

## ФІЗИЧНІ МОДЕЛІ В КУРСІ “ОСНОВИ КОМП’ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ”

Н.В. Грищенко, Є.В. Чернов, С.О. Семеріков

Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний інститут

Огляд методичної літератури з комп’ютерного моделювання показує існування різних підходів до його викладання у середній та вищій школі. Загальноприйнятим є підхід, при якому побудова моделей здійснюється з використанням апарату вищої математики, яким володіють переважно студенти старших курсів. Це зумовлює перенесення курсу «Методи математичного моделювання» на 7-8, а іноді і на 9-10 семестри, що знижує його роль у формуванні світогляду майбутнього спеціаліста, яке відбувається у старших класах школи та на молодших курсах вузу.

Такий стан справ змусив вдатися до створення пропедевтичного курсу «Основи комп’ютерного моделювання», який було розроблено спільними зусиллями кафедри інформатики та прикладної математики Криворізького педінституту (завідувач кафедрою – професор В.М. Соловійов) та кафедри інформатики Центрально-Міської гімназії м. Кривого Рогу (завідувач кафедрою – заступник директора з наукової роботи І.О. Теплицький). Методичним забезпеченням курсу є навчальний посібник І.О. Теплицького, призначений для учнів старших класів школи та студентів молодших курсів вузу. Концепція курсу та результати його апробації було викладено у працях [1,2].

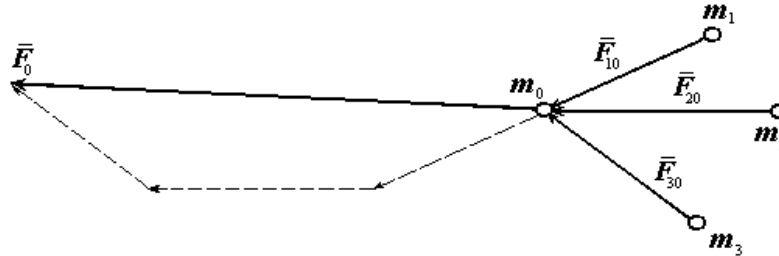
При створенні посібника однією з основних задач був підбір змістовних моделей, побудова яких не вимагає від учнів знань, що виходять за межі шкільної програми. Основна увага при вивченні моделей приділена технології моделювання. Кожна модель передбачає не менше трьох версій, що по-

ступово ускладнюються. Робота починається з аналізу досліджуваного предмета (явища), виділення його суттєвих (з точки зору дослідника) якостей, що призводить до висунення певних спрощуючих припущень. Далі, на основі висунутих припущень, відбувається формалізація моделі – запис сформульованих залежностей у вигляді математичних співвідношень. Обчислювальний експеримент – один з основних етапів роботи з побудованою моделлю, який дозволяє, змінюючи її параметри, отримати уявлення про поведінку досліджуваного об'єкта у різних ситуаціях та зробити певні висновки щодо її адекватності.

Суттєвим є питання про вибір середовища для моделювання, яке повинне давати можливість відстежувати результати моделювання як у числовій (у вигляді часових рядів), так і у графічній формі (у вигляді графіків залежностей обчислюваних величин). Традиційно таким середовищем є програми, написані однією з мов високого рівня, проте для пропедевтичного курсу, яким є наш, цілком прийнятним середовищем є електронні таблиці, які дозволяють, не відволікаючись на інтерфейс користувача, сконцентруватися безпосередньо на роботі з моделлю.

Чильне місце в обговорюваному курсі посідають динамічні моделі з шкільного курсу фізики, що описуються законами Ньютона. Відомо, що велику кількість динамічних задач засобами елементарної математики аналітично розв'язати неможливо. Проте чисельне розв'язання – методом скінченних різниць – для школярів цілком доступне і не викликає утруднень. Р. Фейнман, піонер використання такого підходу для роботи з молодшими студентами, на своїх лекціях використовував саме таблиці, які «є, звичайно, просто зручною формою запису результатів, отриманих з рівнянь, і фактично повністю замінюють їх» [3]. Однією з задач, яку він пропонував студентам, був рух планети навколо центрального тіла. Розглянемо її реалізацію у електронних таблицях.

