

Інноваційні технології навчання

Світлана Шокалюк,

*асистент кафедри інформатики та прикладної математики
Криворізького державного педагогічного університету*

Сергій Семеріков,

*доцент кафедри інформатики та прикладної математики
Криворізького державного педагогічного університету, кандидат педагогічних наук*

Ілля Теплицький,

*доцент кафедри інформатики та прикладної математики
Криворізького державного педагогічного університету, кандидат педагогічних наук*

МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ЗАСТОСУВАННЯ WEB-СКМ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ МАТЕМАТИЧНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ*

3. Методика застосування Web-СКМ SAGE

3.1. Основні можливості системи SAGE

Чисельні обчислення:

- виконання арифметичних операцій над числами та обчислення значень числових функцій (таких як факторіал тощо) та елементарних математичних функцій;

- виконання наближених обчислень із заданою точністю;

- всі обчислення лінійної алгебри, пов'язані з діями над числовими векторами та матрицями.

Символьні обчислення:

- операції перетворення виразів (спрощення, розкриття дужок розкладання поліному на множники та інші);

- обчислення сум та добутків елементів ряду, розкладання функції у степеневі ряди;

- обчислення границь послідовностей і функцій;

- диференціювання функції (повне та часткове);

- обчислення визначених та невизначених інтегралів;

- розв'язування алгебраїчних і трансцендентних рівнянь аналітично, графічно та чисельно;

- розв'язування диференціальних рівнянь і їх систем аналітично та, використовуючи перетворення Лапласа;

- операції лінійної алгебри (зокрема дії з векторами і матрицями);

- обчислення комбінаторних виразів;

- робота зі спеціальними функціями.

*Продовження. Початок див. у № 2. — 2009.

Графіка

- побудова графіків функціональних залежностей, заданих аналітично, параметрично та у полярних координатах;
- комбінування графіків;
- широкий набір графічних примітивів на площині (точка, стрілка, лінія, коло, круг, заповнений (зафарбований) багатокутник, сфера) та у просторі (точка, лінія, правильні многогранники);
- побудова поверхонь, заданих аналітично та параметрично;
- побудова контурних графіків;
- графічне представлення масивів числових даних;
- побудова векторного поля функції двох змінних;
- анімація графічних побудов;
- додавання текстових надписів до графічних зображень;
- десятки опцій графічних функцій, що задають товщину точок та ліній, їхній колір та ін.

Таблиця 1

ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ ФУНКЦІЇ

Команда	Функція	Опис дії функції
abs(x)	x	Модуль числа (абсолютне значення)
sqrt(x)	\sqrt{x}	Квадратний корінь
exp(x)	e ^x	Експонента
ln(x)	ln x	Натуральний логарифм
log(x,b)	log _b x	Логарифм за основою b
factorial(n)	n!	Факторіал числа n (n!=1 2 3 ... n)
sin(x)	sin x	Синус
cos(x)	cos x	Косинус
tan(x)	tg x	Тангенс
cot(x)	ctg x	Котангенс
asin(x)	arcsin x	Арксинус
acos(x)	arccos x	Арккосинус
atan(x)	arctg x	Арктангенс
acot(x)	arcctg x	Арккотангенс
sinh(x)	sh x	Синус гіперболічний
cosh(x)	ch x	Косинус гіперболічний
tanh(x)	th x	Тангенс гіперболічний
coth(x)	cth x	Котангенс гіперболічний

Продемонструємо зазначені можливості Web-СКМ SAGE.

3.2. Операції з виразами

Вирази SAGE – це комбінації чисел, змінних, арифметичних операторів («+», «-», «*», «/», «%», «^», «**»), операторів порівняння («==», «<>», «!=», «<», «>», «<=», «>=»), логічних операторів («not», «and», «or»), дужок («(», «)») і функцій (табл. 1).

Над виразами в середовищі SAGE можна виконати операції спрощення, розкриття дужок та розкладання на множники.

Операцію спрощення (без розкриття дужок) виконує функція *simplify*.

Приклад 2.1. Спростити вираз: $3x^2 + 5x + 17x - x^2$.

```
sage: simplify(3*x^2+5*x +17*x-x^2)
2*x^2 + 22*x
```

Інколи досить зручно для роботи визначити вираз як певну змінну (цей крок цілком виправданий, якщо над виразом потрібно виконати кілька операцій). Подальша робота зі змінною типу «вираз» може бути виконана двома способами:

- 1) застосувати змінну як параметр відповідної функції (див. приклад 2.2a);
- 2) для змінної, як для об'єкта, ви-

Таблиця 2

ПРИКЛАДИ ЗАПИСУ МАТЕМАТИЧНИХ ВИРАЗІВ

Вираз	Команда
$\sqrt{5x-3+x^2}$	sqrt(5*x-3+x^2)
$\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}x$	sin(x)-sqrt(3)/2*x
$\frac{3}{2\sqrt{x+4}} + \frac{4}{x-4}$	3/(2*sqrt(x+4))+4/(x-4)
$3x \ln x$	3*x*log(x) або 3*x*ln(x)
$(1 - e^{3x})^2$	(1-exp(3*x))^2 або (1-exp(3*x))**2
$x^3 \log_3 x$	x^3*log(x,3)
$3e^x - 5 \cdot 8^x + 1$	3*exp(x)-5*8^x+1

конати функцію-метод (див. приклад 2.3б).

Приклад 2.2. Спростити вираз:

$$(x - 1)(x - 1)(2x - 3).$$

a) sage: f=(x-1)*(x-1)*(2*x-3);
simplify(f)

$$(x - 1)^2(2x - 3)$$

б) sage: f=(x-1)*(x-1)*(2*x-3);
f.simplify()

$$(x - 1)^2(2x - 3)$$

Для розкриття дужок використовується функція expand.

Приклад 2.3. Розкрити дужки у виразі: $(x - 1)(x^2 - 1)$.

sage: expand((x-1)*(x^2-1))

$$x^3 - x^2 - x + 1$$

Приклад 2.4. Розкрити дужки у виразі: $3x(x - 6) - (2x^2 - 14)$.

sage: a=3*x*(x-6)-(2*x^2-14); a

$$3*x*(x-6)-(2*x^2-14)$$

sage: expand(a)

$$x^2 - 18*x + 14$$

Приклад 2.5. Розкрити дужки у виразі: $(x - 1)(x^2 - 2x + 2)$.

sage: b=(x-1)*(x^2-2*x+2); b

$$(x-1)*(x^2-2*x+2)$$

sage: b.expand()

$$x^3 - 3*x^2 + 4*x - 2$$

Операцію розкладання на множники виконує функція factor.

Приклад 2.6. Розкласти на множники: $x^{12} - 1$.

sage: factor(x^12-1)

$$(x - 1)*(x + 1)*(x^2 - x + 1)*(x^2 + 1)*(x^2 + x + 1)*(x^4 - x^2 + 1)$$

Якщо у виразі є більш ніж одна змінна, SAGE вимагає оголошення всіх їх символьними змінними – var('x,y') або (x,y)=var('x,y').

Приклад 2.7. Розкласти на множники: $a^2 - ab - 4a + 4b$.

sage: var('a,b')

$$(a,b)$$

sage: factor(a^2-a*b-4*a+4*b)

$$(a-4)*(a-b)$$

Приклад 2.8. Розкласти на множники: $ax + ay - az + nx + ny - nz$.

sage: var('x,y,z,a,n')

$$(x,y,z,a,n)$$

sage: exp=a*x+a*y-a*z+n*x+n*y-n*

$$z-n*z-a*z+n*y+a*y+n*x+a*x$$

sage: factor(exp) або exp.factor()

$$(n+a)*(-z+y+x)$$

Для обчислення значення виразу при певних значеннях змінних потрібно даний вираз подати як відповідну функцію.

Приклад 2.9. Обчислити значення

$$\text{виразу } \sqrt[3]{x} + \frac{1}{8}\sin(10x) \text{ при } x = 2.$$

sage: f(x)=x^(1/3)+1/8*sin(10*x); f(x)

$$\sin(10*x)/8+x^(1/3)$$

sage: f(2)

$$\sin(20)/8+2^(1/3)$$

Отримати числове значення виразу дає змогу функція RR:

sage: RR(f(2))

$$1.37403920623583$$

Приклад 2.10. Обчислити значення виразу $a^2 - ab - 4a + 4b$ при $b = 2$.

sage: g(a,b)=(a^2-a*b-4*a+4*b);g(a,b)

$$-a*b+4*b+a^2-4*a$$

sage: g(a,2)

$$a^2-6*a+8$$

3.3. Побудова графічних зображень
Засобами matplotlib в SAGE можна побудувати:

- графічні примітиви (точка, стрілка, лінія, коло, круг, заповнений (зафарбований) многокутник, сфера);

- графіки функціональних залежностей, заданих аналітично, параметрично та у полярних координатах;

- правильні многогранники;

- поверхні, задані аналітично та параметрично, а також додавати підписи до графічних об'єктів.

Побудова графічних примітивів на площині.

Графічний примітив *точка* на площині визначають функції point або points. Зазначені функції не просто задають, а й будують примітив, використовуючи параметри системи координат за замовчуванням.

