Міністерство освіти та науки України
Національна металургійна академія України

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

Збірник наукових праць
Випуск VI

Том 1

Кривий Ріг
Видавничий відділ НМетАУ
2006

УДК 371

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. Випуск VI: В 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2006. – Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – 397 с.

Збірник містить статті з різних аспектів дидактики математики і проблем її викладання в вузі та школі. Значну увагу приділено питанням розвитку комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання математики та модернізації математичної освіти в контексті орієнтирів Болонського процесу.

Для студентів вищих навчальних закладів, аспірантів, наукових та педагогічних працівників.

Друкується за ухвалою вченої ради
Національної металургійної академії України

ISBN 966-8413-19-7

Розділ I

Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання математики

ПРОГРАМА СПЕЦІАЛЬНОГО КУРСУ “НАВЧАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ЇХ ПІДТРИМКА ЗАСОБАМИ ІКТ У КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ”

М.І. Жалдак[1], В.Ю. Биков[2], Ю.О. Жук[2], С.А. Раков[3], Л.І. Білоусова[3], В.П. Горох[3]
[1] м. Київ, Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова
[2] м. Київ, Науково-дослідний інститут інформатизації освіти і засобів навчання АПН України
[3] м. Харків, Харківський національний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди
rakov_s@ukr.net

Усталення компетентнісної парадигми освіти зумовлює новий напрям у розвитку методології навчання, її рух від передавання системи знань учню (студенту) у процесі його навчання до самостійного конструювання учнем (студентом) особистісної системи знань у процесі власної пізнавальної діяльності. На зміну традиційним методам навчання приходять нові, які органічно поєднують плідні педагогічні ідеї з потужним потенціалом сучасних інформаційно-комунікаційних технологій. Серед них особливе місце посідає дослідницький підхід у навчанні, який найбільш повно і найбільш природно відповідає компетентнісній парадигмі освіти.

Метою спеціального курсу “Навчальні дослідження та їх підтримка засобами ІКТ у курсі геометрії загальноосвітніх навчальних закладів” є формування у студентів (слухачів) теоретичної бази знань про сутність, психолого-педагогічні засади і технологічні основи дослідницького підходу в навчанні та вироблення практичних навичок використання дослідницького підходу у практиці навчання геометрії в загальноосвітніх навчальних закладах.

Пояснювальна записка

Спеціальний курс “Навчальні дослідження та їх підтримка засобами ІКТ у курсі геометрії загальноосвітніх навчальних закладів” органічно доповнює професійну математичну і методичну підготовку студентів розглядом основних аспектів теорії і практичної реалізації дослідницького підходу в навчанні геометрії учнів загальноосвітніх навчальних закладів.

У процесі вивчення курсу студенти (слухачі) мають набути власного досвіду постановки і проведення навчальних геометричних досліджень на основі комп’ютерного моделювання у середовищах підтримки математичної діяльності.

Курс орієнтовано на активні форми навчання: проведення навчальних експериментів, виконання проектів, підготовку доповідей, рефератів і презентацій.

Курс закінчується захистом дослідницького проекту у формі наукової доповіді.

Для забезпечення навчального процесу необхідна аудиторія з відповідним комп'ютерним обладнанням і такі програмно-апаратні засоби: мультимедійний інтерактивний комплекс МІС, пакети динамічної геометрії (DG, Gran-2D, Gran-3D), а також текстовий редактор (наприклад, Word) та система для підготовки презентацій (наприклад, PowerPoint).

Курс призначається для студентів вищих навчальних закладів, які здійснюють підготовку фахівців за напрямом "Педагогічна освіта. Математика.", а також для вчителів математики, які проходять курсову перепідготовку в закладах післядипломної освіти.

Курс розраховано на 72 години: 36 год. аудиторної та 36 год. індивідуальної роботи.

№	Тема	Години		
		Лекційні	Лаб. роб.	Інд. роб.
1.	**Компетентнісна парадигма сучасної математичної освіти** • Поняття компетентністної парадигми як реакції системи освіти на становлення розвинутого ринку і громадянського суспільства; • Ієрархія компетентностей: ключові, галузеві, предметні компетентності; • Складові математичної компетентності: процедурна, логічна, технологічна, дослідницька, методологічна; • Напрями набуття математичної компетентності; • Міжнародні порівняльні проекти TIMSS і PISA дослідження ефективності систем освіти, зокрема математичної освіти; • Поняття математичної грамотності (за матеріалами проекту PISA).	2	0	2
2.	**Дослідницький підхід в освіті як методологічна основа компетентнісної парадигми освіти** • Дослідницький підхід в навчанні математики як відбиття методології наукових досліджень у галузі математики; • Етапи математичного дослідження: математизація проблеми, моделювання (побудова математичної та комп'ютерної моделі), формулювання гіпотези (на основі експериментів з комп'ютерною моделлю), доведення (або спростування) гіпотези,	2	2	2

№	Тема	Години		
		Лек-ційні	Лаб. роб.	Інд. роб.
	інтерпретація отриманих результатів, систематизація . • Типи навчальних математичних досліджень: дослідження-концептуалізація; дослідження-пошук властивостей; дослідження-застосування; дослідження-систематизація; • Приклади навчальних математичних досліджень; • Сутність підготовки вчителя та учня до використання дослідницького підходу у навчанні математики.			
3.	**Психолого-педагогічні засади дослідницького підходу у навчанні математики** • Дослідницький підхід у навчанні математики з точки зору системного погляду на сучасні психолого-педагогічні концепції навчання (активізація пізнавальної діяльності, проблемне навчання, розвиваюче навчання, диференціація навчання, особистісно орієнтований підхід, евристичне навчання, діяльнісний підхід у навчанні, конструктивізм у навчанні); • Дослідницький підхід як каталізатор вдосконалення системи навчання математики; • Теорія освітнього соціуму Л.С. Виготського як психолого-педагогічна основа дослідницького підходу у навчанні математики.	0	4	4
4.	**Комп’ютерна підтримка дослідницького підходу у навчанні математики.** • Математичний апарат мов програмування загального призначення (Algol, PL/1, Basic, C, Pascal та ін.); • Математичний апарат спеціалізованих (орієнтованих на розв’язання математичних задач) мов програмування: алгоритмічних (Fortran та ін.), функціональних (Lisp та ін.), мов логічного програмування (Prolog та ін.); • Вузькоспеціалізовані і спеціалізовані математичні пакети (MacMath, Eureca, SPSS, StatGraph та ін.); • Пакети комп’ютерної алгебри (Derive, Reduce, Maxima, MuMath, MatLab, MathCAD та ін.);	2	2	2

№	Тема	Години		
		Лек-ційні	Лаб. роб.	Інд. роб.
	• Пакети динамічної геометрії (Cabri, SketchPad, Cinderella, GeoNext, Gran–2D, DG та ін.); • Комп'ютерні математичні системи — універсальні, поліфункціональні пакети, що інтегрують компоненти всіх інших математичних систем.			
5.	**Пакети динамічної геометрії та їх використання для побудови і дослідження геометричних моделей** • Порівняльний аналіз систем динамічної геометрії; • Дослідницькі інструменти систем динамічної геометрії; • Побудова динамічного рисунка у пакеті динамічної геометрії як геометрична задача; • Геометрична задача на побудову як алгоритмічна задача; • Етапи навчального дослідження і їх підтримка засобами пакетів динамічної геометрії. • Поняття динамічного опорного конспекту як організаційно-методичної основи навчального дослідження.	0	4	2
6.	**Мультимедійний інтерактивний комплекс МІС та його застосування на уроках математики** • Інтерактивні методи навчання. Діалогічна педагогіка і педагогічна діалогіка; • Підтримка інтерактивних методів навчання засобами ІКТ; • Підтримка інтерактивних методів навчання засобами мультимедійного інтерактивного комплексу МІС.	2	0	2
7.	**Навчальні дослідження типу *дослідження-концептуалізація* у курсі геометрії та їх підтримка засобами ІКТ** • Аксіоми геометрії та їх експериментальна перевірка у середовищі пакетів динамічної геометрії; • Формування концепцій геометричних фігур на основі конструювання і маніпулювання їх комп'ютерними моделями;	2	2	0

№	Тема	Години		
		Лек-ційні	Лаб. роб.	Інд. роб.
	• Формування концепцій геометричних перетворень на основі комп'ютерних експериментів.			
8.	**Навчальні дослідження типу *дослідження-пошук властивостей* у курсі геометрії та їх підтримка засобами ІКТ** • Дослідження властивостей геометричних фігур на основі конструювання комп'ютерних моделей і вимірювання їх параметрів у процесі маніпулювання; • Дослідження властивостей геометричних перетворень на основі комп'ютерних експериментів; • Дослідження властивостей груп геометричних перетворень на основі комп'ютерних експериментів.	2	2	0
9.	**Навчальні дослідження типу *дослідження-застосування* у курсі геометрії та їх підтримка засобами ІКТ** • Поняття "Експертної системи" задачі – автоматизованої системи конструювання комп'ютерної моделі для розв'язування задачі і динамічного визначення її параметрів; • Характеристики "Експертної системи" задачі: системи вхідних і вихідних параметрів, правильність, точність, область застосування, зручність, дизайн; • Експертні системи для розв'язування трикутників; • Побудова експертних систем для різних типів чотирикутників і різних наборів вхідних параметрів (паралелограма, трапеції, ромба, описаного чотирикутника тощо).	2	2	0
10.	**Навчальні дослідження типу *дослідження–систематизація*.** Убудування результатів дослідження проблеми в існуючу особистісну систему знань на засадах: • історизму – як задача виникла в процесі розвитку людства, зокрема математики;	2	2	0

№	Тема	Години		
		Лек-ційні	Лаб. роб.	Інд. роб.
	• узагальнення – як змінюється задача при переході до більш загальної постановки, при переході від двовимірної задачі до тривимірної, n-вимірної; • конкретизації – як змінюється задача при введенні додаткових умов; • динамізму – як змінюються властивості розв'язку задачі при зміні її параметрів; • інтерпретації – як можна інтерпретувати задачу в термінах різних предметних галузей; • застосування – як можна використати задачу на практиці.			
11.	**Підготовка дослідницького проекту на задану тему**	0	0	6
12.	**Індивідуальна дослідницька робота**	0	0	18
	Загалом	14	20	38

Рекомендована література

1. Жалдак М.И. Система подготовки учителя к использованию информационной технологии в учебном процессе: Автореф. дис. докт. пед. наук. – М.: НИИ СИМО АПН СССР, 1989. – 48 с.
2. Жалдак М.І. Гуманітарний потенціал інформатизації навчального процесу // Проблеми інформатизації освіти: Зб. наук. праць. – К.: УДПУ, 1994. – С. 3–20.
3. Жалдак М.І. Гуманітарний потенціал інформатизації освіти // Рідна школа – 1990. – № 7 – 8. – С. 61–64.
4. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики. – К.: Техніка, 1997. – 304 с.
5. Жалдак М.І., Вітюк О.В. Комп'ютер на уроках геометрії. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2000. – 160 с.
6. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ. – Харків: Факт, 2005. – 360 с.
7. Пиаже Ж. Избранные педагогические труды: Пер. с франц. – М.: Просвещение, 1969. – 660 с.
8. Платон. Диалоги. – М.: АСТ; Харьков: Фолио, 2001. – 384 с.
9. Пойа Д. Как решать задачу: Пер. с англ. – М.: Учпедгиз, 1959. – 207 с.
10. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения.– М: Наука, 1975. – 464 стр.
11. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения: Пер. с англ. – М.: Наука, 1975. – 464 с.
12. Пойа Д. Математическое открытие: Пер. с англ. – М.: Наука, 1976. –

448 с.
13. Раков С.А., Олейник Т.А., Скляр Е.В. Использование пакета Derive в курсе математики. Учебное пособие. – Харьков: РЦНИТ, 1996. – 160 с.
14. Раков С.А., Горох В.П. Компьютерные эксперименты в геометрии. – Харьков: РЦНИТ, 1996. – 176 с.
15. Раков С.А., Горох В.П., Олійник Т.О., Гармашова Н.М., Якуба М.Р. Інформаційні технології в аналітичній геометрії. – Харків: РЦНІТ, 2000. – 192 с.
16. Раков С.А. та ін. Відкриття геометрії через комп'ютерні експерименти в пакеті DG. Посібник для викладачів математики / Раков С.А., Горох В.П., Осенков К.О., Думчикова О.В., Костіна О.В., Ларін О.Р., Лисиця В.Т., Олійник Т.О., Пікалова В.В. – Харків: Вікторія, 2002. – 136 с.
17. Раков С.А. Конструктивізм у математичній освіті та його підтримка засобами інформаційних технологій // Засоби навчальної та науково–дослідної роботи: Зб. наук. пр. – Харків: ОВС, 2000. – Вип. 14.– С. 156–160.
18. Раков С.А. Математична діяльність та її підтримка засобами інформаційних технологій // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2001. – № 3. – С. 8–22.
19. Раков С.А. Навчальні дослідження як моделювання професійної математичної діяльності та їх комп'ютерна підтримка // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць. – К.: НПУ ім. М.П Драгоманова, 2001. – № 4. – С. 66–75.
20. Раков С.А. Дослідницький підхід у курсі геометрії, відкриті задачі, проблемні області, чотирикутники та пакет динамічної геометрії DG // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2004.– № 1(8). – С. 42–55.
21. Раков С.А. Програмно-методичний комплекс "ІКТ в аналітичній геометрії" // Нові технології навчання: Науково-методичний зб. (Спеціальний випуск: Матеріали міжнародної науково-методичної конференції "Нові технології навчання у вищій технічній освіті: досвід, проблеми, перспективи", Київ, 18–20 жовтня 2004 р.). – Київ: НУХТ, 2004.– С. 137–143.
22. Раков С.А. Комп'ютерна підтримка дослідницького підходу у математичній освіті, Болонський процес та профілізація загальноосвітньої школи // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2005. – №2 (9). – С. 42–53.
23. Раков С.А. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти // Математика в школі. – К.: Педагогічна преса, 2005. – №5. – С. 10–13.

24. Раков С.А. Міжнародний конгрес ICME-10 з питань математичної освіти: дослідницькі підходи у навчанні та ІКТ // Математика в школі.– К.: Педагогічна преса, 2005. – №3. – С. 10–15.
25. Раков С.А. Пакети динамічної геометрії у курсі геометрії (основні властивості найпростіших геометричних фігур) // Математика в школі. – К.: Педагогічна преса, 2005. – №7. – С. 2–9.
26. Раков С.А., Горох В.П. Програмно-методичний комплекс DG як крок від традиційної до інформаційної технології навчання геометрії // Комп'ютер у школі і сім'ї, 2003. – № 1. – С. 20–23.
27. Раков С.А., Горох В.П., Осєнков К.А. Навчальні дослідження у курсі геометрії за темою "Геометричні перетворення" з використанням пакета динамічної геометрії DG // Математика в школі. – Київ: Педагогічна преса, 2005. – №1. – С. 10–14

ПРОГРАМА СПЕЦІАЛЬНОГО КУРСУ "НАВЧАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ЇХ ПІДТРИМКА ЗАСОБАМИ ІКТ У КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ"

М.І. Жалдак[1], В.Ю. Биков[2], Ю.О. Жук[2], С.А. Раков[3], Л.І. Білоусова[3], В.П. Горох[3]

[1] м. Київ, Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова

[2] м. Київ, Науково-дослідний інститут інформатизації освіти і засобів навчання АПН України

[3] м. Харків, Харківський національний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди

rakov_s@ukr.net

У більшості розвинених країн світу інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) є не тільки неодмінним атрибутом, але й ефективним інструментом освітньої і наукової практики. Вплив, спричинений використанням ІКТ у цих галузях людської діяльності, мав наслідком суттєву трансформацію цілей, змісту, характеру, форм навчання і викладання, проведення експериментальних і теоретичних досліджень, що позначилося на появі і усталенні таких термінів, як електронне навчання (E-learning), електронна освіта (E-education), електронна наука (E-science).

Сьогодні в Україні здійснюється широкомасштабна програма інформатизації освіти і науки, відбувається інтенсивний пошук і відпрацювання ефективних концепцій і методик комп'ютерно-орієнтованого навчання. Серед таких концепцій особливе місце належить дослідницькому підходу з використанням ІКТ, який визнається міжнародною освітянською спільнотою як найбільш плідний і перспективний у вдосконаленні навчального процесу, зокрема з дисциплін природничо-математичного циклу. Численними дослідженнями доведено, що послідовна реалізація такого підходу сприяє досягненню нової якості і продуктивності навчання, перетворює його на процес набуття, конструювання знань самим учнем в результаті його активної предметної діяльності.

Актуальність впровадження дослідницького підходу в освітню практику зумовлює необхідність уведення в навчальні плани вищих педагогічних навчальних закладів відповідних спеціальних курсів. Запропоновані спеціальні курси "Навчальні дослідження та їх підтримка засобами ІКТ у курсі алгебри і початків аналізу загальноосвітніх навчальних закладів" і "Навчальні дослідження та їх підтримка засобами ІКТ у курсі геометрії загальноосвітніх навчальних закладів" мають на меті слугувати вдосконаленню професійної компетентності майбутніх вчителів математики, забезпеченню їх належної підготовки до ефективного використання дослідницького підходу у практиці навчання математики.

У даній статті розглянуто обґрунтування, програму, особливості реалізації першого з вищезазначених спеціальних курсів.

Пояснювальна записка

Спеціальний курс продовжує тематику курсу "Педагогічна інформатика" (1 семестр), який викладається для студентів всіх спеціальностей і мусить розкривати потенціал інформаційно-комунікаційних технологій як засобу навчання. Цей курс для всіх спеціальностей складається з поглибленого знайомства з компонентами офісного пакета MS Office (як найбільш поширених пакетів загального використання) і спеціалізованих професійних пакетів (АРМів – автоматизованих робочих місць) (як найбільш потужних пакетів для відповідної спеціальності) під кутом зору їх доцільного використання у навчанні. Для математики такими АРМами є комп'ютерні математичні системи (КМС): пакети динамічної геометрії (DGS – Dynamic Geometry Systems) та пакети комп'ютерної алгебри (CAS – Computer Algebra Systems). Таким чином вже з першого курсу студенти знайомі з відповідними пакетами (ми навмисно не наголошуємо, які конкретно КМС використовуються на заняттях, оскільки визнаного лідера і загальнопоширених КМС поки що немає, хоча характеристики лідерів у цих галузях приблизно однакові).

Наведемо список кількох пакетів динамічної геометрії, які можуть бути використані у даному курсі: SketchPad (США); Cabri (Франція); Cinderella (ФРН); Next (ФРН); Gran-2D (Україна, Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова); Gran-3D (Україна, Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова); DG (Україна, Харківський національний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди).

Наведемо також список кількох пакетів комп'ютерної алгебри, які можуть бути використані у даному курсі: Derive (Нова Зеландія); Mathematica (США); Maple (США); MathCAD (США).

Питання вибору це не тільки вибір за технічними характеристиками і оцінкою зручності пакетів, але ще і питання ціни. Тому для українських користувачів можна рекомендувати вітчизняні пакети динамічної геометрії та безкоштовну версію 2.92 пакета Derive. До речі, майбутнє за інтегральними пакетами, і перший крок у цьому напряму зробила американська фірма Texas Instruments, яка з 1992 року випускає в одному корпусі графічного калькулятора TI-92 вшиті пакети Cabri та Derive.

Пропонований спеціальний курс слід також розглядати як комплементарний до спеціального курсу "Навчальні дослідження та їх підтримка засобами ІКТ у курсі геометрії загальноосвітніх навчальних закладів". Компліментарність полягає у тому, що компліментарно розглядаються загальні питання взаємовідносин між поняттями математичних компетентностей, ІКТ, дослідницького підходу у навчанні математики та його підтримки засобами ІКТ: компліментарність стосовно переважної предметної галузі (геометрія та алгебра і початки аналізу); компліментарність стосовно використання типів КМС (пакети DGS або CAS). Проте слід пам’ятати, що математика єдина і її структуризація є умовною, переважно вимушеною питаннями дидактики, а найбільш цікаві речі стосуються системних поглядів, в яких використовуються переваги різного представлення об’єктів і синтетичний апарат – досить згадати класичний приклад взаємозбагачення алгебри і геометрії, який привів до створення аналітичної геометрії. У наш час можна спостерігати взаємне збагачення математики й інформатики, і, напевно, в цьому і полягає головний зміст пропонованого курсу.

У більшості розвинених країн світу комп’ютерні математичні системи, зокрема пакети динамічної геометрії і комп’ютерної алгебри, є визнаними і прийнятими засобами навчання математики у загальноосвітніх навчальних закладах. Україна, на жаль, за різних причин поки що відстає в цьому, але є обґрунтована надія на те, що традиції фундаментальних математичних досліджень, традиції фундаментальності математичної освіти, високий рівень математичної компетентності вчителів математики, зростання рівня комп’ютеризації й інформатизації освіти в Україні дозволять їй посісти гідне місце як за рівнем сучасної компетентнісної математичної освіти, побудованої на активних формах навчання на основі навчальних досліджень з використанням ІКТ, так і у майбутній світовій спільноті знань.

У процесі роботи над курсом доцільно якомога більше уваги приділяти активним формам навчання: навчальним дослідницьким роботам, проектам, дискусіям, підготовці рефератів і презентацій.

Рекомендується проводити атестацію за курсом у формі наукової доповіді, яка включає в себе результати виконання індивідуальної дослідницької роботи за пропонованою темою з використанням КМС, реферату з опрацювання рекомендованої літератури і доступних Інтернет-ресурсів з обраної теми. Для доповіді доцільно підготувати реферат (у друкованому та електронному вигляді) та презентацію, виконану, наприклад, у середовищі Power Point.

