

# ВИВЧЕННЯ ФРАКТАЛЬНИХ КЛАСТЕРІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ІМІТАЦІЙНИХ КОМП'ЮТЕРНИХ МОДЕЛЕЙ

**І.О. Теплицький, С.О. Семеріков**

**Україна, м. Кривий Ріг**

**Центрально-Міська гімназія**

**Криворізький державний педінститут**

Розглянуто методика початкового ознайомлення студентів та старших школярів з уявленнями про фрактальні об'єкти. На основі досвіду роботи авторів з комп'ютерного моделювання пропонується набір алгоритмів для створення моделей фрактальних об'єктів і вивчення їх властивостей. Матеріал складається з трьох частин, які об'єднано головною метою – проілюструвати приклади адекватного застосування комп'ютерного моделювання у сучасних природничо-наукових дослідженнях.

## ПОПЕРЕДНІ ЗАУВАЖЕННЯ

Ну, почнемо! Дійшовши до кінця нашої історії, ми будемо знати більше, ніж тепер.

Г.Х. Андерсен. «Снігова королева».

Геометричні властивості найрізноманітніших об'єктів природи – від масштабів атомного ядра до Всесвіту – займають центральне місце в моделях, що їх будують дослідники з метою «зрозуміти» природу. Геометрія траєкторій руху частинок, гірських ланцюгів, берегових ліній, островів, басейнів рік, зерен у скельних породах і металах та композитних матеріалах, комах і живих клітин, геометрична структура кристалів та молекул – коротше кажучи, геометрія природи займає центральне місце у різних галузях природознавства. Традиційно у основі інтуїтивного уявлення і розуміння цієї геометрії були евклідові прямі, кола, сфери, тетраедри тощо. Кожна наука намагалася розвинути свої власні поняття, пристосовані до її потреб: наприклад, у біологів – морфологія, у фізиків – чотиривимірний простір і т.п.

У 1975 році з'являється перша, а у 1982 році – друга книга бельгійського математика Бенуа Б. Мандельброта (зараз працює у США) під назвами «Фрактали: форма, випадок, розмірність» та «Фрактальна геометрія Природи», які збуджують загальний інтерес до фрактальної геометрії. Зокрема, він повідав світові про об'єкти, які він назвав фракталами. Поняття це було введено самим Мандельбротом і походить від латинського *fractus* – дробовий, посічений.

Поява у останні десятиліття ефективної комп'ютерної графіки призвела до інтенсивних досліджень нетрадиційних геометричних об'єктів у багатьох галузях природничих наук. Поняття фракталу полонило уяву вчених, що працюють у багатьох галузях науки, і роботи, у яких фрактали обговорюються з різноманітних позицій, як на погляд спеціалістів, з'являються тепер майже щоденно. Важливо, що на сьогодні єдиного й строгого означення фракталу не існує – можливо, внаслідок його об'єктивної складності та універсальності, а можливо – внаслідок молодості самої фрактальної геометрії. Принаймні, те, що існує, виявляється складним і не завжди достатньо чітким та однозначним. Такого стану у різні часи зазнала кожна наука.

Найбільш глибоке враження справляють комп'ютерні кольорові ілюстрації фрактальних об'єктів. Розглядаючи їх, важко уявити, що це не фотографії реальних ландшафтів, хмар, морських узбереж, вирощених кристалів тощо. Спочатку навіть не віриться, що ці зображення – результат роботи за «якимись там» алгоритмами. Але програмуючий користувач комп'ютера, побачивши цю красу, надовго проймається почуттям захвату. Одночасно виникає бажання зрозуміти ці загадкові фрактали і спробувати їх відтворити.

Пропонований до уваги матеріал призначено для ознайомлення початківців з поняттям фракталу та практичного дослідження властивостей фрактальних об'єктів з використанням комп'ютера.

Пропонований матеріал складається з трьох частин, які об'єднано головною метою – проілюструвати приклади адекватного застосування комп'ютерного моделювання у сучасних природничо-наукових дослідженнях.

У Частині I подано попередні відомості про фрактальні об'єкти та вводиться їх основна кількісна міра – фрактальна розмірність.

Зміст Частини II становить розгляд питання про самоподібність фракталів на прикладі регулярних фрактальних об'єктів і розглянуто методику визначення фрактальної розмірності.

Частину III присвячено практичним дослідженням фрактальних кластерів на основі створених авторами імітаційних моделей. Зокрема, фрактальна структура об'єкту дослідження доводиться шляхом визначення його фрактальної розмірності. Пропонуються такі об'єкти:

- перколяційний кластер на порозі протікання,
- процес утворення морських берегових ліній та островів;
- процес електролізу в полі плоского та точкового катодів.

Сюжетний матеріал для постановки задач запозичено із статей журналу «Квант» [5], «Информатика и образование» [7] та з монографії «Фракталы» [6].

Конкретні методи роботи з імітаційними моделями відповідають Главі 13 з [2] та Розділам 4, 5 з [1], які за своїм змістом фактично присвячені геометричним моделям у їх практичному застосуванні до актуальних проблем сучасної фізики.

Загальні принципи побудови комп'ютерних математичних моделей витримано згідно [3], [4].

Початок Частини 3 цитовано з [7] (стор. 93).

Частини 2 і 3 забезпечено комп'ютерною підтримкою у вигляді авторських програм для IBM-сумісної техніки мовою C++. При створенні програм частково було використано алгоритми з [5] та [7]. Зазначимо, що у нас вони зазнали суттєвого вдосконалення, завдяки чому при роботі з моделями забезпечується не лише ефективний динамічний вивід на екран зображень відповідних процесів, а й можливість практичного знаходження кількісних характеристик об'єктів. Зокрема, повністю автоматизовано нагромадження експериментальних даних, їх статистична обробка та вивід результатів дослідження (обчислювального експерименту) у табличному та графічному вигляді.