Приклад 3.1. Побудувати точку на площині.

sage: point((-1,2))

або


```
sage: show(point((-1,2)))
```

```
⚪
```

```
sage: a=point((-1,2)); a
```

```
⚪
```

```
sage: a=point((-1,2)); show(a)
```

```
⚪
```

```
sage: a=point((-1,2)); a.show()
```

Зазначені функції можуть використовуватися і для побудови множини точок, заданих відповідним чином.

Приклад 3.2. Побудувати дві червоні точки збільшеного розміру.

```
sage: point((-1,1),(1,-1),pointsize=30,rgbcolor='red')
```

Для побудови примітиву *стрілка* за даними координатами кінців використовується функція `arrow`.

Приклад 3.3. Побудувати стрілку за даними координатами.

```
sage: arrow((1,1),(2,2))
```

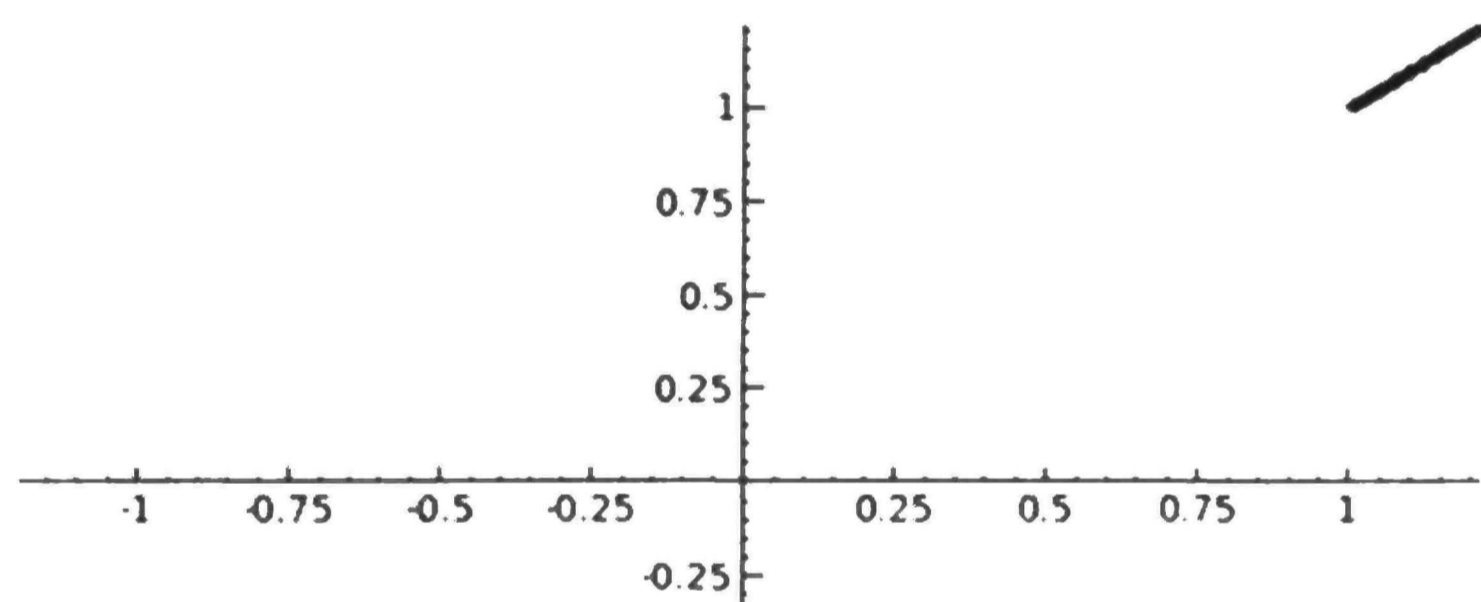


Рис. 1

Якщо уважно подивитися на результат виконання побудови, то можна помітити, що на рисунку стрілка недобудована. Для адекватного відображення слід розширити область видимості системи координат:

```
sage: show(arrow((1,1),(2,2)),xmin=-3,xmax=3,ymin=-3,ymax=3)
```

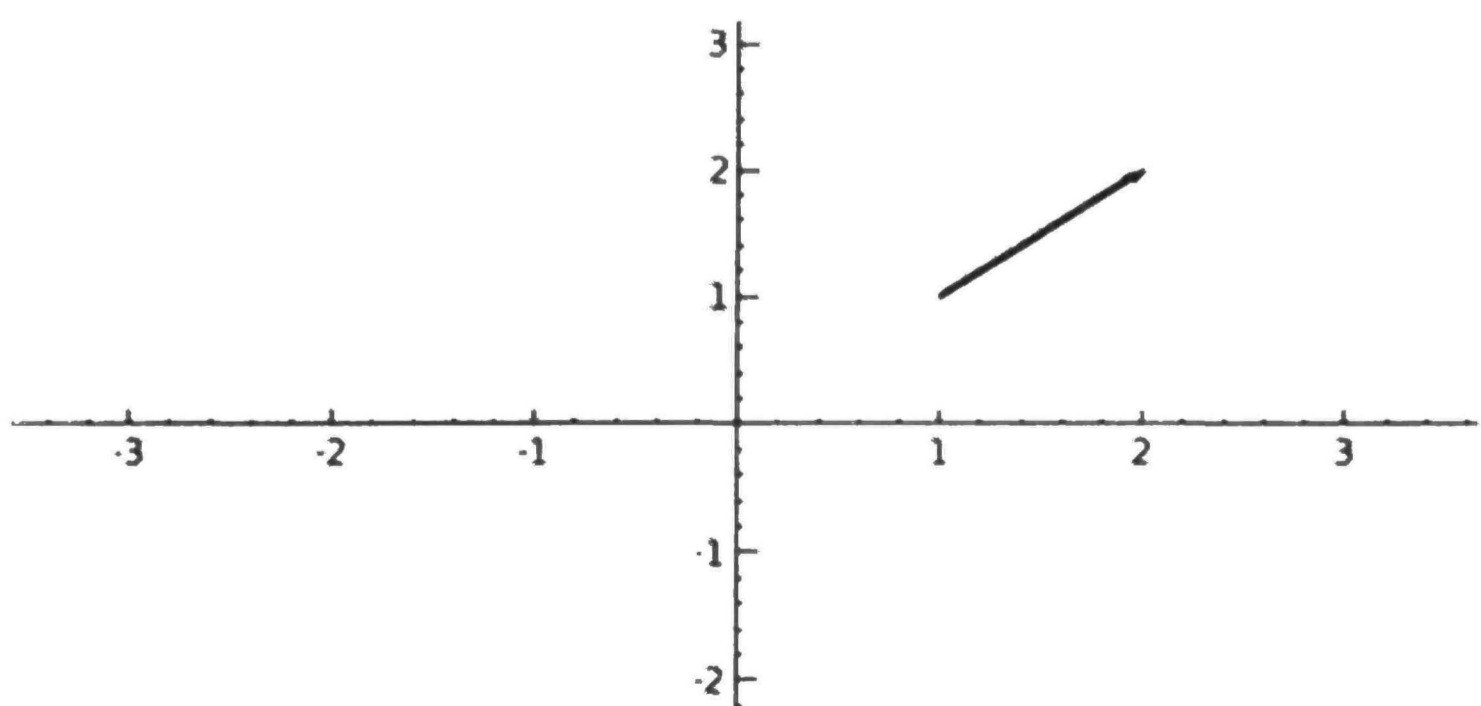


Рис. 2

Приклад 3.4. Побудувати лінію від точки $(-1,5)$ до точки $(2,-3)$.

```
sage: line((-1,5), (2,-3))
```

Приклад 3.5. Побудувати ламану у вигляді пунктирної лінії з маркерами по точках $(-2,2)$, $(-1,-3)$, $(0.5,0)$, $(2,6)$ та $(7,-4)$.

```
sage: line((-2,2),(-1,-3),(0.5,0),(2,6),
(7,-4),\
linestyle='-', marker='^')
```

Обернений слеш (`\`) використовується для перенесення команди на наступний рядок.

Для побудови примітива *коло* за координатами центра та радіусом використовується функція `circle`.