№	Тема	Години		
		Лекційні	Лаб. роб.	Інд. роб.
1	**Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ** **1.1. Компетентнісна парадигма сучасної математичної освіти** • Поняття компетентнісної парадигми як реакції системи освіти на становлення розвинутого ринку і громадянського суспільства; • Ієрархія компетентностей: ключові, галузеві, предметні компетентності; • Математичні компетентності: процедурна, логі-	2	0	2

№	Тема	Години		
		Лек-ційні	Лаб. роб.	Інд. роб.
	чна, технологічна, дослідницька, методологічна; • Поняття набуття математичних компетентностей як активної, учнєцентрованої, діяльнісної навчальної діяльності; • Міжнародні порівняльні проекти TIMSS і PISA дослідження ефективності систем освіти, зокрема математичної освіти; • Поняття математичної грамотності комісії OECD/PISA. **1.2. Дослідницький підхід в освіті як методологічна основа компетентнісної системи освіти** • Дослідницький підхід в навчанні математики як відбиття методології наукових досліджень у галузі математики; • Складники математичного дослідження: математизація проблеми, моделювання (побудова математичної (комп'ютерної) моделі), гіпотезування (на основі експериментів з математичною (комп'ютерною) моделлю), доведення (або спростування) гіпотез, інтерпретацію отриманих результатів у термінах вихідної області, систематизацію. • Типи навчальних математичних досліджень: дослідження-концептуалізація; дослідження-пошук властивостей; дослідження-застосування (побудова автоматизованих систем розв'язування задач); дослідження-систематизація (вбудування досліджуваної проблеми (концепції) в існуючу особистісну систему знань); • Приклади навчальних математичних досліджень; • Додаткові вимоги до учителя і учня, які ставить використання дослідницького підходу у навчанні математики. **1.3.Психолого-педагогічні засади дослідницького підходу у навчанні математики** • Дослідницький підхід у навчанні математики з точки зору системного погляду на сучасні психолого-педагогічні принципи навчання (активізація пізнавальної діяльності, проблемне навчання, розвиваюче навчання, диференціація на-			

№	Тема	Години		
		Лек-ційні	Лаб. роб.	Інд. роб.
	вчання, особистісно орієнтований підхід, евристичне навчання, діяльнісний підхід у навчанні, конструктивізм у навчанні); • Дослідницький підхід як каталізатор вдосконалення системи навчання математики; • Теорія освітнього соціуму Л.С. Виготського як психолого-педагогічна основа дослідницького підходу у навчанні математики. **1.4. Комп'ютерні математичні системи (КМС) як засіб комп'ютерної підтримки дослідницького підходу у навчанні математики та їх класифікація:** • перший клас – програмні засобі для розв'язання математичних задач у мовах програмування загального призначення Algol, PL/1, Basic, C, Pascal та ін.; • другий клас – спеціалізовані мови програмування, орієнтовані на розв'язання математичних задач (алгоритмічні мови програмування: Fortran; функціональні мови програмування Lisp, Hope, SmallTalk; мови логічного програмування: Prolog); • третій клас – вузькоспеціалізовані і спеціалізовані математичні пакети MacMath, Eureca, SPSS, StatGraph та ін.; • четвертий клас – пакети комп'ютерної алгебри (CAS): Derive, Reduce, Maxima, MuMath, MatLab, MathCAD та ін.; • п'ятий клас – пакети динамічної геометрії (DGS): Cabri, SketchPad, Cinderella, Next, Gran–2D, DG та ін.; • шостий клас – комп'ютерні математичні системи (CMS), які є універсальними, поліфункціональними пакетами, що інтегрують у собі компоненти всіх інших математичних систем. **1.5. Мультимедійний інтерактивний комплекс МІС та його застосування на уроках математики** • Інтерактивні методи навчання; Діалогічна педагогіка і педагогічна діалогіка; • Підтримка інтерактивних методів навчання засобами ІКТ;			

№	Тема	Години		
		Лекційні	Лаб. роб.	Інд. роб.
	• Підтримка інтерактивних методів навчання засобами мультимедійного інтерактивного комплексу МІС.			
2	**Математика і інформатика** • “Математика – прикладна інформатика” (академік А.М. Тихонов): математика як галузь науки, змістом якої є винахід алгоритмів (точних, наближених, евристичних) для розв’язування формалізованих задач за допомогою формалізованих виконавців; Геометрія на площині як теорія алгоритмів для виконавця “Циркуль і лінійка” (“Циркуль”, “Лінійка” тощо). Конструктивізм (інтуїтивізм) і формалізм в математиці; • “Інформатика – розділ математики” (академік В.М. Глушков): інформатика як галузь науки, предметом якої є теорія алгоритмів (поняття алгоритму, властивості алгоритмів, алгоритмічна розрішимість тощо); Комп’ютерна програма як функція. • Взаємне стимулювання розвитку математики і інформатики: інформатика (перш за все КМС) як інструмент математичних досліджень і як джерело плідних ідей і постановок задач для розвитку математики; • Зростання вимог до рівня математичної і інформатичної компетентностей у сучасному світі; • Доцільність розвитку розділу “Алгоритміка” (теоретична і прикладна) як головного складника інформатичної культури у шкільному курсі інформатики; • Внесок українських вчених у розвиток інформатики (роботи К. Вороного, В.М. Глушкова тощо). Інститут кібернетики АН України.	2	0	2
3	**Пакети динамічної геометрії та їх використання для побудови та дослідження графіків функцій** • Побудова і дослідження графіків функцій, які задані явними рівняннями $y = f(x)$; • Побудова і дослідження графіків функцій, які задані у параметричній формі:	0	4	4

№	Тема	Години		
		Лек-ційні	Лаб. роб.	Інд. роб.
	$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [T_1, T_2] \end{cases};$ • Побудова і дослідження графіків функцій, заданих у полярній системах координат; • Побудова і дослідження графіків функцій, заданих різними аналітичними виразами на різних інтервалах області завдання функції; • Динамічні графіки як інструмент дослідження рішень рівнянь і нерівностей з параметрами; • Динамічні графіки як інструмент проведення навчальних досліджень (досліджень-концептуалізацій, досліджень властивостей, досліджень-застосувань, досліджень-систематизацій у курсах математики); • Переваги і недоліки використання пакетів динамічної геометрії для побудови і дослідження графіків функцій. Використання різних режимів побудови графіків (точковий, ламана), їх переваги і недоліки; • Алгоритми побудови графіків функцій, які задані неявними рівняннями (оглядове знайомство). • Алгоритми побудови трьохвимірних об'єктів засобами двовимірної графіки (оглядове знайомство).			
4	**Пакети комп'ютерної алгебри і робота з ними в інтерактивному режимі без використання режиму програмування.** **4.1. Загальна характеристика. Арифметика:** • Авторський режим вводу виразів; • Засоби редагування виразів; • Комбінування виразів; • Перетворення виразів; • Режими точних та наближених обчислень; • Наближені обчислення значень констант і виразів з заданою точністю; • Точні обчислення значень виразів.	2	2	2
	4.2. Алгебра і тригонометрія: • Спрощення виразів, завдання напрямів перетво-	2	2	2

№	Тема	Години		
		Лек-ційні	Лаб. роб.	Інд. роб.
	рень			
	4.3. Лінійна алгебра.	2	2	2
	4.4. Математичний аналіз.	2	2	2
	4.5. Двовимірна і тривимірна графіка.	2	2	2
5	**Пакети комп'ютерної алгебри і робота з ними в режимі програмування.** **5.1. Функціональне програмування**.	2	2	2
	5.2. Процедурне програмування.	2	2	2
6	**Індивідуальна дослідницька робота** Розробка проекту "Дослідницький підхід з комп'ютерною підтримкою для розв'язування задач у курсі алгебри і початків аналізу". Проект складається з: • реферату; • методичних розробок чотирьох навчальних дослідницьких робіт (концептуалізація, властивості, застосування, систематизація) у вигляді настанов для учня з проведення навчальної дослідницької роботи; • презентації (наприклад, у середовищі Power Point).	0	0	14
Загалом		18	18	36

Тема проекту для індивідуально-дослідницької роботи обирається за узгодженням з викладачем.

Приклади тем проектів:

Побудова і дослідження властивостей графіків сімейства функції 1) заданих явними рівняннями і 2) які залежать від параметра.

Побудова і дослідження властивостей графіків сімейства функції 1) заданих параметричними рівняннями і 2) які залежать від параметра.

Побудова і дослідження властивостей графіків сімейства функції 1) заданих неявними рівняннями і 2) які залежать від параметра.

Перетворення графіків функцій.

Поняття границі функції однієї змінної.

Поняття неперервності функції однієї змінної.

Класифікація розривів функції однієї змінної.

Дослідження розривів функції однієї змінної.

Поняття похідної функції.

Взаємні властивості функції і її похідної.

Взаємні властивості функції та її другої похідної.

Поняття екстремуму функції однієї змінної.

Дослідження функції однієї змінної на екстремум.
Поняття первісної функції.
Площа криволінійної трапеції.
Поняття визначеного інтегралу.

Рекомендована література

1. Жалдак М.И. Система подготовки учителя к использованию информационной технологии в учебном процессе: Автореф. дис. докт. пед. наук. – М.: НИИ СИМО АПН СССР, 1989. – 48 с.
2. Жалдак М.І. Гуманітарний потенціал інформатизації навчального процесу // Проблеми інформатизації освіти: Зб. наук. праць. – К.: УДПУ, 1994. – С. 3 – 20.
3. Жалдак М.І. Гуманітарний потенціал інформатизації освіти // Рідна школа – 1990. – № 7–8. – С. 61–64.
4. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики. – К.: Техніка, 1997. – 304 с.
5. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ.– Харків: "Факт", 2005.– 360 с.
6. Пиаже Ж. Избранные педагогические труды: Пер. с франц. – М.: Просвещение, 1969. –660 с.
7. Платон. Диалоги. – М.: АСТ; Харьков: Фолио, 2001. – 384 с.
8. Пойа Д. Как решать задачу: Пер. с англ. – М.: Учпедгиз, 1959. – 207 с.
9. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения.– М: Наука, 1975.– 464 с.
10. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения: Пер. с англ. – М.: Наука, 1975. – 464 с.
11. Пойа Д. Математическое открытие: Пер. с англ. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
12. Раков С.А., Олейник Т.А., Скляр Е.В. Использование пакета Derive в курсе математики. Учебное пособие. – Харків: РЦНИТ, 1996. – 160 с.
13. Раков С.А. Конструктивізм у математичній освіті та його підтримка засобами інформаційних технологій // Засоби навчальної та науково–дослідної роботи: Зб. наук. пр. – Харків: ОВС, 2000. – Вип. 14. – С. 156–160.
14. Раков С.А. Математична діяльність та її підтримка засобами інформаційних технологій // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2001. – № 3. – С. 8 – 22.
15. Раков С.А. Навчальні дослідження як моделювання професійної математичної діяльності та їх комп'ютерна підтримка // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2001. – № 4. – С. 66–75.

ВИКОРИСТАННЯ ПАКЕТУ DERIVE В КУРСІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

В.П. Горох
м. Харків, Харківський національний педагогічний університет
ім. Г.С. Сковороди
gorokh_v@ukr.net

Інформаційно-комунікаційні технології стають потужним інструментом для роботи з інформацією, отримання та опанування знаннями. В Україні поступово відбувається усвідомлення важливості інформатизації освіти. Протягом останніх років спостерігається значне прискорення темпів інформатизації загальної середньої освіти. Разом з тим, гострою проблемою залишається неготовність учителів до використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі. Недостатньо мати сучасні засоби навчання. Вкрай важливо мати вчителів, які підготовлені до їх використання. На запитання “Наскільки часто використовуються комп’ютери на уроках математики у вашому класі?” 85,6% учасників моніторингу якості математичної освіти в Харківській області відповіли: “Ніколи” (дослідження було проведено за ініціативи Головного управління освіти і науки Харківської облдержадміністрації у березні 2005 року; на питання анкети відповіло 2000 випускників). Отже, використання комп’ютерів на уроках математики знаходиться на початковому етапі – більшість випускників не мали можливості за всі роки навчання в школі бодай хоч би один раз відчути потужність сучасних комп’ютерних математичних систем.

Парадоксальна ситуація щодо використання систем комп’ютерної математики при навчанні математики склалася і у вищих навчальних закладах. Як зазначає Ю.В. Триус, універсальні математичні пакети при навчанні математичних дисциплін практично не використовуються. При анкетуванні викладачів математичних дисциплін і студентів математичних і економічних спеціальностей кількох ВНЗ України ним були отримані такі дані: пакет Mathematica використовують 7% опитаних викладачів, Derive – 7%, Maple – 5%, Matlab – 2%, MathCAD – 2% [**1**, 282].

В той же час програми з математики для загальноосвітніх навчальних закладів, спеціалізованих шкіл, гімназій, ліцеїв рекомендують при вивченні курсу математики використовувати, зокрема, пакет комп’ютерної алгебри Derive [**2**, 6, 105, 133]. Зрозуміло, що для реалізації цих побажань необхідні нові підходи до навчання математичним дисциплінам у педагогічних університетах. Очевидно, обмежити знання вчителя математики тільки знанням самого предмета сьогодні неможливо. Нові інформаційні технології в навчанні математики – необхідний компонент освіти майбутнього вчителя математики.

Методологічні та методичні аспекти використання інформаційних технологій у курсі аналітичної геометрії для студентів університету розглядалися в [**3**]. Можливості системи символьної математики Derive описано в [**4**]. Дидактичні та технологічні аспекти використання пакету Derive в шкільному курсі алгебри та початків аналізу вивчалися в навчальному посібнику для вчителів [**5**].

В даній роботі розглядаються можливі методичні підходи до використання пакету Derive при проведенні практичних занять з аналітичної геометрії. Наведені фрагменти методичних матеріалів використовувалися автором при проведенні практичних занять зі студентами 1 курсу (спеціальність "Математика та англійська мова"). Заняття проводилися у комп'ютерному класі, кожний студент працював за окремим комп'ютером у середовищі Derive 3.11.

Зазначимо, що студенти мали невеликий досвід роботи на комп'ютері і раніше не були знайомі з пакетами комп'ютерної алгебри. Всі необхідні знання для виконання роботи у середовищі пакету Derive студенти отримували на початку заняття. Викладач у ході заняття надавав індивідуальну допомогу при виникненні проблем при роботі з математичною системою. Студенти також, не чекаючи допомоги з боку викладача, активно використовували компактну та зручну у користуванні довідкову систему пакету.

Наведемо фрагменти методичних матеріалів, які отримували студенти на початку кожного заняття.

I. Рівняння площини

1. Оголосити в пакеті Derive функцію PLANE(P, n, x, y, z), яка повертає рівняння площини, що проходить через точку P перпендикулярно до вектора $\overline{n}$.

Використовуючи функцію PLANE(P, n, x, y, z), знайдіть рівняння площини, що проходить через точку P перпендикулярно до вектора $\overline{n}$:

a) $P(1; 2; 3)$, $\overline{n}(-7; 5; 1)$;

b) $P(0; –2; 23)$, $\overline{n}(-19; 55; 43)$;

c) $P(13; 32; 339)$, $\overline{n}(7; -5; 91)$;

d) $P(21; –2; –3)$, $\overline{n}(-17; -5; 31)$.

Приклад:

```
#1: PLANE(p, n, x, y, z) := ([x, y, z] - p) • n = 0
#2: PLANE([1, 2, 3], [-7, 5, 1], x, y, z)
#3: - 7·x + 5·y + z - 6 = 0                                   Simp #2
```

2. Оголосити в пакеті Derive функцію PLANE1(P, u, v, x, y, z), яка повертає рівняння площини, що проходить через точку P паралельно двом неколінеарним векторам u і v.

Використовуючи функцію PLANE_1(A, B, C, x, y, z), знайдіть рівняння площини, що проходить через точку P паралельно векторам u і v:

a) $P(1, 2, 3)$, $\overline{u} = 2\overline{i} + 7\overline{j} - 5\overline{k}$, $\overline{v} = \overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$;

b) $P(-1, 7, 23)$, $\overline{u} = \overline{i} - 7\overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{v} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 3\overline{k}$;

c) $P(9, -2, 23)$, $\overline{u} = 12\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, $\overline{v} = 5\overline{i} + \overline{j} - 9\overline{k}$.

Приклад:

```
#4: PLANE1(p, u, v, x, y, z) : = PLANE(p, CROSS(u, v), x, y, z)
#5: PLANE1([1, 2, 3], [2, 7, -5], [1, 1, 3], x, y, z)
#6: 26·x - 11·y - 5·z + 11 = 0                                  Simp #5
```

Коментарі:

a) При оголошенні функції PLANE1(p, u, v, y, z) ми використали раніше оголошену функцію PLANE(p, n, x, y, z).

b) Стандартна функція пакету Derive CROSS(a, b) повертає векторний добуток векторів a і b.

3. Оголосити в пакеті Derive функцію PLANE_3P(A, B, C, x, y, z), яка повертає рівняння площини, що проходить через точки A, B і C.

Використовуючи функцію PLANE_3P(A, B, C, x, y, z), знайдіть рівняння площини, що проходить через точки A, B і C. Виясніть, чи проходить площина ABC через точку $D(3, 2, -1)$?

a) $A(1; 4; -7)$, $B(-5; 8; -2)$, $C(-1; 2; 0)$;

b) $A(32; 41; -77)$, $B(-52; 8; -32)$, $C(-71; 2; 20)$;

c) $A(5; -4; -83)$, $B(12; 8; -12)$, $C(-1; 20; 69)$.

Приклад:

```
#7: PLANE_3P(a, b, c, x, y, z) : = PLANE1(a, b - a, c - a, x, y, z)
#8: PLANE_3P([1, 4, -7], [-5, 8, -2], [-1, 2, 0], x, y, z)
#9: 2·(19·x + 16·y + 10·z - 13) = 0                             Simp #5
#10: 19·x + 16·y + 10·z - 13 = 0
#11: 19·3 + 16·2 + 10·-1) - 13 = 0
#12: 66 = 0                                                     Simp #8
```

Коментарі:

a) Вираз #10 є результатом спрощення виразу (#9)/2.

b) Вираз #12 означає, що точка D(3, 2, –1) не лежить у площині ABC.

4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(1; -3; 5)$ паралельно площині $3x - 4y + 5z - 12 = 0$.

5. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(2; -6; 3)$ перпендикулярно площинам $x - 4y + 2z - 7 = 0$ і $7x + 14y - 2z - 19 = 0$.

6. Знайти відстань від точки $P(12; -3; 4)$ до площини $3x - 4y + 15z - 9 = 0$.

Розв'язання:

#13: PLANE_NORM(a, b, c, d, x, y, z) := $\dfrac{|a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d|}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$

#14: DISTPOINTPLANE(p, a, b, c, d, x, y, z) := PLANE_NORM(a, b, c, d, p_1, p_2, p_3)

#15: DISTPOINTPLANE([12, -3, 4], 3, -4, 15, -9, x, y, z)

#16: $\dfrac{99\sqrt{10}}{50}$

Коментарі:

а) При оголошенні функції PLANE_NORM(a, b, c, d, x, y, z) використано функції ABS(u) – модуль виразу u, і SQRT(u) – квадратний корінь з виразу u.

b) Вираз p_i означає i-й елемент вектора p. Для його задання можна скористатися оператором sub: p sub i.

7. Знайти відстань між площинами $3x–14y+5z–8=0$ і $6x–28y+10z+33=0$.

II. Рівняння еліпса

1. Оголосити в пакеті Derive функцію ELLIPSE_CANONIC(*a*, *b*, *x, y*), яка повертає рівняння еліпса з півосями *a* і *b* у канонічній системі координат.

Використовуючи функцію ELLIPSE_CANONIC(*a*, *b*, *x, y*), знайти канонічне рівняння еліпса з півосями $a = 6$, $b = 3$.

Розв'язання:

```
#1: ELLIPSE_CANONIC(a, b, x, y) := b² x² + a² y² - a² b² = 0
#2: ELLIPSE_CANONIC(6, 3, x, y)
#3: 9x² + 36y² - 324 = 0                                  (Simp #2)
```

2. Оголосити в пакеті Derive функцію ELLIPSE(*a*, *b*, *P, x, y*), яка повертає рівняння еліпса з півосями *a b* та центром у точці *P* у прямокутній декартовій системі координат, осі якої паралельні осям еліпса.

Використовуючи функцію ELLIPSE(*a*, *b*, *P, x, y*), знайти рівняння еліпса з півосями $a = 4$, $b = 2$ та центром у точці $P(–1; 3)$, якщо осі еліпса паралельні осям координат. Побудувати еліпс у пакеті Derive.

Розв'язання:

```
#4: ELLIPSE(a, b, p, x, y) := ELLIPSE_CANONIC(a, b, p, x - p₁ , y - p₂)
#5: ELLIPSE(4, 2, [-1, 3], x, y)
#6: 4(x² + 2x + 4y² - 24y + 21) = 0                        (Simp #5)
```

3. Побудувати сімейство еліпсів з півосями 4 і 3, центри яких лежать на еліпсі $x = 2 +2\cos t$, $y = 3 +\sin t$. Осі всіх еліпсів паралельні осям декартової системи координат.

Розв'язання:

```
#7: VECTOR(ELLIPSE(4, 3, [2+2·COS(t), 3+SIN(t)], x, y), t, 0, 2π, π/20)
#8: [9x² - 72x + 16(y - 6y² + 9) = 0, 36(2 - x)COS(π/20) + …  (Simp #7)
```

Коментарі:

а) Функція VECTOR(u, i, m, n, s) повертає вектор значень функції u, якщо її аргумент i змінюється від m до n з кроком s. Наприклад, результатом спрощення виразу VECTOR(i^2, i, 3, 7, 2) є вектор [9, 25, 49]. За замовчуванням початкове значення аргументу і крок дорівнюють 1. Наприклад, після спрощення виразу VECTOR(i^2, i, 3, 7) одержимо вектор [9, 16, 25, 36, 49], а результатом спрощення виразу VECTOR(i^2, i, 7) є вектор [1, 4, 9, 16, 25, 36, 49] *b) Застосувавши команду **Plot** до виразу #8, одержимо рисунок 1. Нагадаємо, що після вибору команди **Plot**, потрібно вказати як на екрані дисплея буде розташоване графічне вікно: **Beside**, **Under** або **Overlay.** Після цього задамо графічний режим дисплея: **Options | Display | Mode | Graphics**.*

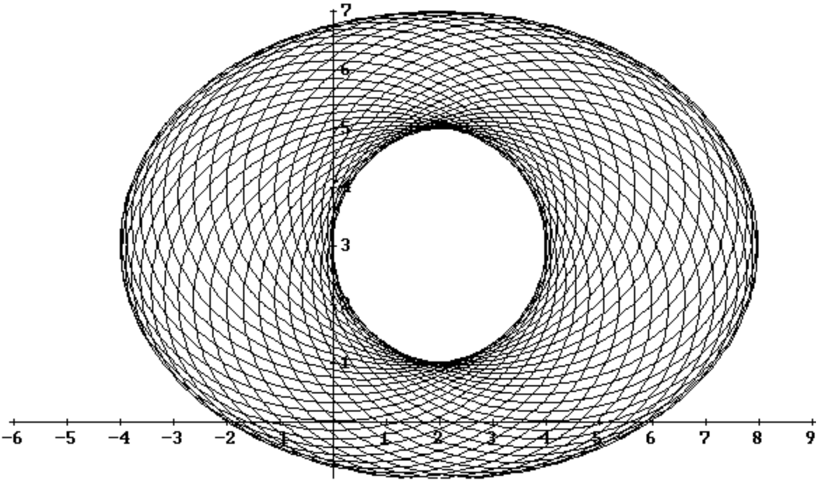


Рис. 1

4. Які гіпотези відносно обвідної сімейства еліпсів, розглянутих у пункті 3, можна висунути? Перевірити справедливість гіпотез за допомогою побудов.

