

Комп'ютерне моделювання механічних рухів у середовищі електронних таблиць

Ілля ТЕПЛИЦЬКИЙ, Сергій СЕМЕРІКОВ

Розроблений авторами факультативний курс «Елементи комп'ютерного моделювання» [7] передбачає ознайомлення учнів з основними принципами побудови й дослідження математичних моделей, навчання найпоширеніших прийомів і методів такої роботи, формування культури дослідницької діяльності засобами ЕОТ. Матеріал посібника включає широкий спектр задач курсу фізики, а подані приклади ілюструють деякі аспекти авторської методики.

Спостережувані нами механічні рухи навколишніх тіл — це результат їх взаємодії з іншими тілами, своєрідна гра діючих на них сил. То ж давайте простежимо за цією грою — адже правила її, якими в механіці є закони Ньютона, нам відомі.

З усього розмаїття механічних рухів ми розглянемо приклади рухів тіл під дією *змінних сил*, а саме таких, що залежать від *координат* (сила пружності, сила всесвітнього тяжіння) та від *швидкості* (сила опору, аеродинамічна сила). Пропоновані нижче приклади виходять за межі шкільного курсу фізики, і тому для учнів є досить складними об'єктами для дослідження. Головна особливість, яка відрізняє їх від переважної більшості задач шкільного курсу фізики, полягає в тому, що *під дією змінних сил тіла набувають змінних прискорень*. За таких умов швидкість руху вже не є лінійною функцією часу, а змінюється у складніший спосіб. Внаслідок цього точне обчислення координат тіла, його прискорення й швидкості у будь-який момент часу засобами елементарної ма-

тематики стає неможливим. Проте це утруднення можна подолати.

Першим об'єктом дослідження оберемо *коливальний рух тіла на пружині з урахуванням опору середовища*. При цьому спочатку розглянемо силу опору у вигляді сили в'язкого, а потім — сухого тертя. Тестування й налагодження математичної моделі такого руху проведемо для випадку дії на тіло лише однієї сили — сили пружності. Закономірності такого руху вивчаються в шкільному курсі фізики й добре відомі. Одночасно з тестуванням обговоримо важливе питання про шляхи підвищення точності комп'ютерних обчислень.

Наступним об'єктом вивчення стане *рух тіла під дією сили всесвітнього тяжіння* (рух планети навколо Сонця або супутника навколо планети та рух компонентів у системах «Подвійна зоря»).

Сюжетною основою останньої моделі є *задача про «м'яку посадку» на Місяць*, що свого часу (у 80-ті роки ХХ ст.) обійшла сторінки низки науково-популярних журналів [9].

Дослідження кожного об'єкта виконуватимемо в такій послідовності.

1. Проаналізуємо фізичний процес і постановку задачі. З цією метою на основі деяких припущень формалізуємо умову задачі, яку супроводимо пояснювальним малюнком, тобто складемо змістовну модель досліджуваного явища.

2. Від змістовної моделі перейдемо до моделі математичної, тобто запишемо у вигляді математичних співвідношень залежності між величинами, що характеризують досліджуваний рух.

3. Складемо алгоритм роботи з моделлю.

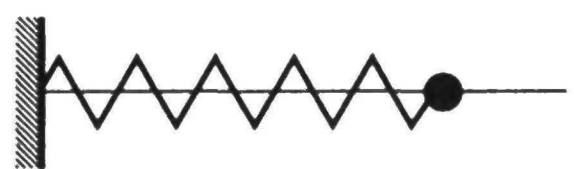
4. Проведемо обчислювальний експеримент.

5. На основі аналізу його результатів дамо необхідні інтерпретації та зробимо відповідні висновки.

Інформацію про об'єкт дослідження (вхідні дані та результати) виводитимемо у вигляді таблиць і відповідних графіків. У зв'язку з цим *середовищем для моделювання оберемо електронні таблиці*. Обґрунтування такого вибору подано в [4 — 7].

І. Рух тіла під дією сили пружності з урахуванням опору середовища

На змашений горизонтальний стержень надінемо кулю, яка може ковзати вздовж нього, і циліндричну пружину, один кінець якої закріпимо на стержні, а інший — на кулі (мал. 1).



Мал. 1

На початку спостереження пружина не деформована, і куля перебуває в спокої. Відведемо кулю в нове положення й відпустимо. Здійснивши кілька коливань зі спадаючою амплітудою, куля зупиняється в положенні рівноваги.

Фізичний аналіз процесу. Під час зміщення кулі від положення рівноваги пружина деформується, і в ній виникає сила пружності, яка згідно із законом Гука пропорційна деформації Δl і напрямлена до положення рівноваги (тобто проти деформації):

$$F_{\text{пр}} = -k\Delta l,$$

де k — жорсткість пружини.

Сила пружності діє на кулю й на пружину і надає прискорення обом цим тілам. Аналіз загального випадку коливань тіла (кулі) з масою m_1 під дією пружини з масою m_2 є не простою задачею [1, 36 — 37].