Приклад 3.6. Побудувати коло одиничного радіуса з центром у точці $(1,1)$.

```
sage: c1=circle((1,1),1); c1
```

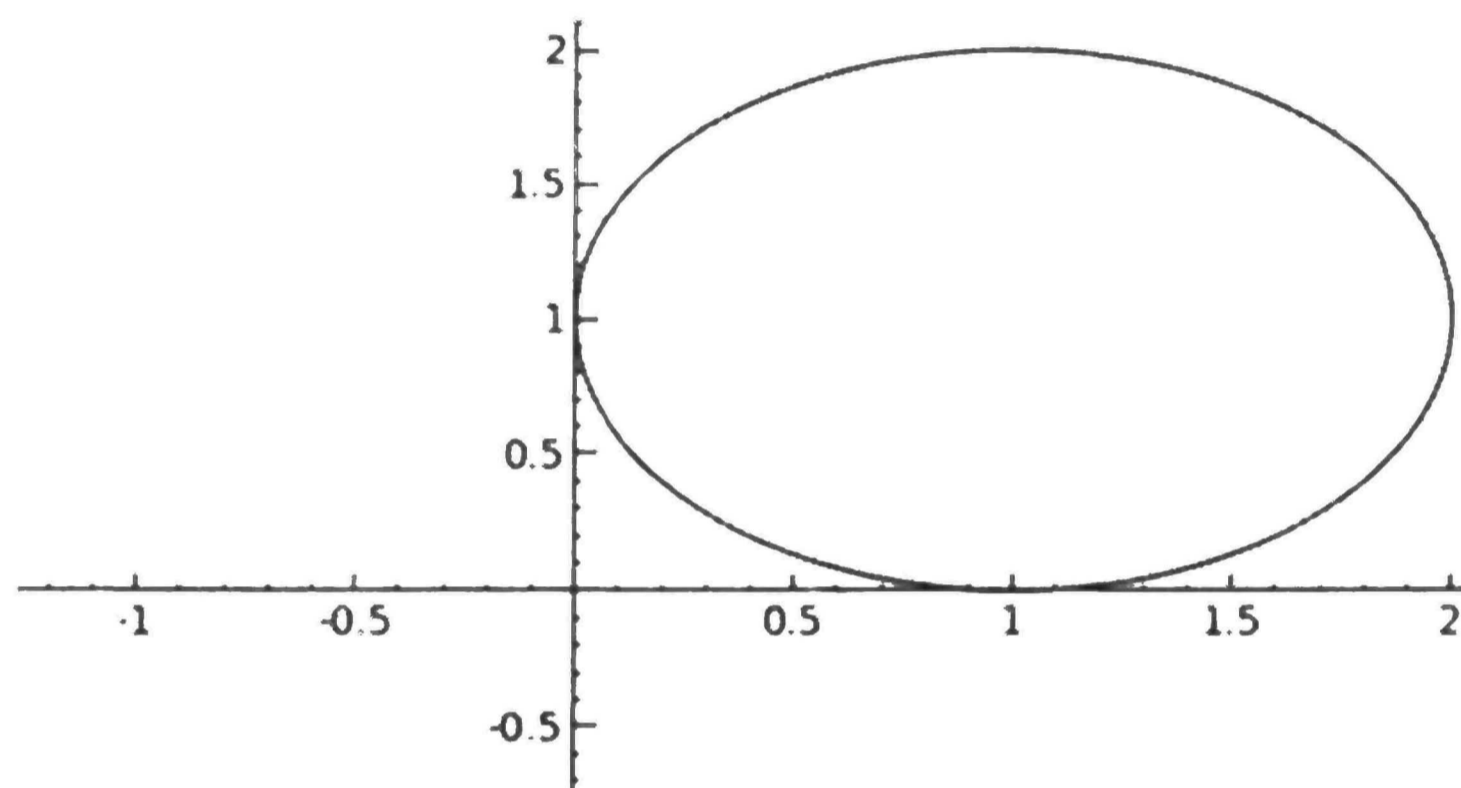


Рис. 3

Побудоване коло більше нагадує еліпс. Це пов'язано з тим, що формат зображення системи координат за замовчуванням не відповідає співвідношенню 1:1. Формат зображення можна змінити за допомогою параметра `aspect_ratio` функції `show`, встановивши його значення рівним 1:

```
sage: show(c1,aspect_ratio=1)
```

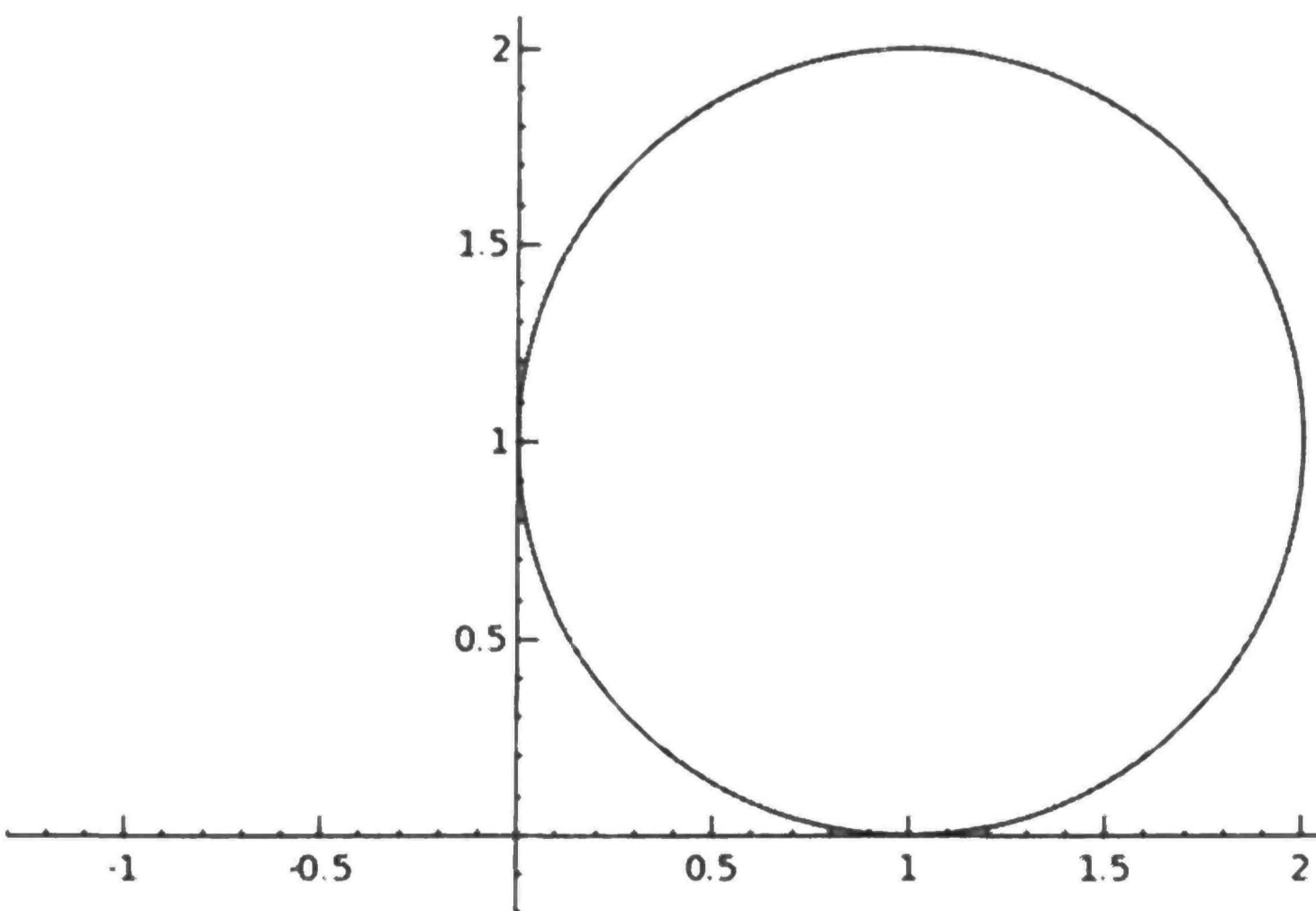


Рис. 4

Функція `circle` також може використовуватися для побудови круга, змінивши значення параметра `fill` за замовчуванням з `false` на `true`.

Приклад 3.7. Побудувати круг одиничного радіуса з центром у точці $(0,0)$.

```
sage: c2= circle((0,0),fill=true,
rgbcolor=(0.1,0.2,0.3))
```

```
sage: c2.show(aspect_ratio=1)
```

Інший спосіб побудови круга пропонує функція `disk`.

Приклад 3.8. Побудувати круг одиничного радіуса з центром у точці $(0,0)$.

```
Sage: show(disk((0,0),1,(0,2*pi)),
aspect_ratio=1);
```

Використовуючи функцію `disk`, також можна побудувати частину круга.

Приклад 3.9. Побудувати сектор круга з центром у точці $(-1,-1)$ довільного радіуса. Початкова дуга сектора відповідає куту $\pi/4$, а кінцева дуга $-3\pi/4$.

```
Sage: show(disk((-1,-1),4,(pi/4,3*
pi/4)),aspect_ratio=1)
```

Графічний примітив *многокутник* будує функція `polygon`.

Приклад 3.10. Побудувати трикутник, якщо вершини задані координатами $(1,2)$, $(5,6)$, $(5,0)$.

```
Sage: polygon([[1,2], [5,6], [5,0]],
rgbcolor=(1,0,1))
```

Приклад 3.11. Побудувати правильний шестикутник.

```
Sage: L=[[cos(pi*i/3),sin(pi*i/3)] for i
in range(6)];
```

```
sage: show(polygon(L,rgbcolor=
(1,0,1)),aspect_ratio=1)
```

Побудова графіків функціональних залежностей.

Для побудови графіків функціональних залежностей SAGE має такі функції:

`plot` – для функціональних залежностей, заданих аналітично у декартових координатах;

`parametric_plot` – для функціональних залежностей, заданих параметрично у декартових координатах;

`polar_plot` – для функціональних залежностей, заданих у полярних координатах.

Продемонструємо на прикладах можливості застосування даних функцій для побудови різноманітних графіків.

