

DOI: 10.31319/2519-8106.1(50)2024.304784

УДК 519.1; 372.851

**Даниліна Г.В.**<sup>1</sup>, кандидат технічних наук, доцент, кафедра фізики і математики  
**Danylina Galyna**, Candidat of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Physics and Mathematics

e-mail: danilina@ukr.net

ORCID: 0009-0007-3634-7734

**Рашевський М.О.**<sup>1</sup>, кандидат фіз.-мат. наук, доцент, кафедра фізики і математики  
**Rashevskiy Mykola**, candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor, Department of Physics and Mathematics

e-mail: mora290466@gmail.com

ORCID: 0000-0003-1136-2691

**Семеріков С.О.**<sup>2</sup>, доктор педагогічних наук, професор, кафедра комп'ютерних наук та прикладної математики

**Semerikov Serhiy**, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Department of Computer Science and Applied Mathematics.

ORCID: 0000-0003-0789-0272

e-mail: semerikov@gmail.com

<sup>1</sup>Криворізький фаховий коледж Національного авіаційного університету, м. Кривий Ріг  
Kryvyi Rih Professional College of National Aviation University, Kryvyi Rih

<sup>2</sup>Криворізький державний педагогічний університет, м. Кривий Ріг  
Kryvyi Rih State Pedagogical University, Kryvyi Rih

## ГЕОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ КОМБІНАТОРНИХ ТОТОЖНОСТЕЙ

### GEOMETRIC MODELS OF COMBINATORIAL IDENTITIES

*Метод траєкторій започатковано у роботі D. Andre. У роботах Б.В. Гнєденка та його учнів згаданий метод було застосовано до задач математичної статистики.*

*Метод траєкторій в комбінаториці та теорії ймовірностей полягає у зведенні задач до підрахунку шляхів на цілочисельних ґратках. Для доведення комбінаторних тотожностей методом траєкторій обчислюють найкоротші шляхи на ґратках двома способами, і порівнюючи результати обчислень, отримують ту чи іншу тотожність.*

*У цій статті пропонується просторова версія методу траєкторій і застосовується для доведення комбінаторних тотожностей.*

*Розглянуто як узагальнення відомих комбінаторних тотожностей так і доведення нових. Комбінаторні тотожності доводяться із використанням просторової системи координат. Завдяки своїй наочності, метод траєкторій також може бути використаний у навчанні комбінаторних розділів математики. Візуалізація навчального матеріалу є дуже важливою складовою методики викладання. Збільшення розмірності, звичайно, зменшує наочність матеріалу, але часто позитивно впливає на розвиток здатності до логічного аналізу задачі. Подальші дослідження у цьому напрямку можуть бути спрямовані на побудову траєкторій у просторі більшої розмірності та їх візуалізацію, а також на побудову геометричних інтерпретацій відомих комбінаторних тотожностей.*

**Ключові слова:** комбінаторні структури, комбінаторні тотожності, траєкторії, візуалізація, викладання математики.

*The method of trajectories appeared in the work of D. Andre, where the reflection method was applied to the Bertrand's ballot problem. In the works of B.V. Gnedenko and his colleagues, the method of trajectories was applied to problems of mathematical statistics. The method of trajectories in*

*combinatorics and probability theory is to reduce problems to counting paths on integer lattices. The proof of combinatorial identities by the method of trajectories consists in calculating the shortest lattice paths in two ways.*

*In this paper, we propose a spatial version of the trajectory method and apply it to the proof of combinatorial identities. Generalizations of known combinatorial identities and proofs of new ones are considered. Several combinatorial identities are proved using a spatial coordinate system.*

*On the other hand, due to its visualization, the trajectory method can also be used in teaching combinatorial math. Visualization of educational material is a very important component of the teaching methodology. Increasing the dimensionality reduces the visibility of the material, but positively affects the ability to logically analyze problems. Further research could be aimed at building trajectories in a more dimensional space and visualizing them.*

**Keywords:** *combinatorial structures, combinatorial identities, trajectories, visualization, teaching math.*

### Постановка проблеми

Метод траєкторій [1]—[5] у комбінаториці та теорії ймовірностей дав можливість розв'язати ряд задач, які не вдавалося дослідити іншими методами, зокрема задачу про контроль якості продукції, що виникла у 50-х роках минулого століття, і дала назву згаданому методу у ряді праць Б.В. Гнеденка та його учнів. Геометричні міркування були застосовані у процесі дослідження відмінності двох емпіричних розподілів — задачею, безпосередньо пов'язаною із проблемою контролю якості продукції.

Одним із застосувань методу траєкторій є доведення комбінаторних тотожностей [4; 6; 8]. Перевагою названого методу є його надзвичайна наочність, що є однією із причин застосування методу при викладанні комбінаторних тем математики.