5. Довести, що рівняння $9x^2 + 4y^2 - 54x + 8y + 49 = 0$ визначає еліпс. Знайдіть його півосі, ексцентриситет, координати центра та фокусів, рівняння директрис.

6. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 12, а відстань між директрисами дорівнює 100/3.

7. Які лінії визначаються рівняннями:

a) $y = 2 - \sqrt{2x^2 - 12x}$;

b) $4x = 20 + \sqrt{-12y + y^2}$.

Побудувати ці лінії.

III. Дотичні до еліпса, гіперболи, параболи

1. Оголосити в пакеті Derive функцію EQ_TOUCH(f, x_0), яка повертає рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці x_0.

Використовуючи функцію EQ_TOUCH(f, x_0), побудувати сімейство дотичних до параболи $y = x^2$.

Розв'язання:

```
#1: SF(f, x, a) := (VECTOR(f, x, a, a))_1
#2: EQ_TOUCH(f, x0, x, y) :=y−SF(f, x, x0)=SF(DIF(f, x, 1),x,x0))(x−x0)
#3: VECTOR(EQ_TOUCH(x , t, x, y), t, −3, 3, 0.2)
#4: [y − 9 = − 6(x + 3), …
```

Коментарі:

a) Функція SF(f, x, a) повертає результат підстановки у вираз f замість змінної x виразу a. Наприклад, SF(x – sinx, x, a) = a – sina.

b) Стандартна функція пакету DIF(f, x, k) повертає k-ту похідну функції f по x.

c) На рисунку 2 зображено тільки сімейство дотичних. Парабола є обвідною сімейства дотичних.

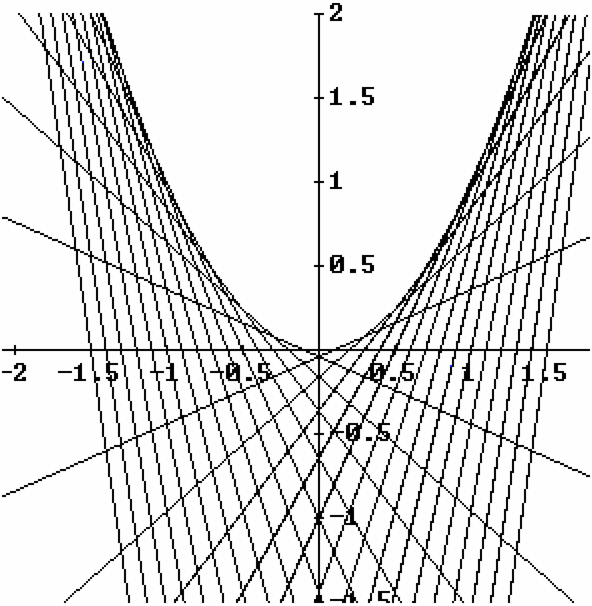


Рис. 2

2. Оголосити в пакеті Derive функцію TOUCH_ELLIPSE(a, b, P, x, y), яка повертає рівняння дотичної до еліпса з півосями a і b та центром у точці P у прямокутній декартовій системі координат, осі якої паралельні осям еліпса.

Побудуйте еліпс з півосями $a = 4$, $b = 2$ та центром $P(–2; 1)$ як обвідну сімейства дотичних.

Висновки

1. Системи комп’ютерної алгебри, які були створені для підтримки професійної математичної діяльності, тривалий час залишалися відомими лише вузьким колам дослідників. Поступово відбувається усвідомлення

того, що ці досконалі інструменти математичних досліджень можуть зайняти достойне місце і у викладанні та вивченні математики у ВНЗ та загальноосвітніх школах.

2. Запровадження комп’ютерно-орієнтованих методик при навчанні майбутніх учителів математики позитивно сприятиме в недалекому майбутньому на процес інформатизації шкільної освіти.

3. Пакет символьної математики Derive має потужні засоби для точного розв’язання математичних задач, основними можливостями якого можуть за незначний час оволодіти користувачі, які раніше не працювали з пакетами комп’ютерної алгебри.

4. Використання пакету Derive в курсі аналітичної геометрії робить його більш привабливим для студентів, посилює їх мотивацію та робить навчання більш продуктивним.

5. Вивчення геометричних курсів з використанням інформаційних технологій спрямовано на формування узагальнених понятійних схем, розвиток розумової діяльності на основі активізації пізнавальної самостійності. Досвід показує, що застосування систем комп’ютерної математики в навчальних курсах сприяє більш глибокому розумінню математичної суті розглядуваних питань.

Література:

1. Триус Ю.В. Методика використання пакету Maple 7 для розв’язування екстремальних задач // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. Випуск V: В 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2005. – Т.1: Теорія та методика навчання математики. – С. 282–296.

2. Математика. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Навчальна книга, 2003. – 302 с.

3. Раков С.А., Горох В.П., Олійник Т.О., Гармашова Н.М., Якуба М.О. Інформаційні технології в аналітичній геометрії. – Харків: ХДПУ, 2000. – 189 с.

4. Дьяконов В.П. Справочник по системе символьной математики DERIVE. – М.: СК Пресс, 1998. – 256 с.

5. Жалдак М.І. Комп’ютер на уроках математики. – К.: Техніка, 1997. – 304 с.

ПРОГРАМНА ПІДТРИМКА КУРСУ «МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ПСИХОЛОГІЇ» ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ «ПСИХОЛОГІЯ» ПЕДАГОГІЧНОГО ВУЗУ

М.В. Працьовитий[1], Я.В. Гончаренко[1], І.Д. Чепорнюк[2]
[1] м. Київ, Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
[2] м. Київ, Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету
yan_a@ukr.net

Роль, місце і основні завдання курсу

Сьогодні теоретичні та практичні психологічні дослідження ґрунтуються на суттєвому використанні математичного апарату, застосуванні математичних методів. Основними з яких є теоретико-ймовірнісні та статистичні методи, оскільки саме вони є інструментом дослідження реальних процесів та явищ, що мають ймовірнісну природу, допомагають вивчати зміст та закономірності масових явищ, на основі чого формулювати та перевіряти гіпотези і робити прогнози.

Вивчення курсу "Математичні методи в психології" сприяє формуванню у студентів загальної дослідницької культури, що дозволяє правильно описувати досліджувані явища, точніше формулювати твердження та гіпотези, узагальнювати результати спостережень та досліджень, представляти ці результати в зручному для розуміння та аналізу вигляді, робити більш точні висновки, прогнозувати результати, знаходити причини та взаємозв'язки, нерідко приховані від поверхневого спостерігача. Крім того, вивчення курсу допомагає кращому розумінню професійної психологічної літератури, де часто використовуються поняття теорії ймовірностей та статистики. Спеціаліст-психолог повинен вміти оцінити отримані експериментальні психологічні дані, вибрати адекватний математичний метод для їх обробки, правильно застосувати його та проінтерпретувати отримані результати. В процесі навчання студенти повинні навчитись класифікувати практичні задачі та правильно підбирати методи їх розв'язання.

Основними завданнями навчальної дисципліни "Математичні методи в психології" є:

1) ознайомити студентів з можливостями та особливостями використання математичного апарата в психологічних дослідженнях;
2) сформувати розуміння ймовірнісної природи явищ і процесів та навчити розрізняти в них непередбачуване та прогнозоване;
3) навчити правильно планувати та проводити статистичне дослідження, оцінювати похибку отриманих результатів;
4) сформувати навички первинної обробки та статистичного аналізу експериментальних даних;

5) навчити правильно інтерпретувати отримані в результаті аналізу числові характеристики;

6) розвивати дедуктивне мислення;

7) навчити студентів самостійно працювати з відповідною літературою та комп'ютерними програмами;

8) дати необхідну підготовку і знання для вивчення інших дисциплін професійного циклу, зокрема, експериментальної психології.

Зміст курсу «Математичні методи в психології»

На нашу думку, навчальна програма дисципліни "Математичні методи в психології" має містити такі основні блоки модулів:

1. Вступ до математичних методів.

Елементи теорії множин. Поняття множини. Операції над множинами. Відношення. Бінарне відношення еквівалентності, фактор-множина. Відображення множин, функція. Функція – найпростіша форма причинно-наслідкових зв'язків. Математика – наука про відношення.

Елементи математичної логіки. Висловлення. Операції над висловленнями. Формули алгебри висловлень. Квантори загальності та існування. Повна і неповна індукція.

Елементи теорії нечітких множин. Поняття нечіткої множини, типи функцій належності, найпростіші операції у множині всіх нечітких підмножин деякої множини. Вимірювання ступеня нечіткості множини. Нечіткі відношення. Елементи теорії нечітких висловлювань.

Аксіоматичний метод побудови наукової теорії. Суть аксіоматичного методу побудови теорії. Формальні і неформальні теорії. Теорема Гьоделя про неповноту. Математичні твердження. Взаємно обернені теореми. Необхідні і достатні умови. Взаємно протилежні теореми. Доведення від супротивного.

Елементи математичного моделювання. Означення та види математичних моделей. Математичне моделювання як метод дослідження.

Елементи математичного програмування. Побудова математичних моделей оптимізаційних задач. Задачі математичного програмування. Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування. Застосування програмних засобів до розв'язання задач математичного програмування.

2. Елементи теорії ймовірностей.

Комбінаторика. Сполуки без повторень: перестановки, комбінації, розміщення. Формули для обчислення кількості сполук без повторень. Сполуки з повтореннями. Властивості комбінацій.

Ймовірність випадкової події. Елементарні події, простір елементарних подій. Випадкові події. Класичне, геометричне та статистичне означення ймовірності. Операції над подіями. Несумісні події. Теореми додавання. Незалежність подій. Теореми множення. Умовні ймовірності. Формула повної ймовірності. Формула Байєса. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі. Локальна та інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Локальна теорема Пуасона. Закон великих чисел.

Випадкові величини. Поняття випадкової величини (в.в.). Дискретні в.в. Функція розподілу дискретної в.в. Числові характеристики дискретних в.в. Випадкові величини як результати обробки отриманих при дослідженні даних. Властивості числових характеристик в.в. Біноміальний розподіл, розподіл Пуасона, геометричний та гіпергеометричний розподіли: їх числові характеристики і застосування. Неперервні в.в. Функція розподілу та щільність розподілу неперервних в.в. Числові характеристики неперервних в.в. Рівномірний, нормальний та експоненційний розподіли. Їх роль в обробці даних масових спостережень. Поняття про центральну граничну теорему. Система двох випадкових величин. Числові характеристики системи двох випадкових величин. Застосування систем двох випадкових величин до моделювання зв'язків між досліджуваними показниками.

3. Елементи математичної статистики.

Первинна обробка емпіричних даних. Методи описової статистики. Генеральна сукупність і вибірка. Варіаційний ряд. Полігон частот і відносних частот. Гістограма. Емпірична функція розподілу. Числові характеристики варіаційного ряду. Міри центральної тенденції, міри варіативності. Методи розрахунку числових характеристик.

Теорія оцінок. Поняття оцінки та їх види. Незміщені та зміщені оцінки. Числові характеристики вибірки як точкові оцінки параметрів генеральної сукупності. Довірчі інтервали. Розрахунок довірчих інтервалів для середнього значення та дисперсії. Застосування точкових та інтервальних оцінок в практичних дослідженнях.

Статистичні гіпотези. Ймовірнісні основи психологічного дослідження (нерівність Чебишова, закони великих чисел). Основні теоретичні розподіли, що використовуються в статистиці (Гауса, Пірсона, Фішера, Стьюдента). Основні поняття теорії статистики (підхід Неймана-Пірсона до перевірки статистичних гіпотез, поняття критерію, критичної області, помилок 1-го і 2-го роду, апріорної моделі ситуації, схема перевірки статистичних гіпотез в психології). Гіпотеза про середнє значення нормального розподілу при відомій та невідомій дисперсіях. Гіпотеза про дисперсію нормального розподілу. Гіпотеза про рівність двох середніх значень. Гіпотеза про рівність двох дисперсій. Гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Кореляційний та дисперсійний аналіз. Поняття багатовимірної вибірки, її характеристики. Міри зв'язку. Рангова кореляція. Проста лінійна вибіркова регресійна модель та розрахунок її параметрів. Перевірка моделі на адекватність. Побудова регресійних моделей для аналізу взаємозв'язків між факторними та результативним показником. Узагальнена лінійна регресійна модель та її параметри. Гіпотеза про статистичну значимість параметрів узагальненої моделі. Нелінійні регресійні моделі. Поняття про дисперсійний аналіз. Поняття градації фактора або умови впливу. Основні схеми: однофакторний, двохфакторний, багатофакторний дисперсійний аналіз. Застосування дисперсійного аналізу в практичних дослідженнях.

Елементи кластерного аналізу. Класифікація статистичних даних і кластер–аналіз. Принципи класифікації. Монотетична та політетична класифікації. Поняття «кластера» (евристична класифікація). Параметри кластерів. Типи процедур кластер-аналізу: структурні (ієрархічні) та графообразні. Загальна схема послідовної ієрархічної класифікації.

Прикладні програмні засоби для підтримки курсу математичних методів в психології

Розв'язання більшості задач, що пропонуються студентам в процесі навчання математичних методів в психології, вимагає від них як вміння будувати математичні моделі реальних процесів і явищ, так і досліджувати їх, проводячи досить громіздкі обчислення. Крім того, на сьогодні існує досить широкий спектр програмних засобів, які дозволяють автоматизувати розв'язання багатьох задач, які можуть виникати в практичній діяльності, зокрема, і фахівця-психолога. Отже, використання інформаційних технологій в навчанні математичних методів в психології допомагає розв'язати такі задачі: підвищити ефективність навчання і сформувати вміння користуватись прикладними програмними засобами, необхідне в майбутній професійній діяльності.

Ми наводимо орієнтовний список тем розділу «Елементи математичної статистики» та основних задач, при розв'язанні яких ми рекомендуємо використовувати прикладні програмні засоби.

Тема	*Програмні засоби*	*Основні задачі*
Первинна обробка емпіричних даних. Методи описової статистики	STATISTICA EXCEL, SPSS	– візуалізація отриманих даних, побудова графіків, гістограм, полігонів частот; – статистичне групування, в тому числі побудова складених та комбінованих таблиць, відбір даних в яких проводиться за певною ознакою; – виявлення у великих масивах даних однорідних за певною ознакою груп; – обчислення основних числових характеристик варіаційного ряду.
Теорія оцінок	STATISTICA EXCEL, SPSS	– знаходження точкових та інтервальних оцінок параметрів генеральної сукупності.
Статистичні гіпотези	STATISTICA EXCEL, SPSS	– знаходження значень статистичних критеріїв; – перевірка основних статистичних гіпотез.

Тема	*Програмні засоби*	*Основні задачі*
Кореляційний та дисперсійний аналіз	STATISTICA EXCEL, SPSS	– обчислення коефіцієнтів кореляції: лінійної, рангової, множинної; – побудова кореляційних матриць; – оцінка параметрів регресійних моделей: одно- та багатофакторної, лінійної та нелінійних; – визначення градації та впливу факторів.
Елементи кластерного аналізу	STATISTICA, SPSS	– класифікація статистичних даних; – візуалізація «дерев класифікації».

Зауважимо, що в основному в навчанні математичних методів в психології ми пропонуємо використовувати такі прикладні програмні засоби, як Excel і Statistica. Це пояснюється наступними причинами:

1) програмний засіб Excel добре знайомий студентам і не викликає труднощів в користуванні;

2) використання Excel допомагає студенту автоматизувати деякі громіздкі і обчислювально складні кроки розв'язання задачі, але вимагає від нього самостійної побудови математичної моделі задачі і керування процесом її розв'язання;

3) програмний засіб Statistica є досить потужним професійним програмним засобом, який повністю автоматизує розв'язання багатьох задач статистики. Студентів необхідно знайомити з ним після того, як вони засвоїли основні методи розв'язання задач, вміють правильно побудувати модель задачі і інтерпретувати отримані результати.

Проілюструємо використання програмних засобів прикладом задачі двохфакторного дисперсійного аналізу.

Задача. При дослідженні залежності процесу запам'ятовування від емоційного забарвлення матеріалу, який необхідно запам'ятати, проводився наступний експеримент: чотирьом експериментальним групам пропонувались для запам'ятовування двозначні та багатозначні числа двома способами – при першому способі числа просто задиктовувались, а при другому – про них повідомлялась додаткова інформація (їх колір, місцезнаходження, поведінка тощо). Передбачалось, що між довжиною чисел, способом їх подання і якістю запам'ятовування спостерігатиметься значний взаємозв'язок.

В результаті експерименту біли отримані наступні дані:

Градації фактора А	А1 – двозначні числа		А2 – багатозначні числа	
Градації фактора В	В1	В2	В1	В2
	8	4	4	2
	6	5	3	2
	7	4	5	3
	5	3	4	3

Фактор A – довжина числа, фактор B – спосіб подання (B1 – з описом, B2 – задиктовування).

Розв'язання. Задача розв'язана в середовищі Excel.

Times New Roman 12

H8 fx =1/B11*E7

	A	B	C	D	E	F	G
1	градації фактора A	A1-двозначні числа		A2 -багатозначні числа			
2	градації фактора B	B1	B2	B1	B2		
3		8	4	4	2		
4		6	5	3	2		
5		7	4	5	3		
6		5	3	4	3		
7	сума по коміркам	26	16	16	10		
8	суми по градаціям фактора A	42		26			
9	суми по градаціям фактора B	42		26			
10	загальна сума	68					
11	кількість випробувань	4		**Факторні суми:**		**Ступені свободи:**	
12	кількість рівнів фактора A	2		для фактора A	6,3	для фактора A	1
13	кількість рівнів фактора B	2		для фактора B	16	для фактора B	1
14	вибіркове середнє	4,25		для факторів A та B	11	для факторів A та B	1
15	загальна сума квадратів відхилень	43		залишкова сум	10	залишкової суми	12
16							
17							

Висновки:

1) оскільки спостережуване значення критерію для фактора A менше критичного, то з рівнем значущості 0,01 відмінність групових середніх квадратичних відхилень для фактора A можна вважати несуттєвою. Це означає, що фактор A (довжина чисел) несуттєво впливає на процес запам'ятовування;

2) оскільки спостережуване значення критерію для фактора B більше

критичного, то з рівнем значущості 0,01 відмінність групових середніх квадратичних відхилень для фактора В можна вважати суттєвою. Це означає, що фактор В (спосіб подання матеріалу для запам'ятовування) суттєво впливає на процес запам'ятовування;

3) оскільки спостережуване значення критерію для факторів А і В більше критичного, то з рівнем значущості 0,01 відмінність групових середніх квадратичних відхилень для фактора А при різних градаціях фактора В можна вважати суттєвою. Це означає, що фактор А при різних градаціях фактора В суттєво впливає на процес запам'ятовування.

12 Ж К Ч % 000 Справочные материалы

f_x =FРАСПОБР(0,01;1;12)

H	I	J	K	L
5,25	Середнє групове значення для фактора А1			
6,5	Середнє групове значення для фактора А2			
5,25	Середнє групове значення для фактора В1			
3,25	Середнє групове значення для фактора В2			
6,5	Середнє міжгрупове значення для факторів А1В1			
4	Середнє міжгрупове значення для факторів А1В2			
4	Середнє міжгрупове значення для факторів А2В1			
2,5	Середнє міжгрупове значення для факторів А2В2			

Дисперсії:		Критерій Фішера-Снедекора:		Критичне значення критерію Фішера-Снедекора
фактору А	6,3	для фактору А	9	9,330212082
фактору В	16	для фактору В	23	
факторів А та В	11	для факторів А та В	15,5	
залишкова дисперсія	0,8			

Література:

1. Берестиева О.Г., Уразаев А.М., Муратова Е.А. Математические методы в психологии. – Томск: Томский гос. пед. ун., 2001. – 301 с.
2. Борисенко О.О., Майборода Р.Е. Аналітико-статистичні методи й моделі психології та педагогіки: вибрані лекції. – К.: КНУ, 2000. – 117 с.
3. Гласс Дж., Стэнли Дж. Статистические методы в педагогике и психологии. – М., 1976.
4. Салий В.Н. Введение в вероятность и теорию информации для психологов: Учебное пособие. – Саратов: Изд-во Сарат. гос. у-та, 1997. – 119 с.
5. Психология и математика. Под ред. Рубахина В.Ф. – М.: Наука, 1976. – 234 с.
6. Суходольский Г.В. Основы математической статистики для психологов. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1972. – 429 с.
7. Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. – С.-Пб.: ООО «Речь», 2000. – 350 с.
8. Тарасов С.Г. Основы применения математических методов в психологии. – С.-Пб.: Изд. С.-Пб. ун-та, 1999.
9. Артемьева Е.Ю., Мартынов Е.М. Вероятностные методы в психологии. –М.: МГУ, 1975.
10. Логвиненко А.Д. Измерения в психологии: математические основы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993. – 480 с.
11. Лбов Г.С. Методы обработки разнотипных экспериментальных данных. – Новосибирск: Наука, 1981.
12. Артемьева Е.Ю. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике для психологов. – М., 1969.
13. Братко О.А. Психологія і кібернетика. Моделі психічної діяльності. – К.: Рад.школа, 1968. – 144 с.
14. Психология и математика. Сборник статей. АН СССР, Ин-т психологии / Отв. ред. Рубахин В.Ф. – М.: Наука, 1976. – 295 с.
15. Аткинсон Р., Бауер Г., Кротерс Э. Введение в математическую теорию обучения. – М., 1968.

