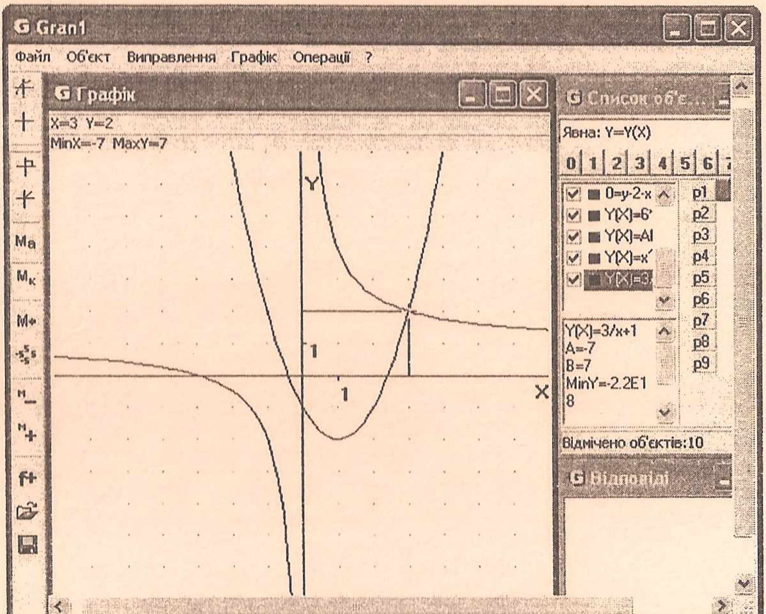
Криворізький національний університет

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

Випуск X

Том 1



Кривий Ріг
Видавничий відділ НМетАУ
2012

ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ
В КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ ЗАГАЛЬНООСВІТНЬОЇ ШКОЛИ

П. І. Ульшин, А. Б. Паюк
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет
Hanna_Pauk@mail.ru

До задач на побудову відносяться такі, що розв'язуються за допомогою креслярських інструментів, частіше – циркулем і лінійкою.

Виникнення і розвиток таких задач переносить нас в далеке минуле. Постановка їх тісно пов'язана з практичною діяльністю людини. Вона вимагала виконувати зображення різних споруд, ділянок землі, іригаційних каналів тощо. Такі зображення мали форму певних геометричних фігур.

Із давньоєгипетських папірусів відомо, що елементарні задачі на побудову за допомогою циркуля та лінійки люди могли розв'язувати ще в XX ст. до н.е. До них відносяться:

– поділ відрізка навпіл і на *n* рівних частин;
– відкладання кута, рівного даному, поділ його навпіл;
– побудова трикутника за даними його сторонами,
– проведення прямої, паралельної до даної, через точку поза нею і ін.

Проте всі ці задачі тоді розв'язувалися емпірично, за правилами, знайденими експериментальним шляхом.

Ера теоретичної математики почалася з VI ст. до н.е. З'явилася можливість всі математичні твердження доводити логічним шляхом. Найбільшого розквіту розв'язування задач на побудову набуло в школі Піфагора (V ст. до н.е.). Піфагорійці надавали особливого значення інструментам: циркулеві і лінійці. Вони вважали, що ці інструменти дані людям від бога. Для розв'язування ними будь-яких задач треба лише розробити потрібні методи. Вони розробили ряд методів: метод геометричних місць точок, методи перетворення площини (паралельного перенесення, центральної і осьової симетрій, повороту і подібності), алгебричний метод тощо.

Продуктивність піфагорійців у створенні геометричних задачі на побудову була надзвичайно великою. Крім великої кількості цікаво розв'язаних задач, ними ще були сформульовані так задачі: про трисекцію кута, про подвоєння куба і про квадратуру круга, – які не піддавались їм розв'язуванню циркулем і лінійкою. Пізніше ці задачі стали класичними. Їх пробували розв'язувати вчені в різних століттях і лише у 1882 році німецький математик Ф. Лінденман довів, що коренями рівнянь, якими визначаються ці задачі, є трансцендентні числа, які неможливо представити відрізками, побудованими за допомогою циркуля і лінійки. Отже, стало відомо, що не всі задачі можна розв'язувати такими інструментами.

У IV ст. до н.е. в школі давньогрецького вченого Платона була розроблена схема розв'язування задач на побудову в чотири етапи: *Аналіз–Побудова–Доведення–Дослідження.* Ця схема застосовується до розв'язування складних задач на побудову і в наш час.