Приклад 3.12. Побудувати синусоїду на двох періодах.

```
sage: plot(sin(x),(-2*pi,2*pi),rgbcolor=
'black')
```

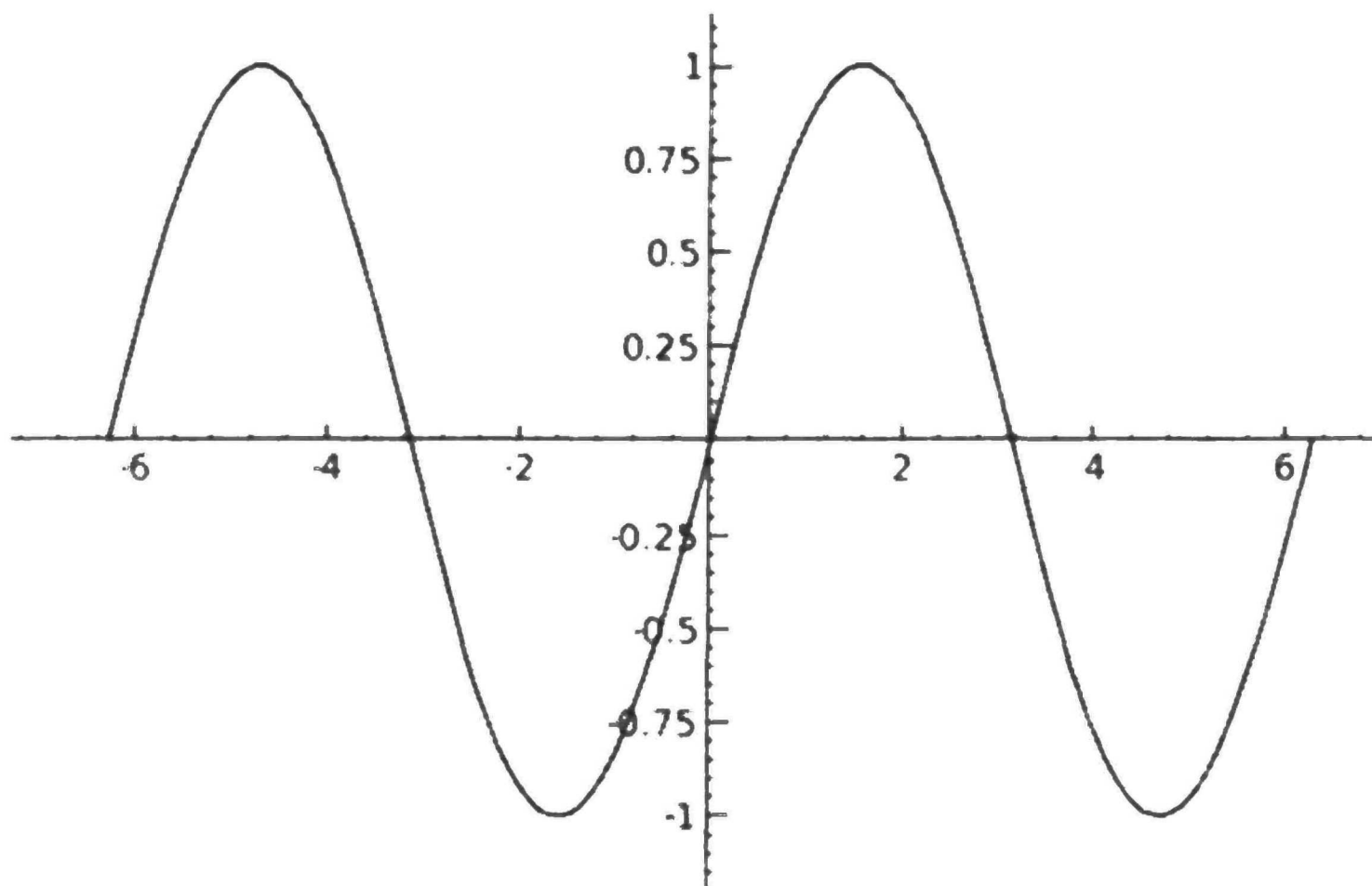


Рис. 5

Приклад 3.13. Побудувати еліпс, заданий параметрично.

```
sage: t=var('t');parametric_plot((3*sin(t),
2*cos(t)),0,2*pi)
```

