

к 64

О.А. Коновал

Лекції з класичної
та релятивістської
електродинаміки

О.А. Коновал

Лекції з класичної та релятивістської електродинаміки

*Навчальний посібник для студентів
фізичних спеціальностей педагогічних університетів*



Кривий Ріг
"Видавничий дім"
2006

ББК 22.33
К 64
УДК 538.3 (075)

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор Є.Я. Глушко
доктор фізико-математичних наук, професор С.І. Покутній

Коновал О.А.

К 64 Лекції з класичної та релятивістської електродинаміки. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2006. - 202 с.: іл.

ISBN 966-7997-73-1

Лекції охоплюють основні теми курсу «Класична та релятивістська електродинаміка». Значна увага приділяється обґрунтуванню та інтерпретації рівнянь Максвелла в локальній та інтегральній формах. Обговорюються наслідки та приклади використання їх. Детально пояснюються засадні положення релятивістської електродинаміки. В лекціях наголос робиться на якісній та фізичній стороні електродинамічних явищ, а адекватний математичний апарат використовується для ознайомлення з методами теоретичної фізики.

Для студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів.

ББК 22.33

Рекомендовано до видання вченою радою Криворізького державного педагогічного університету (Протокол №3 від 12 жовтня 2006 року)

ISBN 966-7997-73-1

© Коновал О.А., 2006

Передмова	6
-----------------	---

Розділ 1. Рівняння Максвелла в вакуумі як узагальнення дослідних фактів

1. Електромагнітна взаємодія. Предмет і методи класичної електродинаміки. Елементи диференційного та інтегрального числення векторів	8
2. Закон Кулона. Напруженість електричного поля. Принцип суперпозиції	12
3. Теорема Гауса в інтегральній формі. Локальна форма теореми Гауса. Рівняння Пуассона	16
4. Закон Ампера-Грасмана. Закон Біо-Савара та приклади застосування його. Сила Лоренца, сила Ампера	18
5. Принцип суперпозиції для магнітних полів. Магнітне поле, що створюється рухомою зарядженою частинкою. Взаємодія двох струмів. Різні способи означення одиниці магнітної індукції	20
6. Теорема про циркуляцію вектора \vec{B} . Приклади, що ілюструють застосування теореми про циркуляцію вектора \vec{B} . Рівняння Максвелла $\text{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	23
7. Заряд і його властивості. Рівняння неперервності. Струми зміщення, різні способи обґрунтування. Рівняння Максвелла $\text{rot}\vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	29
8. Властивості. струмів зміщення. Приклади застосування рівняння Максвелла $\text{rot}\vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	34
9. Закон електромагнітної індукції та рівняння Максвелла $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Природа е.р.с. індукції і винятки із "правила потоку"	39
10. Соленоїдальність магнітного поля, $\text{div}\vec{B} = 0$	42
11. Система рівнянь Максвелла в локальній та інтегральній формах. Фізичний зміст цих рівнянь	43

Розділ 2. Електромагнітне поле в середовищі

1. Основні положення електронної теорії. Макро- та мікрополя47
2. Поляризація діелектриків. Властивості вектора поляризації. Електричне поле в діелектрику. Теорема Гауса для електричного поля в діелектрику. Вектор електричного зміщення....49
3. Намагнічування магнетиків. Властивості вектора намагнічування. Рівняння Максвелла для магнітного поля в магнетиках. Вектор напруженості магнітного поля56
4. Система рівнянь Максвелла в середовищі.....62
5. Граничні умови для векторів поля.....64

Розділ 3. Закони збереження енергії, імпульсу в системі "заряджені частинки-електромагнітне поле"

1. Закон збереження енергії в електродинамічній системі "заряджені частинки-електромагнітне поле": Вектор Пойнтінга.....71
2. Тепло Джоуля-Ленца і робота сторонніх сил, потік енергії електромагнітного поля в колі постійного струму76
3. Закон збереження імпульсу в системі "заряджені частинки-електромагнітне поле". Густина імпульсу електромагнітного поля. Густина потоків енергії і імпульсу в електромагнітному полі, тиск світла.....82

Розділ 4. Електромагнітні хвилі

1. Хвильові рівняння для векторів поля, механізм розповсюдження електромагнітних хвиль87
2. Розв'язок хвильових рівнянь у вигляді плоских хвиль. Швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль.....89
3. Плоскі монохроматичні хвилі, зв'язок між векторами \vec{E} та \vec{H} в плоскій хвилі, що розповсюджується в однорідному та ізотропному діелектрику.....93
4. Хвильовий пакет, групова та фазова швидкості. Співвідношення невизначеностей97
5. Заломлення та відбивання хвиль на межі поділу двох середовищ. Формули Френеля102

Розділ 5. Електромагнітне поле зарядів, що рухаються довільно ($v \ll c$)

1. Потенціали електромагнітного поля, калібровочна інваріантність потенціалів. Умова Лоренца..... 111
2. Рівняння Даламбера для скалярного та векторного потенціалу та його розв'язок у вигляді потенціалів, що запізнюються. Фізичний зміст запізнення. Принцип причинності в класичній електродинаміці 115
3. Потенціали Лієнара-Віхерта. Поле зарядженої частинки, що рухається з постійною швидкістю..... 119
4. Потенціали, що запізнюються в хвильовій зоні. Поняття про хвильову зону..... 126
5. Електромагнітне поле в хвильовій зоні 131
6. Інтенсивність дипольного випромінювання. Дипольне випромінювання простих систем 133
7. Межі застосування класичної електродинаміки. Електродинаміка та неспроможність планетарної моделі атома. Класичний радіус електрона 138
8. Розсіювання електромагнітних хвиль 142

Розділ 6. Основи релятивістської електродинаміки

1. Передні зауваження..... 147
2. 4-вимірний струм. Закон збереження заряду в коваріантній формі. Відносність розбиття джерел поля на заряди та струми. Явище виникнення об'ємної густини заряду в провіднику зі струмом, що рухається 149
3. Пояснення явища виникнення об'ємної густини заряду в провіднику зі струмом, що рухається за допомогою діаграм Мінковського та на основі елементарних релятивістських уявлень..... 151
4. Релятивістська інтерпретація взаємодії струму та ЗЧ, яка рухається відносно струму..... 154
5. 4-вимірний потенціал. Умова калібровки Лоренца та рівняння Даламбера в коваріантній формі. Електромагнітне поле заряду, що рухається рівномірно і прямолінійно..... 157
6. Електромагнітне поле як антисиметричний 4-вимірний тензор. Рівняння Максвела в тензорній формі 161
7. Перетворення компонент тензора електромагнітного поля при зміні системи відліку..... 165
8. Відносність електричного та магнітного полів..... 167
9. Інваріанти електромагнітного поля. Приклади..... 174

- Додатки 184
- Список використаних джерел 202

Передмова

Основна задача «Лекцій...» полягає у висвітленні фізичних засад класичної та релятивістської електродинаміки.

Як відомо, електродинаміка вивчає властивості електромагнітного поля (ЕМП), чим і як породжується ЕМП, та розповсюджується ЕМП та поведінку рухомих і нерухомих заряджених частинок (ЗЧ) і заряджених тіл в ЕМП.

В «Лекціях» розглянуті самі загальні положення та висновки теорії ЕМП.

Так в основу курсу покладені рівняння Максвелла в вакуумі. Рівняння ЕМП в однорідному та ізотропному середовищі виводяться на основі класичної електронної теорії.

Тому значна увага приділена обґрунтуванню рівнянь Максвелла (Розділ 1).

Огляд навчально-методичної літератури показує, що, в основному, використовуються такі методи обґрунтування рівнянь Максвелла (РМ):

А) Традиційний, оснований на узагальненні фундаментальних експериментальних законів [4, 8, 10, 11].

Б) Рівняння Максвелла формулюються як постулати, справедливості яких підтверджується наслідками, що одержуються при їх застосуванні до реальних фізичних ситуацій [12].

В) Конструювання (постулювання) функції дії S для зарядженої частинки в електромагнітному полі і з її допомогою одержують потім і рівняння руху зарядженої частинки і рівняння електромагнітного поля (РМ) [1, 13, 14]. На наш погляд цей метод обґрунтування РМ не прийнятний з огляду на його абстрактність, формальність і деяку відірваність від тих фізичних уявлень, які формуються у студентів-фізиків педуніверситетів.

З методичної точки зору також очевидно, що і метод постулювання РМ при вивченні електродинаміки не є кращим.

Найбільш придатний для засвоєння і розуміння максвеллівської теорії при її початковому вивченні, на нашу думку, є підхід обґрунтування рівнянь Максвелла на основі експериментально-дослідних законів.

Вважається при цьому, що в основі рівнянь Максвелла лежить сукупність фундаментальних експериментальних законів: закон Кулона, закон Біо-Савара-Лапласа, закон електромагнітної індукції, закон збереження заряду та інші.

Традиційним метод обґрунтування рівнянь Максвелла (РМ) є найбільш прийнятний при вивченні електродинаміки з огляду і на принцип наступності в навчанні і на безпосередній зв'язок з експериментальними даними. Він також дозволяє, до деякої міри, ознайомити студентів з методами та методологією одержання наукових результатів. З іншого

боку і сам процес наукового відкриття (саме як виходячи з експериментальних фактів одержують чи формулюють фундаментальний фізичний закон) є повчальним та цікавим.

Такий шлях обґрунтуванню рівнянь Максвелла хоча і являється наглядним і достатньо прямолінійним – експериментальні закони → теорія – по суті не відповідає ні реальному стану речей ні історичному розвитку теорії ЕМП.

В той же час А. Айнштайн стверджував, що «не існує ніякого індуктивного методу, який міг би вести до фундаментальних понять фізики» [1, с. 213]. «...пізнання не може розцвісти з голої емпірії. Такий розквіт можливий тільки з порівняння того, що придумане, з тим, що спостерігається» [1, с. 124]. «Фізика є логічною системою мислення, що розвивається, основи якої можна одержати не виділенням їх якими-небудь індуктивними методами з досліду, а лише вільною вигадкою» [1, с. 226].

В другому розділі детально обґрунтовуються рівняння Максвелла в однорідному та ізотропному середовищі.

Третій та четвертий розділи посібника присвячені одержанню та поясненню ряду важливих наслідків системи рівнянь Максвелла.

В п'ятому розділі розглядається один із самих загальних методів розв'язку РМ – метод електромагнітних потенціалів. Також достатньо детально описані властивості дипольного випромінювання та межі застосування класичної електродинаміки.

Релятивістське, 4-вимірне подання електродинаміки із значним числом прикладів приведено в шостому розділі посібника. Причому наголос робиться на поясненні явища відносності електричного і магнітного полів.

РОЗДІЛ 1. РІВНЯННЯ МАКСВЕЛА В ВАКУУМІ ЯК УЗАГАЛЬНЕННЯ ДОСЛІДНИХ ФАКТІВ



1.1. Електромагнітна взаємодія. Предмет і методи класичної електродинаміки. Елементи диференційного та інтегрального числення векторів

Електромагнітна взаємодія – це особливий вид силової взаємодії між частинками, що несуть електричний заряд. Оскільки електромагнітна взаємодія найбільш повно описується в термінах електричного та магнітного полів, які створені зарядженими частинками (ЗЧ), то електромагнітна взаємодія – це силова взаємодія між ЗЧ та електромагнітним полем, яке створено цими та іншими зарядженими частинками.

Електромагнітне поле – це особливий вид матерії, який характеризується взаємопов'язаними та взаємозумовленими електричними та магнітними полями.

Основним змістом і завданням класичної електродинаміки є формулювання основних законів електромагнітного поля (рівнянь Максвелла) в локальній формі та застосування цих законів для аналізу електромагнітних явищ. Локальний закон – це закон, який пов'язує в собі величини, що відносяться до однієї і тієї ж точки простору і до одного і того ж моменту часу.

В основі класичної електродинаміки, з точки зору ортодоксальної методики, лежать фундаментальні дослідні факти: закон Кулона, закон Ампера-Грассмана, закон Біо-Савара, закон збереження заряду, закон електромагнітної індукції. Закон, принцип, дослідний факт називають фундаментальним, якщо він не впливає як логічний наслідок із інших положень, принципів або експериментів.

Предметом вивчення електродинаміки являється ЕМП та взаємодія ЕМП з зарядженими частинками.

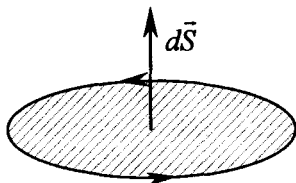
До методів класичної електродинаміки слід віднести векторний та тензорний аналіз, методи математичної фізики, математичний аналіз, а також експериментальні методи дослідження ЕМП.

В основі означення характеристик електричного та магнітного полів лежить силова дія електромагнітного поля на нерухомі ЗЧ та струми. Напруженість електричного та індукція магнітного полів $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ можуть змінюватись в просторі і в часі. І, оскільки, це векторні

величини, то для опису цих змін використовується векторна алгебра і диференціальне та інтегральне числення векторів. При цьому дуже важливими величинами є циркуляція та потік векторного поля.

Означення: Потік векторного поля \vec{a} через нескінченно малу поверхню $d\vec{S}$ дорівнює скалярному добутку вектора \vec{a} на $d\vec{S}$:

$$dN = \vec{a} d\vec{S}, \quad (1.1)$$



де $d\vec{S}$ - вектор елементарної площадки: чисельно $|d\vec{S}|$ дорівнює величині нескінченної малої поверхні dS , а по напрямку $d\vec{S}$ перпендикулярний до цієї елементарної поверхні. Причому, напрямок обходу контуру, що обмежує елементарну площадку і вектор $d\vec{S}$ утворюють правий гвинт.

Означення: Циркуляцією векторного поля \vec{a} по замкненому контуру L називається інтеграл:

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} \quad (1.2)$$

Приклад 1.1. Знайти циркуляцію вектора напруженості однорідного поля тяжіння по контуру 1234, рис. 1.1.

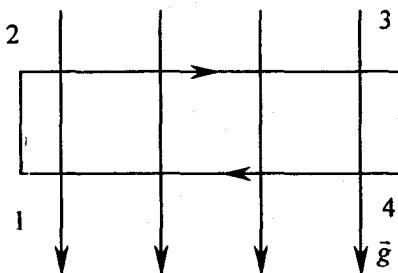


Рис. 1.1. Циркуляція однорідного поля \vec{g} по контуру 1234 дорівнює нулю

Розв'язання: Виходячи із взаємної орієнтації елемента довжини контуру $d\vec{l}$ і вектору \vec{g} в кожній точці контуру 1234 одержуємо:

$$\oint_{l_4} \vec{g} d\vec{l} = \int_2^3 \vec{g} d\vec{l} + \int_4^1 \vec{g} d\vec{l} = gl_{23} - gl_{41} = 0 \quad (1.3)$$

Якщо циркуляція векторного поля дорівнює нулю, то кажуть, що поле потенційне. Застосування теореми Стокса до результату (1.3) дає диференціальну умову потенційності векторного поля:

$$\text{rot} \vec{g} = 0 \quad (1.4)$$

Теорема. Якщо в просторі задане скалярне поле $\phi(\vec{r})$ (наприклад, деяке температурне поле t^0 , поле електричного потенціалу, тиску і т.д.), то похідна цього скалярного поля по деякому напрямку $\vec{\tau}$ в просторі дорівнює проекції градієнта цього поля на вибраний напрямок $\vec{\tau}$.

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \text{grad}_{\vec{\tau}} \phi \quad (1.5)$$

Дійсно, оскільки $d\vec{\tau} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$, а повний диференціал функції $\phi(x, y, z)$ дорівнює:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz,$$

то повний диференціал функції $\phi(x, y, z)$ можна подати у вигляді:

$$d\phi = \text{grad} \phi d\vec{\tau} = \text{grad}_{\vec{\tau}} \phi d\tau, \quad (1.5a)$$

де

$$\text{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \quad (1.6)$$

Тоді із (1.5a) одержуємо (1.5).

Таким чином, фізичний зміст градієнту скалярного поля: це вектор, в напрямку якого скалярне поле зростає найшвидше.

Може бути показано, що нескінчений малий потік довільного векторного поля \vec{a} через поверхню нескінченно малого кубика об'ємом $dV = dx dy dz$ дорівнює:

$$dN = \vec{a} d\vec{S} = \text{div} \vec{a} dV,$$

де диференціальна операція $\text{div} \vec{a}$ в декартовій системі координат визначається так:

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (1.7)$$

Якщо просумувати всі dN через поверхню, яка охоплює деякий макроскопічний об'єм, то одержимо теорему Гауса:

$$\oint \vec{a} d\vec{S} = \int \text{div} \vec{a} dV \quad (1.8)$$

Виходячи з теореми Гауса можна надати фізичного змісту операції $\operatorname{div} \vec{a}$. Взявши dV настільки малим, що в його межах величина $\operatorname{div} \vec{a}$ залишається сталою, одержуємо:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_S \vec{a} d\vec{S}}{\Delta V}$$

Дивергенція довільного вектора \vec{a} , $\operatorname{div} \vec{a}$, це межа, до якої прямує в даній точці поля відношення потоку векторного поля \vec{a} через довільну поверхню S , що охоплює цю точку до величини об'єму ΔV обмеженого цією поверхнею S при $\Delta V \rightarrow 0$.

Величину $\operatorname{div} \vec{a}$ ще називають потужністю потоку векторного поля.

Теорема. Циркуляція векторного поля по нескінченному малому контуру C_1 дорівнює потоку ротора векторного поля \vec{a} через поверхню, яка спирається на цей контур.

$$\int_{C_1} \vec{a} d\vec{l} = \int_{S_1} \operatorname{rot} \vec{a} d\vec{S} \quad (1.9)$$

Якщо розглянути макроскопічний контур L , то циркуляція векторного поля \vec{a} по цьому контуру L визначається теоремою Стокса:

$$\int_L \vec{a} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{a} d\vec{S} \quad (1.10)$$

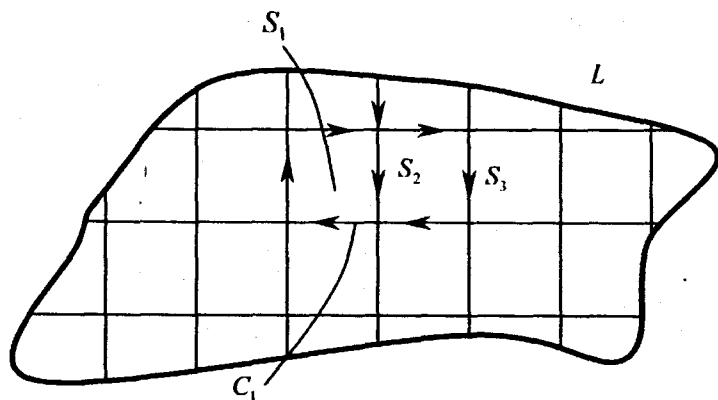


Рис. 1.2. До обґрунтування теореми Стокса

де $\operatorname{rot} \vec{a}$ в декартовій системі координат дорівнює:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (1.11)$$

З теореми Стокса одержуємо величину нормальної складової $rot \bar{a}$:

$$rot_n \bar{a} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\int_L \bar{a} d\bar{l}}{\Delta S}$$

Якщо ввести векторний оператор "набла" ∇ , то диференційні операції градієнта, дивергенції, ротора можна подати таким чином:

$$grad \varphi = \nabla \cdot \varphi \quad (1.12)$$

$$div \bar{a} = \nabla \cdot \bar{a} \quad (1.13)$$

$$rot \bar{a} = [\nabla \cdot \bar{a}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial & \partial & \partial \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \quad (1.14)$$

А диференційні операції другого порядку з допомогою оператора "набла" подаються так:

$$div grad \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi$$

$$rot rot \bar{a} = [\nabla \cdot [\nabla \cdot \bar{a}]] \quad (1.15)$$

$$div rot \bar{a} = \nabla \cdot [\nabla \cdot \bar{a}]$$

Деякі формули векторної алгебри та векторного аналізу:

$$[\bar{a}[\bar{b}\bar{c}]] = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b})$$

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi \cdot \bar{a}) &= div(\varphi \cdot \bar{a}) = \varphi div \bar{a} + \bar{a} \nabla \varphi \\ rot(\varphi \cdot \bar{a}) &= \varphi rot \bar{a} - [\bar{a} \nabla \varphi] \\ div[\bar{a}\bar{b}] &= \bar{b} rot \bar{a} - \bar{a} rot \bar{b} \end{aligned} \quad (1.17)$$

1.2. Закон Кулона. Напруженість електричного поля.

Принцип суперпозиції

Виявляється, що напруженість електричного та індукція магнітного полів $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ характеризуються певними властивостями та закономірностями. Ці властивості формулюються шляхом узагальнення деяких результатів та наслідків, що випливають із вище названих фундаментальних дослідних законів. Тому зупинимось на обґрунтуванні ряду закономірностей, які є наслідками фундаментальних законів.

Закон Кулона визначає силу взаємодії між двома точковими зарядженими частинками:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \quad (1.18)$$

де \vec{r} - радіус-вектор, який визначає положення однієї ЗЧ відносно іншої.

Якщо ввести напруженість електричного поля \vec{E}_1 :

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \quad (1.19)$$

то сила, що діє на другий заряд може бути подана так:

$$\vec{F} = q_2 \cdot \vec{E}_1 \quad (1.20)$$

Поки ми залишаємося в рамках статички (електростатички, магнітостатички, гравістатички) поняття поля носить умовний, формальний характер. Це формальне поняття, як і означення величин, з допомогою яких його описують. Це поле (напруженість поля, потенціал поля), вводять тільки з міркувань зручності опису взаємодій між частинками. Наприклад, стан системи та її енергія в електростатичці однозначно визначається величинами зарядів та їх розташуванням в даний момент часу. Тому, зокрема в електростатичці і можна вводити поняття потенціальної енергії, значення якої залежить від миттєвої конфігурації ЗЧ. Тобто, по суті, взаємодія в рамках будь-якої статички передається з нескінченною швидкістю. Тобто, ЗЧ взаємодіють на відстані, без проміжного агента, "посередника", який передає взаємодію. Виявляється, що на мові таких формальних величин (потенціали) вдається сформулювати надзвичайно загальний і ефективний метод розв'язування відповідних задач (диференційні рівняння в частинах похідних). Таким чином, введення поняття напруженості поля, потенціалу поля в електростатичці ще не означає, що ми повністю реалізували концепцію поля (теорія близькодії). В рамках електростатички, магнітостатички всі закони і формули записуються, формулюються, насправді, на уявленнях дальності. І тільки при переході до змінних полів виявляється, що поняття поля, введені таким чином, адекватно відображають фізичну реальність. Тобто, саме поле є фізична реальність. Тому електромагнітне поле в загальному випадку уже не може трактуватися як математичний образ.

Принцип суперпозиції: Сумарна напруженість електричного поля в деякій точці простору дорівнює сумі напруженостей електричних полів, що створюються окремими точковими зарядами в цій точці:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

Якщо електричне поле створене не сукупністю електричних точкових зарядів, а деяким розподілом зарядів, то сумарне поле визначається:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}, \quad (1.21)$$

де $d\vec{E}$ - напруженість поля, що створюється в деякій точці простору зарядом dq , який знаходиться в нескінченно малому об'ємі dV . Розподіл зарядів описується з допомогою поверхневої, лінійної, об'ємної густин зарядів, σ, τ, ρ , які, відповідно, визначаються:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}; \tau = \frac{dq}{dl}; \rho = \frac{dq}{dV} \quad (1.22)$$

Приклад 1.2. Використовуючи закон Кулона та принцип суперпозиції записати вираз для вектора \vec{E} , що створюється неперервним розподілом зарядів, рис. 1.3.

Розв'язання: Виділимо нескінченно малий об'єм dV' , тоді $dq = \rho \cdot dV'$ - величина заряду в об'ємі dV' . На рис. 1.3. \vec{R} - радіус-вектор, проведений від об'єму dV' до точки поля P , \vec{r} - радіус-вектор, проведений від початку координат системи відліку до точки поля, \vec{r}' - радіус-вектор, що визначає положення джерела поля $dq = \rho \cdot dV'$. Згідно закону Кулона (1.2) можемо записати:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{R} = \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{R}$$

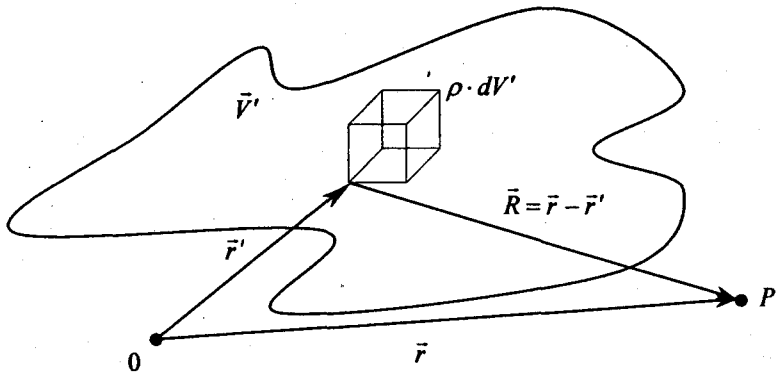


Рис. 1.3. Напруженість електричного поля, яке створюється неперервним розподілом зарядів, в довільній точці простору P визначається на основі закону Кулона та принципу суперпозиції

$$d\vec{E} = \frac{\rho dV'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

З урахуванням *принципу суперпозиції* для неперервного розподілу зарядів, сумарна напруженість електричного поля в точці P , набуває вигляду:

$$\vec{E}_P = \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.23)$$

В конкретних задачах знаходять компоненти векторних полів E_x, E_y, E_z , а потім і вектор поля \vec{E} .

Приклад 1.3. Нехай заряд рівномірно розподілений по кільцю, радіус якого R_0 . Знайти напруженість електричного поля на осі кільця. Лінійна густина заряду τ .

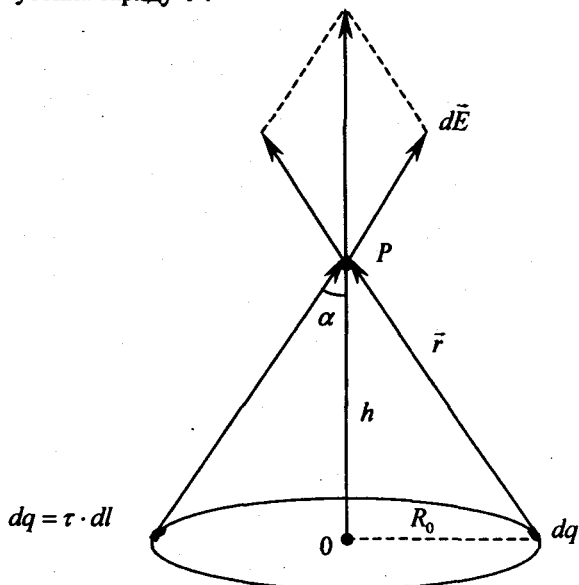


Рис. 1.4. Знаходження напруженості електричного поля на осі зарядженого кільця

Розв'язання: Використаємо закон Кулона і принцип суперпозиції.

Очевидно, що вектор напруженості електричного поля в точці P направлений по осі кільця. А величина його dE_n , від елемента заряду $dq = \tau dl$ дорівнює:

$$dE_n = dE \cdot \cos \alpha = dE \cdot \frac{2h}{\sqrt{R_0^2 + h^2}},$$

де

$$dE = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 (R_0^2 + h^2)},$$

тому

$$dE_n = \frac{2h\tau dl}{4\pi\epsilon_0 (R_0^2 + h^2)^{3/2}}$$

I, нарешті, сумарне поле знайдемо шляхом інтегрування по довжині кільця:

$$E_h = \int dE_h = \frac{2h\tau \cdot \overbrace{2\pi R_0}^l}{4\pi\epsilon_0 (R_0^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{2hq}{4\pi\epsilon_0 (R_0^2 + h^2)^{3/2}}, \quad (1.24)$$

де $q = \tau \cdot 2\pi R_0$ - величина заряду розподіленого на кільці.

1.3 Теорема Гауса в інтегральній формі. Локальна форма теореми Гауса

Знайдемо потік вектора напруженості електричного поля \vec{E} , що створюється точковою зарядженою частинкою (ЗЧ), величина заряду якої q , через довільну замкнену поверхню S , яка охоплює цей заряд.

Для цього на поверхні S , виберемо елементарну поверхню $d\vec{S}$, рис. 1.5. Тоді очевидно, що цей потік дорівнює:

$$N = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \cdot d\vec{S} = q \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} d\vec{S}$$

де $\frac{\vec{r}}{r} d\vec{S} = dS'$ - це величина проекції елементарної площадки $d\vec{S}$ на площину, що перпендикулярна \vec{r} .

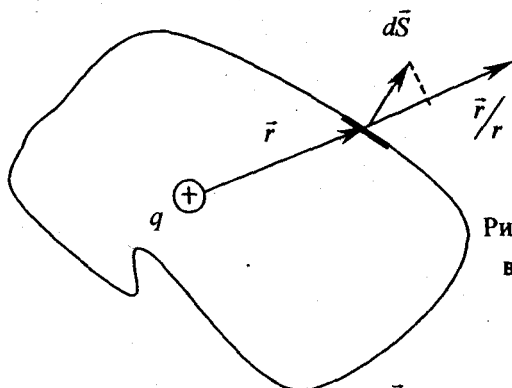


Рис. 1.5. Знаходження потоку вектора \vec{E} через довільну замкнену поверхню S

Тоді сумарний потік вектора \vec{E} дорівнює:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = q \oint_S \frac{dS'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \oint_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Принцип суперпозиції дозволяє узагальнити цей результат на заряд будь-якої величини та розподілу. І тоді одержуємо теорему Гауса:

Потік вектора напруженості електричного поля \vec{E} через будь-яку замкнену поверхню, що охоплює довільний заряд, дорівнює величині цього заряду, поділеній на ϵ_0 .

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.25)$$

Наслідки.

1. Якщо поверхня S не охоплює заряд q , то потік вектора \vec{E} через цю поверхню дорівнює нулю.

2. На сумарну величину потоку не впливає рух зарядів в об'ємі, що обмежується поверхнею S .

3. Оскільки потік вектора \vec{E} через замкнену поверхню визначається сумарною величиною заряду, що знаходиться всередині цієї поверхні, то при переміщенні ЗЧ всередині поверхні, напруженість електричного поля зміниться в кожній точці поверхні, а потік вектора \vec{E} залишиться незмінним.

Теорема Гауса використовується для знаходження напруженості полів, які створюються симетричним розподілом зарядів.

Наприклад, таких. Поле рівномірно розподіленого заряду по нескінченно плоскій поверхні, поле зарядженої нитки, поле рівномірно зарядженої по поверхні, або по об'єму кулі, рівномірно зарядженого по об'єму, або по поверхні циліндра і т.п.

Використовуючи математичну теорему Гауса

$$\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{a} dV,$$

сформулюємо одне з рівнянь Максвела в локальній формі:

$$\int \text{div} \vec{E} \cdot dV = \int_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\int \text{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$$

Оскільки об'єм інтегрування довільний, то рівність інтегралів означає і рівність підінтегральних виразів.

Тобто, теорема Гауса в локальній формі (диференціальній формі) має вигляд:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.26)$$

Виходячи з симетрії задачі, теорема Гауса для знаходження поля, що створюється розподіленими зарядами.

1. Виходячи з симетрії задачі треба вибрати замкнену поверхню.

2. Знайти потік вектора \vec{E} через цю поверхню.

3. Знайти величину заряду, що міститься в об'ємі, обмеженому цією поверхнею.

4. Розв'язати відповідне алгебраїчне рівняння і знайти значення напруженості електричного поля.

1.4. Закон Ампера-Грасмана. Закон Біо-Савара та приклади застосування його. Сила Лоренца, сила Ампера

Як стверджується в деяких посібниках з електродинаміки, в результаті узагальнення дослідів Ампера по визначенню сил взаємодії між елементами струмів, було одержано такий результат:

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 \cdot i_1 \cdot i_2}{4\pi \cdot r_{12}^3} \cdot [d\vec{l}_2 [d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12}]] \quad (1.27)$$

Ця формула Ампера-Грасмана, де $i_1 d\vec{l}_1$ - елемент 1-го струму; $i_2 d\vec{l}_2$ - елемент 2-го струму, \vec{r}_{12} - радіус-вектор, що визначає положення другого елемента струму відносно першого (рис. 1.6.).

Формула Ампера-Грасмана, як бачимо, визначає силу взаємодії двох елементів струму. $d\vec{F}_{12}$ - сила, що діє на другий елемент струму збоку першого.

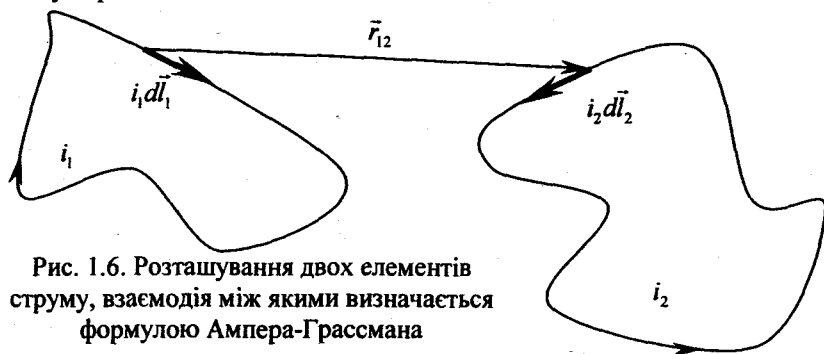


Рис. 1.6. Розташування двох елементів струму, взаємодія між якими визначається формулою Ампера-Грасмана

А сила, що діє на перший елемент струму збоку другого $d\vec{F}_{21}$ очевидно дорівнює:

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 \cdot i_1 \cdot i_2}{4\pi r_{21}^3} \cdot [d\vec{l}_1 \cdot [d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{21}]]$$

Взаємодія відбувається через магнітне поле, тому закон Ампера-Грасмана в польовому трактуванні набуває вигляду:

$$d\vec{F}_{12} = i_2 [d\vec{l}_2 \cdot d\vec{B}_1], \quad (1.28)$$

де $d\vec{B}_1$ - магнітне поле, що створене першим елементом струму в точці знаходження другого елемента струму. Із порівняння (1.27) та (1.28), впливає вираз для $d\vec{B}_1$:

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i}{4\pi r_{12}^3} \cdot [d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12}] \quad (1.29)$$

Узагальнюючи (1.29) на довільний елемент постійного лінійного струму одержуємо закон Біо-Савара:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^3} \cdot [d\vec{l} \cdot \vec{r}], \quad (1.30)$$

де \vec{r} - радіус-вектор, проведений від елемента струму $id\vec{l}$ в дану точку поля.

Закон Біо-Савара (1.30) визначає величину та напрямок індукції магнітного поля, що створюється елементом струму $id\vec{l}$ в довільній точці простору.

Але спочатку повернемося до формули (1.28).

Якщо будь-який елемент струму $id\vec{l}$ знаходиться в довільному магнітному полі з індукцією \vec{B} , то узагальнюючи результат (1.28) приходимо до формули Ампера:

$$d\vec{F} = i \cdot [d\vec{l} \cdot \vec{B}] \quad (1.31)$$

Може бути показано, що для металевих лінійних провідників має місце таке співвідношення:

$$i \cdot d\vec{l} = q \vec{v} N \quad (1.32)$$

де N - це кількість зарядів q , які реалізують елемент струму $id\vec{l}$, \vec{v} - дрейфова швидкість цих позитивних зарядів.

Тоді сила, що діє на окрему ЗЧ:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{N} = q [\vec{v} \cdot \vec{B}] \quad (1.33)$$

Це сила Лоренца, сила, що діє на окремий заряд q , який рухається з швидкістю \vec{v} в магнітному полі з індукцією \vec{B} .

Розглянемо задачу на використання закону Біо-Савара.

Приклад 1.4. Розглянемо довгий прямолінійний провідник зі струмом i . Знайдемо магнітне поле, яке створюється цим провідником в довільній точці поля, рис. 1.7.

Розв'язання: Нескінченне мале значення індукції магнітного поля, що створюється нескінченно малим елементом струму $id\vec{l}$ в точці P , згідно закону Біо-Савара, дорівнює:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^3} \cdot dl \cdot r \cdot \sin \theta$$

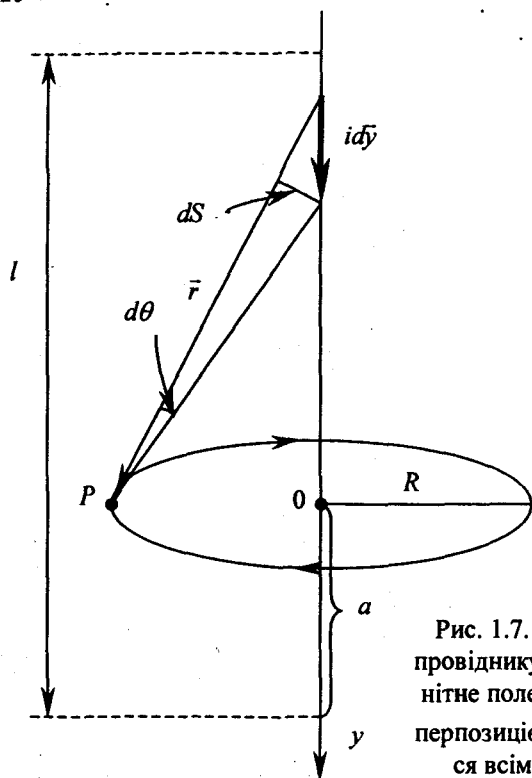


Рис. 1.7. По лінійному довгому провіднику протікає струм i . Магнітне поле в точці P являється суперпозицією $d\vec{B}$, що породжуються всіма елементами струму

Враховуючи, що $\frac{R}{r} = \sin\theta$ (див. рис. 1.7.), $\frac{dS}{dl} = \sin\theta$, а з іншого боку $dS = r \cdot d\theta$, з допомогою принципу суперпозиції одержуємо:

$$B = \int dB = \int_0^\pi \frac{\mu_0 i \cdot dl \cdot r \cdot \sin\theta}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \quad (1.34)$$

1.5. Принцип суперпозиції для магнітних полів.

Магнітне поле, що створюється рухомою зарядженою частинкою. Взаємодія двох струмів.
Різні способи означення одиниці магнітної індукції

Оскільки закон Біо-Савара визначає магнітне поле, що створюється елементом струму, i , припускаючи, що всі заряди, які реалізують елемент струму, рухаються з однаковою швидкістю \vec{v} , ми можемо знайти, користуючись принципом суперпозиції, магнітне поле, що створюється одним зарядом, що рухається зі швидкістю \vec{v} .

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 q N}{4\pi r^3} \cdot [\vec{v} \cdot \vec{r}] = \vec{B}_1 \cdot N \quad (1.35)$$

Тоді індукція магнітного поля, яке створюється рухомою ЗЧ визначається формулою:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 \cdot q}{4\pi r^3} \cdot [\vec{v} \cdot \vec{r}] = \mu_0 \varepsilon_0 \left[\vec{v} \cdot \frac{q\vec{r}}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \right] = \mu_0 \varepsilon_0 [\vec{v} \cdot \vec{E}] \quad (1.36)$$

де \vec{E} напруженість електричного поля, що створюється зарядом q в даній точці поля.

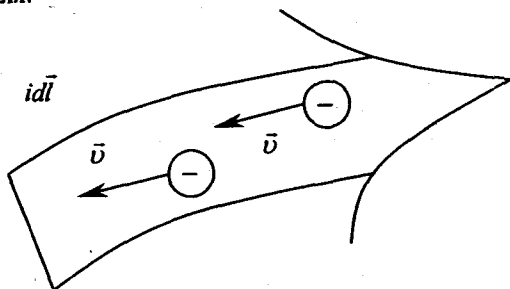


Рис. 1.8. Елемент струму $i d\vec{l}$ реалізують рухомі ЗЧ в межах провідника довжиною dl , $i \cdot d\vec{l} = q \vec{v} N = \vec{j} dV$

Крім всього іншого, формулу (1.36) слід розуміти так, що магнітне поле створюється рухомим електричним полем, яке переміщується в просторі з швидкістю \vec{v} :

$$\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 [\vec{v} \cdot \vec{E}] \quad (1.37)$$

Ця формула справедлива також і для зарядів, що рухаються з релятивістськими (великими) швидкостями. Але для таких швидкостей напруженість електричного поля ЗЧ буде визначатись не таким співвідношенням:

$$\vec{E} = \frac{q \cdot \vec{r}}{4\pi \varepsilon_0 r^3},$$

справедливим при $v \ll c$ ($\beta \ll 1$), а наступним:

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}(1-\beta)^2}{4\pi \varepsilon_0 \cdot r^3 (1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.38)$$

де $\beta = \frac{v}{c}$, θ - кут між вектором швидкості \vec{v} і радіус-вектором \vec{r} , проведеним від миттєвого положення ЗЧ у відповідну точку поля.

Рисунки, що приведені нижче, пояснюють деякі властивості векторів \vec{E} та \vec{B} електромагнітного поля РЗЧ: вектор \vec{E} по напрямку співпадає з радіус-вектором \vec{r} , вектор \vec{B} перпендикулярний і радіус-вектору \vec{r} і вектору \vec{E}

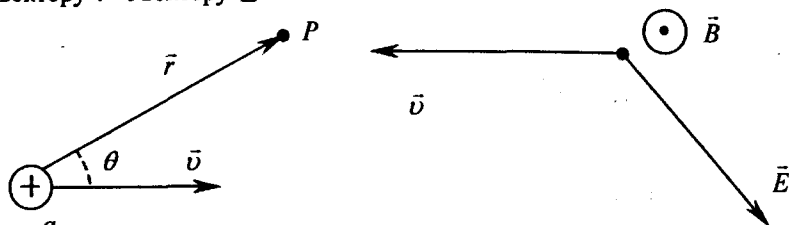


Рис. 1.9. Взаємна орієнтація векторів поля \vec{E} та \vec{B} електромагнітного поля рухомої ЗЧ

Одиниці та розмірність індукції магнітного поля. Розглянемо два паралельні лінійні провідники зі струмами і знайдемо силу магнітної взаємодії між ними, що приходить на одиницю довжини.

Згідно (1.31) та (1.34) ця сила дорівнює, рис. 1.10:

$$\Delta \vec{F} = i_2 \cdot [\Delta \vec{l} \cdot \vec{B}_1] = i_2 \cdot \left[\Delta \vec{l} \cdot \frac{\mu_0 i_1}{2\pi R} \vec{n} \right]$$

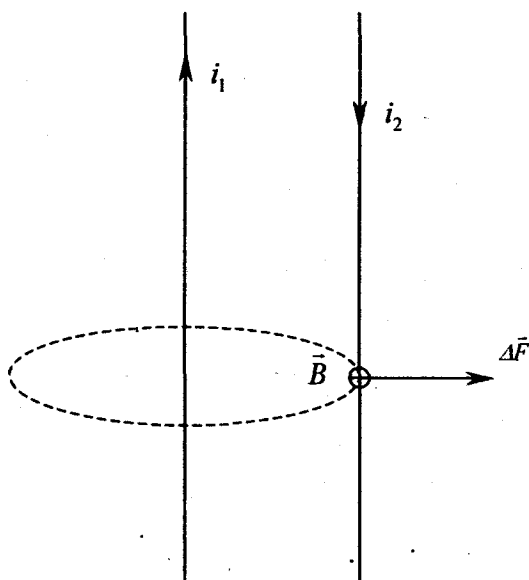


Рис. 1.10. Взаємодія паралельних лінійних провідників зі струмами

Тоді сила, яка приходить на одиницю довжини одного з провідників, дорівнює:

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{\mu_0 \cdot i_1 \cdot i_2}{2\pi R} \quad (1.39)$$

Ця формула використовується для означення одиниці сили струму в системі одиниць СІ: якщо по паралельним лінійним провідникам, що знаходяться на віддалі l_m один від одного, протікає однаковий за величиною струм i і сила магнітної взаємодії, яка припадає на l_m довжини одного з них, дорівнює $2 \cdot 10^{-7} H$, то по провідникам протікає струм силою в $1A$.

Одиниця індукції магнітного поля може бути введена на основі будь-якої формули в яку входить величина B . Наприклад, використовуючи одну з формул (1.30) (1.31) (1.33) (1.34).

Зокрема, використовуючи (1.31), можна сказати, якщо на відрізок $\Delta l = l_m$ провідника зі струмом $i = 1A$ в магнітному полі діє максимальна сила $\Delta F = 1H$, то індукція цього магнітного поля дорівнює $1Tл$:

$$1Tл = \frac{1H}{1A \cdot l_m}$$

Визначальною формулою може бути також означення магнітного потоку:

$$\Delta \Phi = B \cdot \Delta S$$

$$1Bб = 1Tл \cdot 1м^2$$

1.6. Теорема про циркуляцію вектора \vec{B} . Приклади, що ілюструють теореми про циркуляцію \vec{B} .

Рівняння Максвелла $rot \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Знайдемо циркуляцію вектора \vec{B} по контуру довільною форми, який лежить в площині, перпендикулярній струму і охоплює цей струм, рис. 1.11.

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \vec{n} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_L \frac{\vec{n} \cdot d\vec{l}}{R} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_{2\pi} d\alpha = \mu_0 i,$$

де \vec{n} - одиничний вектор в напрямку \vec{B} , $d\alpha = \frac{\vec{n} \cdot d\vec{l}}{R} = \frac{dl \cdot \cos \gamma}{R}$ - нескінчений малий кут, під яким видно елементарний відрізок $d\vec{l}$ контуру L (див. рис. 1.11.).

Узагальнюючи цей результат на постійні струми довільної конфігурації, одержуємо *теорему про циркуляцію вектора \vec{B}* :

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot i \quad (1.40)$$

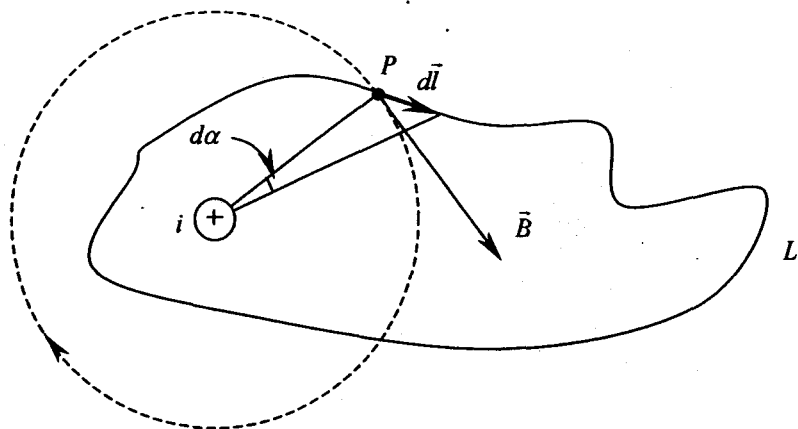


Рис. 1.11. Знаходження циркуляції вектора \vec{B} по контуру довільною форми

Циркуляція вектора магнітної індукції по довільному замкненому контуру, дорівнює μ_0 помноженому на алгебраїчну силу струмів, які протікають через поверхню, що спирається на цей контур.

Приміром, розглянемо контур L , що охоплює три провідника з струмами i_1 , i_2 , i_3 , рис. 1.12. Алгебраїчна сума струмів, що протікають через поверхню, яка спирається на контур L дорівнює $i = i_1 - i_2 + i_3$. І тому циркуляція вектора \vec{B} по контуру довільною форми L дорівнює $\mu_0 i = \mu_0 (i_1 - i_2 + i_3)$, хоча значення вектора \vec{B} в кожній точці контуру різне і являється сумою $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$.

Теорема про циркуляцію означає, що циркуляція \vec{B} визначається тільки алгебраїчною силою струмів, що охоплюються контуром L .

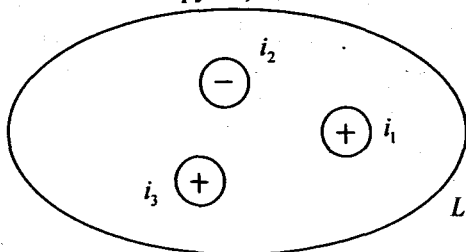


Рис. 1.12. Циркуляцію вектора \vec{B} по контуру довільною форми визначається тільки алгебраїчною сумою струмів, що протікають через поверхню, яка спирається на контур L

Теорема про циркуляцію використовується для знаходження магнітних полів, що створюються симетричними розподілами струмів.

Методика використання теореми про циркуляцію вектора для знаходження індукції магнітного поля.

1. Виходячи з симетрії задачі, вибираємо форму і розташування контуру L .

2. Знаходимо циркуляцію вектора \vec{B} : $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$

3. Знаходимо алгебраїчну силу струму i , що проходить через поверхню, обмежену цим контуром.

4. Розв'язуємо відповідне алгебраїчне рівняння.

Розглянемо декілька способів обґрунтування рівняння Максвелла:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (1.41)$$

А) Найбільш поширений і простий спосіб одержання (1.41) полягає використанні теореми про циркуляцію вектора \vec{B} , $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i$, та поширенні її на випадок довільного розподілу об'ємних струмів, що характеризуються об'ємною густиною струму $\vec{j}(\vec{r})$. Тобто, теорема (1.40) в такому випадку набуває вигляду:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (1.42)$$

Перепишемо (1.42) використовуючи теорему Стокса:

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_S \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}; \\ \int_S (\text{rot} \vec{B} - \mu_0 \vec{j}) \cdot d\vec{S} &= 0 \end{aligned}$$

звідки і одержуємо, внаслідок довільності поверхні S , рівняння Максвелла

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Слід зауважити, що сама теорема (1.40) аналітично виводиться на основі класичного закону Біо-Савара для лінійних струмів (при застосуванні (1.30), як правило, тільки для достатньо довгого провідника, по якому протікає постійний струм силою i).

Б) Другий спосіб обґрунтування (1.41) полягає в безпосередньому знаходженні операції ротора від індукції магнітного поля $\vec{B}(\vec{r})$, яке обчислюється згідно закону Біо-Савара для довільного розподілу об'ємних струмів в інтегральній формі:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dV' \quad (1.43)$$

Тоді

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \int_{V'} \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \vec{R}]}{R^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \operatorname{rot} \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \vec{R}]}{R^3} dV'$$

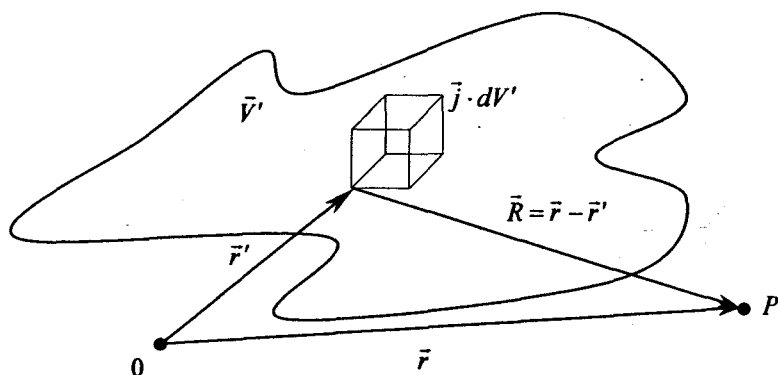


Рис. 1.13. До пояснення способу обґрунтування $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ в довільній точці простору

Використовуючи формулу векторного аналізу:

$$\operatorname{rot}(u\vec{a}) = u \cdot \operatorname{rot} \vec{a} + [\operatorname{grad} u \cdot \vec{a}]$$

підінтегральний вираз (1.16) набуває вигляду:

$$\operatorname{rot} \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \vec{R}]}{R^3} = \frac{1}{R^3} \operatorname{rot} [\vec{j} \vec{R}] + \left[\operatorname{grad} \frac{1}{R^3} \cdot [\vec{j} \vec{R}] \right]$$

враховуючи, що в останній формулі операції ротора, градієнта обчислюються по координатам точки поля, після нескладних, але кропітких перетворень одержуємо рівняння (1.41).

Обґрунтування рівняння $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ таким способом носить досить непереконливий і формальний характер.

Вважається, що густина струму $\vec{j}(\vec{r}')$ в кожному елементарному об'ємі dV' не залежить від магнітного поля (МП), яке створюється іншими елементами струму $\vec{j}(\vec{r}') dV'$ даного розподілу струмів. Але як

закон $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \vec{R}]}{R^3} dV'$ можна вважати узагальненням дослідних фактів, якщо з об'ємними струмами не проводилися експерименти?!

І по-друге, лінійний елемент струму idl як окремий і незалежний об'єкт, як окрему фізичну структуру неможливо реалізувати. Як же вдалося сформулювати закон Біо-Савара на базі такого скромного і

неточного експериментального матеріалу? Складається враження, що закон Біо-Савара просто так сформульований, щоб несуперечливо пояснити хоча б взаємодію в нерелятивістському наближенні двох рухомих заряджених частинок (3, с. 219).

Структура і методики навчання, на наш погляд, повинні відповідати методології сучасної фізики. Це означає, зокрема, що структура навчання будь-якого розділу фізики має бути такою:

а) окреслити справжньо фундаментальні дослідні факти. Як правило, невелику кількість їх, може в кінцевому рахунку однозначно визначити тільки сама теорія. Вони дають змогу сформулювати принципи фізичної теорії;

б) експеримент по суті своїй ніколи не може бути точним, і в той же час не існує логічного шляху від експериментальних фактів до теоретичного принципу. Тому ґрунтуючись на невеликій кількості добре перевірених принципів слід розглядати та аналізувати більш-менш адекватні моделі, що допускають точний розв'язок для виявлення основних закономірностей відповідної сукупності явищ;

в) виклад і формулювання самої фізичної теорії;

г) розглядаються наслідки теорії та вся сукупність експериментальних фактів, які описуються в рамках даної теорії;

ґ) опис та формулювання можливих гіпотетичних ситуацій, ще не розв'язаних проблем, експериментально не перевірених чи не поставлених взагалі, дослідницькі задачі.