Аналіз – це логічні міркування, при яких відшукується спосіб розв'язування задачі. *Побудова* – це створення алгоритму для розв'язування задачі. *Доведення* – це логічні міркування, при яких встановлюється, що задачу розв'язано вірно. *Дослідження* – це визначення умов, при яких задача має розв'язки, і встановлюється їхня кількість.

При розв'язуванні простих задач з ціллю економії часу можна зменшити кількість етапів. Наприклад, якщо в умові задачі не вимагається проводити «*дослідження*», то і не потрібно виконувати цей етап. При цьому елементи, дані в задачі, слід брати такими, щоб задача мала розв'язок. Якщо алгоритм побудови складається лише з відомих елементарних задач, то «*доведення*» робити не потрібно. «*Аналіз*» можна не робити, якщо в умові задачі зрозумілий зв'язок між елементами даними в задачі і тими, які потрібні для побудови. Зроблений рисунок без алгоритму не дає підстави говорити, що задачу розв'язано. Отже, «*побудова*» – це обов'язковий етап, який завжди повинен бути присутнім при розв'язані задачі на побудову.

Згідно програми з курсу геометрії загальноосвітньої школи задачі на побудову вивчаються окремими темами із 7-го по 9-й класи. Спочатку розв'язуються основні задачі на побудову, потім задачі на метод геометричних місць точок, далі йдуть задачі на методи геометричних перетворень площини.

Учням слід розуміти, що розв'язування задач на побудову полягає не стільки у побудові зображення фігури, скільки у знаходженні способу, як це зробити і у відповідному доведенні. Отже, задача вважається розв'язаною, якщо знайдено алгоритм її розв'язування і доведено, що побудована фігура задовольняє поставленим умовам.

Ефективність розв'язування задачі на побудову визначається найменшою затратою часу на цей процес. Для цього важливо правильно вибрати метод, який дозволяє одержати результат з найменшою кількістю елементарних побудов.

Розглянемо приклади розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля та лінійки.

Задача 1. Дано $(O; R)$ – коло з центром у точці O і радіусом R, а також точку A поза ним. Провести через точку A січну l так, щоб відрізок AM, від точки A до кола, дорівнював хорді MN.

Розв'язання

Побудуємо коло $(O; R)$ і точку A, які дано в умові задачі.

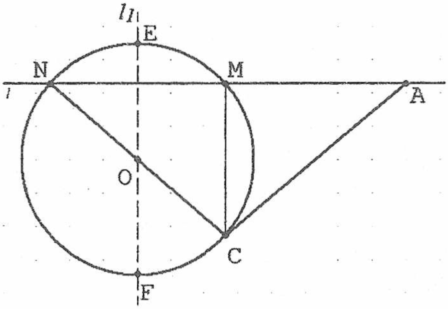


Рис. 1

Аналіз. Припустимо, що задачу розв'язано і пряму l побудовано. Будуємо рис. 1 так, щоб виконувалася умова: $AM=MN$. Для встановлення зв'язку між елементами, заданими в умові задачі, і тими, які треба знайти, проведемо пряму: $(NO) \cap = C$. Сполучимо точку C відрізками з точками M і A. Утворилися два трикутника CMN і CMA, які рівні, бо прямокутні і з відповідно рівними катетами. Тому $AC = CN$.

Аналіз закінчено.

Побудова: 1) Через точку O проведемо пряму $l_1 \cap (O;R) = E,F$.

2) Відрізок EF – діаметр кола;

3) Будуємо точку: $C = (A, EF) \cap (O; R)$;

4) Проводимо промінь: $[CO) \cap (O; R) = N$;

5) Будуємо пряму $l = (AN)$, яка є січною: $l \cap (O; R)=M, N$ і шуканою.

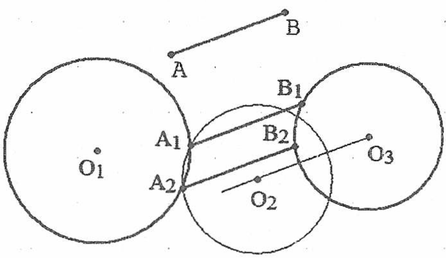


Рис. 2

Задача 2. Дано два різні кола $(O_1; R_1)$ і $(O_2; R_2)$ і відрізок AB поза ними. За допомогою паралельного перенесення відрізок AB розмістити так, щоб його кінці A і B розташувалися відповідно на першому і другому колах.

Розв'язання

Оскільки в задачі вимагається виконати паралельне перенесення, то виконаємо паралельне перенесення кола $(O_2; R_2)$ до відрізка AB на відстань, рівну його довжині.