Вдамося до ідеалізації і приймемо деякі припущення, які спрощують завдання.

Припущення 1. Пружина є однорідною, тобто фізичні властивості її однакові вздовж усієї довжини. Це дає змогу вважати жорсткість k величиною сталою, незалежною від довжини.

Припущення 2. Вважатимемо пружину невагомою. Ця вимога задовольняється виконанням умови $m_{\text{пруж}} \ll m_{\text{кулі}}$, тобто приймемо, що вся маса системи зосереджена в кулі.

Сила опору залежить від швидкості тіла. Оскільки така залежність є характерною для рухів тіл у в'язких середовищах, її називають *силою в'язкого тертя*. В нашому прикладі вона може бути зумовлена ковзанням кульки вздовж змащеного стержня. З експериментальних досліджень відомо, що за малих швидкостей руху сила опору пропорційна швидкості, а за великих — квадрату швидкості. Вважаючи швидкість тіла невеликою, приймемо ще одне припущення.

Припущення 3. Сила опору середовища пропорційна швидкості тіла:

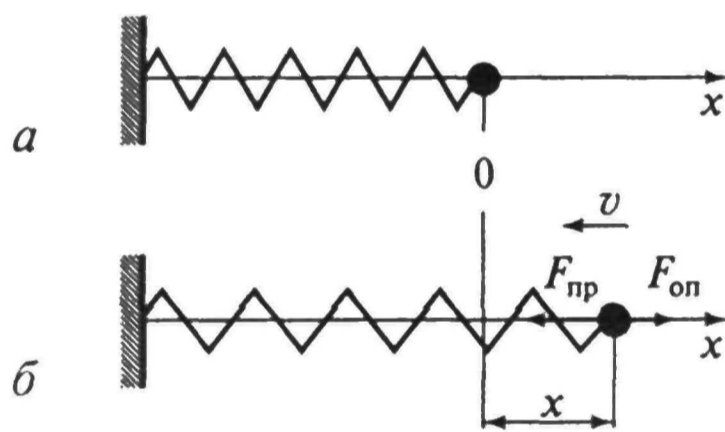
$$F_{\text{оп}} = -rv,$$

де r — стала, що називається *коефіцієнтом опору* і залежить від фізичних властивостей се-

редовища, форми і розмірів рухомого тіла.

Постановка задачі. Створення змістовної моделі. Формалізуємо умову. Нехай тіло з масою m , що з'єднане з невагомою пружиною, здійснює коливання вздовж горизонтального стержня. Враховуючи опір середовища, встановити характер руху тіла, тобто знайти відповіді на запитання про: 1) положення й швидкість тіла у будь-який момент часу; 2) період його коливання; 3) характер залежності амплітуди коливання від часу.

Для визначення положення тіла достатньо однієї координатної осі, яку спрямуємо в бік початкового відхилення тіла (мал. 2, а). На мал. 2, б зображено стан тіла в деякий довільний момент часу.



Мал. 2

Математична модель. Таким чином, сила пружності в довільний момент часу визначатиметься виразом $F_{\text{пр}x} = -kx$, де x — координата тіла, а сила опору $F_{\text{оп}x} = -rv_x$.

Рівнодійна сил пружності й опору надає тілу прискорення

$$a_x = \frac{F_{\text{пр}x} + F_{\text{оп}x}}{m},$$

або

$$a_x = -\frac{kx + rv_x}{m}. \quad (1)$$

Під час руху тіла змінюються його координата x і проекція швидкості v_x . Це спричиняє відповідну зміну прискорення, що видно з останнього виразу.

Рівняння (1) є математичною моделлю коливального руху тіла на пружині з урахуванням сили опору середовища.

Попереднє обговорення алгоритму роботи з моделлю. Та-

ким чином, ми маємо дослідити рух із прискоренням, яке змінюється із часом. Для розв'язування цієї задачі скористаємося числовим методом, тобто виконаємо розв'язування за допомогою покрокових обчислень. Головна ідея цього методу полягає у заміні складного неперервного руху послідовністю окремих рівноприскорених рухів.

Розіб'ємо весь час руху тіла на достатньо малі інтервали Δt такі, щоб протягом кожного з них значення діючих на тіло сил могло б вважатися сталим, тобто зміна прискорення була б настільки малою, що рух можна вважати рівноприскореним. Зміна прискорення відбуватиметься стрибкоподібно на початку наступного інтервалу Δt . Тоді $a_{0x} = a_{1x}$, де a_{1x} — проекція вектора прискорення від моменту часу $t = 0$ і аж до моменту $t = 0 + \Delta t$.