У роботі пропонується просторова версія відомого методу траєкторій та застосування його до доведення комбінаторних тотожностей. Звичайно, не завжди геометричний метод доведення комбінаторних тотожностей є найбільш ефективним, проте є найбільш наочним.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

Зародженням методу траєкторій можна вважати роботу *André D.*, де запропоновано метод відображень для дослідження задачі про балотування кандидатів на виборах. Дослідженню названої задачі та пов'язаних з нею питань присвячено ряд робіт [6; 7].

Траєкторії на площині розглядаються також у зв'язку із дослідженням електричних кіл, різновидом траєкторій на площині є так звані шляхи Каталана та шляхи Моцкіна [1; 3].

Геометричні моделі *Chandrasechar S.* використовував для обчислення комбінаторних проблем, що виникали у фізиці та астрономії. Геометричний метод доведення комбінаторних тотожностей широко застосовується разом із аналітичними та теоретико-множинними методами. Перевагою методу траєкторій є його наочність, що можна використовувати при викладанні комбінаторних розділів математики або відповідного матеріалу курсу дискретної математики [5; 8].

Відома геометрична інтерпретація [4; 5; 8] біномного коефіцієнта  $C_n^m$  — ламана (траєкторія)  $T$ , що сполучає початок координат  $O(0; 0)$  із точкою  $B(m; n-m)$  (рис. 1, а). Із геометричної інтерпретації біномного коефіцієнта одразу випливає відома рівність (тотожність)  $C_n^m = C_n^{n-m}$ . Найпростішою комбінаторною тотожністю, якій можна надати геометричну (траєкторну) ілюстрацію є така тотожність:  $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$  (рис. 1, б).

Для доведення останньої тотожності досить підрахувати кількість ламаних, що проходять через точки  $B_1$  і  $B_2$  та застосувати правило суми. В [4] розглядаються доведення деяких комбінаторних тотожностей, використовуючи ламані (траєкторії) на площині. Як показано у [8], біномні комбінації з повтореннями мають таку ж геометричну інтерпретацію, як і біномні коефіцієнти, тому ще одна тотожність запишеться так:  $\overline{C}_n^m = \overline{C}_{n-1}^m + \overline{C}_{n-1}^{m-1}$ . Зауважимо, що у часто використовуються траєкторії, зображені на рис. 1, в), які також зображують біномний коефіцієнт. Саме такими ланками зображуються шляхи Моцкіна [2; 3].

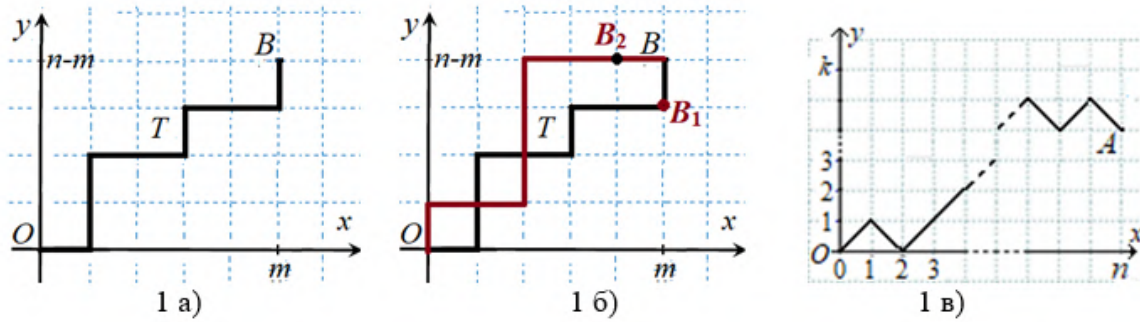


Рис. 1. Біномні коефіцієнти та їхні геометричні інтерпретації: а) геометрична інтерпретація біномного коефіцієнта; б) доведення комбінаторної тотожності; в) інший варіант геометричної інтерпретації числа комбінацій із  $n$  по  $k$

### Формулювання мети дослідження

Метою дослідження є доведення деяких комбінаторних тотожностей із використанням просторового методу траєкторій. Опишемо побудову просторової траєкторії та пов'язані з нею комбінаторні структури.

Розглянемо в системі координат  $Oxyz$  прямокутний паралелепіпед (рис. 2, а) зі сторонами  $n_1$ ,  $n_2$  і  $n_3$ . Кількість найкоротших ламаних, що проходять ребрами координатної кубічної ґратки від початку координат  $O(0; 0; 0)$  до точки  $A(n_1; n_2; n_3)$  можна порахувати такими міркуваннями. Кожна ламана містить  $n_1 + n_2 + n_3 = n$  ланок,  $n_1$  із яких є паралельними до осі  $Ox$ ,  $n_2$  паралельних до  $Oy$ , і  $n_3$  — до  $Oz$ . Для побудови будь-якої з ламаних необхідно вказати місця  $n_1$  ланок із  $n$  можливих для розташування відрізків, паралельних до  $Ox$ . Це можна здійснити  $C_n^{n_1}$  способами.