ВИКОРИСТАННЯ КОМП’ЮТЕРНИХ МАТЕМАТИЧНИХ СИСТЕМ У НАВЧАННІ ЧИСЕЛЬНИМ МЕТОДАМ

В.І. Клочко
м. Вінниця, Вінницький національний технічний університет
klochko@vstu.vinnica.ua

Чисельні методи як в технічних, так і в педагогічних університетах відносяться до розділів курсу математики (або до окремих дисциплін), що формують певний рівень математичної культури фахівця.

Значна кількість інженерних задач зводиться зрештою до розв’язування конкретних рівнянь або систем рівнянь, що описують явища, об’єкти довкілля. Застосування математичних методів у різноманітних галузях інженерної діяльності вимагає певної математичної культури і високого рівня математичної підготовки фахівців інженерного профілю. Сучасний рівень розвитку науки і техніки освіти вимагає від фахівців постійного самостійного поповнювання своїх знань, у разі необхідності оволодіння новими розділами математики, добре орієнтуватися в різноманітності наукових ідей і концепцій, а також застосовувати їх на практиці.

Питання методики навчання чисельним методам розглядались в дослідженнях В.С. Абрамчука, М.І. Жалдака, О.Ф. Калайди, Ю.Г. Лотюка, Ю.С. Рамського, С.О. Семерікова і інших науковців. Проте швидкий розвиток сучасних інформаційних технологій, інформатизація освіти потребує розв’язання питання взаємодії традиційних і нових засобів навчання.

Такий підхід дозволяє нам переглянути нову парадигму навчання і прийти до її удосконаленої форми, при якій комп’ютер і підручник паралельно використовуються в навчальному процесі.

Основною метою розглянутого методу ми бачимо в організації викладачем на його основі такого процесу навчання, що забезпечує активне засвоєння студентами чисельних методів та курсу вищої математики. Це сприяє формуванню творчої пізнавальної самостійності, що характеризується такими проявами як саморегуляція пізнавальної діяльності, синтез пізнавального мотиву і способів самостійності, стійке позитивне відношення студентів до пізнання. При цьому рівень пізнавальної самостійності студента повинен визначатися ступенем дозування допомоги у розв’язанні математичних задач.

Метою курсу “Чисельні методи” є: сформувати у студентів основні поняття стосовно чисельних методів розв’язування прикладних задач, математичного моделювання і обчислювального експерименту, методів оцінювання точності розв’язків. Що стосується студентів педагогічних університетів, то крім того вони набувають знань, вмінь і навичок, необхідних під час викладання чисельних методів в середніх навчальних закладах.

Для досягнення поставленої мети викладач розв’язує наступні завдання: з'ясовує місце і значення чисельних методів в загальній і професійній освіті, взаємозв'язки чисельних методів з іншими навчальними предметами, розкриває практичну значимість чисельних методів в математичному моделюванні, їх застосування в процесі розв'язання найрізноманітніших технічних і наукових проблем, акцентує увагу студентів на ефективному використанні засобів сучасних інформаційних технологій; організовує ґрунтовне оволодіння студентами фундаментальними поняттями і методами. Як зазначає Ю.С. Рамський [5], «Цілком зрозуміло, наскільки важливо вміти не тільки розв'язувати задачі, а й оцінювати точність розв'язків, вибирати такі методи … розв'язування задачі, щоб розв'язок задовольняв наперед заданим критеріям, найефективніші алгоритми …».

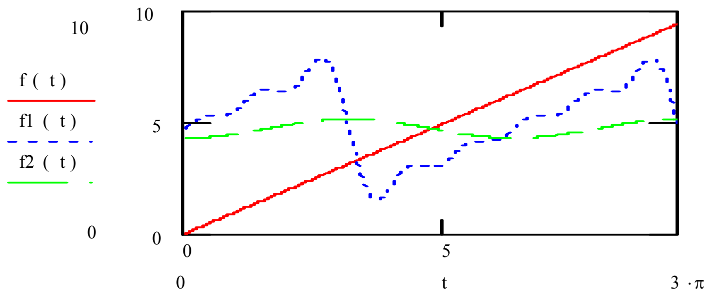
В результаті вивчення розділу чисельних методів наближення функцій студенти оволодіють знаннями щодо постановки задачі наближення функцій, методів наближення (інтерполювання, середнє квадратичне наближення, рівномірне), щодо оптимального вибору вузлів інтерполювання та застосування найпростіших інтерполяційних методів до розв'язування рівнянь з одним невідомим, набувають знання про особливості реалізації цих методів на комп'ютерах. А знайомство з методом середньоквадратичного наближення має важливе методологічне значення, дає можливість подивитися на низку задач наближення із загальних позицій. Конкретні методи наближень є окремими випадками загальної задачі. Такий підхід дає можливість здійснити між предметні зв'язки з курсом математичного аналізу. Наприклад, студенти за допомогою системи *MathCAD* для функції $f(t)$, $t\in[0, 3\pi]$ знаходять тригонометричний многочлен $T(t)=\alpha+\beta\cos t+\gamma\cos 2t$, $t\in R$, який мінімізує норму $G(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$G(\alpha,\beta,\gamma) = \sqrt{\int_0^{3\cdot\pi} \left(\alpha + \beta\cdot\cos(t) + \gamma\cdot\cos(2\cdot t) - f(t)\right)^2 dt}$$

На прикладі функції $f(t)=t$, $t\in[0, 3\pi]$ оцінюють якість наближення тригонометричними многочленами $f_1(t)$ і $f_2(t)$.

$$f1(t) := 4.712 + 2\cdot\sin(t) - \sin(2\cdot t) + 0.667\cdot\sin(3\cdot t) - 0.5\cdot\sin(4\cdot t) + 0.4\cdot\sin(5\cdot t)$$

$$f2(t) := 4.712 - 0.424\cdot\cos(t)$$



Значення показника точності наближення функції $f(t)$ тригонометричними многочленами $f_1(t)$ і $f_2(t)$ такі: $G(4.712, 2, –1, 0.667, –0.5, 0.4)=9.21$, $G(4.712, –0.424, 0)=8.302$. Тобто, якість наближення многочленом $f_2(t)$ вища, ніж многочленом $f_1(t)$. Графік на рисунку ілюструє одержані результати обчислень. Студенти мають можливість закріпити знання з курсу вищої математики, набути нових знань та спростити сприйняття важкої теоретична частина курсу чисельних методів, якщо вивчення чисельних методів буде супроводжуватись активним застосуванням комп'ютерних математичних систем (КМС). Наприклад, поряд з виведенням традиційних формул наближеного інтегрування студенти самостійно за допомогою КМС *Maple* 9.5 можуть *вивести квадратурну формулу з двома вузлами, яка є точною при інтегруванні многочленів до третього степені включно*.

Математичні поняття в своїй більшості абстрактні, і їх не можна ввести без абстрагування. Кожне поняття повинно бути правильно зрозумілим, свідомо і чітко засвоєним усіма студентами ще на занятті. Ця мета повинна бути досягнута вже в процесі введення поняття. Проте поняття повинно закріплюватися і повторюватися шляхом відтворення студентами означення (чи опису), наведення прикладів, що ілюструють і конкретизують його, проведення логічного аналізу означення та іншої творчої роботи, використання поняття в міркуваннях та висновках. Наприклад, можна запропонувати студентам доведення того факту, що $M(A) =n^* max|a_{ij}|$ при $1\le i, j \le n$ є нормою матриці A, а $max|a_{ij}|$ при $1\le i, j \le n$ не є нормою матриці A.

В математиці і її застосуваннях постійно доводиться мати справу з наближеними представленнями функцій.

Класичними апаратами таких представлень є многочлени і раціональні дроби. Теорія наближень функцій многочленами була розроблена в працях П.Л. Чебишова, К. Вейєрштрасса, С.Н. Бернштейна та ін. Як апарат наближення функцій з невеликою гладкістю многочлени і раціональні дроби мають ряд недоліків. В останній час розробляються інші засоби наближення, які не мають такого недоліку. Серед таких засобів доцільно виділити сплайни, які використовують як в теоретичних дослідженнях, так і в наближених обчисленнях.

Студенти повинні з'ясувати, що при переході від інтерполювання многочленами до інтерполювання сплайнами досягаються дві мети. По-перше, це поліпшення якості наближення: при однакових обсягах обчислень абсолютні похибки інтерполювання сплайнами менші, ніж похибки інтерполювання многочленами, а при однакових похибках зменшується обсяг обчислень. По-друге, різко також зменшується обсяг обчислень, оскільки при побудові алгоритмів розв'язання задач, так і при подальшій роботі зі сплайнами використовуються многочлени невисоких степенів або інші елементарні функції. При роботі зі сплайнами можна використовувати кусково-поліноміальне подання, подання через базисні функції чи параметричне. При цьому досягається економія кількості арифметичних операцій, хоча і необхідно зберігати значний обсяг інформації про поліноми, або може збільшуватись обсяг арифметичних операцій, хоча необхідно зберігати менший обсяг іншої інформації.

Студенти повинні вміти: обґрунтовувати існування і єдиність розв'язку задачі інтерполювання, вивести формули інтерполяційних многочленів Лагранжа і Ньютона, оцінити похибку інтерполювання, будувати інтерполяційні многочлени і кубічні сплайни, обчислювати значення функцій за допомогою інтерполяційних многочленів, застосовувати інтерполяційні многочлени для обчислення значення функцій, розв'язування рівнянь, обґрунтувати умову застосовності лінійної і квадратичної інтерполяції, знаходити найкращу середнє квадратичну апроксимацію функції, що задана на відрізку, шукати методом найменших квадратів наближення таблично заданих функцій, будувати емпіричні формули, виконувати згладжування таблично заданих функцій.

Бажано передбачити по кожному з розділів курсу принаймні по одній лабораторній роботі. Системний метод передбачає поєднання змістовної і процесуальної сторін навчання, що взаємозалежні. Знання, отримані на лекціях, складають теоретичну базу курсу. Уміння і навички рішення конкретних математичних задач формуються на практичних заняттях. Лабораторні роботи є сполучною ланкою теоретичних знань студента і його практичних умінь і навичок. При вивченні курсу і особливо при проведенні лабораторних робіт слід широко використовувати засоби НІТ, що дає можливість значно інтенсифікувати навчальну діяльність, спілкування студентів і викладача, розширювати коло задач для розв'язування (зокрема з практичним змістом), вилучивши питання, практична потреба вивчення яких при наявності відповідних засобів НІТ відпадає. У знаннях, яких набуває студент у лабораторному практикумі, інтегруються теоретично-методичні знання та практичні уміння і навички. За рахунок конкретності характеру використання на лабораторних заняттях матеріалу, що розглядається на лекції, створюються умови його детального та ґрунтовного засвоєння.

У зв'язку з важливістю цієї форми заняття необхідно вибрати такий тип лабораторної роботи (ЛР), щоб виконання її максимально активізувало мислення студентів, сприяло б виробленню у них практичних навичок застосування знань.

Лабораторні роботи, у відповідності з навчальним планом, можуть виконуватись після вивчення теоретичного курсу, або одночасно з його вивченням. Виділимо такі типи лабораторних робіт, при проведенні яких використовується комп'ютер.

Ознайомчі роботи. Студенти знайомляться з програмними засобами, оцінюють їх можливості при розв'язуванні завдань з даної теми. Так, наприклад, для ознайомлення із особливостями структури навчально-інформаційного середовища пакетів можна використати пакети *MathCAD*, *Matlab*, *Mathematica*, *Maple*, *NUMERI* і інші. При виконанні цих ЛР діяльність студента організовується на репродуктивному рівні.

При виконанні *експериментальних лабораторних робіт* студенти визначають залежність наближеного розв'язку задачі від методу її розв'язування, порівнюють результати наближених обчислень з точними результатами, оцінюють вплив методу розв'язування на результат, машинний час обчислень, стійкість обчислень тощо. Використання НІТ дає можливість при проведенні роботи з спецкурсів математики доповнювати роботу моделюванням на комп'ютері.

Проблемно-пошукові лабораторні роботи сприяють формуванню та розвитку самостійного мислення студентів [7]. При виконання таких робіт викладач реалізує індивідуальний підхід до навчання студентів. Зокрема використовується досвід, знання тих студентів, які паралельно приймають участь у науково-дослідницькій роботі.

При виконанні ЛР останніх двох типів студент показує глибші знання методу, оскільки його навчальна діяльність організована на рівні продуктивної. Він складає власну програму для підтримки ЛР, при цьому знайомиться із змістом та принципом роботи алгоритмів чисельного розв'язування задачі, інших програмних продуктів за темою ЛР. Отже, його діяльність носить вищий рівень, є продуктивною і творчою. Для того щоб система лабораторних робіт з використанням КСМ органічно включалася в процес навчання вищій математиці потрібно спиратися на відомі принципи дидактики: науковості, наступності, наочності, активного навчання, міцності знань, індивідуального підходу. Для визначення внутрішньої структури кожної лабораторної роботи ми вимагаємо дотримання додаткових принципів: інваріантості, паралельності, змістовного повторення, однотипності, порівняння, повноти тощо. Дотримання їх дозволяє визначити систему завдань для вивчення кожної конкретної теми.

Важливою проблемою під час вивчення наближених методів розв'язування диференціальних рівнянь є аналіз похибок та стійкості. Тому особливу увагу доцільно звернути на стійкість, оскільки вивчення стійкості є одним з центральних питань не лише в галузі звичайних диференціальних рівнянь, а й чисельних методів взагалі. Викладач звертає увагу студентів і на те, що необхідно розрізняти стійкість задачі і стійкість алгоритму її розв'язання. Доцільно не обмежуватись теоретичними питаннями, а навести конкретні приклади нестійких задач і нестійких алгоритмів. Зокрема, можна навести приклад диференціального рівняння $y'(t)=\lambda y(t)$, $\lambda\in C$, $t\geq 0$, $y(0)=y_0$. Це рівняння є моделлю для прогнозування стійкості чисельних методів розв'язування і нелінійних систем диференціальних рівнянь. Щодо нестійкості алгоритмів можна запропонувати студентам довести, що сума $y_{n+1}=-y_n+2y_{n-1}+3hf(x_n, y_n)$ двох стійких алгоритмів $y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n, y_n)$ та $y_n=y_{n-1}+hf(x_n, y_n)$ не дає стійкого алгоритму.

Бажано ознайомити студентів з поняттям жорсткої задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь на прикладі аналізу математичної моделі, що задається рівнянням

$$y''+101y'+100y=0,\ y(0)=1.01,\ y'(0)=-2,$$

розв'язком якого є функція $y=0.01\exp(-100x)+\exp(-x)$. Наближений аналітичний розв'язок знаходиться у вигляді комбінації базових функцій: $y=a(x-1)\ln(x-1)+b$ [1]. За допомогою однієї з КМС студенти будують графіки наближених аналітичних розв'язків та графік точного частинного розв'язку $y=x(1+\ln x)/(x-1)$, окремі студенти можуть написати програму мовою Turbo Pascal [2] розв'язування задачі Коші, аналізують розв'язки, та роблять відповідні висновки.

На лекції доцільно вивести формули методу Ейлера, удосконаленого методу Ейлера-Коші і методу Ейлера з ітераційною обробкою, обґрунтувавши умови збіжності ітераційного процесу. Слід зупинитися на геометричній інтерпретації методів. Удосконалений метод Ейлера доцільно запропонувати на самостійне вивчення. Реалізацію ідей побудови методів Рунге-Кутта другого порядку точності доцільно запропонувати студентам здійснити за допомогою КМС *Maple* 9.5, а формули четвертого порядку точності розглянути без доведення, навести правило Рунге для контролю точності.

Застосування комп'ютеризованої технології при проведенні лабораторних робіт дозволяє збільшити кількість методів, які використовує студент для розв'язування і дослідження задачі. Крім того, з'являється можливість порівняння традиційних методів та сучасних, наприклад, використання сплайн-функцій. Студент може самостійно провести дослідження по вибору методу, який точніше розв'язує дану задачу.

Висновки. Досвід навчання чисельним методам дозволяє стверджувати, що застосування НІТН в процесі навчання чисельним методам набув більшої значимості у формуванні математичної культури студентів, істотно розширюється коло апробованих методів і коло розглянутих задач. студентів. Відмічено суттєві загальноосвітні результати: студенти підвищили рівень організації власної пізнавальної діяльності, що обумовлювалось мірою включення їх у різноманітну навчальну діяльність (самостійний пошук, порівняння, аналіз розв'язку тощо).

Література:

1. Абрамчук В.С., Гуменюк А.В., Абрамчук И.В. Интерполяционные многочлены. – Винница: Винницкий государственный педагогический институт, 1995. – 96 с.

2. Жалдак М.І., Рамський Ю.С. Чисельні методи математики: Посібник для самоосвіти вчителів. – К.: Радянська школа, 1984. – 206 с.

3. Коссак О., Тумашова О., Коссак О. Методи наближених обчислень: Навч. посібн. – Львів: БаК, 2003. – 168 с.

4. Лотюк Ю.Г. Комп'ютерно-орієнтована методична система навчання обчислювальної математики в педагогічному університеті. Автореф. … канд. пед. наук. – К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2005. – 20 с.

5. Рамський Ю.С. Формування інформаційної культури вчителя математики при вивченні методів обчислень у педагогічному вузі // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редкол. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. – Випуск 2. – 2000. – С. 25-47.

6. Семеріков С.О. Активізація пізнавальної діяльності студентів при вивченні чисельних методів у об'єктно-орієнтованій технології програмування. Автореф. … канд. пед. наук. – К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2001. – 20 с.

7. Слєпкань З.І. Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі. – К.: НПУ, 2000. – 210 с.

ЗАСТОСУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ДО ВИВЧЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ РОЗДІЛІВ КУРСУ "ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ" В ТЕХНІЧНИХ УНІВЕРСИТЕТАХ

З.В. Бондаренко
м. Вінниця, Вінницький національний технічний університет
zlatabond@ukr.net

Підготовка фахівців, які здатні працювати творчо, об'єктивно сприяє введенню в навчальні плани додаткових дисциплін, що набувають статусу спеціальних курсів.

При вивченні спеціальних розділів курсу "Диференціальні рівняння" ми виходимо з того, що такий спецкурс у технічному ВНЗ не має самостійного значення, а є дисципліною, яка вивчається з метою подальшого практичного застосування сучасних математичних методів у спеціальних дисциплінах.

Аналіз змісту дисципліни "Диференціальні рівняння" з метою виявлення необхідних для її підтримки розділів математики показав, що найчастіше використовуються методи математичної фізики та чисельні методи.

Основні цілі використання НІТН при вивченні спецкурсу: підвищення інтересу до предмета; організація індивідуальної навчальної діяльності студентів; скорочення непродуктивних витрат часу на допоміжні роботи; розвиток творчої активності та здібностей студентів; підвищення унаочнення, виразності, доступності навчального матеріалу; моделювання фізичних явищ і процесів за допомогою комп'ютерів тощо.

Вивчення спеціальних розділів курсу "Диференціальні рівняння" ґрунтується на алгоритмічному підході, що дозволяє досягти:

– високої конкретизації та інформативності визначень, пояснень, доведень тощо;

– достатньої чіткості та доступності подання навчального матеріалу;

– стислості, систематизації, необхідного рівня узагальнення матеріалу;

– підвищення рівня предметних знань за рахунок оволодіння загальними алгоритмічними вміннями, що сприяє також формуванню загальнонавчальних та спеціальних умінь.

Використання НІТН дозволяє інтенсифікувати процес навчання, створює у студентському колективі умови становлення навчальної самостійності та ініціативи. Якщо при вивченні загального курсу "Диференціальні рівняння" перед студентами ставиться завдання оволодіння вихідними поняттями та їх властивостями, обґрунтування вибору того чи іншого методу, алгоритму, то в процесі навчання спецкурсу головною метою є знайомство з методами, їх порівняння при розв'язуванні фахових задач, набуття навичок "доведення результату до числа" та аналізу результатів обчислення.

Виділимо такі види діяльності студентів при вивченні спеціальних розділів курсу “Диференціальні рівняння”:

– оволодіння математичним понятійним апаратом спеціальних розділів;

– оволодіння новими знаннями;

– систематизація набутих знань, необхідних при вивченні фахових дисциплін;

– набуття навичок застосування набутих знань із спецкурсу.

– оволодіння загальними алгоритмічними уміннями, що формуються в процесі використання комп’ютерів і є засобом розвитку когнітивної, регулятивної та комунікативної функцій мислення.

Вивчення спеціальних курсів ґрунтується на таких принципах:

– формування навчально-пізнавальної проблеми здійснюється на основі реальної або імітованої практичної ситуації, яку не можна розв’язати за допомогою набутих знань;

– залучення студентів до участі у виконанні завдань теоретичного, практичного змісту та лабораторних робіт;

– актуалізація необхідного навчального матеріалу;

– використання багаторівневої постановки задачі, що враховує нахили студентів, а також дає можливість адаптувати обсяг роботи та обсяг навчального часу.

При розв’язанні більшості задач спеціального курсу “Диференціальні рівняння” необхідні знання з лінійної алгебри і сучасних чисельних методів їх розв’язування за допомогою комп’ютерів. Ці знання складають сукупність теоретичних положень та алгоритмів, які є основним інструментом чисельних методів. Тому важливою методичною задачею є більш глибоке оволодіння методами лінійної алгебри в порівнянні із загальним курсом вищої математики. При цьому студенти набувають вмінь розв’язувати такі задачі: правильно вибирати сучасні чисельні методи і алгоритми лінійної алгебри, які використовуються при розв’язуванні конкретних фахових задач, використовувати математичне забезпечення, пакети програм. Вивчення спецкурсу з використанням НІТН передбачало формування змістових понять із розділів математики, необхідних фахівцеві.