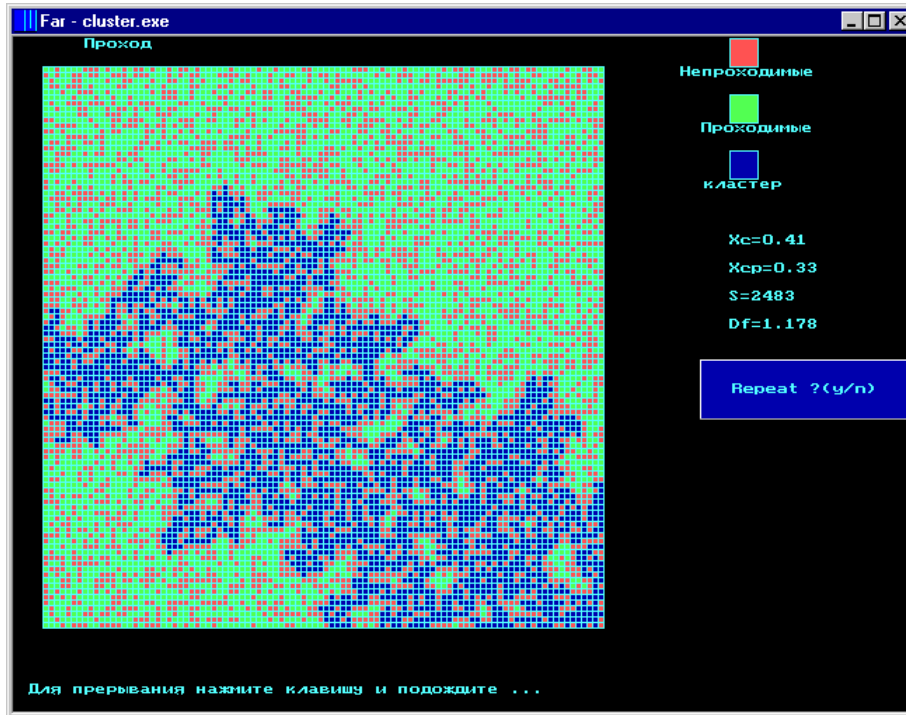
Ілюстрації (Мал. 2, 3, 7) є відтворенням відповідних малюнків з [2] та [6] за допомогою графічного редактора, решта сім – згенеровано відповідними програмами. Зауважимо тут, що ніякі застигли чорно-білі ілюстрації не здатні у повній мірі скласти уявлення про спостережувані картини та передати ті почуття, що їх справляє спостереження процесу їх творення на кольоровому дисплеї комп'ютера.

## Частина I. ФРАКТАЛИ. ФРАКТАЛЬНА РОЗМІРНІСТЬ.

Багато речей нам незрозумілі не тому, що наші поняття слабкі, а тому, що ці речі не входять до кола наших понять.

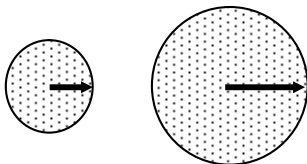
К. Прутков. «Плоди роздумів».

Незважаючи на те, що опис пов'язуючого кластеру, заснований на зоровому сприйнятті, є суб'єктивним, все одно про такі кластери говорять як про розгалуджені, розріджені і волокнисті у тому розумінні, що їх ніяк не можна схарактеризувати як щільні, компактні, заповнені.



Мал. 1. Перколяційний фрактальний кластер (чорні комірки), згенерований на сітці 100x100 комірок для порогу протікання. Білі комірки – прохідні (59%), сірі – перешкоди (41%). З малюнку добре видно, що такий кластер містить порожнини всіх розмірів.

Останнім часом опис і вивчення таких об'єктів здійснюється в рамках нової – фрактальної геометрії. Кількісною мірою структурності цих об'єктів є так звана фрактальна розмірність  $D_f$ . З метою дати означення фрактальної розмірності  $D_f$  пригадаємо спочатку деякі поняття звичайної евклідової геометрії. Розглянемо круговий або сферичний об'єкт масою  $M$  і радіусом  $R$ . Він може бути або суцільним (однорідна густина), або містити порожнини, але у будь-якому випадку ми припустимо, що його густина не залежить від розміру (Мал. 2).



Мал. 2. Кількість “точок” на одиницю площі в обох кругах однакова.

Отже, при збільшенні радіусу об'єкта від  $R$  до  $2R$  його маса збільшуватиметься у  $R^2$  разів, якщо об'єкт коловий, або у  $R^3$  разів, якщо він сферичний. Цей зв'язок маси й розміру можна подати у вигляді

$$M(R) \sim R^D, \quad (1)$$

де  $D$  – розмірність простору. Об'єкт, у якого маса й розмір пов'язані співвідношенням (1), зветься «компактним». Дане співвідношення означає, що при збільшенні лінійного розміру об'єкта у  $R$  разів за незмінної форми його маса збільшуватиметься у  $R^D$  разів. Це масштабне співвідношення маса – розмір тісно пов'язане з інтуїтивним уявленням про розмірність. Воно також є корисним узагальненням на розмірності, більші трьох, або такі, що не є цілими числами.

Зв'язок між масою об'єкта та його характерним розміром  $R$  можна визначати у більш загальному вигляді, ніж за формулою (1). На цьому засновано одне з формулювань означення фрактальної розмірності

$$M(R) \sim R^{D_f}. \quad (2)$$

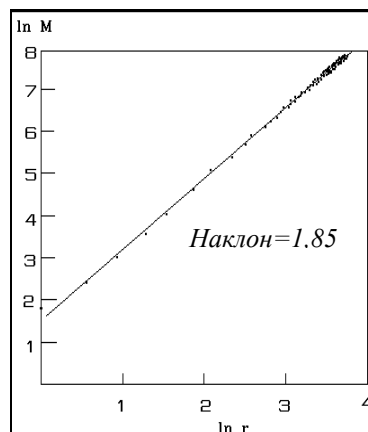
Об'єкт називають «фрактальним», якщо він задовольняє співвідношенню (2) зі значенням  $D_f$ , меншим за просторову (евклідову) розмірність  $D$ .

Якщо для об'єкта виконується співвідношення (2), то його густина не буде однаковою для всіх значень  $R$ , а масштабується у такий спосіб:

$$\rho(R) \sim \frac{M}{R^D} \sim R^{D_f - D}. \quad (3)$$

Оскільки  $D_f < D$ , то густина фрактального об'єкта зменшується із збільшенням його розміру. Дана масштабна залежність (3) густини є кількісною мірою уявлення про фрактали як про розріджені або розгалуджені об'єкти. Інший метод опису фрактального об'єкту засновано на припущенні, що фрактальний об'єкт містить порожнини всіх розмірів.