Спочатку обчислимо прискорення a_{0x} у початковий момент $t = 0$:

$$\begin{aligned} a_{0x} = a_{1x} &= -\frac{k}{m}x_0 - \frac{rv_{0x}}{m} \\ &= -\frac{kx_0 + rv_{0x}}{m}. \end{aligned}$$

Потім обчислимо швидкість v_{1x} наприкінці першого інтервалу часу Δt . Для рівноприскореного руху

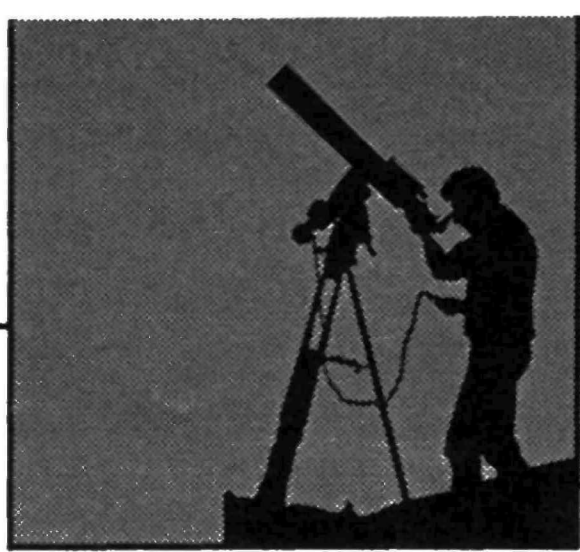
$$v_{1x} = v_{0x} + a_{1x}\Delta t,$$

де v_{0x} — проекція вектора швидкості у початковий момент часу $t = 0$.

Зауваження 1. Під час обчислення швидкості наприкінці будь-якого i -го інтервалу часу Δt ми й надалі використовуватимемо значення прискорення з попереднього ($i - 1$)-го інтервалу:

$$v_{ix} = v_{(i-1)x} + a_{(i-1)x}\Delta t,$$

де $v_{(i-1)x}$ — кінцева швидкість тіла на попередньому інтервалі Δt , яка одночасно є початковою швидкістю на даному інтервалі часу.



НОВІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ

Нове положення тіла (нову координату) наприкінці першого інтервалу Δt знайдемо за рівнянням

$$x_1 = x_0 + v_{1x} \Delta t.$$

Зауваження 2. Під час обчислення координати наприкінці будь-якого інтервалу часу Δt використовуватимемо значення координати з попереднього інтервалу, а швидкості — з поточного, оскільки її значення на цей момент буде вже обчислене:

$$x_i = x_{i-1} + v_{ix} \Delta t.$$

Маючи нові значення швидкості v_i і координати x_i , на наступному кроці знову можна визначити прискорення:

$$a_{(i+1)x} = \frac{kx_i + rv_{ix}}{m}.$$

У такий спосіб починатимемо кожний черговий етап обчислень.

Відповідно до зауважень 1 і 2 повторюватимемо п. 3 — 5 n разів, де $n = t_{\text{мод}}/\Delta t$. Тут $t_{\text{мод}}$ — час моделювання, який ми визначаємо самі, обираючи тривалість інтервалу часу Δt і відповідну кількість рядків таблиці.

Стосовно вибору часу моделювання учням треба пояснити, що найчастіше це такий час, із закінченням якого стає зрозумілою тенденція процесу. Наприклад, припиняються помітні зміни досліджуваних величин (перехід до рівноважного або стаціонарного стану); повторюється характер змін досліджуваних величин (процес є періодичним); процес вимушено переривається внаслідок досягнення граничних умов (зокрема, вільне падіння тіла) тощо.

Значення інтервалу Δt має забезпечувати: 1) необхідну точність обчислень; 2) стійкість алгоритму роботи моделі.

Зауваження 3. Останній вираз для обчислення нової координати має відверто наближений характер, адже він справджується лише для рівномірного

руху. Ось чому цей вираз тим точніший, чим менший інтервал Δt . Саме тому інтервал Δt має бути настільки малим, щоб за цей час швидкість не змінювалася б помітним чином. Проте виявляється, що цей вираз може бути достатньо точним, навіть коли інтервал Δt не зникаюче малий.

Таким чином, суть алгоритму досить проста. Послідовність розрахунків можна подати циклічною схемою:

повторювати n разів: прискорення → швидкість → координата.

Остаточний алгоритм

1. Підготувати таблицю для введення даних та виведення результатів. перший її рядок заповнити іменами змінних.

2. Увести вхідні дані й початкові умови: заповнити стовпець E («Дано:») іменами змінних, а стовпець F — їх числовими значеннями (табл. 1).

3. Заповнити другий рядок (для початкового моменту часу $t = 0$) посиланнями на відповідні комірки стовпця F :

$$t = 0; a_x = -\frac{k}{m}x_0 - \frac{rv_{0x}}{m};$$

$$v_x = v_0; x = x_0.$$

Таблиця 1

	A	B	C	D	E	F
1	t	a_x	v_x	x	Дано:	
2					$x_0, \text{м} =$	
3					$v_{0x}, \text{м/с} =$	
4					$\Delta t, \text{с} =$	
5					$m, \text{кг} =$	
6					$k, \text{Н/м} =$	
7					$r, \text{кг/с} =$	
...	