Одним із важливих понять теорії диференціальних рівнянь є поняття крайової задачі. Особливість методики вивчення теми полягає в тому, що студенти відносно самостійно за допомогою математичних пакетів знаходять спосіб виконання предметно-пізнавальної дії для одержання потрібних результатів (зв’язків, числових характеристик параметрів, закономірностей). Крайові задачі зустрічаються в теорії електронних кіл, теорії управління, хімічній кінетиці та інших галузях науки і техніки. Зміст поняття крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь формується шляхом аналізу математичної моделі. А зміст поняття наближеного розв’язку крайової задачі можна розкрити, інтегруючи рівняння $y''-2y=4x^2\exp(x^2)$, $y(-1)=y(1)=0$, , розв’язком якого є функція:

$$y=\exp(x^2)-0.624(\exp(1.41x)+\exp(-1.41x)).$$

Наприклад, наближений аналітичний розв’язок

$$y(x)=a(1-x^2)+b(1-x^4)$$

студентам пропонується знайти у вигляді комбінації базових функцій:

$$u_0(x)=0,\ u_1(x)=1-x^2,\ u_2(x)=1-x^4,\ \ldots$$

Для інших базових функцій, а саме: $v_0(x)=0$, $v_1(x)=1-x^2$, $v_2(x)=x^2(1-x^2)$, ..., наближений розв’язок студенти шукають у вигляді:

$$y(x)=a(1-x^2)+bx^2(1-x^2).$$

За допомогою математичного пакету студенти будують наближені розв’язки. Якщо вибрана система функцій $\{u_n(x)\}$, то коефіцієнти a=0.4203, b=–0.6563 і наближений розв’язок вони отримають у вигляді:

$$y=0.656x^4-0.42x^2-0.236.$$

У випадку вибору системи $\{v_n(x)\}$, коефіцієнти будуть: a=–3.0934, b=–0.1460, а наближений розв’язок: $y=-0.146x^4-2.95x^2+3.096$.

Далі студенти будують графіки наближених аналітичних розв’язків та графік точного розв’язку.

Візуальна оцінка отриманих розв’язків дає змогу зробити аналіз та висновки щодо вибору базових функцій та необхідності оцінювання похибки наближення.

На сучасному виробництві все ширше застосовується подання інформації у вигляді графічних залежностей, як найбільш економних, наочних, і змістовних. Графічні засоби подання інформації застосовуються у різних галузях візуальної комунікації для того, щоб спонукати процеси мислення, які ґрунтуються на образах, а рисунки, креслення, графіки є тим засобом, за допомогою якого думки передаються у вигляді графічних висловів. Найбільш вдало геометричний підхід до розв’язання задачі розкрито у роботах В.І. Клочка [1].

Розділ “Жорсткі системи диференціальних рівнянь” не включається в загальний курс диференціальних рівнянь, який викладається в технічних університетах. Тому доречно включити його в спеціальний курс диференціальних рівнянь і показати студентам загальний підхід щодо розв’язання проблеми жорсткості, який полягає у використанні неявних методів. Завдання лабораторної роботи полягає в тому, щоб визначити жорсткість системи, пояснити відмінність поведінки явного і неявного методів Ейлера при розв’язуванні жорсткої задачі. В ході виконання лабораторної роботи студенти набувають навичок оцінки ситуації, пошуку причин відхилення, порівняння результатів.

У знаннях, яких набуває студент у лабораторному практикумі, інтегруються теоретично-методичні знання та практичні уміння і навички. За рахунок конкретності характеру використання на лабораторних заняттях матеріалу, що розглядається на лекції, створюються умови його детального та ґрунтовного засвоєння. У зв’язку з важливістю цієї форми заняття необхідно вибрати такий тип лабораторної роботи, щоб виконання її максимально активізувало мислення студентів, сприяло б виробленню у них практичних навичок застосування знань. Лабораторні роботи, у відповідності з навчальним планом, можуть виконуватись після вивчення теоретичного курсу, або одночасно з його вивченням. Організаційно лабораторні роботи можуть бути фронтальними (коли всі студенти на занятті виконують одну роботу) або груповими (коли група студентів поділена на підгрупи і підгрупа виконує одну й ту ж роботу). Вибір типу лабораторної роботи та методу навчання здійснює викладач з урахуванням контингенту студентів, теми, наявних обчислювальних засобів, програмного забезпечення. Виділимо такі типи лабораторних робіт, при проведенні яких використовується комп'ютер:

– *ознайомчі* роботи. Студенти знайомляться з програмними засобами, оцінюють їх можливості при розв'язуванні завдань з даної теми. Так, наприклад, для ознайомлення із особливостями структури навчально-інформаційного середовища пакетів можна використати пакети MathCAD, Matlab, Mathematica, Maple. При виконанні таких лабораторних робіт діяльність студента організовується на репродуктивному рівні;

– при виконанні *експериментальних* лабораторних робіт студенти визначають залежність наближеного розв'язку задачі від методу її розв'язування, показуючи глибші знання методу, оскільки їх навчальна діяльність організована на рівні продуктивної. Вони складають власну програму для підтримки лабораторної роботи, при цьому знайомляться із змістом та принципом роботи алгоритмів чисельного розв'язування задачі, інших програмних продуктів за темою. Отже, їх діяльність носить вищий рівень, є продуктивною і творчою.

Традиційні методики проведення лабораторного практикуму спрямовані в основному на досягнення таких цілей:

а) закріплення знань, одержаних на лекції;

б) формування умінь застосовувати знання для розв'язування учбово-практичних задач.

Застосування НІТН дозволяє глибше розкрити цілі навчання та виділити окремі їх елементи у самостійні цілі, а саме:

а) формування умінь самостійно одержувати нові знання та оволодівати засобами дій, тобто розвивати творче мислення;

б) розвивати індивідуальні здібності студентів;

в) використання стандартних бібліотек програм;

г) формування умінь і навичок поєднання найпростіших програм чисельних методів у більш складні структури.

Для досягнення таких цілей необхідні спеціальні методи, засоби та форми навчання.

Застосування НІТН при проведенні лабораторного практикуму з математики сприяє підвищенню рівня оволодіння навчальним матеріалом. З основними теоретичними положеннями математичних методів студент знайомиться на лекції. Комп'ютеризована технологія проведення практикуму дає можливість підвищити рівень умінь і навичок оволодіння методами за рахунок використання завдань, відмінних від традиційних. З метою мотивації розв'язуються приклади, які підкреслюють необхідність знання теоретичного матеріалу, обмеженість програмних засобів, алгоритмів, що застосовуються при розв'язуванні конкретної задачі. (Наприклад: при розв'язуванні рівняння деяким методом, шляхом зміни параметру, кроку, одержується розв'язок, який суттєво відрізняється від передбачуваного). Застосування НІТН дає можливість у лабораторному практикумі використовувати різнорівневу постановку задач, що дозволяє адаптувати об'єм робіт до дидактичних задач, враховувати, розвивати, формувати творчі навички студентів.

Застосування комп'ютеризованої технології при проведенні лабораторних робіт дозволяє збільшити кількість методів, які використовує студент для розв'язування і дослідження задачі. Крім того, з'являється можливість порівняння традиційних методів та сучасних, наприклад, використання сплайн-функцій. Студент може самостійно провести дослідження по вибору методу, який точніше розв'язує дану задачу.

В результаті застосування комп'ютера студенти набувають навичок розв'язання таких задач:

– вибирати той чи інший чисельний метод і алгоритм відповідно до конкретної задачі;

– аналізувати алгоритми, які використовуються при розв'язуванні задачі.

Література:

1. Клочко В.І. Застосування новітніх інформаційних технологій при вивченні вищої математики у технічному вузі: Навчально-методичний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 1997. – 300с.

2. Михалін Г.О., Томащук О.П. Професійна спрямованість викладання спеціальних математичних дисциплін // Математика в школі . – 1998. – №2. – С. 9-13.

3. Фокин Ф.Г. Преподавание и воспитание в высшей школе. Методология, цели и содержание, творчество. Учебн. пособ. для студ. высш. учеб. завед. – М.: Издательский центр. Академия. – 2002. – 240 с.

4. Херхагер М., Партолль Х. MathCAD 2000: полное руководство: Пер. с нем. – К.: Издательская группа BHV, 2000. – 416 с.

5. Співаковський О.В., Львов М.С., Кравцов Г.М., КрекнінВ.А., Гуржій Т.А., Зайцева Т.В., Кушнір Н.А., Кот С.М. Педагогічні технології та педагогічно-орієнтовані програмні системи: предметно-орієнтований підхід // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2002. – №2 (20). – С. 17-21.

ВИКОРИСТАННЯ ПАКЕТУ MAPLE ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Л.В. Васильєва[α], І.А. Гетьман[β]
м. Краматорськ, Донбаська державна машинобудівна академія
[α] vas_milla@hotmail.com
[β] getman_irina@ukr.net

Сучасний економіст повинен знати і вміти використовувати в повсякденній роботі новітні економіко-математичні методи і моделі.

Традиційний спосіб вивчення економіко-математичних моделей полягав у визначенні їхнього призначення і суті, в освоєнні техніки "ручної" реалізації [1–3]. Використання комп'ютерних технологій звільняє економістів від необхідності спрощувати економічні моделі, рятує їх від рутинної обчислювальної роботи з реалізації математичних методів, дозволяє сконцентрувати увагу не на алгоритмі обчислення, а безпосередньо на аналізі результатів моделювання, що помітно підвищує "коефіцієнт корисної дії" витрачених зусиль. Очевидно, що ефективність вивчення предмета стає істотно вище, якщо в економіста є можливість самостійно швидко "програти" варіанти моделей, змінити їхні параметри, порівнявши в графічній і числовій формі результати використання декількох методів.

У практиці економічного планування на будь-якому його рівні виникає необхідність вибору оптимального варіанта серед різних варіантів плану. Однак, як правило, інтуїція і досвід планування виявляються тут недостатніми. Тому необхідні точні методи, що дають можливість зіставляти різні варіанти плану і вибирати оптимальний варіант. Одним з методів, що полегшує перебір оптимальних варіантів плану, є лінійне програмування.

Розв'язання задачі лінійного програмування складається з трьох основних етапів:

а) складання математичної моделі (формалізація задачі);

б) рішення формалізованої задачі;

в) аналіз отриманого оптимального рішення.

Метод рішення формалізованої задачі залежить від її розмірності. Якщо кількість змінних дорівнює двом (n=2), то задача називається плоскою і може бути вирішена графічно. Контроль правильності рішення в даному випадку варто проводити, розв'язуючи задачу на ЕОМ. Для багатомірних задач (n≥3) графічний метод рішення не можна застосовувати. У цьому випадку і рішення задачі, і контроль правильності рішення виконується за допомогою ЕОМ.

Однією з програм, що дозволяють отримати рішення задачі ЛП і проілюструвати його (при n=2), є Maple [4].

Розглянемо принцип її роботи на такому прикладі.

Нехай необхідно знайти (x_1, x_2), при яких функція $F(x_1, x_2)=2x_1+x_2$ досягає максимуму, причому x_1, x_2 повинні задовольняти наступній системі обмежень (СОБ):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 & (1) \\ x_1 + x_2 \ge 1 & (2) \\ x_1 \le 1.5 & (3) \\ x_2 \le 1.5 & (4) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$$

Розв'язання:

1. Будуємо область розв'язків системи обмежень. Область розв'язків – багатокутник ABCDEF (рис. 1).

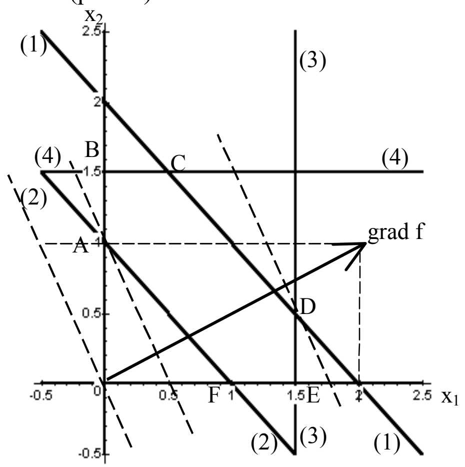


Рис. 1. Приклад графічного рішення задачі лінійного програмування

2. Знаходимо градієнт функції F: grad $F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = (2; 1)$.

Будуємо вектор з початком у точці (0; 0) і кінцем у точці (2; 1).

3. Будуємо пряму, перпендикулярну вектору градієнта. Пересуваємо цю пряму в напрямку, зазначеному вектором. Остання точка області, що перетинає пряма і є точкою максимуму. У даному випадку це точка D.

4. Знаходимо координати точки максимуму. Ця точка лежить на перетині прямих (3) і (1). Розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = 1,5 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

Одержали: $x_1 = 1.5$; $x_2 = 0.5$.

5. Визначимо максимальне значення цільової функції:

$F_{max} = 2 \cdot 1.5 + 0.5 = 3.5$.

Відповідь: максимального значення цільова функція F=3,5 досягає в точці (1,5; 0,5).

Запишемо, як ця задача розв'язується за допомогою **Maple**.

Далі команди виділені **напівжирним** шрифтом, пояснення змісту команд – звичайним шрифтом, результати виконання команд – *курсивом*.

Команда підключення бібліотеки сиплекс-програм:

> with(simplex):

Warning, new definition for minimize

Команда завдання цільової функції:

> f:=2*x1+x2;

f := 2 x1 + x2

Команди завдання СОБ:

> g1:=x1+x2<=2; g2:=x1+x2>=1; g3:=x1<=1.5; g4:=x2<=1.5; sog={g1,g2,g3,g4};

sog = {x2 <= 1.5, x1 <= 1.5, 1 <= x1 + x2, x1 + x2 <= 2}

Команда рішення задачі ЛП симплекс-методом:

> maximize(f, sog union {x1>=0,x2>=0});

{x1 = 1.5, x2 = .5}

Команди присвоєння змінним x1, x2 знайдених значень:

> x1:=1.5: x2:=0.5:

Команда обчислення значення цільової функції в точці максимуму:

> f_max:=f;

f_max := 3.5

Команда обчислення значень системи обмежень у точці максимуму

>g1;g2; g3;g4;

2.0 <= 2

1 <= 2.0

1.5 <= 1.5

.5 <= 1.5

Відповідь: максимального значення цільова функція f=3,5 досягає в точці (1,5; 0,5).

Це співпадає з "ручним" розрахунком.

Проілюструємо графічне розв'язання цього прикладу.

Команда очищення пам'яті:

> restart:

Команди підключення бібліотек розширеної графіки:

> with(plots):with(plottools):

> g1:=x1+x2<=2; g2:=x1+x2>=1; g3:=x1<=1.5; g4:=x2<=1.5;

g1 := x1 + x2 <= 2

g2 := 1 <= x1 + x2

g3 := x1 <= 1.5

g4 := x2 <= 1.5

Команда побудови області рішень:

> l1:=inequal({g1,g2,g3,g4, x1>=0, x2>=0},

```
> x1=0..2,x2=0..2,optionsexcluded=(color=white)):
```

Команда побудови графіка цільової функції: (Примітка. Якщо цільова функція f=2x1+x2 у точці максимуму дорівнює 3.5, то цільова пряма, що проходить через точку максимуму має рівняння: x2=(3,5-2x1)/1)

```
> l2:=plot((3.5-2*x1)/1,x1=0..2,x2=0..2,color=black,thickness=2):
```

Команда побудови градієнту:

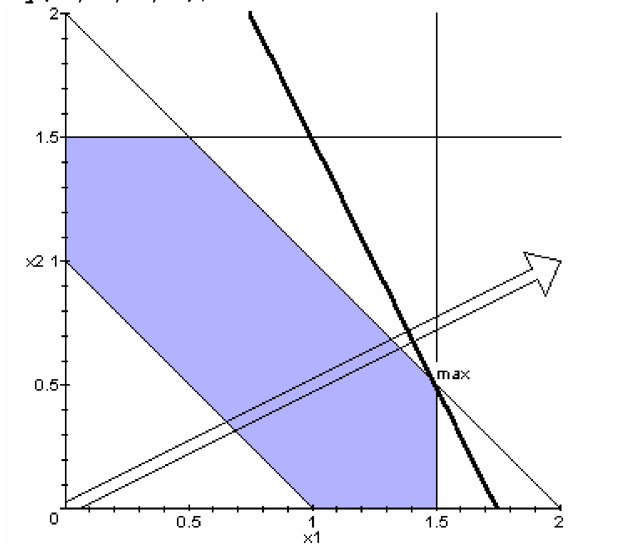
```
> l3 := arrow([0,0], [2,1], .05, 0.2, .05):
```

Команда підпису точки максимуму з координатами x1=1.5, x2=0.5:

```
> l4:=textplot([1.5,0.5,'max'],align={ABOVE,RIGHT}):
```

Команда побудови на однім малюнку області рішень, градієнту і графіка цільової функції:

```
> display(l1,l2,l3,l4);
```



Цей приклад використовується як лабораторна робота для студентів-економістів і дозволяє їм отримати навички розв'язання задач лінійного програмування за допомогою одного з математичних пакетів.

Література:

1. Гасс С. Линейное программирование (методы и приложения). – М., 1961. – 305 с.

2. Горчаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономико-математические модели. – М.: Компьютер, 1995. – 135 с.

3. Каллихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высш. школа, 1975. – 270 с.

4. Васильєва Л.В., Гетьман І.А.. Використання комп'ютерних технологій при вирішенні задач лінійного програмування. Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. – Краматорск: ДДМА, 2005. – 112 с.

ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

І.Д. Чепорнюк
м. Київ, Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету
ID41@yandex.ru

Вступ

Одним з основних завдань фахівця з економіки та підприємництва є керування економічними системами, розробка та впровадження стратегічний і тактичний планів.

Математичне програмування – один з основних інструментів управління економічними системами, що полягає у розробці методів розв'язування оптимізаційних задач та дослідження отриманих розв'язків.

Математичне програмування є однією з дисциплін економіко-математичного циклу, які вивчаються в економічних вузах. Цей цикл дисциплін є базовим у підготовці економістів і підприємців.

Основними завданнями навчальної дисципліни "Математичне програмування" є:

1) ознайомити студентів з видами економіко-математичних моделей;
2) ознайомити студентів з основними методами та алгоритмами знаходження оптимального розв'язку задач лінійного, цілочисельного, нелінійного, стохастичного та динамічного програмування.
3) навчити, використовуючи здобуті знання, розв'язувати теоретичні і прикладні задачі економіки;
4) дати необхідну підготовку і знання для вивчення інших дисциплін професійного циклу, зокрема, дослідження операцій.

Швидкий розвиток інформаційних технологій вплинув на більш швидкий розвиток наук на зламі областей знань. Інтенсивно почали формуватись та розвиватись такі розділи математики, як теорія множин, теорія графів, комп'ютерна математика, математичні методи оптимізації та інші методи і моделі дослідження операцій.

Важко уявити, що при розв'язанні проблеми вибору, тобто відшукання оптимального рішення, можна обійтись без сучасних інформаційних технологій, які використовують методи математичного програмування.

Тому питання про впровадження використання інформаційних технологій при навчанні курсу математичного програмування є актуальним.

З'ясуємо, в якому місці навчального курсу (при вивченні яких тем, розділів, розв'язанні яких задач) доцільно використовувати НІТН, в якому обсязі здійснювати комп'ютерну підтримку процесу навчання, яких методичних рекомендацій слід дотримуватися для ефективного впровадження НІТН.

Використання НІТН при навчанні математичного програмування повинно сприяти підвищенню рівня інформаційної культури і дасть змогу фахівцеві економісту гідно вступити в інформаційне суспільство.

Одним з найважливіших етапів розв’язування задач математичного програмування є побудова економіко-математичної моделі, а в умовах застосування НІТН і її комп’ютерна реалізація.

Існує велика кількість програмних продуктів для реалізації цієї моделі. Це можуть бути прикладні програми (наприклад Excel); пакет моделювання систем масового обслуговування GPSS, пакети для моделювання економічної динаміки IThink або Poversim, пакети моделювання математичних та технічних систем MatLab і Simulink, Mathcad та багато іншого. Також можна застосовувати універсальні мови програмування.

Отже, викладачеві треба ретельно проаналізувати доцільність використання того чи іншого програмного продукту для кожного розділу дисципліни, враховуючи рівень навченості студентів, зручність користування даним пакетом, трудомісткість та багато інших факторів.

Наприклад, написання власних програм для розв’язання певного класу задач математичного програмування є процес хоча і корисний, та занадто трудомісткий, іноді розробка інтерфейсу програми займає більше часу, ніж програмування самої моделі, та й рівень знань студентів-економістів мов програмування не є достатнім.

Пакет Mathcad хоч і створювався як потужний калькулятор, призначений не для професійних математиків і відрізняється від інших пакетів можливістю вільно компонувати робочу сторінку і відносною легкістю вивчення, та все ж є важким для сприйняття студентами-економістами. Проте, оскільки вивчення даної дисципліни передбачено не лише для економічних спеціальностей, він може зайняти належне місце в процесі вивчення курсу математичного програмування для студентів технічних спеціальностей.

Найпростішим для розуміння є табличний процесор Excel. Він має широке застосування до розв’язку задач математичного програмування. Та для організації якісного додатку в Excel доводиться займатись серйозним програмування у VBA.

Ознайомлення студентів з різними програмними продуктами, що можуть повністю або частково автоматизувати процес розв’язання задач математичного програмування, повинно проходити після вивчення теоретичних основ з певних розділів та набуття студентами вмінь та навичок розв’язання цих задач “вручну”.

1. Огляд основних програмних засобів, які можуть використовуватися при дослідженні математичних моделей задач оптимізації

Можна виділити такі основні математичні моделі оптимізаційних задач:

1) лінійна оптимізація;
2) цілочисельна оптимізація;

3) нелінійна оптимізація;
4) динамічна оптимізація;
5) стохастична оптимізація;
6) мережева оптимізація;
7) моделі конфліктних взаємодій (теорія ігор).

При розв'язуванні задач лінійної оптимізації можна використовувати такі програмні продукти, як Gran 2D, Excel, Simplex, QSB (Quantitative System for Business), Optimal 1.4 та інші.

У процесі розв'язування задач цілочисельного програмування можна скористатися програмними пакетами QSB, Excel.