Побудова:

1) Будуємо промінь $[O_2; O_3) \parallel AB$ і відкладаємо на ньому відрізок $O_2O_3=AB$;

2) Будуємо коло $(O_3; R_2) \cap (O_1; R_1) = A_1; A_2$.

3) Виконаємо переміщення кола (O_3; R_2) до суміщення з колом (O_2; R_2). При цьому: $O_3 \rightarrow O_2$, $A_1 \rightarrow B_1$, $A_2 \rightarrow B_2$.

4) Оскільки при паралельному перенесені фігури всі точки її рухаються в одному і тому ж напрямі і на одну і ту ж відстань, то відрізки A_1B_1 і A_2B_2 є шуканими.

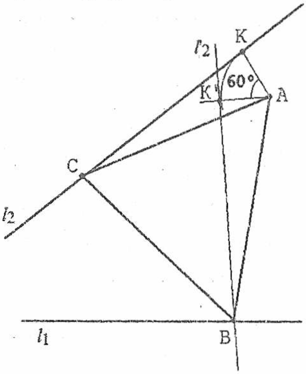


Рис. 3

Задача 3. Дано дві прямі l_1 і l_2 та точку A між ними. Побудувати рівносторонній трикутник ABC так, щоб $B \in l_1$ *і* $C \in l_2$.

<u>Розв'язання</u>

Оскільки у рівносторонньому трикутнику всі кути по 60°, то потрібно застосувати метод повороту на 60° навколо точки A однієї з прямих.

<u>Побудова:</u>

1) Виконаємо поворот $R_A^{60^\circ}(l_2) = l_2'$;

2) $l_2' \cap l_1 = B$;

3) Зворотній поворот: $R_A^{-60^\circ}(l_2') = l_2$; при якому $K'B = KC$, або $AB = AC$;

4) ΔABC – шуканий трикутник.

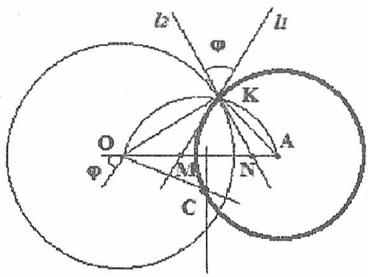


Рис. 4

Задача 4. Дано коло (O; R) з центром в точці O і радіусом R та точка A поза ним. Побудувати коло з центром у точці A так, щоб воно перетинало дане коло під даним кутом φ.

<u>Розв'язання</u>

Кутом між двома колами називається кут між дотичними, проведеними до кожного із цих кіл через точку їх перетину.

<u>Аналіз</u>: Припустимо, що задачу розв'язано і коло (A; AK) побудоване, де K – точка перетину його з даним колом (O; R) і виконується умова, що $\angle(l_1 l_2) = \varphi$ – дотичні до кіл, проведені через точку K.

Позначимо точки:

$M = l_1 \cap AO$ і $M = l_2 \cap AO$.

Згідно умови задачі $\angle MKN = \varphi$. Побудуємо відрізки $OK \perp l_2$ і $AK \perp l_1$.

Розглянемо:

$$\angle OKA = \angle OKM + \angle MNK + \angle NKA = 90^\circ - \varphi + \varphi + 90^\circ - \varphi = 180^\circ - \varphi.$$

Отже, точка K є перетином двох геометричних місць точок: даного кола і дуги кола, із точок якої відрізок OA видно під кутом $\psi = 180^\circ - \varphi$, $\left(ГМТ_{OA}^{\psi}\right)$. Аналіз закінчено.

Побудова:

1) Будуємо відрізок OA;

2) Виконаємо побудову $ГМТ_{OA}^{\psi}$ – дуга AKO кола $(C;CA)$, з якої видно відрізок OA під кутом $\psi=180°-\varphi$;

3) $ГМТ_{OA}^{\psi} \cap (O;R)=K$;

4) Коло $(A;AK)$ – шукане.

Зауваження. У розглянутих задачах використовувалися різні методи розв'язування, причому, у першій і четвертій задачах доведення окремих співвідношень зроблено в аналізах, а всі побудови містили елементарні твердження.

Висновок. Розв'язування задач на побудову розвиває в учнів логічне і алгоритмічне мислення, вміння користуватися креслярськими інструментами, розширює їх кругозір у поглядах на розвиток математики, збагачує їх загальну культуру.

Література

1. Атанасян Л. С. Геометрия. / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. – М. : Просвещение, 1986. – 336 с.

2. Конфорович А. Г. Визначні математичні задачі / Андрій Григорович Конфорович. – К. : Радянська школа, 1981. – 189 с.