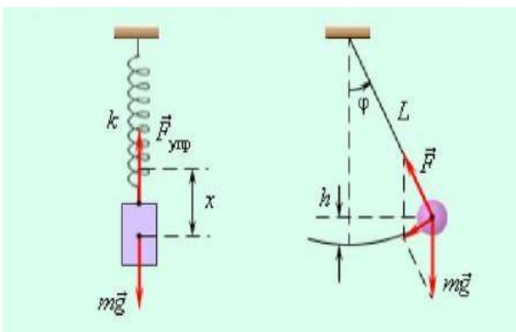


Рис. В.10

Коливання – найпоширеніша форма руху в навколишньому світі та техніці. Коливаються дерева, хвилі під дією вітру, поршні у двигуні автомобіля тощо.

Прикладами простих коливальних систем можуть слугувати вантаж на пружині або математичний маятник.

Коливання, за яких змінення фізичних величин здійснюються за законами косинуса чи синуса, називаються гармонічними коливаннями.

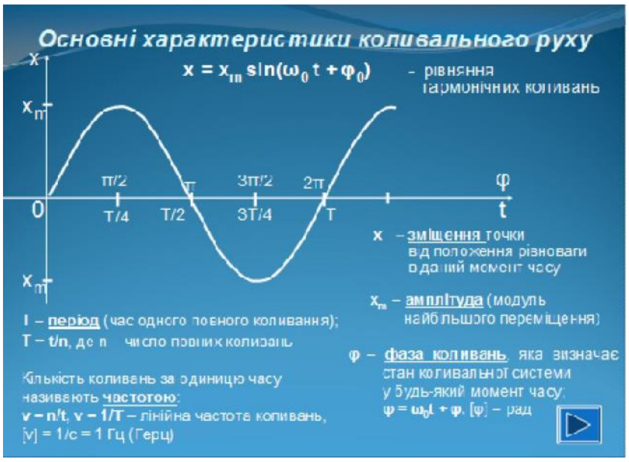


Рис. В.11

Фізика – це наука про природу, водночас вона не може існувати й розвиватися без математики. Як влучно сказав Галілео Галілей: «Велика книга природи написана на мові математики».

Сьогодні ми можемо сказати, що багато природних явищ написані мовою тригонометричних рівнянь.

Як виникає веселка? Північне сяйво? За яким графіком рухається Сонце?

Як тригонометрія може допомогти знайти відповіді на ці питання?».

Проникнення у верхні шари атмосфери Землі заряджених частинок сонячного вітру визначається взаємодією магнітного поля планети з сонячним вітром і називається Північним сяйвом.

Рис. В.12

Сила, що діє на рухому в магнітному полі заряджену частинку називається силою Лоренца. Вона пропорційна заряду частинки і векторному добутку поля і швидкості руху частинки.

Видимий рух Сонця відносно горизонту протягом дня також відбувається за законом синуса. А який графік відтворює положення Сонця на початку сходу й наприкінці його заходу у перший день кожного місяця протягом року?

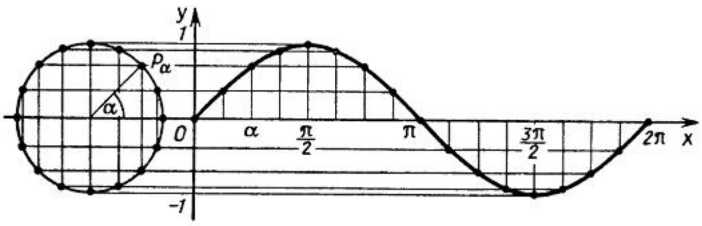


Рис. В.13

Періодичні процеси у природі описав у своєму вірші наш земляк, автор підручників з математики, алгебри та геометрії Григорій Петрович Бевз.

Зима за літом, ніч за днем.

Плюс змінюється мінусом,

Все у природі і в людей йде за законом синуса.

То вверх крокуємо, то вниз, удачі за невдачами,

По синусоїді кудись всі пливемо неначе ми.