Цей факт добре проглядається на Мал. 1, де порожнини являють собою комірки білого та сірого кольорів (прохідні та непрохідні). Такий перколяційний кластер є прикладом випадкового або статистичного фракталу, оскільки для нього, як виявляється, співвідношення (1) маса–розмір виконується лише «у середньому», наприклад, при усередненні значень  $M(R)$  для великої кількості кластерів за умови, що беруться різні початкові точки відліку в середині кластеру. На Мал. 3 у подвійному логарифмічному масштабі зображено залежність маса – розмір для перколяційного кластеру, згенерованого на квадратній сітці  $61 \times 61$  комірок. Як стане видно з подальшого викладу, наш метод визначення фрактальної розмірності таких об'єктів дещо відрізняється від зазначеного вище.



Мал. 3. Графік залежності  $\ln M$  від  $\ln R$  для порогу протікання.

В усіх реальних фізичних системах співвідношення (3) виконується не для будь-яких масштабів довжини, а обмежується верхньою та нижньою границями. Наприклад, нижня границя довжини обумовлюється тією чи іншою макроскопічною відстанню (період

решітки, відстань між складовими частинами об'єкту тощо). У чисельному моделюванні верхня границя довжини звичайно обумовлюється кінцевим розміром системи. Наявність зазначених границь ускладнює обчислення фрактальної розмірності.

## Частина 2.

### РЕГУЛЯРНІ ФРАКТАЛИ ТА САМОПОДІБНІСТЬ.

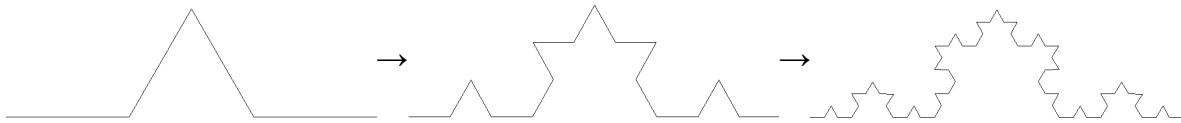
Аліса не знала відповіді ні на перше питання, ні на друге, і тому їй було однаково, як їх задавати.

Л. Керролл. «Пригоди Аліси в Країні Чудес».

Зміст виразу  $M(R) \sim R^{D_f}$  полягає ще й у тому, що фрактальні об'єкти є самоподібними: вони мають однаковий вигляд у будь-якому просторовому масштабі. Образно кажучи, їх вигляд не повинен змінитися, коли ми подивимося на них неозброєним оком, а потім крізь лупу. Для з'ясування суті самоподібності звернемося до деяких прикладів регулярних фракталів – об'єктів, що є самоподібним за усіх масштабів довжини.

#### 1. Триадна крива Кох.

Наведемо послідовність операцій (алгоритм) для побудови цієї кривої. Починаємо з відрізка одиничної довжини (Мал. 4). Розділимо його на три рівні частини і видалимо середню, яку замінимо на два відрізки довжиною  $1/3$  кожен так, що на кривій з'являється трикутний горб. При цьому довжина кривої стає рівною  $4/3$ . На наступному кроці кожен сегмент довжиною  $1/3$  ділиться на три частини довжиною  $1/9$  і процедура повторюється (Мал. 4.в). Довжина кривої стає рівною  $16/9$ .



Мал. 4. Побудова триадної кривої Кох.

Якщо уявити собі, що зазначена процедура буде повторюватися нескінченну кількість разів, то повинна одержатися крива нескінченної довжини, що складається з нескінченної кількості нескінченно малих відрізків. Така крива має назву «триадна крива Кох».

Для визначення фрактальної розмірності цієї кривої звернемося до дещо простішої ситуації. Розглянемо спочатку відрізок одиничної довжини, поділений на  $N$  однакових частин довжиною  $d$  кожна, так що  $N = 1/d$ . У міру зменшення  $d$  значення  $N$  зростатиме лінійно, як і слід чекати для одномірної кривої. Аналогічно, якщо поділити квадрат одиничної площі на  $N$  рівних квадратиків зі стороною  $d$ , то одержимо  $N = 1/d^2$  – очікуваний для двомірного об'єкту результат. Можна стверджувати, що у загальному випадку

$$N = \frac{1}{d^D},$$

тут  $D$  – розмірність об'єкту. Після логарифмування обох частин цієї рівності можна подати розмірність у знайомому вигляді

$$D_f = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{d}}$$

Застосуємо ці міркування до кривої Кох. Ми знайшли, що при кожному зменшенні довжини  $D$  нашої одиниці виміру у три рази кількість сегментів збільшується у чотири рази. Таким чином, маємо  $N=4$ ,  $D=1/3$ .

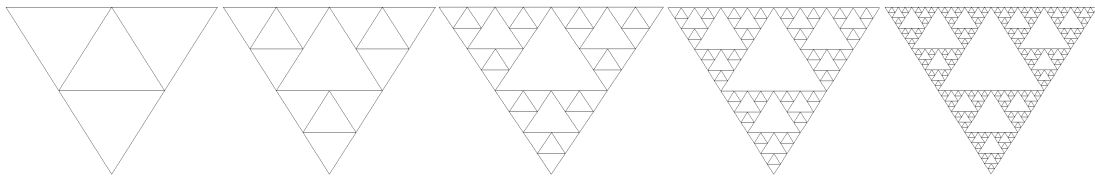
Отже, фрактальна розмірність триадної кривої Кох дорівнює

$$D_f = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,26186\dots$$

Таким чином, можна стверджувати, що *крива Кох вже не є одномірною, але ще й не двомірна*. Виявилось, що криві, подібні до кривої Кох, у природі складають скоріш правило, аніж виключення. Такими, зокрема, є морські узбережжя або видимі обриси хмар.

## 2. Серветка та килим Серпінського.

Серветка Серпінського являє собою побудову, що породжує криву з петлями усіх розмірів (Мал. 5). Затравкою є рівнобічний трикутник з усіма внутрішніми точками. Утворюючий елемент виключає із затравки центральний трикутник, сторона якого вдвічі менша за сторону попереднього, тобто при кожному наступному кроці трикутник разом з внутрішніми точками (зафарбований) замінюється  $N=3$  трикутниками, зменшеними з коефіцієнтом  $d=1/2$ . На малюнку подано перші п'ять поколінь.