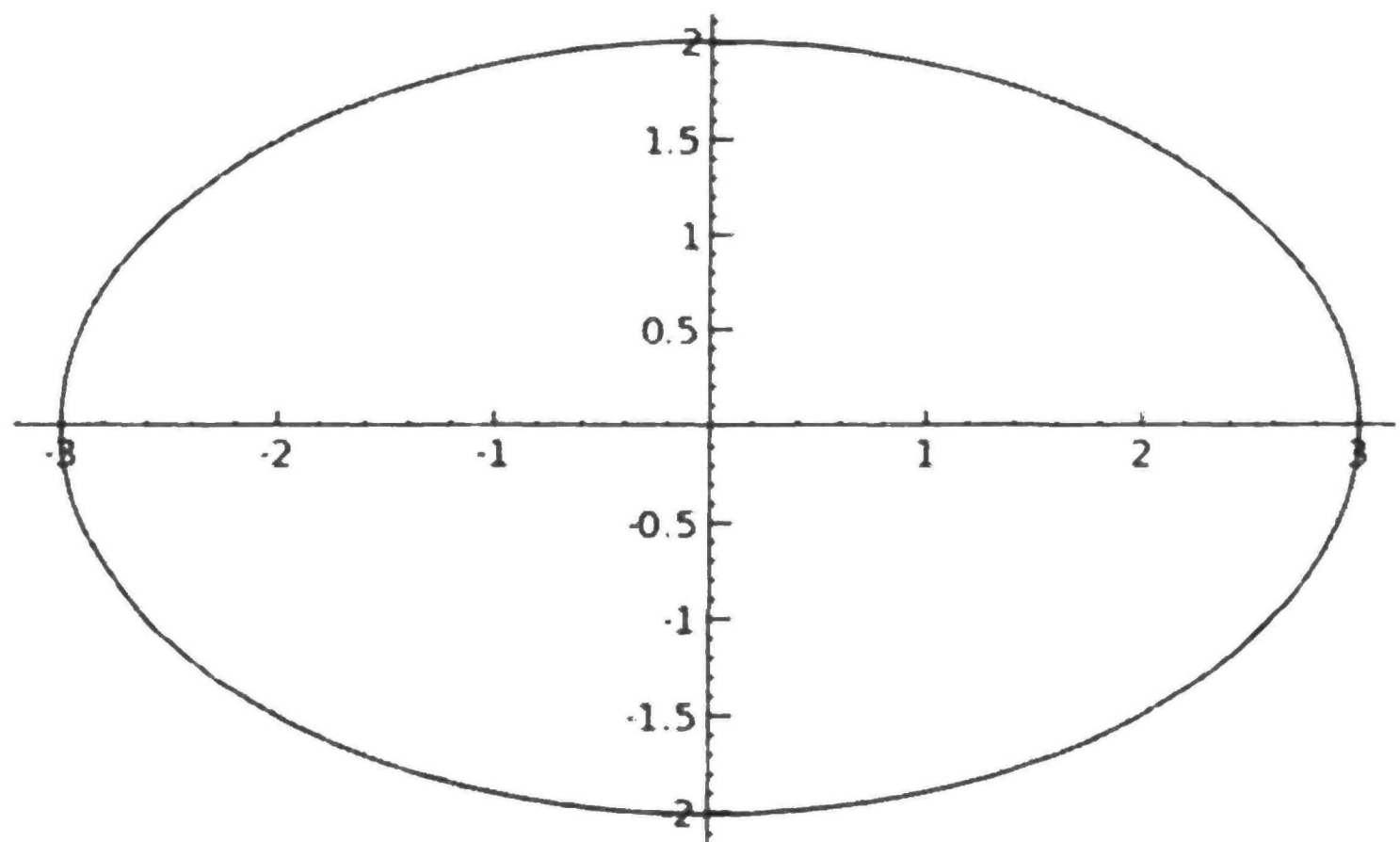


Рис. 6

Приклад 3.14. Побудувати спіраль Архімеда.

```
sage: polar_plot(3*x,0,7*pi)
```

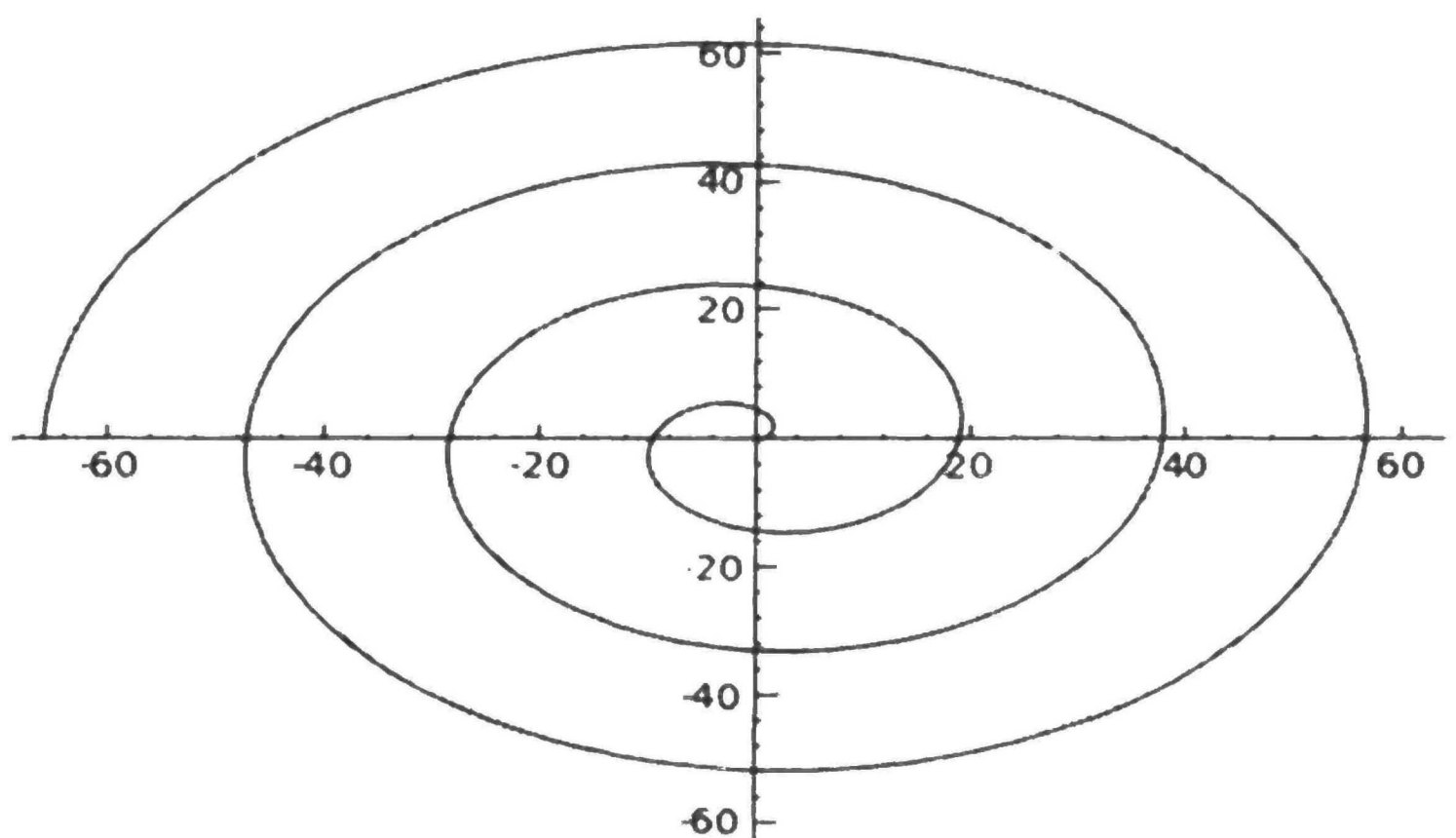


Рис. 7

Окрім того, SAGE має низку специфічних функцій для графічного відображення числових даних та побудови графіків:

`bar_chart` – для побудови стовпчикової діаграми;

`contour_plot` – для побудови контурних ліній функції від двох змінних;

`plot_vector_field` – для побудови векторного поля для двох функцій від двох змінних та інші.

Приклад 3.15. Побудувати стовпчикову діаграму для вибірки 12, 17, 19, 37, 30, 10, 8, 5, 4.

```
sage: bar_chart([12, 17, 19, 37, 30, 10, 8, 5, 4])
```

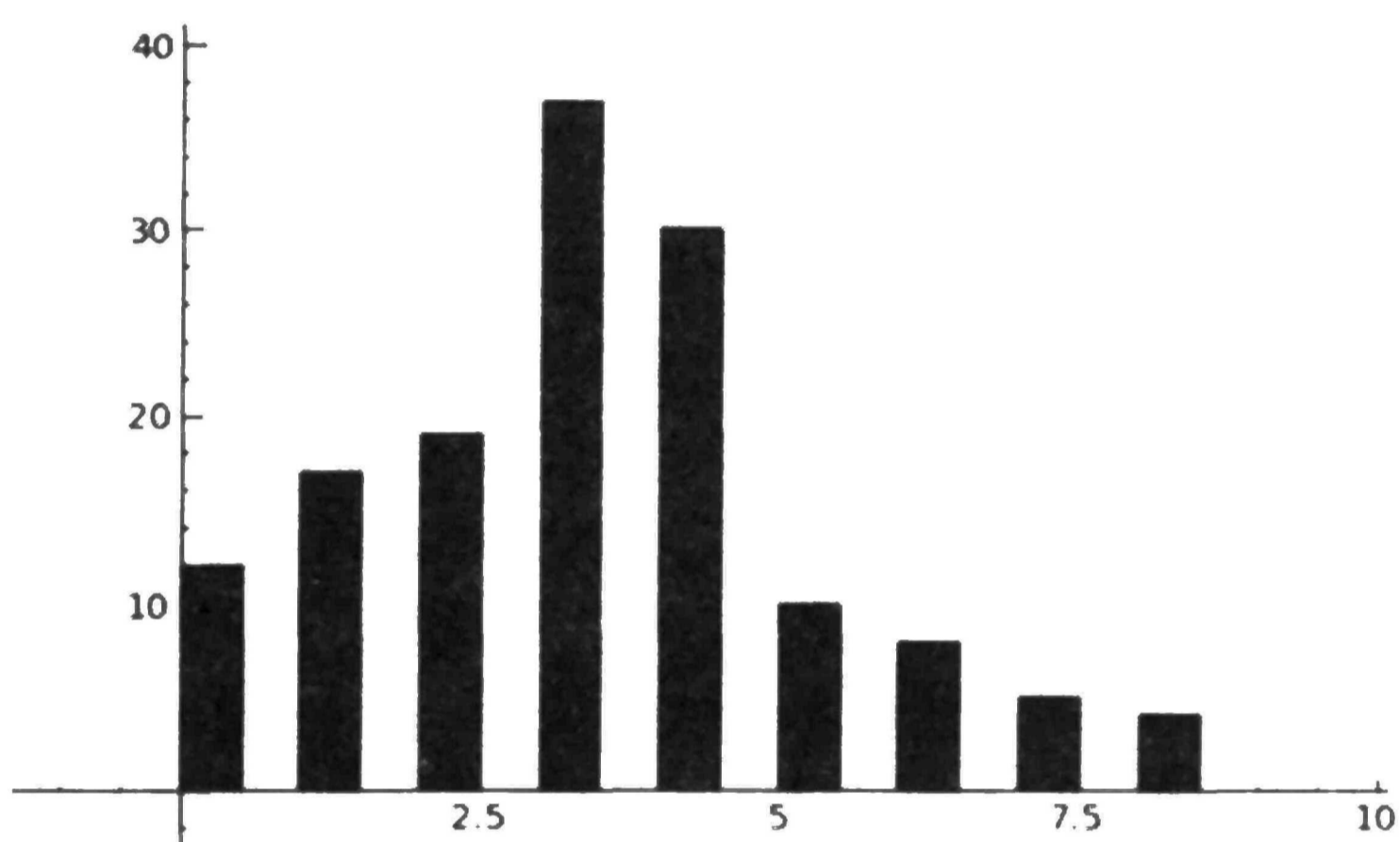


Рис. 8

Приклад 3.16. Побудувати контурні лінії функції $f(x,y) = \cos(x^3+y^2)$.

```
sage: f(x,y)=cos(x^3+y^2)
sage: contour_plot(f,(-3,6),(-3,3))
```