Комірки таблиці матимуть такий уміст:

Комірка	Формули / Числа
A2	0
B2	$=-(\$F\$6*\$F\$2+\$F\$7*\$F\$3)/\$F\5
C2	$=\$F\3
D2	$=\$F\2

4. Заповнити третій рядок (для кінця першого інтервалу Δt , тобто для моменту часу $t_i = t_{i-1} + \Delta t$, де $i = 1$):

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t;$$

$$a_{ix} = -\frac{k}{m}x_{i-1} - \frac{rv_{(i-1)x}}{m};$$

$$v_{ix} = v_{(i-1)x} + a_{ix}\Delta t;$$

$$x_i = x_{i-1} + v_{ix}\Delta t.$$

Відповідно у таблиці:

Комірка	Формули / Числа
A3	$=A2+\$F\4
B3	$=-(\$F\$6*D2+\$F\$7*C2)/\$F\5
C3	$=C2+B3*\$F\4
D3	$=D2+C3*\$F\4

5. Для заповнення наступних рядків п. 4 повторювати $(n+2)$ разів копіюванням третього рядка у наступні, де $n = \frac{t_{\text{мод}}}{\Delta t}$.

Тестування моделі. Як було зазначено вище, виконаємо тестування моделі для випадку дії на тіло однієї лише сили пружності. З метою виключення з розгляду сили опору покладемо, що $r = 0$. В такому разі

$$a_x = -\frac{kx}{m} = -\frac{k}{m}x. \quad (1^*)$$

Вираз (1^*) є математичною моделлю руху тіла під дією сили пружності.

Обчислювальний експеримент. Задамо початкові умови для руху тіла з масою $m = 100$ г, прикріпленого до пружини із жорсткістю $k = 40$ Н/м, і в початковий момент відведеного від положення рівноваги на відстань $x_0 = 1$ см:

$$t_0 = 0; x_0 = 0,01 \text{ м}; v_0 = 0;$$

$$k = 40 \text{ Н/м}; m = 0,1 \text{ кг}.$$

Тривалість інтервалу часу Δt візьмемо рівною $0,01$ с, а час моделювання — 1 с. Тоді кількість рядків таблиці становитиме

$$n = \frac{1}{0,01} + 2 = 102.$$

Фрагмент результатів обчислень і відповідний графік залежності координати від часу $x = x(t)$ (мал. 3) подано в табл. 2.

Аналізуючи за таблицею результати моделювання, можна

НОВІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ



простежити картину руху тіла: спочатку воно перебуває у стані спокою, потім поступово набуває швидкості в бік положення рівноваги ($v_x < 0$), що спричиняє зменшення його відстані від положення рівноваги. При цьому, хоча прискорення й стає меншим, швидкість продовжує зростати. У міру наближення до положення рівноваги ($x = 0$) прискорення стає все меншим, швидкість зростає все повільніше аж до точки $x = 0$, в яку тіло приходить приблизно через 0,08 с після початку руху. В цей момент пружина недеформована, і на тіло не діє сила пружності. Маючи деяку швидкість, тіло за інерцією рухатиметься далі, але тепер усе буде навпаки: координата тіла стане від'ємною, а проекція прискорення — додатною. Швидкість почне зменшуватися до нуля.

Розглянемо питання про точність обчислень у побудованій моделі. Зі шкільних курсів математики й фізики відомо, що точним аналітичним розв'язком задачі про рух тіла під дією сили пружності за заданих початкових умов ($x = 0$ при $t = 0$) є функція

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t.$$

Завдання. Для порівняння результатів моделювання (стовпець D) з точними значеннями (згідно з наведеною формулою) створіть у таблиці два додаткові стовпці, в яких обчислюватимуться значення x

за формулою (стовпець E) і різниця $x - x_{\text{точ}}$ (стовпець F), як це показано в табл. 3.

Виявляється, що в межах точності наших розрахунків (три десяткові розряди) відповідність, на жаль, не є задовільною: розбіжність сягає 12 %.

Зрозуміло, що точність можна підвищити за рахунок зменшення тривалості інтервалу часу Δt , але це призведе до збільшення обсягу необхідної оперативної пам'яті комп'ютера і часу виконання обчислень. У таких випадках підвищення точності намагаються досягти шляхом поліпшення алгоритму.

З цього приводу читаємо у Р. Фейнмана [8, 164 — 167]: «...Нова координата тіла дорівнює попередній плюс добуток проекції швидкості на інтервал часу Δt . Але що це за швидкість? У який момент? Адже на початку інтервалу швидкість одна, а наприкінці вона зовсім інша. Якщо відома швидкість у деякий момент і відомо, що вона неперервно змінюється, то хіба можна сподіватися отримати задовільний результат, припускаючи, що тіло рухається весь час Δt з тією самою швидкістю? Доцільнішим буде використати деяку проміжну швидкість між початком та кінцем інтервалу. *Найпростіший прийом підвищення точності обчислень полягає в тому, щоб брати швидкість у середині інтервалу*». Для рівноприскореного руху, яким, за нашою домовленістю, є рух

тіла протягом інтервалу Δt , це середня швидкість.