Нехай наша система складається з чотирьох тіл з масами  $m_0, m_1, m_2$  та  $m_3$  відповідно (мал. 1).



Мал. 1

Згідно закону всесвітнього тяжіння, сила, що діє на тіло з масою  $m_i$  з боку всіх інших, дорівнює векторній сумі парних взаємодій:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{\substack{j \\ (i \neq j)}} \mathbf{F}_{ji} = \sum_{\substack{j \\ (i \neq j)}} G \frac{m_j m_i}{r_{ji}^3} \mathbf{r}_{ji} = G m_i \sum_{\substack{j \\ (i \neq j)}} \frac{m_j}{r_{ji}^3} \mathbf{r}_{ji} \quad (1)$$

Ця сила, згідно другого закону Ньютона, надає тілу прискорення:

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i \quad (2)$$

Прирівнюючи формули (1) та (2), отримуємо формулу для визначення прискорення:

$$m_i \mathbf{a}_i = G m_i \sum_{\substack{j \\ (i \neq j)}} \frac{m_j}{r_{ji}^3} \mathbf{r}_{ji} \Rightarrow \mathbf{a}_i = G \sum_{\substack{j \\ (i \neq j)}} \frac{m_j}{r_{ji}^3} \mathbf{r}_{ji} \quad (3)$$

Зауважимо, що у нашому випадку ми, взагалі кажучи, не можемо користуватися класичними формулами для визначення швидкості та координати, бо, згідно (3), прискорення залежить від координати, тобто *рух тіла під дією сили тяжіння не є рівноприскореним*. Як можна подолати цю перешкоду? Скористаємося чисельним методом – розіб'ємо весь час руху тіла на дуже малі проміжки і будемо вважати, що на кожному з цих елементарних проміжків прискорення є постійним.

Нехай на початку руху  $i$ -те тіло має координати  $(x_{i0}, y_{i0})$ , прискорення  $\mathbf{a}_{i0}$  та швидкість  $\mathbf{v}_{i0}$ . Наприкінці першого проміжку часу тіло набуде прискорення

$a_{i1}$  за (3); його швидкість обчислюватиметься за формулою:

$$\mathbf{v}_{i1} = \mathbf{v}_{i0} + \mathbf{a}_{i0}\Delta t \quad (4)$$

Знаючи швидкість, ми можемо обчислити нові координати тіла:

$$\begin{aligned} x_{i1} &= x_{i0} + v_{i1x} \Delta t \\ y_{i1} &= y_{i0} + v_{i1y} \Delta t \end{aligned} \quad (5)$$

Змінюючи  $i$ , визначаємо прискорення, координати та швидкості всіх інших тіл наприкінці першого проміжку часу. Повторюючи цю процедуру, ми врешті-решт одержимо їх координати, дискретизовані проміжком часу  $\Delta t$ , що дасть нам змогу побудувати графіки їх руху. Для тестування візьмемо спочатку лише два тіла, а далі вдосконалюватимемо нашу модель, поступово вводячи до розгляду інші тіла.

Отже, ми можемо записати остаточний

### АЛГОРИТМ РОБОТИ З МОДЕЛЛЮ:

1. Створимо електронну таблицю за таким зразком:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	$a_{1x}$	$a_{1y}$	$a_{2x}$	$a_{2y}$	$v_{1x}$	$v_{1y}$	$v_{2x}$	$v_{2y}$	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	<i>Дано:</i>	
2													$G=$	
3													$\Delta t=$	
4													$m_1=$	
5													$m_2=$	
6													$\mathbf{v}_{1x0}=$	
7													$\mathbf{v}_{1y0}=$	
8													$\mathbf{v}_{2x0}=$	
9													$\mathbf{v}_{2y0}=$	
10													$x_{10}=$	
11													$y_{10}=$	
12													$x_{20}=$	
13													$y_{20}=$	
14														

2. Занесемо у другий рядок початкові дані:

комірки	формули / числа
A2	$=\$N\$2*\$N\$5*(K2-I2)/\text{СТЕПЕНЬ}(\text{КОРЕНЬ}((K2-I2)^2+(L2-J2)^2);3)$
B2	$=\$N\$2*\$N\$5*(L2-J2)/\text{СТЕПЕНЬ}(\text{КОРЕНЬ}((K2-I2)^2+(L2-J2)^2);3)$
C2	$=\$N\$2*\$N\$4*(I2-K2)/\text{СТЕПЕНЬ}(\text{КОРЕНЬ}((K2-I2)^2+(L2-J2)^2);3)$
D2	$=\$N\$2*\$N\$4*(J2-L2)/\text{СТЕПЕНЬ}(\text{КОРЕНЬ}((K2-I2)^2+(L2-J2)^2);3)$

E2	=N\$6
F2	=N\$7
G2	=N\$8
H2	=N\$9
I2	=N\$10
J2	=N\$11
K2	=N\$12
L2	=N\$13

В комірках E2-L2 ми переносимо значення із стовбчика «Дано», а в A2-D2 заносимо формули для обчислення проєкцій прискорення тіл згідно (3).

3. У третій рядок в комірках A3-D3 скопіюємо вміст комірок A2-D2, а комірках E3-L3 модифікуємо відповідно до формул (4) та (5):

<i>комірки</i>	<i>формули / числа</i>
E3	=E2+A2*N\$3
F3	=F2+B2*N\$3
G3	=G2+C2*N\$3
H3	=H2+D2*N\$3
I3	=I2+E3*N\$3
J3	=J2+F3*N\$3
K3	=K2+G3*N\$3
L3	=L2+H3*N\$3

4. Скопіювати третій рядок у наступні рядки (їх кількість добиратимемо експериментально).

Далі ми можемо розпочати

### *ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ:*

Введемо такі початкові дані:  $G=1$ ;  $\Delta t=0,01$ ;  $m_1=10$ ;  $m_2=8$ ;  $v_{1x0}=0$ ;  $v_{1y0}=0$ ;  $v_{2x0}=2,2$ ;  $v_{2y0}=0,1$ ;  $x_{10}=0$ ;  $y_{10}=0$ ;  $x_{20}=1$ ;  $y_{20}=1$  (мал. 2). Легко побачити, що їх вибір нічим не зумовлений, проте для тестування моделі цього цілком достатньо. Зауважимо, що при виборі слід звернути увагу на час дискретизації – він не повинен бути занадто великим (при цьому алгоритм, що включає в себе різницеву схему, втратить стійкість – чим більше проміжок, тим менш достовірні результати), проте і занадто малим його робити не слід – нам буде заважати не лише величезна кількість рядків, які нам треба буде скопіювати, а й постійно зростаюча в операціях сумування похибка округлення.

Microsoft Excel - Задача двох тіл-1.xls

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервіс Данні Окно ?

Times New Roman Cyr 12 Ж К Ц

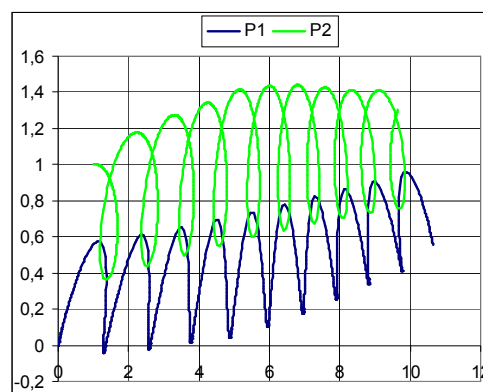
=\$N\$2\*\$N\$4\*(J8-L8)/СТЕПЕНЬ(КОРЕНЬ((K8-I8)^2+(L8-J8)^2);3)