В) Спосіб, реалізований в підручнику академіка Тамма І.Є. Шляхом математичних перетворювань, закон (1.41) можна подати у вигляді:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad (1.44)$$

де $A(\vec{r}, t)$ векторний потенціал постійних струмів:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r'} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{R} \quad (1.45)$$

Порівнюючи далі вираз для векторного потенціалу (1.44) з виразом для скалярного потенціалу електростатичного поля:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r'} \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{R},$$

який являється розв'язком рівняння Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

можна припустити, що і вектор-потенціал (1.44) являється розв'язком подібного диференційного рівняння:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (1.46)$$

Далі, використовуючи формулу векторного аналізу $rot \vec{B} = rot rot \vec{A} = \nabla \cdot div \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$, та умову калібровки вектор-потенціалу стаціонарного МП, $div \vec{A} = 0$, одержуємо:

$$rot \vec{B} = -\nabla^2 \vec{A} \quad (1.47)$$

і нарешті порівнюючи (1.46) та (1.47) приходимо до рівняння (1.41).

Можна запропонувати і інший спосіб, який оснований на певній комбінації способів Б) і В).

Г) Неважко показати, що $\frac{[j\vec{R}]}{R^3} = rot_P \left(\frac{\vec{j}}{R} \right)$, де індекс P означає, що

операція ротора береться по координатам точки поля. Тоді маємо для підінтегрального виразу (1.43):

$$rot \frac{[j\vec{R}]}{R^3} = rot_P \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) = \nabla \cdot div_P \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) - \nabla^2 \frac{\vec{j}}{R}, \quad (1.48)$$

а інтеграл по об'єму струмів від величини (1.48) дорівнює:

$$-\int_{V'} \vec{j} \nabla^2 \frac{1}{R} dV' - \int_{V'} \nabla_P \cdot div_Q \frac{\vec{j}}{R} dV' = 4\pi \int_{V'} \vec{j} \cdot \delta(R) dV' - \nabla_P \int_{V'} div_Q \frac{\vec{j}}{R} dV'$$

враховуючи співвідношення $\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = -4\pi \delta(R)$ (5, с. 907), і

$\int_{V'} div_Q \frac{\vec{j}}{R} dV' = 0$ (Тамм, с. 221-222.) невимушено отримуємо (1.41).

Складається враження, що всі способи обґрунтування рівняння $rot \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ носять надто формальний, штучний, а інколи і непереконливий характер. Всі вони потребують значної кількості формул векторного аналізу та векторної алгебри, за якими важко прослідити фізичну сторону явища. Єдиним і, можливо, вирішальним фактором прийнятності цих способів є експериментальне підтвердження висновків математичного формалізму магнетостатики. Зокрема, розв'язок рівняння Пуассона (1.46) в області простору поза межами струмів провідності дає значення $\vec{B}(\vec{r})$, які відповідають дійсності. В цих точках $\vec{B}(\vec{r}) \neq 0$, а $\vec{j} = 0$. Так чим же і як створюється там МП?!

Як це може бути, що струми провідності не рівні нулю в одній частині простору, а МП з'являється в тих точках простору, де відсутні струми? Відповіді на подібні питання математичний формалізм не дає. Можливо, бездоганного способу обґрунтування (1.41) і не існує, оскільки відсутній логічний шлях від дослідних фактів якісного рівня до теоретичного рівняння. "Рівняння Максвелла є прикладом фундаментального закону, явно вгаданого, а не «виведеного» в ригористичному сенсі цього слова, з експериментальних даних." (15, с. 319)

1.7. Заряд і його властивості. Рівняння неперервності. Струми зміщення, різні способи обґрунтування.

$$\text{Рівняння Максвела } \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Розглянемо об'єм V , обмежений замкненою поверхнею S . Нехай в цьому об'ємі рухаються ЗЧ, розподіл яких в просторі задається густиною заряду $\rho(\vec{r})$, рис. 1.14.

Очевидно, що через елементарну поверхню $d\vec{S}$ за одиницю часу пройде заряд величиною $\vec{j} \cdot d\vec{S}$, де \vec{j} - густина струму, що пов'язана з рухом ЗЧ. Тоді через всю замкнену поверхню S за одиницю часу, а точніше в дану мить, пройде заряд величиною $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$. Це миттєве значення величини заряду, що проходить через цю поверхню.

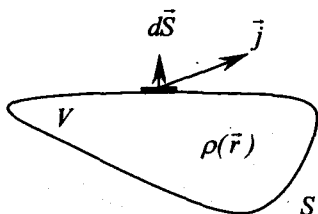


Рис. 1.14. Через замкнену поверхню S в дану мить пройде заряд величиною $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

Згідно закону збереження заряду миттєве зменшення величини заряду в об'ємі V дорівнює $-\frac{\partial q}{\partial t}$. Тобто інтегральна форма закону збереження заряду має вигляд:

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t} \quad (1.49)$$

Використовуючи математичну теорему Гауса перепишемо попереднє рівняння:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV$$

де $\rho(\vec{r})$ густина заряду.

Оскільки останнє рівняння справедливе для довільного об'єму V , то одержимо диференціальну форму закону збереження заряду:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.50)$$

Це закон збереження заряду в локальній формі або рівняння неперервності.

Деякі наслідки закону (1.50):

1. Для постійних струмів $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Тоді закон збереження заряду для постійних струмів має вигляд:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (1.51)$$

Тобто, лінії вектора \vec{j} замкнені.

Рівняння $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ - це I закон Кірхгофа в диференціальній формі.

Приклад 1.5. Впевнитися, що традиційне формулювання I-го закону Кірхгофа випливає із рівняння $\operatorname{div} \vec{j} = 0$.

Розв'язання: В інтегральній формі I закон Кірхгофа має вигляд:

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0 \quad (1.52)$$

Дійсно, нехай в деякому вузлі сходяться три струми i_1, i_2, i_3 , рис. 1.15. Оточимо цей вузол замкнутою поверхнею. Оскільки в даному прикладі ЗЧ перетинають тільки площі поперечного перерізу S_1, S_2, S_3 , тоді сила струму, що протікає через всю замкнену поверхню дорівнює:

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{j}_1 d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{j}_2 d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{j}_3 d\vec{S} = i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

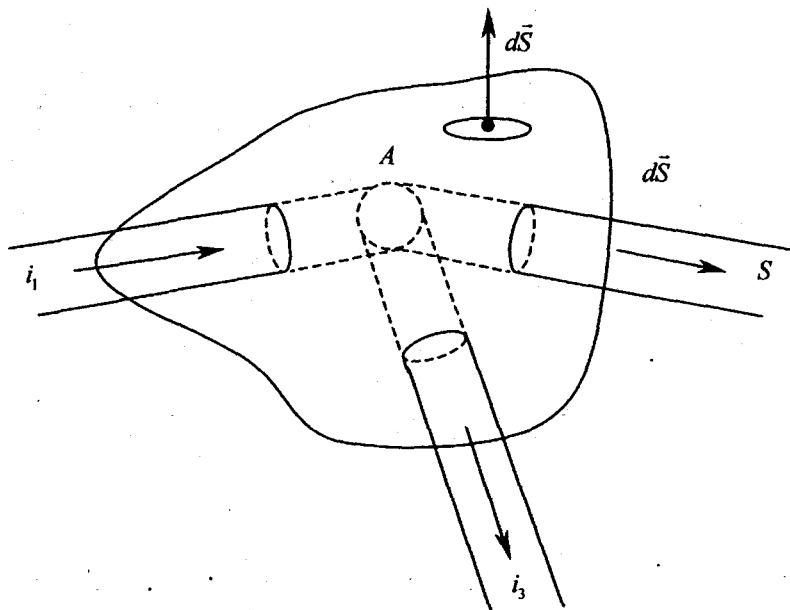


Рис. 1.15. Перший закон Кірхгофа являється наслідком закону збереження заряду (1.51)

Рівняння Максвелла $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ та закон збереження заряду $\text{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$ суперечать один одному. Дійсно, знайшовши дивергенцію від обох частин рівняння $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ одержуємо, що ліва частина дорівнює нулю, оскільки $\text{div}\text{rot}\vec{B}$ завжди дорівнює нулю. А права частина рівняння при цьому дорівнює $\mu_0\text{div}\vec{j}$. Тобто, для змінних струмів, коли $\frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0$, рівняння Максвелла $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ несправедливе.

Значить праву частину цього рівняння слід доповнити таким доданком, щоб дивергенція від обох частин рівності була рівна нулеві. Максвел прийняв гіпотезу, що крім струмів провідності \vec{j} існують так звані струми зміщення $\vec{j}_{\text{зм}}$. Такі, що $\text{div}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{зм}}) = 0$. Тому використовуючи закон збереження заряду одержуємо:

$$\text{div}\vec{j} = -\text{div}\vec{j}_{\text{зм}} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Похідну $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ знайдемо використовуючи рівняння Максвелла

$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. Тоді $\frac{\partial\rho}{\partial t} = \epsilon_0\text{div}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ і попереднє рівняння набуває вигляду:

$$\text{div}\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial\rho}{\partial t} = \epsilon_0\text{div}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Тобто, густина струмів зміщення дорівнює:

$$\vec{j}_{\text{зм}} = \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (1.53)$$

Таким чином, щоб два фундаментальних рівняння () і () були несуперечливі між собою, слід праву частину рівняння Максвелла

$\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ доповнити доданком $\vec{j}_{\text{зм}} = \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. І тоді одержуємо рівняння Максвелла для вихору магнітного поля

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_{\text{зм}}) = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (1.54)$$

Використовуючи теорему Стокса знаходимо інтегральну форму цього рівняння Максвелла:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot i + \epsilon_0\mu_0 \int_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (1.55)$$

Має сенс розглянути ще один спосіб обґрунтування виразу для густини струмів зміщення.

Розглянемо конденсатор, який розряджається через опір R (див. рис. 1.16) і застосуємо теорему про циркуляцію вектора \vec{B} по плоскому контуру L , що охоплює струм i .

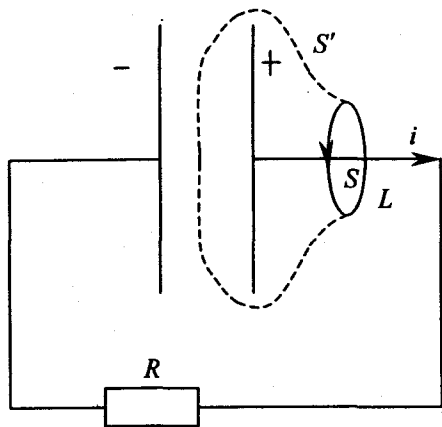


Рис. 1.16. Плоский конденсатор розряджається через опір R

На цей контур можна натягнути будь-які поверхні, і зокрема S та S' . Через S протікає струм провідності, а через S' струм провідності не протікає. Тобто, виходить, що $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ начебто залежить від того, яка поверхня спирається на контур L . Але згідно загальних положень теорії поля (положень векторного аналізу) цього не повинно бути. Як уникнути такої неясності та суперечності?

Оскільки поверхню S' перетинають тільки лінії вектора \vec{E} , то при використанні теореми Остроградського-Гауса одержуємо:

$$\oint_{S'+S} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}' = \frac{\partial q}{\partial t}$$

з іншого боку, згідно закону збереження заряду

$$\oint_{S'+S} \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

Додавши ліві і праві частини цих рівнянь маємо:

$$\oint_{S+S'} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.56)$$

Висновки:

а) величина $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ має таку ж розмірність, як і густина струмів провідності; тому густина повного струму в вакуумі $\vec{j}_n = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$;

б) $\oint_{S+S'} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} = 0$ означає, крім іншого, що лінії вектора

$\vec{j}_n = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ являються замкнутими, неперервними;

в) означення повного струму знімає указану суперечність.

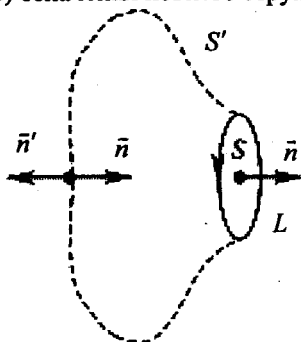


Рис. 1.17. Повна сила струму

$\oint_{S+S'} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} = i + i_{3M}$ і через поверхню S , і через поверхню S' , які спираються на один і той же контур L , залишається незмінною.

Дійсно, покажемо, що повна сила струму $\oint_{S+S'} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} = i + i_{3M}$

буде мати одне і те ж значення як через поверхню S , так і через поверхню S' , які спираються на один і той же контур. Рівняння

я $\oint_{S+S'} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} = 0$ можна записати і так:

$$\int_S \vec{j}_n d\vec{S} + \int_{S'} \vec{j}_n d\vec{S} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \int_{S'} \vec{j}_{3M} d\vec{S} = i_n(S) + i_n(S') = 0$$

Але, якщо на поверхні S' нормаль вибрати внутрішню, то доданок $i_n(S')$ змінить знак на протилежний, і тоді маємо, рис. 1.17.:

$$i_n(S) + i_n(S') = i_n(S) - i_n(S') = 0$$

$$i_n(S) = i_n(S')$$

Тобто, теорему про циркуляцію вектора \vec{B} для довільного випадку (не тільки для постійних струмів) необхідно записати у вигляді:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot i + \epsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} \quad (1.57)$$

1.8. Властивості струмів зміщення. Приклади застосування рівняння Максвелла для струмів зміщення

Приклад 1.6. Спираючись на концепцію струмів зміщення та одержані результати (теорема про циркуляцію вектора \vec{B} (1.57)) знайти величину індукції МП рухомої ЗЧ.

Розв'язання: Розглянемо точковий заряд q , який рухається з постійною швидкістю \vec{v} .

Метод а). Відомо з закону Біо-Савара, що в точці P в дану мить буде створюватись цим зарядом магнітне поле, індукція якого визначається (1.36):

$$\vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 [\vec{v} \cdot \vec{E}] = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^3} [\vec{v} \cdot \vec{r}] \quad (1.58)$$

Виходячи з симетрії задачі, контур L виберемо у вигляді кола радіуса $r \sin \theta$, рис. 1.18.

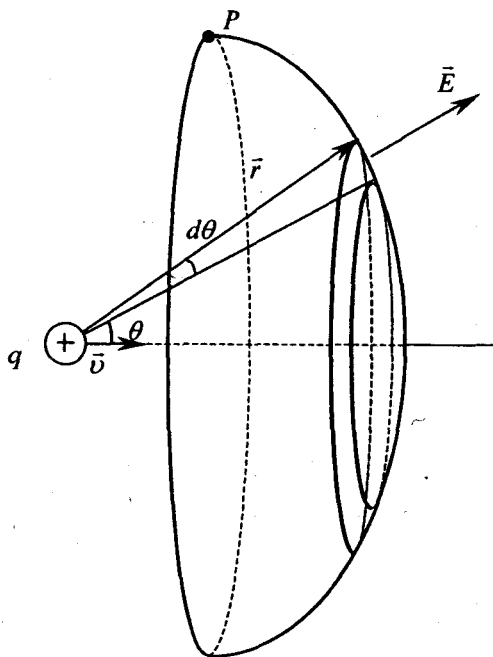


Рис. 1.18 Знаходження струму зміщення через поверхню сферичного сегменту

Для спрощення знаходження струму зміщення $\int_s \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S}$ через поверхню, що спирається на цей контур, поверхню що виберемо у вигляді сферичного сегменту радіуса r . На його поверхні виділимо вузький "поясочок". Знайдемо елементарний потік через поверхню цього "поясочка":

$$\vec{E} d\vec{S} = E dS = \frac{q}{2\epsilon_0} \sin\theta d\theta,$$

де величина поверхні поясочка $dS = 2\pi \cdot r \sin\theta \cdot r d\theta$. А потік вектора \vec{E} через поверхню сегменту:

$$\int \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{2\epsilon_0} (1 - \cos\theta)$$

Знайдемо тепер $\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} d\vec{S}$, щоб потім скористатися теоремою про циркуляцію вектора \vec{B} . Тоді:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{2\epsilon_0} \sin\theta \frac{d\theta}{dt} \quad (1.59)$$

для знаходження $\frac{d\theta}{dt}$ розглянемо рис. 1.19. Із рис. 1.19 видно, що при переміщенні ЗЧ на $\vec{v} dt$ кут θ зріс на $d\theta$. Причому

$$dl = d\theta \cdot r, \quad r \cdot d\theta = v \cdot dt \cdot \sin\theta,$$

тобто

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r} \cdot \sin\theta$$

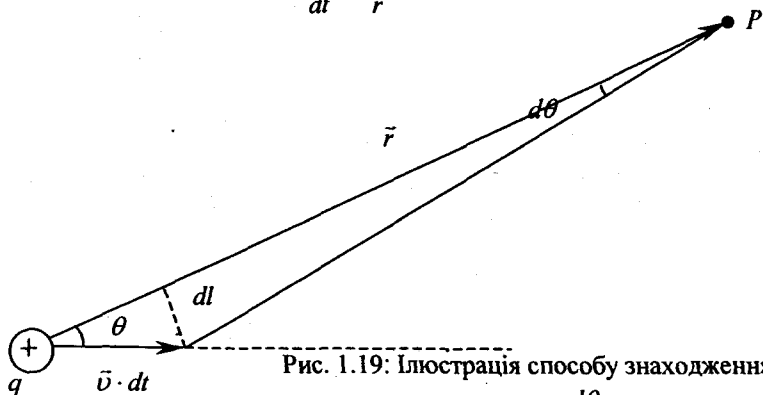


Рис. 1.19: Ілюстрація способу знаходження

величини $\frac{d\theta}{dt}$

Тому сила струму зміщення через поверхню сферичного сегменту дорівнює:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{qV \cdot \sin^2 \theta}{2r} \quad (1.60)$$

Виходячи з симетрії задачі ми можемо стверджувати, що $B = \text{const}$ в кожній точці контуру L , на який спирається наш сегмент.

І тоді теорема про циркуляцію вектора \vec{B} набуває вигляду:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = 2\pi R \cdot B = 2\pi r \cdot \sin \theta \cdot B = \mu_0 \frac{qV}{2r} \sin^2 \theta$$

звідки для індукції МП знаходимо:

$$B = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{qV \cdot \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{\mu_0 qV \cdot \sin \theta}{4\pi r^2} \quad (1.61)$$

Тобто, спираючись на концепцію струмів зміщення ми одержали вірний результат для індукції магнітного поля рухомої ЗЧ:

$$\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 [\vec{v} \vec{E}] = \frac{1}{c^2} [\vec{v} \vec{E}]$$

Магнітне поле в кожній точці простору створюється струмами зміщення. В даному випадку струми зміщення зумовлені рухом ЗЧ з швидкістю \vec{v} .

Метод б). Цей же результат можна отримати виходячи і з рівняння Максвелла

$$\text{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + q\vec{v} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) \quad (1.62)$$

Очевидно, що в тих точках простору, де $\delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) = 0$, похідна $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0$. До речі, а в яких же точках простору $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$?

З іншого боку похідну $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ можна подати так:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \cdot v_z \right) = -(\vec{v} \nabla) \vec{E}$$

А диференційну операцію $(\vec{v} \nabla) \vec{E}$ знайдемо із наступної формули векторного аналізу:

$$\text{rot} [\vec{v} \vec{E}] = (\vec{E} \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \nabla) \vec{E} + \vec{v} \cdot \text{div} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{div} \vec{v}$$

Тому $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -(\vec{v} \nabla) \vec{E} = \text{rot} [\vec{v} \vec{E}] - (\vec{E} \nabla) \vec{v} - \vec{v} \cdot \text{div} \vec{E} + \vec{E} \cdot \text{div} \vec{v}$,

але при $\vec{v} = \text{const}$, $(\vec{E}\nabla)\vec{v} = 0$, $\vec{E} \cdot \text{div}\vec{v} = 0$. Тобто, для $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ знаходимо:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -(\vec{v}\nabla)\vec{E} = \text{rot}[\vec{v}\vec{E}] - \vec{v} \cdot \text{div}\vec{E}$$

Враховуючи рівняння Максвелла:

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) \quad (1.63)$$

попередній вираз має вигляд:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -(\vec{v}\nabla)\vec{E} = \text{rot}[\vec{v}\vec{E}] - \vec{v} \cdot \frac{q}{\epsilon\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) \quad (1.64)$$

І, нарешті, із (1.62) одержуємо:

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + q\vec{v} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) = \\ &= \epsilon\epsilon_0 \left(\text{rot}[\vec{v}\vec{E}] - \vec{v} \cdot \frac{q}{\epsilon\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) \right) + q\vec{v} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}'(t)) = \epsilon\epsilon_0 \cdot \text{rot}[\vec{v}\vec{E}] \end{aligned} \quad (1.65)$$

Тобто, локальний зв'язок в довільній точці простору, в довільний момент часу між індукцією магнітного поля та напруженістю електричного поля рухомої ЗЧ визначається формулою, що співпадає з (1.37)

$$\vec{B} = \epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0 [\vec{v}\vec{E}] = \frac{1}{c^2} [\vec{v}\vec{E}]$$

Приклад 1.7. Протікання змінного струму через конденсатор. Пластини плоского конденсатора приєднані до генератора змінного струму. Знайти струм, що протікає через конденсатор.

Розв'язання: Оскільки $U(t) = U_0 \sin \omega t$, то електричне поле між пластинами конденсатора змінюється по гармонічному закону:

$$\epsilon_0 E = \epsilon_0 E_0 \cdot \sin \omega t,$$

де ω циклічна частота. Тоді густина струму зміщення дорівнює:

$$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon_0 E_0 \omega \cdot \cos \omega t$$

А сила струму зміщення, який протікає через конденсатор дорівнює:

$$\begin{aligned} i_{3M} &= \int_S \vec{j}_{3M} \cdot d\vec{S} = E_0 \epsilon_0 \omega \cdot \cos \omega t \cdot S \frac{d}{d} = d \cdot E_0 C \omega \cos \omega t = \frac{U_0}{1/\omega C} \cos \omega t = \\ &= \frac{U_0}{R_C} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}), \end{aligned} \quad (1.66)$$

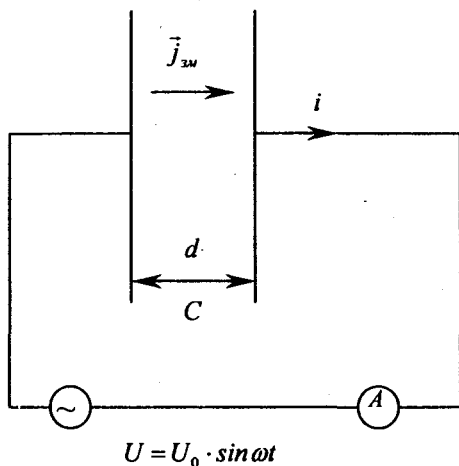


Рис. 1.20. Явище протікання змінного струму через конденсатор зумовлене повністю струмами зміщення. Амперметр вимірює силу струму зміщення

де $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ - ємність плоского конденсатора, $R_C = \frac{1}{\omega C}$ - ємнісний опір, E_0 - амплітудне значення напруженості електричного поля між пластинами конденсатора.

Таким чином, на основі поняття струму зміщення, ми одержали:

а) вираз для ємнісного опору $R_C = \frac{1}{\omega C}$ та амплітудне значення сили струму, що протікає через конденсатор;

б) значення зсуву фаз $\frac{\pi}{2}$ між струмом і напругою на конденсаторі, причому як бачимо, струм, який протікає через конденсатор випереджає напругу на кут $\frac{\pi}{2}$;

в) фізичне пояснення механізму протікання змінного струму через конденсатор;

г) що струм зміщення $i_{zm} = \int_S \vec{j}_{zm} d\vec{S}$ між пластинами конденсатора замикається струмом провідності, який вимірюється амперметром. Тобто амперметр показує (вимірює), власне кажучи, величину струму зміщення.

1.9. Закон електромагнітної індукції і рівняння Максвелла для вихору вектора \vec{E}

Явище електромагнітної індукції полягає у виникненні індукційного струму в замкненому колі при зміні магнітного потоку через поверхню, що опирається на цей контур (коло).

Закон електромагнітної індукції (ЕМІ), або “правило потоку”:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1.67)$$

Величина електрорушійної сили (ЕРС), що виникає в будь-якому контурі чисельно дорівнює швидкості зміни магнітного потоку через довільну поверхню, яка спирається на цей контур.

Виходячи з означення ЕРС індукції, та магнітного потоку цей закон можна подати у вигляді (вважаємо при цьому, що форма контуру а також поверхні, яка спирається на цей контур не змінюються)

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad (1.68)$$

Це закон електромагнітної індукції в інтегральній формі.

Якщо магнітний потік змінюється в часі, а контур залишається недеформованим, то $\frac{d\Phi}{dt}$ зумовлене тільки зміною вектора магнітної індукції в часі. І тоді закон ЕМІ набуває вигляду:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad (1.69)$$

Використавши теорему Стокса, запишемо цей закон в локальній формі.

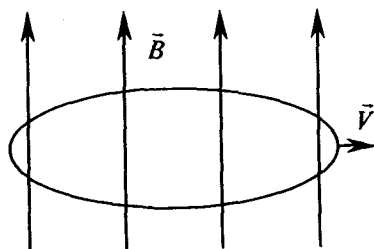
$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.70)$$

Це одне з рівнянь Максвелла в диференціальній формі

Хоча ЕРС індукції визначається зміною магнітного потоку в часі, але в основі цього явища лежать дві фізичні причини, різні по своїй природі:

1. індукційний струм в контурі може виникати за рахунок вихрового електричного поля при зміні магнітного поля в часі;
2. індукційний струм в контурі може виникати за рахунок дії сили Лоренца на заряди, що рухаються разом з провідниками замкненого кола в магнітному полі.

Приклад 1.8. Однорідне магнітне поле. Коловий виток рухається перпендикулярно силовим лініям. При цьому виток перетинається лініями магнітного поля, але внаслідок того, що поле однорідне та стаціонарне, ЕРС індукції не буде виникати.



Приклад 1.9. Магнітне поле \vec{B} локалізовано. ЕРС індукції виникає завжди, коли $\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$

$$\Phi_1 = 0, \Phi_2 \neq 0, \vec{B} = const$$

Тобто, в цьому випадку зміна магнітного потоку $\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$, але ЕРС індукції дорівнює нулеві, бо жодна з причин виникнення ЕРС індукції не реалізується

$$\Phi_2 = \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t} = 0 \text{ і } F_{\text{Лоренца}} = 0 \right) \vec{B} = const$$

Замкнене коло переміщується в області, де немає магнітного поля.

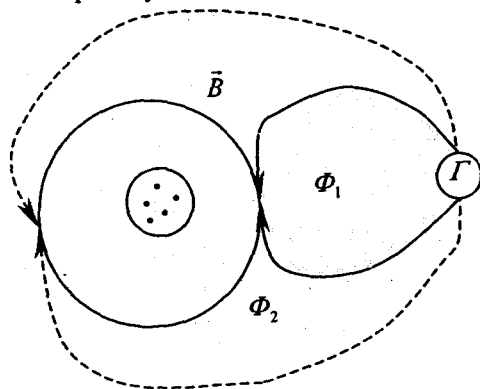


Рис. 1.21. Ілюстрація винятку із «правила потоку»: $\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$,

а ЕРС індукції дорівнює нулю

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = 0$$

Отже цей приклад показує, що існують винятки з правила потоку.

Приклад 1.10. Розглянемо ще один приклад, що ілюструє виняток з “правила потоку”. Нехай через однорідне, стаціонарне магнітне поле протягують металеву стрічку з швидкістю \vec{V} , рис. 1.22.

Вектор індукції магнітного поля перпендикулярний площині рисунку та площині стрічки. Очевидно, що магнітний потік через поверхню, обмежену колом, в яке включений гальванометр, дорівнює нулю,

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0.$$

Але $\varepsilon_i \neq 0$, оскільки на електрони металеві стрічки діє сила Лоренца.

Ця ЕРС індукції якраз і зумовлена дією сили Лоренца на електрони, які рухаються разом зі стрічкою.

Таким чином, в кожній електродинамічній ситуації слід відшукувати фізичні причини (або дія сили Лоренца, або виникнення вихрового електричного поля), які можуть привести до появи ЕРС індукції.

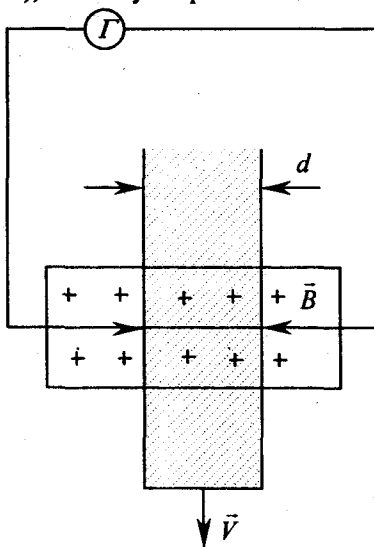


Рис. 1.22. В цій експериментальній ситуації $\frac{d\Phi}{dt} = 0$, а ЕРС індукції не дорівнює нулю

1.10. Соленоїдальність магнітного поля, дивергенція вектора \vec{B} , $\text{div}\vec{B} = 0$.

Згідно принципу суперпозиції та закону Біо-Савара індукція магнітного поля, що створюється довільним розподілом постійних струмів визначається:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{j}(\vec{r}')\vec{R}]}{R^3} dV'$$

Використовуючи формулу векторного аналізу:

$$\text{div}[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{b} \cdot \text{rot}\vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot}\vec{b}$$

знайдемо дивергенцію індукції магнітного поля:

$$\text{div}B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \cdot \text{rot}j - j \cdot \text{rot} \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dV' = 0$$

Безпосереднім обчисленням можна впевнитися, що $\text{rot}j(\vec{r}') = 0$.

Дійсно густина струму $\vec{j}(\vec{r}')$ залежить від координат області V' $\vec{j}(x', y', z')$, де зосередженні струми, а ротор від $\vec{j}(\vec{r}')$ береться по координатах $\vec{r}(x, y, z)$ точки поля, тому $\text{rot} \vec{j}(\vec{r}') = 0$. $\text{rot} \frac{\vec{R}}{R^3} = 0$ оскільки $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$. А операція ротора знаходиться по координатам точки поля $\vec{r}(x, y, z)$.

Тобто магнітне поле соленоїдальне:

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (1.71)$$

II спосіб доведення рівності $\text{div}\vec{B} = 0$:

Використаємо закон електромагнітної індукції:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Знайдемо дивергенцію від обох частин цього рівняння:

$$\text{div}\text{rot}\vec{E} = -\text{div}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div}\vec{B}(t)$$

Тобто

$$\text{div}\vec{B}(t) = \text{const}$$

Цей результат слід розуміти так:

При даному магнітному полі $\operatorname{div} \vec{B}$ така сама, як і $\operatorname{div} \vec{B}$ при будь-якому іншому значенні магнітного поля, і зокрема, коли $\vec{B}_i = 0$. Але тоді $\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{const} = 0$. Значить і при будь-якому іншому значенні індукції магнітного поля ми маємо $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

III спосіб доведення рівності $\operatorname{div} \vec{B} = 0$:

Розглянемо прямолінійний струм і знайдемо магнітний потік через поверхню круглого циліндра, вісь якого співпадає з прямолінійним струмом, рис. 1.23.

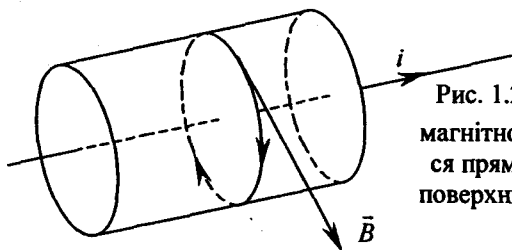


Рис. 1.23. Потік вектора індукції магнітного поля \vec{B} , що створюється прямолінійним струмом, через поверхню круглого циліндра дорівнює нулю

Силкові лінії не перетинають основи, тому магнітний потік через основи циліндра дорівнює нулю. Силкові лінії не перетинають бічну поверхню циліндра, тому магнітний потік через бічну поверхню теж дорівнює нулю. І як результат отримуємо $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

1.11. Система рівнянь Максвелла в вакуумі в локальній та інтегральній формах

Таким чином, аналізуючи фундаментальні закони електродинаміки (закон Кулона, закон Ампера-Грассмана, закон Біо-Савара, закон збереження заряду, закон електромагнітної індукції) ми одержали рівняння Максвелла.

Система рівнянь Максвелла-Лоренца в локальній та інтегральній формах має вигляд:

Локальна форма:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (I)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{zm}) = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (II)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0 \quad (\text{IV})$$

Інтегральна форма:

$$\oint_S \bar{E} d\bar{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{I})$$

$$\int_L \bar{B} d\bar{l} = \mu_0 (i + i_{zw}) = \mu_0 \left(i + \int_S \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} d\bar{S} \right) \quad (\text{II})$$

$$\int_L \bar{E} d\bar{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \bar{B} d\bar{S} \quad (\text{III}')$$

$$\oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0 \quad (\text{IV}')$$

Це система рівнянь Максвелла у вакуумі.

І рівняння є узагальненням закону Кулона і являється локальною формою цього закону, і йому можна надати таку інтерпретацію:

Оскільки div будь-якого вектора дорівнює потоку цього вектора з нескінченного малого об'єму, майже з точки, то:

1) в тих точках, в яких $\operatorname{div} \bar{E} > 0$ $\rho > 0$ починаються лінії електричного поля – витікає вектор \bar{E} ;

2) в тих точках поля, де $\rho < 0$, силові лінії поля закінчуються. В точках де $\operatorname{div} \bar{E} > 0$ є джерела електричного поля (тобто позитивні заряди). В точках поля, де $\operatorname{div} \bar{E} < 0$ є стоки (тобто негативні заряди).

Потужність потоку вектору напруженості електричного поля дорівнює $\frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Фізично $\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ визначає потужність джерел або стоків. Це локальна форма теореми Гауса.

Як відомо, у випадку стаціонарного розподілу зарядів електричне поле можна описувати скалярним потенціалом. Причому $\bar{E} = -\nabla \varphi$. Тому:

$$\operatorname{div} \bar{E} = \operatorname{div}(-\nabla \varphi) = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

або:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.72)$$

Це рівняння Пуассона, яке дозволяє знайти потенціал електростатичного електричного поля по відомому розподілу зарядів в просторі $\rho(\vec{r})$.

II рівняння є узагальненням закону Біо-Савара та гіпотези Максвелла про струми зміщення. Це рівняння визначає величину і напрямок магнітного поля, яке може породжуватись струмами провідності та струмами зміщення. З цього рівняння також слідує, що вихрове магнітне поле утворює правий гвинт з напрямком \vec{j} , якщо це струми провідності, і правий гвинт з напрямком $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ якщо це струми зміщення.

Таким чином, магнітне поле може створюватися:

- 1) постійними магнітами, “спінами” електронів (“спін” пов’язаний з власним магнітним моментом: $\frac{\hbar}{2} \cdot q_s$);
- 2) струмами провідності;
- 3) змінним в часі електричним полем.

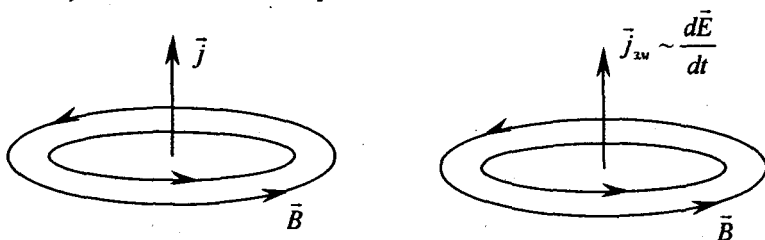


Рис. 1.24. Напрямок силових ліній вихрового магнітного поля утворює правий гвинт з векторами \vec{j} та $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Самі властивості магнітного поля можна описати так:

- а) в однорідному постійному магнітному полі на магнітний диполь діє момент сил;
- б) в постійному магнітному полі викривляється траєкторія заряду (дія сили Лоренца)
- в) якщо магнітне поле неоднорідне, то на магнітний диполь (магнітний момент) діє сила;
- г) якщо магнітне поле змінюється в часі, то виникає вихрове електричне поле

По цим 4 ефектам можна говорити про наявність та властивості магнітного поля

III рівняння є узагальненням закону електромагнітної індукції Фарадея і воно означає, що при зміні магнітного поля в часі виникає ви-

хрове електричне поле, силові лінії якого утворюють лівий гвинт з напрямком $\frac{d\vec{B}}{dt}$.

Лівий гвинт зумовлюється знаком “-” в рівнянні (). *Лівий гвинт – це правило Ленца.* Тому правило Ленца – це наслідок знаку мінус в (). Часто використання правила Ленца для знаходження напрямку індукційного струму (а значить і напрямку силових ліній вихрового електричного поля) зумовлює певні труднощі у студентів і учнів. І по друге, використання правила Ленца в традиційному формулюванні невимушено формує уявлення про первинність індукційного струму.

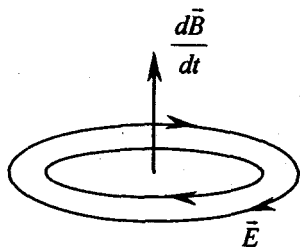


Рис. 1.25. Силові лінії вихрового електричного поля утворюють лівий гвинт з вектором $\frac{d\vec{B}}{dt}$

Виникнення індукційного струму в замкненому металевому контурі є вторинний ефект, наслідок, а першопричина – виникнення вихрового електричного поля.

IV рівняння означає, що силові лінії магнітного поля замкнені, немає джерел магнітного поля в розумінні електростатики.

Питання для самоконтролю

1. Обґрунтувати теорему Гауса для вектора \vec{E} .
2. Яке фізичне явище лежить в основі закону Біо-Савара?
3. Показати, що означення одиниці індукції магнітного поля, основані на різних визначальних формулах не суперечать одна одній.
4. Пояснити способи обґрунтування рівняння Максвела $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$.
5. Обґрунтувати рівняння Максвела для струмів зміщення та описати властивості струмів зміщення.
6. Впевнитися в тому, що магнітне поле рухомої зарядженої частинки зумовлене струмами зміщення.
7. Пояснити Ваше розуміння двох фізичних причин, які лежать в основі явища електромагнітної індукції.
8. Які експериментальні закони лежать в основі теорії електромагнітного поля?
9. В чому полягає фізичний зміст рівнянь Максвела?
10. Охарактеризуйте властивості соленоїдальних та потенційних полів.
11. Що являється джерелами електричного та магнітного полів?

РОЗДІЛ 2. ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ В СЕРЕДОВИЩІ



2.1. Основні положення електронної теорії.

Мікро та макрополя

Основна мета вивчення цієї теми полягає в обґрунтуванні та поясненні рівнянь Максвелла в речовині. Рівняння Максвелла в середовищі можуть бути одержані шляхом узагальнення експериментальних фактів, подібно тому як відбувалося обґрунтування рівнянь Максвелла в вакуумі на основі узагальнення дослідних законів Кулона, Біо-Савара, електромагнітної індукції Фарадея, збереження заряду, тобто феноменологічним шляхом.

Але при вивченні даної теми, ми виведемо рівняння електромагнітного поля в середовищі виходячи з модельних уявлень класичної електронної теорії (КЕТ).

Згідно КЕТ всі тіла складаються з позитивних та негативних заряджених частинок. В просторі між зарядженими частинками електромагнітне поле (ЕМП) описується мікроскопічними рівняннями поля. Ці поля породжуються рухом ЗЧ, що входять до складу речовини.

В класичній електричній теорії всі властивості речовини пояснюються рухом та взаємодією заряджених частинок, що входять до складу речовини між собою та із зовнішніми полями. Припускається, що для мікроскопічних полів справедливі рівняння Максвелла в вакуумі:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{e} &= \frac{\rho_M}{\epsilon_0} \\
 \operatorname{rot} \vec{e} &= -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \\
 \operatorname{rot} \vec{b} &= \mu_0 \vec{j}_M + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \\
 \operatorname{div} \vec{b} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

де \vec{e} - мікроскопічна напруженість електричного поля, \vec{b} - мікроскопічне значення індукції магнітного поля, ρ_M - мікроскопічна густина заряду, \vec{j}_M - мікроскопічна густина струму.

Єдина сила, що може діяти на ЗЧ речовини є сила Лоренца (густина сили Лоренца):

$$\vec{f} = \rho(\vec{e} + [\vec{v} \cdot \vec{b}]) \quad (2.2)$$

Такий шлях обґрунтування рівнянь поля в середовищі уявляється більш кращим, ніж феноменологічний, з огляду на наступні міркування:

а) чітко простежується поява додаткових додатків в рівняннях поля;

б) стає зрозумілим фізичний зміст того чи іншого доповнення в рівняннях поля;

в) показується роль та значення модельних уявлень при обґрунтуванні рівнянь Максвелла в середовищі;

г) уявлення (моделі) класичної електронної теорії широко використовуються не тільки в навчальному процесі при поясненні багатьох фізичних явищ, а і в наукових працях.

Якщо в електромагнітне поле помістити діелектрик чи магнетик, то діелектрик поляризується, а магнетик намагнічується. Якщо діелектрик не однорідний, то не тільки на поверхні його, виникає зв'язаний надлишковий поляризований заряд; якщо діелектрик однорідний, то зв'язаний заряд (як ми впевнимосся далі) з'являється тільки на його поверхні, і тоді $\rho' = 0$. Явище поляризації можна описати шляхом введення вектора поляризації. Вектор поляризації \vec{P} - це дипольний електричний момент одиниці об'єму діелектрика.

Якщо магнетик знаходиться в магнітному полі, то він намагнічується. Явище намагнічування описується вектором намагнічування \vec{I} .

Вектором намагнічування \vec{I} - це магнітний момент одиниці об'єму магнетика.

Зв'язані заряди теж створюють електричне поле і їх сумарне електричне поле в діелектрику, поміщеному в зовнішнє електричне поле, дуже швидко змінюється у часі, тому що рухаються заряди, що створюють електричне поле. Це поле швидко змінюється також і від точки до точки в просторі, рис. 2.1.

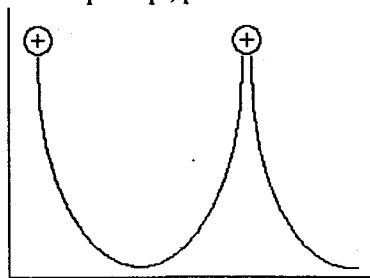


Рис. 2.1. Мікроскопічне електричне поле швидко змінюється і від точки до точки в просторі

Але в експериментальних дослідженнях і в теорії користуються середніми значеннями електричних та магнітних полів в середовищі. В теорії це згладжування (усереднення) полягає у визначенні середніх значень полів в таких інтервалах простору і часу, в яких зникають неоднорідності, пов'язані з атомарною (молекулярною) структурою речовини. Але враховують часові та просторові неоднорідності макроскопічних масштабів. Тобто, проводиться усереднення по фізичному нескінченно малому об'єму.

Усереднені значення мікроскопічних напруженості електричного та індукції магнітного полів називаються, відповідно, напруженістю електричного та індукцією магнітного полів в середовищі:

$$\bar{\vec{e}} = \bar{\vec{E}} - \text{напруженість електричного поля в речовині,}$$

$$\bar{\vec{b}} = \bar{\vec{B}} - \text{індукція магнітного поля в речовині.}$$

Таким чином, щоб записати рівняння Максвелла в середовищі, треба знайти середнє значення мікроскопічної густини заряду та середнє значення мікроскопічної густини струму в речовині. Тобто, знайти величини $\bar{\rho}_{\text{мікро}}$ і $\bar{\vec{j}}_{\text{мікро}}$.

Середнє значення мікроскопічної густини заряду дорівнює сумі густини вільних зарядів і густини зв'язаних зарядів:

$$\bar{\rho}_{\text{мікро}} = \rho + \rho' \quad (2.3)$$

Середнє значення мікроскопічної густини струмів дорівнює сумі густини вільних струмів провідності, густини молекулярних струмів та густини струмів поляризації:

$$\bar{\vec{j}}_{\text{мікро}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{мол}} + \vec{j}_{\text{пол}} \quad (2.4)$$

2.2. Поляризація діелектриків. Властивості вектора поляризації. Електричне поле в діелектрику. Теорема Гауса для електричного поля в діелектрику. Вектор електричного зміщення.

Виділимо в діелектрику об'єм V , що обмежується деякою поверхнею S . Нехай концентрація ЗЧ в об'ємі V дорівнює $n = \frac{N}{V}$.

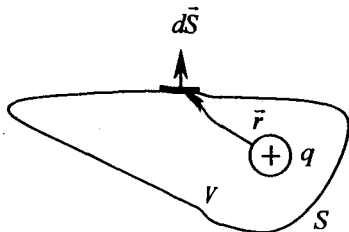


Рис. 2.2. Поляризація діелектрика означає, що ЗЧ його зміщуються на величину \vec{r}

Виділимо елемент поверхні $d\vec{S}$. Внаслідок поляризації заряджена частинка зміщується на величину \vec{r} . Тому через поверхню $d\vec{S}$ протече заряд величиною dq :

$$\vec{r} \cdot d\vec{S} \cdot n \cdot q = dq$$

Дипольний момент одиниці об'єму, згідно означення, дорівнює вектору поляризації:

$$\vec{r} \cdot q \cdot n = \vec{P}$$

Тоді величина заряду, який витік через замкнену поверхню S в результаті поляризації дорівнює:

$$q = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

Згідно закону збереження заряду в об'ємі V , що обмежується поверхнею S з'явиться надлишковий зв'язаний заряд - q' . Тобто, цей зв'язаний, або поляризаційний заряд дорівнює:

$$q' = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (2.5)$$

Це так звана *теорема Гауса для вектора поляризації \vec{P}* .

Використовуючи математичну теорему Гауса, із (2.5) ми одержимо вираз для об'ємної густини зв'язаного поляризаційного заряду:

$$\rho' = -\text{div} \vec{P} \quad (2.6)$$

Співвідношенню $\rho' = -\text{div} \vec{P}$ можна надати такої наочності: уявимо в середовищі дві площини. Якщо поляризація в речовині неоднорідна, то одну з площин перетне більше число ЗЧ, ніж площину другу. В результаті із об'єму, що знаходиться між площинами виходить більше заряду, ніж входить із сусіднього об'єму. І в просторі між площинами з'являється об'ємний заряд ρ' .

Приклад 2.1. Користуючись теоремою (2.5) знайти граничні умови для вектора \vec{P} .

Розв'язання: Розглянемо межу поділу двох середовищ (див. рис. 2.3.) і знайдемо потік вектора \vec{P} через поверхню нескінченного малого циліндра, зображеного на рисунку 2.3.

Якщо висота циліндра дуже маленька, то потік вектора \vec{P} дорівнює (нехтуємо потоком вектора \vec{P} через бічну поверхню циліндру):

$$P_{2n} \Delta S + P_{1n} \Delta S = -\sigma' \Delta S,$$

де σ' - поверхнева густина поляризаційних зарядів.

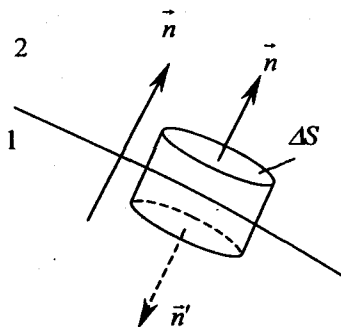


Рис. 2.3. Знаходження потоку вектора \vec{P} з метою обґрунтування граничної умови для вектора \vec{P}

Оскільки $P_{1n'} = -P_{2n}$, то:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \quad (2.7)$$

Тобто, нормальна складова вектора \vec{P} терпить розрив на межі поділу двох діелектриків. В тому випадку, коли середовище 2- вакуум, то:

$P_{2n} = 0$, а $P_{1n} = \sigma'$, тобто поверхнева густина зв'язаних зарядів σ' дорівнює P_n - проекції вектора \vec{P} на зовнішню нормаль до поверхні даного діелектрика.

Експериментальні дослідження показали, що для багатьох діелектриків в широкому інтервалі значень напруженості електричного поля \vec{E} вектор поляризації пропорційний полю \vec{E} в діелектрику:

$$\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}, \quad (2.8)$$

де α - діелектрична сприйнятливість.

Тому, отримуємо:

$$\sigma' = \alpha \epsilon_0 E_n, \quad (2.9)$$

де E_n - проекція вектора \vec{E} (поле в середині діелектрика біля його поверхні) на зовнішню нормаль.

Приклад 2.2. Знайти умови при яких об'ємна густина зв'язаних зарядів в діелектрику дорівнює нулю, $\rho' = 0$.

Розв'язання: Використовуючи (2.8) і основну властивість вектора поляризації \vec{P} , $\oint \vec{P} d\vec{S} = -q'$, одержуємо:

$$\oint \alpha \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = -q' \quad (2.10)$$

Але $\oint_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S}$, згідно електростатичної теореми Гауса, дорівнює алгебраїчній сумі всіх зарядів - і вільних, і зв'язаних - в середині замкнутої поверхні S , тобто $q + q'$ і тоді маємо:

$$\alpha \cdot (q + q') = -q'$$

Звідки отримуємо:

$$q' = -\frac{\alpha}{1+\alpha} q$$

Таким чином, переходячи до нескінченно малих об'ємів одержуємо об'ємну густину поляризаційних зарядів.

$$\rho' = -\frac{\alpha}{1+\alpha} \rho \quad (2.11)$$

Оскільки $\rho' = -\operatorname{div} \vec{P}$, а $\vec{P} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}$, то

$$\rho' = -\operatorname{div}(\alpha \varepsilon_0 \vec{E}) = -\varepsilon_0 \operatorname{div}(\alpha \vec{E}) = -\varepsilon_0 (\vec{E} \cdot \operatorname{grad} \alpha + \alpha \cdot \operatorname{div} \vec{E}),$$

але $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho')$, тому підставивши $\rho' = -\operatorname{div} \vec{P}$ в (2.11) знайдемо

ρ' :

$$\begin{aligned} \rho' &= -\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \operatorname{grad} \alpha - \alpha \rho - \alpha \rho' \\ \rho' &= -\frac{1}{1+\alpha} (\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \operatorname{grad} \alpha + \alpha \rho) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Таким чином, в об'ємі поляризованого діелектрика густина зв'язаних зарядів $\rho' = 0$ при одночасовому виконанні таких умов:

а) діелектрик повинен бути однорідним ($\operatorname{grad} \alpha = 0$);

б) всередині діелектрика не повинно бути сторонніх зарядів ($\rho = 0$).

Якщо ж сторонніх (вільних) зарядів в діелектрику немає, але діелектрик неоднорідний, то об'ємна густина зв'язаних зарядів визначається:

$$\rho' = -\frac{\varepsilon_0 \vec{E} \nabla \alpha}{1+\alpha}$$

Теорема Гауса для електричного поля в діелектрику. Вектор електричного зміщення. Джерелом електричного поля в діелектрику являються і сторонні і поляризаційні заряди. Тому електричне поле в діелектрику створюється і вільними (сторонніми) і зв'язаними (поляризаційними) зарядами.

Виходячи з електростатичної теореми Гауса та формули (2.5) одержуємо наступну ціпочку рівностей:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q + q'}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= q - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} &= q\end{aligned}\quad (2.13)$$

Вектор, що стоїть під знаком інтеграла в (2.13), $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$, називається вектором електричної індукції.

Таким чином, теорема Гауса для діелектриків, або теорема Гауса для поля вектора \vec{D} має вигляд:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q \quad (2.14)$$

Вектор \vec{D} не має фізичного змісту, просто це додатковий, але зручний, при підрахунках поля в середовищі, вектор.

Практичніше, вигідніше спочатку знаходити вектор \vec{D} , а потім і напруженість електричного поля в середовищі. Враховуючи зв'язок вектора поляризації з напруженістю електричного поля в середовищі (2.8), для вектора \vec{D} можемо записати:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \alpha \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} (1 + \alpha) = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad (2.15)$$

де $\epsilon = 1 + \alpha$ - діелектрична стала (проникність) речовини.

Приклад 2.3. Описати електричне поле діелектричної кулі, яка однорідно поляризована. Радіус кулі a , Вектор поляризації (поляризованість) - $\vec{P} = \text{const}$.

Розв'язання: Однорідно поляризовану кулю ми можемо уявити собі як таку, що вирізана із однорідної поляризованої пластини діелектрика.

Оскільки $\vec{P} = \text{const}$, то об'ємна густина зв'язаних зарядів дорівнює нулю, $\rho' = -\text{div} \vec{P} = 0$. Тобто, поле, яке ми шукаємо створене тільки поверхневими зв'язаними зарядами. Причому, $\sigma' = P_n = P \cos \theta$, рис. 2.4.