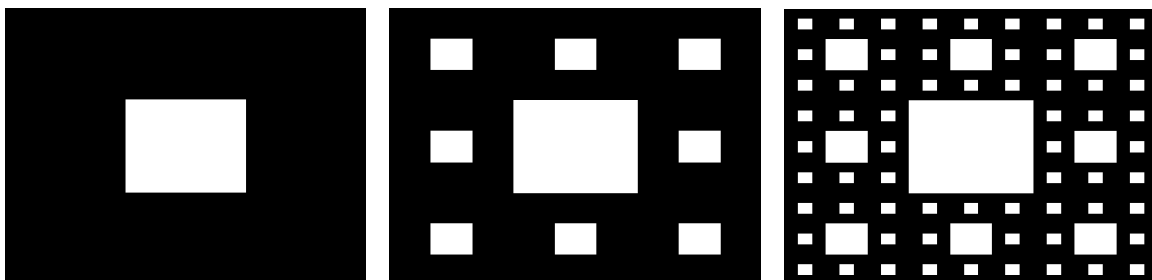
Мал. 5. Побудова трикутної серветки Серпінського.

Для обчислення фрактальної розмірності серветки Серпінського знов скористаємося співвідношенням

$$D_f = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{d}},$$

де  $N=3$ ,  $D=1/2$ . Одержуємо  $D_f = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,58\dots$

З серветкою Серпінського тісно пов'язана інша крива – так званий килим Серпінського. Його зображено на Мал. 6. Затравкою тут є квадрат, а утворюючий елемент складається з  $N=8$  квадратів, одержаних із затравки стисненням з коефіцієнтом подібності  $d=1/3$ . Нескінчено багато поколінь породжують фрактальну криву. При переході до граничної фрактальної кривої чорні ділянки зникають, а повний периметр «дір» у килимі Серпінського стає нескінченним.



Мал. 6. Побудова трьох перших поколінь килима Серпінського.

$$\text{Фрактальна розмірність цього об'єкту } D_f = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1,89\dots$$

Як зазначається у [6] на стор. 33, криві Серпінського часто використовують при моделюванні багатьох фізичних явищ. Зокрема, при дослідженнях деяких властивостей металевих плівок їхню структуру подавали у вигляді серветки Серпінського 10-го покоління: тим самим забезпечувалися достатньо малі відстані між структурними елементами. Результати такого моделювання на диво гарно узгоджуються з теоретичними передбаченнями.

### Частина 3. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ЧАСТИНА.

Нарешті Грифон промовив до Делікатеса:  
«Гаразд, старий, давай. Рушаймо. Не можна ж  
весь день товкти воду у ступі».

Л. Керролл. «Пригоди Аліси в Країні Чудес».

У цій частині розглядаються практичні дослідження фрактальних кластерів на основі створених авторами відповідних моделей. Розглянуто методику такої роботи. Ця методика охоплює основні етапи моделювання: постановка задачі (створення змістовної моделі) → математична модель → обчислювальний експеримент → інтерпретація результатів → висновки.

#### 1. Фрактальна розмірність перколяційного кластеру.

Лід зрушився, панове присяжні засідателі!

І. Ільф, Є. Петров. «Дванадцять стільців».

Явище перколяції (протікання) дає зручний приклад для знайомства з фракталами. Зокрема, з візуального огляду перколяційного кластеру на порозі протікання можна виявити, що він виявляється розрідженим (Мал. 1). Проте сам по собі цей факт ще не дає підстави стверджувати, що одержаний об'єкт є фракталом. Наявність розріджень можна розглядати як необхідну, але не достатню умову фрактальності об'єкту. Висновок про фрактальність можна зробити лише за умови, що фрактальна розмірність об'єкту  $D_f$  менша за евклідову  $D$  і при цьому не є цілим числом.

Маючи на меті пошук відповіді на питання, чи є згаданий кластер фрактальним, скористаємося співвідношенням (2), за яким визначалася фрактальна розмірність

$$D_f = \frac{\ln M}{\ln L}.$$

Робота ведеться за таким планом:

1. За допомогою нашої програми «CLUSTER» на квадратній сітці розмірами  $L \times L$  комірок генерується перколяційний кластер для порогу протікання (доля непрохідних комірок від загальної їх кількості становить 41%).
2. Підраховується кількість комірок, які належать кластеру. Знайдене число розглядається як маса  $M$  кластера.
3. До звітної таблиці заносяться значення  $L$  та  $M$ .
4. п.п. 1-3 виконуються для  $L=50, 60, 70, 80, 90$  і  $100$  (для кожного  $L$  по декілька разів з наступним усередненням).
5. За даними таблиці будується графік залежності  $M=M(L)$  у подвійному логарифмічному масштабі (на горизонтальній вісі відкладаються  $\ln(L)$ , а на вертикальній –  $\ln(M)$ ). Нахил цього графіка характеризує фрактальну розмірність  $D_f$ .

6. Обчислюється фрактальна розмірність згідно виразу

$$D_f = \frac{\ln M}{\ln L}.$$

*Примітка.* Для якісного проведення роботи п.п. 2-6 програма «CLUSTER» виконує автоматично. Адже це сама трудомістка частина роботи, а за значної кількості комірок вона стає взагалі неможливою без OEM.

В результаті дослідження було одержано  $D_f=1.7$ , що дозволило дістати висновок: розглянуті кластери з пороговим значенням перколяції є фрактальними.

## **2. Довжина берегової лінії.**

Спочатку зітворив Бог небо й землю. Земля ж була безвидною й пустою, і темрява над безоднею, і Дух Божий носився над водою  
Біблія.

Ця живописна картина, намальована у перших віршах Книги Буття, послугує нам відправною точкою для дослідницької експедиції під назвою «Узбережжя».