Для побудови кільцевих маршрутів, тобто для розв'язування задач типу "задачі комівояжера", можна використати програмний пакет мережевої оптимізації (Network Optimization), розроблений кафедрою дискретної математики і алгоритміки Білоруського державного університету (автор Н.Н. Писарчук). Пакет містить ряд програм, які дозволяють розв'язувати задачі визначення максимального потоку в мережі, потоку мінімальної вартості, знаходження найкоротшого шляху та ряд інших. Інформаційна технологія розв'язування задачі комівояжера (відшукання циклу Гамільтона мінімальної вартості (довжини) – Min Cost Hamilton Cycle) дозволяє використати графічне та табличне представлення початкових даних.

Для задач динамічного програмування можна застосувати зручний і простий Excel.

Для розрахунку параметрів і оптимізації мережевих графіків використовуються інформаційні технології пакету QSB (PERT – програма розрахунку проектів методами мережевого планування; CPM – програма "Мережеве планування").

Оскільки будь-яка скінчена гра з двома особами і нульовою сумою зводиться до розв'язування задачі лінійного програмування, то для розв'язування матричних ігор теж можна застосувати програму Simplex або "Лінійне програмування" з пакету QSB. Для знаходження оптимальних стратегій в іграх з природою можна використати Excel.

Ця ж програма допоможе у розв'язуванні задач нелінійного програмування та векторної оптимізації.

Широке застосування має Excel до розв'язування задач стохастичного програмування, зокрема, для визначення кількісних характеристик і функцій розподілу випадкової величини, побудови графіків для нормального розподілу; формування початкових даних для детермінованого еквіваленту задачі в Е-постановці; розв'язування стохастичних задач в Р-постановці; розв'язування стохастичної транспортної задачі.

2. Приклади використання деяких програмних засобів для розв'язування оптимізаційних задач

На нашу думку, при дослідженні математичних моделей оптимізаційних задач доцільно використовувати такі програмні засоби, як Excel, Gran 2D, Optimal.

2.1. GRAN 2D

Програмний комплекс Gran 2D може бути використаний для побудови геометричної інтерпретації задач лінійної, цілочисельної та нелінійної оптимізації, тобто для побудови багатокутника розв'язків (області допустимих планів).

Наприклад: зобразити багатокутник розв'язків для задачі лінійної оптимізації, якщо

$$z = 40x_1 + 50x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 24x_1 + 8x_2 \le 600, \\ 8x_1 + 8x_2 \le 480, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 240. \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{matrix}$$

Користуючись пунктом меню *Операции* та командою *Неравенства*, введемо нерівності системи обмежень та умови невід'ємності змінних.

Після команди *График/Построить* отримаємо геометричну інтерпретацію даної задачі (рис. 1).

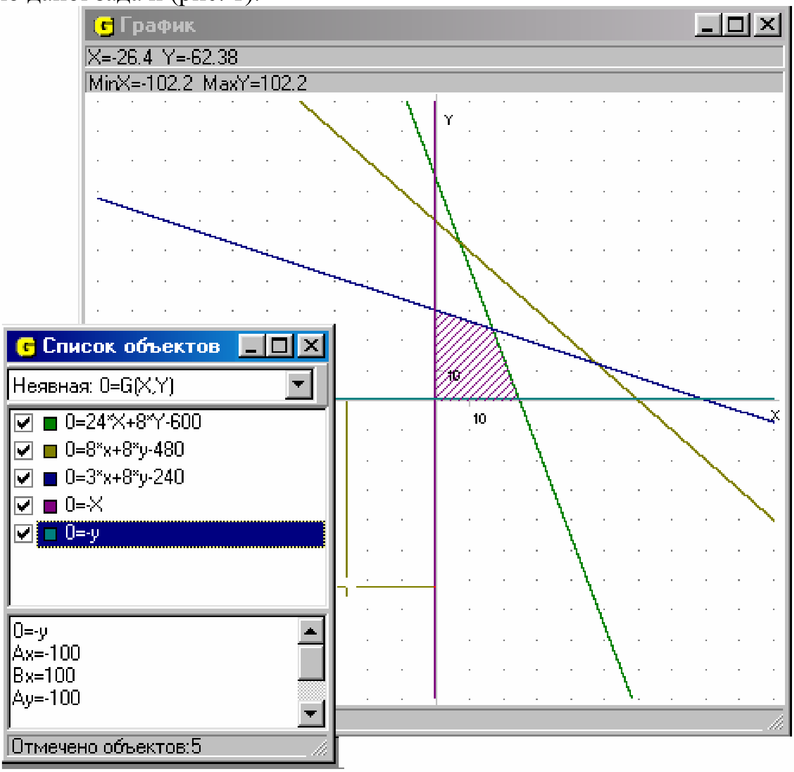


Рис. 1

2.2. Optimal 1.4

Програма Optimal 1.4 використовується для знаходження розв'язку транспортної задачі. При цьому від користувача вимагається лише ввести вихідні дані, а саме:

– користуючись командами пункту меню *Таблица*, вказати кількість складів та споживачів;

– у відповідні комірки необхідно ввести тарифи перевезень, величину потреб кожного споживача та величину запасів на кожному складі;

– у вікні *Настройки* (команда *Задача/Настройки*) вказати режим розв'язування транспортної задачі (перевірочний чи детальний) (рис. 2);

– у тому ж вікні вказати, якими саме методами необхідно користуватися програмі під час знаходження опорного плану задачі (методи північно-західного кута, мінімального елемента, Фогеля та подвійної переваги) та оптимального плану (розподільчий метод чи метод потенціалів).

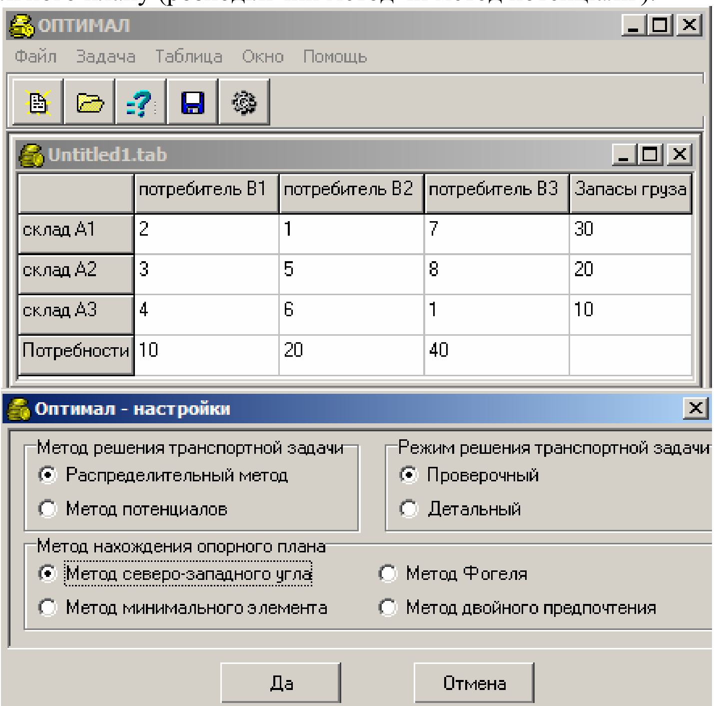


Рис. 2

Ввівши всі необхідні дані, користувач повинен обрати одну з двох команд пункту меню *Задача*: *Решить задачу* або *Найти опорный план*. Після чого відкриється вікно, яке містить розв'язок задачі.

2.3. Excel

Програмний пакет Excel може бути застосованим для знаходження оптимального розв’язку задачі лінійної, цілочисельної, нелінійної оптимізації, а також для автоматизації деяких етапів розв’язування задач динамічної та стохастичної оптимізації.

Розглянемо, як можна застосувати програмний пакет Excel для знаходження розв’язку задачі цілочисельної оптимізації, математична модель якої має такий вигляд:

$$z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 20 \\ 9x_1 + 7x_2 + 10x_3 \le 40 \end{cases}$$

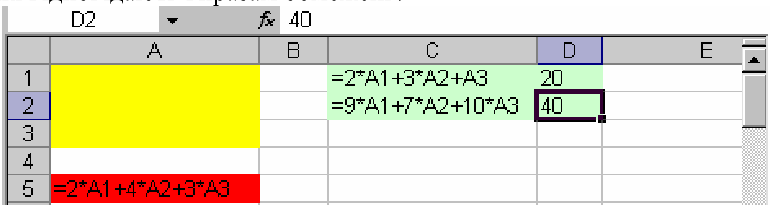
$x_j \geq 0$ і цілі (j=1, 2, 3).

Спочатку визначимо місце для змінних та цільової функції.

До комірки цільової функції запишемо формулу для її підрахунку:

=2*A1+4*A2+3*A3

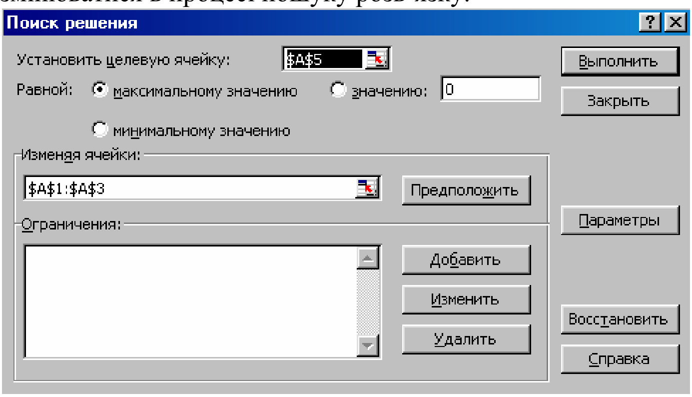
Обмеження задачі записуються в комірки C1:D2, куди вводяться функції, які відповідають виразам обмежень.



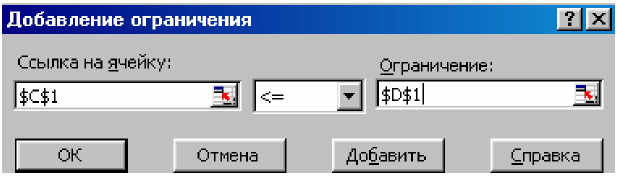
Далі необхідно активувати команду *Сервис / Поиск решения*, при цьому виводиться діалогове вікно, в якому необхідно вказати наступне:

1. В полі *Установить целевую ячейку* вказати адресу комірки, яка містить результати розрахунку цільової функції. В нашому випадку це комірка A5.

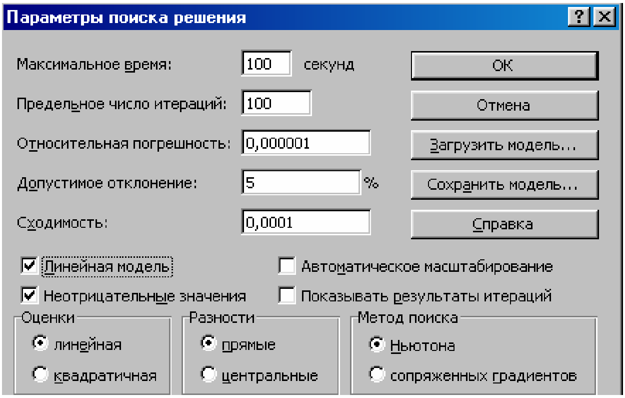
2. В розділі *Равной*: вибираємо перемикач “*максимальному значению*”. В полі *Изменяя ячейки* вказуємо діапазон комірок \$A\$1:\$A\$3 – їх значення можуть змінюватися в процесі пошуку розв’язку.



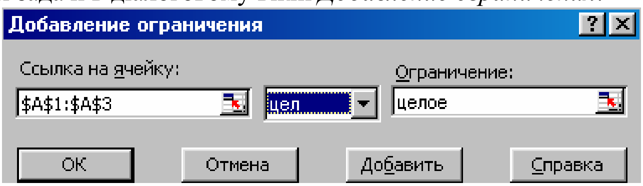
3. Ввести обмеження задачі в розділі *Ограничения*. Для цього необхідно натиснути кнопку *Добавить*, яка відкриває діалогове вікно *Добавление ограничения*.



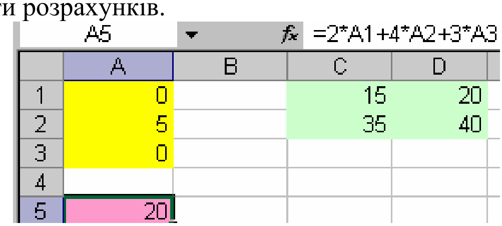
4. Для реалізації умови невід'ємності значень в діалоговому вікні *Поиск решения* натискаємо кнопку *Параметри*. У вікні *Параметры поиска решения* включаємо прапорець *Неотрицательные значения* та *Линейная модель*.



5. Для реалізації умови цілочисельності значень, введемо додаткове обмеження задачі в діалоговому вікні *Добавление ограничения*.



6. При натисканні кнопки *Выполнить* діалогового вікна *Поиск решения* з'являється діалогове вікно *Результаты поиска решения*. Обираємо тип звіту *Результаты*. Після натискання кнопки ОК на робочому листі з'являються результати розрахунків.



Отримали відповідь: max z= z(0;5;0)=20.

Література:

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.
2. Вітлінський В.В. Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни “Математичне програмування”. – К.: КНЕУ, 2001.
3. Горчаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономико-математические модели. – М.: Компьютер, ЮНИТИ, 1995.
4. Костевич Л.С. Математическое програмирование: Информационные технологии оптимальных решений. – Мн.: Новое знание, 2003.
5. Федосеев В.В., Гармаш А.Н., Дайтбегов Д.М. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие. – М.: ЮНИТИ, 1999.
6. Цисарь И.Ф., Непман В.Г. Компьютерное моделирование экономики. – М.: Диалог-МИФИ, 2002.

ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМИ ADVANCED GRAFER ПРИ РОЗВ’ЯЗУВАННІ НЕРІВНОСТЕЙ

С.П. Ткаченко
м. Кіровоград, Технікум Кіровоградського національного технічного університету
serro@ukr.net

Розглянемо можливість використання програми Advanced Grafer (http://www.serpik.com/agrafer/) (автор Michael Serpik) на уроках математики й інформатики.

Основні початкові труднощі при роботі з програмою і пов’язані з цим помилки викликані неправильним записом функцій, тому наводимо в тексті повну форму запису виразу функції, необхідну для підстановки в програму. Якщо порівнювати цю програму із широко відомою програмою MathCAD, то слід зазначити дуже зручний інтерфейс, доступність і простоту роботи з Advanced Grafer. Учні можуть освоїти прийоми роботи з нею за один-два уроків. Що стосується можливостей оформлення графіків, те ця програма, безумовно, перевершує MathCAD [1].

У виразах можна використовувати різні функції. При використанні функції, треба вводити її наступним чином: <ім’я_функції>(<аргумент>).

Програма дозволяє використовувати наступні функції:

sin – синус
cos – косинус
tan – тангенс
cot – котангенс
atan – арктангенс
asin **–** арксинус
acos **–** арккосинус
abs – абсолютна величина
sqrt – квадратний корінь
ln – натуральний логарифм
lg – десятковий логарифм
exp – експонента (e^x)
int – ціла частина числа
round – округлена величина
frac – мантиса числа

sign – знак числа:
***sign*(*x*)=1** якщо ***x*>0**,
***sign*(*x*)=0** якщо ***x*=0,**
***sign*(*x*)=-1** якщо ***x*<0.**
sinh – гіперболічний синус
cosh – гіперболічний косинус
tanh – гіперболічний тангенс
coth – гіперболічний котангенс
asinh – гіперболічний арксинус
acosh – гіперболічний арккосинус
atanh – гіперболічний арктангенс
acoth – гіперболічний арккотангенс
random – ***random*(*x*)** = **rnd*x**,
rnd – випадкова величина,
0<=rnd<1

Розв’язування нерівностей “стандартним” методом

Використання програми Agrafer у цьому випадку зводиться до визначення критичних точок усередині інтервалів, між якими функція зберігає знак. Правда, програма дозволяє просто вводити нерівність і показує знакові інтервали на осі. Як приклад наведемо завдання:

Приклад. Розв’язати нерівність $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Вибравши команду **Графики ⇒ Добавить график** (або натиснувши на кнопку  панелі інструментів **Графік**) вводимо відповідний вираз у полі **Y(x)=** (див. рис. 1) і маємо графік, зображений на рис. 2. Використання програми Agrafer у цьому випадку (як і взагалі у випадку раціональних нерівностей, тобто нерівностей, що містять тільки раціональні функції, які можна розв’язувати методом інтервалів) зводиться до визначення критичних точок усередині інтервалів, між якими функція зберігає знак. Правда, програма дозволяє просто вводити нерівність і показує знакові інтервали на осі, як ми бачимо на прикладі. Звичайно, можна скористатись можливістю “автоматичної” побудови графіка і вже на ньому з’ясувати які x задовольняють нашу нерівність (рис. 3).

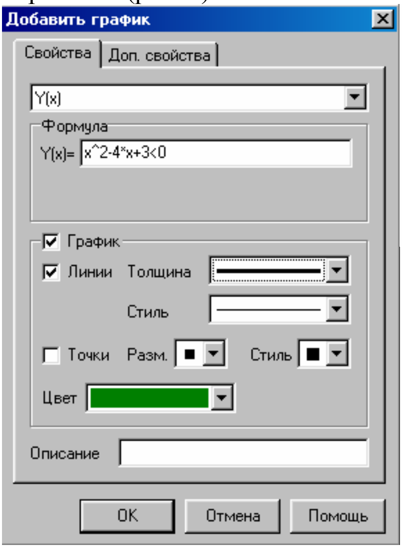


Рис. 1

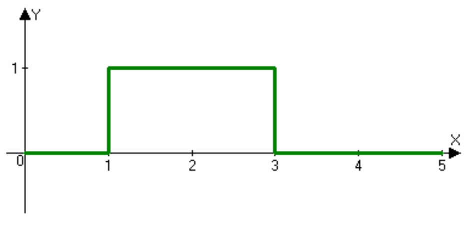


Рис. 2

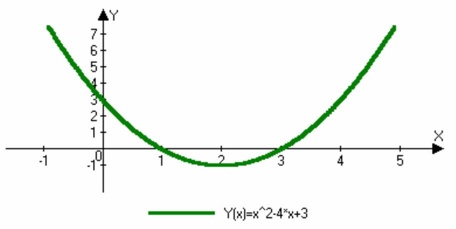


Рис. 3

Розв’язування нерівностей методом зведення їх до рівнянь

Запропонований З.Ю. Філером та автором [2–5] метод розв’язування нерівностей передбачає зведення задачі про розв’язання нерівності до розв’язання рівняння з врахуванням *нев’язки t* (різниці між лівою і правою частинами рівняння, *відхилом*). Це вносить структуризацію в множину розв’язків нерівності, і дає змогу відповісти на питання не тільки *де* виконується нерівність $\varphi(x)<\psi(x)$, але й *наскільки* $\varphi(x)$ менше, ніж $\psi(x)$ при знайденому x, тобто чому дорівнює $r(x)=\psi(x)-\varphi(x)$, точніше, яке x відповідає прийнятому $t>0$.

Розв’яжемо даним методом попередню нерівність $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Розв’язання. Прирівнюючи обидві частини нерівності, додаємо з лівої сторони нерівності число $t > 0$:

$$x^2 - 4x + 3 + t = 0.$$

Розв'язуючи отримане квадратне рівняння, одержимо:

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-(3+t)} = 2 \pm \sqrt{1-t}, \quad t > 0.$$

В залежності від знаку підкореневого виразу $(1 - t)$ маємо два випадки:

1) $0 < t \leq 1$. Тоді $x \in \boldsymbol{R}$. Якщо $t \to 0$, то $x_1 \to 1$, $x_2 \to 3$; а при $t \to 1 \Rightarrow x \to 2$ – до середини відрізка з обох сторін. Отже, в даному випадку $x \in (1; 3)$.

2) $t > 1$. Тоді $1 - t < 0$, тобто

$$t - 1 > 0 \Rightarrow x_{3,4}(t) = 2 \pm i\sqrt{t-1} \in C.$$

Тоді загальний розв'язок нерівності запишеться таким чином:

$$x = \{2 \pm \sqrt{1-t} \;\;|\;\; t > 0\}.$$

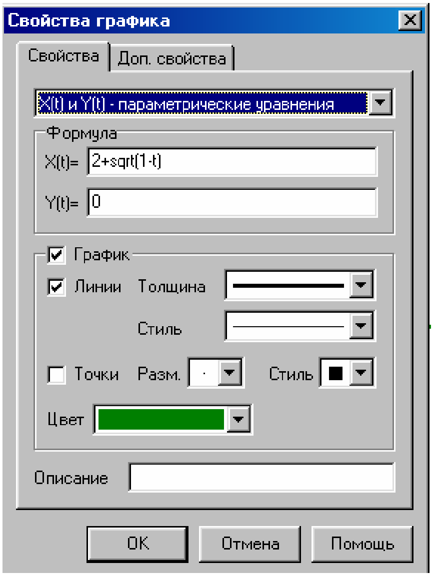


Рис. 4

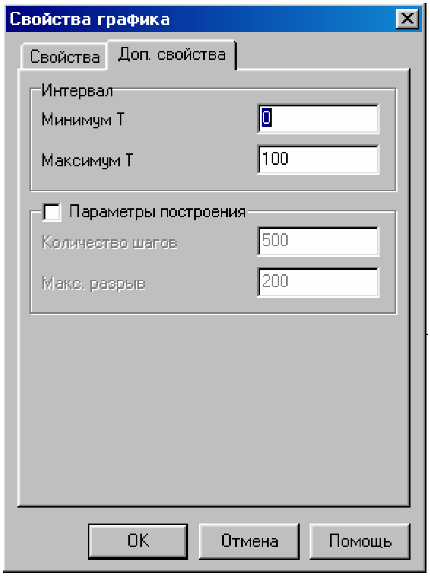


Рис. 5

Побудуємо розв'язки нерівності на графіку. Вибираємо команду **Графики** $\Rightarrow$ **Добавить график**. У вікні, що з'явилося в першій вкладці **Свойства** вибираємо **X(t) и Y(t) – параметрические уравнения**, і в полі **Формула** вводимо почергово відповідні значення $x(t)$ і $y(t)$ (див. рис. 4). В другій вкладці **Доп. свойства** в полі **Интервал** встановлюємо потрібні значення для параметра t, в нашому випадку $0<t<100$ (див. рис. 5). Виконавши відповідні дії для всіх знайдених значень $x(t)$ маємо загальну картину (рис. 6). Для кращого сприйняття наводимо в нижній частині рисунка легенду (натиснувши праву кнопку миші на графіку і вибравши з допоміжного меню відповідний пункт), де для кожного $x(t)$ вибрано відповідний стиль. Стрілками показано напрямок руху (зростання) параметра t. Отже, нерівність $x^2–4x+3<0$ має, крім дійсних, ще й комплексні розв'язки, виявити які допоміг саме метод нев'язки.