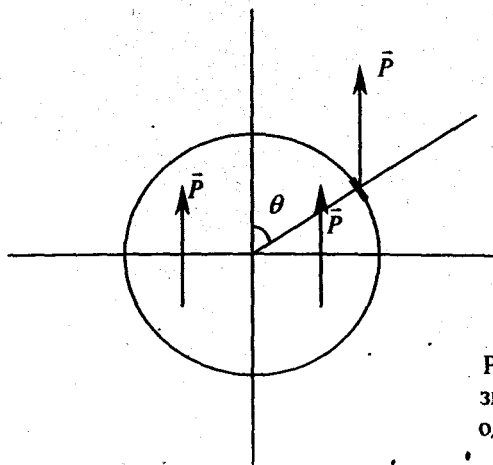


Рис. 2.4. Поверхнева густина зв'язаних зарядів на поверхні однорідно поляризованої кулі

Але відомо, що такий розподіл зарядів $\sigma' \approx \cos\theta$ виникає, якщо, дві кулі однакового радіусу з рівномірно розподіленими по об'єму зарядами ρ і $-\rho$ зміщені на малий вектор \vec{l} . В той же час поле будь-якого сферичного розподілу зарядів (і зокрема рівномірного в межах будь-якої кулі) таке начебто весь заряд кулі зосереджений в центрі кулі. Тобто поле зовні поляризованої кулі буде таким же як і поле, що створюється двома точковими зарядами зміщеними на малий вектор \vec{l} . Іншими словами, зовнішнє поле поляризованої кулі повністю еквівалентне полю диполя.

Очевидно що дипольний момент однорідно поляризованої діелектричної кулі дорівнює:

$$\vec{p} = \frac{4\pi}{3} a^3 \vec{P}$$

Тоді потенціал (зовнішнього по відношенню до діелектричної кулі) поля визначається

$$\varphi_{\text{зов}}(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} = \frac{a^3(\vec{P}\vec{r})}{3\epsilon_0 r^3}$$

Всередині кулі

$$\varphi_{\text{внутр}}(\vec{r}) = \frac{(\vec{P}\vec{r})}{3\epsilon_0}$$

А напруженість електричного поля в зовнішньому просторі дорівнює:

$$\vec{E}_{\text{зов}} = -\text{grad}\varphi_{\text{зов}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p}\vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right] = \frac{a^3}{3\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{P}\vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}}{r^3} \right]$$

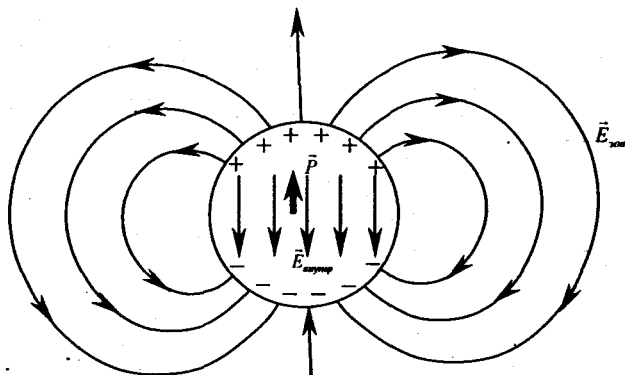


Рис. 2.4а. Зовнішнє поле однорідно поляризованої діелектричної кулі являється точно таким же, як і поле диполя, що розташований в центрі кулі

Напруженість електричного поля у внутрішніх точках діелектричної кулі

$$\vec{E}_{\text{внутр}} = -\nabla \varphi_{\text{вн}} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Тобто, всередині кулі поле однорідне і вектор $\vec{E}_{\text{внутр}}$ направлений протилежно вектору поляризації \vec{P} .

Картина силових ліній електричного поля поляризованої кулі зображена на рис. 2.4а.

Відсутність вільних зарядів в нашій задачі означає, що немає джерел поля \vec{D} : лінії вектора \vec{D} не мають ні початку ні кінця. Зовні кулі лінії векторів \vec{E} та \vec{D} співпадають, а всередині напрямки їх протилежні (вектор \vec{E} породжується зарядами), рис. 2.4б. Всередині кулі формула $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$ несправедлива, але $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$.

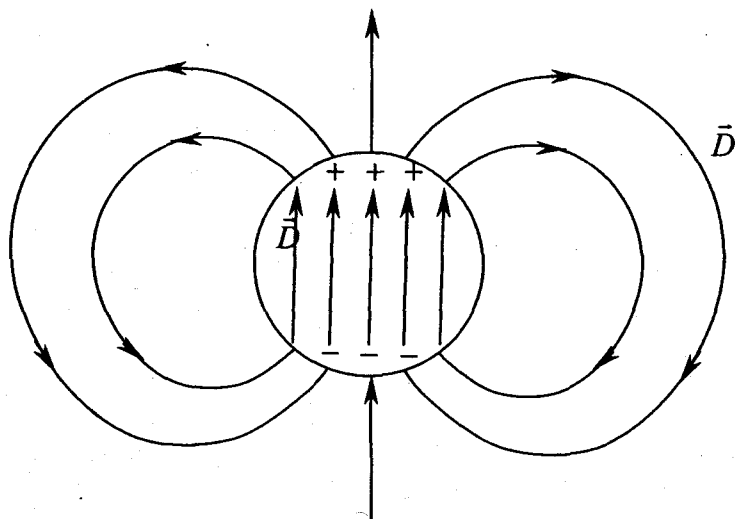


Рис. 2.4б. Лінії вектора \vec{D} не мають ні початку ні кінця. Зовні кулі лінії векторів \vec{E} та \vec{D} співпадають, а всередині напрямки їх протилежні

З метою якісної ілюстрації останніх висновків приведемо картину ліній вектора \vec{E} всередині та зовні однорідно поляризованого стержня, рис. 2.5.

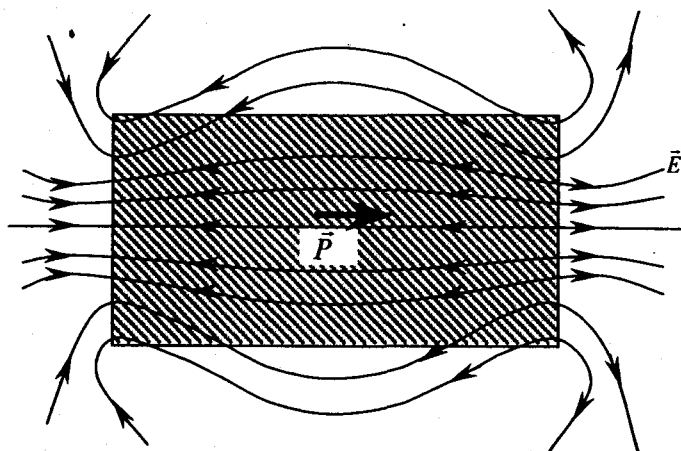


Рис. 2.5. Приблизна картина лінії вектора \vec{E} всередині та зовні однорідно поляризованого стержня

2.3. Намагнічування магнетиків. Властивості вектора намагнічування. Рівняння Максвелла для магнітного поля в магнетиках. Вектор напруженості магнітного поля в середовищі.

Намагнічування речовин, які знаходяться в зовнішньому магнітному полі, зумовлено орієнтацією магнітних моментів атомів, молекул та електронів в напрямку поля \vec{B} (парамагнетики, феромагнетики). В діаманетиках намагнічування пояснюється індукуванням магнітних моментів в атомах та молекулах. Переважна орієнтація магнітних моментів приводить до виникнення макроскопічних струмів намагнічування i' .

Якщо уявити собі однорідний циліндричний магнетик, рис. 2.6., вектор намагнічування якого $\vec{I} = const$, то молекулярні струми в будь-якій точці всередині магнетика компенсують один одного. А не скомпенсованими виявляються ті молекулярні струми, що виходять на циліндричну поверхню. Сукупність таких молекулярних струмів створює макроскопічний поверхневий струм намагнічування i' . Таке уявлення про макроскопічні струми намагнічування, які створюють таке ж магнітне поле, як і молекулярні струми дозволяє зв'язати вектор намагнічування з струмами намагнічування. І потім виразити вектор індукції магнітного поля в середовищі через вектор намагнічування.

Знайдемо зв'язок між i' та \vec{I} .

Для цього виберемо довільний контур L в магнетіку. Нехай на цей контур спирається плоска поверхня S . Цю поверхню перетинають

молекулярні струми. Причому є молекулярні струми, що перетинають поверхню 2 рази (струми 1, 2, 3), а є такі, що перетинають її 1 раз (струми a, b, c), рис. 2.7.

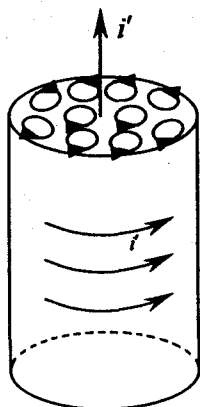


Рис. 2.6. Магнетик у формі циліндра, який намагнічений однорідно

Очевидно, що сумарний внесок в загальний молекулярний струм через поверхню S дають ті струми, що перетинають цю поверхню один раз. Сукупність таких молекулярних струмів створює певний макроскопічний струм намагнічування I' . Виділимо на контурі L невеличкий елемент dl , в збільшеному вигляді він показаний на рис. 2.8.

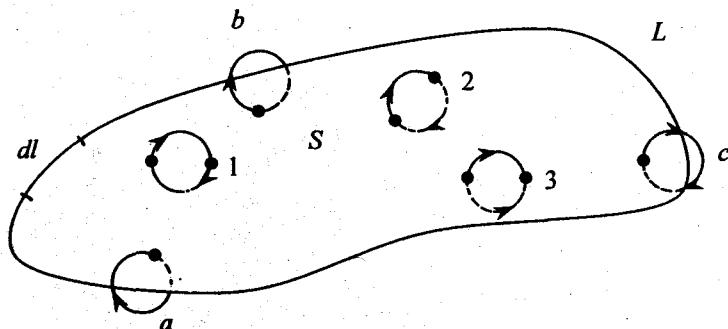


Рис. 2.7. Поверхню, яка обмежена контуром L молекулярні струми можуть перетинати один раз, або два рази

Знайдемо силу струму намагнічування, що протікає через dS внаслідок попадання в циліндричний об'ємчик молекулярних струмів. Як видно із рис. 2.5 елемент dl контуру L оплітають ті молекулярні струми (а значить елементарну поверхню dS перетинають один раз, і в

результаті, дають внесок в повний струм намагнічування), центри яких попадають всередину косо́го циліндрика довжиною $d\vec{l}$. Об'єм його дорівнює

$$dV = \vec{S}' \cdot d\vec{l} = S' \cdot dl \cdot \cos \alpha,$$

де \vec{S}' - елементарний вектор поверхні, що обмежена молекулярним струмом.

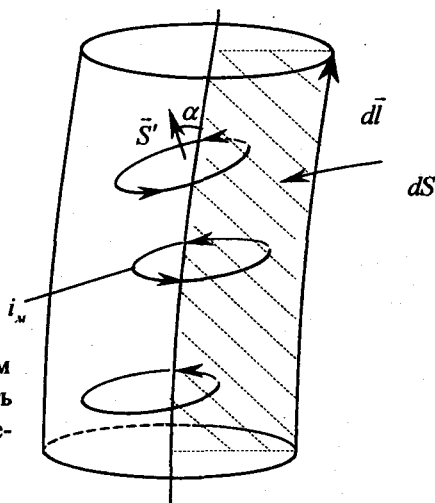


Рис. 2.8. Внесок в повний струм намагнічування через dS дають ті молекулярні струми, що перетинають dS один раз

Якщо в одиниці об'єму знаходиться n молекулярних струмів, то через поверхню dS пройде струм, який дорівнює:

$$di' = i_M (\vec{S}' \cdot d\vec{l}) \cdot n = \vec{I} \cdot d\vec{l},$$

де $i_M \cdot \vec{S}' \cdot n = \vec{I}$ - вектор намагнічування, $i_M \cdot \vec{S}'$ - магнітний момент елементарного струму. Тоді весь струм намагнічування через поверхню S , яка обмежена контуром L дорівнює:

$$\oint_L i_M (\vec{S}' \cdot d\vec{l}) n = \oint_L \vec{I} \cdot d\vec{l} = i' \quad (2.16)$$

Але з іншого боку макроскопічний струм намагнічування дорівнює:

$$i' = \int \vec{j}_{\text{маг}} d\vec{S}$$

де $\vec{j}_{\text{маг}}$ - густина молекулярних струмів намагнічування.

Використовуючи теорему Стокса:

$$\oint_L \vec{I} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{I} \cdot d\vec{S}$$

формулі (2.16):

$$i' = \oint_L \vec{I} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{\text{маг}} d\vec{S}$$

надаємо такого вигляду:

$$\int_S \vec{j}_{\text{мол}} d\vec{S} = \int_S \text{rot} \vec{I} \cdot d\vec{S}$$

Оскільки поверхня S довільна, то одержуємо зв'язок вектора намагнічування з густиною молекулярних струмів:

$$\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot} \vec{I} \quad (2.17)$$

Використаємо основну властивість вектора намагнічування

$$\oint_L \vec{I} \cdot d\vec{l} = i'$$

для знаходження магнітного поля в магнетикі. Для цього використаємо теорему про циркуляцію вектора \vec{B} . Розглядаємо стаціонарний випадок (магнетик знаходиться в незмінному в часі зовнішньому магнітному полі).

В магнетиках, які розміщені в зовнішньому магнітному полі, виникають струми намагнічування, тому циркуляція вектора \vec{B} буде визначатися не тільки струмами провідності (переносу) але і струмами намагнічування.

Тобто теорема про циркуляцію вектора \vec{B} набуває вигляду:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i + i') \quad (2.18)$$

Враховуючи основну властивість струмів намагнічування, одержуємо:

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\vec{l} &= i + \oint_L \vec{I} \cdot d\vec{l} \\ \oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} \right) d\vec{l} &= i \end{aligned} \quad (2.19)$$

Якщо ввести новий вектор, вектор напруженості магнітного поля \vec{H} :

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} = \vec{H}, \quad (2.20)$$

то теорема про циркуляцію вектора \vec{H} записується так:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = i \quad (2.21)$$

Циркуляція вектора \vec{H} по довільному замкненому контуру дорівнює алгебраїчній сумі струмів провідності, що протікають через поверхню, обмежену цим контуром.

Вектор \vec{H} - фізичного змісту не має, це додатковий вектор, який полегшує знаходження магнітного поля в середовищі, і який визначається тільки струмами провідності.

У випадку колінеарності векторів, що входять в означення (2.20), очевидно, маємо рис.2.9.

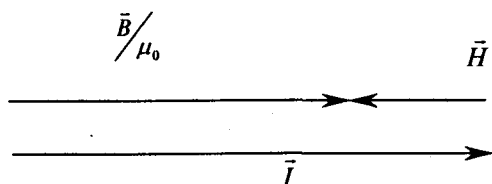


Рис. 2.9. Ілюстрація (2.20) у випадку колінеарності векторів $\vec{I}, \vec{H}, \vec{B}$

Наприклад, картина силових ліній вектора \vec{B} однорідно намагніченого стержня показана на рис.2.10.

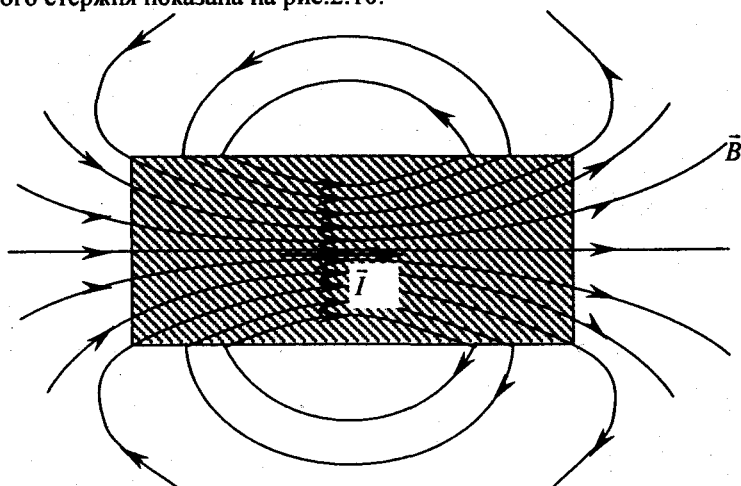


Рис. 2.10. Лінії вектора \vec{B} всередині і зовні однорідно намагніченого стержня

Причому співвідношення між векторами, які характеризують магнітне поле в середині магнетика в точці P та його намагніченість, $\vec{B}, \vec{H}, \vec{I}$, ілюструється на рисунку 2.11.

Якщо врахувати експериментальну залежність між намагніченістю та полем \vec{H} :

$$\vec{I} = \chi \vec{H} \quad (2.22)$$

де χ - магнітна сприйнятливість, то знайдемо зв'язок між індукцією магнітного поля \vec{B} та напруженістю поля \vec{H} :

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \quad (2.23)$$

де μ - магнітна проникність середовища:

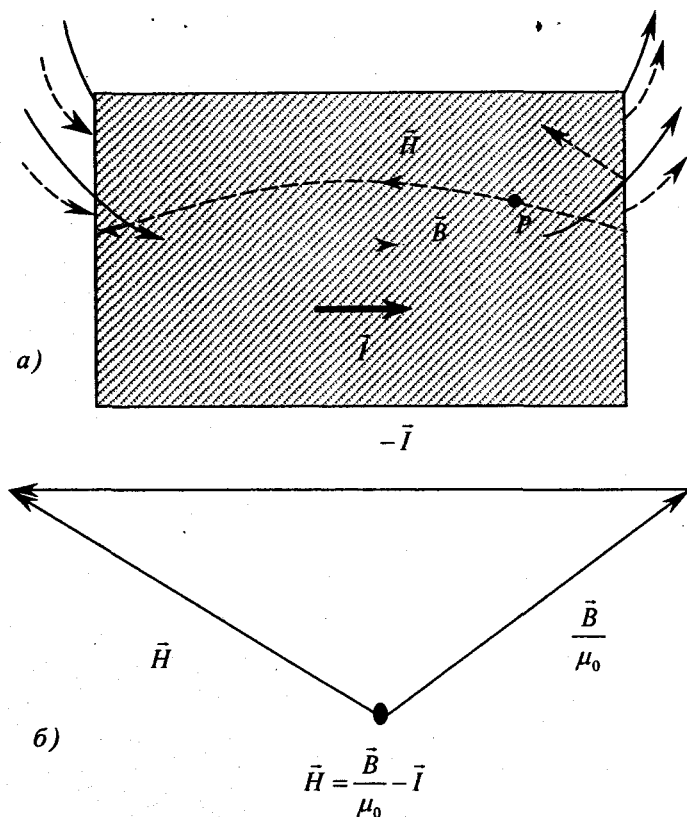


Рис. 2.11. Взаємна орієнтація векторів поля всередині магнетика в точці P

$$\mu = (1 + \chi) \quad (2.25)$$

Знайдемо тепер густину струму поляризації $\vec{j}_{\text{пол}}$. Якщо речовина знаходиться в змінному електричному полі, то вектор поляризації буде залежати від часу. Але тоді і густина зв'язаних (поляризаційних) зарядів теж буде функцією часу. Оскільки $\rho' = -\text{div}\vec{P}$, то частина похідна ρ' по часу дорівнює:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div}\vec{P} = -\text{div}\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Порівнюючи далі це співвідношення з рівнянням неперервності:

$$-\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j}'$$

знаходимо, що зміна вектора \vec{P} в часі еквівалентна появі деякої густини струму:

$$\vec{j}' = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (2.26)$$

Тобто, густина струму поляризації $\vec{j}_{\text{пол}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ визначається швидкістю зміни дипольного моменту одиниці об'єму тіла.

Зміна в часі поляризації даного об'єму означає, що із нього виходять (або входять) зв'язані заряди. Але переміщення зв'язаних зарядів з точки зору переносу ними електрики, еквівалентно струму.

2.4. Система рівнянь Максвелла в середовищі

Таким чином, використовуючи модельні уявлення КЕТ ми знайшли усереднене значення мікроскопічної густини заряду:

$$\bar{\rho}_{\text{мікро}} = \rho + \rho' = \rho - \operatorname{div} \vec{P} \quad (2.27)$$

та сумарне середнє значення мікроскопічної густини струму:

$$\overline{\vec{j}_{\text{мікро}}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{пол}} + \vec{j}_{\text{мол}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{I}, \quad (2.28)$$

де $\vec{j}_{\text{пол}}$ - густина струму поляризації.

Враховуючи формули (2.27) та (2.28) рівняння Максвелла в середовищі набувають такого вигляду:

$$\operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E} = \rho - \operatorname{div} \vec{P} \quad (2.29)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.30)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{\text{зм}} + \vec{j}_{\text{пол}} + \vec{j}_{\text{мол}}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \cdot \operatorname{rot} \vec{I} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E}) \cdot \mu_0 \quad (2.31)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2.32)$$

Використовуючи означення вектора електричного зміщення, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, рівняння (2.29) приймає вигляд:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Спростимо тепер рівняння (2.31):

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} \right) = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \epsilon_0 + \vec{P}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

де густина поляризаційного струму $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$, та „чистого” струму зміщення

$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{E})$ в сумі дають повну густину струму зміщення

$$\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \varepsilon_0 + \vec{P}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Таким чином, якщо ввести два допоміжні вектори, які фізичного змісту не мають, вектор електричного зміщення \vec{D} :

$$\vec{D} = \vec{E} \varepsilon_0 + \vec{P},$$

та вектор напруженості магнітного поля \vec{H} :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}$$

і врахувати середні значення мікроскопічних густин зарядів та струмів (2.27) та (2.28), тоді система рівнянь Максвелла в середовищі в локальній формі в однорідному та ізотропному середовищі набуває вигляду:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

В інтегральній формі ці рівняння такі:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = i + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

(2.33)

(2.34)

Надалі, описуючи електромагнітні явища, будемо використовувати рівняння Максвелла в формі (2.33) та (2.34).

2.5. Граничні умови для векторів поля

При переході від одного середовища до іншого напрямок і величина векторів поля $\vec{E}, \vec{D}, \vec{P}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{I}$, та інших, взагалі кажучи, змінюється. Граничні умови для векторів поля якраз і описують поведінку векторів поля при переході через межу поділу двох середовищ.

Граничні умови для векторів поля одержують в результаті аналізу рівнянь Максвелла в інтегральній формі в околі поверхні поділу двох речовин.

Будемо вважати, що на поверхні поділу двох однорідних та ізотропних діелектриків розподілений вільний заряд, поверхнева густина якого σ .

Тоді, згідно теореми Гауса для вектора \vec{D} , потік вектора \vec{D} через поверхню циліндра нескінченної малої висоти, рис. 2.12., дорівнює:

$$D_{2n} \Delta S + D_{1n} \Delta S = \sigma \cdot \Delta S$$

Оскільки $D_{1n} = -D_{1n'}$, то попереднє рівняння набуває вигляду:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (2.35)$$

Тобто, в загальному випадку, нормальна складова вектора \vec{D} при переході через межу поділу терпить розрив. Але якщо на межі поділу відсутні сторонні заряди, то нормальна складова вектора \vec{D} має однакове значення в обох речовинах:

$$D_{2n} = D_{1n} \quad (2.36)$$

Використання теореми про циркуляцію вектора \vec{E} вздовж прямокутного контуру нескінченної малої ширини, рис. 2.13, дає результат:

$$E_{2r} \cdot l + E_{1r'} \cdot l = 0,$$

де E_{2r} , $E_{1r'}$ - проєкції вектора \vec{E} на напрямок обходу контуру $\vec{\tau}$ та $\vec{\tau}'$ в кожному діелектрику. При цьому ми вважаємо, що в межах довжини контуру l вектор \vec{E} в кожному із діелектриків мав однакове, але своє значення.

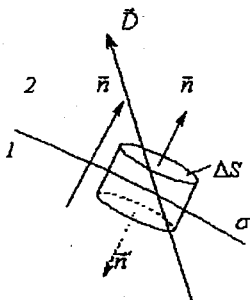


Рис. 2.12. До граничних умов вектора \vec{D}

Але очевидно, що $E_{1r} = -E_{1r}$, тому із попереднього співвідношення одержуємо:

$$E_{2r} = E_{1r} \quad (2.37)$$

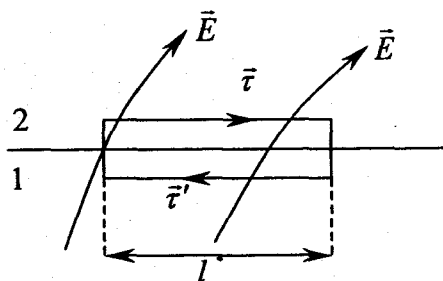


Рис. 2.13. Тангенційна складова вектор \vec{E} не змінюється при переході через межу поділу двох діелектриків

Тобто, тангенційна складова вектор \vec{E} не змінюється при переході через межу поділу двох діелектриків.

Таким чином, якщо на межі поділу двох однорідних та ізотропних діелектриків відсутні вільні заряди ($\sigma = 0$), то при переході через таку межу поділу складові E_r і D_n не змінюються, а складові E_n і D_r змінюються „стрибком”. Така поведінку складових векторів полів \vec{E} і \vec{D} приводить до того, що силові лінії цих векторів на межі поділу заломлюються.

Дійсно, згідно граничних умов (2.37) та (2.36)

$$\bullet \quad E_{2r} = E_{1r}, \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

тангенційна складова вектор \vec{E} не змінюється при переході через межу поділу двох діелектриків, а нормальна складова вектора \vec{E} в другому діелектрику менша ніж нормальна складова вектора \vec{E} в першому діелектрику (якщо тільки $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$). Це означає, що картина силових ліній вектора \vec{E} має вигляд зображений на рис. 2.14.

І тоді із рис. 2.14. випливає:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{E_{2r} / E_{2n}}{E_{1r} / E_{1n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (2.38)$$

Тобто, в діелектрику з більшим значенням діелектричної проникності лінії векторів полів \vec{E} і \vec{D} утворюють з нормаллю до межі поділу двох середовищ більший кут ($\alpha_2 > \alpha_1$).

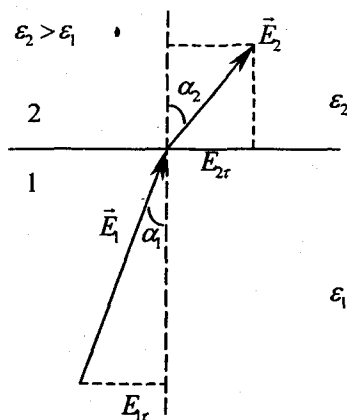


Рис. 2.14. Заломлення вектора \vec{E} при переході від першого до другого діелектрика

Приклад 2.4. На межі поділу діелектрик-провідник розподілений заряд з поверхневої густиною σ . Знайти поле в діелектрику та поверхневу густину зв'язаних зарядів.

Розв'язання: Застосовуючи умову (2.35) і вважаючи, що середовище 1 – це провідник, а середовище 2- діелектрик, одержуємо:

$$D_n = \sigma,$$

де \vec{n} - зовнішня по відношенню до провідника нормаль.

Тому в діелектрику біля його поверхні маємо напруженість електричного поля:

$$E_n = \frac{D_n}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} \quad (2.39)$$

Далі, під дією електричного поля зарядженого провідника, біля поверхні однорідного діелектрика, на межі поділу П-Д, з'являються зв'язані поверхневі заряди σ' . Сумарна густина зарядів на межі поділу, очевидно, дорівнює $\sigma + \sigma'$. Застосовуючи електростатичну теорему Гауса (тобто, знаходячи потік вектора \vec{E} через поверхню циліндра нескінченної малої висоти, рис.2.12.) для нормальної складової напруженості електричного поля одержуємо:

$$E_n = \frac{\sigma + \sigma'}{\epsilon_0} \quad (2.40)$$

Прирівнюючи (2.39) та (2.40) для σ' одержуємо вираз:

$$\sigma' = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \cdot \sigma \quad (2.41)$$

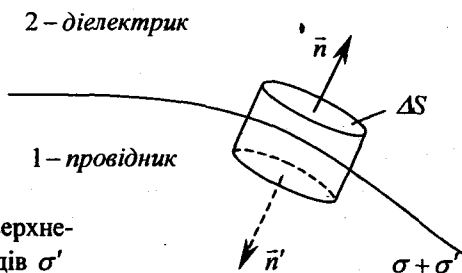


Рис. 2.15. Знаходження поверхневої густини зв'язаних зарядів σ'

Приклад 2.5. Зобразити графічно поля \vec{E} та \vec{D} біля межі поділу двох однорідних діелектриків, $\epsilon_2 > \epsilon_1$. Вільних зарядів на поверхні поділу немає.

Розв'язання: Згідно (2.38) $\alpha_2 > \alpha_1$. Із умови неперервності тангенційної складової вектора \vec{E} видно (див. рис. 2.14.), що $E_2 < E_1$; тобто, лінії вектора \vec{E} в діелектрику 1 слід проводити густіше, ніж в діелектрику 2. А із умови (2.36) приходимо до висновку, що $D_2 > D_1$, тобто лінії вектора \vec{D} повинні проводитися більш густо в другому середовищі. Таким чином, підсумовуючи можна сказати, що лінії вектора \vec{E} не тільки заломлюються, але (у зв'язку з наявністю зв'язаних зарядів) і терплять розрив. В той час як лінії вектора \vec{D} тільки заломлюються, а розрив відсутній. Ці висновки показані на рис. 2.16.

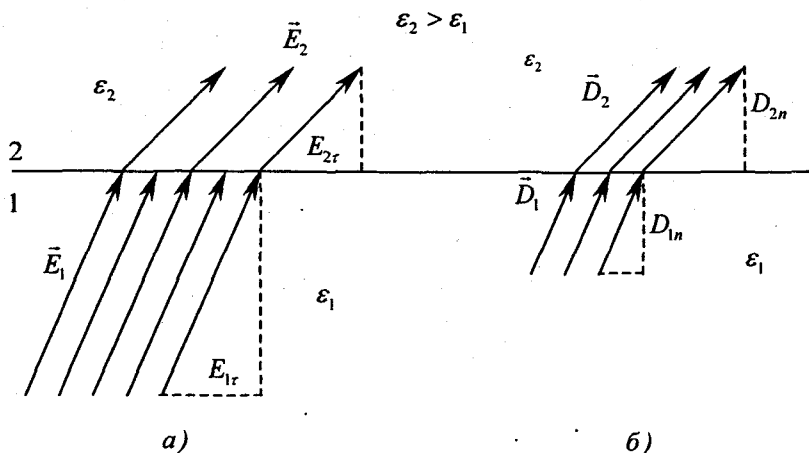


Рис. 2.16. Картина силових ліній векторів \vec{E} та \vec{D} при переході через межу поділу двох діелектриків

Граничні умови для векторів поля \vec{B} та \vec{H} одержуються, відповідно, з допомогою рівняння Максвелла та теореми про циркуляцію вектора \vec{H} :

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.42)$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = i \quad (2.43)$$

Виберемо замкнену поверхню у вигляді круглого циліндра з дуже малою висотою в околі межі поділу двох однорідних магнетиків, рис. 2.17.

Тоді сумарний потік вектора \vec{B} через поверхню цього циліндрика дорівнює, згідно (2.42):

$$B_{2n} \Delta S + B_{1n} \Delta S = 0$$

Оскільки $B_{1n} = -B_{1n'}$, то

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (2.44)$$

Гранична умова для тангенційної складової вектора \vec{H} знаходиться з допомогою рис. 2.18. та теореми (2.43).

Але припустимо, що вздовж поверхні поділу магнетиків протікає поверхневий струм провідності лінійна густина якого \vec{i} .

Тоді при виборі контуру так, як це показано на рис. 2.18., циркуляція вектора \vec{H} дорівнює:

$$H_{2\tau} \cdot l + H_{1\tau'} \cdot l = l \cdot i_n,$$

де i_n - проекція вектора \vec{i} на нормаль до контуру \vec{n} .

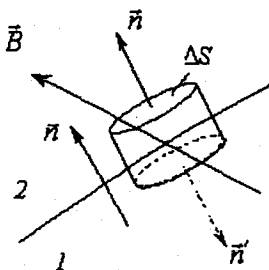


Рис. 2.17. До обґрунтування граничної умови для нормальної складової вектора \vec{B} (2.44)

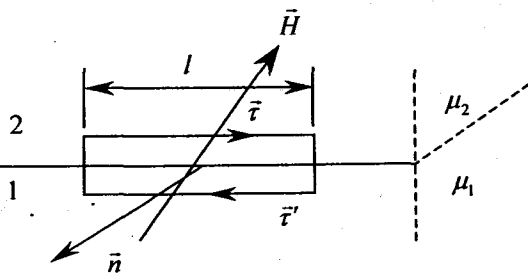


Рис. 2.18. До обґрунтування граничної умови для тангенційної складової вектора \vec{H}

Спроектуємо вектор \vec{H} в першому та другому магнетикі на орт \vec{r} , тобто $H_{1r} = -H_{1r}$. І попереднє рівняння набуває граничної умови для дотичної до поверхні поділу складової вектора \vec{H} :

$$H_{2r} - H_{1r} = i_n \quad (2.45)$$

Якщо ж на межі поділу відсутні струми провідності, то тангенційна складова вектора \vec{H} являється неперервною:

$$H_{2r} = H_{1r} \quad (2.46)$$

Аналогічно способу знаходження кута заломлення ліній векторів \vec{E} та \vec{D} при переході від одного діелектрику до другого, одержуємо співвідношення тангенсів кутів α_1 і α_2 на межі поділу двох магнетиків, рис. 2.19.:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{B_{2r} / B_{2n}}{B_{1r} / B_{1n}} \quad (2.47)$$

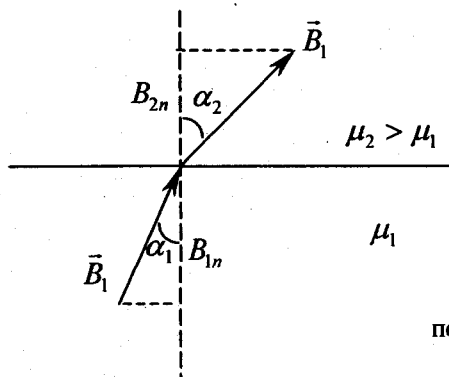


Рис. 2.19. Заломлення ліній вектора \vec{B} при переході через поверхню поділу двох магнетиків

Коли ж немає поверхневих струмів провідності, то, згідно (2.46) і (2.44), із (2.47) одержуємо:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (2.48)$$

Приклад 2.6. Зобразити картину ліній векторів \vec{B} та \vec{H} біля межі поділу двох магнетиків, $\mu_2 > \mu_1$. Поверхневих струмів провідності на межі поділу немає.

Розв'язання: Із граничних умов (2.44) і (2.46) та рис. 2.19. приходимо до висновку, що $B_2 > B_1$, $H_2 < H_1$. Лінії вектора \vec{B} не мають розриву, а лінії вектора \vec{H} терплять розрив, див. рис. 2.20.

$$\mu_2 > \mu_1$$

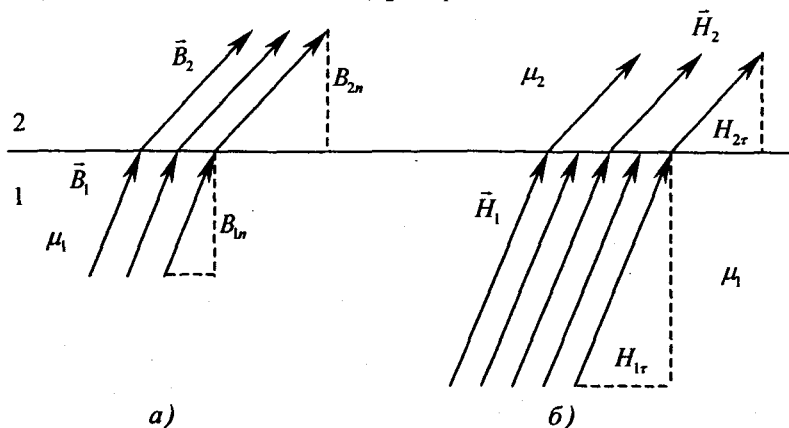


Рис. 2.20. Картина ліній векторів \vec{B} та \vec{H} в околі поверхні поділу двох магнетиків, $\mu_2 > \mu_1$

Питання для самоперевірки

1. Обґрунтувати теорему Гауса для вектора поляризації.
2. При яких умовах в об'ємі поляризованого діелектрика об'ємна густина зв'язаного заряду дорівнює нулю?
3. Описати і пояснити електричне поле зовні однорідно поляризованої кулі.
4. Вивести теорему Гауса для вектора \vec{D} .
5. Обґрунтувати теорему про циркуляцію вектора \vec{H} .
6. Знайти вирази для густини струму поляризації, густини струму зміщення, густини молекулярних струмів.
7. Вивести рівняння Максвелла в середовищі.
8. Які основні положення електронної теорії?
9. Вивести граничні умови для векторів поля.
10. Знайти закон заломлення векторів поля при переході через межу поділу двох середовищ.

РОЗДІЛ 3. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ЕНЕРГІЇ, ІМПУЛЬСУ В СИСТЕМІ „ЗАРЯДЖЕНІ ЧАСТИНКИ- ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ”



3.1 Закон збереження енергії в електродинамічній системі „заряджені частинки-електромагнітне поле”. Вектор Пойнтінга.

Розглянемо електродинамічну систему, яка складається з рухомих і нерухомих заряджених частинок (ЗЧ) та електромагнітного поля, яке створено цими ЗЧ, рис. 3.1. Виділимо елементарний об'єм dV і знайдемо роботу, яку виконують сили електромагнітного поля по переміщенню ЗЧ в цьому елементарному об'ємі.

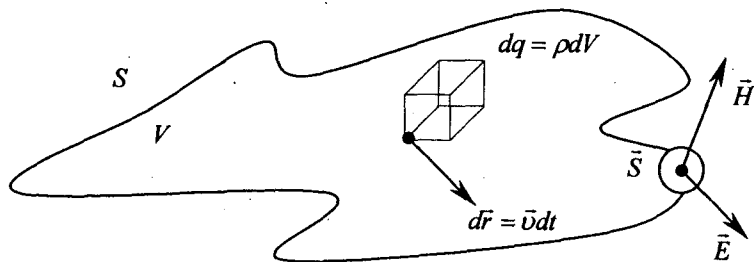


Рис. 3.1. Довільна електродинамічна система - „заряджені частинки + електромагнітне поле”

Очевидно, що ця робота дорівнює:

$$dA = \vec{f} \cdot dV \cdot d\vec{r},$$

де \vec{f} густина сили Лоренца:

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \rho [\vec{v} \cdot \vec{B}],$$

ρ - густина заряду, $d\vec{r} = \vec{v} dt$ - елементарне переміщення ЗЧ.

Припустимо, що в елементарному об'ємі dV всі заряди рухаються з однаковою швидкістю \vec{v} . Тоді елементарна робота дорівнює:

$$dA = (\rho \vec{E} + \rho [\vec{v} \cdot \vec{B}]) \cdot dV \cdot \vec{v} \cdot dt \quad (3.1)$$

А робота, яка виконується в одиницю часу (а точніше, в дану мить) у всій електродинамічній системі дорівнює:

$$\frac{dA}{dt} = \int_V (\rho \bar{E} \bar{v} + \rho \bar{v} [\bar{v} \cdot \bar{B}]) dV = \int_V \rho \bar{v} \cdot \bar{E} \cdot dV = \int_V \bar{j} \cdot \bar{E} \cdot dV, \quad (3.2)$$

де $\bar{j} = \rho \bar{v}$ – густина струму провідності (струму переносу).

Перепишемо цей результат в термінах величин, які характеризують електромагнітне поле. Для цього скористаємося рівняннями Максвелла

$$\text{rot} \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}, \text{ і знайдемо густина струму } \bar{j} :$$

$$\bar{j} = \text{rot} \bar{H} - \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

Підставимо (3.3) в вираз для потужності сил електромагнітного поля і одержимо:

$$\frac{dA}{dt} = \int_V (\bar{E} \cdot \text{rot} \bar{H} - \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \bar{E}) dV \quad (3.4)$$

Для подальшого перетворення останнього виразу для $\frac{dA}{dt}$ використаємо формулу векторної алгебри $\text{div} [\bar{a} \cdot \bar{b}] = \bar{b} \cdot \text{rot} \bar{a} - \bar{a} \cdot \text{rot} \bar{b}$ з допомогою якої знайдемо $\bar{E} \cdot \text{rot} \bar{H}$, а потім підставимо в (3.4):

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= - \int_V \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} dV + \int_V (\bar{H} \cdot \text{rot} \bar{E} - \text{div} [\bar{E} \cdot \bar{H}]) dV = \\ &= - \int_V \text{div} [\bar{E} \cdot \bar{H}] dV - \int_V \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} dV - \int_V \bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} dV \end{aligned} \quad (3.5)$$

Користуючись теоремою Гауса 1-й інтеграл в (3.5) перетворимо в поверхневий і тоді для миттєвого значення роботи одержуємо:

$$\frac{dA}{dt} = - \int_S [\bar{E} \cdot \bar{H}] \cdot d\bar{S} - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} (\bar{E} \cdot \bar{D} + \bar{B} \cdot \bar{H}) dV \quad (3.6)$$

Проаналізуємо формулу (3.6). Спочатку розглянемо все електромагнітне поле. Це означає, що замкнену поверхню S (рис. 3.1.) ми беремо настільки далеко від електродинамічної системи, що в кожній точці цієї замкненої поверхні напруженості електричного та магнітного полів дуже малі.

Тобто, будемо вважати, що $\bar{E}, \bar{H} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, оскільки на великих відстанях від електродинамічної системи напруженості полів обернено пропорційні квадрату відстані між системою та далекими точками поля:

$$E \approx \frac{1}{r^2}, \quad H \approx \frac{1}{r^2}$$

Тоді, в цьому граничному випадку, із формули (3.6) одержуємо:

$$\int_V \vec{j} \vec{E} dV = \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) dt$$

Згадаємо, що робота - це міра макроскопічної форми передачі енергії. Робота повинна виконуватися за рахунок зменшення певного виду енергії.

Тобто, у випадку повного поля робота сил електромагнітного поля, $\int_V \vec{j} \vec{E} dV$, виконується за рахунок зменшення енергії електромагнітного поля:

$$W = \int w \cdot dV,$$

де w - густина енергії електромагнітного поля:

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad (3.7)$$

Якщо поверхня S не охоплює все поле, то із (3.6) одержуємо закон збереження енергії для системи "електромагнітне поле-заряджені частинки":

$$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot dV = -\frac{\partial W}{\partial t} - \oint_S [\vec{E} \cdot \vec{H}] \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial W}{\partial t} - \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S} \quad (3.8)$$

де \vec{S} - вектор Пойнтінга:

$$\vec{S} = [\vec{E} \cdot \vec{H}] \quad (3.8a)$$

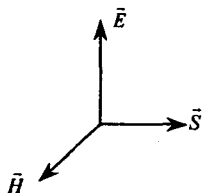
Формула (3.8)- закон збереження енергії для системи "електромагнітне поле - заряджені частинки", який перепишемо в такому вигляді:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot dV + \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S} \quad (3.9)$$

Закон (3.9) слід розуміти так: *енергія електромагнітного поля зменшується ($-\frac{\partial W}{\partial t}$) тому, що сили електромагнітного поля виконують роботу по переміщенню зарядів в електродинамічній системі, $\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot dV$, а також це зменшення відбувається за рахунок ще й того, що частина енергії електромагнітного поля ($\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S}$) витікає через поверхню S , що обмежує електродинамічну систему. В такому формулюванні закон збереження енергії поля називається *теоремою Пойнтінга*.*

Фізичний зміст вектора Пойнтінга \vec{S} : абсолютне значення вектора Пойнтінга $|\vec{S}|$ - це величина потоку енергії електромагнітного поля в одиницю часу через одиницю поверхні, що орієнтована перпендикулярно

рно вектору Пойнтінга \vec{S} . Тобто, $|\vec{S}|$ - це густина потоку енергії електромагнітного поля. Наприклад, якщо в деякій точці простору вектори \vec{E} та \vec{H} мають таку орієнтацію:



то тоді вектор \vec{S} направлений вправо перпендикулярно площині в якій лежать вектори поля \vec{E} та \vec{H} .

Інколи теорему Пойнтінга формулюють так: через поверхню S що обмежує об'єм V , в якому рухаються довільно заряджені частинки, витікає в одиницю часу електромагнітна енергія $\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S}$. Тобто, цей інтеграл - $\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S}$ - характеризує потік енергії електромагнітного поля через довільну замкнену поверхню S (витікання енергії електромагнітного поля).

Доречно зіставити, по аналогії, закон збереження заряду:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Зазначимо нарешті, що поняття вектора Пойнтінга \vec{S} використовується для знаходження густини потоку енергії поля випромінювання. Але теорема Пойнтінга справедлива і для стаціонарних електромагнітних полів. Тобто, і для сукупності постійних електричного і магнітного полів вектор \vec{S} характеризує густина потоку енергії поля в кожній точці простору.

Приклад 3.1. Циліндричний заряджений конденсатор знаходиться в однорідному магнітному полі, вектор \vec{H} якого паралельний осі конденсатора, рис. 3.2. Зобразити лінії вектора Пойнтінга.

Розв'язання: Виходячи із означення вектора Пойнтінга \vec{S} та взаємної орієнтації векторів поля \vec{E} та \vec{H} , див. рис. 3.2., знаходимо, що між пластинами зарядженого циліндричного конденсатора, який знаходиться в зовнішньому магнітному полі циркулює енергія ЕМП, причому силові лінії вектора Пойнтінга \vec{S} концентричні пластинам циліндричного конденсатора, рис. 3.2. Енергія поля начебто „тече” в просторі між пластинами, так би мовити, крутиться навколо осі конденсатора. Така циркуляція енергії поля може бути описана моментом імпульсу електромагнітного поля.

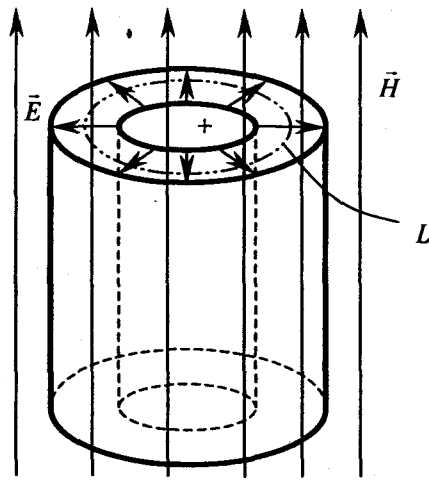


Рис. 3.2. Циркуляція вектора \vec{S} між пластинами зарядженого циліндричного конденсатора, який знаходиться в зовнішньому магнітному полі

Неможливо, наприклад, дати пояснення механізму розповсюдження (міграції) енергії в колі постійного чи квазістаціонарного струму без уявлення про вектор Пойнтінга \vec{S} , див. нижче пункт 3.2. даної теми.

Ще один приклад.

Приклад 3.2. Уявимо постійний магніт циліндричної форми, що висить на нитці, рис.3.3. Якщо його зарядити, то навколо магніту буде циркулювати енергія поля. Зобразити лінії вектора \vec{S} .

Лінії вектора \vec{S} утворювати сукупність концентричних кіл, які лежать в горизонтальній площині

Розв'язання: Оскільки силові лінії векторів поля \vec{E} та \vec{B} направлені так, як це вибрано на рис. 3.3., то, згідно означення (3.8а), лінії вектора \vec{S} будуть утворювати сукупність концентричних кіл, які лежать в горизонтальній площині.

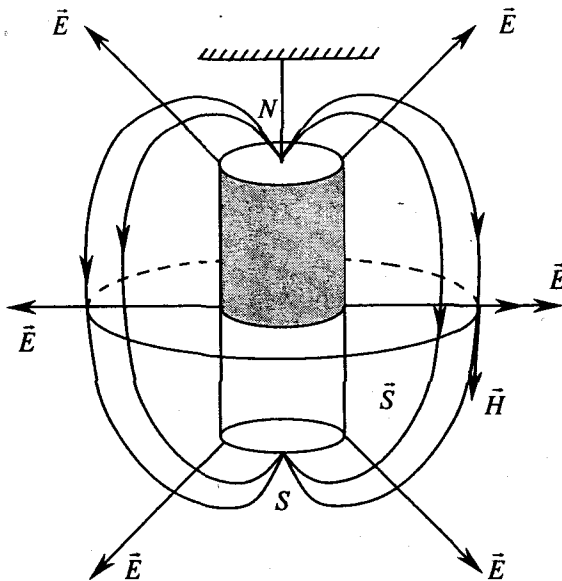


Рис. 3.3. В просторі навколо зарядженого магніту циркулює енергія ЕМП.

3.2. Тепло Джоуля-Ленца і робота сторонніх сил. Потік енергії електромагнітного поля в колі постійного струму.

Розглянемо електродинамічну систему в якій знаходяться сторонні ЕРС. Відомо, що закон Ома при наявності сторонніх сил має вид:

$$\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}^{cm.})$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\lambda} - \vec{E}^{cm.} \quad (3.10)$$

де $\vec{E}^{cm.}$ - напруженість електричного поля сторонніх сил, \vec{E} - напруженість електричного поля струмів, що протікають в середовищі з питомою електропровідністю λ .

Підставимо в закон збереження енергії електромагнітного поля (3.9) вираз для напруженості електричного поля постійного струму. Тоді одержимо:

$$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E}^{cm.} dV = \frac{\partial W}{\partial t} + \int_S \vec{S} d\vec{S} + \int_V \frac{\vec{j}^2}{\lambda} dV \quad (3.11)$$

Формула (3.11) - закон збереження енергії для електродинамічної системи з ЕРС. Ми бачимо, що перший доданок в правій частині (3.11) - це збільшення енергії електромагнітного поля в часі; другий доданок - сумарний потік енергії електромагнітного поля через поверхню S ; третій доданок $\int_V \frac{\vec{j}^2}{\lambda} dV = Q$ - тепло Джоуля-Ленца, яке виділяється в електродинамічній системі.

Таким чином закон збереження (3.11) читається так.

Робота сторонніх сил іде на збільшення енергії електромагнітного поля, покриття джоулевих витрат і частина енергії витікає через поверхню, що обмежує цей об'єм.

Наступний малюнок ілюструє зміст закону збереження енергії для електродинамічної системи з ЕРС.

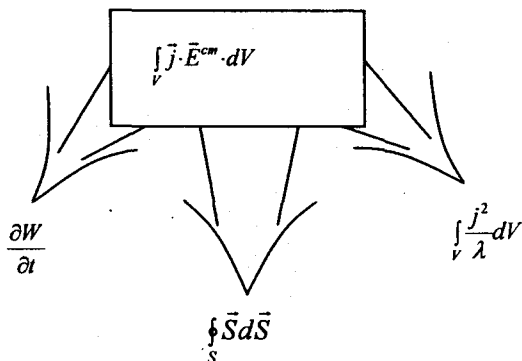


Рис. 3.4. Робота сторонніх сил іде на збільшення енергії електромагнітного поля, покриття джоулевих витрат і частина енергії витікає через поверхню, що обмежує цей об'єм.

Приклад 3.3. Дати пояснення на мові теорії поля процесів розповсюдження енергії ЕМП та нагрівання провідників в колі постійного струму.

Розв'язання: Лінії вектора \vec{j} замкнені: $\text{div} \vec{j} = 0$. Джерело постійного струму виконує певну роботу $\int_V \vec{j} \cdot \vec{E}^{cm} \cdot dV$.

Оскільки $\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \oint_S \lambda \cdot \vec{E} d\vec{S} = 0$, то з урахуванням електростатичної теореми Гауса, приходимо до висновку, що при протіканні постійного струму в провіднику, надлишковий заряд всередині однорідного провідника дорівнює нулю. Тобто, надлишковий заряд, той заряд, що створює стаціонарне електричне поле постійного струму (СЕППС) може з'явитися на поверхні, а також в місцях неоднорідності провідника.

Може бути показано, що явище протікання постійного струму по металевому провіднику зумовлене появою на його поверхні стаціонарних електричних зарядів.

Ці, певним чином розподілені по поверхні провідника заряди, створюють СЕППС як всередині так і зовні провідника зі струмом.

Тому, зовні, на поверхні провідника з постійним струмом (ППС) нормальна складова вектора \vec{E} відмінна від нуля, і визначається поверхневою густиною стаціонарних зарядів. Про напруженість на поверхні провідника можна стверджувати:

$$E_n^{зов} - E_n^{внут} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} \quad (3.12)$$

В силу основної властивості потенціального електричного поля тангенціальна складова вектора \vec{E} на поверхні провідника залишається неперервною:

$$E_r^{вн} = E_r^{зовн}, \quad (3.13)$$

а нормальна складова вектора \vec{E} зазнає розриву, оскільки всередині провідника $E_n^{вн} = 0$.

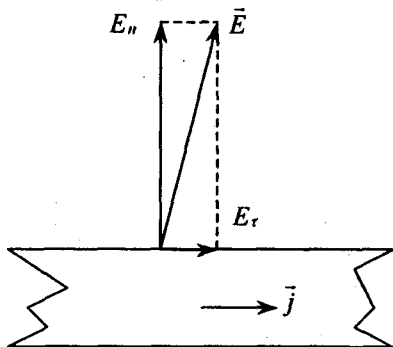


Рис. 3.5. Нахил вектора \vec{E} біля поверхні провідника з постійним струмом визначає потік енергії ЕМП як вздовж ППС, так і всередину його

Для металевого провідника $E_r \ll E_n$ тому, що електропровідність λ металу велика, і тому силові лінії зовнішнього СЕППС направлені до поверхні провідника майже нормально і це поле мало відрізняється від електростатичного.