Таким чином, необхідно дещо змінити наші міркування: нова координата x (наприкінці i -го інтервалу) дорівнює попередній координаті x_{i-1} (наприкінці попереднього інтервалу) плюс добуток швидкості v_{cix} у середині інтервалу на Δt . Ця швидкість, у свою чергу, дорівнює швидкості $v_{c(i-1)x}$ у середині попереднього інтервалу (тобто на інтервал Δt раніше) плюс прискорення на початку інтервалу, помножене на Δt .

Іншими словами, нові рівняння матимуть вигляд:

$$x_i = x_{i-1} + v_{cix} \Delta t,$$

$$v_{cix} = v_{c(i-1)x} + a_{ix} \Delta t.$$

Тепер, однак, щоб почати обчислення, треба скористатися додатковим рівнянням

$$v_{ix} = v_{0x} + a_{0x} \frac{\Delta t}{2}.$$

Додаючи далі до половини першого інтервалу по Δt , ми кожного разу потраплятимемо в середину наступного інтервалу.

Відповідно до наведених міркувань внесемо зміни до п. 4 алгоритму:

$$v_{ix} = \begin{cases} v_{0x} + a_{ix} \frac{\Delta t}{2} & \text{при } i = 1; \\ v_{c(i-1)x} + a_{ix} \Delta t & \text{при } i > 1, \end{cases}$$

тобто змінимо вміст однієї лише комірки СЗ, залишивши всі інші без змін.

Результати наведено в табл. 4.

Тепер ми маємо наочне уявлення про ефективність число-

Таблиця 2

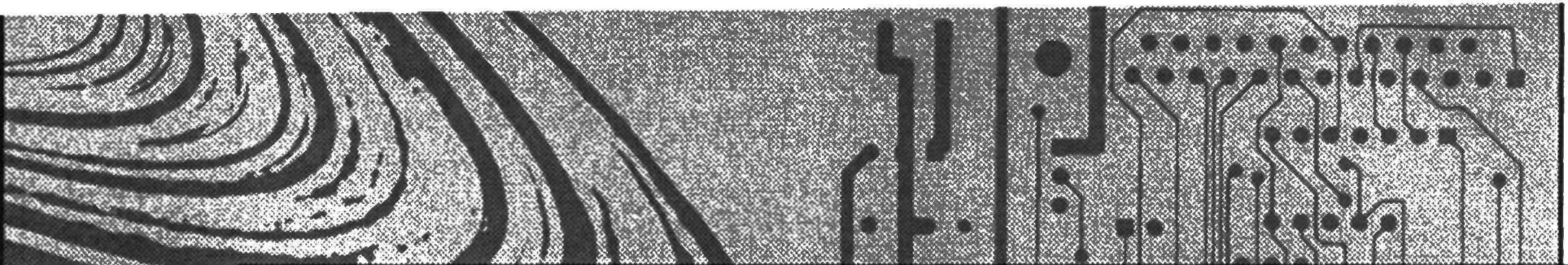
	A	B	C	D	E	F
1	t	a_x	v_x	x	Дано:	
2	0,00	-4,000	0,000	0,010	$x_0, \text{ м} = 0,01$	
3	0,01	-4,000	-0,040	0,010	$v_{0x}, \text{ м/с} = 0$	
4					$\Delta t, \text{ с} = 0,01$	
5					$m, \text{ кг} = 0,1$	
6					$k, \text{ Н/м} = 40$	
7					$r, \text{ кг/с} = 0,1$	
8						
9						
10						
...		

Мал. 3

Таблиця 3

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	t	a_x	v_x	x	$x_{\text{ТОЧН}}$	$x - x_{\text{ТОЧН}}$	Дано:	
2	0,00	-4,000	0,000	0,0100	0,0100	0,0E+00	$x_0, \text{ м} = 0,01$	
3	0,01	-4,000	-0,040	0,0096	0,0098	-2,0E-04	$v_{0x}, \text{ м/с} = 0$	
4	0,02	-3,840	-0,078	0,0088	0,0092	-3,9E-04	$\Delta t, \text{ с} = 0,01$	
5	0,03					-5,7E-04	$m, \text{ кг} = 0,1$	
6	0,04					-7,3E-04	$k, \text{ Н/м} = 40$	
7	0,05					-8,6E-04	$r, \text{ кг/с} = 0,1$	
8	0,06					-9,6E-04		
9	0,07					-1,0E-03		
10	0,08					-1,0E-03		
11	0,09					-1,0E-03		
12	0,10					-9,4E-04		
...		

Мал. 4



НОВІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ

вого аналізу: простий розрахунок за поліпшеним алгоритмом дає добрий результат. А вже тепер розбіжність не перевищує 2,5 %.

З теорії відомо, що частота власних коливань пружинного маятника визначається за рівнянням

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Завдання

1. Перевірте, як відреагує наша модель на зменшення k у чотири рази; на збільшення m у чотири рази. В обох випадках час моделювання треба брати однаковим. Чи узгоджуються результати моделювання з теоретичними розрахунками? Зробіть висновок щодо адекватності моделі.