Вибрати  $n_2$  місць із  $n_2 + n_3 = n - n_1$ , що залишилися, для розміщення ланок, що паралельні до осі  $Oy$ , можна  $C_{n-n_1}^{n_2}$  способами. А  $n_3$  місця, використаємо для розміщення ланок, що пройдуть паралельно до осі  $Oz$ , однозначно ( $C_{n-n_1-n_2}^{n_3} = C_{n_3}^{n_3} = 1$ ) одним способом — з'єднуючи вже побудовані відрізки ламаної. Всього таких ламаних за правилом добутку існує  $C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} = P_n(n_1, n_2, n_3)$ . Отже,  $P_n(n_1, n_2, n_3)$  — це кількість найкоротших шляхів (траєкторій) із початку координат у точку  $A(n_1; n_2; n_3)$ . Якщо розглянути проекцію  $T'$  траєкторії  $T$  (рис. 2, а) на площину  $Oxy$ , то отримуємо траєкторію, що сполучає точки  $(0; 0)$  і  $(n_1; n_2)$ . Таких траєкторій згідно з [4; 5; 8] існує  $C_{n_1+n_2}^{n_1}$ . Підрахуємо кількість просторових траєкторій, що проектуються у траєкторію  $T'$ . Остання складається із  $n_1 + n_2$  ланок, у кожній із  $n_1 + n_2 + 1$  кінцевих точок якої можна побудувати відрізок у напрямку осі  $Oz$ . Щоб отримати просторову траєкторію, таких відрізків має бути  $n_3$ . Такий вибір можна здійснити  $\overline{C}_{n_1+n_2+1}^{n_3} = C_{n_1+n_2+n_3}^{n_3} = C_n^{n_3}$  способами. За правилом добутку підраховуємо кількість просторових траєкторій:  $C_{n_1+n_2}^{n_1} \cdot C_n^{n_3} = P_n(n_1, n_2, n_3)$ .

Описаний спосіб підрахунку застосуємо до рис. 2, б). Розглянемо проекцію просторової траєкторії на площину  $Oxy$ . Ламана у цій площині сполучає точки  $(0; 0)$  і  $(k; m - k)$  і має  $m$  ланок. Таких траєкторій згідно існує  $C_m^k$ . У кожній із  $m + 1$  кінцевих точок проекції можна відкласти  $n - m$  ланок у напрямку осі  $Oz$ . Таких способів побудови існує  $\overline{C}_{m+1}^{n-m} = C_n^m$ . За правилом добутку отримуємо кількість просторових траєкторій  $C_n^m \cdot C_m^k$ . Розглянемо тепер проекцію траєкторії на площину  $Oyz$ . Аналогічно підраховуємо кількість просторових траєкторій  $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}$ , і разом із попереднім результатом отримуємо відому [7] комбінаторну тотожність

$$C_n^m \cdot C_m^k = C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}.$$

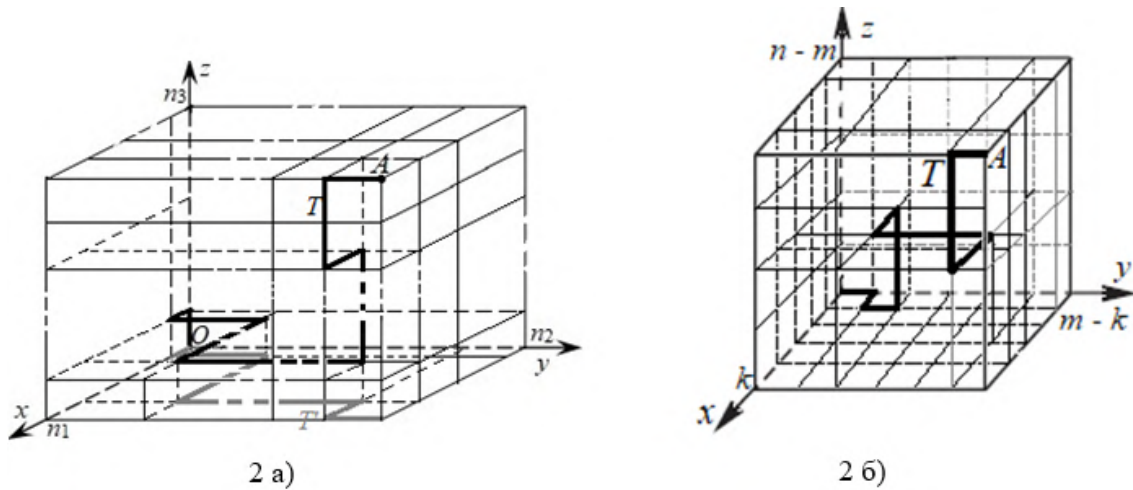


Рис. 2. Геометрична інтерпретація перестановок з повтореннями

Додаючи ще одну проекцію, а саме на площину  $Oxz$ , матимемо таку рівність:

$$C_{n-m+k}^k \cdot \bar{C}_{n-m+k+1}^{m-k} = C_{n-m+k}^k \cdot C_n^{m-k}.$$

Таким чином маємо тотожність, що узагальнює попередню:

$$C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_n^m \cdot C_m^k = C_n^{m-k} \cdot C_{n-m+k}^k.$$

Таким чином, за допомогою аналізу просторових траєкторій можна доводити комбінаторні тотожності для біномних коефіцієнтів, що і буде зроблено у наступному пункті дослідження.

### Виклад основного матеріалу

Використавши траєкторний зміст перестановок з повтореннями  $P_n(n_1, n_2, n_3)$  доведемо деякі комбінаторні тотожності.

Підрахуємо двома способами кількість траєкторій, що сполучають початок координат із точкою  $A(n_1; n_2; n_3)$  (рис. 3, а). Всього таких траєкторій, як показано вище, існує  $P_n(n_1, n_2, n_3)$ . З них  $P_{n-1}(n_1, n_2 - 1, n_3)$  пройде через точку  $A_1(n_1; n_2 - 1; n_3)$ ,  $P_{n-1}(n_1, n_2, n_3 - 1)$  — через точку  $A_2(n_1; n_2; n_3 - 1)$ , і  $P_{n-1}(n_1 - 1, n_2, n_3)$  — через точку  $A_3(n_1 - 1; n_2; n_3)$ . Інших ламаних не існує. За правилом суми маємо тотожність:

$$P_n(n_1, n_2, n_3) = P_{n-1}(n_1 - 1, n_2, n_3) + P_{n-1}(n_1, n_2 - 1, n_3) + P_{n-1}(n_1, n_2, n_3 - 1).$$

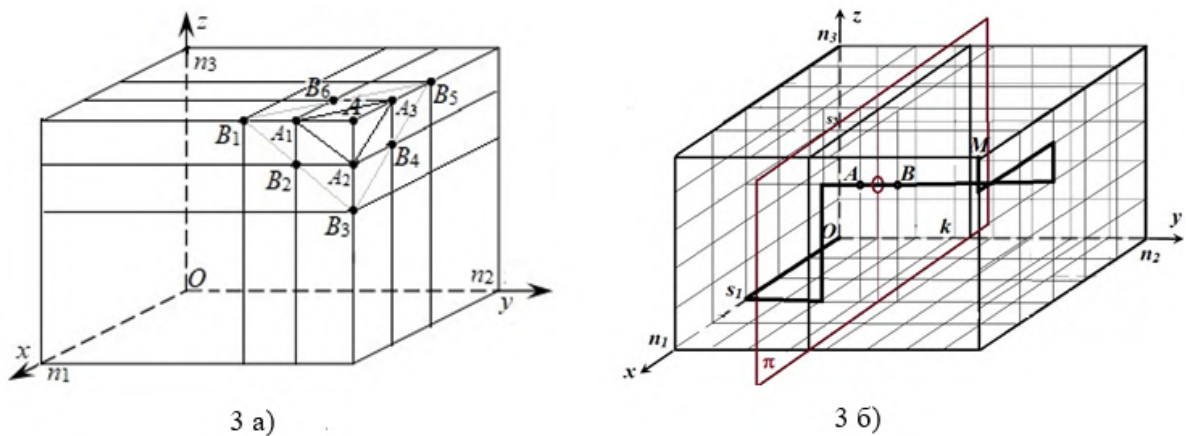


Рис. 3. Доведення комбінаторних тотожностей із використанням зображень перестановок з повтореннями

Переписавши останню тотожність для структури  $C_n^m$ , дістанемо таку тотожність:

$$C_{n_1+n_2+n_3}^{n_1} \cdot C_{n_2+n_3}^{n_2} = C_{n_1+n_2+n_3-1}^{n_1-1} \cdot C_{n_2+n_3}^{n_2} + C_{n_1+n_2+n_3-1}^{n_2-1} \cdot C_{n_1+n_3}^{n_3} + C_{n_1+n_2+n_3-1}^{n_3-1} \cdot C_{n_1+n_2}^{n_1}.$$

Остання тотожність має нескладне теоретико-множинне трактування, а також доводиться аналітичним способом.

За допомогою цього ж рисунка доведемо ще одну комбінаторну тотожність.