Але нахил вектора \vec{E} біля поверхні провідника, який зумовлений E_r , має принципове значення: тангенційна складова E_r разом з напруженістю магнітного поля визначає величину електромагнітної енергії, що уливається всередину ППС і перетворюється в тепло Джоуля-Ленца. Нормальна складова напруженості зовнішнього СЕППС, $E_n^{зовн}$, визначає міграцію електромагнітної енергії вздовж ППС.

Сторонні сили всередині джерела струму виконують певну роботу $\int_V \vec{j} \cdot \vec{E}^{cm} \cdot dV$. Еквівалентна цій роботі кількість електромагнітної енергії витікає із джерела струму $\int_{S_{ax}} \vec{S} \cdot d\vec{S}$, потім ця енергія

мігрує, розповсюджується в просторі, і нарешті, „втікає” в провідники зовнішнього кола і там виділяється в формі джоулевого тепла. Таким чином, можна уявляти собі механізм розповсюдження енергії електромагнітного поля. Енергія електромагнітного поля витікає з акумулятора і втікає в зовнішнє електричне коло (цей потік характеризується вектором Пойнтинга), рис. 3.6.

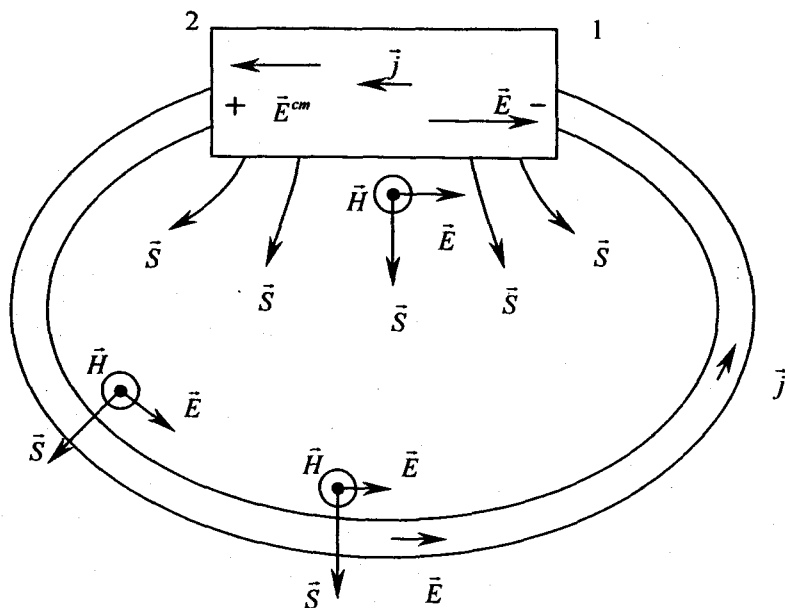


Рис. 3.6. Міграція енергії електромагнітного поля в колі постійного струму та в просторі навколо нього

Може бути показано, що кількість енергії, яка втікає в провідник зовнішнього кола дорівнює джоулевому теплу Q , що виділяється в цьому провіднику:

$$\int_S \vec{S} \cdot d\vec{S} = Q = \int_V \frac{\vec{j}^2}{\lambda} dV \quad (3.14)$$

Таким чином, енергія ЕМП в колі постійного чи квазістаціонарного струму, яка може бути використана, наприклад, як кількість тепло-

ти, або з допомогою електродвигуна перетворена в механічну енергію, переноситься не рухомими ЗЧ вздовж проводів. Ця енергія переноситься від джерела струму до споживачів самим електромагнітним полем в просторі, що оточує провідники з струмом. Робота сторонніх сил виконується в джерелі напруги, із якого енергія витікає назовні, далі вона переміщується в просторі вздовж провідника.

В рамках феноменологічного опису, на електротехнічному рівні, цей процес пояснюється так.

У випадку неоднорідної ділянки кола теплова потужність, що виділяється між точками 1 та 2 дорівнює сумі потужностей електричного поля та поля сторонніх сил:

$$R_a i^2 = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot i + \left(\int_1^2 \vec{E}^{em} \cdot d\vec{l} \right) \cdot i \quad R_a i^2 = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot i + \varepsilon_{12} \cdot i,$$

де ε_{12} - електрорушійна сила на ділянці кола 12

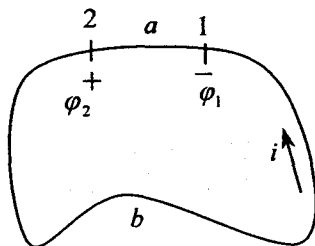


Рис. 3.6. Коло постійного струму з ЕРС на ділянці a

Якщо цей результат застосувати до всього кола, то ($\varphi_1 = \varphi_2$) і тоді повна теплова потужність дорівнює:

$$Q = i \cdot \varepsilon_{12}$$

Тобто, кількість теплоти, що виділяється за одну секунду у всьому колі дорівнює потужності тільки сторонніх сил. Робота сторонніх сил виконується на ділянці a , а кількість теплоти виділяється у всьому колі. Це означає, що ця кількість теплоти є продукт роботи тільки сторонніх сил. А роль електричного поля (СЕППС, що органічно зв'язане з магнітним полем, і в рамках феноменологічного опису, існування якого являється однією з сторін електромагнітного процесу в результаті якого відбувається перенесення енергії «по проводах») зводиться (як ми тепер знаємо із теорії ЕМП) до того, що воно переносить і перерозподіляє цю теплоту по різним ділянкам кола.

Робота кулонівських сил (сил з боку СЕППС) $i(\varphi_1 - \varphi_2)$ на ділянці a буде від'ємною, а на ділянці b додатною, а в сумі робота кулонівських сил у всьому колі дорівнює нулю. На ділянці a буде виділятися

кількість теплоти $i^2 R_a$ еквівалентна алгебраїчній сумі позитивної роботи ЕРС та від'ємної роботи кулонівських сил $i(\varphi_1 - \varphi_2)$:

$$i^2 R_a = Q_a = (\varphi_1 - \varphi_2)i + \varepsilon_a \cdot i$$

Надлишок роботи ЕРС над кількістю цього тепла $i^2 R_a$ буде виділятися струмом на ділянці b :

$$\varepsilon_a \cdot i - i^2 R_a = \varepsilon_a i - \varepsilon_a i - i(\varphi_1 - \varphi_2) = i(\varphi_2 - \varphi_1) = i \cdot i R_b = i^2 R_b$$

оскільки

$$iR = i(R_a + R_b) = \varepsilon = \varepsilon_a,$$

тому різниця потенціалів між точками 2 та 1 дорівнює:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon_a - iR_a = iR_b = R_b \frac{\varepsilon_a}{R_b + R_a} > 0$$

Тобто, такий опис, в принципі, не в змозі пояснити механізм і природу явища, але він дає опис, який підтверджується дослідами та досвідом, на мові величин, що експериментально безпосередньо вимірюються: сили струмів, напруги, активні опори. І тому у значній кількості фізиків, які мають справу з таким приладами та задачами, що формулюються в термінах виключно феноменологічних, електротехнічних величин складається враження, що фізика суто експериментально-дослідна наука. І в цьому випадку (як і в інших, розглянутих раніше, наприклад: протікання струму через конденсатор, чи розрядка зарядка його; магнітне поле породжується струмами зміщення) ми знову бачимо, що тільки теорія може сказати що ж вимірюється чи спостерігається на досліді.

В локальній формі закон збереження енергії (3.11) має вигляд:

$$\vec{j} \cdot \vec{E}^{em} = \frac{j^2}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B} \vec{H}}{2} \right) + \text{div} \left[\vec{E} \cdot \vec{H} \right] \quad (3.15)$$

Робота сторонніх сил, яка виконується в джерелі струму в одиницю часу в одиниці об'єму іде на покриття джоулевих витрат, на збільшення енергії електромагнітного поля і на покриття витрат енергії, яка витікає кожної секунди з цього одиничного об'єму через поверхню.

Ще раз підкреслимо, що носієм енергії струму являється електромагнітне поле, яке локалізоване як в провіднику так і в оточуючому його просторі, а не носії струму (ЗЧ). В полі постійних струмів розподіл зарядів в просторі повинен бути стаціонарним. Але, якщо поле є стаціонарним, то воно повинно бути тотожним з полем електростатичним. А та обставина, що в даній точці провідника зі струмом одні носії заряду змінюються іншими, внаслідок існування струму, не може (нехтуючи флуктуаціями) позначатися на напруженості електричного поля,

бо макроскопічна густина заряду в кожній точці провідника залишається незмінною. Сили поля виконують роботу, а еквівалентне цій роботі тепло виділяється в провіднику. Оскільки ситуація стаціонарна, вся енергія, яка виділяється в колі повинна неперервно компенсуватися за рахунок інших видів енергії.

1.3. Закон збереження імпульсу в системі „ЗЧ-ЕМ поле”.

Густина імпульсу електромагнітного поля. Густина потоків енергії і імпульсу в електромагнітному полі, тиск світла.

Розглянемо електродинамічну систему, в якій є заряджені частинки, що рухаються довільно. Знайдемо зміну в часі імпульсу заряджених частинок:

$$\frac{d\vec{P}_q}{dt} = \int_V \frac{d\vec{P}_1}{dt} \cdot dV \quad (3.16)$$

де величина $\frac{d\vec{P}_1}{dt}$ – швидкість зміни в часі імпульсу заряджених частинок в одиниці об'єму.

Але ця величина, згідно рівняння руху дорівнює:

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = \vec{f} = \rho\vec{E} + [\vec{j} \cdot \vec{B}] \quad (3.17)$$

Тоді зміна імпульсу частинок системи в часі дорівнює:

$$\frac{d\vec{P}_q}{dt} = \int_V (\rho\vec{E} + [\vec{j} \cdot \vec{B}]) dV \quad (3.18)$$

Використаємо рівняння Максвелла:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

для того щоб $\frac{d\vec{P}_q}{dt}$ подати через величини, що характеризують електромагнітне поле. Для цього з рівнянь Максвелла знайдемо густину заряду ρ та густину струму \vec{j} і підставимо в рівняння (3.18):

$$\frac{d\vec{P}_q}{dt} = \int_V \left(\vec{E} \cdot \operatorname{div} \vec{D} + \left(\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{B} \right) dV$$

Симетризуємо підінтегральний вираз, додавши $\vec{H} \cdot \operatorname{div} \vec{B}$ та $\left(\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \vec{D}$, які очевидно дорівнюють нулеві. В результаті одержуємо:

$$\frac{d\bar{P}_q}{dt} = \int_V \{ \bar{E} \cdot \text{div} \bar{D} + \bar{H} \cdot \text{div} \bar{B} + [(\text{rot} \bar{H} - \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}) \cdot \bar{B}] + [(\text{rot} \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}) \cdot \bar{D}] \} dV$$

А після деяких перетворень можемо записати:

$$\frac{d\bar{P}_q}{dt} = \int_V (\bar{E} \cdot \text{div} \bar{D} + \bar{H} \cdot \text{div} \bar{B} - [\bar{B} \cdot \text{rot} \bar{H}] - [\bar{D} \cdot \text{rot} \bar{E}]) dV - \frac{\partial}{\partial t} \int_V [\bar{D} \cdot \bar{B}] dV$$

1-й інтеграл можна перетворити в інтеграл по поверхні, що обмежує електродинамічну систему і з допомогою тензора напруг Максвелла цей поверхневий інтеграл можна звести до поверхневих сил, що діють на поверхні, яка обмежує об'єм V [10, 57], [16, 212].

Таким чином маємо:

$$\frac{d\bar{P}_q}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V [\bar{D} \cdot \bar{B}] dV = \bar{F}_{\text{нов.}} \quad (3.19)$$

Якщо розглянути все електромагнітне поле, то в точках на поверхні S напруженості електричного та магнітного полів прямують до нуля.

$$E \approx \frac{1}{r^2} \rightarrow 0 \quad H \approx \frac{1}{r^2} \rightarrow 0$$

Тому $\bar{F}_{\text{нов.}} = 0$, і попередня рівність набуває вигляду:

$$\frac{d}{dt} (\bar{P}_q + \int_V [\bar{D} \cdot \bar{B}] dV) = 0 \quad (3.20)$$

Таким чином ми одержуємо закон збереження імпульсу для системи, яка складається з заряджених частинок та електромагнітного поля:

$$\bar{P}_q + \int_V [\bar{D} \cdot \bar{B}] dV = \text{const} \quad (3.21)$$

Сумарний імпульс заряджених частинок та імпульс електромагнітного поля для замкненої системи зберігається.

Тобто, кожна одиниця об'єму простору, в якій існує електромагнітне поле, характеризується об'ємною густиною імпульсу \bar{g} :

$$\bar{g} = [\bar{D} \cdot \bar{B}] \quad (3.22)$$

Таким чином імпульс електромагнітного поля сам по собі не зберігається, а зберігається сума механічного імпульсу та імпульсу електромагнітного поля.

Якщо розглянути неповне поле, то зміна сумарного імпульсу зарядів та імпульсу електромагнітного поля дорівнює потоку імпульсу через поверхню, що обмежує цей об'єм.

Враховуючи, що:

$$\bar{D} = \epsilon \epsilon_0 \bar{E};$$

$$\bar{B} = \mu \mu_0 \bar{H}$$

Можемо знайти зв'язок між густиною імпульсу \vec{g} та вектором Пойнтінга \vec{S} :

$$\vec{g} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 [\vec{E} \cdot \vec{H}] = \frac{\vec{S} \cdot \varepsilon \cdot \mu}{c^2} = \frac{\vec{S}}{v^2} \quad (3.23)$$

де v - швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль в середовищі:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Оскільки електромагнітне поле характеризується густиною імпульсу, то можна говорити і про густину моменту імпульсу поля $\vec{l} = [\vec{r} \cdot \vec{g}]$. Тому в електродинамічній системі буде мати місце закон збереження моменту імпульсу:

$$\vec{L}_{\text{мех}} + \int_V \vec{l} \cdot dV = \text{const} \quad (3.24)$$

Тобто, векторна сума механічного моменту імпульсу та моменту імпульсу ЕМП залишається незмінною для замкненої електродинамічної системи.

В прикладі, що ілюструє циркуляцію енергії поля між пластинами зарядженого циліндричного конденсатора, рис. 3.2., сумарний момент імпульсу поля та механічного моменту імпульсу буде зберігатися.

Приклад 3.4. Знайти потік енергії та імпульсу плоскої електромагнітної хвилі через плоску поверхню ΔS орієнтовану перпендикулярно до напрямку розповсюдження хвилі, рис.3.7.

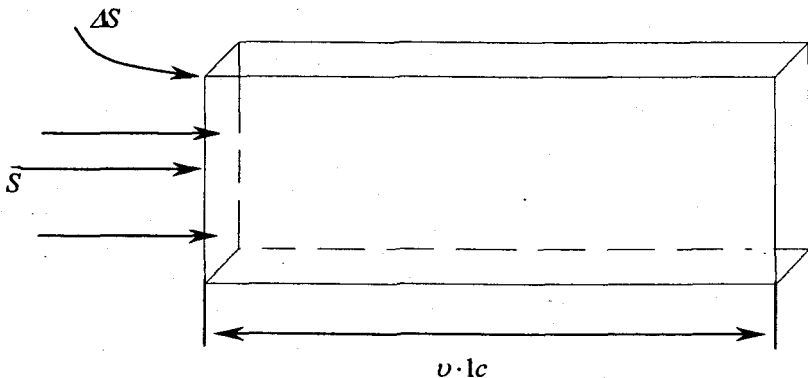


Рис. 3.7. Знаходження потоку енергії електромагнітного поля

Розв'язання: Як відомо, зв'язок між напруженістю електричного і магнітного полів плоскої хвилі такий:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H$$

Розглянемо площадку ΔS , нормально до якої падає електромагнітна хвиля. Тоді за 1 секунду ця електромагнітна хвиля пройде шлях, що дорівнює:

$$v \cdot 1 \text{ сек}$$

Тоді через ΔS за одну секунду протече електромагнітна енергія, яка дорівнює:

$$w \cdot \Delta V = w \cdot \Delta S \cdot v \cdot 1$$

Оскільки для електромагнітної хвилі густина енергії дорівнює:

$$w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2}{2} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2,$$

то через одиницю поверхні протече енергія, що чисельно дорівнює:

$$w \cdot v = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \cdot \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu_0 \mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu_0 \mu}} \cdot E^2 \quad (3.25)$$

З іншого боку, вектор Пойнтінга дорівнює (оскільки $H = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E$):

$$\vec{S} = [\vec{E} \cdot \vec{H}] = E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \cdot \vec{n}, \quad (3.26)$$

де \vec{n} – одиничний орт в напрямку розповсюдження хвилі.

Порівнюючи ці два останні вирази знаходимо зв'язок густини потоку енергії електромагнітного поля з густиною енергії електромагнітного поля:

$$S = I = w \cdot v \quad (3.27)$$

Аналогічно можна впевнитись, що потік густини імпульсу електромагнітного поля чисельно дорівнює тиску електромагнітного поля, при умові, що вся енергія електромагнітного поля поглинається поверхнею.

$$p = g \cdot v = \frac{S}{v^2} v = \frac{S}{v} \quad (3.28)$$

і тому з урахуванням (3.27) одержуємо:

$$p = w \quad (3.29)$$

Або по іншому. Дійсно ($\vec{g} = [\vec{D} \cdot \vec{B}]$), для плоскої електромагнітної хвилі маємо:

$$g = \varepsilon\varepsilon_0 E \cdot \mu\mu_0 H = \varepsilon\varepsilon_0 E \cdot \mu\mu_0 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu_0 \mu}} \cdot E = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \cdot \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu_0 \mu},$$

а швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu_0\mu}}$$

тому $p = g \cdot v = w$

Якщо електромагнітна хвиля відбивається від деякої поверхні, то тиск дорівнює:

$$p = (1 + \alpha) \cdot g \cdot v = (1 + \alpha) \cdot w \quad (3.30)$$

де α – коефіцієнт відбивання.

Питання для самоперевірки

1. Вивести із рівнянь Максвелла закон збереження енергії для довільної електродинамічної системи.
2. Який фізичний зміст вектора Пойнтінга?
3. Обґрунтувати та пояснити закон збереження енергії в електродинамічній системі, в якій є ЕРС.
4. Пояснити міграцію енергії електромагнітного поля в колі постійного струму.
5. Обґрунтувати закон збереження імпульсу в електродинамічній системі.
6. Знайти зв'язок між вектором Пойнтінга та вектором густини імпульсу електромагнітного поля.
7. Привести приклади, в яких проявляються закони збереження енергії імпульсу, моменту імпульсу для систем з електромагнітним полем та частинками.

РОЗДІЛ 4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ



4.1. Хвильові рівняння для векторів поля, механізм розповсюдження електромагнітних хвиль

Розглянемо область простору, в якій відсутні вільні заряди та струми

$$\rho = 0, \quad \vec{j} = 0$$

Скористаємося наступними двома рівняннями Максвела для того, щоб знайти диференційне рівняння, що описує розповсюдження електромагнітного поля в просторі і в часі:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Знайдемо спочатку похідну по часу від 2-го рівняння Максвела системи (4.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (4.2)$$

Підставляючи в (4.2) похідну $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ з першого рівняння системи (4.1) одержуємо:

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu \mu_0} \operatorname{rot} \vec{E} \right) \quad (4.3)$$

Використовуючи формулу векторного аналізу $\nabla \cdot [\nabla \vec{E}] = \nabla \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$ перепишемо (4.3):

$$-\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$$

Оскільки густина заряду $\rho = 0$, то $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ і тоді із останнього одержуємо:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.4)$$

Це хвильове рівняння для вектора напруженості електричного поля \vec{E} .

Аналогічно можна впевнитись, що хвильове рівняння для вектора \vec{B} має вигляд:

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.5)$$

Ці хвильові рівняння описують розповсюдження електромагнітного поля в просторі і часі, зокрема розв'язком цих рівнянь є плоска електромагнітна хвиля.

Хвильове рівняння можна записати так:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

де $v^2 = \frac{c^2}{\epsilon\mu}$, і як ми далі впевнимось, v - швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль в середовищі з діелектричною та магнітною проникністю ϵ і μ відповідно.

Система рівнянь Максвела (4.1) дозволяє надати наглядної фізичної інтерпретації механізму поширення в просторі електромагнітного поля (ЕМП).

Розглянемо деяку точку поля, в якій створено певним чином електричне поле \vec{E}_1 . Оскільки в просторі немає вільних зарядів, електричне поле буде зменшуватись (бо немає зарядів, які б підтримували це поле).

Тоді вектор похідної $\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$ направлений протилежно \vec{E}_1 . Але згідно рівняння Максвела для струмів зміщення, вектор $\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$ породжує Магнітне поле. Значить буде виникати вихрове магнітне поле, бо змінне електричне поле породжує вихрове магнітне поле з індукцією \vec{B}_1 , рис. 4.1. Силові лінії магнітної індукції \vec{B}_1 , лежать в площині перпендикулярній $\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$. Поле \vec{B}_1 , в околі початкової точки буде зменшуватись, тому $\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$ направлено так, як показано на рис. 4.1. Але $\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$, згідно закону електромагнітної індукції, в свою чергу породжує вихрове електричне \vec{E}_2 , яке компенсує (зменшує) поле \vec{E}_1 в попередній точці простору.

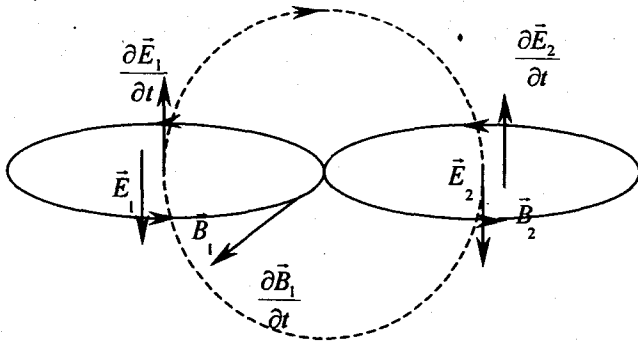


Рис. 4.1. Механізм розповсюдження електромагнітних хвиль.

Таким чином в сусідній точці, що знаходиться нескінченно близько до першої, породжується поле \vec{E}_2 , а в попередній точці поля \vec{E}_1 знищується і т.д. Таким чином, на основі рівнянь Максвелла (4.1) стає зрозумілим механізм розповсюдження електромагнітних хвиль. Поле розповсюджується в усіх напрямках. У вакуумі цей процес нескінченний.

4.2. Розв'язок хвильових рівнянь у вигляді плоских хвиль.

Швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль

Знайдемо розв'язок хвильового рівняння у вигляді плоскої хвилі. Хвильове рівняння в декартовій системі координат має вигляд:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.6)$$

Якщо вважати, що електромагнітне поле розповсюджується в одному напрямку то попереднє рівняння спрощується:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Очевидно, що останнє рівняння еквівалентне такій формі:

$$-\nu^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.7)$$

Хвильове рівняння (4.7) можна подати у вигляді:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \right) \vec{E} = 0 \quad (4.8)$$

Для знаходження розв'язку його введемо нові змінні величини:

$$\xi = t - \frac{x}{v}, \quad \eta = t + \frac{x}{v} \quad (4.9)$$

Тоді старі змінні (величини x , t) зв'язані з новими ξ та η співвідношеннями:

$$t = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad x = \frac{(\eta - \xi)v}{2} \quad (4.10)$$

А оператори частинних похідних по нових змінних, з урахуванням (4.10), дорівнюють:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(-\frac{v}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{v}{2} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Тобто з допомогою нових змінних одновимірне хвильове рівняння (4.8) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \bar{E} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \xi \partial \eta} &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Як бачимо, в нових змінних хвильове рівняння (4.7) має простіший вигляд; і що важливо, одразу маємо очевидний розв'язок цього рівняння:

$$\bar{E}(\xi, \eta) = \bar{E}_1(\xi) + \bar{E}_2(\eta) \quad (4.12)$$

Розглянемо 1-й доданок:

$$\bar{E}_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Виявляється, що цей розв'язок описує розповсюдження ЕМ хвилі (або будь-якого електромагнітного збурення) у додатному напрямку вісі OX .

А розв'язок $\bar{E}_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$ описує розповсюдження хвилі у від'ємному напрямку вісі OX , причому \bar{E}_1 і \bar{E}_2 — довільні функції. Суттєво тут те, що вони залежать від x і t в такій комбінації, $\left(t - \frac{x}{v}\right)$ і $\left(t + \frac{x}{v}\right)$, як від аргументів.

Залежність деякої функції від комбінації змінних t , x як $\left(t - \frac{x}{v}\right)$, це теж саме, що і залежність від $(x - vt)$. Дійсно:

$$\bar{E}_1(t - \frac{x}{v}) = \bar{E}_1(-\frac{x - vt}{v}) = \psi(x - vt) \quad (4.13)$$

Щоб не виникло непорозумінь і недовіри до розв'язку хвильового рівняння у вигляді (4.13) розглянемо приклад.

Приклад 4.1. Безпосередньо впевнитись, що функція $\psi(x - vt)$ являється розв'язком відповідного хвильового рівняння (4.7).

Розв'язання: Дійсно, другі похідні функції $\psi(x - vt)$ по координаті x та по часу дорівнюють:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial (x - vt)} \cdot \frac{\partial (x - vt)}{\partial x} = \psi'(x - vt)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi''(x - vt)$$

а похідна по часі

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial (x - vt)} \cdot \frac{\partial (x - vt)}{\partial t} = \psi'(x - vt) \cdot (-v)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \psi''(x - vt) \cdot v^2$$

тобто, ми бачимо, що функція $\psi(x - vt)$ є розв'язок рівняння (4.7):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Таким чином будь-яка функція, що залежить від комбінації t і x як від $(x - vt)$, або як $(t - \frac{x}{v})$ буде розв'язком хвильового рівняння.

Із розв'язку $\bar{E}_1(t - \frac{x}{v})$ видно, що для деякої фіксованої точки простору напруженість поля з часом змінюється.

З іншого боку, в довільний фіксований момент часу поле в різних точках простору буде різне. Але воно буде мати теж саме значення для таких комбінацій t і x , коли:

$$t - \frac{x}{v} = \text{const}$$

або, що теж саме, коли комбінація змінних t та x задовольняє співвідношенню:

$$x = vt + \text{const}$$

Цей висновок можна сформулювати по іншому: якщо в довільний момент часу t_1 в точці x_1 поле мало деяке значення E_i , то таке саме значення поля буде спостерігатись в точці x_2 в наступний момент часу $t_2 = t_1 + \Delta t$, якщо тільки

$$x_2 - x_1 = \Delta x = v \Delta t,$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

Таким чином, всі значення поля переміщуються вздовж вісі Ox з швидкістю v , рис.4.2. Це означає, що сама функція $\vec{E}_1(t - \frac{x}{v})$ переміщується в просторі зі швидкістю v , тобто це – хвиля

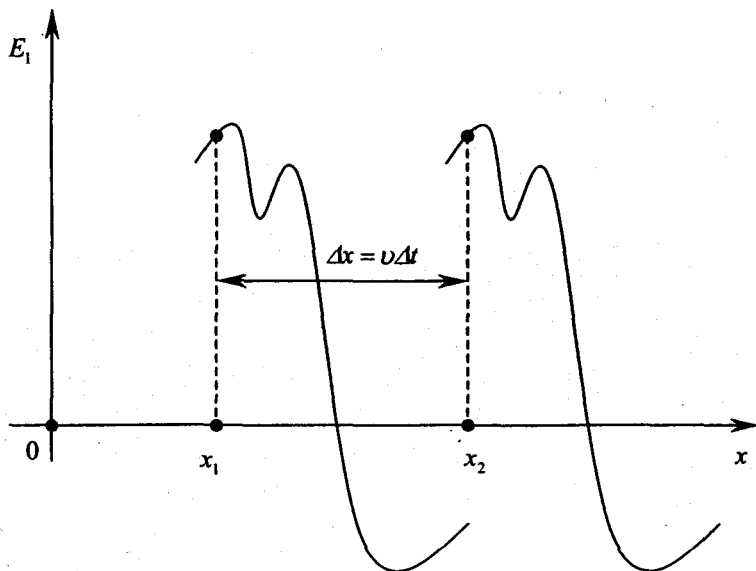


Рис. 4.2. Значення поля в точці x_2 в момент часу t_2 буде таким же, як і значення поля в точці x_1 в попередній момент часу $t_1 = t_2 - \Delta t$ в попередній точці простору $x_1 = x_2 - \Delta x$

Тому можна дати таке означення хвилі.

Хвиля – це довільний фізичний процес, який описується фізичною величиною, що залежить від таких комбінацій t і x :

$$(x - vt) \text{ або } (t - \frac{x}{v}), \text{ як від аргументу.}$$

Повертаючись до хвильового рівняння (4.4), (4.7), або (4.11) можемо сказати, що розв'язок їх у вигляді $\vec{E}_1(t - \frac{x}{v})$ описує хвильовий процес, причому швидкість розповсюдження дорівнює квадратному коріню із знаменника коефіцієнта, що стоїть перед $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ в хвильовому рів-

нянні (4.6). Тобто, $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ — це швидкість розповсюдження електромагнітної хвилі в однорідному та ізотропному середовищі.

Тобто, якщо ми маємо диференціальне рівняння такого вигляду:

$$\nabla^2 \vec{E} - b^2 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

то відразу можна стверджувати, що розв'язком його є плоска хвиля, швидкість розповсюдження якої дорівнює $v = \frac{1}{b}$.

Нагадаємо аналогію. Якщо деякий процес описується диференціальним рівнянням $\ddot{x} + ax = 0$, то розв'язком його будуть гармонічні незатухаючі коливання $x = A \cdot \sin(\sqrt{a} \cdot t + \alpha)$, причому частота коливань $\omega = \sqrt{a}$.

4.3. Плоскі монохроматичні хвилі, зв'язок між векторами \vec{E} та \vec{H} в плоскій хвилі, що розповсюджується в однорідному та ізотропному діелектрику

Згадаємо, що плоска хвиля це така хвиля, в якій вектор фізичної величини (вектор хвилі), наприклад \vec{E} , має одне і теж саме значення в будь-якій площині перпендикулярній \vec{v} . Тобто хвильова поверхня являє собою площину. І згідно попереднього, вектор \vec{E} залежить від $t - \frac{x}{v}$ як від аргументу, $\vec{E}(t - \frac{x}{v})$.

Нехай в напрямку, що визначається ортом \vec{n} (вісь OX') розповсюджується плоска монохроматична хвиля, рис. 4.3, вектор напруженості електричного поля якої, \vec{E} , дорівнює:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos \omega(t - \frac{x'}{v}) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\omega t - \frac{\omega x'}{v}) \quad (4.14)$$

Запишемо чому дорівнює значення вектора \vec{E} в довільній точці A нашої системи координат XOY . Точка простору A визначається радіус-вектором \vec{r} .

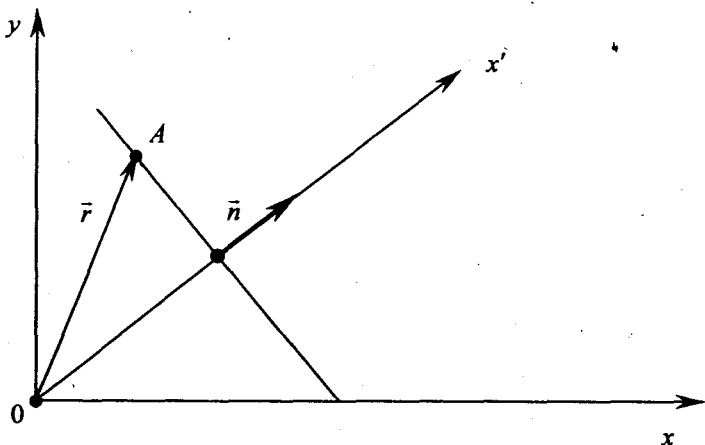


Рис. 4.3. Плоска хвиля розповсюджується в напрямку \vec{n}

Якщо ввести хвильовий вектор:

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v} \cdot \vec{n}, \quad (4.15)$$

і оскільки $x' = \vec{n} \cdot \vec{r} = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma$, де x, y, z – координати точки A , а α, β, γ – кути, що утворює напрямок розповсюдження хвилі (\vec{n}) відповідно з осями OX, OY, OZ , то фаза хвилі, яка розповсюджується вздовж напрямку \vec{n} , в точці A визначається так:

$$\omega \cdot t - \frac{\omega \cdot x'}{v} = \omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r}$$

Тоді для рівняння плоскої хвилі, яка розповсюджується в довільному напрямку \vec{n} одержуємо:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Дуже зручно подавати рівняння цієї плоскої монохроматичної хвилі для вектора \vec{E} у вигляді:

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r})})$$

Знак Re , як правило, не пишуть, вважаючи, що розглядається як раз реальна частина цього виразу. І тоді (4.14) переписється так:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (4.16)$$

Це плоска монохроматична хвиля для вектора \vec{E} .

Користуючись рівняннями Максвела знайдемо зв'язок між векторами поля в плоскій монохроматичній хвилі. Оскільки хвильове рівняння для вектора \vec{B} має такий самий вигляд як і для вектора \vec{E} , то розв'язком хвильового рівняння для \vec{B} (4.5) буде:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (4.17)$$

Знайдемо дивергенцію поля \vec{D} . Знаходження дивергенції зводиться до знаходження частинних похідних, і враховуючи, що

$$\operatorname{div} \vec{a}(\psi) = \frac{d\vec{a}}{d\psi} \operatorname{grad} \psi$$

тому одержуємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \varepsilon \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_0 e^{i\omega t} \cdot (-i \cdot \vec{k}) \cdot e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \\ &= \varepsilon \varepsilon_0 (-i \cdot \vec{k} \cdot \vec{E}) = 0 \end{aligned}$$

Тобто рівняння Максвелла $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ дає таке співвідношення між хвильвим вектором \vec{k} та вектором \vec{E} :

$$-i \cdot (\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0 \quad (4.18)$$

Аналогічно рівняння $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ приводить до рівності:

$$-i \cdot (\vec{k} \cdot \vec{B}) = 0 \quad (4.19)$$

А знаходження $\operatorname{rot} \vec{E}$, з використанням формули векторного аналізу:

$$\operatorname{rot} \vec{a}(\psi) = [\nabla \vec{a}(\psi)] = \left[\nabla \psi \cdot \frac{d\vec{a}}{d\psi} \right]$$

якщо $\psi = i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ дає:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -i \cdot [\vec{k} \cdot \vec{E}]$$

Тобто одержуємо:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -i \cdot [\vec{k} \cdot \vec{E}] \quad (4.20)$$

аналогічно, для ротора напруженості магнітного поля маємо:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -i \cdot [\vec{k} \cdot \vec{H}] \quad (4.21)$$

Але згідно закону електромагнітної індукції $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, а

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \text{ тому після знаходження похідних по часу } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ та } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

векторів поля \vec{B} та \vec{D} , які визначаються формулами (4.16) (4.17) одержуємо алгебраїчні рівняння:

$$-i \cdot [\vec{k} \cdot \vec{E}] = -\mu \mu_0 \cdot i \cdot \omega \cdot \vec{H} \quad (4.22)$$

$$-l \cdot [\vec{k} \cdot \vec{H}] = \varepsilon \varepsilon_0 \cdot l \cdot \omega \cdot \vec{E} \quad (4.23)$$

Тоді отримуємо:

$$\vec{H} = \frac{[\vec{k} \cdot \vec{E}]}{\mu \mu_0 \omega}, \quad \vec{E} = -\frac{[\vec{k} \cdot \vec{H}]}{\varepsilon \varepsilon_0 \omega} \quad (4.24)$$

Висновки:

1. В електромагнітній хвилі вектор напруженості електричного поля перпендикулярний хвильовому вектору:

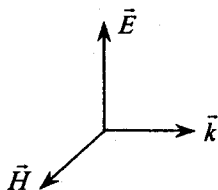
$$\vec{E} \perp \vec{k} : (\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0,$$

де $\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{n}$;

вектор \vec{H} також перпендикулярний хвильовому вектору ($\vec{B} \perp \vec{k}$):

$$(\vec{k} \cdot \vec{B}) = 0$$

2. Вектор \vec{H} перпендикулярний \vec{E} , причому трійка векторів \vec{k} , \vec{E} та \vec{H} утворюють правий гвинт:



3. Зв'язок між значеннями напруженості електричного та магнітного полів електромагнітної хвилі знаходимо використовуючи останню формулу:

$$\vec{H} = \frac{[\vec{k} \cdot \vec{E}]}{\mu \mu_0 \omega}$$

$$H = \frac{1}{\mu \mu_0 \omega} \cdot \frac{\omega}{v} \cdot E,$$

оскільки $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$, то

$$H = \frac{E \sqrt{\varepsilon \mu}}{\mu \mu_0 c} = E \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}}$$

і тоді:

$$\sqrt{\mu\mu_0} \cdot H \neq \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot E \quad (4.25)$$

Такий зв'язок між векторами поля в плоскій електромагнітній хвилі.

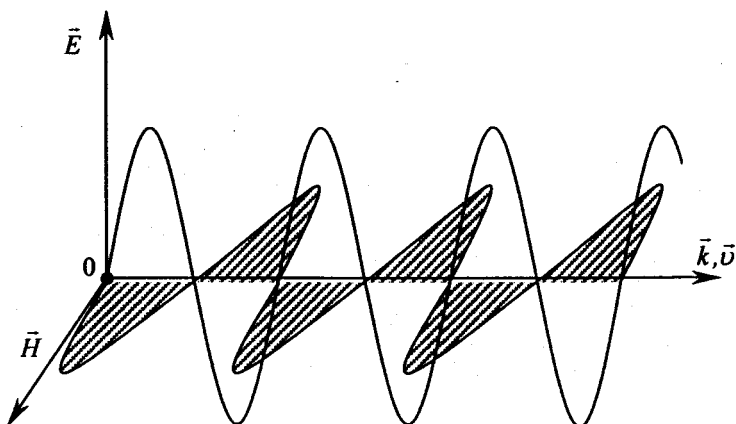


Рис. 4.4. Миттєве зображення („фотографія”) плоскої гармонічної електромагнітної хвилі у вакуумі

Якщо хвиля розповсюджується у вакуумі, то

$$\sqrt{\varepsilon_0} \cdot E = \sqrt{\mu_0} \cdot H$$

Зауважимо ще раз: всі ці результати були отримані на основі рівнянь Максвелла.

4.4. Хвильовий пакет, групова та фазова швидкості. Співвідношення невизначеностей (СН)

Розглянемо суперпозицію плоских хвиль, хвильові вектори яких лежать в інтервалі:

$$2\Delta k : \text{від } k_0 - \Delta k \text{ до } k_0 + \Delta k,$$

де k_0 – центральне значення хвильового вектора. Іншими словами нам необхідно знати значення такого інтегралу

$$\psi = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} C(k) \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} dk \quad (4.26)$$

де $C(k)$ – амплітуда хвилі, хвильовий вектор якої дорівнює k .

В більшості фізичних явищ, в яких проявляється взаємодія електромагнітних хвиль з речовиною частота є функцією хвильового вектора. Ця залежність частоти від k , $\omega(k)$, називається законом дисперсії.

Розкладемо цю функцію в ряд:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \cdot \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} + \frac{1}{2}(k - k_0)^2 \cdot \left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_{k_0} + \dots$$

і обмежимося в цьому розкладі двома доданками. Підставимо такий закон дисперсії $\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0) \frac{d\omega}{dk}$ в (4.26). Далі будемо вважати, що амплітуди сукупності хвиль приблизно однакові, а хвиля розповсюджується в напрямку вісі OX . В результаті (4.26) набуває вигляду:

$$\psi = C \cdot \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i[\omega_0 t + (k - k_0) \frac{d\omega}{dk} t - kx]} dk \quad (4.27)$$

Введемо позначення:

$$\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} = g, \quad k - k_0 = \xi$$

Тоді після інтегрування виразу (4.27) одержуємо:

$$\begin{aligned} \psi &= C(k) \cdot \int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \cdot e^{i\xi(gt - x)} d\xi = C(k) \cdot e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{i\xi(gt - x)} d\xi = \\ &= C \cdot e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \cdot \left. \frac{e^{i\xi(gt - x)}}{i \cdot (gt - x)} \right|_{-\Delta k}^{\Delta k} \\ \psi(x, t) &= 2C \cdot e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \cdot \frac{\sin[\Delta k \cdot (gt - x)]}{\Delta k \cdot (gt - x)} \cdot \Delta k \quad (4.28) \end{aligned}$$

При цьому використанні формули:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \sin z &= -i \cdot \operatorname{sh}(iz) \end{aligned}$$

Результат, що ми одержали розуміють так. Множник $2C \cdot e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}$ слід розглядати як монохроматичну хвилю частоти ω_0 , а множник

$$\frac{\sin[\Delta k \cdot (gt - x)]}{\Delta k \cdot (gt - x)} \cdot \Delta k \quad (4.29)$$

- це амплітуда хвилі, яка, як видно із означення (4.29), залежить і від координат і від часу.

Тобто, в результаті суперпозиції дуже великого числа плоских монохроматичних хвиль, хвилеві вектори яких лежать в інтервалі $2\Delta k$, отримано монохроматичну хвилю з модульованою певним законом амплітудою.

З метою більш детального аналізу одержаного результату введемо позначення:

$$u = \Delta k \cdot (gt - x)$$

Виявляється, що амплітуда хвилі, одержаної в результаті суперпозиції, (4.28), модульована такою функцією:

$$\frac{\sin u}{u},$$

що залежить від u .

Відмітимо перш за все властивості функції $\frac{\sin u}{u}$:

$$\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1, \text{ якщо } u \rightarrow 0;$$

$$\frac{\sin u}{u} \rightarrow 0, \text{ якщо } u \rightarrow \pm\pi, \pm 2\pi \dots$$

Тобто, модульована законом $\frac{\sin u}{u}$ «монохроматична хвиля» (4.28)

– результат суперпозицій монохроматичних хвиль, хвильові вектори яких лежать у вузькому інтервалі $\Delta k \ll k_0$. Результат суперпозицій (4.28) якісно можна подати з допомогою рис. 4.5.

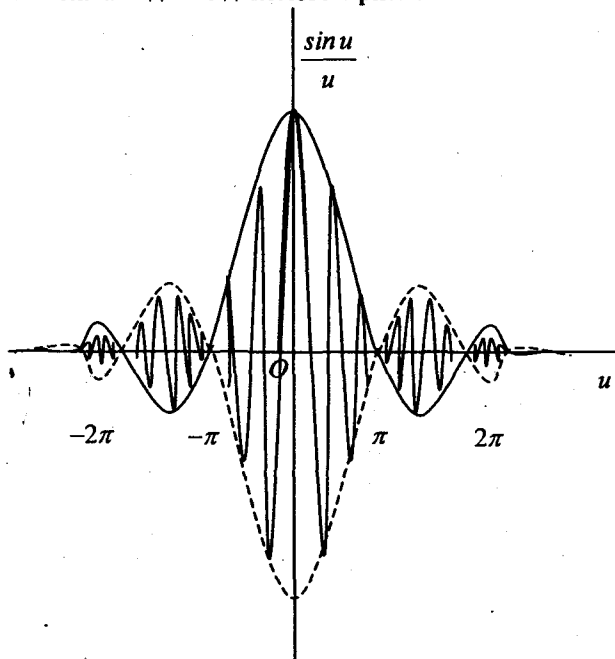


Рис. 4.5. В результаті суперпозиції монохроматичних хвиль утворюється хвильовий пакет, якщо $\Delta k \ll k_0$

Всередині огинаючої $\frac{\sin u}{u}$ спостерігається з частотою ω_0 хвилі, що біжить.

Фаза $\omega_0 t - k_0 x$ буде мати певне одне і те ж значення в різних точках простору і в різні моменти часу, але при таких значеннях x і t , що задовольняють умові $\omega_0 t - k_0 x = \text{const}$.

Тобто, швидкість з якою „біжить” фаза її визначається із умови:

$$\omega_0 t - k_0 x = \text{const}$$

Нагадаємо, що фазовою швидкістю називається швидкість переміщення деякого значення фази.

Звідси отримуємо значення фазової швидкості

$$v_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0} \quad (4.30)$$

Оскільки $\Delta k \ll k_0$, то в межах інтервалу Δk можна вважати, що

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}$$

Результат розв'язку показує, що в результаті суперпозиції монохроматичних хвиль, хвильові вектори яких лежать в інтервалі $\Delta k \ll k_0$, утворюють так званий хвильовий пакет, рис. 4.5.

Але швидкість переміщення хвильового пакету (швидкість переміщення огинаючої $\frac{\sin u}{u}$) визначається тепер із умови:

$$u = \Delta k \cdot (gt - x) = \text{const}$$

Тобто швидкість групи хвиль, або групова швидкість, дорівнює:

$$v_{gp} = \frac{dx}{dt} = g = \frac{d\omega}{dk}$$

Знайдемо зв'язок між груповою та фазовою швидкостями:

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} (v_\phi \cdot k) = v_\phi + k \frac{dv_\phi}{dk}$$

Оскільки $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$, то

$$\frac{dv_\phi}{dk} = \frac{dv_\phi}{\frac{d\lambda}{d\lambda}} = \frac{dv_\phi}{\frac{(-2\pi)}{\lambda^2}}$$

І таким чином. формулу для групової швидкості подають в такому вигляді:

$$v_{\text{гр.}} = v_{\phi} - \lambda \frac{dv_{\phi}}{d\lambda} \quad (4.31)$$

Якщо $\frac{dv_{\phi}}{d\lambda} > 0$, то це нормальна дисперсія.

Таким чином із аналізу рис. 4.5. видно, що довжина хвильового пакету Δx може бути утворена суперпозицією гармонічних хвиль суцільного спектру, якщо інтервал хвильових векторів цих хвиль дорівнює Δk . За повздовжні розміри хвильового пакету (просторові розміри його) візьмемо його розміри між першими мінімумами (дивись рис. 4.5.).

Зв'язок між розмірами пакету Δx і довжиною інтервалу Δk :

$$\Delta x \cdot \Delta k \approx 2\pi \quad (4.32)$$

Це співвідношення випливає із наступних очевидних рівнянь:

$$\Delta k(gt - x_1) = \pi$$

$$\Delta k(gt - x_2) = -\pi'$$

де $\Delta x = x_2 - x_1$

Таким чином, не можна побудувати чи створити хвильове поле так, щоб воно мало обмежені розміри в просторі і в той же час характеризувалось точним значенням довжини хвилі ($\Delta k = 0$).

Якщо монохроматичні хвилі взяті із дуже малого інтервалу Δk , то тоді виходить, що просторові розміри хвильового пакету Δx дуже великі.

$$\Delta x \sim \frac{2\pi}{\Delta k}$$

Чим вужчий (менші розміри Δx) хвильовий пакет, тим із більшого інтервалу Δk слід брати сукупність монохроматичних хвиль щоб створити таку вузьку групу хвиль.

Монохроматична хвиля – це хвиля, яка має точно визначену частоту (довжину хвилі) та безмірну протяжність в просторі:

$$\Delta k \rightarrow 0, \quad \Delta x \rightarrow \infty$$

Якщо ми зафіксуємо якусь точку простору, то пакет буде нами спостерігатися на протязі певного проміжку часу. Виявляється, що тривалість хвильового пакету пов'язана з інтервалом частот монохроматичних хвиль таким співвідношенням:

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \approx 2\pi, \quad (4.33)$$

яке отримуємо із таких рівнянь:

$$\Delta k(gt_2 - x) = \pi$$

$$\Delta k(gt_1 - x) = -\pi$$

тут $\Delta t = t_2 - t_1$.

Тривалість Δt хвильового пакету і інтервал частот монохроматичних хвиль з яких складається пакет зв'язаний обернено пропорційною залежністю.

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad (4.34)$$

Чим менша тривалість пакету, тим більший інтервал частот монохроматичних хвиль необхідно взяти для створення усього пакету. Тому для створення короткого радіолокаційного імпульсу необхідно мати дуже широку полосу пропускання підсилювачів.

Іншими словами, для того, щоб спостерігати хвильовий пакет дуже короткий інтервал часу, треба взяти суперпозицію дуже широкого спектру частот монохроматичних хвиль, і навпаки.

Зв'язок між тривалістю збурення Δt та шириною спектра частот $\Delta\omega$

$$\Delta\omega \approx \frac{2\pi}{\Delta t}$$

особливо просто ілюструється спостереженням наслідків комутаційних процесів в електротехнічних або радіотехнічних пристроях. Наприклад, при вмиканні чи вимиканні споживачів електроенергії в мережі, в широкому інтервалі радіочастот прослухується результат такого вимикання.

Співвідношення (4.32) (4.33)

$$\Delta k \cdot \Delta x \approx 2\pi$$

$$\Delta t \cdot \Delta\omega \approx 2\pi$$

називаються *класичними співвідношеннями невизначеностей*.

Звертає на себе цікавий спосіб одержання співвідношення невизначеностей Гейзенберга. Для цього обидва класичних співвідношення (4.32) і (4.33) слід помножити на постійну Планка \hbar . В зв'язку з цим, можливо, що квантові особливості, а точніше квантовий опис фізичних систем зумовлений бевальтернативним способом пізнання, способами та засобами вимірювання, використанням ідеалізованих об'єктів (монохроматична хвиля, точкова частинка тощо).

4.5. Заломлення та відбивання хвиль на межі поділу двох середовищ. Формули Френеля

Розглянемо відбивання та заломлення плоскої електромагнітної хвилі на межі поділу двох діелектриків, які характеризуються діелектричними проникностями ε_1 і ε_2 . Будемо вважати, що ці речовини не магнітні ($\mu_1 = \mu_2 = 1$).

Нехай на межу поділу падає плоска електромагнітна хвиля:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})},$$

тоді відбита хвиля описується напруженістю електричного поля \vec{E}^r :

$$\vec{E}^r = \vec{E}_0^r \cdot e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})},$$

а заломлена хвиля описується вектором \vec{E}^d :

$$\vec{E}^d = \vec{E}_0^d \cdot e^{i(\omega_d t - \vec{k}_d \cdot \vec{r})},$$

де ω , ω_r , ω_d – частоти падаючої, відбитої та заломленої електромагнітної хвилі, а $\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{n}$; $\vec{k}_r = \frac{\omega_r}{v_r} \vec{n}_r$; $\vec{k}_d = \frac{\omega_d}{v_d} \vec{n}_d$ – хвильові вектори, відповідно, падаючої, відбитої та заломленої електромагнітної хвилі.

Будемо вважати, що радіус-вектор, що визначає точку падіння променя, лежить в площині поділу 2-х середовищ, рис. 4.6.:

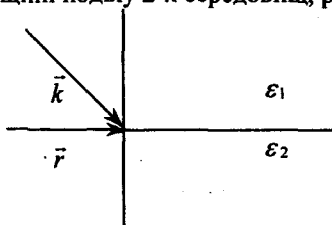


Рис. 4.6. Радіус-вектор, \vec{r} , що визначає точку падіння променя, лежить в площині поділу 2-х середовищ

Для обґрунтування законів заломлення та відбивання використовують граничні умови для векторів поля. Зокрема відомо, що тангенціальна складова вектора \vec{E} зберігається при переході через межу поділу 2-х середовищ:

$$E_r + E_r^r = E_r^d,$$

що приводить до такого співвідношення:

$$E_{0r} \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + E_{0r}^r \cdot e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} = E_{0r}^d \cdot e^{i(\omega_d t - \vec{k}_d \cdot \vec{r})}$$

Щоб проаналізувати його розглянемо алгебраїчну рівність:

$$a \cdot e^{j\omega t} + b \cdot e^{j\omega_r t} = c \cdot e^{j\omega_d t}$$

де a , b , c деякі константи.

Знайдемо похідну за часом:

$$i \cdot \omega \cdot a \cdot e^{j\omega t} + i \cdot \omega_r \cdot b \cdot e^{j\omega_r t} = i \cdot \omega_d \cdot c \cdot e^{j\omega_d t}$$

і підставимо в цю рівність значення $c e^{j\omega_d t}$:

$$i \cdot \omega \cdot a \cdot e^{j\omega t} + i \cdot \omega_r \cdot b \cdot e^{j\omega_r t} = i \cdot \omega_d \cdot a \cdot e^{j\omega t} + i \cdot \omega_d \cdot b \cdot e^{j\omega_r t}$$

перепишемо останню рівність так:

$$i \cdot a \cdot e^{i\omega t} (\omega - \omega_d) = i \cdot b \cdot e^{i\omega_r t} (\omega_d - \omega_r)$$

Як бачимо, при довільному t ця рівність буде використовуватися лише при умові:

$$\omega = \omega_r$$

Аналогічно можна показати для $\omega = \omega_d$. Таким чином, із граничної умови для вектора \vec{E} слідує:

1. Частота заломленої і відбитої хвилі співпадає з частотою падаючої хвилі: $\omega = \omega_r = \omega_d$

$$2. \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_d \cdot \vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{r}$$

Це означає, що вектори \vec{k} , \vec{k}_r , \vec{k}_d лежать в одній площині.