	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	$a_{2y}$	$v_{1x}$	$v_{1y}$	$v_{2x}$	$v_{2y}$	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	Дано:
2	-3,53553	0	0	2,2	0,1	0	0	1	1	$G=1$
3	-3,42346	0,02828	0,02828	2,16464	0,06464	0,00028	0,00028	1,02165	1,000646	$\Delta t=0,01$
4	-3,31908	0,05625	0,05567	2,12969	0,03041	0,00085	0,00084	1,04294	1,000951	$m_1=10$
5	-3,2217	0,08391	0,08222	2,09511	-0,0028	0,00168	0,00166	1,06389	1,000923	$m_2=8$
6	-3,13071	0,11131	0,108	2,06086	-0,035	0,0028	0,00274	1,0845	1,000573	$v_{1x0}=0$
7	-3,04558	0,13846	0,13304	2,02692	-0,0663	0,00418	0,00407	1,10477	0,99991	$v_{1y0}=0$
8	-2,9658	0,16539	0,15741	1,99326	-0,0968	0,00584	0,00565	1,1247	0,998942	$v_{2x0}=2,2$
9	-2,89095	0,19212	0,18113	1,95986	-0,1264	0,00776	0,00746	1,1443	0,997678	$v_{2y0}=0,1$
10	-2,82065	0,21866	0,20426	1,92667	-0,1553	0,00994	0,0095	1,16357	0,996125	$x_{10}=0$
11	-2,75453	0,24505	0,22683	1,89369	-0,1835	0,01239	0,01177	1,18251	0,994289	$y_{10}=0$
12	-2,6923	0,27129	0,24886	1,86089	-0,2111	0,01511	0,01426	1,20112	0,992178	$x_{20}=1$
13	-2,63366	0,29741	0,2704	1,82824	-0,238	0,01808	0,01696	1,2194	0,989798	$y_{20}=1$
14	-2,57836	0,32343	0,29147	1,79571	-0,2643	0,02132	0,01988	1,23736	0,987155	
15	-2,52616	0,34936	0,3121	1,7633	-0,2901	0,02481	0,023	1,25499	0,984254	
16	-2,47686	0,37522	0,33231	1,73097	-0,3154	0,02856	0,02632	1,2723	0,9811	
17	-2,43026	0,40103	0,35212	1,69871	-0,3402	0,03257	0,02984	1,28929	0,977698	

Готово

Мал. 2

На мал. 3 – графік руху тіл, отриманий при введених початкових даних:



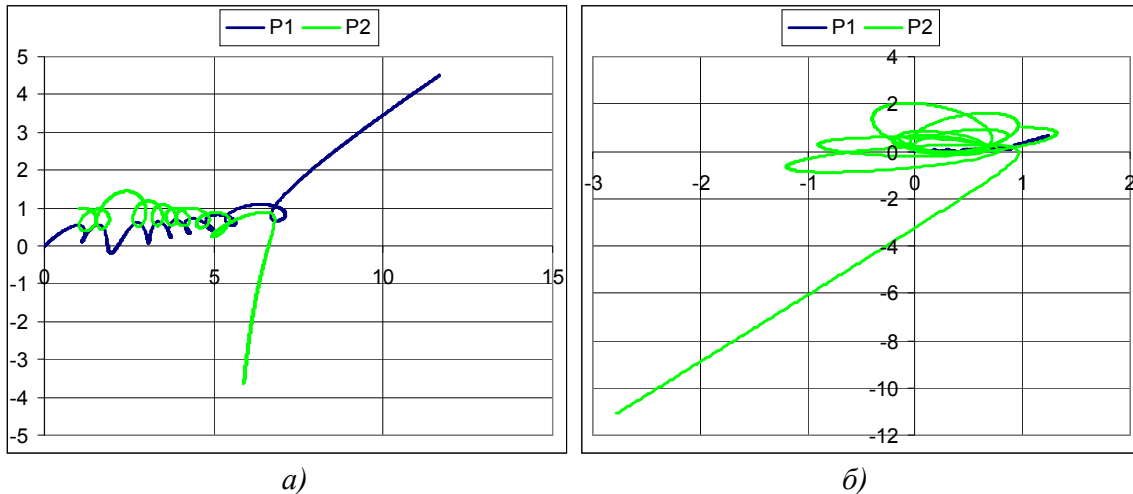
Мал. 3

Проведемо

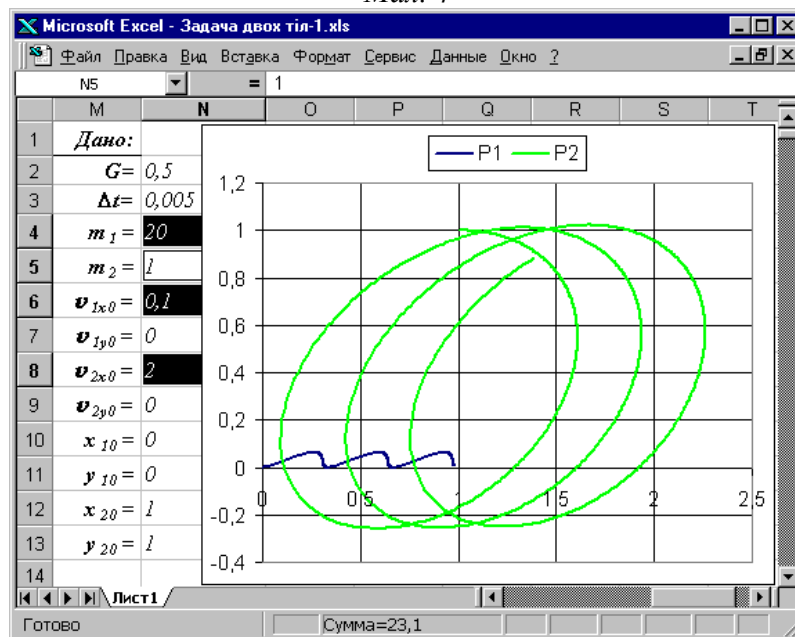
### АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ:

З малюнка видно, що тіла дійсно рухаються згідно закону всесвітнього тяжіння: хоча траєкторія їх спільного руху і звивиста, проте можна побачити, що у моменти зближення прискорення, відповідно до закону всесвітнього тяжіння, збільшується, що, у свою чергу, призводить до різкого збільшення

швидкості. Тіла «розлітаються», але із збільшенням відстані прискорення зменшується до 0, аж поки не змінює свій знак. Цей факт означає, що тіла повинні знову зближуватися і т.д.



Мал. 4



Мал. 5

Поставимо питання:

1. А що буде, якщо тіла занадто зближаться? Якщо їх маси співрозмірні, то вони на великій швидкості віддалятимуться одне від одного у нескінченність (мал. 4а), якщо ж ми маємо справу з системою планета-супутник, то супутник передасть свій імпульс планеті і вирветься з її «гравітаційних

об'ємів» (мал. 4б).

2. Які початкові умови треба задати, щоб тіла рухались у одному напрямку? Для відповіді на це питання скористаємося законом збереження імпульсу: задамо початкові дані такими, щоб виконувалося, наприклад, співвідношення:

$$m_1 v_{1x0} = m_2 v_{2x0}.$$

Результати підтверджують нашу здогадку (мал. 5).

Незважаючи на довільність вихідних даних, під час тестування ми впевнилися у *якісній відповідності* нашої моделі припущенням, покладеним у її основу (якими у нашому випадку виступають закони динаміки). Завдяки використанню зручного середовища для моделювання, у обчислювальному експерименті ми з легкістю змінювали параметри моделі, миттєво отримуючи результати. І, нарешті, наявність зручного засобу візуалізації результатів моделювання дозволило нам провести аналіз експерименту і скорегувати початкові дані у відповідності до тих результатів, які ми хотіли отримати.

*Література:*

1. Соловйов В.М., Семеріков С.О., Теплицький І.О. Основи комп'ютерного моделювання в середній школі та педагогічному вузі. // Збірник науково-практичних матеріалів Всеукраїнської конференції в 3-х частинах. Частина 2. – Дніпропетровськ, 1998. – 216 с., с. 53-56.
2. Теплицький І.О., Семеріков С.О. Вивчення фрактальних кластерів за допомогою імітаційних комп'ютерних моделей. // Збірник наукових праць Східноукраїнського держ. університету. – Луганськ: Вид-во СУДУ, 1998. – 302 с., с. 276-289.
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. – М.: Мир, 1976. – Т. 1-2. – 440 с., с. 170.