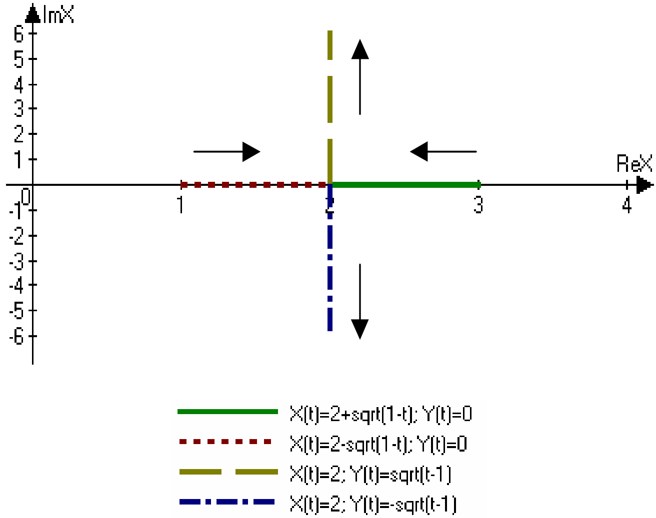


Рис. 6

Виконаємо *перевірку* отриманих *комплексних* розв'язків. Для цього покладемо $t = 5$, маємо: $x_1 = 2 + 2i$ та $x_2 = 2 – 2i$. Досить зручно знаходити значення $x(t)$ можна, використавши команду **Трассировка** (рис. 7). Підставивши x у ліву частину нерівності, отримаємо:

$$x = 2 + i\sqrt{t-1} \Rightarrow (2 + i\sqrt{t-1})^2 - 4(2 + i\sqrt{t-1}) + 3 = 4 + 4i\sqrt{t-1} - t + 1 - 8 -$$

$$- 4i\sqrt{t-1} + 3 = -t < 0.$$

$$x = 2 - i\sqrt{t-1} \Rightarrow (2 - i\sqrt{t-1})^2 - 4(2 - i\sqrt{t-1}) + 3 = 4 - 4i\sqrt{t-1} - t + 1 - 8 +$$

$$+ 4i\sqrt{t-1} + 3 = -t < 0.$$

Таким чином, знайдені розв'язки задовольняють отриману нерівність, бо $t > 0$.

Зображати графік залежності функції від $x(t)$ набагато складніше через появу "додаткової" осі ImX, тобто треба будувати залежність не на площині, а в просторі, бо в противному разі губляться комплексні значення $f(x(t))$, тому обмежимось побудовою лише комплексних розв'язків $x(t)$ нерівності.

Побудований графік можна зберігти як рисунок, вибравши з меню **Файл** команду **Сохранить как рисунок…** (див. рис. 8). Як бачимо, можна задавати потрібні розміри рисунку та вибрати один з форматів **BMP** чи

EMF.

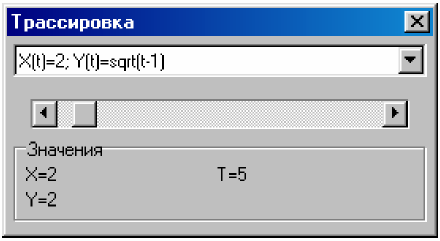


Рис. 7

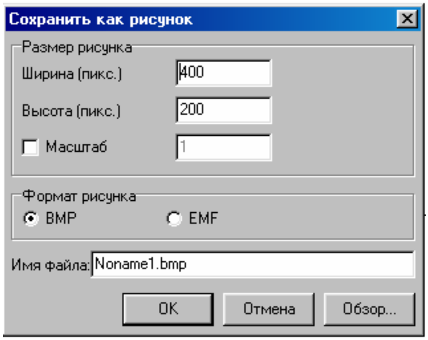


Рис. 8

Отже, використання програми Advanced Grafer допомагає не тільки унаочнити процес відшукання розв'язків нерівностей методом інтервалів, але й справляється із задачею побудови комплексних розв'язків нерівностей при використанні методу нев'язки, і досить вдало демонструє впорядкування та структуризацію множини розв'язків за допомогою команди **Трассировка**.

Література:

1. Томашов В.Н. Использование информационных технологий на уроках математики и физики в старшей школе при изучении графиков различных функций // Вопросы интернет образования № 5. – http://vio.fio.ru/vio_05/cd_site/Articles/art_1_2.htm

2. Ткаченко С.П., Філер З.Ю. Спосіб нев'язки (відхилу) розв'язування нерівності // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. Випуск 3: В 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2003. – Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – С. 254-258.

3. Ткаченко С.П., Філер З.Ю. Комплексні розв'язки квадратної нерівності // Матем. в школі. – 2003. – № 2. – С. 47-49.

4. Філер З.Ю., Ткаченко С.П. Від нерівностей до прообраза множини // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції "Україна наукова '2003". Т. 30. Технічні науки. Математика. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2003. – С. 44-47.

5. Ткаченко С.П. Методика відшукання комплексних розв'язків нерівностей // Тези Всеукраїнської науково-практичної конференції "Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики" (6 жовтня 2004 р., Київ). – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. – С. 179-180.

БАГАТОРЯДКОВИЙ КАЛЬКУЛЯТОР

А.І. Вовк, А.В. Гірник
м. Київ, Державний НДІ автоматизованих систем в будівництві
vovk@NDIASB.kiev.ua

Багаторядковий калькулятор Assistant_Calculator (рис. 1) дозволяє виконувати розрахункові операції з текстовими поясненнями, як це звичайно прийнято при виконанні, наприклад, контрольних або курсових робіт.

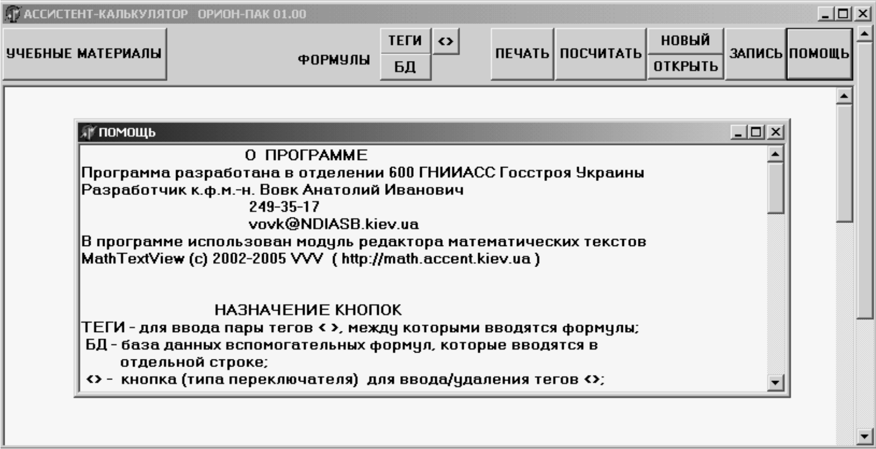


Рис. 1

При цьому обчислювальний бік справи калькулятор повністю бере на себе. Користувач основну увагу приділяє логічному аспекту викладу та оформленню розрахункового матеріалу (рис. 2).

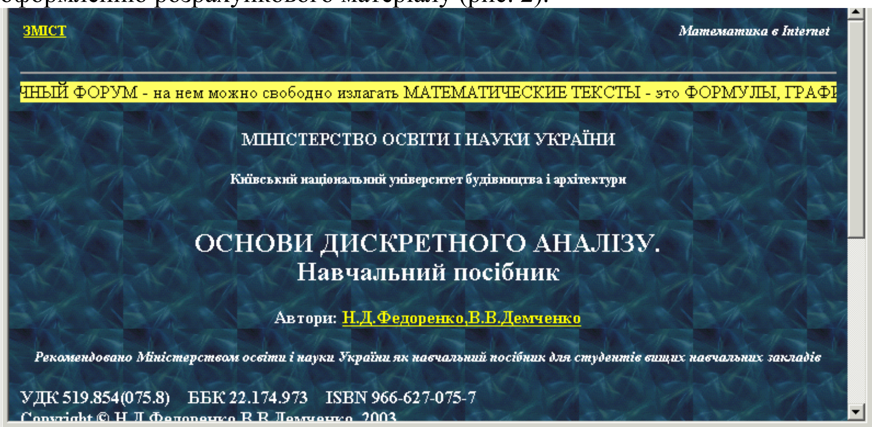


Рис. 2

Формули можуть бути розміщені довільним чином всередині текстового матеріалу і виділяються з допомогою пари кутових дужок (тегів) (рис. 3).

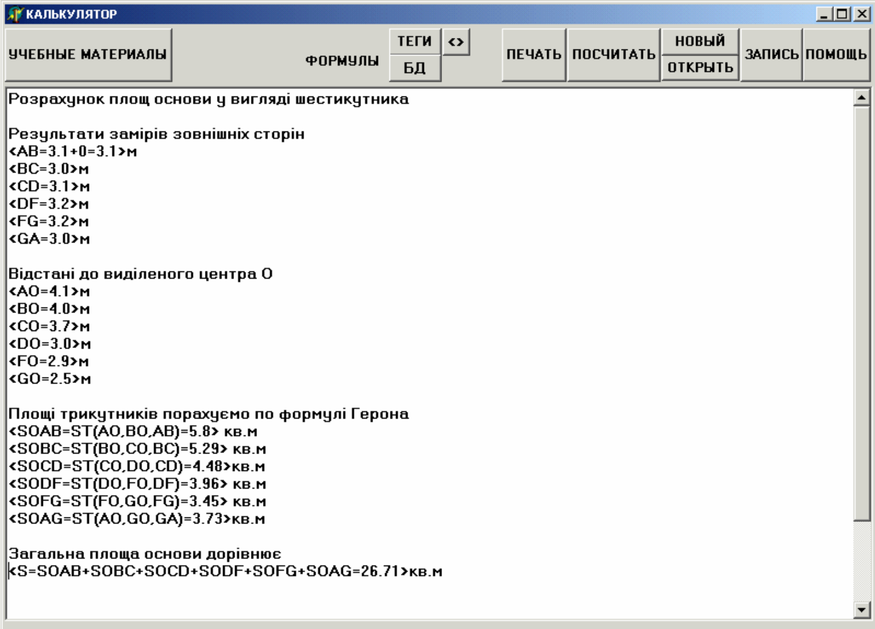


Рис. 3

При виводі на друк теги можна знищити шляхом натискання відповідної кнопки. При необхідності в режимі редагування теги можуть бути відновлені. В розпорядженні користувача є база даних формул, яку він буде вести сам. Крім цього, є можливість читання і запису результатів розрахунків на носії (рис. 4).

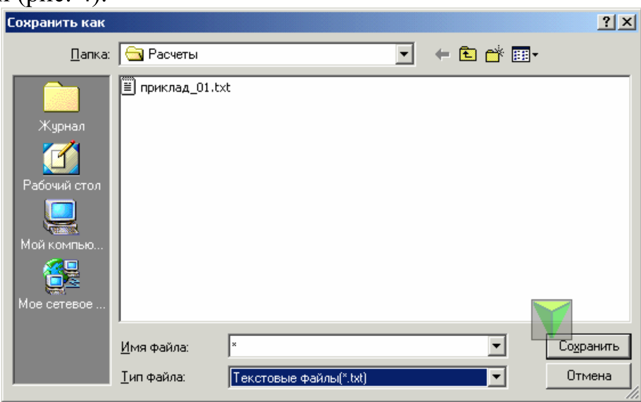


Рис. 4

Є можливість швидкого звернення до бази учбових матеріалів в форматах *.txt, *.doc, *.html. Цю базу користувач може формувати довільним чином, розміщуючи необхідні матеріали в спеціальну папку. При формуванні і коригуванні розрахунків немає майже ніяких обмежень. Єдина умова: розрахунок виконується в напрямі зверху вниз. Це обмеження може бути в принципі зняте, але при цьому швидкість обчислень значно понизиться, що відіграє роль для малопотужних комп'ютерів. Для позначення змінних можна використовувати як латиницю, так і кирилицю. В калькуляторі враховується регістр літер.

В запропонованій демоверсії відсутні рекурсивні обчислення, але в розширеній версії така можливість є. Крім цього, в розширеній версії є можливість демонстрації формул в площинному вигляді. В наступних версіях планується робота з розмірностями, що відіграє важливу роль, наприклад, для розрахунків по фізиці. В арсеналі авторів є автономні і вбудовані калькулятори різного призначення аж до програмованих. На сайті http://math.accent.kiev.ua можна, наприклад, протестувати калькулятор символьного диференціювання.

ЗАСОБИ ІНТЕРАКТИВНОГО СПІЛКУВАННЯ МАТЕМАТИКІВ В ІНТЕРНЕТІ

А.І. Вовк, А.В. Гірник
м. Київ, Державний НДІ автоматизованих систем в будівництві
vovk@ndiasb.kiev.ua

Проблема інтерактивного спілкування математиків в Інтернеті все ще залишається актуальною і на даний момент. Звичайно, використання таких відомих пакетів, як MathLab, Maple, Mathematica можливе і в Інтернеті, але мета цих пакетів дещо інша – розв'язання конкретних задач математичного змісту. В даній замітці мова йде про використання засобів спілкування математиків в повсякденній роботі. В ДНДІАСБ уже більше п'яти років ведеться робота по розробці мови спілкування математиків в Інтернеті. Розроблено редактор математичних текстів MathTextView, який використовується для відображення математичних текстів в Інтернеті.

Мова MathTextView налічує близько 250 елементів форматування математичних текстів – формули, графіки, схематичні рисунки [1]. Мова MathTextView може бути віднесена до так званих природних мов, тому що вона нагадує сленг, яким уже багато років користуються математики при спілкування з своїми колегами. В Інтернеті уже досить значний час існує мова MathML. Але, оскільки ця мова не відноситься до природних, то вона не набрала до сих пір широкого поширення, незважаючи навіть на те, що є спеціальний браузер Mozilla, який інтерпретує математичні тексти, написані з використанням цієї мови. З 2005 р. на сайті http://math.accent.kiev.ua функціонує математичний форум і гостьова книга для математиків. Математичний форум розроблений на базі широко відомого популярного відкритого ресурсу, створеного BBphp Group. Нижче наведено ряд типових скріншотів, які відображують роботу даного форуму.

Наприкінці відмітимо, що ті ж самі можливості по відображенню математичних текстів в Інтернеті має і гостьова книга. Математичний форум можна широко використовувати в системі дистанційного навчання. На таких же принципах можна також розробити системи тестування з математичних, фізичних, технічних та економічних дисциплін. При деякому розширенні мова MathTextView може бути використана і в хімії.

Література:

1. Вовк А.И., Вишняков В.М., Демченко В.В., Федоренко Н.Д. Язык представления математических текстов в Интернете. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2004.

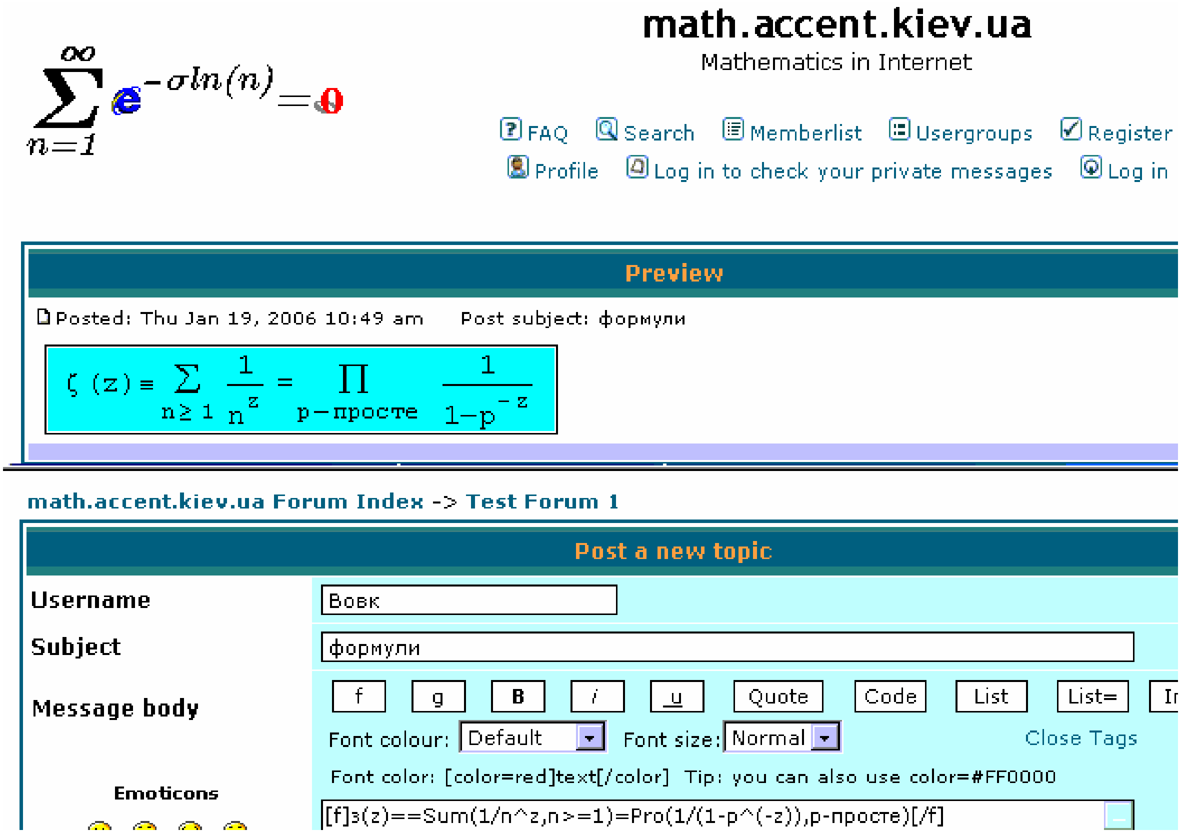


Рис. 1. Приклад представлення функції

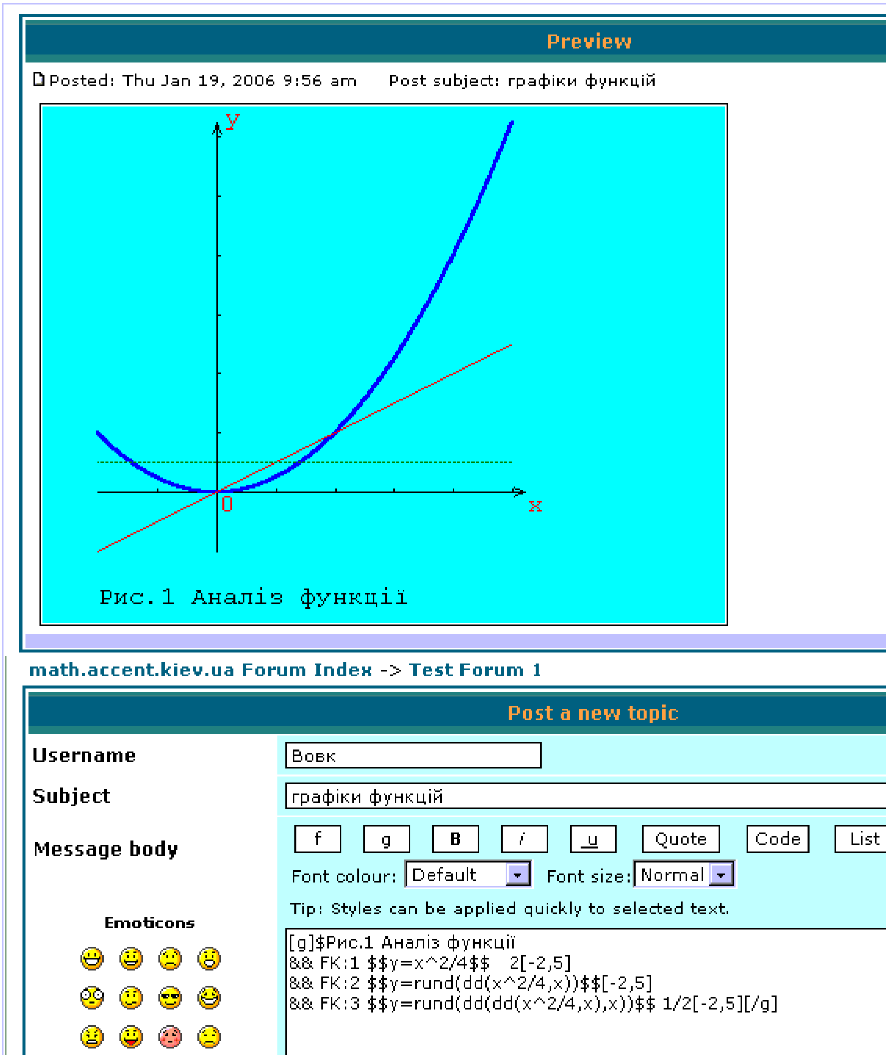


Рис. 2. Приклад представлення графіків

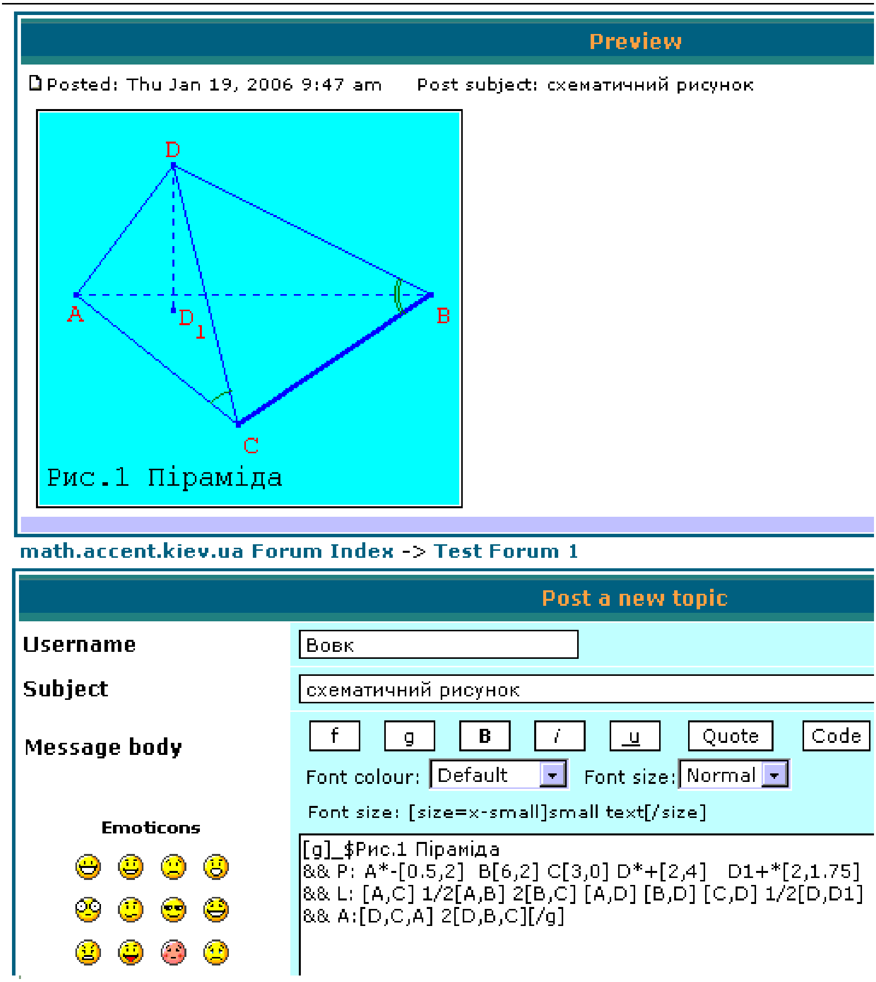


Рис. 3. Приклад представлення схематичного рисунка

ФОРМУВАННЯ ЗДАТНОСТІ ОПРАЦЬОВУВАТИ НАВЧАЛЬНУ ТА НАУКОВО-ПОПУЛЯРНУ ЛІТЕРАТУРУ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ,
або
ЧИ ЗАВАДИТЬ УМІННЯ ПРАЦЮВАТИ З НАУКОВО-ПОПУЛЯРНОЮ ЛІТЕРАТУРОЮ В УМОВАХ ТОТАЛЬНОЇ КОМП'ЮТЕРИЗАЦІЇ?