Наш ковчег кидає якір неподалік від первісного і поки що ідеально рівного берега: ми припускаємо тут, що Господь, який щойно закінчив свої труди, не попідкувався про створення посіченої берегової лінії у її сучасному варіанті. Він, напевно, мав право вважати себе творцем законів, а не форм і, не прагнучи різноманітності, прокреслив уздовж лінійки пряму, поклавши по один бік від неї сушу, а по другий залишивши воду. Дослідники, які знаходяться на ковчезі, є свідками історичного моменту. На лінії горизонту з'являються перші хвилі. Безжалісний вітер кидає їх у різні сторони, але вони неухильно наближаються до берега. Спостерігачі на судні помічають, що будь-яка хвиля на кожному кроці свого руху випадково обирає один з трьох можливих напрямів до берега. Такий характер руху хвиль зберігається до моменту їх зіткнення з берегом. Хвиля, що ударяє елемент берега, або видаляє його, якщо сила її удару достатня для руйнування даної берегової породи, або, відбиваючись, продовжує рух за тим самим законом.

Декілька слів про нашу програму «SEA\_SHORE», яка моделює цей процес. Із самого початку для кожного елемента первісного берега обирається ціле випадкове число з деякого наперед заданого інтервалу. Воно є критерієм твердості і задає кількість хвиль (ударів), необхідних для руйнування даного берегового елемента. Таким чином, усі можливі значення умовної твердості берегових порід містяться між границями зазначеного інтервалу. При кожному ударі хвилі з критерію твердості відповідного елемента берега віднімається одиниця і запам'ятовується нове значення. Якщо критерій стає рівним нулеві, хвиля видаляє даний елемент берега і, виконавши свою місію, зникає. Замість «відпрацьованої» хвилі на лінії горизонту одразу ж з'являється нова. Якщо критерій не стає нулеві, хвиля знову обирає один з трьох випадкових напрямів руху.

Програма працює у діалоговому режимі і дозволяє вводити будь-які розумні межі інтервалу для критеріїв твердості окремих елементів суші, а також у широких межах варіювати розміри цих елементів – комірок сітки. Змінюючи межі критеріїв, користувач може одержувати на екрані зображення різноманітних за виглядом берегових ліній – від піщаних плесів до глибоких скельних фіордів. Зокрема, у наших експериментах було встановлено, що задовільні обриси фіордів виникають, коли мінімальним критерієм брати 1, а максимальний критерій брати однаковим для сіток різних розмірів (наприклад, 100). Проте, саме головне у розмові про фрактали полягає не тільки і не стільки у привабливому вигляді картинки, скільки у подальшому дослідженні самого фрактального об'єкту, яким у розглядуваному випадку є берегова лінія, а точніше – її довжина. Наша програма «SEA\_SHORE», на відміну від описаних на рівні алгоритмів у літературі, здатна обчислювати довжину  $L$  берегової лінії і тим самим надавати можливість для визначення її



фрактальної розмірності. У цьому розумінні програма є оригінальною. У якості фракталів ми можемо розглядати також і острови, і вимиту частину берега (тоді острови відіграватимуть роль порожнин).

Зазначимо, що розглянута модель являє собою *модель Агрегації з Обмеженням Дифузії (АОД)*. Суть її полягає в тому, що модельна частинка, яка дифундує у досліджуване середовище, блукає у ньому, аж поки не зіткнеться з існуючим там первісним тілом – агрегатом. Як тільки це відбувається, частинка приєднується до агрегату, доповнюючи його. В результаті росте новоутворення – кластер, структура якого і є предметом обговорення у даній моделі. Щоправда, у нашому випадку використано інверсну агрегацію: блукаюча частинка при стиканні з агрегатом не приєднується до нього, а, навпаки, видаляє елемент агрегату.

То ж повернемося до наших дослідників – пасажирів ковчега, – яких ми залишили у момент споглядання початку творення берегів і повернемо їх у сьогодення. Не дуже важко зрозуміти, чому обриси берегових ліній на сучасній географічній карті світу мало схожі на первісні: за довгий час робота моря далася взнаки. Якнайбільший інтерес для учасників експедиції «Узбережжя» на сучасній карті являє узбережжя Норвегії: воно настільки вигадливе, що можна тільки дивуватися на цей витвір природи. На шляху до цієї країни, вони вирішують поки що за допомогою карти одержати відповідь на питання: «Якою є довжина берегової лінії Норвегії?»

У масштабі карти добре видно глибокі фіорди на західному узбережжі. Більш дрібні деталі обрисів узбережжя на північному сході від південної кінцівки розрізняються вже гірше. Проте, розглядаючи більш докладні карти для плавання вздовж цієї ділянки, можна переконатися, що берегова лінія тут має практично такий самий вигляд, як і на західному узбережжі (щоправда, у зменшеному масштабі).

Перш, ніж відповісти на головне питання, учасникам експедиції необхідно вирішити ще декілька проблем: чи варто включати до берегової лінії острови? як бути з річками? у якому місці фіорд перестає бути фіордом і де саме він переходить у річку? Припустимо, що вони зможуть знайти задовільні відповіді на всі питання такого роду. Та все одно найбільш принципове утруднення залишиться. Справа у тому, що коли вони нададуть розхиліві циркуля довільного розміру, який відповідатиме  $d$  км, і підрахують кількість кроків  $N(d)$ , які потрібно зробити, щоб пройти циркулем уздовж карти з кінця в кінець все узбережжя, то у такому разі за довжину берегової лінії треба буде прийняти величину

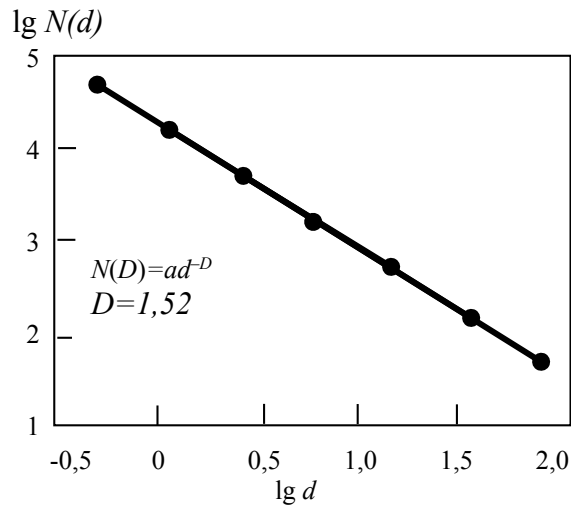
$$L=N(d)-d.$$

Деякі учасники експедиції вважають таку оцінку неточною і пропонують зменшити довжину  $d$  одиничного відрізка, а далі повторити все спочатку. Інші заперечують, говорячи, що в такому разі у довжину берегової лінії хоч і ввійдуть найбільш глибокі фіорди, але південно-східне узбережжя, як і раніше, буде долатися за кілька кроків. Стає зрозумілим, що для ще більш точного підрахунку можуть статися у нагоді такі карти, якими користуються сусіди для розв'язання питань про те, де повинен проходити кордон між їхніми земельними ділянками. Отже, при вирішенні питань такого роду уточнення можна вносити нескінченно. Крім того, при користуванні циркулем неодмінно виникатимуть проблеми з островами та річками. Але існує принципове обмеження знизу – мінімальний розхил циркуля.