2. Виведіть на екран на одному малюнку графіки залежностей $x = x(t)$, $v = v(t)$ та $a = a(t)$.

Це завдання передбачає одночасне виведення графіків несумірних величин ($|a_{\max}| \gg |x_{\max}|$), тому рекомендуємо учням виконати побудову графіка $x = x(t)$ з використанням додаткової осі з відповідним її масштабуванням.

Висновки

1. Тестування моделі довело її задовільну адекватність відносно теоретичних розрахунків, яких дана модель не передбачає.

2. Точність обчислень можна помітно підвищити за рахунок поліпшення алгоритму.

II. Рух тіла на пружині за наявності опору

Продовжимо обчислювальний експеримент, поклавши числове значення r (коефіцієнта опору) рівним не 0, а, наприклад, 0,1 (табл. 5).

З табл. 5 і графіка видно, що за наявності сили опору амплітуда вільних коливань поступово зменшується, як це й відбувається у відповідних дослідах.

Завдання

1. Підберіть таке мінімальне значення r (за умови, що решта параметрів не змінюються), за якого коливання припиняються через 1 с від початку. Скільки повних коливань здійснить при цьому тіло (кулька)?

2. За якого значення r кулька до повної зупинки виконає 10 повних коливань?

3. Переконайтеся, що відношення взятих довільно двох послідовних амплітуд є величиною сталою. Це означає, що послідовність значень амплітуд утворює спадну геометричну прогресію. Отже, залежність амплітуди від часу описується показниковою функцією.

4. Як ви вважаєте: у який спосіб відреагує наша модель, якщо коефіцієнтові опору r надати від'ємного значення?

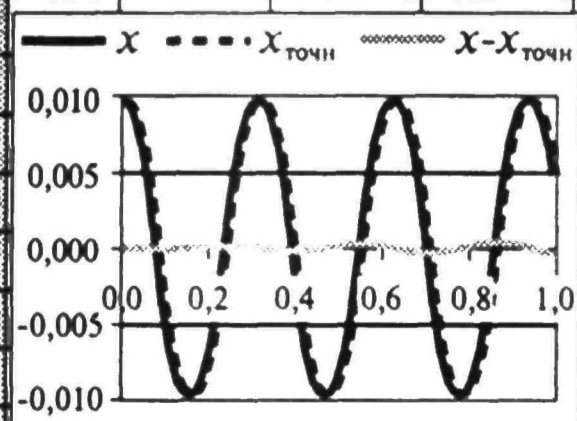
Виконайте дослідження для $r = -0,1$.

Який, на вашу думку, фізичний зміст може мати отриманий результат?

Якого змісту слід було б тепер надати виразу $F_{\text{оп}} = -rv$?

Таблиця 4

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	t	a_x	v_x	x	$x_{\text{точн}}$	$x - x_{\text{точн}}$	Дано:	
2	0,00	-4,000	0,000	0,0100	0,0100	0,0E+00	$x_0, \text{ м} = 0,01$	
3	0,01	-4,000	-0,020	0,0098	0,0098	-6,7E-07	$v_{0x}, \text{ м/с} = 0$	
4					0,0092	-2,6E-06	$\Delta t, \text{ с} = 0,01$	
5					0,0083	-5,7E-06	$m, \text{ кг} = 0,1$	
6					0,0070	-9,6E-06	$k, \text{ Н/м} = 40$	
7					0,0054	-1,4E-05	$r, \text{ кг/с} = 0,1$	
8					0,0036	-1,9E-05		
9					0,0017	-2,3E-05		
10					0,0003	-2,7E-05		
11					0,0023	-2,9E-05		



Мал. 5

III. Рух тіла на пружині за наявності сили сухого тертя

У шкільному курсі фізики основну увагу приділено вивченню сили сухого тертя. Модуль її під час горизонтального руху визначається виразом $F_{\text{тр}} = \mu mg$ і не залежить від швидкості. Напрямок цієї сили завжди протилежний до напрямку вектора швидкості, проекція якого періодично змінює свій знак. Тому й проекція сили тертя також має змінювати знак, але в протилежній фазі.

У попередній версії моделі ця властивість сили опору не створювала проблем, тому що проекція швидкості входила у вираз для сили опору, але тепер така проблема є. Розв'язати її можна, дописавши у згаданий вираз множником функцію $\text{sgn}(v_x)$:

$$F_{\text{тр}x} = -\mu mg \text{sgn}(v_x).$$

Зауваження. Функція $\text{sgn}(x)$ передає в рівняння знак свого аргументу x :

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

До речі, таку саму властивість має вираз $\frac{v_x}{|v_x|}$.