Рис. В.14

Камінь кинули на схилі гори під кутом α до її поверхні. Визначте дальність польоту каменя, якщо початкова швидкість каменю дорівнює v_0, кут нахилу гори до горизонту β. Опір повітря не враховувати.

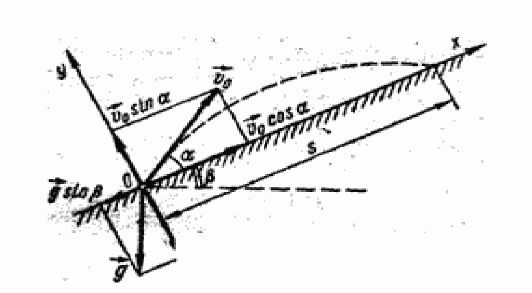


Рис. В.15

М'ячик кидають під гострим кутом до пласкої горизонтальної поверхні землі. Відстань, яку пролітає м'ячик, розраховується за по формулою L =

$=v_0^2/g\sin 2\alpha$ (м), де $v_0 = 11$ м/с – початкова швидкість м’яча, а g – прискорення вільного падіння (g = 10 м/с). При якому найменшому значенні кута α (у градусах) м’яч перелетить річку завширшки 6,05 м?

Біологія

Рухи у тваринному світі відбуваються за законом синуса. Крила птахів, хвости китів, тіло змії рухаючись, відтворюють графік синусоїди.

Згідно з теорією «трьох головних людських біоритмів» кожна людина поєднує в собі набір різних біоритмів: інтелектуальний, емоційний та фізичний. Усі біоритми стартують одночасно в момент народження і відразу ж починають активізуватися і функціонувати, потім применшуються, потім знову посилюються, періодично повертаючись до початкового значення. Усі зміни відбуваються для всіх біоритмів періодично, але не синхронно.

Інтелект, емоції та фізичний стан людини є періодичними процесами, вони мають безпосередній зв‘язок із тригонометрією.

Інтелектуальний ритм має період 33 дні і керує пам’яттю, здатністю до навчання, розумовою активністю, ясністю мислення.

Емоційний ритм триває 28 днів і впливає на почуття, настрій, емоції, душевність.

Фізичний ритм складає 23 дні. Він регулює фізичну активність, силу, швидкість, координацію, опір хворобам, витривалість.

У результаті дослідження, проведеного студентом іранського університету Шираз Вахидом-Резою Аббасі, медики вперше отримали можливість упорядкувати інформацію, яка моделює електричну активність серця або, іншими словами, електрокардіографію. Формула, яка отримала назву тегеранської, була представлена широкій науковій громадськості на 14-й конференції географічної медицини і потім – на 28-й конференції з питань застосування комп’ютерної техніки в кардіології, що відбулася в Нідерландах.

Ця формула становить комплексне алгебраїчно-тригонометричне рівняння, що складається з 8 виразів, 32 коефіцієнтів і 33 основних параметрів, включаючи кілька додаткових для розрахунків у випадках аритмії. Як стверджують медики, ця формула значною мірою полегшує процес опису основних параметрів діяльності серця, прискорюючи тим самим постановку діагнозу і початок власне лікування.