Підрахуємо траєкторії, що проходять через точки  $B_1(n_1; n_2 - 2; n_3)$ ,  $B_2(n_1; n_2 - 1; n_3 - 1)$ ,  $B_3(n_1; n_2; n_3 - 2)$ ,  $B_4(n_1 - 1; n_2; n_3 - 1)$ ,  $B_5(n_1 - 2; n_2; n_3)$ ,  $B_6(n_1 - 1; n_2 - 1; n_3)$ . Траєкторій  $OB_1$  всього існує  $P_{n-2}(n_1; n_2 - 2; n_3)$ , а  $B_1A$  — одна; траєкторій  $OB_2$  всього існує  $P_{n-2}(n_1; n_2 - 1; n_3 - 1)$ , а  $B_2A$  — дві:  $B_2A_1A$  та  $B_2A_2A$ . Продовжуючи процес підрахунку, та використовуючи правила суми і добутку, матимемо тотожність:

$$P_n(n_1, n_2, n_3) = P_{n-2}(n_1 - 2, n_2, n_3) + P_{n-2}(n_1, n_2 - 2, n_3) + P_{n-2}(n_1, n_2, n_3 - 2) + 2P_{n-2}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3) + 2P_{n-2}(n_1 - 1, n_2, n_3 - 1) + 2P_{n-2}(n_1, n_2 - 1, n_3 - 1).$$

Переходячи до позначень в комбінаціях, маємо:

$$C_{n_1+n_2+n_3}^{n_1} \cdot C_{n_2+n_3}^{n_2} = C_{n_1+n_2+n_3-2}^{n_1-2} \cdot C_{n_2+n_3}^{n_2} + C_{n_1+n_2+n_3-2}^{n_2-2} \cdot C_{n_1+n_3}^{n_1} + C_{n_1+n_2+n_3-2}^{n_3-2} \cdot C_{n_1+n_2}^{n_2} + 2C_{n_1+n_2+n_3-2}^{n_1-1} \cdot C_{n_2+n_3-1}^{n_2-1} + 2C_{n_1+n_2+n_3-2}^{n_2-1} \cdot C_{n_3-1}^{n_3-1} + 2C_{n_1+n_2+n_3-2}^{n_3-1} \cdot C_{n_1+n_2-1}^{n_1-1}.$$

Розглянемо рис. 3, б). Кожна траєкторія  $OM$  перетне площину  $\pi$ , що проходить паралельно до площини  $Oxz$  між площинами  $y = k$  та  $y = k + 1$ . Траєкторій, що сполучають точку  $O$  з точкою  $A(s_1; k; s_3)$  всього існує  $P_{s_1+s_3+k}(s_1, k, s_3)$ . Траєкторій, що сполучають точку  $B(s_1; k + 1; s_3)$   $M(n_1; n_2; n_3)$  існує  $P_{n_1+n_3+k-s_1-s_3-1}(n_1 - s_1 - 1, k + 1, n_3 - s_3 - 1)$ . За правилом добутку маємо кількість траєкторій

$$P_{s_1+s_3+k}(s_1, k, s_3) \cdot P_{n_1+n_3+k-s_1-s_3-1}(n_1 - s_1 - 1, k + 1, n_3 - s_3 - 1),$$

що містять ланку  $AB$ . За правилом суми отримуємо таку тотожність:

$$\sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_3=0}^{n_3} P_{i_1+i_3+k}(i_1, k, i_3) \cdot P_{n_1+n_3+k-i_1-i_3-1}(n_1 - i_1 - 1, k + 1, n_3 - i_3 - 1) = P_{n_1+n_2+n_3}(n_1, n_2, n_3).$$

Переписавши останню тотожність для біномних коефіцієнтів, дістанемо:

$$\sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_3=0}^{n_3} C_{i_1+i_3+k}^{i_1} \cdot C_{i_3+k}^{i_3} \cdot C_{n_1+n_3+k-i_1-i_3-1}^{n_1-i_1} \cdot C_{n_3+k-i_3-1}^{n_3-i_3} = C_{n_1+n_2+n_3}^{n_1} \cdot C_{n_2+n_3}^{n_2}.$$

Відому комбінаторну тотожність  $2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$  можна узагальнити просторовим аналогом:  $\sum_{n_1+n_2+n_3=m} P_m(n_1, n_2, n_3) = 3^m$ , надавши останній просторову геометричну ілюстрацію.

Розглянемо наступні рисунки.