Крім обходу за допомогою циркуля, існує альтернативний спосіб: вкрити карту сіткою з комірками розміром  $d \times d$  кожна. Кількість  $N(d)$  таких комірок, необхідних для покриття берегової лінії на карті, приблизно дорівнює кількості кроків для обходу берегової лінії на цій самій карті за допомогою циркуля з розкриттям  $d$ . Зменшення  $d$  призведе до збільшення кількості комірок, які укладатимуться у довжину берегової лінії.

Якщо берегова лінія Норвегії має цілком певну довжину  $L_N$ , то можна сподіватися, що кількість кроків циркуля або кількість квадратних комірок  $N(d)$  для покриття берегової лінії на карті, буде обернено пропорційною  $d$ , а довжина  $L(d)=N(d)-d$  при зменшенні  $d$  прямуватиме до постійної величини  $L_N$ . Проте, цим сподіванням не судилося здійснитися і, отже, вони є марними.

З Мал. 7 видно, що при зменшенні розміру  $d$  кроку виміряна довжина  $L$  зростає.



Мал. 7. Кількість комірок розміром  $d \times d$ , необхідних для покриття берегової лінії Норвегії. Пряму в подвійному логарифмічному масштабі побудовано за результатами вимірювань згідно залежності  $N(D)=ad^{-D}$ .

Графік на цьому малюнку виконано у подвійному логарифмічному масштабі, і він показує, що при зменшенні  $d$  виміряна довжина берегової лінії аж ніяк не прямує до постійного значення. Навпаки, виміряна довжина чудово вписується у наближену формулу

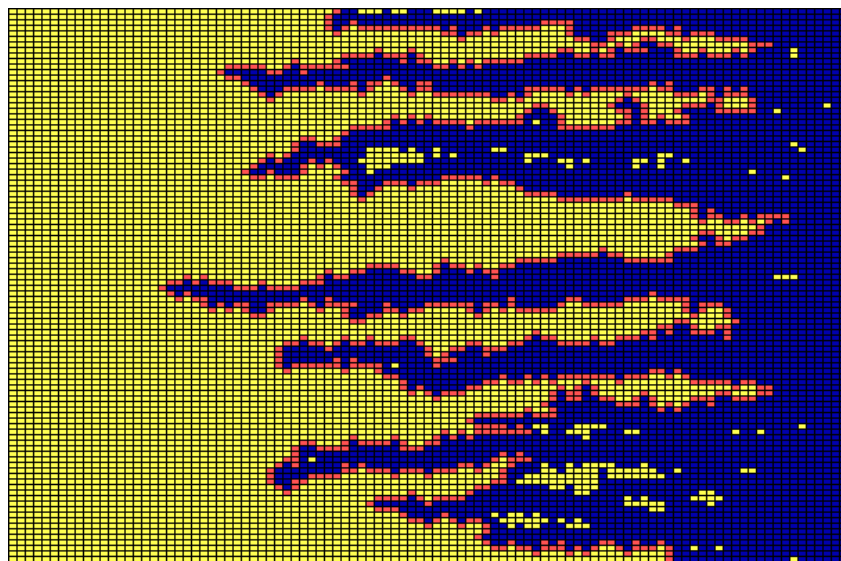
$$L(d) = ad^{1-D}.$$

Для звичайної кривої можна було б чекати, що за достатньо малих  $d$   $a=L_N$  і показник  $D=1$ . Але для берегової лінії Норвегії, як це видно з графіка,  $D=1,52$ .

Берегова лінія – це фрактал з фрактальною розмірністю  $D_f$ . Якби учасники експедиції визначали довжину берегової лінії Великобританії, то вони дійшли того самого висновку, але для фрактальної розмірності одержали б  $D=1,3$ .

Практична робота (обчислювальний експеримент) з використанням програми «SEA\_SHORE» ведеться за таким планом:

1. На квадратній сітці розмірами  $N \times N$  комірок наочно будується морське узбережжя, зафарбовується берегова лінія і програмно на екран виводиться кількість комірок сітки, що покривають берегову лінію, тобто її довжина  $L$ .



Мал. 8. Берегова лінія, побудована на сітці  $100 \times 100$  комірок.

2. До звітної таблиці заносяться значення  $L$  та  $N$ .

3. п.п. 1-2 виконувалися для  $N=100, 90, 80, 70, 60, 50$  (для кожного  $N$  по декілька разів з наступним усередненням).

4. За даними таблиці будується графік залежності  $L=L(N)$  у подвійному логарифмічному масштабі (на горизонтальній вісі відкладалися  $\ln N$ , а на вертикальній –  $\ln L$ . Нахил цього графіка характеризує фрактальну розмірність  $D_f$ .

5. Фрактальна розмірність обчислюється згідно виразу

$$D_f = \frac{\ln L}{\ln N}.$$

### 3. Утворення кристалічних структур.

Раз иголка, два иголка – будет ёлочка.

З дитячої пісні.