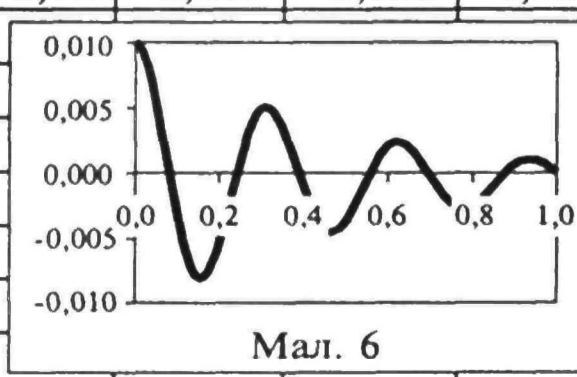
Перехід до іншої версії моделі зводиться до зміни рівняння (1), а саме:

$$a_x = -\frac{kx + \mu g \text{sgn}(v_x)}{m}. \quad (1^{**})$$

Відповідно до співвідношення (1**) внесемо зміни і в комірки таблиці:

Таблиця 5

	A	B	C	D	G	H
1	t	a_x	v_x	x	Дано:	
2	0,00	-4,000	0,000	0,010	$x_0, \text{ м} = 0,01$	
3	0,01	-4,000	-0,020	0,010	$v_{0x}, \text{ м/с} = 0$	
4	0,02	-3,840	-0,058	0,009	$\Delta t, \text{ с} = 0,01$	
5					$m, \text{ кг} = 0,1$	
6					$k, \text{ Н/м} = 40$	
7					$r, \text{ кг/с} = 0,1$	
8						
9						
10						
11						



Мал. 6

Комірка	Формули / Числа
B2	$=-(\$F\$6*\$F\$2+\$F\$7*9,81*3НАК(\$F\$3))/\$F\5
B3	$=-(\$F\$6*D2+\$F\$7*9,81*3НАК(C2))/\$F\5
E7	$\mu=$
F7	0,001

Результати моделювання подано в табл. 6.

Завдання

1. Підберіть таке мінімальне значення μ , за якого коливання припиняються через 2,5 с від початку. Скільки повних коливань здійснює кулька?

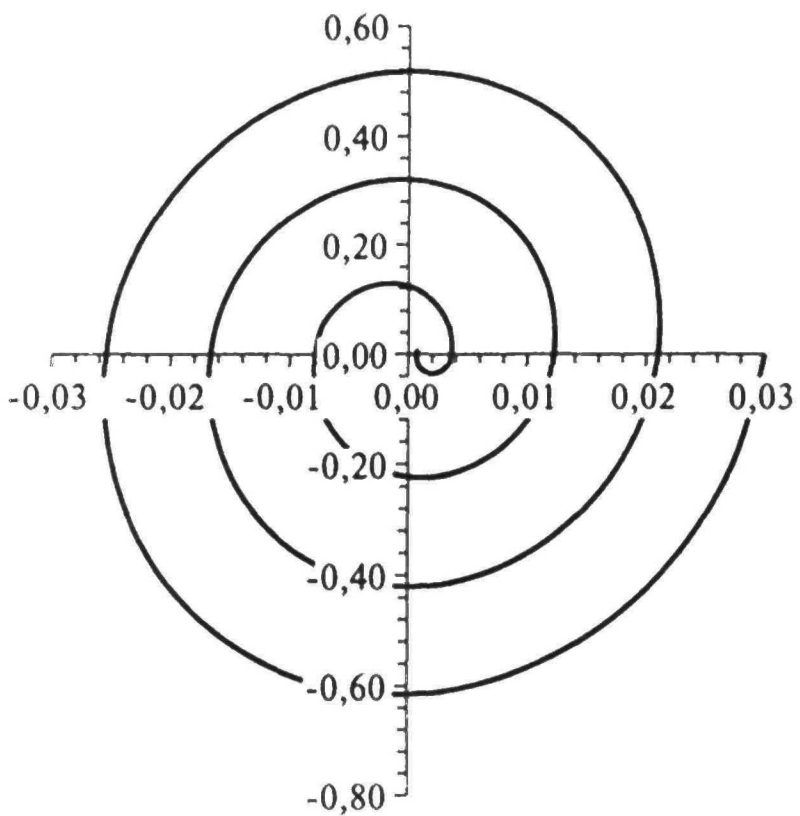
2. Малюнок у табл. 6 наводить на думку, що послідовність значень амплітуд є спадною лінійною функцією часу. У який спосіб можна в цьому переконатися, не будуючи прямі лінії?

У разі утруднення пропонуємо учням в окремому стовпці вивести різниці значень двох послідовних амплітуд і переконатися, що всі такі різниці однакові. Звідси впливає, що послідовність значень амплітуд утворює спадну арифметичну прогресію. Отже, залежність амплітуди від часу є спадною лінійною функцією.

3. *Розв'яжіть задачу.* Брусок, маса якого дорівнює 500 г, з'єднаний із закріпленою пружиною і може ковзати на горизонтальній площині. Жорсткість пружини дорівнює 2,45 Н/см. Коефіцієнт сухого тертя становить 0,055. Скільки коливань здійснить тіло до повної зупинки, якщо в початковий момент пружина розтягнута на 3 см?

Зауважимо, що повне аналітичне розв'язування майже такої самої задачі можна знайти в [5, 265—266]. Нижче наводимо її числове розв'язування на основі побудованої моделі, яке супроводжуємо відповідним графіком (табл. 7).