Узагальнимо останню тотожність на просторовий випадок. На рис. 4, б) зображено перетин куба зі сторонами  $m, n, n$  площиною  $y + z = n$ . Підрахуємо кількість траєкторій, що сполучають початок координат  $O(0; 0; 0)$  із точкою  $B(m; n; n)$ . Згідно із викладеним вище таких траєкторій існує  $P_{2n+m}(n; n; m) = C_{2n+m}^n \cdot C_{n+m}^m$ . З іншого боку, кожна траєкторія перетне згадану площину у деякій точці  $A_{ks}(k; n-k; s)$ . Таких траєкторій існує  $P_{n+s}(k, n-k, s) = C_{n+s}^s$ . Траєкторій, що сполучають точки  $A_{ks}(k; n-k; s)$  і  $B(m; n; n)$  існує  $P_{n+m-s}(n-k, k, m-s) = C_{n+m-s}^m \cdot C_{n+s}^s$ , отже підсумовуванням маємо кількість траєкторій.

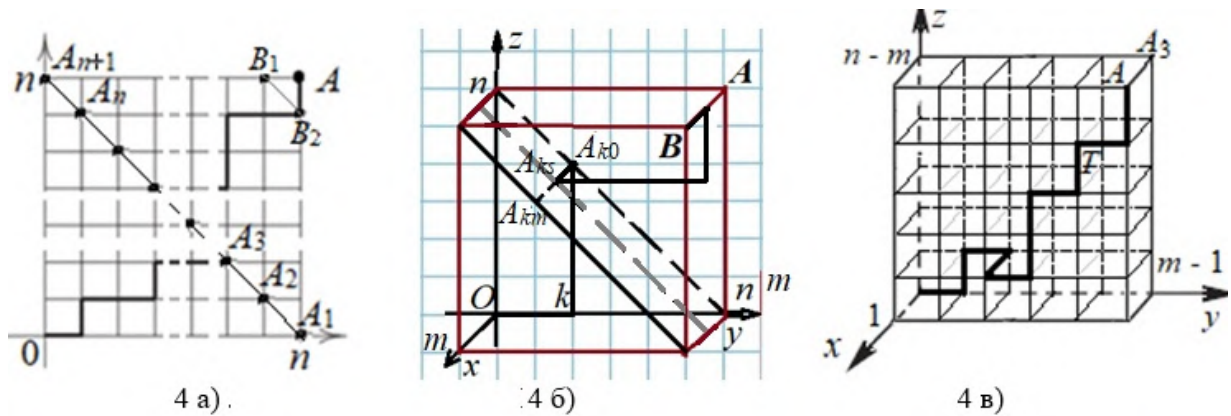


Рис. 4. Доведення комбінаторних тотожностей підрахунком траєкторій двома способами

За допомогою рис. 4, а) доводиться така комбінаторна тотожність [6]:

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 ;$$

$$P_{2n+m}(n; n; m) = \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^m P_{n+s}(k, n-k, s) \cdot (P_{n+m-s}(n-k, k, m-s) - P_{n+m-s-1}(n-k, k, m-s-1)).$$

Або в звичайних позначеннях

$$C_{2n+m}^n \cdot C_{n+m}^m = \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^m C_{n+s}^s \cdot C_{n+m-s}^m \cdot (C_{n+s}^s - C_{n+s-1}^{s-1}).$$

Тут і в попередній формулі в дужках віднято двічі пораховані траєкторії, що містять ланки  $A_{ks}$  та  $A_{ks+1}$ .

Якщо на рис. 4, в) підраховували кількість просторових траєкторій безпосередньо  $P_n(1, m-1, n-m) = \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} = m \cdot C_n^m$  і за допомогою проєкції на  $Oyz$ :

$C_{n-1}^{m-1} \cdot \bar{C}_n^1 = n \cdot C_{n-1}^{m-1}$ , дістанемо відому комбінаторну тотожність, яку в [4] доведено теоретико-множинними міркуваннями:

$$n \cdot C_{n-1}^{m-1} = m \cdot C_n^m.$$

Розглянемо комбінаторну тотожність

$$\sum_{m_1+m_2+\dots+m_q=m} C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot \dots \cdot C_{n_q}^{m_q} = C_n^m. \quad (1)$$

На думку авторів, цій тотожності можна надати траєкторну ілюстрацію у просторі. Обмежимося поки що траєкторіями на площині (рис. 5), які було побудовано у роботі [6].

Згідно із геометричною інтерпретацією біномних коефіцієнтів, через точки  $A_{k-1}$  і  $A_k$  пройде  $C_{n_k}^{m_k}$  траєкторій. Тут  $A_k(\sum_{p=1}^k m_p; \sum_{p=1}^k (n_p - m_p))$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ ;  $q \geq 1$  — ціле число;  $A_0 = O(0; 0)$ ,  $A_q(m; n-m)$ . За правилом добутку траєкторій, що проходять через точки  $A_0, A_1, \dots, A_q$  існує  $C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot \dots \cdot C_{n_q}^{m_q}$ . Якщо підрахувати кількість траєкторій за всіма можливими точками, координати яких задовольняють рівнянню  $m_1 + m_2 + \dots + m_q = m$ , то за правилом