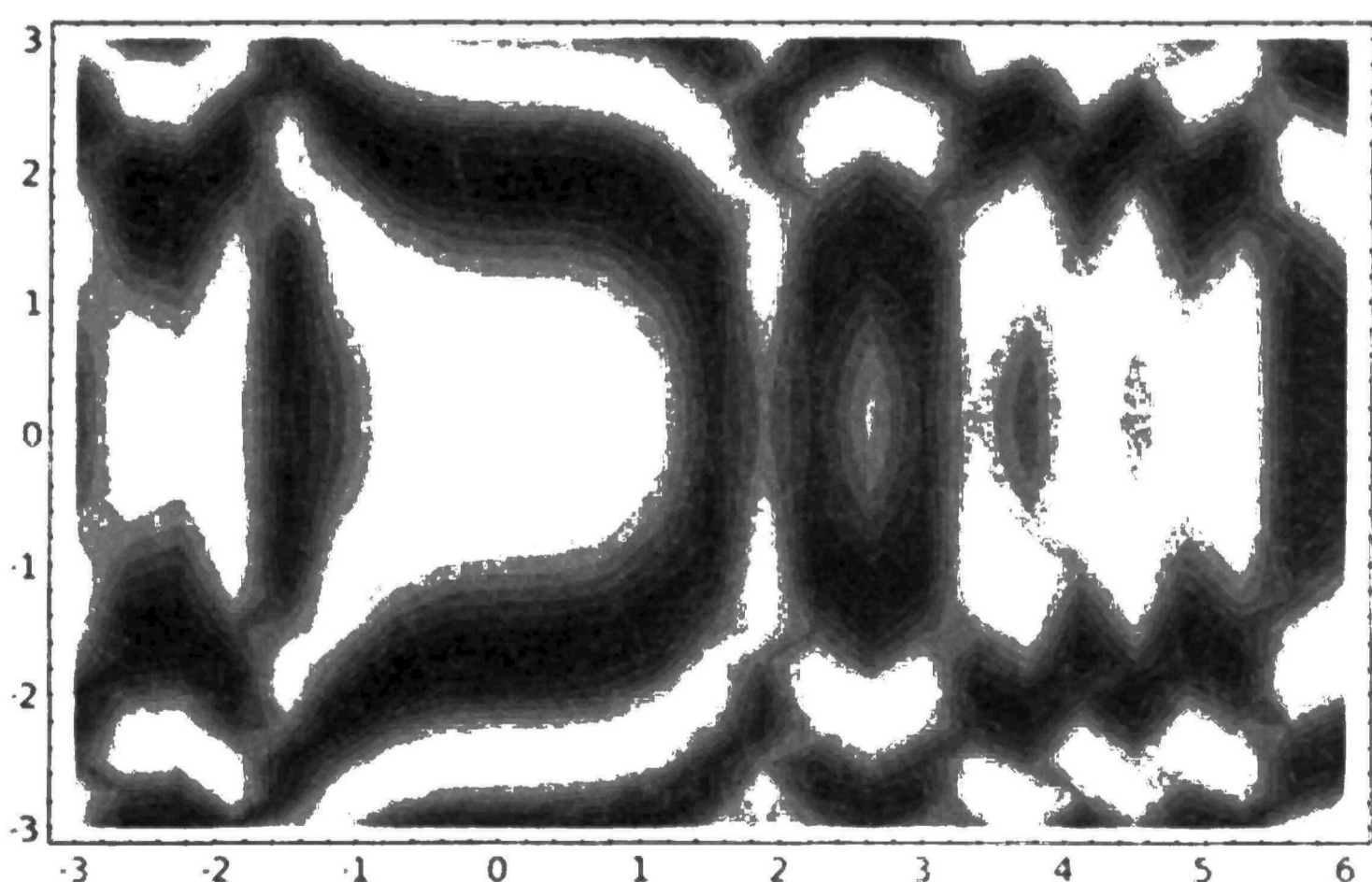


Рис. 9

Приклад 3.17. Побудувати векторне поле для функцій $f_1 = \sin(x+y)$ та $f_2 = \cos(x-y)$.

```
sage: f1(x,y)=sin(x+y)
```

```
sage: f2(x,y)=cos(x-y)
sage: plot_vector_field((f1,f2), (-3,3), (-3,3))
```

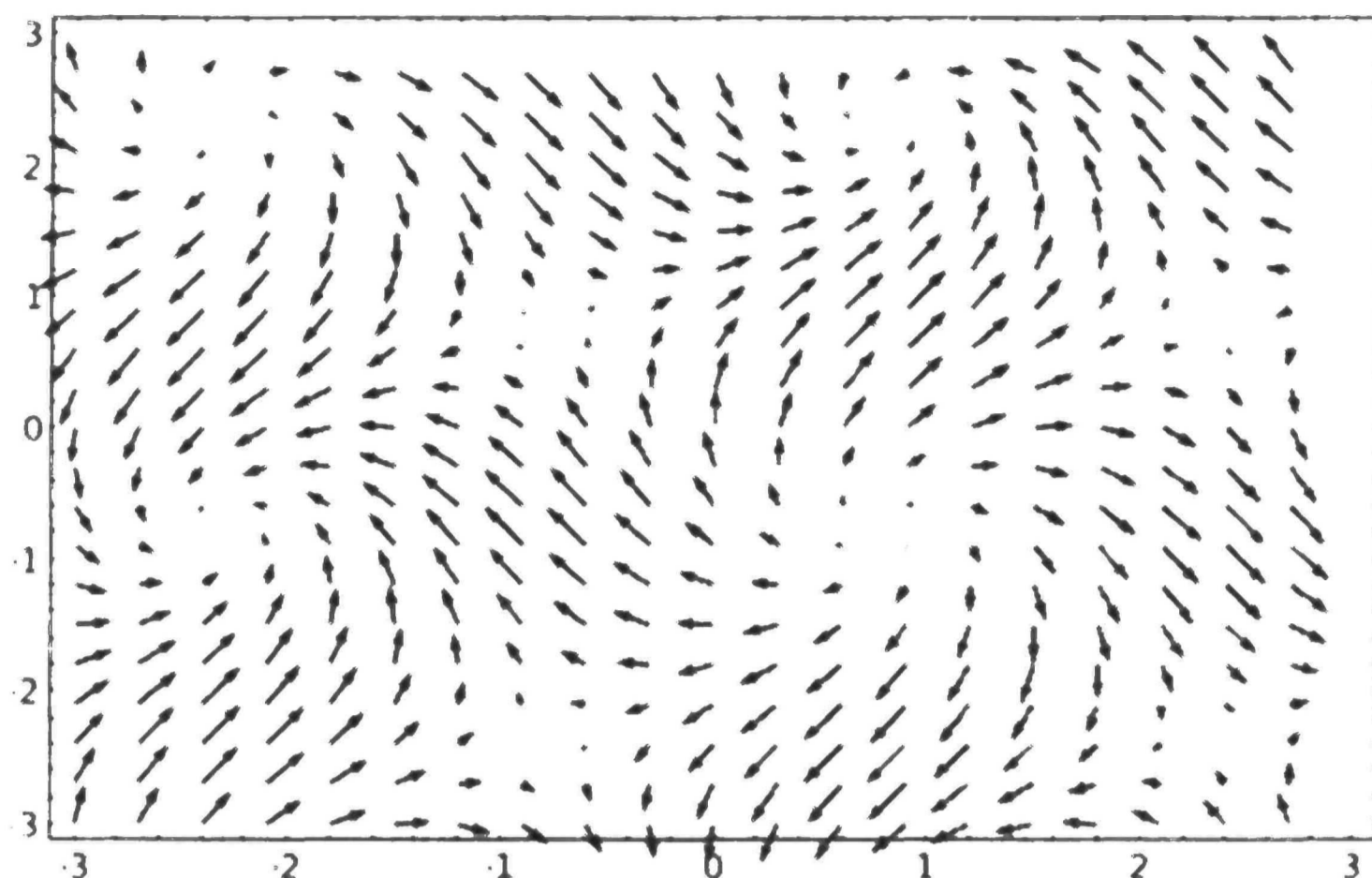


Рис. 10

Різноманітні побудови у просторі.

Точку або множину точок у просторі можна визначити за допомогою функції `point3d`.

Приклад 3.18. Побудувати точку у просторі.

```
sage: point3d((-1,2,2),size=10)
```

Приклад 3.19. Побудувати дві зелені точки у просторі, надавши їм оптимального розміру.

```
sage: point3d((-1,1,2),(1,-1,2),size=5,rgbcolor='green')
```

Для побудови ламаної у просторі слід використати функцію `line3d`, яка має певні відмінності у застосуванні параметрів.

Приклад 3.20. Побудувати ламану у просторі по точках $(1,2,3)$, $(1,0,-2)$, $(3,1,4)$, $(2,1,-2)$.

```
sage: line3d([(1,2,3), (1,0,-2), (3,1,4), (2,1,-2)],\
color='green',radius=0.02)
```

Виконати побудову сфери та правильних многогранників можна за допомогою функцій `sphere`, `tetrahedron`, `cube`, `octahedron`, `dodecahedron`, `icosahedron`.

Для побудови у просторі поверхонь, заданих аналітично або параметрично, служать функції `plot3d` та `parametric_plot3d` відповідно.

Приклад 3.21. Побудувати гіперболоїд.

```
sage: u,v=var('u,v')
```



```
sage: plot3d(u^2-v^2, (u,-1,1),
(v,-1,1),\
plot_points=[50,50])
```

Приклад 3.22. Побудувати параболоїд.

```
sage: u,v=var('u,v')
```

```
sage: parametric_plot3d([u*cos(v),
u*sin(v),u^2],\
(u,0,1),(v,0,2*pi-0.4))
```

Приклад 3.23. Побудувати конус.

```
sage: u,v=var('u,v')
```

```
sage: parametric_plot3d([u*cos(v),
u*sin(v),u],\
(u,-1,0),(v,0,2*pi-0.5))
```

Приклад 3.24. Побудувати «серце».

```
sage: u,v=var('u,v')
```

```
sage: f_x = cos(u)*(4*sqrt(1-v^2)*
sin(abs(u))^abs(u))
```

```
sage: f_y = sin(u)*(4*sqrt(1-v^2)*
sin(abs(u))^abs(u))
```

```
sage: f_z = v
```

```
sage: parametric_plot3d([f_x,f_y,f_z],
(u,-pi,pi),(v,-1,1),\
frame=False,color='red')
```

Примітки.

1. Для побудови комбінації об'єктів достатньо поставити між ними знак «+»:

```
sage: plot(sin(x),(-2*pi,2*pi),rgbcolor=
'black')+\  
plot(cos(x),(-2*pi,2*pi),rgbcolor=
```

```
hue(0.3))
```

2. Додати підписи до графічних зображень можна як у площині, так і у просторі, використовуючи функцію `text`.

3. Докладніше про можливі параметри графічних функцій можна дізнатися із контекстної довідки:

```
sage: arrow?
```

4. Параметри графічних примітивів за замовчуванням можна отримати командою `назва_примітиву.options`. Наприклад:

```
sage: circle.options
{'alpha':1, 'thickness':1, 'rgbcolor':
(0,0,1), 'fill':False}
```

5. Для збереження двовимірних побудов у файлі звертайтеся до контекстного меню зображення.