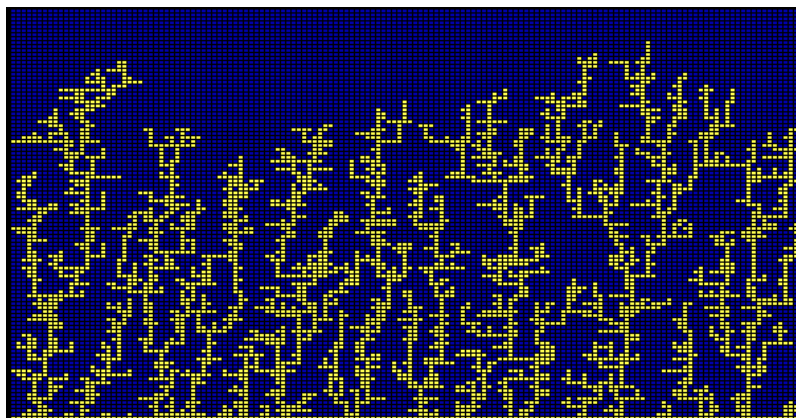
Модель АОД (агрегації з обмеженням дифузії) у її безпосередньому вигляді самою своєю назвою викликає цілком певні асоціації: у пам'яті одразу ж виникають конкретні образи – явище електролізу, утворення сніжинок та коралових рифів тощо. При створенні АОД-моделі ми керувалися одним з основних принципів моделювання, який передбачає вивчення однакових явищ за допомогою різних моделей і різних явищ за допомогою однакових моделей.

#### 3.1. Моделювання електролізу у полі плоского катода.

Якщо у попередній моделі зробити декілька незначних змін, то можна перетворити її на модель електролізу, яка здатна демонструвати процес електролітичного відновлення металу. Під час роботи відповідної програми «FR\_CLAST» роль хвиль виконуватимуть іони металу. Вони також зазнаватимуть випадкових відхилень при своєму русі до катода електролітичної ванни. Катод у вигляді тонкої лінії розташований на нижньому краї екрану. Як тільки черговий іон торкатиметься або катода, або частинки металу, яка вже осіла на нього, він, відновлюючись, приєднується до агрегату, а замість нього з протилежного боку з'являється новий, що дифундує у вану. При цьому на кожному кроці слід перевіряти наявність частинок у безпосередній близькості від нього. Якщо їх нема, іон рухатиметься далі, якщо ж сусіда визначено – агрегує з ним.

Урізноманітнити дослідження можна, зменшуючи розмір катода до зовсім короткого відрізка.

На Мал. 9 зображено типовий кластер, утворений на сітці 100x100 комірок під керуванням програми «FR\_CLAST».



Мал. 9. Кластер, згенерований на сітці 100x100 комірок.

Для визначення фрактальної розмірності даного об'єкту скористаємося виразом

$$D_f = \frac{\ln N}{\ln L},$$

тут  $N$  – кількість частинок у кластері,  $L$  – розмір сітки.

Для цих кластерів ми одержали  $D_f=1,7$ . Отже, вони є фракталами.

### 3.2. Моделювання електролізу у полі точкового катоду.

Розглянемо електролітичну вану з точковим катодом, розташованим у центрі кола, яке відіграватиме роль анода. Якщо напруженість електричного поля буде достатньо малою, то кожен окремий іон можна розглядати як частинку, яка дифундує у просторі між електродами. Дійсно, силова дія катодного потенціалу повинна обмежуватися деяким радіусом: іони, що наблизилися до катоду ближче за цей радіус, екранують катод від решти іонів. Із зменшенням обраного потенціалу величина радіусу взаємодії може ставати достатньо малою. Такий рух триває до тих пір, поки іон не торкнеться катоду – первісного агрегату (затравки) – і не агрегує з ним.

Будь-яка спроба розв'язати задачу «в лоб» виявляється майже безнадійною внаслідок дуже малої ймовірності агрегації для частинки, яка знаходиться на помітній відстані від катоду і здійснює випадкові блукання. Це принципове утруднення долає *метод ренорм-групи*.

Ідея методу полягає у такому. Нехай у початковий момент часу спостережувана електролітична ванна знаходиться на такому віддаленні від експериментатора, що видається дуже малою і містить лише невелику кількість розрізнюваних і практично точкових дільниць. За кожен такт часу іон, що безладно рухається у вані, долає відстань від однієї дільниці до іншої у випадковому напрямі. Оскільки спостережуваних дільниць мало, ймовірність агрегації велика і вневдовзі цей іон приєднується до кластеру. У міру зростання кластеру ми немов би наближаємося до ванни і збільшуємо масштаб її подання так, щоб завжди залишалось не дуже багато периферійних елементів, у яких може блукати ще не агрегований іон.

У практичній реалізації це означає, що навколо початкового кластеру – катода обирається прямокутне вікно, верхня сторона якого дещо вища за найвищий елемент кластеру, нижня сторона – нижча за найнижчий елемент, ліва сторона – лівіша найлівішого елемента, а права – правіша найправішого. У випадкових точках цього вікна з'являються дифундовані іони, які рухаються після появи у випадкових напрямках, відбиваючись від стінок вікна. Самого ж вікна не видно. Якщо приєднаний іон виявляється вище попередньої найвищої точки кластеру, верхня сторона вікна відсувається на крок вгору. Так само поводять себе решта три сторони.

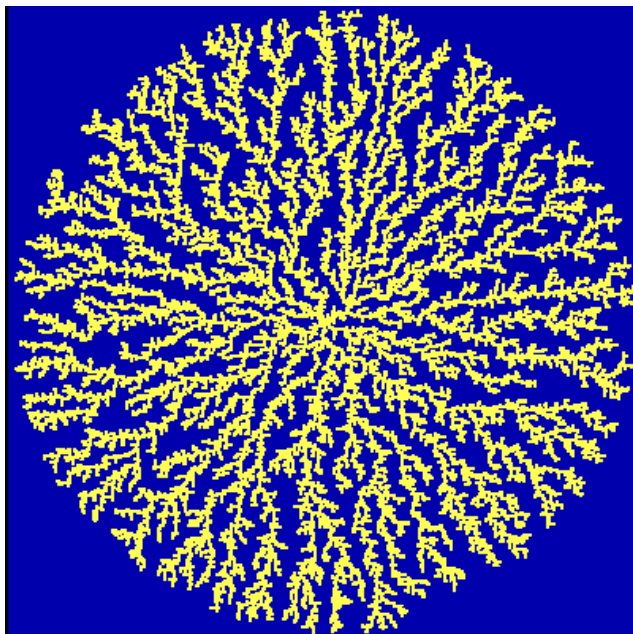
Відповідна програма має ім'я «SNOW\_AOD». Таке ім'я підкреслює той факт, що вона генерує кластер, який за виглядом дуже нагадує сніжинку і при погляді на побудований картинку не можна визначити, який об'єкт моделювався – явище електролізу чи утворення сніжинки. Чи є цей факт випадковим? Мабуть, ні. Адже, як визначають фахівці, виникнення обох об'єктів у теорії описується схожими рівняннями.