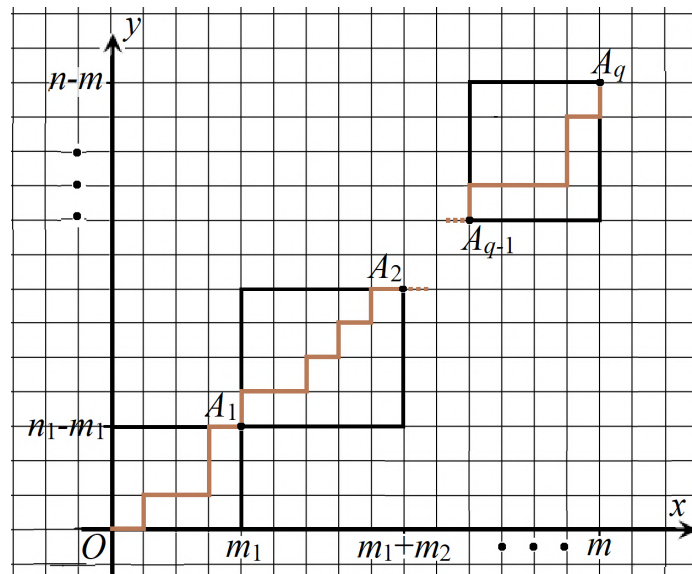


Рис. 5. Геометрична інтерпретація комбінаторної тотожності (1)

добутку їх виявиться  $\sum_{m_1+m_2+\dots+m_q=m} C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot \dots \cdot C_{n_q}^{m_q}$ . З іншого боку, траєкторій, що сполучають

$O(0; 0)$  і  $A(m; n - m)$ , існує  $C_n^m$ . Прирівнявши отримані результати, дістанемо записану вище комбінаторну згадану тотожність.

Отриману тотожність узагальнимо за допомогою описаного вище підрахунку відгалуження просторової траєкторії без виконання рисунка. Просторова траєкторія, що сполучає початок координат із точкою  $B_q(m, n - m, p)$ , буде від кожної плоскої траєкторії відгалужуватись  $p + 1$  ланками, паралельними до осі  $Oz$ . Отже, матимемо:

$$\sum_{\substack{m_1+m_2+\dots+m_q=m \\ p_1+p_2+\dots+p_q=p}} C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot \dots \cdot C_{n_q}^{m_q} \cdot C_{p_1}^{k_1} C_{p_2}^{k_2} \cdot C_{p_q}^{k_q} = P_{n+p}(m, n - m, p) = C_{n+p}^m \cdot C_{n+p-m}^p$$

Отже, тотожність, що узагальнює попередню тотожність (1) запишеться так:

$$\sum_{\substack{m_1+m_2+\dots+m_q=m \\ p_1+p_2+\dots+p_q=p}} C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot \dots \cdot C_{n_q}^{m_q} \cdot C_{p_1}^{k_1} C_{p_2}^{k_2} \cdot C_{p_q}^{k_q} = C_{n+p}^m \cdot C_{n+p-m}^p$$

### Висновки

Таким чином, у роботі розглянуто застосування просторового методу траєкторій для доведення комбінаторних тотожностей. Подальші дослідження у цьому напрямку стосуються розробки траєкторного методу у просторі більшої розмірності та дослідження самих просторових траєкторій. Безпосередньо із описаними траєкторіями пов'язані шляхи Діка та числа Каталана. Шляхом Діка називають ламану, що лежить у верхній півплощині і складається із векторів  $(1, 1)$  та  $(1, -1)$ , сполучаючи точку  $(0; 0)$  із точкою на додатній частині осі  $Ox$ . Кількість шляхів Діка довжини  $2n$  дорівнює  $n$ -му числу Каталана  $c_n$ . Траєкторія, зображена на рис. 1, в) є шляхом Діка, якщо кінцева її точка лежить на осі  $Ox$ . Підрахунок кількості шляхів Діка виникають у різних задачах комбінаторики і теорії ймовірностей. Узагальненням шляхів Діка є шляхи Моцкіна, які можуть містити також горизонтальні ланки  $(1; 0)$ . На думку авторів числам Моцкіна можна надати просторову інтерпретацію та застосувати для них описані способи підрахунку.

Зауваження від другого співавтора. Доведені за допомогою траєкторій на площині тотожності наведено також у праці, опублікованій за посиланням

<https://otr.ioid.gov.ua/images/pdf/2021/3/09.pdf>. Згадана робота в основному ґрунтується на результатах доповіді [4] і статті Рашевського М.О. у російському виданні. На вказані два джерела у статті із незрозумілих причин відсутні посилання.