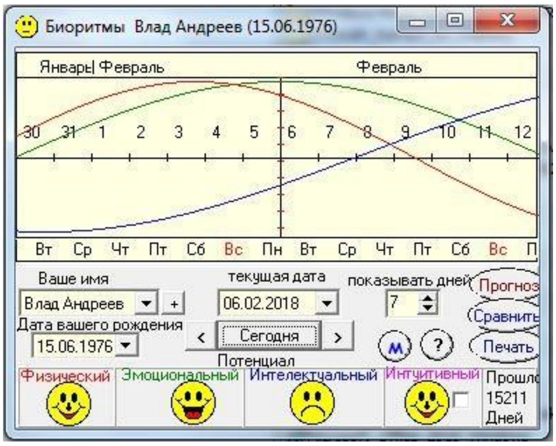


Рис. В.16

Рис. В.17

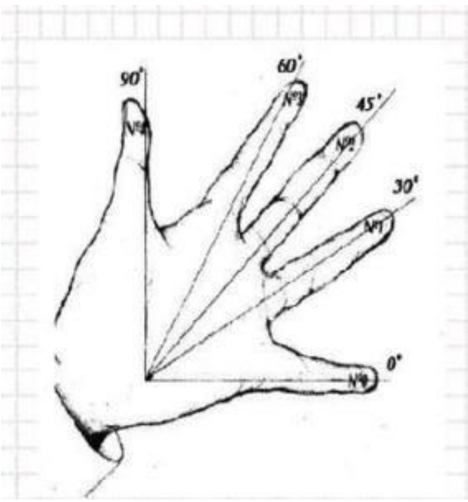


Рис. В.18

Почасти виникає потреба у знанні напам'ять значення cos, sin, tg, ctg для кутів 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0.

Якщо провести лінії, як показано на малюнку, через мізинець та великий палець, то вони перехрестяться у точці, яка називається «місячний бугор». Утворюється кут 90^0. Лінія мізинця утворює кут 0^0, а промені, проведені з «місячного бугра» через безіменний, середній та вказівний пальці, утворюють кути 30^0, 45^0 та 60^0 відповідно.

Гармонічні коливання можна спостерігати слухаючи музику, адже при цьому в повітрі утворюються звукові хвилі; граючи на гітарі, бо струна набуває форми, близької до синусоїди.

Рис. В.19

Фізична культура

Рухи стопи бігуна по твердій поверхні відтворюють графік функції

$y = |\sin x|$

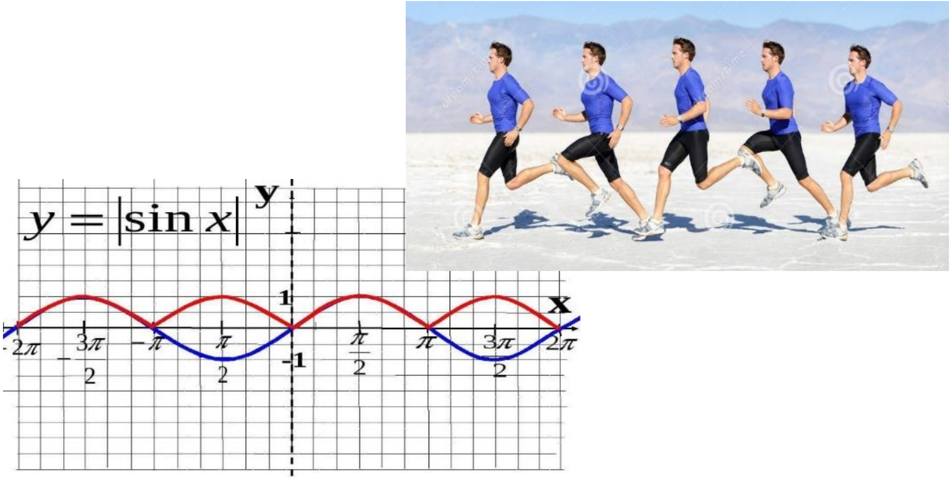


Рис. В.20

Креслення

Для того, щоб створити таки елегантні форми, архітекторам та інженерам необхідно окрім опору матеріалів, матеріалознавства й інших прикладних дисциплін знати тригонометрію. Креслення парасольок Фелікса Канделли.

Рис. В.21

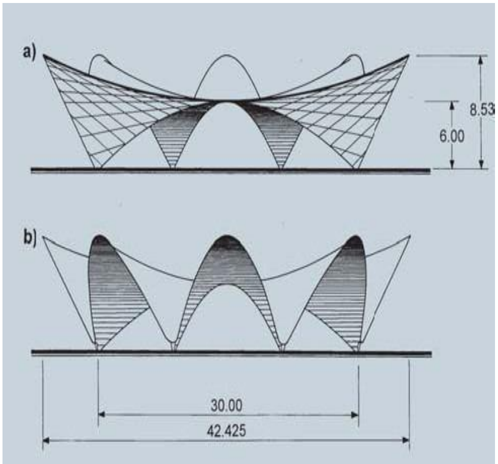


Рис. В.22

Додаток складено на основі джерел [4, 14].