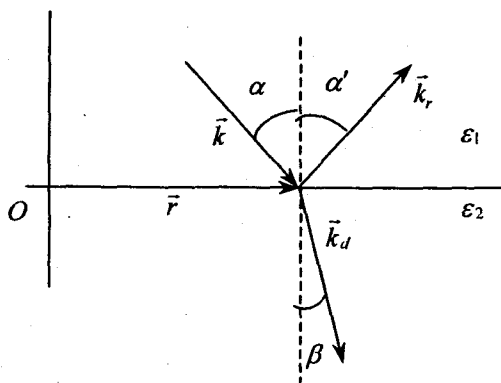


Рис. 4.7. Відбивання та заломлення плоскої електромагнітної хвилі на межі поділу двох середовищ

Розглянемо більш детально останнє співвідношення, але при цьому (для очевидності результату) радіус-вектор \vec{r} виберемо перпендикулярним \vec{k} , тоді $\vec{k}_r \cdot \vec{r} = 0$. Тому $\vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_d \cdot \vec{r} = 0$. Значить і хвильові вектори відбитої та заломленої хвилі перпендикулярні \vec{r} .

Тобто, падаючий, відбитий та заломлений промені лежать в одній площині.

Якщо радіус-вектор \vec{r} направлений вздовж вісі OX (дивись рис. 4.7.), то

$$k^x \cdot r_x = k_r^x \cdot r_x = k_d^x \cdot r_x$$

$$k \cdot \sin \alpha = k_r \cdot \sin \alpha' = k_d \cdot \sin \beta$$

$$\frac{\omega}{v} \cdot \sin \alpha = \frac{\omega_r}{v_r} \cdot \sin \alpha' = \frac{\omega_d}{v_d} \cdot \sin \beta \quad (4.35)$$

Із останньої низки рівнянь одержуємо ряд законів геометричної оптики:

$$v = v_r, \quad \alpha = \alpha', \quad (4.36)$$

Тобто, швидкість розповсюдження ЕМ відбитої хвилі співпадає з швидкістю падаючої хвилі. Оскільки $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, то $v = v_r = v_l = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1}}$.

Кут падіння дорівнює куту відбивання: $\alpha = \alpha'$.

І, нарешті, із (4.35) впливає закон заломлення світла:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v}{v_d} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = n_{21} \quad (4.37)$$

де n_{21} – це відносний показник заломлення а $v_2 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_2}}$ – швидкість

розповсюдження заломленої хвилі.

Таким чином ми одержали закон відбивання та заломлення світла, як наслідок рівнянь Максвелла.

Оскільки при обґрунтуванні геометричних законів ми не робили ніяких припущень відносно амплітуд електромагнітних хвиль та значень їх фаз, то ці геометричні закони відбивання та заломлення мають місце для електромагнітної хвилі довільної поляризації, але амплітудні значення заломленої та відбитої хвилі залежать від поляризації падаючої хвилі.

Тому обґрунтуємо зараз формули Френеля.

Нехай на межу поділу середовища падає плоска електромагнітна хвиля, поляризована в площині падіння (p -поляризація), рис. 4.8.

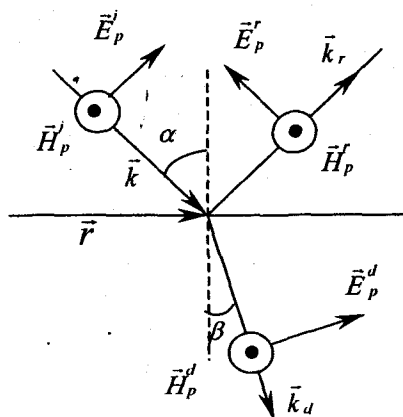


Рис. 4.8. Відбивання та заломлення плоскої електромагнітної хвилі p -поляризації

Виходячи з граничних умов для \vec{E} і \vec{H} ($E_{1r} = E_{2r}$, $H_{1r} = H_{2r}$), знаходимо:

$$E_p^i \cdot \cos \alpha - E_p^r \cdot \cos \alpha = E_p^d \cdot \cos \beta$$

Оскільки $H = \sqrt{\epsilon \epsilon_0} \cdot E$, то із граничної умов для вектора \vec{H} , $H_{1r} = H_{2r}$, маємо:

$$\sqrt{\epsilon_1} \cdot E_p^i + \sqrt{\epsilon_1} \cdot E_p^r = \sqrt{\epsilon_2} \cdot E_p^d$$

З другої умови знаходимо:

$$E_p^d = \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2}} (E_p^i + E_p^r)$$

Підставимо в першу умову:

$$\cos \alpha (E_p^i - E_p^r) = \cos \beta \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2}} (E_p^i + E_p^r)$$

$$E_p^r \cdot \left(\frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2}} \cdot \cos \beta + \cos \alpha \right) = E_p^i \left(-\frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2}} \cdot \cos \beta + \cos \alpha \right)$$

Тому амплітудний коефіцієнт відбиття дорівнює:

$$R_p = \frac{E_p^r}{E_p^i} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2}}}{\frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2}} \cdot \cos \beta + \cos \alpha}$$

Враховуючи геометричний закон заломлення $\frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ та три-

гонометричну формулу $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$ одержуємо вираз для амплітудного коефіцієнту відбиття:

$$R_p = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}$$

Аналогічно знаходимо і амплітудний коефіцієнт заломлення:

$$D_p = \frac{E_p^d}{E_p^i} = \frac{2 \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)} \quad (4.3)$$

Розглянемо тепер плоску електромагнітну хвилю, що падає на межу поділу двох середовищ, але яка поляризована в площині перпендикулярній площині падіння (S -поляризація), рис. 4.9.

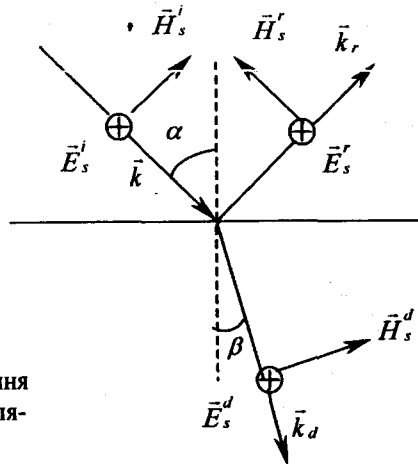


Рис. 4.9. Відбиття та заломлення електромагнітної хвилі S -поляризації

Користуючись граничними умовами для вектора \vec{E} та \vec{H} , аналогічно попереднім викладкам, можна знайти амплітудні коефіцієнти відбиття та заломлення для хвилі S -поляризації.

Дійсно, з граничної умови для тангенціальної складової вектора \vec{E} ($E_{1t} = E_{2t}$), яка для нашого випадку (дивись рис.) набуває вигляду:

$$E_s^i + E_s^r = E_s^d$$

та із граничної умови для вектора \vec{H} ($H_{1t} = H_{2t}$, $H = \sqrt{\epsilon\epsilon_0} \cdot E$) одержуємо:

$$\sqrt{\epsilon_1} \cdot E_s^i \cdot \cos \alpha - \sqrt{\epsilon_1} \cdot E_s^r \cdot \cos \alpha = \sqrt{\epsilon_2} \cdot E_s^d \cdot \cos \beta$$

Враховуючи граничну умову $E_s^i + E_s^r = E_s^d$ перепишемо останню рівність так:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cos \alpha (E_s^i - E_s^r) = (E_s^i + E_s^r) \cos \beta$$

Тоді для амплітудних коефіцієнтів відбиття ($R_s = \frac{E_s^r}{E_s^i}$) та заломлення ($D_s = \frac{E_s^d}{E_s^i}$) одержуємо:

$$\begin{aligned} R_s &= -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \\ D_s &= \frac{2 \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Висновки:

1. Як видно із виразу для коефіцієнтів D_p і D_s , при довільному значенні кутів α і β ці коефіцієнти залишаються додатними.

Це означає, що падаючий і заломлений промені мають однакову фазу (немає зміни фаз при заломленні хвилі).

2. Навпаки для хвилі S – поляризації амплітудний коефіцієнт відбиття при $\alpha > \beta$ ($\epsilon_2 > \epsilon_1$), знак R_s від'ємний, тобто фаза відбитої хвилі відрізняється від фази падаючої хвилі на π (втрата півхвилі).

3. Амплітудний коефіцієнт відбиття $R_p \rightarrow 0$ при $(\alpha + \beta) \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Це означає, що коли на межу поділу 2-х середовищ падає така хвиля і умова $(\alpha + \beta) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ має місце, то практично відбитий промінь не спостерігається.

В цьому випадку, якщо на межу поділу двох середовищ падає не поляризоване світло, то в відбитому промені будемо спостерігати поляризоване світло (S - поляризація). Кут падіння, при якому, в ідеальному варіанті, відбите світло повністю поляризоване, називається кутом Брюстера. Неважко впевнитися, що при цьому, рис. 4.10, маємо:

$$\operatorname{tg} \alpha_B = n$$

Це закон Брюстера

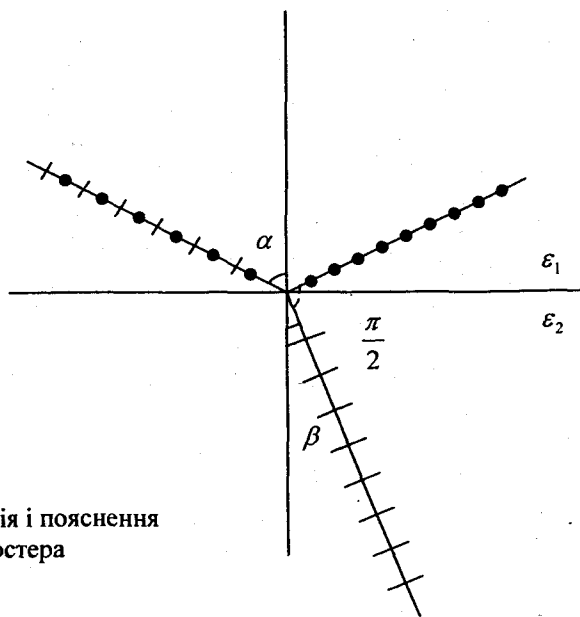


Рис. 4.10. Ілюстрація і пояснення закону Брюстера

Таким чином, коротко сумуючи наслідки рівнянь Максвелла можна сказати, що виходячи з рівняння Максвелла ми одержали ряд важливих результатів. Нагадаємо основні з них:

1. ЕМП характеризується енергією $W = \int w dV$, де $w = \frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}}{2}$ -

густина енергії ЕМП.

2. Потік енергії ЕМП в просторі описується вектором Пойнтінга $\vec{S} = [\vec{E} \cdot \vec{H}]$

3. Закон збереження енергії для електродинамічної системи, що включає в себе ЗЧ та ЕМП має вигляд:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot dV + \int_S \vec{S} \cdot d\vec{S}$$

4. Закон збереження енергії для електродинамічної системи в якій крім ЗЧ ЕМП є і сторонні ЕРС:

$$\int_V \vec{j} \vec{E}_{CT} = \frac{\partial W}{\partial t} + \int_S \vec{S} d\vec{S} + \int_V \frac{j^2}{\lambda} \cdot dV$$

5. Закон збереження імпульсу для електродинамічної системи, що складається з ЗЧ та ЕМП:

$$\frac{d\vec{P}_q}{dt} + \frac{d}{dt} \int \vec{g} \cdot dV = 0$$

6. ЕМП характеризується імпульсом $\vec{P}_{EM} = \int_V \vec{g} \cdot dV$, де \vec{g} - густина імпульсу ЕМП, $\vec{g} = [\vec{D} \cdot \vec{B}] = \frac{\vec{S}}{v^2}$

7. Процес розповсюдження електромагнітних збурень описується хвильовими рівняннями, зокрема хвильове рівняння для вектора \vec{E} має вигляд:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

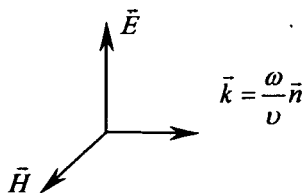
8. Одним з розв'язків хвильового рівняння є плоска хвиля, $\vec{E}\left(t - \frac{x}{v}\right)$, де $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ - швидкість поширення електромагнітної хвилі.

9. В плоскій електромагнітній хвилі вектори $\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{n}$, \vec{E} , \vec{H} утворюють праву трійку:

$$\vec{E} \perp \vec{k}$$

$$\vec{E} \perp \vec{H}$$

$$\vec{H} \perp \vec{k}$$



10. В плоскій електромагнітній хвилі, яка розповсюджується в однорідному та ізотропному діелектрику маємо такий зв'язок між напруженостями електричного і магнітного полів:

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0} \cdot E = \sqrt{\mu\mu_0} \cdot H$$

11. Виходячи із рівнянь Максвелла вивели геометричні закони відбивання та заломлення ЕМ хвилі.

12. Одержали формули Френеля, з допомогою яких можна визначити інтенсивності віддзеркаленої та заломленої хвилі.

13. Одержали закон Брюстера.

Питання для самоперевірки

1. Одержати хвильові рівняння для векторів поля \vec{E} та \vec{B} .
2. Пояснити механізм розповсюдження електромагнітних хвиль.
3. Показати, що розв'язком хвильового рівняння являється плоска хвиля.
4. Як доказати, що швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль (ЕМХ)

в однорідному та ізотропному середовищі дорівнює $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$.

5. Виходячи із рівнянь Максвелла довести, що трійка векторів \vec{k} , \vec{E} та \vec{H} утворюють правий гвинт.
6. Показати, що для плоскої ЕМХ в однорідному та ізотропному діелектрику має місце таке співвідношення між величинами векторів \vec{E} і \vec{H} :

$$\sqrt{\mu\mu_0} \cdot H = \sqrt{\epsilon\epsilon_0} \cdot E$$
7. Як і при яких умовах утворюється хвильовий пакет?
8. Поняття групової та фазової швидкості. Знайдіть зв'язок між цими швидкостями у випадку нормальної дисперсії.
9. Одержати та пояснити класичні співвідношення невизначеностей.
10. Обґрунтувати геометричні закони заломлення та відбивання ЕМХ.
11. Використовуючи граничні умови для векторів поля обґрунтувати формули Френеля.
13. Основні наслідки рівнянь Максвелла.

РОЗДІЛ 5. ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ ДОВІЛЬНО РУХОМИХ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК



5.1. Потенціали електромагнітного поля, калібровочна інваріантність потенціалів. Умова Лоренца

Рівняння Максвелла, які є узагальненням ряду експериментальних фактів, див. розділ 1., дозволяють знайти електромагнітне поле, що створюється довільним розподілом зарядів та струмів. Тобто, знаючи $\rho(\vec{r}, t)$, і $\vec{j}(\vec{r}, t)$ можна знайти напруженості полів \vec{E} і \vec{B} і, таким чином, відповісти на довільні питання в межах компетентності електродинаміки.

Одним із самих загальних методів знаходження напруженостей електричного та індукції магнітного полів довільного електромагнітного поля, яке породжується певними розподілами $\rho(\vec{r}, t)$ і $\vec{j}(\vec{r}, t)$, являється метод електромагнітних потенціалів.

Розглянемо суть та особливості цього методу. Спочатку з'ясуємо як вводяться електромагнітні потенціали. Для цього запишемо одне з рівнянь Максвелла:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (5.1)$$

На підставі формули векторного аналізу $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$ ми можемо відразу записати розв'язок цього рівняння Максвелла у вигляді:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (5.2)$$

де $\vec{A}(\vec{r}, t)$ – векторний потенціал або вектор – потенціал поля. Тобто, векторний потенціал $\vec{A}(\vec{r}, t)$ – це деяка допоміжна векторна функція, яка не має особливого фізичного змісту, але з допомогою якої знаходиться індукція магнітного поля. Єдине виправдання в необхідності введення додаткової функції $\vec{A}(\vec{r}, t)$ полягає в тому, що знаходження її по відомому розподілу струмів $\vec{j}(\vec{r}, t)$ шляхом інтегрування відповідного диференційного рівняння, виявляється порівняно простим.

Далі, рівняння Максвелла $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ разом з означенням векторного потенціалу $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ набуває вигляду:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

або

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Оскільки ротор градієнта будь-якої скалярної функції завжди дорівнює нулю, то скалярний потенціал $\varphi(\vec{r}, t)$ вводиться так:

$$\nabla \varphi = -\vec{E} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (5.3)$$

і тоді напруженість електричного поля дорівнює:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (5.4)$$

Таким чином, знаючи скалярний та векторний потенціали електромагнітного поля можна знайти напруженості \vec{E} та \vec{B} по формулах (5.2) та (5.4). Але самі електромагнітні потенціали по відомим розподілам зарядів $\rho(\vec{r}, t)$ та струмів $\vec{j}(\vec{r}, t)$ знаходяться шляхом розв'язку відповідних диференціальних рівнянь.

Для того, щоб знайти диференціальні рівняння, якими описуються потенціали, і при інтегруванні яких знаходять потенціали $\vec{A}(\vec{r}, t)$ і φ , використовують наступні рівняння Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (5.5)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (5.6)$$

де $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$.

Підставимо в рівняння Максвелла (5.5) і (5.6) напруженості полів виражені через потенціал $\vec{A}(\vec{r}, t)$ і $\varphi(\vec{r}, t)$ і одержимо:

$$\frac{1}{\mu\mu_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{j} - \varepsilon\varepsilon_0 \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \mu \cdot \vec{j} - \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (5.7)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} = -\varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{div} \nabla \varphi - \varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\varepsilon\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi - \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = \rho$$

$$-\varepsilon\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi - \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = \rho \quad (5.8)$$

Розв'язуючи ці два останні, (5.7) і (5.8), диференційні рівняння можна знайти потенціали $\vec{A}(\vec{r}, t)$ і $\varphi(\vec{r}, t)$. Але, як бачимо, рівняння складні і взаємозв'язані - в кожне з них входить і $\varphi(\vec{r}, t)$, і $\vec{A}(\vec{r}, t)$.

Ці рівняння значно спрощуються, якщо використати умову калібровки Лоренца.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{A} &= -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.9)$$

тоді з урахуванням виразу для градієнту від умови Лоренца (5.9):

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} = -\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

та похідної по часу формули (5.9):

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

останні диференційні рівняння для електромагнітних потенціалів, (5.7) та (5.8), набувають вигляду:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \mu_0 \vec{j} \quad (5.10)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0} \quad (5.11)$$

Це рівняння Даламбера відповідно для векторного та скалярного потенціалів.

Ця система рівнянь разом з умовою Лоренца дозволяє однозначно знайти \vec{A} і φ , а потім і саме електромагнітне поле по відомим розподілам зарядів $\rho(\vec{r}, t)$ та струмів $\vec{j}(\vec{r}, t)$. З математичної точки зору рівняння Даламбера простіші ніж рівняння Максвелла. Ця обставина і являється власне обґрунтуванням доцільності введення в електромагнітну теорію допоміжних величин \vec{A} і φ .

Суттєво, що електромагнітні потенціали характеризуються калібровочною або градієнтною інваріантністю. Це означає, що існує деяка свобода в їх визначенні.

Дійсно, якщо визначити новий векторний потенціал \vec{A}' додавши до старого \vec{A} градієнт будь-якого скаляра $\nabla \tau$:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \tau,$$

а новий скалярний потенціал φ' визначити як суму старого φ та $-\frac{\partial \tau}{\partial t}$:

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \tau}{\partial t},$$

то напруженість електричного та індукція магнітного полів залишається без змін.

$$\vec{B}' = \text{rot} \vec{A}' = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \vec{E}$$

Різні способи вибору електромагнітних потенціалів, що залишають незмінними поля \vec{B} та \vec{E} , називають різними калібровками.

А інваріантність полів при різних калібровках, називають градієнтною, або каліброчною інваріантністю.

Взагалі кажучи, електромагнітні потенціали \vec{A}' і φ' не мають фізичного змісту. Ці величини не визначаються однозначно. Користуючись деякою сваволею в визначенні потенціалів їх і вибирають з дотриманням додаткових умов (умова Лоренца).

Але, якщо заряджені частинки нерухомі (стаціонарне поле, $\varphi(\vec{r}, t) \neq f(t)$), тоді потенціалу $\varphi(\vec{r})$ можна надати фізичного змісту:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

Якщо і струми постійні (густина струмів не залежить від часу: $\vec{j}(\vec{r})$), то умова каліброчки приймає вигляд:

$$\text{div} \vec{A} = 0$$

При цьому в обидва рівняння Даламбера не входять доданки, що залежать від часу. Рівняння Пуассона для векторного $\vec{A}(\vec{r})$ потенціалу та скалярного $\varphi(\vec{r})$ потенціалу мають вигляд:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0} \tag{5.12}$$

5.2. Рівняння Даламбера для скалярного та векторного потенціалів та їх розв'язок у вигляді потенціалів, що запізнюються. Фізичний зміст запізнення.

Принцип причинності в класичній електродинаміці

Як відомо, розв'язок неоднорідного диференційного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Знайдемо частинний розв'язок рівняння Даламбера для $\varphi(\vec{r}, t)$, користуючись наближеним фізичним методом, що оснований на принципі суперпозиції.

Нехай є деякий розподіл зарядів. Розіб'ємо область, в якій певним чином розподілені заряди, на нескінченно малі об'ємчики і будемо вважати, що в кожному з них знаходиться квазіточковий заряд. І визначимо потенціал, що створюється нескінченно малим зарядом в деякій точці поля, рис. 5.1. Якщо \vec{R} – радіус-вектор, проведений від такого квазіточкового заряду в дану точку поля, то величина заряду в цьому об'ємчику визначається так:

$$de(t)\delta(\vec{R}),$$

де $\delta(\vec{R})$ – дельта функція. Одна із основних властивостей її, (див. Додаток) полягає в тому, що при $R \neq 0$, то $\delta = 0$, а якщо $R \approx 0$, то $\delta(\vec{R} \approx 0) = 1$.

Оскільки скалярний потенціал $\varphi(\vec{r}, t)$ створюється цим і тільки цим квазіточковим зарядом $de(t)\delta(\vec{R})$, то це скалярне поле буде характеризуватися сферичною симетрією, а сумарний потенціал буде дорівнювати, згідно принципу суперпозиції, інтегралу по об'єму V' від потенціалів, які створюються квазіточковими зарядами $de(t)\delta(\vec{R})$.

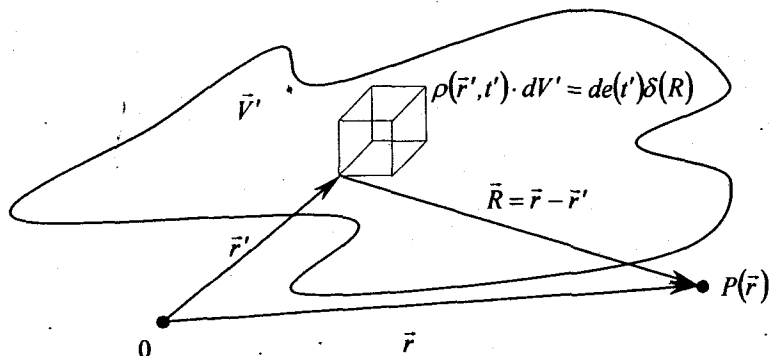


Рис. 5.1. Скалярне поле $\varphi(\vec{r}, t)$ в точці простору $P(\vec{r})$ визначається суперпозицією полів, які створюються квазіточковими зарядами $de(t)\delta(\vec{R})$

Тому рівняння Даламбера в сферичній системі координат:

$$\left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \right] \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \frac{de(t) \delta(\vec{R})}{\epsilon_0}$$

де θ - полярний кут, а γ - азимутальний кут.

Оскільки потенціал φ в просторі навколо квазіточкового заряду $de(t) \delta(\vec{R})$ характеризується сферично симетричним розподілом, то $\varphi(\vec{r}, t)$ не залежить від θ і γ , тому третій та другий доданки в квадратних дужках дорівнюють нулю.

Тому маємо:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \frac{de(t) \delta(\vec{R})}{\epsilon_0} \quad (5.13)$$

В таких точках простору, в яких $R \neq 0$, $\delta = 0$ (в усіх точках крім початку координат) рівняння (5.13) набуває вигляду:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (5.14)$$

Розв'язок цього рівняння дає потенціал в точці P , що створюється зарядом, який знаходиться в одному із таких об'ємів dV' . А оскільки рівняння Даламбера лінійне, то сумарний потенціал поля, що створюється всім розподілом зарядів буде дорівнювати, як уже відмічалось, сумі потенціалів, які породжуються зарядами всіх об'ємчиків.

Якщо шукати розв'язок (5.14) у вигляді $\varphi = \frac{\chi}{R}$, то останнє рівняння набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (5.15)$$

Це хвильове рівняння і його розв'язок нам уже відомий:

$$\chi \left(t - \frac{R}{c} \right) \quad (5.16)$$

Тому розв'язок рівняння Даламбера (5.14) в точках віддалених від $de(t)$, буде такий:

$$\varphi = \frac{\chi \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R}$$

Розв'язок рівняння Даламбера (5.13) в довільних точках і навіть в точках дуже близьких до $de(t)$ (початок координат) повинен бути таким, що неперервно переходить до розв'язку

$$\varphi(R, t) = \frac{\chi(t - \frac{R}{c})}{R} \quad (5.17)$$

Тому функцію $\chi(R, t)$ необхідно вибрати так, щоб одержати вірний розв'язок в просторі біля початку координат. Тобто, χ так необхідно вибрати, щоб (5.17) неперервно переходило в розв'язок рівняння (5.13) поблизу початку координат.

Розглянемо дуже близькі до de точки: при $R \rightarrow 0$ потенціал φ прямує до нескінченності $\varphi \rightarrow \infty$, а тому його похідні по координатам

ростуть швидше ніж похідні за часом в околі $R \approx 0$: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \gg \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$.

Іншими словами: в дуже близьких до початку координат точках в рівнянні Даламбера (5.13) другим доданком в порівнянні з першим можна знехтувати.

В точках дуже близьких до заряду de потенціал буде визначатись диференційним рівнянням без другого доданку в лівій частині (5.13). Тобто рівняння Даламбера в таких точках простору набуває вигляду (рівняння Пуассона):

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{de}{\epsilon_0} \delta(\bar{R})$$

Але розв'язок такого рівняння відомий:

$$\varphi_{R \rightarrow 0} = \frac{de}{4\pi\epsilon_0 R}$$

І відповідно, в це значення потенціалу повинен переходити розв'язок (5.17) рівняння Даламбера в точках простору дуже близьких до заряду de . Іншими словам:

$$\chi = \frac{de}{4\pi\epsilon_0}$$

Таким чином, потенціал, що створюється зарядом $de(t)$ у всіх точках простору, без урахування поля інших зарядів нашого розподілу, визначається так:

$$\varphi = \frac{de(t - \frac{R}{c})}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (5.18)$$

Це і є розв'язок рівняння Даламбера (5.13).

З іншого боку, оскільки $de = \rho dV'$, тоді, на основі принципу суперпозиції, ми можемо записати розв'язок рівняння Даламбера (5.11) для скалярного потенціалу, проінтегрувавши по об'єму V' (5.18):

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV' \quad (5.19)$$

Аналогічно, розв'язок рівняння Даламбера (5.10) для векторного потенціалу має вигляд:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (5.20)$$

Вирази (5.19) та (5.20) - це розв'язки рівнянь Даламбера (5.11) та (5.10) у вигляді потенціалів, що запізнюються.

Прокоментуємо особливості розв'язків (5.19) та (5.20).

В момент часу t в точці, що визначається радіус-вектором \vec{r} значення потенціалів φ та \vec{A} визначається відповідно густиною заряду ρ , густиною струму \vec{j} , взятими не в цей момент часу, а в попередній (більш ранній) момент час. В такий момент часу, який визначається проміжком часу необхідним для розповсюдження електромагнітних збурень від точок, де знаходяться заряди і струми (які визначаються радіус-вектором \vec{r}'), до тих точок поля, що визначаються \vec{r} . Відстань між цими точками дорівнює: $\bar{R} = (\vec{r} - \vec{r}')$; $\frac{R}{v}$ - час розповсюдження електромагнітних збурень.

Розв'язок рівнянь Даламбера у вигляді потенціалів, що запізнюються має принципове значення, бо такий розв'язок відповідає певним уявленням про характер причинних зв'язків у фізиці та електродинаміці, зокрема.

Дійсно, в класичній механіці принципу причинності відповідав однозначний зв'язок між станами системи і уявлення про дальнюдію.

В класичній електродинаміці ситуація корінним чином змінюється. Якщо заряди змінили своє положення, то наслідок таких змін буде спостерігатись не відразу, а через проміжок часу $\frac{R}{v}$, необхідний для роз-

повсюдження електромагнітної взаємодії. При цьому електромагнітні збурення передаються від однієї точки до іншої нескінченно близької точки поля. Не покидає враження якоїсь містичності, загадковості при обґрунтуванні останніх результатів. І закон Кулона, і закон Біо-Савара, та і рівняння Максвелла $rot\vec{H} = \vec{j}$ сформульовані на мові дальнюдії. В принципі вони не можуть бути іншими з огляду на процес пізнання макроскопічними суб'єктами.

Як від дальнодіючих законів ми прийшли до близькодіючих?

Рівняння Даламбера, але без умови Лоренца вони взаємозв'язані. На традиційному шляху викладання електродинаміки (шляху опису класичної електродинаміки) залишається без фізичного пояснення значна частина принципівих понять.

Таким чином, уявлення про дальнюдію в класичній механіці, замінюється в електродинаміці на уявлення про близькодію та про кінцеву швидкість розповсюдження електромагнітних взаємодій.

Але і в класичній електродинаміці залишається однозначний зв'язок між станами електродинамічної системи.

5.3. Потенціали Ліснара-Віхерта. Поле зарядженої частинки, що рухається з постійною швидкістю

Для знаходження потенціалів електромагнітного поля, що створюється окремою рухомою ЗЧ, використовують вирази для потенціалів, що запізнюються:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} dV'$$

та наступні міркування.

Для знаходження потенціалів $\varphi(\vec{r}, t)$ та $\vec{A}(\vec{r}, t)$, що створюється окремою рухомою ЗЧ, в точці поля, яка визначається радіс-вектором \vec{r} в момент часу t , уявимо собі сферичну поверхню з центром в даній точці поля. Будемо далі уявляти собі, що ця сферична поверхня стискається із швидкістю світла c так, що в момент t , ця сфера стиснеться в точку P , рис. 5.2.

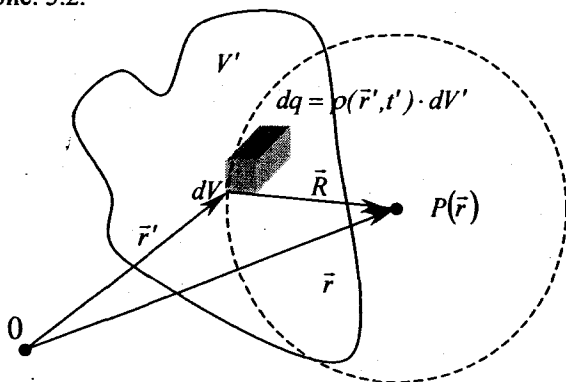


Рис. 5.2. Уявлювана сферична поверхня радіусу R «збирає» внесок від усіх зарядів простору об'єму V' в величину потенціалів φ та \vec{A} в точці поля P

Сферична поверхня при своєму стисканні перетне об'ємчик dV' в той момент часу $t - \frac{R}{c}$, для якого і слід густини струму $\vec{j}(\vec{r}', t')$ та заряду $\rho(\vec{r}', t')$ підставити у вирази для потенціалів, що запізнюються. Таким чином, кожний dV' помножається на ті значення $\vec{j}(\vec{r}', t')$ та $\rho(\vec{r}', t')$, котрі сфера перетне в цьому dV' в момент часу $t' = t - \frac{R}{c}$. Від-
 даль R вимірюється в той момент часу, коли через заряд $\rho(\vec{r}', t')dV'$ проходить сфера, що стиснеться в точку P .

Таким чином, ця сферична поверхня начебто збирає внесок від усіх зарядів простору об'єму V' в величину потенціалів φ та \vec{A} в точці поля P .

Якщо заряди в об'ємі dV' нерухомі, то за проміжок часу dt' елемент сферичної поверхні dS перетне заряд величиною

$$\rho(\vec{r}', t') \cdot dS \cdot dR \quad (5.21)$$

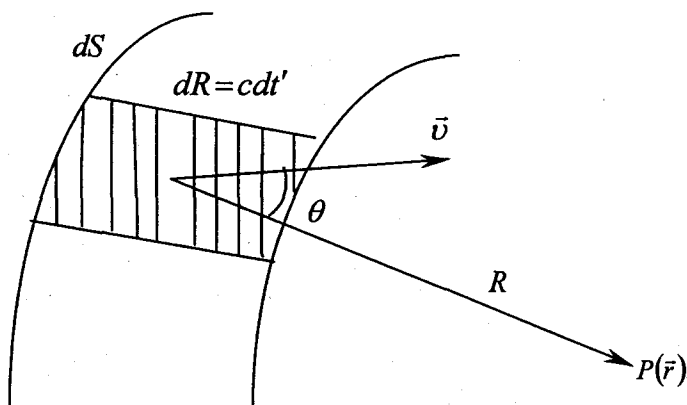


Рис. 5.3. Знаходження величини заряду, який перетинається уявлюваною сферичною поверхнею при її стисканні в точку P

Але якщо заряди рухомі, то величина заряду, що буде перетинатись цією поверхнею, буде або більшою, або меншою виразу (5.21). Цей висновок пояснюється тим, що ці заряди будуть або витікати в цей сферичний шар товщиною dR , або витікають з нього.

Внаслідок руху заряджених частинок через dS вийде заряд величиною (див. рис. 5.3.):

$$\rho \cdot dS \cdot v dt' \cdot \cos \theta = \rho \cdot dS \cdot \frac{dR}{c} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{R} \right), \quad (5.22)$$

$$\text{де } dt' = \frac{dR}{c}, \quad v \cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{R}$$

Тоді в наслідок такого руху зарядів, сферична поверхня при своєму стисканні перетне меншу величину заряду, тобто сфера збере інформацію про заряди величиною:

$$\begin{aligned} dq &= \rho(\vec{r}', t') \cdot dS \cdot dR - \rho \cdot dS \cdot v \cdot dt' \cdot \cos \theta = \rho \cdot dS \cdot dR - \rho \cdot dS \cdot \frac{dR}{c} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{R} \right) = \\ &= \rho(\vec{r}', t') \cdot dV' \cdot \left(1 - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{R})}{c \cdot R} \right) = \frac{\rho(\vec{r}', t') \cdot dV'}{R} \left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right), \end{aligned} \quad (5.23)$$

Таким чином, ця сферична поверхня збере інформацію про заряд, менший, ніж у випадку нерухомих зарядів. Але оскільки заряд буде довше знаходитись всередині сфери, що стискається, то і внесок цих зарядів в потенціали φ та \vec{A} буде більшим ніж у випадку нерухомих зарядів.

Із (5.23) одержуємо підінтегральний вираз потенціалу $\varphi(\vec{r}, t)$ що запізнюється:

$$\frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} dV' = \frac{dq}{\left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)'}_r$$

А сам скалярний потенціал, що запізнюється, і який створюється рухомою ЗЧ дорівнює тоді:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t') dV'}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{dq}{\left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)'}_r = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)'}_{r, \frac{R}{c}} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Відповідно для векторного потенціалу маємо:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}}{c^2} \varphi(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \cdot \vec{v}}{\left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)'}_r \quad (5.25)$$

Формули (5.24) та (5.25) - потенціали Лінара-Віхерта.

Це потенціали поля, що створене окремою ЗЧ, яка рухається зі швидкістю \vec{v} . Значення величини $\left(R - \frac{\vec{v}\vec{R}}{c}\right)'$ необхідно знаходити в

момент $t' = t - \frac{R}{c}$.

Приклад 5.1. Користуючись потенціалами Ліенара-Віхерта знайти напруженість електричного $\vec{E}(\vec{r}, t)$ та індукцію $\vec{B}(\vec{r}, t)$ магнітного полів, що створюється зарядженою частинкою, яка рухається з постійною швидкістю $\vec{v} = \text{const}$.

Розв'язання: Нехай ЗЧ рухається з постійною швидкістю $\vec{v} = \text{const}$ вздовж осі OX , рис. 5.4.

Оскільки ЗЧ рухається зі швидкістю \vec{v} , то в момент t вона буде знаходитись в точці з координатою $x - v t$ на вісі OX . Очевидно, що в момент $t = 0$ ЗЧ знаходиться у точці O .

Оскільки потенціали в точці поля $P(x, y, z, t)$ в момент t створюються положенням та значенням заряду в попередній момент часу (момент t'), то положення нашого заряду, який створив потенціали в момент t буде таким, як показано на рис. 5.4.

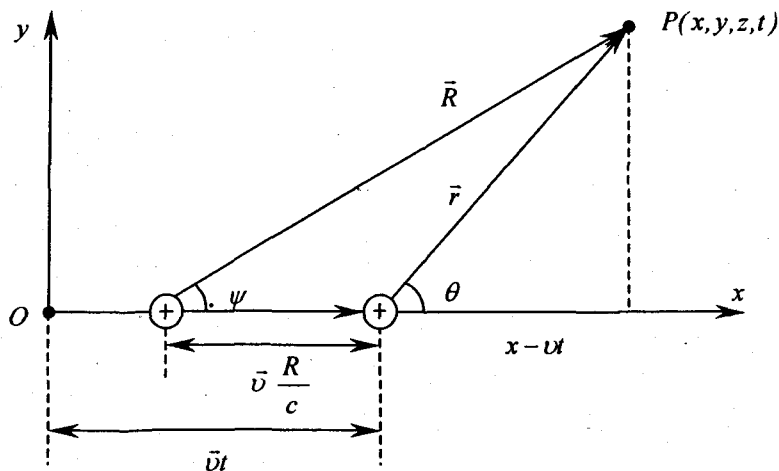


Рис. 5.4. Знаходження електромагнітного поля ЗЧ, що рухається з $\vec{v} = \text{const}$

Із рис. 5.4. видно, що зв'язок між радіус-вектором \vec{r} , проведеним із миттєвого положення заряду в дану точку поля та \vec{R} такий:

$$\vec{R} = \vec{r} + \frac{R}{c} \cdot \vec{v},$$

де \vec{R} - радіус-вектор, проведений від того положення ЗЧ, в якому вона знаходилася в попередній момент часу $t' = t - \frac{R}{c}$.

Тому радіус-вектор \vec{r} виражається через R та \vec{R} так:

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{v} \cdot \frac{R}{c} \quad \vec{r}^2 = \left(\vec{R} - \frac{\vec{v} \cdot R}{c} \right)^2$$

Знайдемо r^2 :

$$r^2 = R^2 - \frac{2R}{c}(R \cdot \vec{v}) + \frac{v^2 \cdot R^2}{c^2} \quad (5.26)$$

далі використаємо очевидне співвідношення:

$$[\vec{r} \cdot \vec{v}]^2 = [\vec{R} \cdot \vec{v}]^2 = R^2 v^2 \sin^2 \psi = R^2 v^2 (1 - \cos^2 \psi) = R^2 \cdot v^2 - (\vec{R} \cdot \vec{v})^2$$

З допомогою (5.26) та останнього співвідношення знайдемо вираз:

$$r^2 - \frac{[\vec{r} \cdot \vec{v}]^2}{c^2} = R^2 - \frac{2R}{c}(\vec{R} \cdot \vec{v}) + \left(\frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c} \right)^2 = \left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)^2 \quad (5.27)$$

Тоді величина $\left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)_{t'}$, що входить в означення скалярного

(5.24) та векторного (5.25) потенціалів Лієнара-Віхерта дорівнює:

$$\left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right) = \sqrt{r^2 - \frac{[\vec{r} \cdot \vec{v}]^2}{c^2}} = r \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2) \cdot (y^2 + z^2)} \quad (5.28)$$

В формулі (5.28) радіус-вектор, проведений із миттєвого положення ЗЧ в точку поля $P(x, y, z, t)$, рис. 5.4., визначається:

$$\vec{r} = (x - vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

В результаті скалярний та векторний потенціали Лієнара-Віхерта рівномірно рухомої ЗЧ дорівнюють:

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2) \cdot (y^2 + z^2)}} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (5.29)$$

$$\vec{A} = \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \varphi \quad (5.30)$$

Тепер ми можемо знайти електромагнітне поле в точці $P(x, y, z, t)$.

Магнітне поле в точці $P(x, y, z, t)$ дорівнює:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \frac{1}{c^2} \text{rot}(\varphi \vec{v}) = \frac{1}{c^2} [\nabla \cdot (\varphi \vec{v})] = \frac{1}{c^2} [\nabla \varphi \cdot \vec{v}], \quad (5.31)$$

де використана формула векторного аналізу:

$$[\nabla \cdot (\varphi \cdot \vec{v})] = \varphi [\nabla \cdot \vec{v}] + [(\nabla \varphi) \cdot \vec{v}],$$

та враховано, що $[\nabla \vec{v}] = 0$, оскільки $\vec{v} = const$.

Знайдемо напруженість електричного поля використовуючи формулу:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

але $\dot{\vec{A}} = \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \dot{\varphi}$, з іншого боку, може бути показано, що:

$$\dot{\varphi} = -(\vec{v} \cdot \nabla \varphi)$$

Дійсно, якщо довільна функція є функцією поля, то значення цієї величини буде таким самим, як і в попередній точці, в попередній момент часу:

$$f(x, y, z, t) = f(x - v_x \cdot dt, y - v_y \cdot dt, z - v_z \cdot dt, t - dt)$$

тому $\frac{df}{dt} = \dot{f} = -(\vec{v} \cdot \nabla f)$.

Тобто, похідна по часі векторного потенціалу дорівнює:

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \dot{\varphi} = \frac{\vec{v}}{c^2} (-(\vec{v} \cdot \nabla \varphi))$$

І нарешті:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{\vec{v}}{c^2} \{ -\vec{v} \cdot \nabla \varphi \}$$

З останньої рівності знайдемо градієнт скалярного потенціалу

$$-\nabla \varphi = \vec{E} - \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{v} \cdot \nabla \varphi) \quad (5.32)$$

Підставимо (5.32) у формулу для індукції магнітного поля (5.31). Тоді маємо:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\nabla \varphi \cdot \vec{v}] = -\frac{1}{c^2} [\vec{v} \cdot \nabla \varphi] = \frac{1}{c^2} [\vec{v} \cdot \left\{ \vec{E} - \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{v} \cdot \nabla \varphi) \right\}] = \frac{1}{c^2} [\vec{v} \cdot \vec{E}]$$

Ми одержали зв'язок між напруженістю електричного та індукцією магнітного поля ЗЧ, що рухається з постійною швидкістю. По перше, вектор \vec{B} перпендикулярний векторам \vec{v} та \vec{E} , що ще раніше ми отримали із аналізу закону Біо-Савара. По-друге, можна стверджувати, узагальнюючи результат, що будь-яке "рухоме" електричне поле, яке характеризується напруженістю електричного поля \vec{E} породжує в тій самій просторово-часовій точці магнітне поле індукції \vec{B} :

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{v} \cdot \vec{E}] \quad (5.33)$$

Повертаємося до знаходження напруженості електричного поля.

$$\vec{E} = -\nabla\varphi + \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{v} \cdot \nabla\varphi) \quad (5.34)$$

Компоненти вектора \vec{E} дорівнюють:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1 - \beta^2) = (1 - \beta^2) \cdot \frac{q(x - vt)}{4\pi\epsilon_0 \cdot s^3} \\ E_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = (1 - \beta^2) \frac{qy}{4\pi\epsilon_0 \cdot s^3} \\ E_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = (1 - \beta^2) \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 \cdot s^3} \end{aligned} \quad (5.34a)$$

де $s = \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} = r\{1 - \beta^2 \sin^2 \theta\}^{1/2}$, якщо враховувати, що $\vec{r} = (x - vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Тоді, на підставі (5.34a), для вектора напруженості електричного поля ЗЧ, яка рухається з постійною швидкістю одержуємо:

$$\vec{E} = \frac{q(1 - \beta^2) \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3 (1 - \beta^2 \cdot \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (5.35)$$

або

$$\vec{E} = \frac{(1 - \beta^2) \cdot q \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \left[(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2) \right]^{3/2}}, \quad (5.35a)$$

де \vec{r} - це радіус-вектор, який визначає положення точки поля відносно заряду в даний момент часу, θ - кут між векторами \vec{r} і \vec{v} .

Основні наслідки розв'язку цього прикладу:

1. Вектор \vec{E} рухомої ЗЧ в кожному мить направлений вздовж радіус-вектора \vec{r} , проведеного із миттєвого положення ЗЧ в дану точку поля, рис. 5.5.

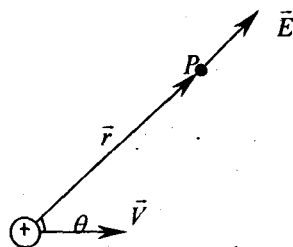


Рис. 5.5. Вектор напруженості електричного поля \vec{E} в кожному мить направлений вздовж радіус-вектора \vec{r} , проведеного із миттєвого положення ЗЧ в дану точку поля P

2. Напруженість електричного поля в напрямку руху заряду:

$$E_{\parallel} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 - \beta^2) < E_{n,z} \quad (5.36)$$

менша ніж напруженість поля нерухомого заряду в точках віддалених від ЗЧ на таку ж саму відстань r :

$$E_{n,z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}$$

Отже, напруженість поля \vec{E} в напрямку руху ЗЧ зменшується.

3. В напрямку, що визначається кутом $\theta = \frac{\pi}{2}$, тобто в будь-якій точці, що лежить в площині перпендикулярній \vec{v} , напруженість електричного поля більша ніж поле нерухомої ЗЧ при тій же віддалі точки поля від ЗЧ:

$$E_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} > E_{n,z} \quad (5.37)$$

4. При значеннях \vec{v} порядку швидкості світла все поле зосереджене біля площини перпендикулярній \vec{v} .

Таким чином електромагнітне поле заряду, що рухається "сплющується" в напрямку руху.

5. Електричне поле рухомої ЗЧ не потенційне, $\text{rot}\vec{E} \neq 0$.

5.4. Потенціали, що запізнюються в хвилевій зоні.

Поняття про хвилеву зону

Знайдемо потенціали що запізнюються $\varphi(\vec{r}, t)$, $\vec{A}(\vec{r}, t)$ в точках, значно віддалених від заряджених частинок (ЗЧ) та струмів. Розглянемо об'єм V' , в якому рухаються заряджені частинки, рис. 5.6.

Із розв'язку рівняння Даламбера випливає, що векторний потенціал $\vec{A}(\vec{r}, t)$ в точці поля, що визначається радіус-вектором \vec{r} , в момент часу t дорівнює:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - R/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dV', \quad (5.38)$$

де \vec{r}' - радіус-вектор, що визначає положення об'ємчика dV' , в якому густина струму в попередній момент часу $t' = t - \frac{R}{c}$ дорівнює \vec{j} ,

$R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ - віддаль точки поля P від об'ємчика dV' .

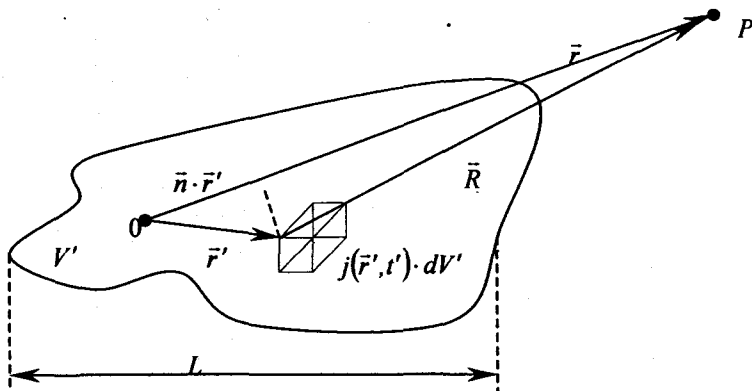


Рис. 5.6. Пояснення щодо знаходження потенціалів в хвильовій зоні

Введемо для одиничного орта в напрямку \vec{r} позначення $\frac{\vec{r}}{r} = \vec{n}$.

Із рис. 5.6. видно, що на великих відстанях точок поля від об'єму V' , $R \approx r - \vec{n} \cdot \vec{r}'$.

В тому випадку, коли \vec{r} набагато більше розмірів системи (розміри електродинамічної системи мають величину порядку $L \approx \vec{n} \cdot \vec{r}'$), тобто коли $r \gg \vec{n} \cdot \vec{r}'$, або коли $r \gg L$, величиною $\vec{n} \cdot \vec{r}'$ можна знехтувати порівняно з r в знаменнику підінтегрального виразу (5.38). Тоді $R \approx r$, а вираз для векторного потенціалу набуває вигляду:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - r/c + \vec{n} \cdot \vec{r}'/c)}{r} \cdot dV' \quad (5.39)$$

Але в чисельнику підінтегрального виразу (5.39) величиною $\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c}$, взагалі кажучи, знехтувати ми не можемо, тому що має значення не відносна величина $\frac{r}{c}$ чи $\frac{\vec{r}' \cdot \vec{n}}{c}$, а те наскільки змінюються самі ρ та \vec{j} за час $\frac{\vec{r}' \cdot \vec{n}}{c}$.

Величина:

$$\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c} = \tau$$

називається власним часом запізнення, а величина r/c називається часом запізнення всієї системи. Як бачимо, власний час запізнення – це час, який необхідний електромагнітним збуренням (сигналу) для розповсюдження їх через всю систему.

Власним часом запізнення в (5.39) можна знехтувати тільки тоді, коли за цей час розподіл зарядів і струмів в електродинамічній системі суттєво не зміниться.

Очевидно, що розподіл зарядів і струмів в системі зміниться суттєво, коли за час власного запізнення заряди пройдуть віддаль по величині співрозмірну з розмірами самої системи L .

І тому величиною $\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c}$ можна знехтувати тільки тоді, коли за цей час заряди змістяться на віддаль дуже малу порівняно з розмірами електродинамічної системи L .

Коли ж реалізується така умова? Якщо ЗЧ рухаються із швидкістю \vec{v} , то за час власного запізнення τ вони пройдуть відстань $v \frac{L}{c}$ (оскільки $\frac{L}{c} \approx \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c}$). Тому конфігурація системи суттєво не зміниться при умові:

$$v \frac{L}{c} \ll L, \text{ або при } \frac{L}{v} c \gg L \quad (5.40)$$

Тобто, якщо за час власного запізнення заряди пройдуть шлях на багато менший розмірів самої системи (умова квазістаціонарності), величиною $\frac{\vec{r}' \cdot \vec{n}}{c}$ можна знехтувати в виразі (5.39).

Це може бути тоді коли, див. (5.40):

- 1) швидкість руху ЗЧ значно менша швидкості світла, $v \ll c$;
- 2) якщо ж рух ЗЧ в системі V' квазіперіодичний, а період руху (коливань) дорівнює T ($T \sim \frac{L}{v}$), то доданком $\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c}$ можна знехтувати, тоді,

коли $T \gg \tau$, $\left(\frac{L}{v} \gg \frac{L}{c}\right)$ де τ - власний час запізнення, T - час за який розподіл зарядів і струмів змінюється суттєво (період коливань, змін);

3) останню умову можна інтерпретувати і так: оскільки довжина хвилі так пов'язана з періодом T квазіперіодичного процесу в електромагнітній системі:

$$T \cdot c \sim \lambda,$$

а $\frac{L}{v} \sim T$, то $\frac{L}{v} \cdot c \sim \lambda$, тому умова (5.40) означає, що

$$\lambda \gg L$$

Таким чином, по суті ми маємо чотири різні формулювання умови квазістаціонарності і умов, коли можна знехтувати величиною

$\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c}$ в підінтегральному виразі для потенціалів, що запізнюються. Нагадаємо ще раз:

1) $v \frac{L}{c} \ll L$ - віддаль, яку проходить ЗЧ за власний час запізнення набагато менша ніж розміри системи;

2) $v \ll c$, швидкість руху ЗЧ в електродинамічній системі набагато менша швидкості світла;

3) $\left(\frac{L}{v} \gg \frac{L}{c}\right)$, або $T \gg \tau$ - період квазіперіодичного руху ЗЧ набагато більший, ніж власний час запізнення;

4) $\lambda \gg L$ - довжина хвилі, що пов'язана з квазіперіодичним процесом в системі набагато більша, ніж розміри електродинамічної системи.

Область простору, що визначається нерівностями

$$\lambda \gg L, r \gg L \quad (5.41)$$

називається хвильовою зоною.

Таким чином, векторний потенціал в хвильовій зоні буде мати вигляд:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi \cdot r} \int_V \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) dV' \quad (5.42)$$

Коли умова квазістаціонарності виконується, тоді у всіх точках системи в дану мить величина струму майже одна і та сама.

Якщо розподіл ЗЧ уявляти собі як квазідискретний, то вираз для векторного потенціалу (5.42) можна подати в такому вигляді:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi \cdot r} \int \rho(\vec{r}', t') \cdot \vec{v}' \cdot dV' \cong \frac{\mu_0}{4\pi \cdot r} \sum_i q_i \vec{v}_i = \frac{\mu_0}{4\pi \cdot r} \cdot \frac{d}{dt} (\sum_i q_i \cdot \vec{r}'_i),$$

$$\text{де } q_i = \rho(\vec{r}', t') \cdot dV', \quad t' = t - \frac{r}{c}$$

Враховуючи означення дипольного моменту системи ЗЧ:

$$\sum_i q_i \cdot \vec{r}'_i = \vec{p}, \quad (5.43)$$

кінцева формула для векторного потенціалу у хвильовій зоні має вигляд:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{4\pi \cdot r} \quad (5.44)$$

Приклад 5.2. За допомогою умови калібровки Лоренца знайти скалярний потенціал в хвильовій зоні.