Якщо рівень підготовки учнів із фізики достатній, можна розглянути й проаналізувати фазову діаграму коливного процесу, тобто графік залежності $v = v(x)$ (табл. 7). Для цього достатньо лише у відповідній таблиці перед побудовою діаграми поміняти місцями стовпці зі значеннями швидкості й координати. Результат показано на мал. 9.



Мал. 9

Ще один можливий об'єкт дослідження — *політ паперового літачка в повітрі під дією сили тяжіння та аеродинамічної сили* — описаний у [6].

Таким чином, обчислювальний експеримент з математич-

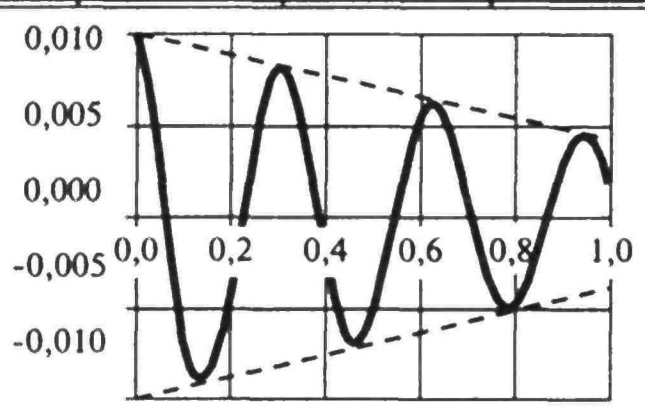
ною моделлю усуває багато ускладнень, що виникають під час аналітичного розв'язування задач. Це робить їх доступними для старшокласників і створює реальні передумови для розширення змістової частини різних навчальних предметів через включення нових цікавих дослідницьких задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей. — М.: Физматлит, 1994. — 192 с.
2. Пухов М. Истинная правда // Техника — молодежи. — 1985. — № 6. — С. 52—57.
3. Разумовский В. Г. ЭВМ и школа: Научно-педагогическое обеспечение // Сов. педагогика. — 1985. — № 9. — С. 12—16.
4. Соловйов В. М., Семеріков С. О., Теплицький І. О. Інструментальне забезпечення курсу комп'ютерного моделювання // Комп'ютер у шк. та сім'ї. — 2000. — № 2. — С. 28—32.
5. Теплицький І. О. Застосування електронних таблиць на уроках фізики // Фізика та астрономія в шк. — 2001. — № 2.
6. Теплицький І. О. Використання електронних таблиць у комп'ютерному моделюванні // Комп'ютер у шк. та сім'ї. — 1999. — № 2. — С. 27—32.
7. Теплицький І. О. Комп'ютерне моделювання в школі як засіб розвитку творчого мислення учнів // Рідна шк. — 2005. — № 9. — С. 63—66.
8. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. — М.: Мир, 1967. — Т. 1. — 267 с.
9. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике: Задачи и упражнения с ответами и решениями. — М.: Мир, 1969. — 624 с.

Таблиця 6

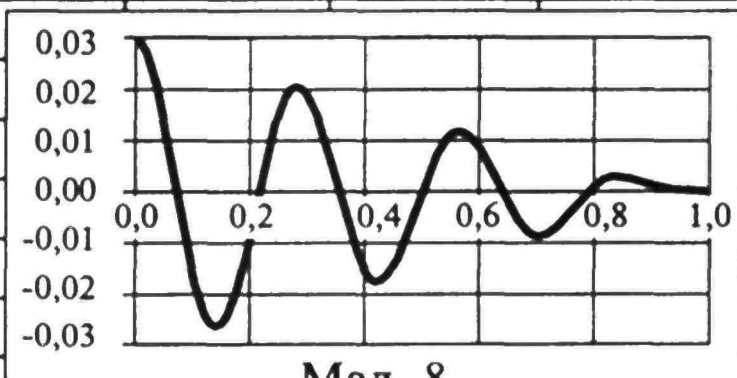
	A	B	C	D	E	F
1	t	a_x	v_x	x	Дано:	
2	0,00	-4,00	0,00	0,010	$x_0, м = 0,01$	
3	0,01	-4,00	-0,04	0,010	$v_{0x}, м/с = 0$	
4					$\Delta t, с = 0,01$	
5					$m, кг = 0,1$	
6					$k, Н/м = 40$	
7					$\mu = 0,002$	
8						
9						
10						
11						
...		



Мал. 7

Таблиця 7

	A	B	C	D	E	F
1	t	a_x	v_x	x	Дано:	
2	0,00	-14,70	0,00	0,030	$x_0, м = 0,03$	
3	0,01	-14,70	-0,15	0,029	$v_{0x}, м/с = 0$	
4	0,02	-12,90	-0,28	0,026	$\Delta t, с = 0,01$	
5					$m, кг = 0,5$	
6					$k, Н/м = 245$	
7					$\mu = 0,055$	
8						
9						
10						
11						
...		



Мал. 8