### Список використаної літератури

1. Cameron, N., Nkwanta, A. Riordan Matrices and Lattice Path Enumeration. *Notices of the American Mathematical Society*. 2023. Vol. 70. No. 2. P. 231-243. URL: <https://www.ams.org/journals/notices/202302/rnoti-p231.pdf>.
2. Felsne S., and Heldt D. Lattice Path Enumeration and Toeplitz Matrices. *Journal of Integer Sequences*, 2015. Vol. 18. Article 15.1.3. P. 1-16. URL: <https://studylib.net/doc/10376093/lattice-path-enumeration-and-toeplitz-matrices>.
3. Han, Seongjune & Lee, Kyungyong & Li, Li & Loehr, Nicholas. Chain Decompositions of  $q, t$ -Catalan Numbers: Tail Extensions and Flagpole Partitions. *Annals of Combinatorics*. 2022. 26(3): 1-55.
4. Гуцалюк С.П., Рашевська А.М., Шиян В.О. Візуалізація задач комбінаторики та метод траєкторій. 2016. URL: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/pmovc/pmovc20/paper/viewFile/10433/8736>.
5. Котова, О.В., Василенко Н.М. Вивчення методу траєкторій розв'язування комбінаторних задач в системі гурткової роботи студентів. *Актуальні проблеми природничо-математичної освіти в середній і вищій школі : матер. міжнар. наук.-практ. конф. (м. Херсон, 15–16 вересня 2016 р.)*. Вид-во ХДУ. Херсон, 2016. С. 47-49. URL: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/pmovc/pmovc20/paper/viewFile/10433/8736>
6. Loehr N., Mauldin, R. Bijective proofs of Jensen's and Mohanty-Handa's identities. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*. 2013. Vol. 7. Issue 1. P. 11-24. DOI: <https://doi.org/10.2298/AADM121030021L>
7. Pał, Karol. Bertrand's Ballot Theorem. *Formalized Mathematics*. 2015. Vol. 22, No. 2, Pages 119–123, URL: <https://intapi.sciendo.com/pdf/10.2478/forma-2014-0014>. DOI:10.2478/forma-2014-0014
8. Рашевський М.О. Про викладання комбінаторики у закладах вищої освіти. *Фізико-математична освіта*. 2018. Випуск 4(18). С. 136-142. URL: <https://core.ac.uk/download/pdf/187497188.pdf>.

### References

- [1] Cameron, N., Nkwanta, A. (2023). Riordan Matrices and Lattice Path Enumeration. *Notices of the American Mathematical Society*. Vol. 70. No. 2. Retrieved from <https://www.ams.org/journals/notices/202302/rnoti-p231.pdf>. DOI:10.1090/noti2614.
- [2] Felsne, S., and Heldt, D. (2015). Lattice Path Enumeration and Toeplitz Matrices. *Journal of Integer Sequences*, Vol. 18. Article 15.1.3. Retrieved from <https://studylib.net/doc/10376093/lattice-path-enumeration-and-toeplitz-matrices>
- [3] Han, S. & Lee, K. & Li, L. & Loehr, N. (2022). Chain Decompositions of  $q, t$ -Catalan Numbers: Tail Extensions and Flagpole Partitions. *Annals of Combinatorics*. 26(3). DOI:10.1007/s00026-022-00590-7.
- [4] Hutsaluk, S.P., Rashevskaya, A.M., Shuyan, V.O. (2016). Vizualizacija zadach kombinatoriky ta metod trajektorij. [Visualization of combinatorics problems and trajectory method]. Retrieved from <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/pmovc/pmovc20/paper/viewFile/10433/8736>
- [5] Kotova, O.V., Vasylenko, N.M. (2016). Study of the method of trajectories for solving combinatorial problems in the system of students' group work. Actual problems of science and mathematics education in secondary and higher education: Proceedings of the International Scientific and Practical Conference (Kherson, September 15–16, 2016). Retrieved from <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/pmovc/pmovc20/paper/viewFile/10433/8736>.



- [6] Loehr N., Mauldin, R. (2013). Bijective proofs of Jensen's and Mohanty-Handa's identities. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*. Vol. 7. Issue 1. DOI: <https://doi.org/10.2298/AADM121030021L>
- [7] Pał, Karol. (2015). Bertrand's Ballot Theorem. *Formalized Mathematics*. Vol. 22, No. 2. Retrieved from <https://intapi.sciendo.com/pdf/10.2478/forma-2014-0014>. DOI:10.2478/forma-2014-0014
- [8] Rashevs'kyi, M.O. (2018) Pro vykladannja kombinatoryky u zakladakh vyshhoji osvity [About Teaching Combinatorics In The Institutes Of Higher Education]. *Physical and Mathematical Education*. Issue 4(18). 136-142. DOI 10.31110/2413-1571-2018-018-4-023

*Надійшла до редколегії 23.11.2023*