Розв'язання: Із умови калібровки Лоренца:

$$\operatorname{div} \bar{A} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

одержуємо диференціальне рівняння для скалярного потенціалу:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c^2 \operatorname{div} \left(\frac{\mu_0 \dot{\bar{p}}}{4\pi \cdot r} \right)$$

Будемо вважати, що вектор $\dot{\bar{p}}$ направлений по осі OZ , тоді:

$$\operatorname{div} \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{\bar{p}}}{\partial z} + \dot{\bar{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right\}$$

Використовуючи далі очевидні співвідношення:

$$\dot{\bar{p}} = \dot{\bar{p}}_r; \quad \frac{\partial \dot{\bar{p}}}{\partial z} = \frac{\partial \dot{\bar{p}}}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial z} = \frac{\partial \dot{\bar{p}}}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = \ddot{\bar{p}} \left(-\frac{1}{c} \right) \frac{z}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{z}{r^3},$$

$$а \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{z}{r}, \text{ де } r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \text{ для дивергенції}$$

векторного потенціалу знаходимо:

$$\operatorname{div} \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ -\frac{\ddot{\bar{p}} \cdot z}{cr^2} - \frac{\dot{\bar{p}} \cdot z}{r^3} \right\} \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c^2 \cdot \operatorname{div} \bar{A} = \frac{\mu_0 \cdot c}{4\pi} \left\{ \frac{\ddot{\bar{p}} \cdot z}{r^2} + \frac{\dot{\bar{p}} \cdot z \cdot c}{r^3} \right\} \quad (5.46)$$

А інтегрування останнього рівняння дає вираз для скалярного потенціалу в хвилевій зоні:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \cdot c}{4\pi} \left(\frac{\dot{\bar{p}} \cdot z}{r \cdot r} + \frac{\bar{p} \cdot z \cdot c}{r^3} \right)$$

В загальному випадку, коли дипольний момент \bar{p} електродинамічної системи орієнтований довільно, то:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \cdot c}{4\pi} \cdot \frac{\dot{\bar{p}} \cdot \vec{r}}{r \cdot r} + \frac{\mu_0 c^2 \bar{p} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} \quad (5.47)$$

Другий доданок в (5.47) являє собою потенціал, що створюється стаціонарним дипольним моментом:

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\bar{p} \cdot \vec{r}}{r^2} = \varphi_{\text{ст. дипол.}}$$

значення якого обернено пропорційні r^2 , тобто на великих відстанях цим доданком можна знехтувати. І тоді, оскільки $\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi \cdot r} \dot{\bar{p}}$, скалярний потенціал хвилевій зоні дорівнює:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \vec{n} \cdot \vec{A} \cdot c \quad (5.48)$$

Таким чином, електромагнітні потенціали в хвильовій зоні дорівнюють:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \vec{n} \cdot \vec{A} \cdot c$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi \cdot r} \dot{\vec{p}}_t$$

По відомим $\varphi(\vec{r}, t)$, та $\vec{A}(\vec{r}, t)$ можна знайти напруженості електричного та індукцію магнітного полів в цих віддалених від системи зарядів точках:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

5.5. Електромагнітне поле в хвилевій зоні

Таким чином, ми розглядаємо електродинамічну систему в якій ЗЧ рухаються в деякому об'ємі V' . Вони створюють в хвилевій зоні потенціали електромагнітне поле φ та \vec{A} , які визначаються (5.44) та (5.48).

Індукція магнітного поля ЕМП в хвилевій зоні дорівнює:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \text{rot} \dot{\vec{p}}(t'), \quad (5.49)$$

$$\text{де } t' = t - \frac{r}{c}.$$

Використовуючи формулу векторного аналізу

$$\text{rot} \vec{a}(u) = \left[\nabla u \cdot \frac{d\vec{a}}{du} \right],$$

де $\vec{a}(u)$ вектор, що залежить від скаляру u , для ротора вектора $\dot{\vec{p}}(t')$ знаходимо:

$$\text{rot} \dot{\vec{p}}(t') = \left[\nabla t' \cdot \frac{d\dot{\vec{p}}}{dt'} \right] = \left[\nabla t' \cdot \ddot{\vec{p}} \right]$$

Тому (5.49) має вигляд:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\nabla t' \cdot \ddot{\vec{p}} \right] \quad (5.50)$$

Спростимо (5.50). Може бути показано, що $(\nabla u(\eta)) = \frac{\partial u}{\partial \eta} \nabla \eta$:

$$\nabla t' = \frac{\partial t'}{\partial r} \cdot \nabla r = -\frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{n}}{c}$$

Тому для індукції магнітного поля в хвилевій зоні одержуємо остаточно:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \left[\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n} \right] \quad (5.51)$$

Напруженість електричного поля знайдемо використовуючи формулу

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Скориставшись наступними перетвореннями:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t'} \nabla t' = \dot{\varphi} \frac{\partial t'}{\partial r} \nabla r = \dot{\varphi} \left(-\frac{1}{c} \right) \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{1}{c} \vec{n} \dot{\varphi} = -\frac{1}{c} \vec{n} \left(c \cdot \vec{n} \cdot \dot{\vec{A}} \right),$$

бо $\dot{\varphi} = c \vec{n} \cdot \dot{\vec{A}}$, для вектора напруженості електричного поля \vec{E} одержуємо:

$$\vec{E} = \frac{1}{c} \vec{n} \left(\vec{n} \cdot c \cdot \dot{\vec{A}} \right) - \dot{\vec{A}} = \left[\left[\dot{\vec{A}} \cdot \vec{n} \right] \cdot \vec{n} \right] = c \cdot \left[\vec{B} \cdot \vec{n} \right],$$

де враховано, що:

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \ddot{\vec{p}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \left[\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n} \right]$$

Остаточно для поля \vec{E} в хвильовій зоні отримуємо:

$$\vec{E} = c \cdot \left[\vec{B} \cdot \vec{n} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\left[\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n} \right] \cdot \vec{n} \right] \quad (5.52)$$

Висновки:

1. В хвильовій зоні вектори \vec{E} , \vec{B} , та \vec{n} взаємно перпендикулярні і утворюють в хвилевій зоні праву трійку векторів.

2. Напруженість електричного та магнітного полів в хвилевій зоні обернено пропорційна r :

$$\vec{E}, \vec{B} \sim \frac{1}{r},$$

що являється характерним для поля випромінювання. Згадаємо, що коли поле квазістатичне, то вектори поля обернено пропорційні віддалі

точок поля від системи зарядів і струмів, $\vec{E}, \vec{B} \sim \frac{1}{r^2}$.

3. Оскільки дипольний момент системи зарядів визначається так:

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

то

$$\ddot{\vec{p}} = \sum_i q_i \ddot{\vec{v}}_i = \sum_i q_i \ddot{\vec{r}}_i$$

Таким чином, випромінювання електромагнітних хвиль відбувається тоді, коли, ЗЧ рухаються прискорено.

5.6. Інтенсивність дипольного випромінювання. Дипольне випромінювання простих систем

Знайдемо інтенсивність дипольного випромінювання. Для цього введемо сферичну систему координат, по осі Z якої направимо вектор другої похідної по часу від дипольного моменту системи зарядів.

Електромагнітне поле довільної системи ЗЧ в хвилевій зоні визначається згідно формул (5.51) та (5.52), див. також рис. 5.7.:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} [\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n}], \quad \vec{H} = \frac{1}{4\pi r c} [\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n}]$$

$$\vec{E} = c \cdot [\vec{B} \cdot \vec{n}] = c \mu_0 [\vec{H} \cdot \vec{n}] = \frac{\mu_0}{4\pi r} [[\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n}] \cdot \vec{n}]$$

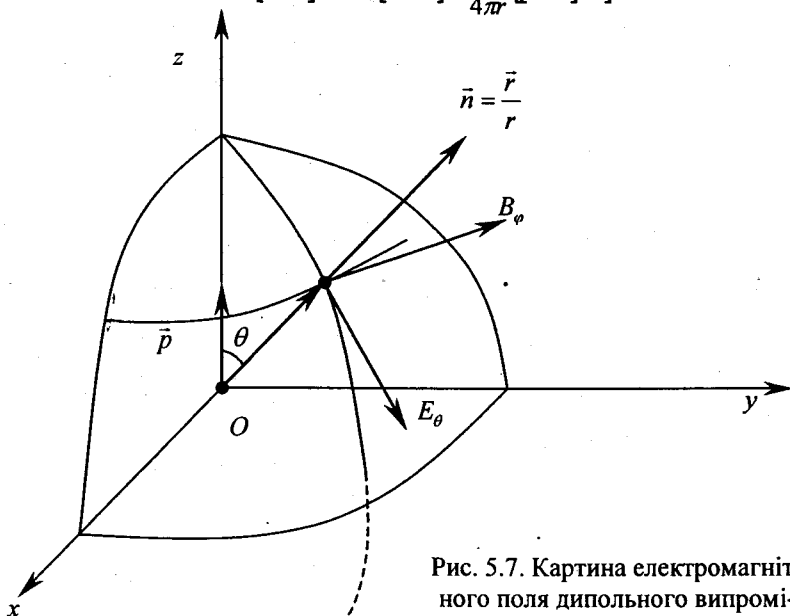


Рис. 5.7. Картина електромагнітного поля дипольного випромінювання в хвилевій зоні

Тому азимутальна H_φ складова напруженості магнітного поля, та полярна складова E_θ напруженості електричного поля в хвильовій зоні чисельно дорівнюють:

$$B_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \ddot{p} \cdot \sin\theta = \mu_0 H_\varphi,$$

$$H_\varphi = \frac{1}{4\pi r c} \ddot{p} \cdot \sin\theta \quad (5.53)$$

$$E_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{p} \cdot \sin\theta \quad (5.54)$$

Щоб знайти інтенсивність дипольного випромінювання, тобто кількість енергії, що проходить через деяку поверхню в одиницю часу, необхідно знайти вектор Пойнтінга в кожній точці цієї поверхні.

Розрізняють інтенсивність випромінювання в певному напрямку, інтенсивність випромінювання в межах тілесного кута $d\Omega$, який спирається на елементарну площадку dS , та повну інтенсивність випромінювання.

Вектор Пойнтінга визначає інтенсивність випромінювання в певному напрямку (\vec{n}) в будь-якій точці простору:

$$\vec{S} = [\vec{E} \cdot \vec{H}] = \vec{n} \frac{\mu_0}{16\pi^2 r^2 c} \ddot{p}^2 \cdot \sin^2 \theta \quad (5.55)$$

Як бачимо інтенсивність дипольного випромінювання в деякому напрямку залежить від самого напрямку (кут θ). Ця залежність пояснюється діаграмою спрямованості випромінювання, рис. 5.8. Зокрема при $\theta = \pi/2$ одержуємо максимальну інтенсивність.

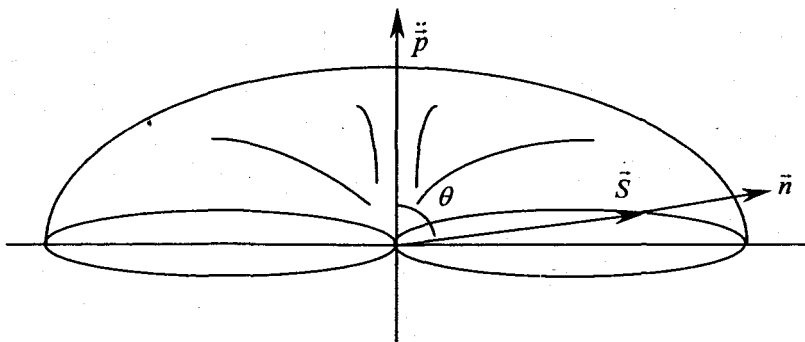


Рис. 5.8. Діаграма спрямованості випромінювання диполя

Інтенсивність випромінювання в елементарному тілесному куті $d\Omega$, який стягується площадкою dS визначається так:

$$dI = \bar{S} \cdot d\bar{S} = Sr^2 d\Omega = \frac{\mu_0 \ddot{p}^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c} d\Omega \quad (5.56)$$

або

$$dI = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left[\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n} \right]^2 d\Omega, \quad (5.56a)$$

де $d\Omega = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$.

Знайдемо повну інтенсивність випромінювання диполя: для цього обчислимо повний потік енергії через всю замкнену поверхню, що охоплює собою систему ЗЧ. Замкнену поверхню виберемо у вигляді сферичної поверхні радіуса r . А елементарну площадку dS виберемо у вигляді сферичного пояса шириною $r \cdot d\theta$ (див. рис. 5.9.). Тоді, підставляючи значення вектора Пойнтінга (5.55) і інтегруючи одержуємо:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{\mu_0}{16\pi^2 r^2 c} \ddot{p}^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot dS = \\ &= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \int_0^\pi \frac{\ddot{p}^2}{r^2} \sin^2 \theta \cdot 2\pi \cdot \sin\theta \cdot r \cdot d\theta = \frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{(4\pi)^2 c} \cdot \frac{8\pi}{3} = \frac{\ddot{p}^2}{6\pi c} \cdot \mu_0, \end{aligned}$$

де враховано, що:

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta \cdot d\theta = \frac{4}{3}$$

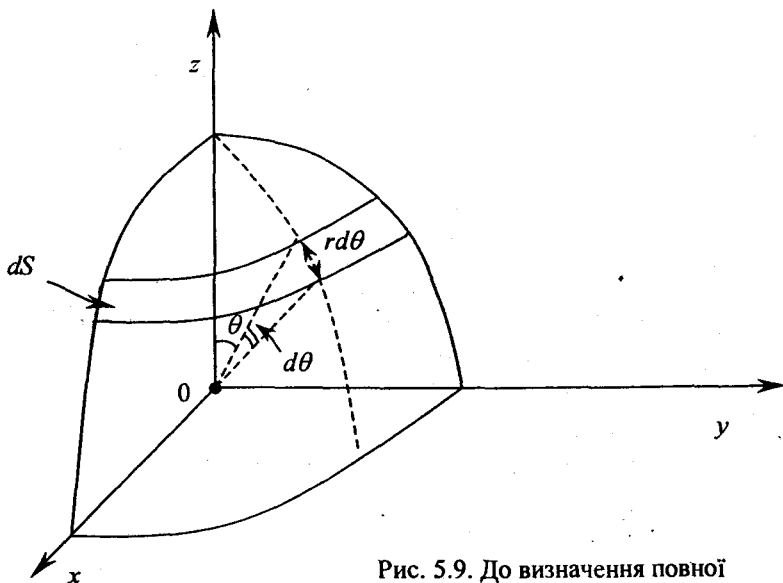


Рис. 5.9. До визначення повної інтенсивності випромінювання диполя

Таким чином, повна кількість енергії ЕМП дипольного випромінювання по всім напрямках в вакуумі дорівнює:

$$I = \frac{\ddot{\vec{p}}^2}{6\pi c} \cdot \mu_0 \quad (5.57)$$

Розглянемо приклади та особливості дипольного випромінювання простих систем.

Приклад 5.3. Знайти повну інтенсивність дипольного випромінювання ЗЧ, що рухається з постійним прискоренням.

Розв'язання: Величина дипольного моменту в цьому випадку:

$$\vec{p} = q\vec{r},$$

тому

$$\dot{\vec{p}} = q\dot{\vec{r}} = q\vec{v}, \quad \ddot{\vec{p}} = q\ddot{\vec{v}},$$

і тоді повна інтенсивність випромінювання ЗЧ, згідно (5.57), що рухається з прискоренням \dot{v} дорівнює:

$$I = \frac{q^2 \dot{v}^2 \mu_0}{6\pi c} \quad (5.58)$$

це так звана формула Лармора.

Приклад 5.4. Знайти середнє по часу значення інтенсивності випромінювання гармонічного осцилятора.

Розв'язання: Нехай ЗЧ рухається згідно закону:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cdot \cos \omega_0 t,$$

де \vec{r}_0 - амплітуда коливань, ω_0 - власна частота коливань осцилятора.

До речі нагадаємо, що осцилятором називають систему, яка описується

функцією Гамільтона $H(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$, де q - узагальнена координата, а p - узагальнений імпульс. Оскільки $\ddot{\vec{p}} = q\ddot{\vec{r}}$, то

$$\dot{\vec{r}} = -\vec{r}_0 \cdot \omega_0 \sin \omega_0 t$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\vec{r}_0 \omega_0^2 \cdot \cos \omega_0 t = -\omega_0^2 \cdot \vec{r},$$

тобто:

$$\ddot{\vec{p}} = -q\omega_0^2 \vec{r}$$

І тоді інтенсивність випромінювання в межах тілесного кута $d\Omega$ дорівнює:

$$dI = \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{(4\pi)^2 c} d\Omega \cdot q^2 \omega_0^4 r_0^2 \cos^2 \omega_0 t$$

Якщо частота коливань осцилятора ω_0 дуже велика, то при будь-яких експериментальних вимірах інтенсивності випромінювання, що

рееструється макроскопічними приладами ми одержуємо деяке середнє значення інтенсивності. Тому будемо цікавитися середнім значенням інтенсивності за період коливань.

$$\overline{dI} = \frac{1}{T} \int_0^T dI \cdot dt,$$

тоді повна середня інтенсивність випромінювання осцилятора дорівнює:

$$\overline{I} = \frac{q^2 \omega_0^4 r_0^2 \mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{q^2 \omega_0^4 r_0^2 \mu_0}{c \cdot 12\pi}, \quad (5.59)$$

$$\text{де } \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{8\pi}{3}.$$

Як бачимо інтенсивність випромінювання пропорційна квадрату дипольного моменту, який в свою чергу пропорційний довжині диполя. На якісному рівні це пояснює використання довгих антен в радіопередавачах. $\overline{I} \sim \omega_0^4$, із цієї залежності випливає висновок: для ефективного радіозв'язку слід використовувати короткі хвилі.

Приклад 5.5. В однорідному магнітному полі з індукцією \vec{B} рухається з швидкістю \vec{v} заряд q , знайти інтенсивність випромінювання.

Розв'язання: Оскільки прискоренні ЗЧ дорівнює:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q[\vec{v} \cdot \vec{B}]}{m},$$

то інтенсивність випромінювання визначається формулою Лармора:

$$I = \frac{q^2 v^2 \mu_0}{6\pi c} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \frac{q^2 v^2 B^2}{m^2} = \frac{\mu_0 q^4 v^2 B^2}{m^2 6\pi c} \quad (5.60)$$

Приклад 5.6. Покажемо, що інтенсивність дипольного випромінювання замкненої системи ЗЧ, які мають однакове відношення величин заряду до маси частинки дорівнює нулю.

Розв'язання: Дійсно, дипольний момент системи ЗЧ визначається:

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i = \sum_i q_i \vec{r}_i \frac{m_i}{m_i} = \frac{q}{m} \sum_i q_i \vec{r}_i$$

і тоді

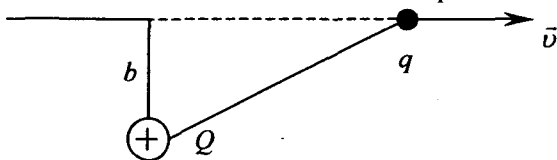
$$\ddot{\vec{p}} = \frac{q}{m} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i \right) = \frac{q}{m} \cdot \frac{d}{dt} \cdot \vec{P}_{\text{част}},$$

але імпульс замкненої системи частинок зберігається

$$\vec{P}_{\text{част}} = \text{const},$$

тому $\ddot{\vec{p}} = 0$, а значить і інтенсивність випромінювання $I = 0$.

Приклад 5.7. На прищільній відстані b мимо нерухомої ЗЧ Q пролітає заряд q . Знайти інтенсивність дипольного випромінювання.



Розв'язання: Миттєве значення інтенсивності випромінювання дорівнює:

$$I = \frac{q^2 \dot{v}^2 \cdot \mu_0}{6\pi c} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \cdot \left(\frac{F}{m}\right)^2 =$$

$$= \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c \cdot m^2} \frac{(Qq)^2}{(b^2 + v^2 t^2)}$$

а повна інтенсивність дорівнює:

$$I_{\text{п}} = \int_{-\infty}^{\infty} I \cdot dt$$

5.7. Межі застосування класичної електродинаміки.

Електродинаміка та неспроможність планетарної моделі атома. Класичний радіус електрона

Затухання коливань

Осцилятор випромінює енергію. Значить зменшення енергії в часі самого осцилятора внаслідок вимірювання ним електромагнітних хвиль визначається рівнянням:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 \omega^4 r_0^2 \mu_0}{12\pi c} \quad (5.61)$$

Але з механіки відомо, що повна енергія осцилятора дорівнює:

$$E = \frac{m}{2} r_0^2 \omega^2$$

Тобто, диференціальне рівняння, яке визначає зміну енергії осцилятора з часом має вигляд:

$$\frac{dE}{E} = -\frac{\mu_0}{6\pi c} \frac{q^2 \omega^2}{m} dt$$

Розв'язавши яке одержуємо:

$$E = E_0 e^{-\gamma t}, \quad (5.62)$$

де коефіцієнт затухання $\gamma = \frac{\mu_0 q^2 \omega^2}{6\pi mc}$, або, оскільки $\frac{\mu_0}{c} = \frac{1}{\epsilon_0 c^3}$,

$$\gamma = \frac{1}{6\pi} \frac{q^2 \omega^2}{\epsilon_0 mc^3} \quad (5.63)$$

Таким чином, енергія осцилятора зменшується, внаслідок випромінювання, по експоненціальному закону.

Це значить, що за час $T \sim \frac{1}{\gamma} = \frac{6\pi \epsilon_0 mc^3}{q^2 \omega^2}$ енергія атома (якщо

основною властивістю моделі атома вважати рух електрона по "орбіті" навколо ядра), що випромінює, зменшиться в e раз.

Використавши (5.63) оцінимо час життя атому:

$$\begin{aligned} T &\sim \frac{6\pi 8,85 \cdot 10^{-30} \cdot 27 \cdot 10^{24}}{(1,6)^2 \cdot 10^{-38} \cdot 10^{30}} \sim 1,8 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-30} \cdot 10^{24} \cdot 10^8 \sim \\ &\sim 10^{35} \cdot 10^{-42} \sim 10^{-7} \div 10^{-9} \text{ сек} \end{aligned}$$

Таким чином, згідно законів класичної електродинаміки електрон за час $\tau \sim 10^{-9}$ сек впаде на ядро. Тому така модель атома не відповідає реальності.

Приклад 5.8. Оцінити "час життя" атома згідно уявлень класичної електродинаміки та класичної механіки.

Розв'язання: Уявимо собі планетарну модель атома.

Повна енергія електрона, що рухається по орбіті навколо ядра дорівнює:

$$E = T + U = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Ze^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

а швидкість втрати енергії атома внаслідок дипольного випромінювання визначається

$$\frac{dE}{dt} = -I$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{6\pi c} = -\frac{\mu_0 (e\ddot{r})^2}{6\pi c}$$

Але згідно другого закону Ньютона $\ddot{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mr^2}$, де r - радіус

"орбіти" електрону ($\sim 10^{-10}$ м). Тому

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{e^2 \mu_0}{6\pi c} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mr^2} \right)^2 = -\frac{\mu_0 e^2 Z^2 c^4 r_0^2}{6\pi \epsilon r^4}$$

де r_0 – так званий класичний радіус електрона:

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \quad (5.64)$$

Тоді “час життя” атому

$$\tau \sim \frac{E}{dE/dt} = \frac{Ze^2/8\pi\epsilon_0 r}{\mu_0 e^2 Z^2 c^4 r_0^2 / 6\pi cr^4} \sim \frac{3r^3}{4Zcr_0^2}$$

$$\tau \sim \frac{10^{-30}}{3 \cdot 10^8 \cdot 9 \cdot 10^{-30}} \sim 10^{-9} \text{ c}$$

Сила променистого тертя

Випромінювання електромагнітних хвиль рухомою ЗЧ приводить до втрати нею енергії. Зворотний вплив такої втрати енергії на рух ЗЧ в класичній електродинаміці описується шляхом введення в рівняння руху ЗЧ відповідних “сил тертя”. Уявляємо собі ситуацію таким чином, що коливання, наприклад осцилятора, затухають нібито внаслідок дії деякої дисипативної сили. Її називають силою променистого тертя, силою тертя випромінювання, або силою реакції випромінювання.

Підберемо силу тертя випромінюванням \vec{F}_s , таким чином, щоб втрата енергії могла бути подана як середня робота таких сил променистого тертя в одиницю часу:

$$\overline{\vec{F}_s \cdot \vec{v}} = -\frac{\overline{\dot{\vec{p}}^2} \mu_0}{6\pi c}, \quad (5.65)$$

бо $\frac{\overline{\dot{\vec{p}}^2} \cdot \mu_0}{6\pi c}$ – це повна інтенсивність дипольного випромінювання.

Цій вимозі, як не важко впевнитися, задовольняє сила

$$\vec{F}_s = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{\vec{p}} \cdot q$$

Дійсно:

$$\vec{F}_s \cdot \vec{v} = \frac{\mu_0 q}{6\pi c} \ddot{\vec{p}} \cdot \vec{v} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{\vec{p}} \cdot \dot{\vec{p}} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left\{ \frac{d}{dt} (\dot{\vec{p}} \cdot \dot{\vec{p}}) - \dot{\vec{p}}^2 \right\}$$

Тоді, при усередненні за достатньо великий проміжок часу, перший доданок, що містить повну похідну по часі дає 0:

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{df}{dt} dt = \frac{f(T) - f(0)}{T}$$

і оскільки $f(t)$ змінюється в певних межах, то при $T \rightarrow \infty$ $\frac{df}{dt} \rightarrow 0$.

Баланс енергії між полем випромінювання і силою променистого тертя повинен мати місце в середньому за деякий проміжок часу. Тобто робота сил променистого тертя за цей проміжок часу повинна дорівнювати зменшенню енергії ЗЧ, яка випромінює:

$$\int_{t_0}^t \vec{F}_s \cdot \vec{v} \cdot dt = - \int_{t_0}^t \frac{\mu_0 \dot{p}^2}{6\pi c} dt = - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{t_0}^t \dot{v}^2 dt$$

Введення сили променистого тертя дозволяє записати в явному вигляді рівняння руху ЗЧ, що коливається

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_s + \vec{F}_л$$

Якщо будемо вважати, що прискорення зумовлене дією періодичної сили з частотою ω , наприклад: $\vec{F}_n = F_n^0 \sin \omega t$, то прискорення дорівнює

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_л}{m},$$

і для сили променистого тертя одержуємо:

$$\vec{F}_s = \frac{\mu_0}{6\pi c} q \ddot{\vec{p}} = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 \dot{\vec{a}} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \frac{\dot{\vec{F}}}{m} \approx \frac{\mu_0 q^2 \omega}{6\pi c m} \vec{F}_л$$

Але необхідно, щоб $F_s \ll F_л$ (бо якщо навпаки, наприклад $F_s \gg F_л$, то рівняння руху набуває вигляду:

$$m\dot{a} \approx \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 \dot{a}$$

і інтегрування його приводить до фізично абсурдного результату: енергія випромінюється, а прискорення ЗЧ зростає з часом:

$$\frac{da}{a} = \left(\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c m} \right)^{-1} dt \rightarrow a = a_0 e^{\frac{6\pi c m}{\mu_0 q^2} t}$$

Тобто зб'язково повинна мати місце нерівність $F_s \ll F_л$, що може бути виконано лише при умові:

$$\frac{\mu_0 q^2 \omega}{6\pi c m} \ll 1 \quad (5.66)$$

Ця нерівність має фундаментальне значення для визначення умов застосування теорії випромінювання та законів класичної теорії поля. Класична теорія поля приводить до розумних (фізично прийнятих) результатів лише тоді, коли:

$$\frac{6\pi c m}{\mu_0 q^2} \gg \omega$$

$$\left(\frac{6\pi\epsilon_0 c^3}{q^2} \gg \omega \quad \text{оскільки} \quad \frac{c}{\mu_0} = \epsilon_0 c^3 \right)$$

Попередню нерівність перепишемо таким чином:

$$\frac{c}{\omega} \gg \frac{q^2}{mc^2 \cdot 6\pi\epsilon_0} \quad (5.67)$$

Права частина цієї нерівності по порядку величин дорівнює класичному радіусу електрона r_0 , а ліва частина нерівності - це довжина електромагнітної хвилі.

$$\lambda \gg r_0 \sim 3 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

Тобто, класична електродинаміка приводить до розумних наслідків, які відповідають дослідним даним, лише при умові $\lambda \gg r_0$.

Іншим словами, або точкових зарядів не існує, або закони класичної електродинаміки не можуть бути застосовані на відстанях порядку атомних розмірів.

Приклад 5.9. Оцінити чисельно величину класичного радіусу електрону.

Розв'язання: Класичний радіус електрону r_0 , вводиться таким чином. Якщо ми будемо вважати, що електрон - це кулька радіусом r_0 , то енергія заряду q в власному електростатичному полі дорівнює

$$W = q\varphi,$$

де $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0}$ - потенціал електромагнітного поля на поверхні кульки.

$$W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sim mc^2$$

Тому класичний радіус електрону r_0 дорівнює:

$$r_0 \sim \frac{q^2}{mc^2 4\pi\epsilon_0} \sim 3 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

5.8. Розсіювання електромагнітних хвиль

Нехай на вільну ЗЧ падає плоска монохроматична ЕМ хвиля:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

Впливом магнітного поля ЕМ хвилі на рух ЗЧ нехтуємо, оскільки

$\frac{v}{c} \ll 1$, де v - швидкість ЗЧ під дією хвилі.

Оскільки рівняння руху ЗЧ в нерелятивістському наближенні, $m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E}$, а дипольний момент, згідно означення, дорівнює $\vec{p} = q\vec{r}$, тоді $\ddot{\vec{p}} = \frac{q^2\vec{E}}{m}$.

Як відомо, диференційний ефективний переріз розсіювання визначається як відношення інтенсивності розсіяного випромінювання в тілесному куті $d\Omega$ до інтенсивності падаючого випромінювання.

$$d\sigma = \frac{dI}{I},$$

$$\text{де } dI = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left[\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n} \right]^2 d\Omega = \frac{\mu_0 q^4}{16\pi^2 m^2 c} \left[\vec{E} \cdot \vec{n} \right]^2 d\Omega,$$

$$I = |\vec{S}| = EH = E^2 \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} = E^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \quad (5.68)$$

Тому диференційний ефективний переріз розсіювання дорівнює:

$$d\sigma = \frac{\mu_0 q^4 E^2 \sin^2 \theta \cdot d\Omega}{E^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot 16\pi^2 m^2 c} = \left(\frac{q^2}{4\pi m c^2 \epsilon_0} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega, \quad (5.69)$$

де кут θ - це кут між напрямком розповсюдження (\vec{n}) розсіяної електромагнітної хвилі і вектором \vec{E} падаючої хвилі, див. рис. 5.10,

$$r_0 \sim \frac{q^2}{m c^2 4\pi \epsilon_0}, \quad \frac{\mu_0}{c} = \frac{1}{\epsilon_0 c^3}.$$

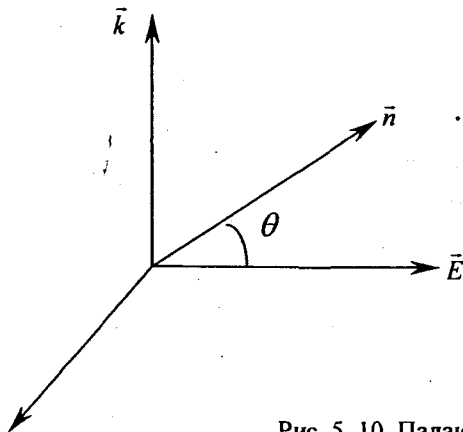


Рис. 5. 10. Падаюча ЕМ хвиля (\vec{k}) розсіюється в напрямку \vec{n}

Виберемо полярну вісь, в напрямку вектора \vec{E} ЕМ хвилі. Тоді $d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$

Тоді повний переріз розсіювання дорівнює:

$$\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 \epsilon_0} \right)^2 \cdot \sin^3\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 \epsilon_0} \right)^2 \frac{8\pi}{3}$$

Ми одержали так звану формулу Томсона, яка визначає переріз розсіювання ЕМ хвиль на електронах будь-яких систем, якщо знехтувати силами, що зв'язують електрони в деякій фізичній системі.

Розсіювання електромагнітних хвиль зв'язаними зарядженими частинками розглянемо на прикладі лінійного осцилятора. Нехай плоска електромагнітна хвиля падає на осцилятор. Тоді рівняння руху його має вигляд:

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{q\vec{E}_0 e^{i\omega t}}{m} + \frac{\mu_0 q^2 \dot{\vec{a}}}{6\pi c m}, \quad (5.70)$$

де $\frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 \dot{\vec{a}} = \frac{\mu_0}{6\pi c} q\ddot{\vec{p}} = \vec{F}_s$ - сила променистого тертя.

Якщо затухання слабке, то $\dot{\vec{a}} = \ddot{\vec{r}} \approx -\omega_0^2 \vec{r}$ і тоді відношення сили променистого тертя до маси ЗЧ можна подати так:

$$\frac{\vec{F}_s}{m} = \frac{-\mu_0}{6\pi c m} q^2 \omega_0^2 \dot{\vec{r}} = -\gamma \cdot \dot{\vec{r}},$$

де $\gamma = \frac{\mu_0 q^2 \omega_0^2}{6\pi c m}$

А рівняння руху (5.70) тоді набуває вигляду:

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} + \gamma \dot{\vec{r}} = \frac{q\vec{E}_0 e^{i\omega t}}{m}$$

Як нам уже відомо, розв'язком цього рівняння є:

$$\vec{r}(t) = \frac{q\vec{E}_0 e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \quad (5.71)$$

Знайдемо тепер інтенсивність випромінювання осцилятора. Оскільки $\ddot{\vec{p}} = q\ddot{\vec{r}}$, а

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{q\vec{E}_0 e^{i\omega t}}{m} \left(\frac{-\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right),$$

то інтенсивність випромінювання в межах тілесного кута $d\Omega$, в напрямку \vec{n} дорівнює:

$$dI = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \left[\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n} \right]^2 d\Omega = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{q^4 E_0^2 \omega^4 \cdot \cos^2(\omega t - \delta) \cdot \sin^2 \theta}{m^2 ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2)} d\Omega,$$

де $\delta = \arctg \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ - зсув фаз між коливаннями вектора \vec{E} ЕМ хвилі та вимушеними коливаннями осцилятора, θ - кут між напрямком спостереження \vec{n} і напрямком вектора поляризації \vec{E}_0 .

А диференційний ефективний переріз розсіювання дорівнює:

$$d\sigma = \frac{dI}{I} = \frac{\sqrt{\mu_0} \cdot \mu_0 q^4 E_0^2 \omega^4 \cdot \sin^2 \theta \cdot d\Omega \cdot \cos^2(\omega t - \delta)}{(4\pi)^2 c m^2 E_0^2 \cdot \sqrt{\epsilon_0} \cdot ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2)}, \quad (5.72)$$

$$\text{де } I = S = \llbracket \vec{E} \cdot \vec{H} \rrbracket = \vec{E} \cdot \vec{H} = E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} = E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}, \quad \frac{\mu_0}{c} = \frac{1}{\epsilon_0 c^3}.$$

Після усереднення \overline{dI} маємо:

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\overline{I}} = r_0^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} d\Omega$$

Інтегрування по всьому тілесному куті дає повний переріз розсіювання:

$$\begin{aligned} \sigma &= \left(\frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 c^2} \right)^2 \cdot \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \cdot \int \sin^2 \theta d\Omega = \\ &= \left(\frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \cdot \frac{8\pi}{3} \end{aligned} \quad (5.73)$$

Одержали дисперсійну формулу класичної електродинаміки.

Розглянемо граничні випадки. При $\omega \ll \omega_0$ переріз розсіювання

$$\sigma \sim \frac{8\pi}{3} r_0^2 \cdot \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \sim \frac{1}{\lambda^4} \quad (5.74)$$

спостерігаємо релеєвське розсіювання, що реалізується, коли довжина хвилі $\lambda \gg$ розмірів розсіюючої об'єкти.

При $\omega \gg \omega_0$, переріз розсіювання визначається формулою Томсона:

$$\sigma_{\text{Томс.}} = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad (5.75)$$

Тобто, при високих частотах сила, що діє на заряд збоку поля дуже велика порівняно з квазіпружною силою і електрон розсіює як вільна заряджена частинка.

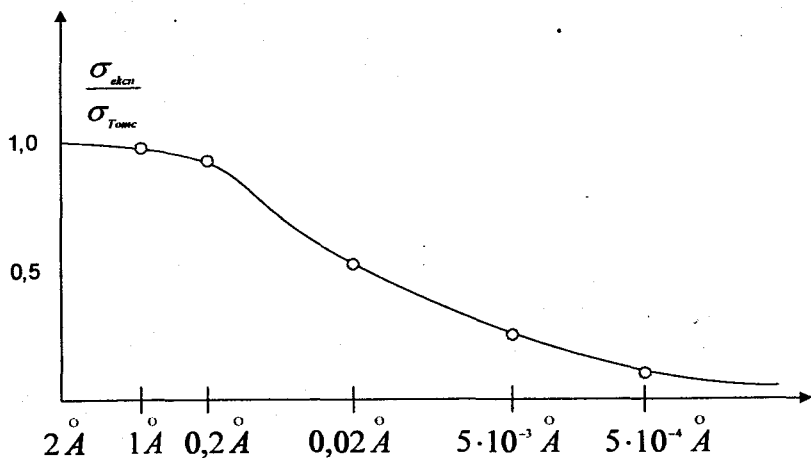


Рис. 5.11. Залежність відношення $\frac{\sigma_{\text{екст}}}{\sigma_{\text{Томс}}}$ від довжини ЕМ хвилі

Питання для самоперевірки

1. Як вводяться поняття векторного і скалярного потенціалів електромагнітного поля.
2. Обґрунтуйте рівняння Даламбера для векторного та скалярного потенціалів.
3. Що означає калібровочна інваріантність полів?
4. Дати фізичну інтерпретацію розв'язку рівнянь Даламбера у вигляді потенціалів, що запізнюються.
5. Пояснити принцип причинності в класичній механіці і класичній електродинаміці.
6. Обґрунтувати вирази для потенціалів Лієнара-Віхерта.
7. З допомогою потенціалів Лієнара-Віхерта знайти електромагнітне поле (ЕМП) рівномірно рухомої ЗЧ.
8. Пояснити умову квазістаціонарності.
9. Знайти ЕМП в хвилевій зоні і описати його властивості.
10. Знайти інтенсивність дипольного випромінювання.
11. Як можна визначити межі застосування класичної електродинаміки?
12. Обґрунтувати дисперсійну формулу класичної електродинаміки.

РОЗДІЛ 6. ОСНОВИ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ



6.1. Передні зауваження

Згідно принципу відносності всі основні рівняння фізики не повинні змінювати свою математичну форму при переході від однієї системи відліку до іншої.

Безпосередньо можна впевнитися, що рівняння Максвелла не змінюються при переході від однієї системи відліку до іншої, тобто, вони являються коваріантними при перетвореннях Лоренца. Але при цьому всі величини, що входять в систему рівнянь Максвелла повинні перетворюватися по певним законам при переході від однієї СВ до іншої.

Дійсно, в системі рівнянь Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.1a)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (6.1б)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.1в)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (6.1г)$$

перейдемо від координат події x, y, z, t в СВ K до координат тієї ж події, але в СВ $K' - x', y', z', t'$.

Оскільки, згідно перетворень Лоренца $x' = x'(x, t)$, $t' = t'(x, t)$, і $x = x(x', t')$, то враховуючи явний вигляд прямих та обернених перетворень Лоренца:

$$x' = \frac{x - V \cdot t}{\sqrt{1 - B^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - x \cdot \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - B^2}}$$

$$x = \frac{x' + V \cdot t'}{\sqrt{1 - B^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + x' \cdot \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - B^2}}$$

Або, відповідно, в термінах компонент 4-вимірнього радіус-вектора:

$$x'_i = \alpha'_{ik} \cdot x_k$$

$$x_i = \alpha_{ik} \cdot x'_k$$

де α'_{ik} , α_{ik} - це матриці прямого і оберненого перетворень Лоренца:

$$\alpha'_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}, \quad \alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}$$

для операторів частинних похідних одержуємо:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} = \Gamma \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} = \Gamma \left(\frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'} \right) \quad (6.3)$$

аналогічно:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x'} = \Gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (6.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial t'} = \Gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (6.3a)$$

В системі рівнянь Максвелла (6.1) зробимо заміну змінних з допомогою (6.2), (6.3). Спочатку, рівняння (6.1в) після нескладних алгебраїчних перетворень, перегрупування доданків та вводячи позначення:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \Gamma(E_y - VB_z), \quad E'_z = \Gamma(E_z + VB_y) \quad (6.4)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \Gamma\left(B_y + \frac{V \cdot E_z}{c^2}\right), \quad B'_z = \Gamma\left(B_z - \frac{VE_y}{c^2}\right) \quad (6.5)$$

набуває вигляду:

$$\text{rot}' \bar{E}' = -\frac{\partial \bar{B}'}{\partial t'} \quad (6.6)$$

Таким чином, локальна форма закону електромагнітної індукції і в СВ K' має таку ж форму, як і в СВ K лише при умові (6.4) та (6.5).

Подібно до перетворення рівняння Максвелла (6.1в) зробимо аналогічні перетворення рівняння (6.1а). Тоді з урахуванням (6.2), (6.3), рівняння Максвелла $\text{div} \bar{D} = \rho$ та при умові:

$$H'_x = H_x, \quad H'_y = \Gamma(H_y + VD_z), \quad H'_z = \Gamma(H_z - VD_y) \quad (6.7)$$

$$D'_x = D_x, \quad D'_y = \Gamma\left(D_y - \frac{V}{c^2} H_z\right), \quad D'_z = \Gamma\left(D_z + \frac{V}{c^2} H_y\right) \quad (6.8)$$

$$j'_x = \Gamma(j_x - V \cdot \rho), \quad j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z \quad (6.9)$$

одержуємо:

$$\text{rot}' \vec{H}' = \vec{j}' + \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t'} \quad (6.10)$$

Аналогічно можна впевнитися, що і рівняння (6.16) і (6.1г) не змінюють свою форму щодо перетворень Лоренца.

6.2. 4-вимірний струм. Закон збереження заряду в коваріантній формі. Відносність розбиття джерел поля на заряди та струми. Явище виникнення об'ємної густини заряду в провіднику зі струмом, що рухається

Але набагато простіше можна впевнитися в лоренц-коваріантності основних рівнянь електродинаміки, якщо вдасться записати їх в 4-вимірній формі.

Основними рівняннями електродинаміки можна вважати рівняння Даламбера для векторного та скалярного потенціалів, умову калібрування Лоренца та закон збереження заряду. Можна показати, що вони еквівалентні системі рівнянь Максвелла.

Тобто, якщо вдасться надати рівнянням Даламбера для векторного та скалярного електромагнітних потенціалів, умові калібрування Лоренца та закону збереження заряду 4-вимірної форми, то автоматично доводиться лоренц-коваріантність рівнянь Максвелла, оскільки система рівнянь (6.11) та (6.12) еквівалентна рівнянням Максвелла.

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{j} \quad (6.11)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}$$

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (6.12)$$

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Компоненти 4-вимірної густини струму в деякій СВ визначаються так:

$$\vec{s}(\rho \cdot u_x, \rho \cdot u_y, \rho \cdot u_z, i \cdot c \cdot \rho), \quad (6.13)$$

де u_x, u_y, u_z - проєкції швидкості розподілу заряду, ρ - густина заряду.

Враховуючи, що 4-вимірний радіус-вектор визначається:

$$\vec{R}(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict)$$

закон збереження заряду в 4-вимірній формі набуває вигляду:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{ds_i}{dx_i} = 0 \quad (6.14)$$

Знайдемо правила по яким змінюються компоненти 4-струму при переході від однієї СВ до іншої. Розглянемо конкретні приклади:

Приклад 6.1: Нехай в СВ K' знаходиться в спокої деякий розподіл зарядів. Тоді компоненти 4-струму в СВ K' дорівнюють:

$$s'_1 = s'_2 = s'_3 = 0, s'_4 = i \cdot c \cdot \rho'$$

Знайти компоненти 4-струму в СВ K .

Розв'язання: Оскільки компоненти 4-струму утворюють 4-вимірний вектор, то компоненти його при переході від системи K' до системи відліку K перетворюються згідно таких формул:

$$A_1 = \frac{(A'_1 - i \cdot B \cdot A'_4)}{\sqrt{1 - B^2}}$$

$$A_2 = A'_2$$

$$A_3 = A'_3$$

$$A_4 = \frac{(A'_4 + i \cdot B \cdot A'_1)}{\sqrt{1 - B^2}}$$

Тому компоненти 4-струму в СВ K будуть:

$$s_1 = \rho \cdot u_x = j_x = -\frac{i \cdot B \cdot i \cdot c \cdot \rho'}{\sqrt{1 - B^2}} = \frac{V \cdot \rho'}{\sqrt{1 - B^2}}$$

$$s_4 = i \cdot c \cdot \rho = \frac{i \cdot c \cdot \rho'}{\sqrt{1 - B^2}}$$

тобто: $\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - B^2}}$

Висновки:

А) Якщо деякий розподіл зарядів рухається відносно лабораторної системи відліку, то густина заряду збільшиться в тій системі відліку відносно якої розподіленні заряди рухаються:

$$\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - B^2}} \quad (6.15)$$

Б) Якщо розподіл зарядів рухається з швидкістю V , то в СВ K відповідна густина струму дорівнює:

$$j_x = -\frac{i \cdot B \cdot i \cdot c \cdot \rho'}{\sqrt{1 - B^2}} = \frac{V \cdot \rho'}{\sqrt{1 - B^2}} = \rho V \quad (6.20)$$

Приклад 6.2: Припустимо, що в СВ K' вздовж осі $O'X'$ знаходиться в спокої провідник зі струмом. Знайти компоненти 4-струму в СВ K .

Розв'язання: Тоді компоненти 4-струму в СВ K' :

$$s'_1 = j'_x, s'_2 = s'_3 = 0, s'_4 = i \cdot c \cdot \rho' = 0$$

А в СВ K маємо такі компоненти 4-струму

$$s_1 = j_x = \frac{j'_x}{\sqrt{1-B^2}}$$

$$s_4 = i \cdot c \cdot \rho = \frac{i \cdot B \cdot j'_x}{\sqrt{1-B^2}}$$

$$\rho = \frac{V}{c^2} \cdot \frac{j'_x}{\sqrt{1-B^2}} = \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{j})$$

Тобто, провідник з струмом в СВ K характеризується об'ємною густиною заряду:

$$\rho = \frac{V}{c^2} \cdot \frac{j'_x}{\sqrt{1-B^2}} = \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{j}) \quad (6.21)$$

а густина струму в СВ K зростає:

$$j_x = \Gamma \cdot j'_x \quad (6.22)$$

Якщо струм направлений протилежно напрямку руху системи K' , то величина об'ємної густини заряду ρ характеризується від'ємним значенням.

6.3. Пояснення явища виникнення об'ємної густини заряду в рухомому металевому провіднику зі струмом за допомогою діаграм Мінковського та на основі елементарних релятивістських уявлень

Явище виникнення об'ємної густини заряду (6.21) в рухомому металевому провіднику зі струмом, яке ми одержали в результаті розв'язування попередньої задачі, є наслідком релятивістського закону додавання швидкостей руху електронів провідності та іонів.

Нехай густину заряду позитивних іонів та густину заряду електронів провідності у власних СВ по значимо ρ_+^0 і ρ_-^0 відповідно.

Тоді у системі відліку K густина заряду електронів провідності, згідно (6.15) дорівнює:

$$\rho_- = \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{v}{c}$$

Розглянемо модель провідника зі струмом. Вздовж осі OX знаходиться провідник з струмом. Дрейфова швидкість електронів провідності дорівнює \vec{v} , рис. 6.1.

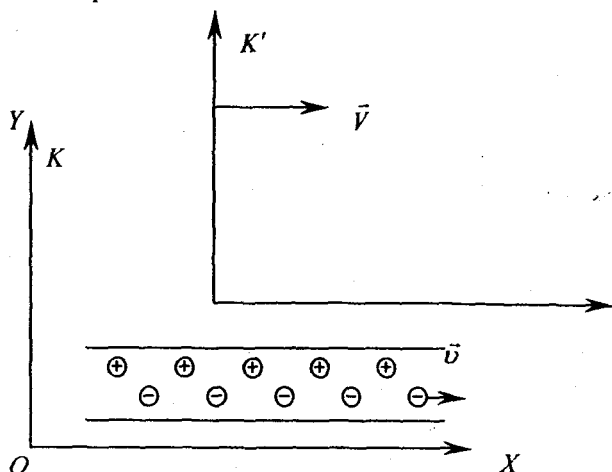


Рис. 6.1. Провідник зі струмом паралельний осі OX . Дрейфова швидкість електронів провідності дорівнює \vec{v}

Тоді, якщо перейти в СВ K' , (для простоти виберемо $V = v$) де електрони нерухомі, об'ємна густина заряду їх дорівнює:

$$\rho'_- = \rho_-^0 = \rho_- \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$$

А густина заряду іонів відносно СВ K' :

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1 - B^2}}$$

Оскільки в СВ K загальноприйнятою умовою нейтральності провідника зі струмом в такій моделі являється співвідношення:

$$|\rho'_+| = \frac{|\rho_-^0|}{\sqrt{1 - \beta^2}} = |\rho_-|, \quad (6.23)$$

то сумарна густина заряду провіднику зі струмом в СВ K' :

$$\rho' = \rho'_+ - \rho'_-$$

$$\rho' = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \rho_- \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\rho_+^0 \cdot \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{j_x \cdot v}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

де використано тут: $v \cdot \rho_+^0 = v \cdot \rho_- = j_x$. Тобто, ми одержали результат (6.21).

Аналогічний висновок, про появу об'ємної густини заряду в рухомому провіднику зі струмом, впливає із аналізу явища протікання струму в металевому провіднику методом діаграми Мінківського, рис. 6.2.

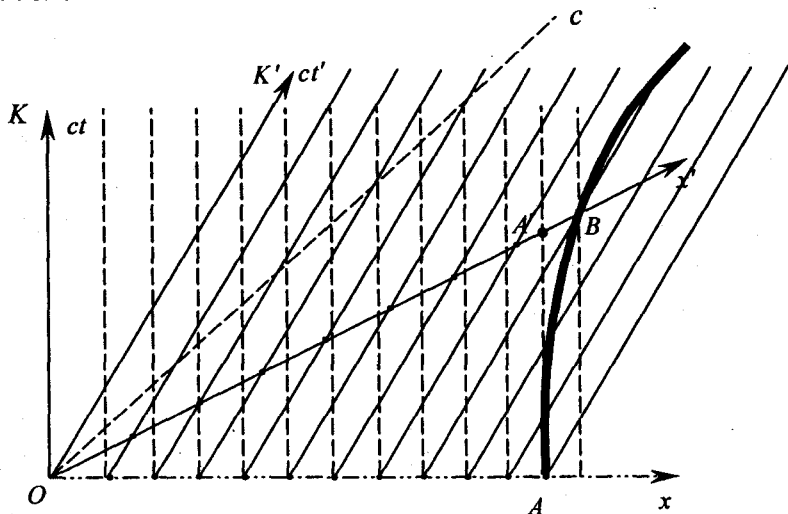


Рис. 6.2. Пояснення виникнення об'ємної густини заряду в рухомому ППС з допомогою діаграм Мінківського

Дійсно, нехай в СВ K вздовж осі Ox знаходиться провідник зі струмом, довжина його OA (рис. 6.2.). Світові лінії позитивно заряджених іонів зображені пунктирними лініями. Світові лінії електронів провідності – суцільні лінії паралельні часовій вісі СВ K' . На одиничній довжині OA знаходиться 12 іонів і 12 електронів. Тобто, з точки зору СВ K провідник зі струмом нейтральний. Але з точки зору СВ K' , на довжині його OA' ($OA' < OB = 1\text{ м}$) буде одночасово знаходитися 12 позитивних іонів та приблизно 8,5 електронів. Таким чином, в СВ K' провідник зі струмом характеризується не скомпенсованим позитивним зарядом.

6.4. Релятивістська інтерпретація взаємодії струму та ЗЧ, що рухається відносно струму

Розглянемо взаємодію прямолінійного провідника зі струмом та зарядженої частинки, яка рухається вздовж провідника з точки зору 2-х систем відліку K і $CB K'$.

Приклад 6.3. В СВ K' знаходиться нерухомий провідник, по якому протікає постійний струм I' . Вздовж провідника в площині XOY в сторону від'ємних значень осі $O'X'$ рухається із швидкістю \vec{v}' електрон. Знайти силу взаємодії між електроном і провідником з струмом I' в СВ K . Пояснити явище виникнення об'ємного заряду в рухомому провіднику з струмом.