6. Анімувати зображення (організувати в ньому циклічну зміну побудов) можна за допомогою функції `animate`.

3.4. Розв'язування рівнянь та систем рівнянь

Розв'язати алгебраїчне рівняння або систему таких рівнянь у SAGE можна, використовуючи функцію `solve`.

Приклад 4.1. Розв'язати рівняння $x^2 - 1 = 0$.

```
sage: solve(x^2-1==0,x)
```

або

```
sage: solve(x^2-1,x)
```

або

```
sage: (x^2-1).solve(x)
```

```
[x == -1, x == 1]
```

Приклад 4.2. Розв'язати рівняння $x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = 0$.

```
sage: solve(x^3+2*x^2-4*x-5,x)
```

```
[x == (-sqrt(21) - 1)/2, x =
```

```
= (sqrt(21) - 1)/2, x == -1]
```

Приклад 4.3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ x^2 y + xy^2 = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ x^2 y + xy^2 = -6 \end{cases}$$

```
sage: x,y=var('x,y')
```

```
sage: solve([x^3+y^3==19,x^2*y+
x*y^2==-6],x,y)
```

```
[[x == -2, y == 3], [x == 3, y == -2]]
```

Застосовуючи функцію `solve` до рівнянь, які не можуть бути розв'язані алгебраїчно, на виході отримаємо введені рівняння. Це демонструє приклад.

Приклад 4.4. Розв'язати рівняння

$$\sin x - x - \frac{\pi}{2} = 0.$$

```
sage: eq=sin(x)-x-pi/2
```

```
sage: solve(eq==0)
```

```
[x == (2*sin(x) - pi)/2]
```

Якщо корінь рівняння не може бути визначений алгебраїчно, можна знайти його наближене значення графічно, побудувавши відповідний графік (чи графіки) за допомогою функції `plot` – відділити корінь, а потім чисельно за допомогою функції `find_root` уточнити корінь.

Приклад 4.5. Розв'язати рівняння

$$\sin x - x - \frac{\pi}{2} = 0.$$

sage: plot(eq,-10,10)

sage: find_root(eq,-5,0)

-2.309881460010057

Якщо рівняння має кілька коренів

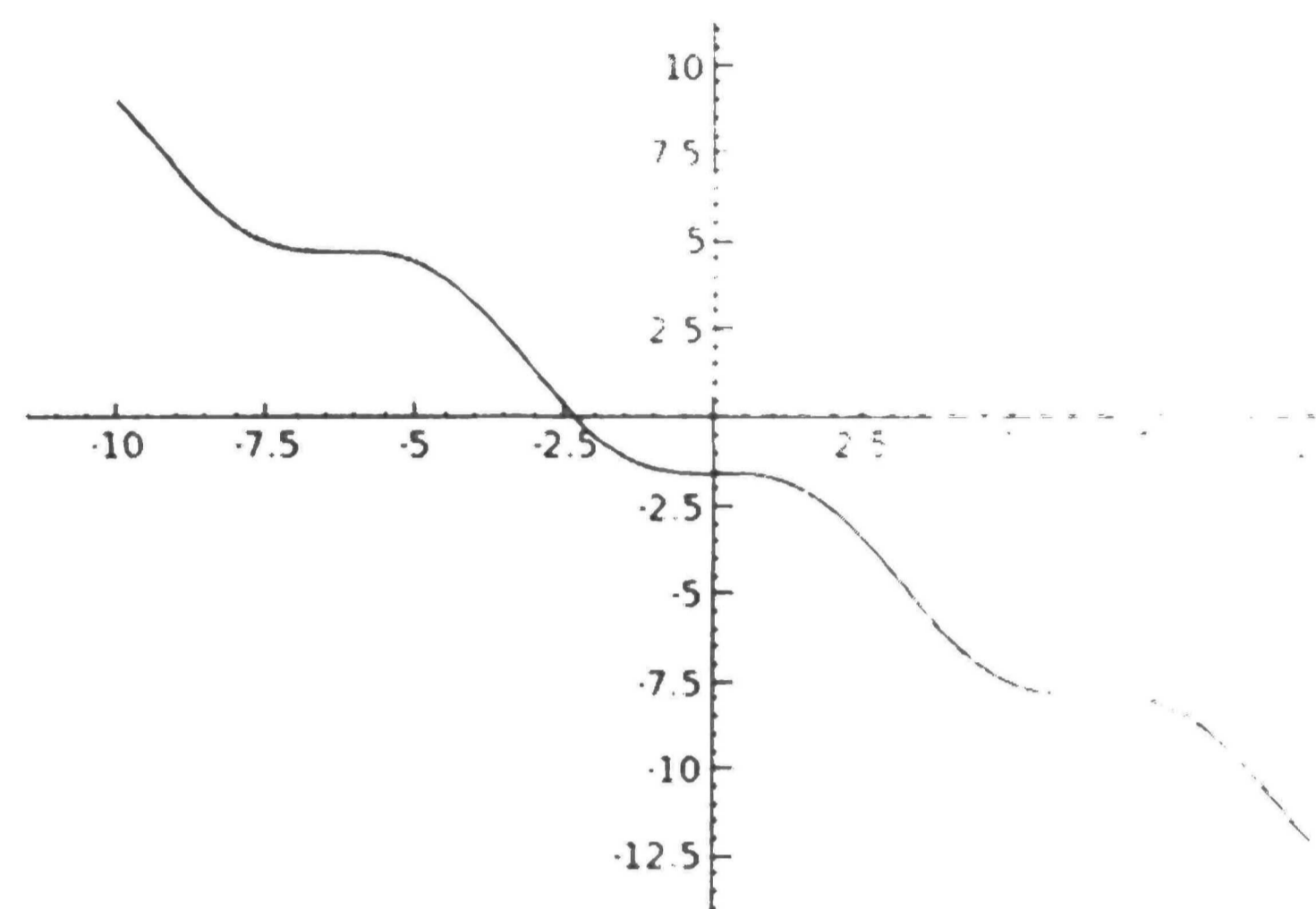


Рис. 11

(графік відповідної функції перетинає вісь Ox більш ніж в одній точці або графіки мають кілька точок перетину), функція `find_root` має бути застосована до кожного кореня окремо з вказівкою відрізка, на якому був відділений корінь.

Приклад 4.6. Розв'язати рівняння

$$|x - 3| - 3 = 0.$$

sage: solve(abs(x-3)-4,x)

[abs(x - 3) == 4]

sage: plot(abs(x-3)-4,-10,10)

sage: find_root(abs(x-3)-4,-2.5,0)