Мал.10 ілюструє вигляд подібних кластерів.

Фрактальна розмірність утворюваних тут об'єктів визначається через функцію залежності  $N=N(R)$ , де  $N$  – кількість частинок у колі радіуса  $R$  із центром у затравці (первісному агрегаті):

$$D_f = \frac{\ln N}{\ln R}.$$

Якщо сітка квадратна, то  $R$  можна розглядати як радіус вписаного у неї кола і, отже,  $R=L$  ( $L$  – розмір сторони сітки). Тоді  $D_f = \frac{\ln N}{\ln L}$ .



Мал. 10. Ріст кластеру на дисплеї EOM під керуванням програми «SNOW\_AOD».

Генеруючи кластери на сітках різних розмірів і підраховуючи кількість частинок у кластері (програма автоматизує підрахунок), можна обчислити фрактальну розмірність утворених об'єктів.

За нашими даними для кластерів такого типу фрактальна розмірність приблизно становить  $D_f=1,7$ .

Якщо, зберігаючи блукання, збільшувати ймовірність просування іону у напрямі катоду, то можна імітувати зміну катодного потенціалу і одержувати кластери різного виду.

## ВИСНОВКИ.

Де початок того кінця, котрим закінчується початок?  
К. Прутков. «Плоди роздумів».

1. Виявляється, що фракталами є переважна більшість природних об'єктів: поклади нафти та газу, хмари та рельєфи планет (у тому числі й окремі ландшафти), поверхні живих істот і твердих тіл та багато-багато іншого. Цей факт наводить на думку, що ми живемо серед систем, які за своєю геометрією є фрактальними. При цьому, однак, розмірність простору, у якому ми живемо, як доводять дані перевірки фізичних законів, відрізняється від 3 не більш, ніж на  $10^{-10}$ .

2. Дивно й цікаво, що за допомогою порівняно простих, а інколи й примітивних моделей удається одержувати наочні та правдоподібні уявлення про достатньо складні процеси, які ще не зовсім досліджені у сучасній науці. При цьому важко чекати, що у кожному випадку модель даватиме бездоганні результати. Адже у основу кожної з моделей покладено випадкові значення певних змінних. Зокрема, таким є вибір напрямку чергового переміщення (блукання) частинки у пропонованих нами моделях. Ось чому для підвищення точності і надійності результатів стає необхідним багаторазове повторення моделювання за незмінних значень параметрів.

Не викликає ніяких сумнівів те, що і утворення берегових ліній, і процес електролізу, і ріст сніжинок, і інші природні події, які ми імітували за допомогою моделей, у дійсності відбуваються значно складніше, ніж за нашими модельними уявленнями про них. Проте, у всіх наших прикладах проглядається їхня глибинна спільність належність до фракталів – і водночас одержуються результати, які цілком задовільно погоджуються з даними натурних

експериментів та спостережень. Ось чому дуже часто імітаційне моделювання дає дослідникові можливість наблизитися до розуміння законів, що лежать у основі виучуваних явищ: завжди можна порівняти результати моделювання з даними, одержаними із спостережень або за допомогою моделей, побудованих на основі інших концепцій.

Поняття фракталу, строго кажучи, відноситься до нескінченного об'єкту. Саме тому для об'єктів із скінченими розмірами Б. Мандельброт запропонував назву «передфрактал». Отже, всі розглянуті нами об'єкти по суті являють собою передфрактали певного покоління.

3. Запозичуючи алгоритми з різних джерел, а також створюючи свої власні, ми постійно піклувалися про кінцевого користувача і намагалися вдосконалити відповідні програми так, щоб вони були придатними не лише для унаочнення розглядуваних явищ, а й для виконання практичних досліджень. Саме комп'ютер виконує у нас одноманітні й нудні розрахунки, пов'язані із статистичною обробкою даних, побудовою таблиць та графіків, з виведенням їх на екран або принтер.

Але не це було тут головним. Таку роботу, врешті решт, міг би виконати і сам користувач. А ось чи зміг би він підрахувати кількість елементів, які входять до складу кластеру, утвореному на сітці розмір  $100 \times 100 = 10000$  комірок? Звичайно, ні. Така робота під силу лише комп'ютеру.

Сподіваємося, що дана робота у певній мірі виправдала свою головну мету – проілюструвати приклади адекватного застосування комп'ютерного моделювання у сучасних природничо-наукових дослідженнях.

4. Як і минулорічна, дана робота може бути використана для комп'ютерної підтримки практичних занять факультативних курсів «Основи комп'ютерного моделювання» (як це робиться у нас) або ж спецкурсу «Фізика твердого тіла».

5. Основним джерелом добору тем для наших самостійних досліджень був і залишається журнал «Квант». Принаймні, цікавим продовженням даної роботи було б моделювання і дослідження на фрактальність кластерів, які виникають у складних біологічних системах із взаємодією окремих співтовариств (популяцій) типу «хижак–жертва» або їм подібних.

\* \*  
\*

Адам Казимирович натиснув педалі. «Антилопа» заскреготала і зупинилася.  
І. Ільф, Є. Петров. «Золоте теля».

### Література:

1. Водолаженко А. Деловые применения компьютеров. (Раздел «Моделирование»). Харьков.: Харьковский педагогический университет, РЦНИТ. 1994. – 50 с.
2. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. Ч. 1,2. Гл. 13, стр. 167-172. М.: Мир, 1990. – Т.2, 399 с.
3. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. М.: Физматлит, 1994. – 192 с.
4. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Наука, Физматлит, 1997.
5. Соколов И.М. Фракталы. «Квант», №5, 1989. Стр. 6-13. – М.: Наука.
6. Федер Е. Фракталы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 254 с., ил.
7. Шпилевский А. Фрактальные кластеры. «Информатика и образование», №5, 1989, стр. 99-103. - М.: Педагогика.