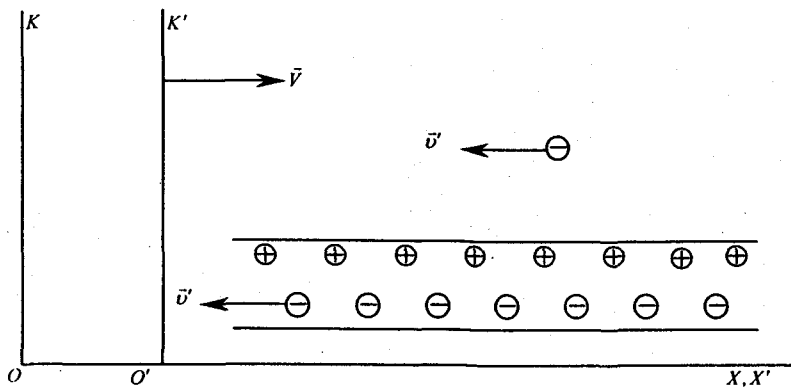


Рис. 6.3. Взаємодія електрона і провідника зі струмом

Розв'язання. Індукція магнітного поля в точці знаходження електрона визначається по формулі:

$$B'_z = \frac{\mu_0 I'}{2\pi \cdot r'} \quad (6.24)$$

де r' - віддаль електрона від проводу, $I' = j' \cdot S'$, $j' = \frac{n_-^0 \cdot v' q}{\sqrt{1 - \beta'^2}}$ - густина струму в ППС з точки зору СВ K' , S' - площа поперечного перерізу провідника, n_-^0 - концентрація електронів провідності у ВСВ, $\beta' = \frac{v'}{c}$, v' - дрейфова швидкість руху цих електронів. Тоді величина сили Лоренца, яка діє на електрон в СВ K' дорівнює:

$$F'_a = q v' \frac{\mu_0 I'}{2\pi r'} \quad (6.25)$$

Якщо СВ K' разом з провідником і електроном рухаються з швидкістю $V = v'$, то в СВ K електрон буде нерухомий, і тому до уваги в цій СВ слід брати тільки силу з боку електричного поля напруженістю:

$$E_y = \Gamma V B'_z$$

Це електричне поле в СВ K виникає внаслідок руху відносно СВ K магнітного поля B'_z . І тоді сила, що діє на ЗЧ в СВ K :

$$F = q \Gamma V B'_z \quad (6.26)$$

Порівнюючи (6.25) і (6.26) бачимо, що $F'_x = F \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$.

Але ця задача з такою моделлю ППС надає можливість для наглядного фізичного пояснення явища виникнення електричного поля в СВ K . Це електричне поле напруженістю $E_y = \Gamma V B'_z$ створюється різною за величиною густиною об'ємного заряду електронів провідності та об'ємною густиною заряду позитивних іонів кристалічної ґратки. Часто говорять, що провідник з струмом, який рухається в лабораторній СВ вздовж своєї довжини, в цій СВ характеризується деякою об'ємною густиною заряду (провідник з струмом є "заряджений").

Нехай густину заряду позитивних іонів та електронів провідності у власній СВ по значимо ρ_+^0 і ρ_-^0 відповідно.

Тоді в системі відліку K' густина заряду електронів провідності дорівнює:

$$\rho'_- = \frac{\rho_-^0}{\sqrt{1 - \beta'^2}} \quad (6.27)$$

де v' - дрейфова швидкість електронів провідності в СВ K' , $\beta' = \frac{v'}{c}$

Тоді, якщо перейти в систему відліку K , (для простоти виберемо $V = v'$) де електрони нерухомі, то об'ємна густина заряду їх дорівнює:

$$\rho_- = \rho_-^0 = \rho'_- \cdot \sqrt{1 - \beta'^2} \quad (6.28)$$

А густина заряду іонів відносно СВ K :

$$\rho_+ = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1 - \beta'^2}} = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1 - B^2}} \quad (6.29)$$

Сумарна густина заряду в СВ K :

$$\rho = \rho_+ - \rho_-$$

$$\rho = \frac{\rho_+^0}{\sqrt{1 - \beta'^2}} - \rho_-^0 \cdot \sqrt{1 - \beta'^2} = \frac{\rho_+^0 \cdot v'^2}{\sqrt{1 - \beta'^2} \cdot c^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{j'_x \cdot v'}{\sqrt{1 - \beta'^2}}, \quad (6.29a)$$

оскільки в СВ K' загальноприйнятою умовою нейтральності провідника зі струмом в такій моделі являється співвідношення (порівняйте з (6.23)):

$$|\rho_+^0| = \frac{|\rho_-^0|}{\sqrt{1-\beta'^2}} = |\rho_-'|, \quad (6.30)$$

ми використали тут: $v' \cdot \rho_+^0 = v' \cdot \rho_-' = j'_x$

Таким чином, лінійний провідник з струмом в СВ, відносно якої він рухається, при геометрії задачі показаної на рис. 6.3., характеризується лінійною густиною заряду $\tau = \rho \cdot S$ і тому створює електричне поле напруженістю:

$$E_y = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \cdot r} = \frac{\rho_+^0 v'^2 \cdot S}{2\pi\epsilon_0 \cdot rc^2 \sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \Gamma v' \cdot \frac{\mu_0 I'}{2\pi \cdot r} = \Gamma v B'_z \quad (6.31),$$

де $I' = j'_x S = v' \rho_-' S$, що і співпадає з напруженістю поля (6.26), і яка може бути знайдена і іншими шляхами.

А сила, що діє на електрон в СВ K тоді дорівнює:

$$F_y = \frac{F'_y}{\sqrt{1-\beta'^2}} \quad (6.32)$$

Здавалося б, що ми одержали майже ідентичний опис взаємодії ЗЧ та ППС: $F_y \cong F'_y$. Але насправді ми маємо в СВ K точно таке ж значення сили, яка діє на ЗЧ, як і в СВ K' . Дійсно, необхідно врахувати формули перетворення для поперечних компонент сили при переході від

СВ K' до СВ K , $F_y = \frac{F'_y}{\sqrt{1-\beta'^2}}$. Тобто, ми одержали абсолютно еквівалентний опис взаємодії ЗЧ та ППС.

Приклад 6.4. Дати елементарне обґрунтування формули:

$$F = \frac{F'}{\sqrt{1-\beta'^2}}$$

Розв'язання: Якщо в СВ K' є якась сила, то при переході до будь-якої іншої системи ця сила в принципі зникнути не може.

Дійсно, нехай в СВ K' на частинку діє деяка сила, але ця частинка в системі відліку K' рухається в площині перпендикулярній V . Тобто рівняння руху в СВ K' має вигляд:

$$F'_y = \frac{dp'_y}{dt'}$$

$$F_y = \frac{dp_y}{dt},$$

де p_y і p'_y – складові релятивістського імпульсу.

$$v^2 = V^2 + v_y^2 = V^2 + \left(v'_y \cdot \sqrt{1 - B^2} \right)^2$$

$$p'_y = \frac{m_0 \cdot v'_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{v'_y}{c} \right)^2}} \quad p_y = \frac{m_0 \cdot v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 \cdot v'_y \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p'_y$$

Тобто $F_y = \frac{dp'_y}{dt}$, але $dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ при умові, коли тіло в СВ K' не-

рухоме відносно вісі $O'X'$.

Тому співвідношення між силами в СВ K' та в СВ K , якщо тільки в СВ K' тіло не рухається вздовж осі $O'X'$:

$$F_y = \frac{dp'_y}{dt'} \cdot \sqrt{1 - B^2} = F'_y \cdot \sqrt{1 - B^2}$$

Така формула має місце, коли F'_y нерухома відносно СВ K' (відносно вісі $O'X'$). В нашій задачі частинка нерухома відносно СВ K , і тоді слід записати:

$$F'_y = F_y \cdot \sqrt{1 - B^2},$$

що ми і отримали розв'язуючи **Приклад 6.3.** (6.32).

6.5. 4-вимірний потенціал. Умова Лоренца та рівняння Даламбера в коваріантній формі. Електромагнітне поле заряду, що рухається рівномірно і прямолінійно

Якщо ввести 4-вимірний потенціал, просторові компоненти якого дорівнюють проєкціям вектор-потенціалу відповідно на вісі x , y , z , а четверта компонента (часова компонента) $\Phi_4 = i \frac{\varphi}{c}$, де φ - скалярний потенціал електромагнітного поля:

$$\Phi \left(\Phi_1 = A_x, \Phi_2 = A_y, \Phi_3 = A_z, \Phi_4 = i \cdot \frac{\varphi}{c} \right) \quad (6.33)$$

то умова калібровки Лоренца

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{v^2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

набуває вигляду:

$$\sum_i \frac{d\Phi_i}{dx_i} = 0 \quad (6.34)$$

А рівняння Даламбера (нагадаємо, що кожна подія визначається радіус-вектором події $\vec{R}(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = i \cdot c \cdot t)$) в 4-вимірній формі набуває коваріантного вигляду:

$$\tilde{D}\Phi_i = -\mu_0 \cdot S_i \quad (6.35)$$

де $\tilde{D} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ - оператор Даламбера, S_i - компонента 4-струму.

Таким чином, визначивши 4-вимірні вектори S_b, Φ_b , нам вдалося записати рівняння Максвелла в коваріантній формі. Тобто, класична електродинаміка є релятивістськи-коваріантною теорією.

Приклад 6.5: Знайти 4-потенціал та електромагнітне поле, що створюється рівномірно та прямолінійно рухомою зарядженою частинкою.

Розв'язання: Будемо вважати, що в СВ K' в початку системи координат (т. O') знаходиться заряджена частинка q (див. рис. 6.4.), де \vec{r}' - радіус-вектор, який визначає положення точки поля в СВ K' :

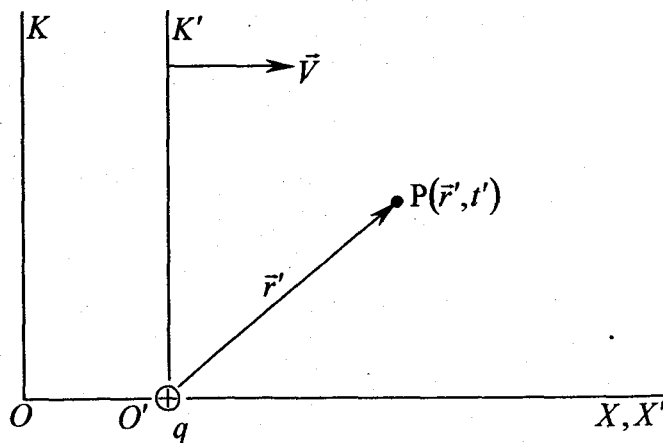


Рис. 6.4. Знаходження 4-потенціалу та ЕМП рівномірно рухомої ЗЧ

Компоненти 4- потенціалу в СВ K' , згідно означення, дорівнюють:

$$\Phi_1' = \Phi_2' = \Phi_3' = 0$$

$$\Phi_4' = \frac{i}{c} \cdot \varphi' = \frac{i}{c} \cdot \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r'}$$

Щоб знайти електричне та магнітне поле в лабораторній системі відліку необхідно в цій системі відліку знайти компоненти 4-потенціалу. Ці компоненти знаходяться згідно формул перетворень для проєкцій 4-векторів при переході від СВ K' до СВ K , і вони мають вигляд:

$$\Phi_1 = \Gamma \cdot (\Phi'_1 - i \cdot B \cdot \Phi'_4)$$

$$\Phi_2 = \Phi'_2$$

$$\Phi_3 = \Phi'_3$$

$$\Phi_4 = \Gamma(\Phi'_4 + i \cdot B \cdot \Phi'_1)$$

і тоді компоненти 4 - потенціалу в СВ K дорівнюють:

$$\Phi_1 = -\Gamma \cdot i \cdot B \cdot \frac{i \cdot \varphi'}{c} = \Gamma \cdot \frac{\varphi'}{c^2} \cdot V$$

$$\frac{i \cdot \varphi}{c} = \Gamma \cdot \frac{i \cdot \varphi'}{c}$$

тобто $A_x = \frac{\varphi}{c^2} \cdot V$, де $\varphi = \Gamma \cdot \varphi'$ - значення скалярного потенціалу в СВ K .

Таким чином, електромагнітні потенціали РЗЧ в СВ K мають вигляд:

$$\vec{A} = \frac{\vec{V}}{c^2} \cdot \varphi \quad (6.36)$$

$$\varphi = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r'} \cdot \Gamma$$

А електромагнітне поле в СВ K , згідно стандартної процедури, тоді буде визначатися:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \text{rot} \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{V} \cdot \varphi) = \frac{1}{c^2} [\nabla(\varphi \vec{A})] = \frac{1}{c^2} [\Delta \varphi \cdot \vec{V}]$$

оскільки

$$[\nabla \cdot (\varphi \cdot \vec{V})] = \varphi [\vec{\nabla} \cdot \vec{V}] + [(\nabla \varphi) \cdot \vec{V}],$$

а $[\vec{\nabla} \cdot \vec{V}] = 0$, тому що $\vec{V} = \text{const}$

і тому

$$[\nabla \cdot (\varphi \cdot \vec{V})] = [(\nabla \varphi) \cdot \vec{V}]$$

Напруженість електричного поля рухомої ЗЧ дорівнює:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{\vec{V}}{c^2} \dot{\varphi} = -\nabla \varphi + \frac{\vec{V}}{c^2} (\vec{V} \cdot \nabla \varphi)$$

$$\dot{\varphi} = -(\vec{V} \cdot \nabla \varphi)$$

$$-\nabla \varphi = \vec{E} - \frac{\vec{V}}{c^2} (\vec{V} \cdot \nabla \varphi)$$

і тому індукція магнітного поля:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\nabla \varphi \cdot \vec{V}] = -\frac{1}{c^2} [\vec{V} \cdot \nabla \varphi] = \frac{1}{c^2} [\vec{V} \cdot \left\{ \vec{E} - \frac{\vec{V}}{c^2} (\vec{V} \cdot \nabla \varphi) \right\}] = \frac{1}{c^2} [\vec{V} \cdot \vec{E}]$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V} \cdot \vec{E}]$$

Знайдемо конкретний вираз для напруженості електричного поля:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{\vec{V}}{c^2} \dot{\varphi} = -\nabla \varphi + \frac{\vec{V}}{c^2} (\vec{V} \cdot \nabla \varphi),$$

оскільки ЗЧ рухається вздовж осі ОХ

$$\text{де } \varphi = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r'}$$

Оскільки радіус-вектор проведений із миттєвого положення ЗЧ в точку поля в СВ K дорівнює:

$$\vec{r} = (x - Vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

то враховуючи, що $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, та перетворення Лоренца, знаходимо, що в СВ K , в цій же самій просторово-часовій точці скалярний потенціал дорівнює:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \sqrt{(x - V \cdot t)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cdot (y^2 + z^2)}} \quad (6.37)$$

Тому для компонент напруженості електричного поля маємо:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{V^2}{c^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1 - B^2) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1 - B^2) \frac{q \cdot (x - Vt)}{4\pi\epsilon_0 \cdot s^3}$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (1 - B^2) \frac{q \cdot y}{4\pi\epsilon_0 \cdot s^3}$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = (1 - B^2) \frac{q \cdot z}{4\pi\epsilon_0 \cdot s^3}$$

$$\text{де } s = \sqrt{(x - Vt)^2 + (1 - B^2) \cdot (y^2 + z^2)} = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + (1 - B^2) \cdot r^2 \sin^2 \theta} = r \sqrt{1 - B^2 \sin^2 \theta},$$

$$x - Vt = r \cdot \cos \theta, \quad \frac{y^2 + z^2}{r^2} = \sin^2 \theta \quad (\text{див. рис. 6.5}).$$

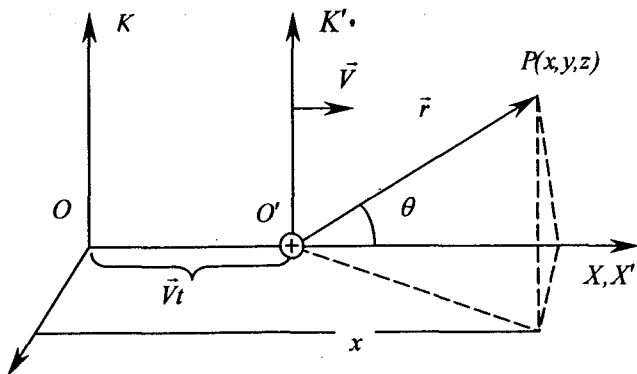


Рис. 6.5. ЗЧ рухається відносно системи відліку K з постійною швидкістю \vec{V}

І нарешті для ЗЧ, що рухається рівномірно і прямолінійно ЕМП визначається:

$$\vec{E} = \frac{q \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cdot \vec{r}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \left[(x - V \cdot t)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cdot (y^2 + z^2) \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (6.38)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, \theta) = \frac{q \cdot \vec{r} \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^3 \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (6.39)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V} \cdot \vec{E}] \quad (6.40)$$

Ми одержали той же результат, що і в розділі 5.3.

6.6. Електромагнітне поле як антисиметричний 4-вимірний тензор. Рівняння Максвела в тензорній формі

Використовуючи означення 4-потенціалу і координати події та формули, які визначають електромагнітне поле через векторний та скалярний потенціал виразимо проєкції векторів поля $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ через компоненти 4-х потенціалу.

Оскільки вектор індукції магнітного поля довільного ЕМП, яке описується векторним потенціалом $\vec{A}(x, y, z, t)$ дорівнює:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

то компоненти індукції магнітного поля в термінах 4-потенціалу мають вигляд:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (6.41)$$

а компоненти напруженості електричного поля $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ в термінах 4-потенціалу дорівнюють:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{c}{i} \cdot \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - i \cdot c \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} = i \cdot c \cdot \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \right) \\ E_y &= i \cdot c \cdot \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_4} \right) \\ E_z &= i \cdot c \cdot \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_4} \right) \end{aligned} \quad (6.42)$$

Таким чином всі компоненти електромагнітного поля можуть бути виражені через деякі комбінації похідних компонентів 4-х потенціалу по координатам 4-х вектора події.

Очевидна симетрія в цих означеннях (6.41) та (6.42) по індексам дозволяє ввести єдиний принцип побудови компонент поля через 4-х потенціали в 4-вимірному просторі:

$$F_{\mu\nu} = c \cdot \left(\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} \right) \quad (6.43)$$

$\mu, \nu = 1..4$

$F_{\mu\nu}$ – 16 величин – називаються *компонентами 4-вимірного тензора електромагнітного поля*. Тобто виходячи з рівнянь Максвела

та принципу відносності два вектора електромагнітного поля \vec{E} і \vec{B} , можуть бути виражені за допомогою деякого єдиного алгоритму і при цьому ми бачимо, що електричне та магнітне поля, які були незалежні в системі координат, в системі відліку перестають бути незалежними.

Ці всі компоненти (16 величин) являються окремими проєкціями більш загального фізико-математичного об'єкту – тензору електромагнітного поля.

Таким чином тензор електромагнітного поля має такий явний вигляд:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} \quad (6.44)$$

Найбільш цікавим являються формули перетворення компонент тензора електромагнітного поля при переході від однієї системи відліку до іншої.

Оскільки при переході від однієї системи відліку до іншої координатні події перетворюються згідно формул:

$$x_i = \alpha_{ik} \cdot x'_k$$

де α_{ik} – матриця перетворень Лоренца

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}$$

то компоненти 4 – вимірного тензора другого рангу при переході від СВ K' , до СВ K , перетворюються згідно формул:

$$F_{ik} = \alpha_{im} \cdot \alpha_{kl} \cdot F'_{ml} \quad (6.45)$$

До речі, можна дати і таке означення тензору II рангу: тензором електромагнітного поля II – рангу називається сукупність 16 – ти компонент (6.44), які при переході від однієї системи відліку до іншої перетворюються згідно формул (6.45).

Використовуючи означення векторів поля \vec{D} та \vec{H} :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}$$

можна ввести тензор електромагнітного поля в середовищі, компоненти якого визначаються таким чином:

$$f_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

Аналогічно вводиться тензор електричного та магнітного моментів:

$$m_{ik} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot F_{ik} - f_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & I_z & -I_y & icP_x \\ -I_z & 0 & H_x & icP_y \\ I_y & -I_x & 0 & icP_z \\ -icP_x & -icP_y & -icP_z & 0 \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

де вектор \vec{I} - вектор намагнічування (магнітний момент одиниці об'єму).

Запишемо рівняння Максвела в тензорній формі. Так перша пара рівняння Максвела

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

набуває вигляду:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} = 0 \quad (6.48)$$

А друга пара рівняння Максвела

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

в тензорній формі записується наступним чином:

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = s_\mu \quad (6.49)$$

Закон Ома в диференціальній формі $\vec{j} = \lambda \cdot \vec{E}$ через тензор електромагнітного поля записується таким чином:

$$s_\mu = \frac{\lambda}{c} \cdot \sum_{\nu} F_{\mu\nu} \cdot \nu_\nu, \quad (6.50)$$

де λ - питома електропровідність, s_μ - компонента 4 - струму, ν_ν - компонента 4 - швидкості: $\nu_\nu = \frac{\partial x_\nu}{\partial \tau}$

6.7. Перетворення компонент тензора електромагнітного поля при зміні системи відліку

Щоб знайти формули перетворення компонент електромагнітного поля при переході від однієї системи відліку до іншої використаємо формули, що визначають правила перетворення компонент тензора та явний вигляд тензора електромагнітного поля:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

Наприклад, компонента F_{12} тензора ЕМП в СВ K , зв'язана наступним чином з компонентами $F'_{m'l'}$ тензора ЕМП в СВ K' :

$$F_{12} = \alpha_{1m} \cdot \alpha_{2l} \cdot F'_{m'l'}$$

Таким чином кожна компонента тензора електромагнітного поля являється лінійною комбінацією всіх інших компонент тензора взятих в СВ K' .

Тобто електричне та магнітне поле виявляється зв'язані органічно, нерозривно:

$$\begin{aligned} F_{12} &= \alpha_{11}\alpha_{21}F'_{11} + \alpha_{12}\alpha_{21}F'_{21} + \alpha_{13}\alpha_{21}F'_{31} + \alpha_{14}\alpha_{21}F'_{41} = \Gamma cB'_z + (-iB\Gamma) \cdot iE'_y = \\ &= \Gamma cB'_z + B\Gamma E'_y = c\Gamma \left(B'_z + \frac{1}{c^2}VE'_y \right) \end{aligned}$$

Тобто, для проекції індукції магнітного поля B_z маємо такий зв'язок з компонентами ЕМП в СВ K' :

$$B_z = \Gamma \left(B'_z + \frac{1}{c^2}VE'_y \right) \quad (6.51)$$

Таким способом можна одержати формули перетворення компонент електромагнітного поля при переході від СВ K' до СВ K :

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \Gamma(E'_y + VB'_z), \quad E_z = \Gamma(E'_z - VB'_y) \quad (6.52)$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \Gamma \left(B'_y - \frac{V}{c^2}E'_z \right), \quad B_z = \Gamma \left(B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y \right) \quad (6.53)$$

Із означень тензора електричного та магнітного моментів, (6.47), компоненти електричного та магнітного моментів перетворюються, при переході від СВ K' до СВ K , таким чином:

$$P_x = P'_x, \quad P_y = \Gamma \left(P'_y - \frac{V}{c^2}I'_z \right), \quad P_z = \Gamma \left(P'_z + \frac{V}{c^2}I'_y \right) \quad (6.54)$$

$$I_x = I'_x, I_y = \Gamma(I'_y + VP'_z), I_z = \Gamma(I'_z - VP'_y) \quad (6.55)$$

Проілюструємо використання (6.54) і (6.55) на конкретному прикладі.

Припустимо, що в СВ K' магнітний момент дорівнює нулеві, $\vec{I}' = 0$, а вектор поляризації не дорівнює нулю, $\vec{P}' \neq 0$. Тоді, виходячи із формул (6.54) і (6.55) в СВ K з'явиться як електричний так і магнітний моменти:

$$P_y = \Gamma P'_y$$

$$I_y = \Gamma V P'_z$$

Якщо в СВ K' існує тільки $\vec{P}' = 0, \vec{I}' \neq 0$, то в системі відліку K

$$I_y = \Gamma I'_y, I_z = \Gamma I'_z$$

$$P_y = -\Gamma \frac{V}{c^2} I'_z; P_z = \Gamma \frac{V}{c^2} I'_y$$

Остання ситуація реалізується, якщо в СВ K' в площині $X'O'Y'$ знаходиться рамка зі струмом, рис. 6.6. Нехай довжина і ширина рамки дорівнюють, відповідно, l' та b' .

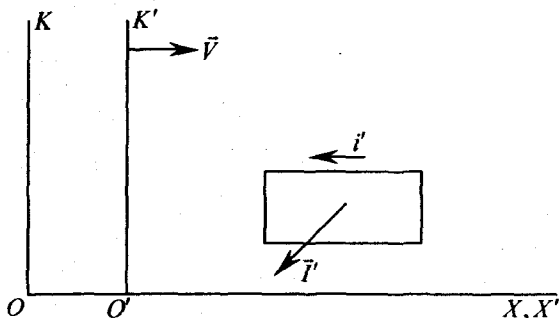


Рис. 6.6. Рамка зі струмом i' нерухома в СВ K' в площині $X'O'Y'$

Очевидно, що в СВ K' рамка зі струмом має магнітний момент \vec{I}' , значення якого дорівнює $I' = i' \cdot S' = i' \cdot l' \cdot b'$.

Оскільки рухомий провідник зі струмом з точки зору СВ K характеризується об'ємною густиною заряду (6.29а):

$$\rho = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{j'_x \cdot V}{\sqrt{1 - B^2}},$$

то дипольний момент цієї рамки буде рівним величині

$$P_y = q \cdot b' = \rho \pi_0^2 \cdot l' \sqrt{1 - B^2} \cdot b' = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{j'_x \cdot V}{\sqrt{1 - B^2}} \pi_0^2 \cdot l' \sqrt{1 - B^2} \cdot b' = \Gamma \frac{V}{c^2} I'_z$$

Рис. 6.7. ілюструє співвідношення між дипольним та магнітним моментами в цій задачі.

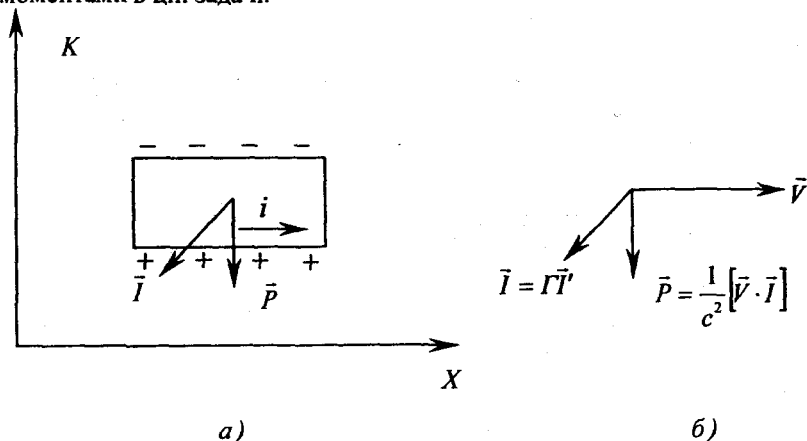


Рис. 6.7. Рамка зі струмом в СВ K має і магнітний момент і дипольний момент

6.8. Відносність електричного та магнітного полів

Формули перетворення компонент електромагнітного поля (ФПКЕМП) ілюструють відносність електричного та магнітних полів. Дійсно, якщо в СВ K' існує тільки електричне поле, а магнітне поле відсутнє, то в СВ K будемо мати і електричне поле, поперечні компоненти якого зростають в Γ раз, і магнітне поле, компоненти індукції якого B_y і B_z .

І навпаки, якщо в СВ K' існує тільки магнітне поле, а електричне поле відсутнє, то в СВ K , крім збільшення магнітного поля в Γ раз виникне і електричне поле поперечні компоненти якого визначаються рівняннями:

$$E_y = \Gamma(VB'_z) \quad E_z = \Gamma(-VB'_y)$$

Оскільки будь-яка компонента тензора ЕМП в СВ K являється лінійною комбінацією всіх компонент тензора в СВ K' , то при переході від однієї СВ до іншої електричне поле, наприклад, може "з'явитися" за рахунок того, що в другій СВ було тільки магнітне поле, і навпаки.

Саме цей фізичний факт неможливо відобразити в математичному апараті, якщо вектори \vec{E} та \vec{B} подати як компоненти деякого 4-вектора. Якби кожний із векторів \vec{E} чи \vec{B} входив у "свій", так би мовити, 4-вектор, то при перетвореннях Лоренца кожний із векторів \vec{E} чи \vec{B} в СВ K виражався б тільки через компоненти "свого" 4-вектора в СВ K' .

І при цьому ми бачимо, що електричне та магнітне поля, які були незалежними одне від одного в довільній системі координат, в системах відліку, що знаходяться в відносному русі, перестають бути незалежними.

Властивості поля, що відображені в законах його перетворення являються локальними властивостями. Значення \vec{E} та \vec{B} в деякій просторово-часовій точці СВ K однозначно визначають компоненти поля в СВ K' в тій самій просторово-часовій точці.

Дослідимо більш детально ФПКЕМП.

Напруженість електричного та індукцію магнітного полів ми можемо розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові компоненти поля, паралельні осі OX та перпендикулярні до вісі OX . Наприклад, $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$.

Тоді формули перетворення (6.52) та (6.53) можна записати наступним чином:

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\perp} = \Gamma(\vec{E}'_{\perp} - [\vec{V}\vec{B}'_{\perp}]) \quad (6.60)$$

$$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}, \quad \vec{B}_{\perp} = \Gamma\left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2}[\vec{V} \cdot \vec{E}'_{\perp}]\right) \quad (6.61)$$

Оскільки \vec{B}'_{\parallel} та \vec{V} - колінеарні, то

$$[\vec{V}\vec{B}'_{\perp}] = [\vec{V}\vec{B}'_{\parallel}] + [\vec{V}\vec{B}'_{\perp}] = [\vec{V}\vec{B}'_{\perp}],$$

Аналогічно

$$[\vec{V}\vec{E}'_{\perp}] = [\vec{V}\vec{E}'_{\perp}]$$

Тому останні формули набувають вигляду:

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\perp} = \Gamma(\vec{E}'_{\perp} - [\vec{V}\vec{B}'_{\perp}]) \quad (6.62)$$

$$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}, \quad \vec{B}_{\perp} = \Gamma\left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2}[\vec{V} \cdot \vec{E}'_{\perp}]\right) \quad (6.63)$$

Деякі наслідки формул (6.62) та (6.63)

Нехай в СВ K' магнітне поле відсутнє ($\vec{B}' = 0$), а електричне поле описується вектором \vec{E}' . Тоді в СВ K напруженість електричного поля визначається:

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\perp} = \Gamma\vec{E}'_{\perp},$$

а сумарне електричне поле: $\vec{E} = \vec{E}'_{\parallel} + \Gamma\vec{E}'_{\perp}$ (6.64)

А індукція магнітного поля дорівнює:

$$\vec{B} = \vec{B}_{\perp} = \Gamma \cdot \frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V} \cdot \vec{E}'_{\perp}] = \frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V} \cdot \Gamma\vec{E}'_{\perp}]$$

оскільки $[\vec{V}\vec{E}'_{\perp}] = 0$, то останній результат можна подати у вигляді:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{V} \cdot (\vec{E}'_{\parallel} + \Gamma \vec{E}'_{\perp})] = \frac{1}{c^2} [\vec{V} \cdot \vec{E}] \quad (6.65)$$

Тобто вектор індукції магнітного поля в СВ K буде перпендикулярний вектору \vec{E} .

Іншими словами, в тому випадку, коли електричне поле \vec{E}' переміщується відносно СВ K , в системі відліку K виникає індукція магнітного поля \vec{B} :

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{V} \cdot \vec{E}], \quad (6.65a)$$

де \vec{E} - напруженість електричного поля в СВ K . Рис. 6.8. ілюструє взаємну орієнтацію векторів поля \vec{E}, \vec{B} та «швидкості руху поля \vec{E}' » \vec{V} . Рухоме електричне поле породжує магнітне поле.

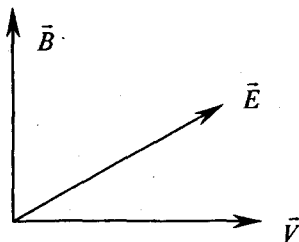


Рис. 6.8. Взаємна локальна орієнтація векторів \vec{V} , \vec{E}, \vec{B} , в СВ K , якщо в СВ K' існує лише одне електричне поле \vec{E}'

Нехай тепер в СВ K' відсутнє електричне поле ($\vec{E}' = 0$), а магнітне поле не дорівнює нулю, $\vec{B}' \neq 0$. Використовуючи ФПКЕМП (6.63) та (6.62) знайдемо вектори \vec{E} та \vec{B} в СВ K .

По перше, індукція магнітного поля в СВ K дорівнює

$$\vec{B} = \vec{B}'_{\parallel} + \Gamma \vec{B}'_{\perp}$$

А напруженість електричного поля в СВ K , згідно (6.60) і (6.62), дорівнює:

$$\vec{E} = \vec{E}'_{\perp} + \Gamma (\vec{E}'_{\parallel} - [\vec{V}\vec{B}'_{\perp}]) = -\Gamma [\vec{V}\vec{B}'_{\perp}] = -\Gamma [\vec{V}\vec{B}'_{\perp}] = -[\vec{V} \cdot \Gamma \vec{B}'_{\perp}] = -[\vec{V} \cdot (\vec{B}'_{\parallel} + \Gamma \vec{B}'_{\perp})]$$

Тобто, якщо в СВ K' $\vec{E}' = 0$, тоді в СВ K виникає електричне поле напруженість якого:

$$\vec{E} = -[\vec{V} \cdot \vec{B}], \quad (6.66)$$

де \vec{B} - вектор індукції магнітного поля в СВ K .

Наслідок (6.66) прокоментувати можна і так. При переміщенні магнітного поля \vec{B}' із швидкістю \vec{V} в СВ K виникає електричне поле напруженості $\vec{E} = -[\vec{V} \cdot \vec{B}]$. Тобто, рухоме магнітне поле породжує електричне поле, причому вектори $\vec{V}, \vec{B}, \vec{E}$ утворюють ліву трійку векторів, рис. 6.9.

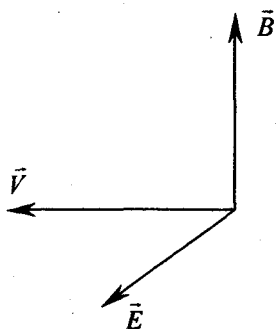


Рис. 6.9. Взаємна локальна орієнтація векторів $\vec{V}, \vec{B}, \vec{E}$ в СВ K , якщо в СВ K' існує лише одне магнітне \vec{B}'

Тобто, якщо в системі K' існує тільки електричне або тільки магнітне поле, то в системі відліку K з'являється відповідно магнітне і електричне поля вектори індукції та напруженості яких, перпендикулярні, відповідно, вектору \vec{E} та \vec{B} . Можна сказати і так. У всіх інших системах відліку вектори \vec{E} та \vec{B} перпендикулярні один одному.

Має місце і обернене твердження: якщо в системі відліку K' вектор напруженості електричного поля \vec{E}' перпендикулярний вектору індукції магнітного поля \vec{B}' , то тоді завжди можна знайти систему відліку в якій буде існувати чисто електричне або чисто магнітне поле.

Як же знайти напрямок і величину швидкості такої системи відліку? Розглянемо конкретні приклади.

Приклад 6.6: Нехай в системі відліку K' є взаємно перпендикулярні напруженість електричного поля \vec{E}' та вектор індукції \vec{B}' магнітного поля. Як повинна рухатися СВ K' відносно СВ K , щоб в СВ K напруженість електричного поля $\vec{E} = 0$.

Розв'язання: Орієнтацію осей СВ K' слід вибрати так, щоб вісь $O'X'$ була перпендикулярна площині, в якій лежать вектори \vec{E}' та \vec{B}' . Тоді $\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel} = 0$, а $\vec{E}'_{\perp} = \vec{E}'$. Згідно умови задачі маємо $\vec{E}_{\perp} = \vec{E} = 0$ (тобто, в СВ K повздовжня компонента електричного поля дорівнює нулеві). Очевидно, що це буде при умові, коли, див.(6.62):

$$\cdot \vec{E}_\perp = \Gamma(\vec{E}'_\perp - [\vec{V}\vec{B}']) = 0$$

Тобто, із попередньої рівності одержуємо:

$$\vec{E}' - [\vec{V} \cdot \vec{B}'] = 0$$

$$\vec{E}' = [\vec{V} \cdot \vec{B}']$$

Але нам треба знайти величину швидкості СВ K' . Помножимо останню рівність векторно на \vec{B}' і врахуємо, що $\vec{B}' \perp \vec{V}$:

$$[\vec{B}' \cdot \vec{E}'] = [\vec{B}' \cdot [\vec{V} \cdot \vec{B}']] = \vec{V} \cdot (B'^2) - \vec{B}' \cdot (\vec{B}' \cdot \vec{V}) = \vec{V} \cdot (B'^2)$$

Звідси одержуємо, що при умові $cB' > E'$ (див. рис. 6.10.) СВ K' повинна рухатися з швидкістю, рис. 6.10.:

$$\vec{V} = \frac{[\vec{B}' \cdot \vec{E}']}{B'^2} \quad (6.67)$$

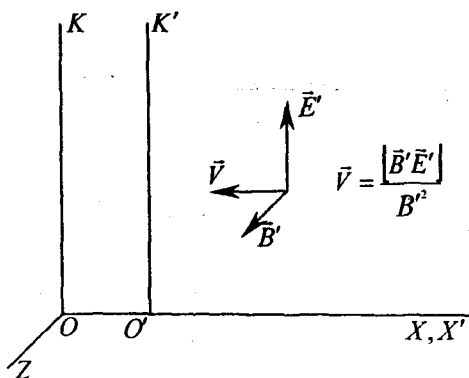


Рис. 6. 10. Щоб в СВ K напруженість електричного поля $\vec{E} = 0$ СВ K' повинна рухатися з швидкістю, яка визначається формулою (6.67)

Умова $cB' > E'$ впливає із наявності інваріанту $I_1 = c^2 \cdot B^2 - E^2$ в довільному ЕМП (див. нижче) та очевидної вимоги СТВ - $V < c$.

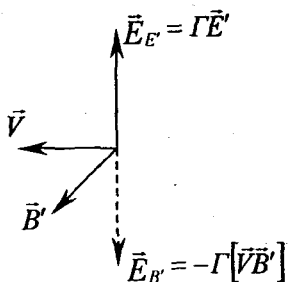


Рис. 6.11. Електричне поле буде відсутнє в СВ K якщо електричне поле, що породжується рухом поля \vec{B}' , $\vec{E}_B = -\Gamma \cdot [\vec{V} \cdot \vec{B}']$, компенсується електричним полем, яке виникає внаслідок руху \vec{E}' , $\vec{E}_E = \Gamma \vec{E}'$

Цей результат можна пояснити і таким чином.

СВ K' повинна рухатися так, щоб електричне поле, що породжується рухом поля \vec{B}' , $\vec{E}_{B'} = -\Gamma \cdot [\vec{V} \cdot \vec{B}']$, компенсувало те електричне поле, що виникає в СВ K внаслідок руху \vec{E}' , $\vec{E}_{E'} = \Gamma \vec{E}'$, рис. 6.11. Тобто

$$\begin{aligned}\vec{E}_{E'} &= -\vec{E}_{B'} \\ \vec{E} &= \Gamma \cdot \vec{E}' = \Gamma \cdot [\vec{V} \cdot \vec{B}'] = 0\end{aligned}$$

І ми приходимо до результату (6.67). Електричне поле в СВ K може зникнути при умові, що $cB' > E'$

Приклад 6.7: Знайдемо напрямок і величину швидкості системи відліку K' , при якій в СВ K буде відсутнє магнітне поле, якщо в СВ K' вектор напруженості поля \vec{E}' перпендикулярний вектору \vec{B}' .

Розв'язання: Аналогічно розв'язанню попереднього прикладу, орієнтацію осей СВ K' слід вибрати так, щоб вісь $O'X'$ була перпендикулярна площині, в якій лежать вектори \vec{E}' та \vec{B}' . Тоді, згідно умови задачі, можна записати:

$$\begin{aligned}\vec{B}'_x &= \vec{B}_x = 0, \quad \vec{B}'_1 = \vec{B}', \\ \vec{B}'_1 &= \vec{B} = 0\end{aligned}$$

і із формули перетворення (6.63) $\vec{B}_1 = \Gamma \left(\vec{B}'_1 + \frac{1}{c^2} [\vec{V} \cdot \vec{E}'] \right) = 0$, одержуємо:

$$\vec{B}'_1 = \vec{B}' = -\frac{1}{c^2} \cdot [\vec{V} \cdot \vec{E}']$$

Помножимо векторно на \vec{E}' :

$$[\vec{E}' \cdot \vec{B}'] = -\frac{1}{c^2} \cdot [\vec{E}' \cdot [\vec{V} \cdot \vec{E}']] = -\frac{1}{c^2} \vec{V} (E'^2)$$

Тобто, швидкість СВ K' при якій в СВ K відсутнє магнітне поле дорівнює, рис. 6.12:

$$\vec{V} = -\frac{c^2 \cdot [\vec{E}' \cdot \vec{B}']}{E'^2}, \quad V = \frac{c^2 \cdot B'}{E'} \quad (6.68)$$

при умові, що в системі відліку K' $E' > cB'$.

Знаходження величини та напрямку швидкості руху такої СВ K' наочно можна пояснити і так: в СВ K ми повинні мати тільки електричне поле, бо магнітне поле повинно зникнути. Але магнітне поле в системі в СВ K створюється рухом \vec{B}' ($\vec{B}_B = \Gamma \cdot \vec{B}'$) і рухом електричного поля \vec{E}' ($\vec{B}_E = \frac{\Gamma}{c^2} \cdot [\vec{V} \cdot \vec{E}']$).

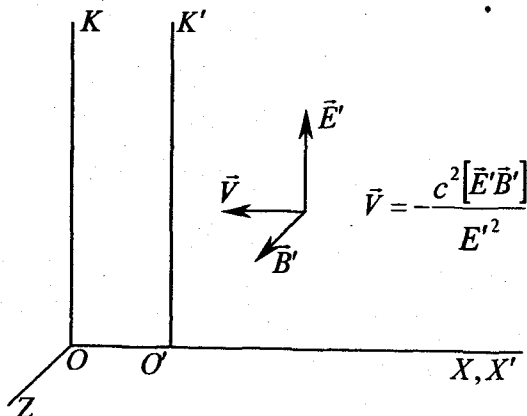


Рис. 6.12. Щоб в СВ K напруженість магнітного поля $\vec{B} = 0$ СВ K' повинна рухатися з швидкістю, яка визначається формулою (6.68)

А в сумі ми повинні отримати нуль. Тобто, рис. 6.13., на основі умови прикладу слід записати:

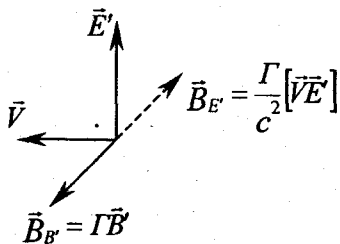
$$\vec{B}_B = \Gamma \cdot \vec{B}' = -\vec{B}_E = -\frac{\Gamma}{c^2} \cdot [\vec{v} \cdot \vec{E}']$$

$$\vec{B}' = -\frac{1}{c^2} \cdot [\vec{v} \cdot \vec{E}'],$$

Звідки і отримуємо (6.68) (див. рис. 6.13.)

Рис. 6.13. Магнітне поле буде відсутнє в СВ K якщо магнітне поле, що породжується рухом поля \vec{B}' , $\vec{B}_B = \Gamma \cdot \vec{B}'$, компенсується магнітним полем, яке виникає внаслідок

руху \vec{E}' , $\vec{B}_E = \frac{\Gamma}{c^2} \cdot [\vec{v} \cdot \vec{E}']$



6.9. Інваріанти електромагнітного поля. Приклади

Може бути показано безпосередньою перевіркою, що в будь-якій інерційній системі відліку залишаються інваріантними такі комбінації напруженості електричного та індукції магнітного полів:

$$I_1 = c^2 \cdot B^2 - E^2 \quad (6.69)$$

$$I_2 = \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (6.70)$$

Із цих двох інваріантів випливає ряд висновків:

1. якщо в деякій системі відліку вектор індукції магнітного поля \vec{B}' перпендикулярний вектору напруженості електричного поля \vec{E}' , то ця перпендикулярність, взагалі кажучи, залишається і в будь-якій іншій системі відліку;

2. якщо в деякій системі відліку $cB' = E'$ і поле \vec{B}' перпендикулярне \vec{E}' , то такі ж співвідношення мають місце для будь-якої іншої системи відліку. Приклад – плоска електромагнітна хвиля;

3. якщо в деякій системі відліку є тільки електричне або тільки магнітне поля, то в будь-якій іншій системі відліку спостерігається і електричне і магнітне поля, причому вектори \vec{B} і \vec{E} перпендикулярні між собою;

4. якщо в системі відліку K' $\vec{E}' > c \cdot \vec{B}'$, то і в будь-якій іншій системі відліку ця нерівність зберігається;

5. якщо в СВ K' існує довільні по величині і напрямку напруженості електричного і магнітного полів, то можна завжди знайти систему відліку K , в якій $\vec{E} \parallel \vec{B}$. Швидкість СВ K' відносно такої системи відліку визначається формулою:

$$\vec{V} = \frac{1 + \frac{V^2}{c^2}}{c^2 \cdot B'^2 + E'^2} \cdot [\vec{B}' \cdot \vec{E}'] \quad (6.71)$$

Таким чином, електричне та магнітне поля, які описуються векторами \vec{E} та \vec{B} не незалежні одне від одного. Вектори \vec{E} та \vec{B} окремо – це дві сторони прояву в 3-вимірному просторі об'єкта більш складної природи, тензора електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$. В реальності, що існує незалежно від нас, спостерігається електромагнітна взаємодія, яка адекватно описується тензором електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$. А поділ цього поля на електричне з напруженістю \vec{E} та магнітне з індукцією \vec{B} являється умовним, залежним від СВ. Можна сказати, що електричне і магнітне поля – це “проекції” тензора $F_{\mu\nu}$ на довільну СВ. “Електрика і магнетизм – дві різні сторони однієї і тієї ж суті” (Р.Фейнман).

Нагадаємо, що всі попередні результати цього розділу ми отримали виходячи із 4-вимірного формалізму. Тобто, 4-вимірне формулювання законів фізики являється більш глибоким хоча і менш наочним. Одна із особливостей такого формулювання полягає в тому, що при цьому об'єднуються здавалося б зовсім різні по своїй фізичній природі (в 3-вимірному просторі) величини в 4-вимірні об'єкти: 4-вектори, 4-тензори. Наприклад, 3-вимірний релятивістський імпульс та енергія утворюють 4-вектор енергії-імпульсу, 4-вимірний хвильовий вектор, 4-радіус-вектор, 4-сила Мінковського, 4-швидкість, 4-прискорення, 4-потенціал, 4-струм.

Аналіз трансформаційних та інших властивостей цих об'єктів і формулювання законів на мові цих об'єктів дають нові фізичні закономірності, пояснюють та проливають світло на давно відомі співвідношення, наповнюють ці здавалося б різні по природі величини новим і глибоким фізичним змістом. Ці фізичні величини, які залежать від СВ і в цьому сенсі відносні, являються своєрідними "проекціями" більш загальних величин, які від СВ вже не залежать.

Розглянемо ряд прикладів, що ілюструють застосування та властивості формул перетворення (6.52), (6.62), (6.63) і (6.53):

Приклад 6.8. Нехай в СВ K' в магнітному полі B'_y знаходиться нерухома заряджена частинка (протон). Знайти силу, що діє на протон в СВ K .

Розв'язання. Протон в СВ K' знаходиться в спокої, тому на нього в цій системі відліку не діє сила Лоренца. Із ПВ випливає, що і в СВ K сила, що діє на протон повинна дорівнювати нулю. Але в СВ K будуть існувати і електричне і магнітне поля з напруженістю та індукцією, відповідно $E_z = -\Gamma V B'_y$, $B_y = \Gamma B'_y$. З точки зору СВ K протон рухається в магнітному полі B_y з швидкістю \vec{V} .

Тому на нього діє і сила Лоренца $F_L = q\vec{V}B_y = q\Gamma V B'_y$, і сила з боку електричного поля, $F_z^E = qE_z = -q\Gamma V B'_y$,

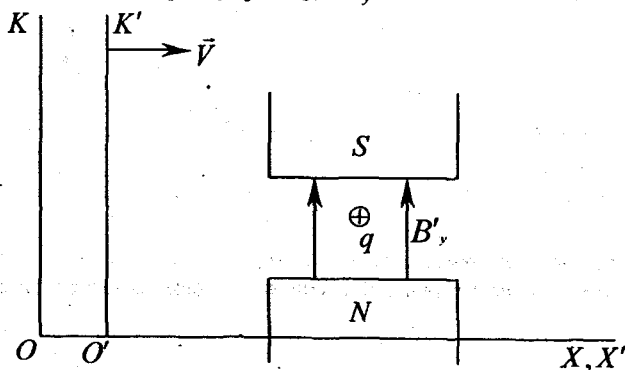


Рис. 6.14. В СВ K' в магнітному полі B'_y знаходиться нерухоми протон

які направлені протилежно одна одній, але однакові по величині (рис. 6.15).

Тому результуюча сила, яка діє на протон дорівнює нулю, як того і вимагає ПВ. Хоч протон відносно джерела магнітного поля не рухається, в K -системі магнітна сила, що діє на нього не дорівнює нулю. Суттєво тут те, що протон рухається відносно СВ K в певному магнітному полі.

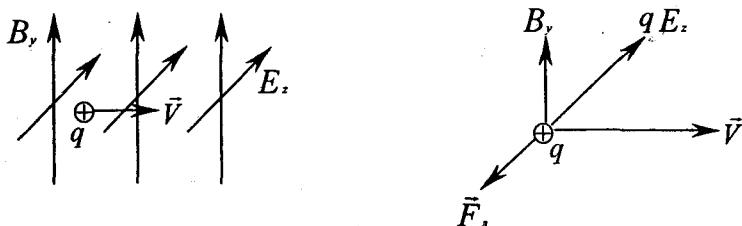


Рис. 6.15. Електромагнітне поле в СВ K та сили, які діють на заряджену частинку

Приклад 6.9. Уявимо, що між пластинами нерухомого в СВ K' зарядженого конденсатора знаходиться в спокої протон. Чому дорівнює сила що діє на нього в СВ K ? (рис. 6.16.).

Розв'язання. Знаходимо спочатку по формулам (6.52) і (6.53) компоненти ЕМП в СВ K :

$$E_y = \Gamma E'_y, \quad B_z = \Gamma \frac{V}{c^2} E'_y \quad (6.72)$$

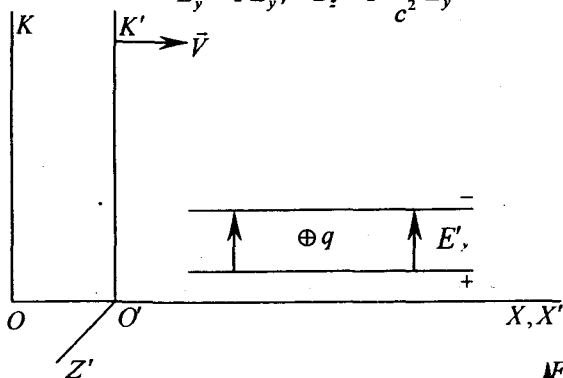
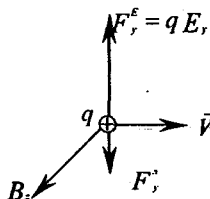


Рис. 6.16. Електромагнітні сили, що діють на протон в СВ K' та в СВ K .



Тому сумарна сила, що діє на протон, з урахуванням напрямку векторів поля та напрямку швидкості його, дорівнює:

$$F_y = F_y^E - F_y^L = \Gamma q E'_y - q V B_z = q E'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (6.73)$$

Тобто, в СВ K сила зменшилася в Γ^{-1} раз у відповідності з вимогами СТВ (оскільки в СВ K' протон нерухомий, то повинно мати місце таке співвідношення між поперечними складовими сили

$$F_y = F'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Зауважимо, що, при бажанні, аналіз електромагнітних сил, які діють на протон в цих двох прикладах можна покласти в основу доведення співвідношень (останнє можна розглядати як самостійне завдання учням, чи як тему науково-оглядового реферату):

$$E_z = -\Gamma V B'_y \quad \text{та} \quad B_z = \Gamma \frac{V}{c^2} E'_y$$

Приклад 6.10. В СВ K' в магнітному полі з індукцією B'_z знаходиться заряджений конденсатор разом з нерухомим протоном в ньому (Рис. 6.17.). Як повинна рухатися СВ K' , щоб в СВ K існувало:

а) тільки електричне поле, ($\vec{B} = 0$);

б) тільки магнітне поле ($\vec{E} = 0$)?

Знайти також силу, що діє на протон в СВ K в випадках а) і б).