-1.0

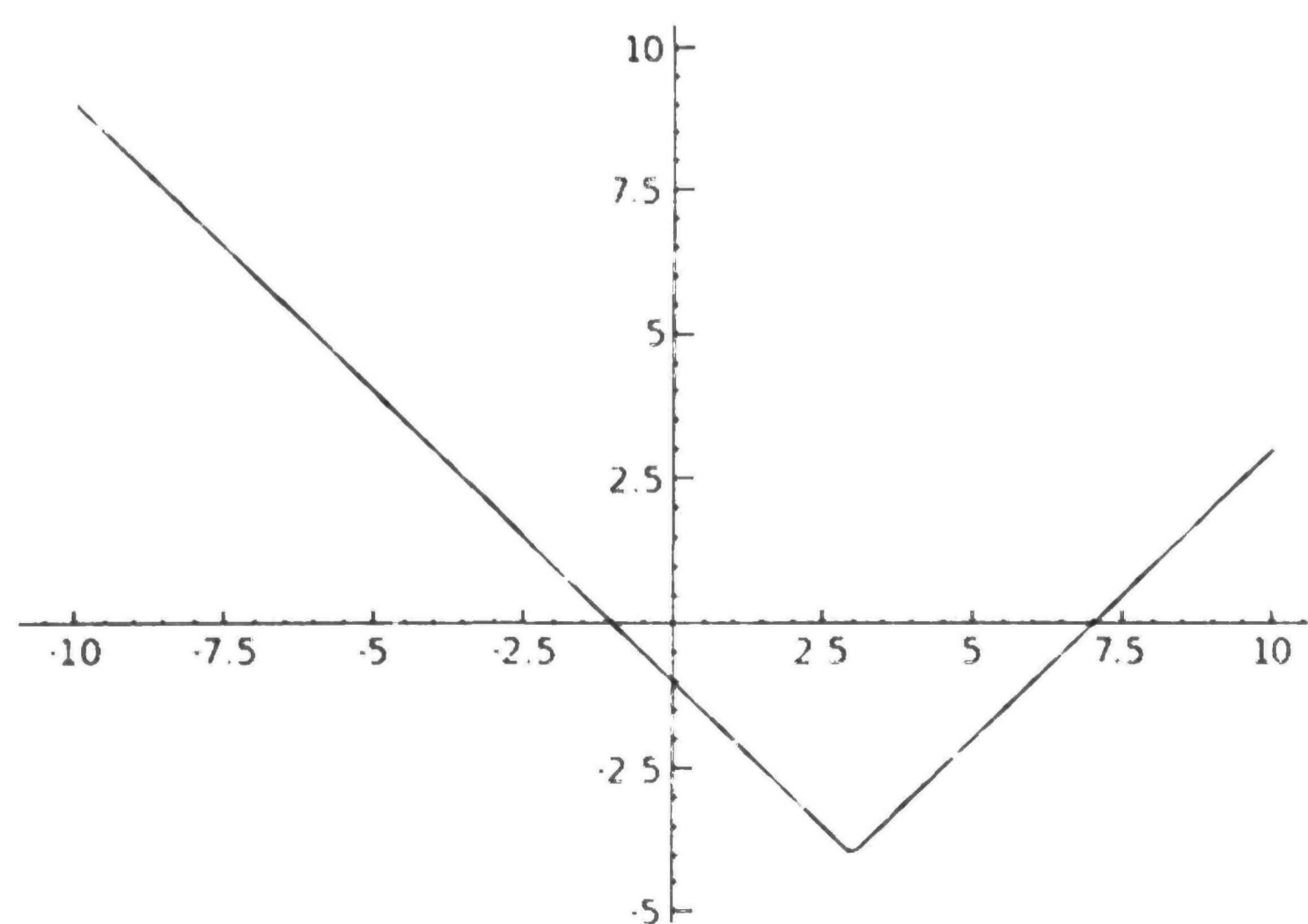


Рис. 12

Приклад 4.7. Розв'язати рівняння

$$2^{4x} - 5 \cdot 2^x + 3 = 0.$$

sage: f=2^(4*x)-5*2^x+3

sage: plot(f,-5,1)

Рис. 13

sage: print 'x1=', find_root(f,-1,0)

sage: print 'x2=', find_root(f,0,1)

x1= -0.662266966896

x2= 0.511202342796

3.5. Лінійна алгебра

Основними об'єктами лінійної алгебри є вектори та матриці. Продемонструємо на прикладах способи задання векторів та матриць в SAGE, а також виконання основних операцій над ними.

Приклад 5.1. Задати вектори $a(-1, 5, 3)$ та $b(2, -2, 0)$.

sage: a=vector([-1,5,3]);a

(-1, 5, 3)

sage: b=vector([2,-2,0]);b

(2, -2, 0)

Приклад 5.2. Над векторами a і b виконати такі операції:

а) знайти суму векторів a і b ;

б) визначити вектор c за правилом $3a - 2b$;

в) обчислити скалярний добуток векторів a і b ;

г) обчислити векторний добуток векторів a і b ;

д) обчислити довжини векторів a і b .

Розв'язування:

а) sage: a+b

(1, 3, 3)

б) sage: c=3*a-2*b; c

(-7, 19, 9)

в) sage: a*b

-12

г) sage: a.cross_product(b)

(6, 6, -8)

д) sage: abs(a)

sqrt(35)

sage: abs(b)

2*sqrt(2)

Розмірність вектора повертає функція len.

Приклад 5.3. Задати матрицю

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

sage: M=matrix([[1,2],[3,4],[5,6]]);M

[1 2]

[3 4]

[5 6]

Приклад 5.4. Задати матриці:

а) одиничну, розмірності 4;

б) нульову, розмірності 3 Ч 5;

в) діагональну, діагональними елементами якої є числа -7 і 3;

г) матрицю довільної розмірності, заповнену випадковими цілими числами.

Розв'язування:

а) sage: IM=identity_matrix(4);IM

[1 0 0 0]

[0 1 0 0]

[0 0 1 0]

[0 0 0 1]

б) sage: ZM=zero_matrix(3,5);ZM

[0 0 0 0 0]

[0 0 0 0 0]

[0 0 0 0 0]

в) sage: DM=diagonal_matrix([-7,3]);DM

[-7 0]

[0 3]

г) sage: RM=random_matrix(ZZ,5,3);RM

[1 -3 7]

[3 -2 1]

[-1 2 -1]

[-1 1 -1]

[4 10 -1]

Приклад 5.5. Виконати множення матриці:

а) на скаляр;

б) на вектор a ;

в) на вектор з координатами (-3; 4);

г) на одиничну матрицю;

д) на діагональну матрицю.

Розв'язування:

а) sage: 3*RM

[3 -9 21]

[9 -6 3]

[-3 6 -3]

[-3 3 -3]

[12 30 -3]

б) sage: M*a

Traceback (most recent call last):

...

TypeError: unsupported operand parent(s) for '*': 'Full MatrixSpace of 3 by 2 dense matrices over Integer Ring' and 'Ambient free module of rank 3 over the principal ideal domain Integer Ring'

У даному випадку система видає повідомлення про неможливість виконання операції множення матриці на вектор внаслідок невідповідності розмірностей матриці та вектора;

в) sage: M*vector([-3,4])

(5, 7, 9)

г) sage: M*IM

Traceback (most recent call last):

...

TypeError: unsupported operand parent(s) for '*': 'Full MatrixSpace of 3 by 2 dense matrices over Integer Ring' and 'Full MatrixSpace of 4 by 4 dense matrices over Integer Ring'

У даному випадку система повідомляє про неможливість виконання операції множення матриць внаслідок невідповідності їх розмірностей;

д) sage: M*DM

[-7 6]

[-21 12]

[-35 18]

Приклад 5.6. Задати довільну квадратну матрицю над кільцем цілих чисел та обчислити її детермінант.

sage: A=random_matrix(ZZ,4,4);A

[1 97 -1 -131]

[1 -1 2 -28]

[-2 1 -13 -2]

[-7 -1 -6 1]

sage: det(A)

-224895

Приклад 5.7. Задати довільну мат-

рицю над кільцем раціональних чисел та транспонувати її.

```
sage: B=random_matrix(QQ,2,4);B
```

```
[ 0 2 0 0]
```

```
[ 0 1/2 1 2]
```

```
sage: B.transpose()
```

```
[ 0 0]
```

```
[ 2 1/2]
```

```
[ 0 1]
```

```
[ 0 2]
```

Приклад 5.8. Для матриць

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ та } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

знайти обернені матриці, якщо це можливо.

Розв'язування.

```
sage: C=matrix([[1,1,1,1],[2,2,2,2],
```

```
[3,-3,-1,1],\
```

```
[2,-5,1,7]));C
```

```
[ 1 1 1 1]
```

```
[ 2 2 2 2]
```

```
[ 3 -3 -1 1]
```

```
[ 2 -5 1 7]
```

```
sage: C^-1
```

```
Traceback (most recent call last):
```

```
...
```

ZeroDivisionError: input matrix must be nonsingular

У даному випадку система повідомляє про помилку виконання операції пошуку матриці, оберненої до даної, оскільки її детермінант дорівнює 0.

```
sage: D=matrix([[1,-1,2,3],[0,1,3,4],
```

```
[-2,5,1,-4],\
```

```
[0,0,2,-1]));D
```

```
[ 1 -1 2 3]
```

```
[ 0 1 3 4]
```

```
[-2 5 1 -4]
```

```
[ 0 0 2 -1]
```

```
sage: D.inverse()
```

```
[ 31/12 -11/8 19/24 -11/12]
```

```
[ 11/12 -3/8 11/24 -7/12]
```

```
[ -1/12 1/8 -1/24 5/12]
```

```
[ -1/6 1/4 -1/12 -1/6]
```

ЛІТЕРАТУРА

1. Державна програма «Інформаційні та комунікаційні технології в освіті і науці» на 2006 — 2010 роки (http://www.mon.gov.ua/laws/KMU_1153.doc).

2. Євтєєв В. М., Семеріков С. О., Теплицький І. О. Досвід вивчення інтерактивних Web-технологій в середній школі та педагогічному ВНЗ // Рідна школа. — 2004. — № 2. — С. 46–47.

3. Кухаренко В. М. Експеримент «Дистанційне навчання для середньої школи» // Комп'ютер у школі та сім'ї. — 2007. — № 5. — С. 28–31.

4. Морзе Н. В. Особливості організації навчального процесу учнів в системі дистанційного навчання // Наука і сучасність: Зб. наук. праць. — К.: Логос, 1999. — Вип. № 2. — Ч. 4 (педагогічні науки). — С. 64–71.

5. Семеріков С. О., Теплицький І. О., Шокалюк С. В. Нові засоби дистанційного навчання інформаційних технологій математичного призначення // Вісник. Тестування і моніторинг в освіті. — 2008. — № 2. — С. 42–50.

6. Смирнова-Трибульська Є. М., Сташенко В. В. Досвід використання дистанційного навчання в школі // Комп'ютер у школі та сім'ї. — 2007. — № 7. — С. 19–23.

7. Шокалюк С. В. Основи роботи в SAGE / За ред. акад. АПН України М. І. Жалдака. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2008. — 64 с.

8. Шокалюк С. В. Програмна підтримка навчальних математичних досліджень засобами систем дистанційного навчання // Комп'ютерне моделювання та інформаційні технології в науці, економіці та освіті: Зб. наук. праць. — Від. ред. проф. В. М. Соловйов. — Кривий Ріг: КЕІ ДВНЗ «КНЕУ ім. В. Гетьмана», 2007. — С. 208–210.

9. Granville, W. A. Differential Calculus and SAGE. — 2008. — 275 p.

10. Stein, W. Sage Reference Manual. — 2008. — 3460 p.

11. Stein, W. Sage Tutorial: www.sagemath.org. — CreateSpace, 2008. — 100 p.