Розв'язання. а) СВ K' повинна рухатися так, щоб індукція B_z в СВ K дорівнювала нулю. Тоді із формул перетворення (6.52) та (6.53) одержуємо:

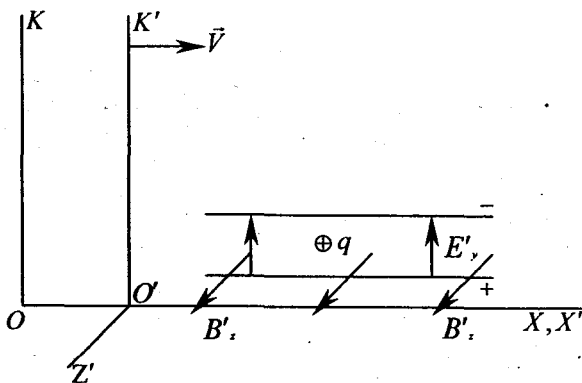


Рис. 6.17. Електромагнітне поле в СВ K' і СВ K

Тому сумарна сила, що діє на протон, з урахуванням напрямку векторів поля та напрямку швидкості його, дорівнює:

$$F_y = F_y^E - F_y^L = \Gamma q E'_y - q v B_z = q E'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (6.73)$$

Тобто, в СВ K сила зменшилася в Γ^{-1} раз у відповідності з вимогами СТВ (оскільки в СВ K' протон нерухомий, то повинно мати місце таке співвідношення між поперечними складовими сили

$$F_y = F'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}).$$

Зауважимо, що, при бажанні, аналіз електромагнітних сил, які діють на протон в цих двох прикладах можна покласти в основу доведення співвідношень (останнє можна розглядати як самостійне завдання учням, чи як тему науково-оглядового реферату):

$$E_z = -\Gamma v B'_y \quad \text{та} \quad B_z = \Gamma \frac{v}{c^2} E'_y$$

Приклад 6.10. В СВ K' в магнітному полі з індукцією B'_z знаходиться заряджений конденсатор разом з нерухомим протоном в ньому (Рис. 6.17.). Як повинна рухатися СВ K' , щоб в СВ K існувало:

- тільки електричне поле, ($\vec{B} = 0$);
- тільки магнітне поле ($\vec{E} = 0$)?

Знайти також силу, що діє на протон в СВ K в випадках а) і б).

Розв'язання. а) СВ K' повинна рухатися так, щоб індукція B_z в СВ K дорівнювала нулю. Тоді із формул перетворення (6.52) та (6.53) одержуємо:

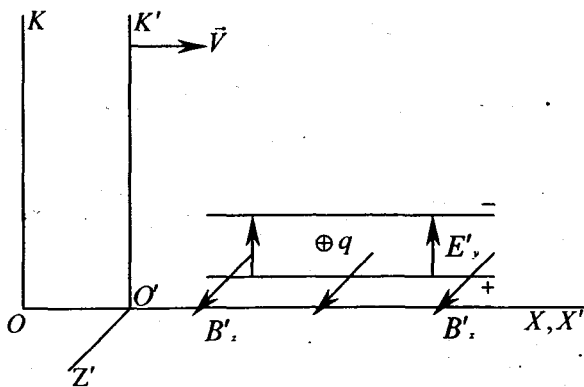


Рис. 6.17. Електромагнітне поле в СВ K' і СВ K

б) Щоб в K -системі було відсутнє електричне поле. K' -система повинна рухатися із швидкістю, величина і напрямок якої визначається із другого співвідношення формули (6.52):

$$E_y = \Gamma(E'_y + vB'_z) = 0, \text{ тоді } v = -\frac{E'_y}{B'_z} \quad (6.76)$$

що зрозуміло і із наступних фізичних міркувань.

Напруженість електричного поля в СВ K складається із двох доданків: $\Gamma E'_y$ - напруженості поля, зумовленого перетворенням поперечної складової поля E'_y при переході із СВ K' до СВ K , і доданка, який зумовлений породженням електричного поля рухомим магнітним полем B'_z , $\Gamma v B'_z$. А результуюче електричне поле в СВ K , згідно умови задачі, дорівнює нулю.

Значить, складова напруженості електричного поля $\Gamma v B'_z$ повинна бути направлена протилежно $\Gamma E'_y$, і оскільки вектори \vec{V} , \vec{B} , \vec{E} при русі магнітного поля (і виникненню електричного поля напруженістю \vec{E}) утворюють лівогвинтову систему, то необхідно, щоб СВ K' рухалася вліво (в напрямку від'ємних значень осі Ox) із швидкістю, яку знаходимо із рівності:

$$\Gamma E'_y = -\Gamma v B'_z$$

що еквівалентно (6.76).

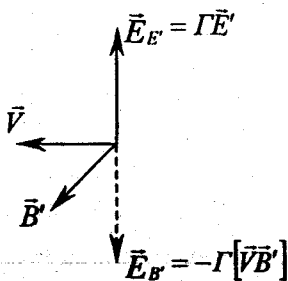


Рис. 6.19. Електричне поле в СВ K дорівнює нулю, якщо поля \vec{E}_E і \vec{E}_B компенсують одне одного

Чому ж дорівнює сила, що діє на протон в саме такій СВ? Із загальних міркувань ясно, що ця сила буде менша від qE'_y в Γ раз. Впевнімося в цьому безпосередньо, враховуючи (6.53), і те, що на протон буде діяти тільки магнітна сила в СВ K :

$$F_y = qVB_z = qV \left(\Gamma B'_z - \frac{\Gamma VE'_y}{c^2} \right) = qE'_y \Gamma \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = qE'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

В загальному випадку, при довільному електромагнітному полі в СВ K' і довільній швидкості руху зарядженої частинки, для знаходження значення сили, яка діє на неї в СВ K треба знайти по формулам (6.52) і (6.53) складові поля, а швидкість частинки в СВ K знайти по релятивістським формулам додавання швидкостей.

Приклад 6.11. Природа сили Лоренца. Нехай в СВ \mathcal{K} є магнітне поле \vec{B} і в ньому з швидкістю \vec{V} рухається ЗЧ. Показати, що сила Лоренца, яка діє на ЗЧ в СВ K - це сила з боку електричного поля, що існує в власній СВ зарядженої частинки.

Розв'язання: Дійсно, в СВ K' , що зв'язана з ЗЧ, згідно ФПКЕМП, спостерігаємо електричне поле:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, \\ E'_y &= \Gamma(E_y - VB_z) = -\Gamma VB_z, \\ E'_z &= \Gamma(E_z + VB_y) = \Gamma VB_y, \end{aligned} \quad (6.77)$$

Враховуючи, що $[\vec{V} \cdot \vec{B}] = \vec{i}(V_y B_z - V_z B_y) + \vec{j}(V_z B_x - V_x B_z) + \vec{k}(V_x B_y - V_y B_x)$, та згідно умови задачі $\vec{V} = \vec{i}V$, напруженість електричного поля в СВ K' можна подати у вигляді:

$$\vec{E}' = \Gamma[\vec{V} \cdot \vec{B}]$$

і таким чином записати вираз для сили, що діє в СВ K' на ЗЧ:

$$\vec{F}' = q\vec{E}'$$

При вимірюваннях цієї електричної сили із СВ K ми повинні знайти (оскільки заряд в СВ K' нерухомий)

$$\vec{F} = \vec{F}' \sqrt{1 - B^2}$$

Іншими словами з точки зору СВ K сила дорівнює:

$$\vec{F} = q\vec{E}' \cdot \sqrt{1 - B^2} = q\Gamma[\vec{V} \cdot \vec{B}] \cdot \sqrt{1 - B^2} = q[\vec{V} \cdot \vec{B}] \quad (6.78)$$

Тобто, ми одержали силу Лоренца. Таким чином, сила Лоренца - це сила з боку електричного поля \vec{E}' , яке існує в ВСВ зарядженої частинки, але ця сила вимірюється приладами, що нерухомі в лабораторній системі відліку (СВ K).

Приклад 6.12. Знайти електромагнітне поле рівномірно та прямо-лінійно рухомої зарядженої частинки.

Розв'язання: Сумістимо початок декартової системи відліку K' з точковим зарядом q . В цій системі напруженість електричного поля в довільній точці простору, що визначається радіус-вектором \vec{r}' , описується законом Кулона, а магнітне поле відсутнє:

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\vec{r}'}{r'^3}, \vec{B}' = 0$$

$$E'_x = \frac{qx'}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r'^3}; E'_y = \frac{qy'}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r'^3}; E'_z = \frac{qz'}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r'^3}, \quad (6.79)$$

де $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$

В СВ K заряд q рухається зі швидкістю V в напрямку додатних значень вісі OX . Вісі координат K' орієнтовані таким чином, що в момент часу $t' = t = 0$ вони співпадають з відповідними осями СВ K . Використовуючи формули перетворення компонент електромагнітного поля одержуємо:

$$E_x = E'_x; E_y = E'_y \cdot \Gamma; E_z = E'_z \cdot \Gamma \quad (6.80)$$

$$B_x = B'_x = 0; B_y = -\Gamma \cdot \frac{V}{c^2} \cdot E'_z; B_z = \Gamma \cdot \frac{V}{c^2} \cdot E'_y \quad (6.81)$$

Виразимо тепер радіус-вектор r' , що визначає положення точки в СВ K' , через радіус-вектор \vec{r} проведений із миттєвого положення заряду q в СВ K в ту ж саму просторово-часову точку поля, рис. 6.20.

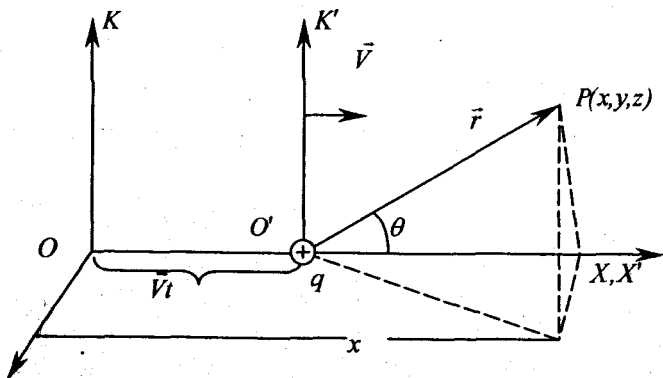


Рис. 6.20. До знаходження ЕМП рівномірно рухомої ЗЧ

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \Gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = \Gamma^2 \left[(x - Vt)^2 + \frac{y^2 + z^2}{\Gamma^2} \right]$$

$$r' = \Gamma \cdot \left[(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{1/2} = \Gamma \cdot \sqrt{(x - Vt)^2 + \frac{(y^2 + z^2)}{\Gamma^2}}$$

Але оскільки $\vec{r} = (x - Vt) \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, див. рис. 6.20., то вираз для r' можна подати так:

$$r' = \Gamma \cdot \left[\left((x - Vt)^2 + y^2 + z^2 \right) \left(1 - \frac{V^2(y^2 + z^2)}{c^2 r^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = r \cdot \Gamma \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta},$$

тобто:

$$\left[(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}} = r^3 \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (6.82)$$

$$\text{де } \sin^2 \theta = \frac{y^2 + z^2}{r^2}$$

І тоді на основі (6.80) одержуємо:

$$E_x = \frac{qx'}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r'^3} = \frac{q(x - Vt) \cdot \Gamma}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \Gamma^3 \left[(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}}};$$

$$E_y = \frac{qy \cdot \Gamma}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \Gamma^3 \left[(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}}};$$

$$E_z = \frac{qz \cdot \Gamma}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \Gamma^3 \left[(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}}};$$

Враховуючи формулу (6.82) для вектора напруженості електричного поля рухомої зарядженої частинки одержуємо:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q \cdot \vec{r} \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \left[(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{q \cdot \vec{r} \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3 \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (6.83)$$

Індукція магнітного поля визначається за допомогою формул (6.81). Результат краще записати у векторній формі:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{V} \cdot \vec{E}], \quad (6.84)$$

де \vec{E} визначається формулами (6.83).

Нагадаємо, що (6.84) було обґрунтовано декількома способами.

1. На основі інтерпретації закону Біо-Савара.
2. Використовуючи потенціали Лієнара-Віхерта.
3. Користуючись формулами перетворення 4-потенціалу.
4. І на кінець, з допомогою формул перетворення компонент електромагнітного поля.

Видно, що лінії \vec{B} утворюють концентричні кола з центром на вісі OX , вздовж якої рухається заряд q .

Конфігурація поля заряду, що рухається рівномірно та прямолінійно, з плином часу не змінюється, а змінюється лише положення цієї конфігурації відносно нерухомої системи координат K , тобто незмінна конфігурація поля рухається разом з ЗЧ.

Питання для самоперевірки

1. Впевнитися, що закон електромагнітної індукції і в СВ K' має таку ж форму як і в СВ K при умовах (6.4) та (6.5).
2. Знайти формули перетворення компонент 4-струму та проаналізувати наслідки їх.
3. Пояснити явище виникнення об'ємної густини заряду в рухомому металевому провіднику зі струмом.
4. Дати релятивістську інтерпретацію взаємодії струму та ЗЧ, що рухається відносно струму.
5. вираз для тензора ЕМП в вакуумі та в середовищі.
6. Використовуючи 4 вимірний формалізм показати, що основні рівняння електродинаміки залишаються коваріантними при переході від однієї СВ до іншої.
7. Обґрунтувати формули перетворення компонент ЕМП та компонент електричного і магнітного моментів при переході від однієї СВ до іншої.
8. Як Ви розумієте вислів «відносність електричного і магнітного полів»?
9. Прокоментувати наслідки формул (6.62) та (6.63).
10. Візьміть довільне ЕМП і доведіть, що (6.69) і (6.70) являються інваріантами.
11. Опишіть способи з допомогою яких можна знайти ЕМП рухомої ЗЧ.
12. Запишіть рівняння Максвелла в тензорній формі та впевніться, що при переході до 3 вимірних позначень вони співпадають з рівняннями Максвелла в традиційній формі.

ДОДАТКИ

Додаток А

Основні формули векторного аналізу

Скалярне поле

Теорема. Якщо в просторі задане скалярне поле $\varphi(\vec{r})$ (наприклад, деяке температурне поле t^0 , поле електричного потенціалу, тиску і т.д.), то похідна цього скалярного поля по деякому напрямку \vec{l} в просторі дорівнює проекції градієнта цього поля на вибраний напрямок \vec{l} :

$$\frac{d\varphi}{dl} = \text{grad}_l \varphi \quad (\text{A.1})$$

Оскільки $d\vec{l} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$, а повний диференціал функції $\varphi(x, y, z)$ дорівнює:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz,$$

то повний диференціал функції $\varphi(x, y, z)$ можна подати у вигляді:

$$d\varphi = \text{grad} \varphi \cdot d\vec{l} = \text{grad}_l \varphi \cdot dl,$$

де

$$\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{A.2})$$

Таким чином, фізичний зміст градієнту скалярного поля: це вектор, в напрямку якого скалярне поле зростає найшвидше.

Теорему (А.1) можна записати також і в такому вигляді:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(\vec{l}, \vec{i}) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(\vec{l}, \vec{j}) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(\vec{l}, \vec{k}) = |\vec{l}| \cdot |\text{grad} \varphi| \cdot \cos(\vec{l}, \text{grad} \varphi) \quad (\text{A.3})$$

$$|\text{grad} \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} \quad (\text{A.4})$$

Якщо ввести оператор Гамільтона (оператор «набла»)

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (\text{A.5})$$

то означення (A.2) набуває вигляду

$$\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \bar{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

Із означення (A.5) випливають співвідношення:

$$\nabla r = \bar{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial r}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\bar{r}}{r} \quad (\text{A.7})$$

$$\text{grad}\varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr} \text{grad} \cdot r = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\bar{r}}{r}, \quad (\text{A.8})$$

де $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ віддаль між двома точками з координатами (x, y, z) та (x_0, y_0, z_0) .

І взагалі, якщо є функція $f(\varphi)$, де φ в свою чергу залежить від просторових координат, то

$$\text{grad}f(\varphi) = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \text{grad}\varphi \quad (\text{A.9})$$

Властивості градієнта скалярної функції:

$$\text{grad}(\varphi + \psi) = \text{grad}\varphi + \text{grad}\psi \quad (\text{A.10})$$

$$\text{grad}\varphi\psi = \psi \text{grad}\varphi + \varphi \text{grad}\psi \quad (\text{A.11})$$

Повна (або субстанціональна, матеріальна) похідна по часі t характеризує зміну певної величини для даної частинки, тоді як частина (або локальна) похідна описує зміну цієї величини в даному місці. Тобто, матеріальна похідна описує швидкість повної зміни величини в точці, яка рухається разом із середовищем. При цьому вважається, що ця величина залежить і від часу і від миттєвого положення точки.

Обґрунтуємо вираз для повної похідної трьома різними способами.

1. Повна похідна векторного поля $\vec{A}(x, y, z, t)$ по часу дорівнює

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + v_x \frac{\partial\vec{A}}{\partial x} + v_y \frac{\partial\vec{A}}{\partial y} + v_z \frac{\partial\vec{A}}{\partial z} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{A} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

2. Нехай деяка скалярна функція $u(\vec{r}, t)$ залежить від чотирьох змінних x, y, z, t , де $\vec{r}(t)$ - радіус-вектор, який характеризує положення точки в момент часу t . Тоді, приріст функції $u(\vec{r}, t)$ за проміжок часу Δt дорівнює:

$$\begin{aligned} u(t + \Delta t) - u(t) &= u(\vec{r}(t + \Delta t), t + \Delta t) - u(\vec{r}(t), t) = \frac{\partial u}{\partial \vec{r}} \Delta \vec{r} + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial u}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \Delta t = \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \text{grad} u \right) \right] \Delta t \end{aligned}$$

де $gradu = \frac{\partial u}{\partial \vec{r}}$. Далі, якщо поділити обидві частини цієї рівності на Δt та знайти границю при $\Delta t \rightarrow 0$, то одержимо формулу подібну до (A.12):

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot gradu \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot gradu) = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) u$$

3. Розглянемо деяке векторне поле $\vec{B}(x, y, z, t)$. В лабораторній СВ зміна вектора поля визначається двома доданками:

$$d\vec{B} = d\vec{B}_n + d\vec{B}_k,$$

де $d\vec{B}_n$ - локальна зміна вектора \vec{B} , що характеризує зміну його в даному місці (точці простору), $d\vec{B}_k$ - конвективна зміна (переносна) вектора \vec{B} , яка визначається неоднорідністю поля \vec{B} . Тобто, при переході від однієї точки простору до іншої - нескінченно близької точки поле \vec{B} зміниться на величину, яка визначається похідною по напрямку переміщення (тобто по напрямку \vec{V}):

$$d\vec{B}_k = \frac{d\vec{B}}{dl} \cdot dl = dl \cdot (\vec{l} \cdot \nabla) \vec{B} = dl (\vec{l} \cdot \nabla) \vec{B},$$

$$\text{де } \vec{l} = \frac{\vec{V}}{V}, \quad dl = |\vec{V}| dt.$$

Тому $d\vec{B}_k = |\vec{V}| dt \cdot \left(\frac{\vec{V}}{V} \cdot \nabla \right) \vec{B} = dt (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{B}$. Як бачимо, $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{B}$ - дорівнює

миттєвому приросту вектора \vec{B} при переміщенні "точки спостереження" на відрізок, який рівний по величині і напрямку вектора \vec{V} . І нарешті, обгрунтуємо (A.12):

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{B}$$

Зупинимося більш детально на властивостях скалярного диференційного оператора $(\vec{a} \cdot \text{grad}) \equiv (\vec{a} \nabla)$:

$$(\vec{a} \nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A.13})$$

Виконання операції $(\vec{a} \nabla)$ над довільною функцією точки еквівалентне добутку похідної цієї функції, взятої по напрямку вектора \vec{a} , на чисельну величину вектора \vec{a} :

$$(\vec{a} \nabla) = a \frac{\partial}{\partial a}$$

Дійсно, знайдемо спочатку операцію $(\bar{a}\nabla)$ над скаляром φ

$$(\bar{a}\nabla)\cdot\varphi = a_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + a_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + a_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \bar{a}\cdot\nabla\varphi$$

Але на основі $\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = \text{grad}_\tau\varphi$ маємо $(\bar{a}\nabla)\cdot\varphi = \bar{a}\cdot\nabla\varphi = a \frac{\partial\varphi}{\partial a}$

Операцію $(\bar{a}\nabla)$ над вектором \bar{b} дає вектор:

$$(\bar{a}\nabla)\cdot\bar{b} = a_x \frac{\partial\bar{b}}{\partial x} + a_y \frac{\partial\bar{b}}{\partial y} + a_z \frac{\partial\bar{b}}{\partial z} \quad (\text{A.14})$$

компонента якого, наприклад, по осі OX дорівнює:

$$((\bar{a}\nabla)\cdot\bar{b})_x = a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z} = (\bar{a}\nabla)\cdot b_x$$

З іншого боку, похідна вектора \bar{b} по напрямку \bar{a} визначається:

$$\frac{\partial\bar{b}}{\partial a} = \cos(x, \bar{a}) \frac{\partial\bar{b}}{\partial x} + \cos(y, \bar{a}) \frac{\partial\bar{b}}{\partial y} + \cos(z, \bar{a}) \frac{\partial\bar{b}}{\partial z}$$

Якщо помножити останню рівність на a та порівняти з (A.14), то впевнимися, що дійсно

$$(\bar{a}\nabla)\cdot\bar{b} = a_x \frac{\partial\bar{b}}{\partial x} + a_y \frac{\partial\bar{b}}{\partial y} + a_z \frac{\partial\bar{b}}{\partial z} = a \frac{\partial\bar{b}}{\partial a}$$

Таким чином, якщо вектор \bar{a} досить малий, то з точністю до величин другого порядку малості $(\bar{a}\nabla)\cdot\bar{b}$ та $(\bar{a}\nabla)\cdot\varphi$ дорівнюють відповідно приросту вектора \bar{b} і скаляру φ при переміщенні «точки спостереження» на відрізок, який дорівнює по величині і напрямку вектору \bar{a} .

Векторне поле

Векторним полем називають область простору, в кожній точці якого задано значення довільного вектору $\vec{a}(\vec{r})$.

Векторний добуток двох векторів \bar{a} і \bar{b} визначається

$$[\bar{a}\bar{b}] \equiv \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (\text{A.15})$$

як вектор, що перпендикулярний векторам \bar{a} і \bar{b} та утворює з ними праву трійку векторів, а по величині дорівнює

$$\|\bar{a}\bar{b}\| = ab \cdot \sin(\bar{a} \wedge \bar{b}) \quad (\text{A.16})$$

Подвійним векторним добутком називається вектор $\|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\|$ і він дорівнює

$$\|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\| = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b}) \quad (\text{A.17})$$

(ця формула читається «бац мінус цаб»)

Диференціювання вектора, який залежить від скалярного аргументу:

$$\frac{d\bar{a}(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \bar{a}_0(x) a(x) = \bar{a}_0 \frac{da}{dx} + a \frac{d\bar{a}_0}{dx} = \bar{a}_0 \frac{da}{dx} + \bar{b}, \quad (\text{A.18})$$

де \bar{a}_0 - одиничний орт в напрямку вектора \bar{a} , $\bar{b} = a\omega\bar{b}_0$, $\bar{b}_0 \perp \bar{a}_0$ та

$\omega = \left| \frac{d\bar{a}_0}{dx} \right|$ - швидкість зміни кута φ , що визначає орієнтацію вектора \bar{a} .

Наприклад, другий доданок в (A.18) можна пояснити так.

Зміна в часі постійного по величині вектора означає, очевидно, зміну орієнтації його в просторі. Тобто, похідна по часу постійного по величині вектора \bar{a} , $\frac{d\bar{a}}{dt}$, зумовлена приростом його внаслідок повороту вектора \bar{a} навколо певної осі. Оскільки приріст, наприклад одиничного орта \bar{j} , визначається:

$$d\bar{j} = [d\varphi \cdot \bar{j}], \quad (\text{A.19})$$

то похідна по часу вектора \bar{j} дорівнює:

$$\frac{d\bar{j}}{dt} = [\bar{\omega} \bar{j}] \quad (\text{A.20})$$

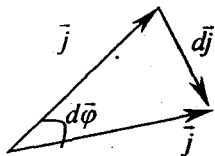


Рис. А.1. Приріст в часі (а значить і зміна в часі) одиничного орту \bar{j} зумовлений поворотом його

Може бути показано, що нескінченний малий потік довільного векторного поля \bar{a} через поверхню нескінченно малого кубика об'ємом $dV = dx dy dz$ дорівнює:

де диференційна операція $\text{div} \vec{a}$ в декартовій системі координат визначається так:

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (\text{A.22})$$

Деякі властивості дивергенції векторного поля:

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) &= \text{div} \vec{a}_1 + \text{div} \vec{a}_2 \\ \text{div}(c\vec{a}) &= c \cdot \text{div} \vec{a}, \text{ де } c = \text{const} \\ \text{div} \varphi(\vec{r}) &= -\text{div}_0 \varphi(\vec{r}) \end{aligned}$$

Якщо вектор $\vec{a}(u)$ залежить тільки від скаляру u , то

$$\text{div} \vec{a}(u) = (\nabla \vec{a}(u)) = \left(\frac{d\vec{a}}{du} \nabla u \right) = \left(\dot{\vec{a}} \cdot \text{grad} u \right) \quad (\text{A.23})$$

$$\text{rot} \vec{a}(u) = \left[\nabla u \frac{d\vec{a}}{du} \right] = \left[\text{grad} u, \dot{\vec{a}} \right] \quad (\text{A.24})$$

Обчислення похідних від добутку та знаходження повторних похідних з допомогою оператора «набла» відбувається при виконанні таких двох правил:

1. Оператор «набла» ∇ повинен діяти по черзі на кожен скалярну чи векторну величину, що розташована за ним.

2. З оператором «набла» ∇ слід поводитися як із звичайним вектором, але його не можна переставляти місцями з величиною на яку він діє і виносити цю величину за знак ∇ . Наприклад:

$$1. \text{grad}(\varphi\psi) = \nabla\varphi\psi = \varphi \cdot \nabla_\varphi\psi + \psi \cdot \nabla_\psi\varphi = \varphi \cdot \text{grad}\psi + \psi \cdot \text{grad}\varphi \quad (\text{A.25})$$

$$2. \text{div}\varphi\vec{a} = \nabla\varphi\vec{a} = \vec{a} \cdot \nabla_\varphi\varphi + \varphi \cdot \nabla_\varphi\vec{a} = \vec{a} \cdot \text{grad}\varphi + \varphi \cdot \text{div}\vec{a} \quad (\text{A.26})$$

$$\text{div} \frac{\vec{r}}{r} = \text{div} \vec{n} = \vec{r} \cdot \text{grad} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \cdot \text{div} \vec{r} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}$$

$$\text{rot}(\varphi\vec{a}) = [\nabla \cdot \varphi\vec{a}] = \varphi [\nabla_\varphi\vec{a}] + [\nabla_\varphi\varphi, \vec{a}] = \varphi \cdot \text{rot}\vec{a} + [\text{grad}\varphi, \vec{a}] \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} 3. \text{div}[\vec{a}\vec{b}] &= \nabla[\vec{a}\vec{b}] = \nabla_a[\vec{a}\vec{b}] + \nabla_b[\vec{a}\vec{b}] = \vec{b}[\nabla_a\vec{a}] - \nabla_b[\vec{b}\vec{a}] = \\ &= \vec{b}[\nabla_a\vec{a}] - \vec{a}[\nabla_b\vec{b}] = \vec{b} \cdot \text{rot}\vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot}\vec{b} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

При обґрунтуванні цієї формули зроблена циклічна перестановка векторів, а в другому доданку змінений порядок векторного множення. Якби останнє ми не зробили, то при циклічній перестановці було б порушене правило 2. – вектор \vec{b} був би пересунутий за знак оператора ∇_b .

$$\begin{aligned} \text{rot}[\vec{a}\vec{b}] &= [\nabla\vec{a}\vec{b}] = [\nabla_a[\vec{a}\vec{b}]] + [\nabla_b[\vec{a}\vec{b}]] = (\nabla_a\vec{b})\vec{a} - (\nabla_a\vec{a})\vec{b} + (\nabla_b\vec{b})\vec{a} - (\nabla_b\vec{a})\vec{b} = \\ 4. &= (\vec{b}\nabla_a)\vec{a} - \vec{b}(\nabla_a\vec{a}) + \vec{a}(\nabla_b\vec{b}) - (\vec{a}\nabla_b)\vec{b} = \\ &= (\vec{b} \cdot \text{grad}\vec{a}) - (\vec{a} \cdot \text{grad}\vec{b}) + \vec{a} \cdot \text{div}\vec{b} - \vec{b} \cdot \text{div}\vec{a} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

В останньому виразі $(\vec{a} \cdot \text{grad}) \equiv (\vec{a}\nabla)$ - скалярний диференціальний оператор (A.13)

$$(\vec{a}\nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$5. \text{grad}(\vec{a}\vec{b}) = \nabla_a(\vec{a}\vec{b}) + \nabla_b(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\nabla_a)\vec{a} + [\vec{b}[\nabla_a\vec{a}]] + (\vec{a}\nabla_b)\vec{b} + [\vec{a}[\nabla_b\vec{b}]] =$$

$$= (\vec{b} \cdot \text{grad})\vec{a} + (\vec{a} \cdot \text{grad})\vec{b} + [\vec{b} \cdot \text{rot}\vec{a}] + [\vec{a} \cdot \text{rot}\vec{b}] \quad (\text{A.30})$$

$$6. \text{grad} \frac{a^2}{2} = (\vec{a} \cdot \text{grad})\vec{a} + [\vec{a} \cdot \text{rot}\vec{a}] \quad (\text{A.31})$$

$$7. \text{divgrad}\varphi = (\nabla\nabla)\varphi = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi \quad (\text{A.32})$$

$$8. \text{rotrot}\vec{a} = [\nabla[\nabla\vec{a}]] = \nabla(\nabla\vec{a}) - (\nabla\nabla)\vec{a} = \text{graddiv}\vec{a} - \nabla^2\vec{a} \quad (\text{A.33})$$

$$9. (\nabla\vec{a})\vec{b} = (\nabla_a\vec{a})\vec{b} + (\nabla_b\vec{a})\vec{b} = \vec{b} \cdot \text{div}\vec{a} + (\vec{a}\nabla_b)\vec{b} = \vec{b} \cdot \text{div}\vec{a} + (\vec{a} \cdot \text{grad})\vec{b} \quad (\text{A.34})$$

Із інтегрального подання оператора Гамільтона випливає формула

$$(\nabla\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int (\vec{n}\vec{a}) \cdot \vec{b} \cdot dS, \text{ при } V \rightarrow 0$$

із якої безпосередньо одержуємо

$$\int (\nabla\vec{a})\vec{b} dV = \int (\vec{n}\vec{a}) \cdot \vec{b} \cdot dS \quad (\text{A.35})$$

або, враховуючи (A.34)

$$\int (\vec{n}\vec{a}) \cdot \vec{b} \cdot dS = \int (\vec{b} \cdot \text{div}\vec{a}) dV + \int (\vec{a} \cdot \text{grad})\vec{b} dV \quad (\text{A.36})$$

Із інтегрального подання оператора Гамільтона випливає також і наступна формула

$$[[\nabla\vec{a}]\vec{b}] = \lim_{V \rightarrow 0} \int [[\vec{n}\vec{a}]\vec{b}] dS \quad (\text{A.37})$$

Звідки маємо:

$$\int [[\nabla\vec{a}]\vec{b}] dV = \int [[\vec{n}\vec{a}]\vec{b}] dS \quad (\text{A.38})$$

А далі, використовуючи

$$[[\nabla\vec{a}]\vec{b}] = [[\nabla_a\vec{a}]\vec{b}] + [[\nabla_b\vec{a}]\vec{b}] = -[\vec{b} \cdot \text{rot}\vec{a}] - [[\vec{a}\nabla]\vec{b}]$$

після підстановки в (A.38) одержуємо нарешті другу інтегральну рівність:

$$\int [\vec{b} \cdot [\nabla\vec{a}]] dV + \int [[\vec{a}\nabla] \cdot \vec{b}] dV = - \int [[\vec{n}\vec{a}] \cdot \vec{b}] \cdot dS \quad (\text{A.39})$$

Дельта-функція Дірака та її властивості

Як відомо, δ -функція була вперше введена П. Діраком, і визначається співвідношеннями:

$$\delta(x) = 0 \text{ при } x \neq 0$$

$$\delta(x) = \infty \text{ при } x = 0$$

так, що

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1, \text{ де } a < 0 < b \quad (\text{A.40})$$

Із означення (A.40) одержуємо основну властивість δ -функції:

$$\int_a^b f(x) \cdot \delta(x) dx = f(0) \text{ при } a < 0 < b \quad (\text{A.41})$$

δ -функція не може входити в будь-які кінцеві фізичні вирази і формули. Завжди коли пишеться δ -функція, мається на увазі подальше інтегрування по тим змінним, від яких залежить δ -функція.

δ -функцію можна розглядати як межу послідовності аналітичних функцій. Зокрема, такими властивостями характеризується вираз

$$F(\alpha, x) = \frac{\sin \alpha x}{x\pi}, \quad (\text{A.42})$$

який при $\alpha \rightarrow \infty$ поводить себе як δ -функція.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x\pi} dx = 1 \text{ при будь-якому } \alpha$$

Тобто, ми бачимо, що

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha x}{x\pi} = \delta(x) \quad (\text{A.43})$$

Через δ -функцію часто виражають інтеграли виду:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk, \text{ який слід розуміти так}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{ikx} dk = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{x} \sin \alpha x$$

Порівнюючи з (A.43) одержуємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = 2\pi \delta(x) \quad (\text{A.44})$$

Інші властивості δ -функції:

$$\int f(x) \cdot \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$\delta'(-x) = -\delta'(x)$$

$$\begin{aligned}
 x \cdot \delta(x) &= 0, \\
 x \cdot \delta'(x) &= -\delta(x) \\
 \delta(ax) &= \frac{1}{|a|} \delta(x) \\
 \delta(x^2 - a^2) &= \frac{1}{2|a|} [\delta(x-a) + \delta(x+a)] \quad (\text{A.45}) \\
 \int f(x) \cdot \delta'(x-a) dx &= -f'(a) \\
 \int \delta(a-x) \cdot \delta(x-b) dx &= \delta(a-b) \\
 \int f(x) \delta(x-a) dx &= f(a) \delta(x-a) \\
 \delta(f) df &= \delta(x) dx \\
 \delta[f(x)] &= \frac{\delta(x-x_0)}{\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|}
 \end{aligned}$$

δ - функція корисна також при розгляді інтегралів Фур'є. Так, якщо ми маємо розклад деякої функції $f(x)$ в інтеграл Фур'є:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk, \quad (\text{A.46})$$

то з допомогою (A.44) відразу одержуємо вираз для оберненого інтегралу Фур'є. Дійсно, помножимо ліву і праву частину (A.46) на $e^{-ik'x}$ та про інтегруємо по x :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik'x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{i(k-k')x} dk \cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty} c(k) dk \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} \cdot dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} c(k) 2\pi \delta(k-k') dk = 2\pi c(k')
 \end{aligned}$$

І тому одержуємо

$$c(k') = \frac{1}{2\pi} \int f(x) \cdot e^{-ik'x} dx \quad (\text{A.47})$$

Обґрунтуємо важливе співвідношення:

$$\nabla^2 \frac{1}{r} \equiv \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(r), \quad (\text{A.48})$$

де

$$\delta(r) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

Для цього розкладемо функцію $\frac{1}{r}$ в тривимірний інтеграл Фур'є:

$$\frac{1}{r} = \int c(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} dk_x dk_y dk_z \quad (\text{A.49})$$

Відповідно для функції $c(\vec{k}) \equiv c(k_x, k_y, k_z)$ маємо на основі (A.47)

$$c(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{r} e^{-i\vec{k}\vec{r}} dV \quad (\text{A.50})$$

Для знаходження $c(\vec{k})$ в (A.50) інтегруємо спочатку по куту, вибираючи полярну вісь в напрямку вектора \vec{k} :

$$c(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{1}{r} r^2 dr \int_0^\pi e^{-ikr \cos\theta} \sin\theta d\theta = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i}{k} \int_0^\infty (e^{-ikr} - e^{ikr}) dr$$

Останній інтеграл знаходиться таким чином. Підінтегральний вираз множиться на $e^{-\alpha\bar{r}}$, знаходиться інтеграл а потім в одержаному результаті α спрямовується до нуля ($\alpha \rightarrow 0$).

$$c(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2}$$

Після підстановки в (A.49) маємо

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{k^2} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}$$

А тепер знайдемо лапласіан лівої і правої частини цього виразу:

$$\Delta \frac{1}{r} = -\frac{2}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{k^2} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}$$

Враховуючи (A.44) нарешті отримуємо:

$$\Delta \frac{1}{r} = -\frac{2}{(2\pi)^2} (2\pi)^3 \delta(x)\delta(y)\delta(z) = -4\pi\delta(\vec{r}) \quad (\text{A.51})$$

Співвідношення між формулами електродинаміки поданими
в СІ та системі одиниць Гауса

Назва величини	СІ	Система Гауса	Назва величини	СІ	Система Гауса
Сила струму	i	$i \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$	Електричний дипольний момент	p	$p \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$
Густина струму	j	$j \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$	Магнітний момент струму	p_m	$p_m \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}$
Електричний заряд	q	$q \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$	Скалярний потенціал	φ	$\frac{\varphi}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$
Густина заряду	ρ	$\rho \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$	Векторний потенціал	A	$A \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}$
Питома електропровідність	λ	$4\pi\epsilon_0 \cdot \lambda$	Швидкість світла	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$	c
Електроємність	C	$C \cdot 4\pi\epsilon_0$	Магнітна сприйнятливість	χ	$4\pi\chi$
Напруженість електричного поля	E	$\frac{E}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	Діелектрична сприйнятливість	α	$4\pi\alpha$
Електричне зміщення	D	$D \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi}}$	Діелектрична проникність	ϵ	$\epsilon\epsilon_0$
Напруженість магнітного поля	H	$\frac{H}{\sqrt{4\pi\mu_0}}$	Магнітна проникність	μ	$\mu\mu_0$
Магнітна індукція	B	$B \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}$	Відносна діелектрична проникність	ϵ_r	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$
Потік магнітної індукції	Φ	$\Phi \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}$	Відносна магнітна проникність	μ_r	$\frac{\mu}{\mu_0}$
Індуктивність	L	$\frac{L}{4\pi\epsilon_0}$	Електричний опір	R	$\frac{R}{4\pi\epsilon_0}$
Вектор поляризації	P	$P \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$	Вектор намагнічування	I	$I \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}$

Правила користування цією таблицею. Для того, щоб перевести будь-яку формулу записану в СІ у відповідну формулу в системі Гауса слід символ, який позначений в колонці «СІ» замінити символом із колонки «Система Гауса». Наприклад, рівняння Максвела в СІ

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

переводиться, згідно таблиці, заміною векторів \vec{H} на $\frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\mu_0}}$, \vec{D} на

$\vec{D} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi}}$, \vec{j} на $\vec{j} \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$. І тоді маємо:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\mu_0}} \right) = \vec{j} \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0} + \frac{\partial \left(\vec{D} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi}} \right)}{\partial t}$$

В результаті одержуємо рівняння Максвела в системі Гауса:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Ще один приклад. Записати формулу $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$, що визначає індукцію магнітного поля довгого провідника зі струмом, в системі Гауса. Робимо заміни

B на $B \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}$, а i на $i \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$ і одержуємо:

$$\begin{aligned} B \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} &= \frac{\mu_0 i \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}}{2\pi R} \\ B &= \frac{\mu_0 i \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}}{2\pi R} \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} = \frac{2i}{R} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{2i}{cR} \\ B &= \frac{2i}{cR} \end{aligned}$$

Щоб записати рівняння $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ в системі Гауса, густину заряду

ρ замінюємо на $\rho \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0}$, а \vec{D} на $\vec{D} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi}}$ і одержуємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi}} \cdot \vec{D} \right) &= \rho \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho \end{aligned}$$

Зауваження. Перехід із СІ в систему Гауса, згідно цих правил, завжди приводить до вірних результатів. Але інколи при переході від системи Гауса до СІ *виникають помилки, якщо тільки формула в системі Гауса написана для вакууму.* Тому перш ніж переводити будь-яку формулу із системи Гауса в СІ її слід записати в формі, що справедлива для середовища.

Основні формули електродинаміки в системі Гауса та СІ

Назва формули	Система Гауса	СІ
Поле \vec{E} в плоскому конденсаторі	$E = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}$	$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}$
Зв'язок між \vec{E} та φ	$\vec{E} = -\nabla\varphi, \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$	
Зв'язок між \vec{P} та \vec{E}	$\vec{P} = \alpha\vec{E}$	$\vec{P} = \alpha\epsilon_0\vec{E}$
Означення вектора електричного зміщення \vec{D}	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi P = \epsilon\vec{E}$	$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + P = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$
Зв'язок між σ', P, E	$\sigma' = P_n = \alpha E_n$	$\sigma' = P_n = \alpha\epsilon_0 E_n$
Ємність плоского конденсатора	$C = \frac{\epsilon S}{4\pi h}$	$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{h}$
Густина енергії електромагнітного поля	$w = \frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}}{8\pi}$	$w = \frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}}{2}$
Диполь \vec{p} в електричному полі \vec{E}	$\vec{F} = p \frac{\partial \vec{E}}{dl}, \vec{M} = [\vec{p}\vec{E}], W = -\vec{p}\vec{E}$	
Закон Біо-Савара	$d\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{i}{r^3} [d\vec{l}\vec{r}]$	$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{r^3} [d\vec{l}\vec{r}]$
Поле \vec{B} прямого струму	$B = \frac{1}{c} \frac{2i}{r}$	$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2i}{r}$
Циркуляція вектора намагнічування \vec{I}	$\oint_L \vec{I}d\vec{l} = \frac{I'}{c}$	$\oint_L \vec{I}d\vec{l} = I'$
Означення вектора напруженості магнітного поля \vec{H}	$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{I}$	$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}$
	$\vec{I} = \chi\vec{H}$	$\vec{I} = \chi\vec{H}$
Індуктивність L	$L = \frac{c\Phi}{i}$	$L = \frac{\Phi}{i}$
Індуктивність соленоїду	$L = 4\pi\mu n^2 V$	$L = \mu\mu_0 n^2 V$
Енергія магнітного поля струму	$W = \frac{1}{c} \frac{Li^2}{2}$	$W = \frac{Li^2}{2}$
Густина струму зміщення	$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Назва формули	Система Гауса	СИ
Рівняння Максвела в середовищі в інтегральній формі	$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$	$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$
	$\oint \vec{D} d\vec{S} = 4\pi \int \rho dV$	$\oint \vec{D} d\vec{S} = \int \rho dV$
	$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{4\pi \cdot \partial t} \right) d\vec{S}$	$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$
	$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$	$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$
Рівняння Максвела в середовищі в локальній формі	$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
	$\text{div} \vec{D} = 4\pi \rho$	$\text{div} \vec{D} = \rho$
	$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
	$\text{div} \vec{B} = 0$	$\text{div} \vec{B} = 0$
Вектор Пойнтінга	$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]$	$\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}]$
Густина імпульсу електромагнітного поля	$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c} [\vec{D} \vec{B}]$	$\vec{g} = [\vec{D} \vec{B}]$
	$\vec{g} = \frac{\vec{S}}{v^2}, v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$	$\vec{g} = \frac{\vec{S}}{v^2}, v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
Зв'язок між E та H в електромагнітній хвилі	$\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H$	$E \sqrt{\epsilon\epsilon_0} = H \sqrt{\mu\mu_0}$
Потужність випромінювання диполя	$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{\ddot{p}^2}{c^3}$	$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{6\pi c}$
Умова калібровки Лоренца	$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{d\varphi}{dt} = 0$	$\text{div} \vec{A} + \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{d\varphi}{dt} = 0$
Формули перетворення компонент поля	$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}$ $\vec{E}_{\perp} = \Gamma \left(\vec{E}'_{\perp} - \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{B}'_{\perp}] \right)$	$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}$ $\vec{E}_{\perp} = \Gamma \left(\vec{E}'_{\perp} - [\vec{v} \vec{B}'_{\perp}] \right)$
	$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}$ $\vec{B}_{\perp} = \Gamma \left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{E}'_{\perp}] \right)$	$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}$ $\vec{B}_{\perp} = \Gamma \left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} [\vec{v} \vec{E}'_{\perp}] \right)$
Інваріанти електромагнітного поля	$\vec{E} \vec{B} = \text{inv}$	$\vec{E} \vec{B} = \text{inv}$
	$E^2 - B^2 = \text{inv}$	$E^2 - c^2 B^2 = \text{inv}$

Співвідношення між одиницями вимірювання електромагнітних величин в системах Гауса та СІ

Величина	Одиниця величини		Співвідношення між одиницями
	Система Гауса	СІ	
Заряд	$1CGC_q$	$Kл$	$1CGC_q = \frac{10}{c} = \frac{10^{-9}}{3} Kл$
Сила струму	$1CGC_i$	A	$1CGC_i = \frac{10}{c} = \frac{10^{-9}}{3} A$
Напруженість електричного поля	$1CGC_E$	$\frac{B}{M}$	$1CGC_E = c \cdot 10^{-6} \frac{B}{M} = 3 \cdot 10^4 \frac{B}{M}$
Потенціал, напруга	$1CGC_V$	B	$1CGC_V = c \cdot 10^8 B = 300B$
Електричний момент	$1CGC_p$	$Kл \cdot M$	$1CGC_p = \frac{1}{3} 10^{-11} Kл \cdot M$
Вектор поляризації \vec{P}	$1CGC_P$	$\frac{Kл}{M}$	$1CGC_P = \frac{1}{3} 10^{-5} \frac{Kл}{M}$
Вектор електричного зміщення \vec{D}	$1CGC_D$	$\frac{Kл}{M^2}$	$1CGC_D = \frac{10^5}{4\pi c} \frac{Kл}{M^2} = \frac{10^{-5}}{12\pi} \frac{Kл}{M^2}$
Опір	$1CGC_R$	Om	$1CGC_R = c^2 \cdot 10^{-9} Om = 9 \cdot 10^{11} Om$
Питома електропровідність	$1CGC_\lambda$	$\frac{Cm}{M}$	$1CGC_\lambda = \frac{1}{9} 10^9 Cm / M$
Електропровідність	$1CGC_\varepsilon$	Cm	$1CGC_\varepsilon = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} Cm$
Ємність	$1CGC_C$	Φ	$1CGC_C = 1cm = \frac{10^9}{c^2} \Phi$
Магнітна індукція	Gc	$Tл$	$1Gc = 10^{-4} Tл$
Потік магнітної індукції	Mkc	$Bб$	$1Mkc = 10^{-8} Bб$
Потік вектора \vec{D}	$1CGC_{ND}$	$Kл$	$1CGC_{ND} = \frac{10}{4\pi c} Kл = \frac{10^{-9}}{12\pi} Kл$
Магнітний момент	$1CGC_m$	$A \cdot M^2$	$1CGC_m = 10^3 A \cdot M^2$
Намагніченість \vec{I}	$1CGC_I$	$\frac{A}{M}$	$1CGC_I = 10^3 \frac{A}{M}$
Вектор \vec{H}	$1E$	$\frac{A}{M}$	$1E = \frac{10^3}{4\pi} \frac{A}{M}$
Індуктивність L	$1cm$	$Гн$	$1cm = 10^{-9} Гн$

Основні фізичні константи

<i>Величина</i>	<i>Позначення і числове значення</i>
Гравітаційна стала	$G = 6.6720 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Нм}^2}{\text{кг}^2}$
Прискорення вільного падіння (нормальне)	$g_n = 9.80665 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
Нормальний атмосферний тиск	$p_0 = 101325 \text{Па}$
Стала Авогадро	$N_a = 6,022045 \cdot 10^{23} \text{моль}^{-1}$
Молярний об'єм ідеального газу за нормальних умов	$V = 22.41383 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$
Універсальна газова стала	$R = 8.31441 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$
Стала Лошмідта	$n_0 = 2,7 \cdot 10^{25} \text{м}^{-3}$
Стала Больцмана	$k = 1.38662 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$
Швидкість світла у вакуумі	$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$
Магнітна стала	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} = 1,25663706144 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$
Електрична стала	$\epsilon_0 = 0,885418782 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$ $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\text{Ф}}$
Маса електрона	$m_e = \begin{cases} 0,9110953410 \cdot 10^{-27} \text{кг} = 5,4858026 \cdot 10^4 \text{а.о.м} \\ 0,511 \text{МеВ} \end{cases}$
Маса протона	$m_p = 1.6726485 \cdot 10^{-27} \text{кг} = 1,007276470 \text{а.о.м}$
Маса нейтрона	$m_n = 1.6749543 \cdot 10^{-27} \text{кг} = 1,008665012 \text{а.о.м}$
Атомна одиниця маси	$1 \text{а.о.м.} = 1,6605655 \cdot 10^{-27} \text{кг}$ (відповідає енергії $\cdot 931,3 \text{МеВ}$)

<i>Величина</i>	<i>Позначення і числове значення</i>
Елементарний заряд	$e = \begin{cases} 1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \\ 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЕ} \end{cases}$
Відношення заряду електрона до його маси	$\frac{e}{m_e} = 1,7588047 \cdot 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$
Стала Фарадея	$F = 9,648456 \cdot 10^4 \frac{\text{Кл}}{\text{моль}}$
Стала Планка	$h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Стала Стефана – Больцмана	$\sigma = 5,67032 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$
Стала Віна	$b = 0,00289782 \text{ м} \cdot \text{К}$
Стала Ридберга	$R_\infty = 10973731,77 \text{ м}^{-1}$
Борівський радіус	$a_0 = 0,52917706 \cdot 10^{-10} \text{ м}$

Деякі позасистемні одиниці

$$1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ см}$$

$$1 \text{ кал} = 4,18 \text{ Дж} = 4,1868 \cdot 10^7 \text{ ерг} (1 \text{ Дж} = 0,2388 \text{ кал})$$

$$1 \text{ мм.рт.ст.} = 133,3 \text{ Па} = 1333 \text{ дин} / \text{см}^2$$

$$1 \text{ рік} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ с}$$

$$1 \text{ св.рік} = 9,5 \cdot 10^{17} \text{ см}$$

$$1 \text{ eV} = \begin{cases} 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \\ 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ ерг} \end{cases}$$

$$1 \text{ а.о.м.} = \begin{cases} 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г} \\ 931,5 \text{ MeV} \end{cases}$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. - М.: Наука, 1973. - 352 с.
2. Угаров В.А. Специальная теория относительности. - М.: Наука, 1977. - 384 с.
3. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. - М.: ВШ, 1983. - 463 с.
4. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. - 4-е изд., испр. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. - 320 с.: ил.
5. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т.5. - М.: Мир, 1966. - 290 с.
6. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т.6. - М.: Мир, 1966. - 343 с.
7. Парселл Э. Электричество и магнетизм: Учебное руководство: Пер. с англ./ Под ред. А.И. Шальникова и А.О. Вайсенберга. - 3-е изд., испр. - М.: Наука, 1983. - (Берклиевский курс физики). - 416 с.
8. Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика: Учеб. пособие для студ. физ. спец. университетов. - М.: Высшая шк., 1990. - 352 с.
9. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. - М.: ГИФМЛ, 1963. - 432 с.
10. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т.1. - М.: Наука, 1969. - 912 с.
11. Пеннер Д.И., Угаров В.А. Электродинамика и теория относительности. - М.: Просвещение, 1980. - 271 с.
12. Мултановский В.В., Василевский А.С. Курс теоретической физики. - М.: Просвещение, 1990. - 272 с.
13. Медведев Б.В. Начала теоретической физики. - М.: Наука, 1977. - 496 с.
14. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. - М.: Наука, 1985. - 400 с.
15. Тамм И.Е. Основы теории электричества. - М.: Наука, 1966. - 624 с.
16. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Том.1.: Механика и электродинамика. - М.: Наука, 1975. - 416 с.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц И.М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука, 1957. - 532 с.
18. Меерович Э.А., Мейерович Б.Э. Методы релятивистской электродинамики в электротехнике и электрофизике. - М.: Энергоатомиздат, 1987. - 232 с.
19. Шапиро И.С. Успехи физических наук. К истории открытия уравнений Максвелла // Успехи физических наук. - 1972. - т. 108. - вып. 2. - С. 319-333.
20. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. т. I. - М.: Наука, 1965. - 700 с.
21. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. т. II. - М.: Наука, 1966. - 723 с.

Навчальний посібник

КОНОВАЛ Олександр Андрійович

Лекції з класичної та релятивістської електродинаміки

Українською мовою

В авторській редакції
Відповідальний за випуск В. В. Стецюк
Комп'ютерна верстка та дизайн Н.В. Багірова

Коновал О.А.

К 64 Лекції з класичної та релятивістської електродинаміки. – Кривий
Ріг: КДПУ, 2006. - 202 с.: іл.

ISBN 966-7997-73-1

Лекції охоплюють основні теми курсу «Класична та релятивістська електродинаміка». Значна увага приділяється обґрунтуванню та інтерпретації рівнянь Максвела в локальній та інтегральній формах. Обговорюються наслідки та приклади використання їх. Детально пояснюються засадні положення релятивістської електродинаміки. В лекціях наголос робиться на якісній та фізичній стороні електродинамічних явищ, а адекватний математичний апарат використовується для ознайомлення з методами теоретичної фізики.

Для студентів фізичних спеціальностей педагогічних університетів.

УДК 538.3 (075)
ББК 22.33

ISBN 966-7997-73-1

Здано до друку 26.08.2006. Підписано до друку 11.09.2006. Формат 60x80,16. Папір друкований. Друк офсетний. Ум.др.арк. 11,625. Ум. др.відтиск. 12,625. Обл.-видавн.арк. 14,4. Вид. № 48-А. Замовлення № 48-К. Наклад 300 прим.