О.С. Чашечникова[1], Л.Г. Чашечникова[1], С.В. Коломієць[2]
[1] м. Суми, Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
[2] м. Суми, Сумський національний аграрний університет

Сучасний світ стрімких змін *вимагає від людини здатності* не просто адаптуватися до них, а *їх прогнозувати, спроможності ставати ключовою фігурою та ініціатором цих змін*.

Цивілізованість людини не повинна ставати аналогом терміну «безпорадність в умовах відсутності останніх надбань цивілізації». Звичайно, важко зараз уявити таку сферу людської діяльності, де не використовуються нові інформаційні технології, але постає питання: а чи варто повністю відходити від застосування так званих традиційних джерел інформації?

Самовдосконалення та самонавчання протягом всього життя обов'язково потребують вміння працювати з літературою. Підкреслимо: *моральне застарівання наукової, науково-популярної, навчальної літератури залежить не від року видання.* Не має необхідності докладно аналізувати видання останніх п'ятнадцяти років, щоб побачити великий відсоток «передрукувань» за іншими назвами, які іноді не тільки не краще попередніх, але й навпаки. Беззаперечно: практично у кожній галузі існують праці, які є фундаментальними (в тому числі, і у розумінні, що саме на них, як на фундаменті, будуються наступні дослідження), і без ознайомлення з ними людина не зможе стати дійсно фахівцем у своїй справі.

Вже є аксіомою, що навчальна та науково-популярна література повинна бути водночас науковою та доступною для розуміння, щоб залучати до навчально-пізнавальної діяльності, стимулювати до самонавчання та самовдосконалення. Але виникають сумніви щодо дотримання цих принципів на сучасному етапі достатньо великою кількістю авторів.

Ознайомлення з деякими матеріалами публікацій справляє враження, що їх автори пропагують гасло: "Математика як навчальний предмет доступна не кожному! Ті, хто не розуміє математику зараз, навіть і не робіть спроб її зрозуміти!" *Доступність іноді розуміється як зниження рівня подачі матеріалу (на мові коміксів математичного змісту), а науковість – як вимога говорити незрозуміло про зрозуміле.*

Згадаємо видання відомих "Популярних лекцій з математики" та їх авторів – А.І. Конфоровича, П.П. Коровкіна, В.Г. Болтянського, О.І. Маркушевича та інших. Важко обвинуватити цих авторів у популізмі та непрофесійності, але мова, якою поданий матеріал цих брошур, є зрозумілою та доступною. Можливо, причинами цього є те, що справжній професіонал не ховається за стіною малозрозумілих широкому загалу термінів, не відчувається зверхнього ставлення до аудиторії, неповаги до читача (“все одно ви не зрозумієте, але...”), а основою цих брошур були лекції, які ці видатні математики читали для старшокласників (тобто, вони мали змогу самостійно апробувати, наскільки відповідне подання матеріалу сприймається аудиторією шкільного віку).

Виклад матеріалу в цих виданнях є настільки докладним, що, зокрема, у передмові до роботи «Комплексні числа і конформні відображення» її автор О.І. Маркушевич вказує: «Попереднє ознайомлення з комплексними числами від читача не потребується» [4, 2]. Так само можна оцінити й публікації для учнів як так званих “чистих математиків”, так і математиків-методистів О.М. Колмогорова, М.Й. Ядренка, О.І. Маркушевича, О.С. Дубинчук, З.І. Слєпкань та інших.

Надання можливості ознайомлюватись більш широкому загалу з науково-популярною літературою з математики повинно *будуватися на ставленні з повагою до читача, що сприяє стимулюванню його до самонавчання та формування в нього стійкої мотивації до самовдосконалення.*

Виділимо деякі важливі, на наш погляд, аспекти вирішення проблеми оволодіння навичками опрацьовувати навчальну, науково-популярну, наукову літературу з математики: навчання працювати з нею учнів шкіл, майбутніх вчителів математики, студентів нематематичних спеціальностей.

1. Робота у загальноосвітній школі

Починати знайомити з науково-популярною літературою (зокрема – з математики) та виробляти смак до роботи з нею необхідно у школі. На сучасному етапі виникає низка причин, що викликають блокування ефективної роботи.

На даному етапі вчитель вже має менше труднощів при необхідності більш широко застосовувати нові інформаційні технології в процесі навчання математики. І це відбувається не тільки через те, що використання комп’ютера є реалією сучасного процесу навчання.

Новим кроком стала поява ретельно розроблених навчально-методичних посібників, використання яких дозволяє органічно і природно вписати використання комп’ютера в реальний процес навчання математики у школі [1; 2; 3]. Створені мультимедійні навчальні посібники “не для відмінників” з геометрії, алгебри, тригонометрії. Їх структура: вступ – відеофільм, що є коротким оглядом змісту розділу; розв’язання задач та підказки до них; завдання тестового характеру. Учню повідомляється, що він може не тільки скористатися поясненням до розв’язування задачі, але й спочатку самостійно розв’язати її, а вже потім перевірити власне розв’язання. Такі мультимедійні навчальні посібники дозволяють більш плідно проводити консультації з учнями, організувати їхню самостійну діяльність в індивідуальному темпі, вивільнити час для індивідуального спілкування вчителя і учня на уроці, для розв'язування завдань більш творчого характеру через перекладання на комп'ютер технічних операцій, формування навичок виконання яких не є метою конкретного уроку.

Набули розповсюдження мультимедійні засоби, які можна використовувати на різних етапах навчання математики: в процесі ознайомлення з новим матеріалом ("Відкрита математика", "Geonext"); на етапі закріплення нових знань, в процесі їх діагностики та корекції ("Комп'ютерний задачник з математики"). Аналіз практики роботи вітчизняних та зарубіжних навчальних закладів свідчить про позитивний вплив їх застосування на розвиток пізнавальної активності учнів. Створюється ситуація, що сприяє розкріпаченню учнів, підвищенню їх інтелектуальної і творчої активності та ініціативи.

Використання комп'ютерних програм сприяє переведенню навчальної діяльності учнів на рівень навчально-пізнавальної діяльності, на творчий рівень. Але це потребує чіткого визначення цілі та місця застосування ПЗН на <u>конкретному етапі навчання</u>, <u>конкретному уроці</u> із врахуванням індивідуальних особливостей учнів <u>конкретного класу</u>.

Використання програмних засобів навчання в процесі навчання математики, робота в мережі Internet має не формувати безпорадність учня як недостатньо свідомого користувача, споживача готової інформації, а бути дієвим засобом розвитку математичних здібностей, творчого мислення учнів.

Тому учнів необхідно впевнити в тому, що будь-яка, навіть "дуже розумна техніка" потребує від того, хто з нею працює, здатності свідомо оперувати системою відповідних знань і вмінь.

Для цього корисно демонструвати їм, що в процесі необміркованого користування комп'ютерною програмою без попереднього аналізу можна отримувати неправильне зображення (особливо яскраво це ілюструє зображення кола при невідповідному виборі одиничних відрізків на осях координат). Учні повинні усвідомити: *використання комп'ютера дійсно допомагає тільки тому, хто вже має достатній обсяг та рівень засвоєних знань та набутих умінь.*

У сучасній школі <u>проблемою стає саме недоцільне зменшення уваги навчанню учнів використовувати друковані джерела інформації</u>. Але саме ці навички є дійсно важливими і не втратили своєї актуальності: значна кількість корисних друкованих джерел не мають електронних аналогів. Чи не призведе така неповага до цього аспекту навчання до таких самих згубних наслідків, як втрата навичок усних обчислень школярами останніх десятиріч через широке використання калькуляторів?

З медичної точки зору надмірне "спілкування з комп'ютером" негативно впливає на здоров’я учнів. Також дослідження демонструють ускладнення, які виникають в учнів, що звикли більше використовувати електронний підручник, при необхідності повертатися до роботи з друкованими посібниками.

Розповсюджені зараз так звані “розв’язники”, які просто заполонили полиці книжкових магазинів, розбещують учнів, знижують їхній рівень поваги до навчальної книги взагалі, але зовсім не сприяють набуттю навичок працювати з літературою, в тому числі, – науково-популярною.

Нами розроблений навчальний посібник “Функції та їх графіки. Побудова графіків функцій та рівнянь, аналітичний вираз яких містить тригонометричні функції. Бібліотечка самоосвіти” (автори Л.Г. Чашечникова, О.С. Чашечникова, О.В. Мартиненко). Його використання учнями у процесі самостійної навчально-пізнавальної діяльності виявилося ефективним для навчання учнів самостійно опрацьовувати навчальний матеріал за друкованими джерелами. У посібнику застосовується «прийом кадрів» в процесі побудови графіків функцій, спрямований на розвиток творчої активності та пізнавальної самостійності учнів. Раніше цей прийом був нами детально описаний у [6].

Наведемо фрагмент ілюстрації у посібнику роботи над побудовою графіка функції $y=\{\cos x\}$, якщо відомий графік функції $y=\cos x$ (рис. 1, 2).

2. Навчання роботі з навчальною, методичною, науковою, науково-популярною літературою з математики майбутніх вчителів математики

У даній проблемі відмітимо такі аспекти: по-перше, достатньо велика кількість першокурсників не має достатньо сформованих навичок працювати з навчальною літературою; по-друге, майбутні вчителі математики повинні не тільки набути такі навички, але й *оволодіти методикою формування* їх в учнів у процесі навчання математики.

Для цього на заняттях з методики навчання математики ми пропонуємо студентам опрацьовувати статті в журналах «Математика в школі», «Математика в школе», «Квант», «У світі математики», газеті «Математика» з метою проаналізувати статті, різні підходи до вирішення певної методичної проблеми, висловити власну думку, обґрунтовуючи її. Пропонуються методичні вказівки, як працювати над літературою у процесі підготовки курсових, дипломних, магістерських робіт. Надаються завдання складання плану статті, написання анотацій та критичних статей відносно певної публікації (статті, посібника та ін.), підготовка виступу на студентській конференції, тез виступу, статті.

Також нами розроблений навчальний посібник [5], застосування якого у процесі експерименту сприяло формуванню навичок роботи з друкованими джерелами інформації як студентів, так і учнів. У посібнику надається стисле викладання сутності методів розв’язування задач на побудову, причому застосування кожного з них проілюстровано достатньою кількістю задач, доступних учням; запропоновані задачі для самостійного розв’язування. Матеріал, поданий у посібнику, спрямований на поєднання зусиль вчителя та учнів (акцентується увага як на процесі розв’язування, так і на методичних рекомендаціях для вчителів). Це особливо важливо для організації самостійної роботи студентів фізико-математичних факультетів педагогічних вузів.

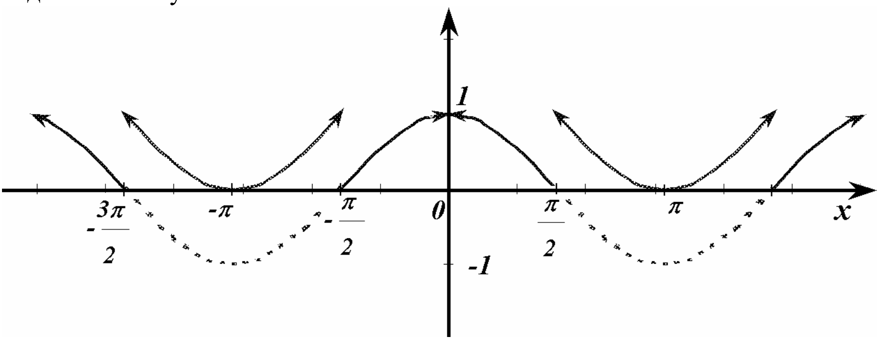


Рис. 1

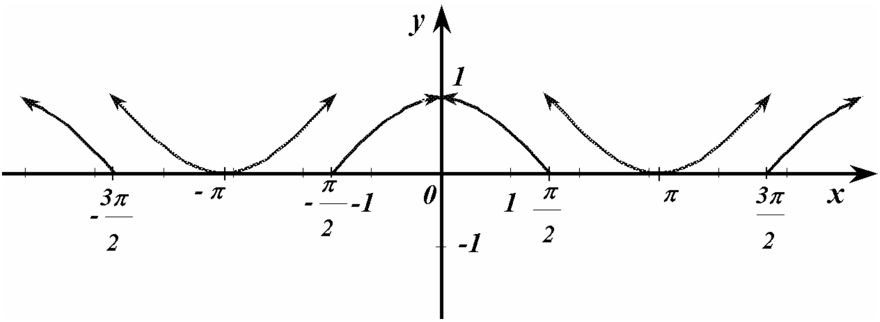


Рис. 2

Не є секретом, що останні роки збільшується та частина студентів, робота яких над курсовими та дипломними роботами практично зводиться до пошуку відповідного матеріалу в мережі Internet (часто навіть без подальшої “доробки”). Тому нами практикується виконання студентами творчих робіт з методики навчання математики (індивідуальних та групових), яке також стимулює майбутніх вчителів математики до опрацьовування різноманітних джерел інформації.

3. Доцільність формування навичок опрацьовування навчальної та науково-популярної літератури з математики студентів нематематичних спеціальностей

Важливу роль в базовій підготовці фахівця, зокрема, економічного профілю відіграють дисципліни математичного циклу. В останні роки обсяг аудиторних годин на вивчення цих дисциплін істотно скоротився, в наслідок чого розширюється коло питань, які виносяться на самостійне опрацьовування.

Аналіз досвіду свідчить: у першокурсників нерідко виникає навіть острах при необхідності самостійної роботи з навчальними посібниками з математики, що створює перешкоди у майбутньому. Відзначимо, що сформовані на достатньо високому рівні навички опрацьовування навчальної та науково-популярної літератури з математики сприяють не тільки підвищенню якості знань студентів економічних спеціальностей з математичних дисциплін, але й стають у нагоді при вивченні інших предметів, а у подальшому допомагають економісту постійно підвищувати рівень фахової підготовки.

Нами експериментально підтверджено, що формуванню навичок роботи з навчальною та науково-популярною літературою сприяє проведення занять гуртка “Математичні методи в економіці”. Саме розв’язування проблемних задач, пов’язаних з майбутньою професією, стимулює студентів до опрацьовування навчального матеріалу та самостійного пошуку необхідної додаткової літератури. Це надає можливість фахівцю-економісту постійно самовдосконалюватись, залишатися конкурентноспроможним, оперативно реагувати на зміни, а в разі необхідності – освоювати нові сфери професійної діяльності.

Зрозуміло, що виділеними нами аспектами дана проблема не обмежується.

Хочемо ще раз підкреслити, що ми виступаємо не проти застосування нових інформаційних технологій, а за ***доцільне поєднання можливостей новітніх і традиційних джерел інформації у процесі навчання.***

Література:

1. Жалдак М.І., Грохольська А.В., Жильцов О.Б. Математика (алгебра і початки аналізу) з комп’ютерною підтримкою. – К.: МАУП, 2003. – 304 с.

2. Жалдак М.І., Грохольська А.В., Жильцов О.Б. Математика (тригонометрія, геометрія, елементи стохастики) з комп’ютерною підтримкою. – К.: МАУП, 2004. – 455 с.

3. Жалдак М.І., Михалін Г.О. Елементи стохастики з комп’ютерною підтримкою. – Вид. 3-тє, доп. – К.: Шкільний світ, 2002. – 128 с.

4. Маркушевич А.И. Комплексные числа и конформные отображения. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 52 с.

5. Чашечникова Л.Г., Петренко С.В., Чашечникова О.С. Геометричні побудови на площині. – Суми: Ярославна, 1999. – 98 с.

6. Чашечникова О.С. Тематичне оцінювання. Тема «Інтеграл» // Математика в школі. – 2003. – №10. – С. 19-24; – 2004. – №1. – С. 15-19.

Розділ II

Професійна підготовка вчителя математики

КОНЦЕПЦІЯ ПРОФЕСІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В УМОВАХ МОДЕРНІЗАЦІЇ ОСВІТИ

В.Г. Моторіна
м. Харків, Харківський національний педагогічний університет
імені Г.С. Сковороди

Об'єктивні процеси та соціальна ситуація в Україні, які останнім часом пов'язані з розвитком демократизації в суспільстві, поставили перед педагогічною наукою комплекс проблем. На особливу увагу заслуговує проблема модернізації вищої педагогічної освіти, забезпечення науково обґрунтованих змін у стратегіях і структурі освітньої галузі в цілому, пошук нового змісту, методів, форм навчання і технологій реалізації цих змін при підготовці майбутніх учителів, утвердження професіоналізму в системі освіти.

Забезпечення з наукових позицій успіху у вирішенні проблем освіти, що багато в чому визначає майбутнє України, допоможе знайти механізм творчого активного впровадження в сучасну практику результатів науково-педагогічних досліджень про ідеї, умови, засоби ефективних змін в системі освіти.

Простежуючи особливості розвитку окремих процесів в освіті, можна стверджувати, що система педагогічної освіти ще не зовсім адаптована до рівня розвиненої освіти у Європі, вона не орієнтується на особистісно-професійний розвиток майбутніх учителів, що характеризує освіту найбільш розвинених країн світу. На цьому наголошується в Концепції розвитку педагогічної освіти в Україні (2004 р.).

Саме ці обставини додатково стимулюють усвідомлення необхідності змін у професійній підготовці майбутніх учителів. У працях відомих вчених (В.І. Бондар, А.М. Бойко, В.Г. Бутенко, І.А. Зязюн, В.М. Гриньова, О.Г. Мороз, О.М.Пєхота, О.Я. Савченко, І.Ф. Прокопенко, Г.В. Троцко, Г.П. Шевченко, М.Д. Ярмаченко) модернізацію педагогічної освіти розглядають як чинник, що планомірно оптимізує процес професійної підготовки нового вчителя нової доби.

У наукових пошуках вітчизняні вчені звертались до проблематики професійної підготовки вчителя. Такі дослідження ведуться у кількох площинах, а саме:

– виявлення сутності і структури педагогічної діяльності (Ф.Н. Гоноболін, В.І. Гинецинський, В.І. Додонов, Н.В. Кічук, Н.В. Кузьміна, О.М. Маркова, Л.С. Подимова, В.О. Сластьонін, Л.Ф. Спірін, Г.С. Сухобська та інші);

– обґрунтування теоретичних основ вдосконалення професійної підготовки (О.А. Абдуліна, В.В. Горшкова, В.М. Гриньова, В.О. Гусєв, Г.А. Луканкін, О.Г. Мордкович, М.Д. Никандров, І.О. Новик, О.І. Піскунов, К.К. Платонов, Н.О. Половникова, Л.І. Рувинський, В.А. Семиченко, З.І. Слєпкань, Н.Л. Стефанова, І.Ф. Тесленко, Н.Д. Хмель та інші);

– висвітлення загальних питань проблеми формування особистості вчителя (Л.П. Булаєва, С.У. Гончаренко, В.І. Загвязинський, І.А. Зязюн, М.Б. Євтух, Л.В. Кондрашова, Л.В. Крамущенко, І.Ф. Кривонос, В.О. Крутецький, М.О. Лазарєв, Л.С. Нечипоренко, В.О. Сластьонін, Н.М. Тарасевич, А.І. Щербаков, Р.І. Хмелюк та інші);

– удосконалення та розробки нових педагогічних технологій навчально-виховного процесу у вищих закладах освіти (А.М. Алексюк, В.П. Безпалько, А.О. Вербицький, Б.С. Гершунський, Т.О. Дмитренко, О.А. Дубасенюк, В.І. Євдокимов, М.І. Жалдак, М.М. Левіна, В.І. Лозова, В.М. Монахов, А.С. Нісімчук О.С. Падалка, О.М Пєхота, І.П. Підласий, І.Ф. Прокопенко, С. Пейперт, Б. Скіннер, Б. Річейсон, Р. Харст, П. Мітчел, М. Вулман, С. Сполдинг та інші);

– визначення критеріїв ефективності інноваційного навчально-виховного процесу (Ю.К. Бабанський, О.М. Іонова, О.В.Попова, В.А. Казаков, Н.Ф. Тализіна, В.О. Сластьонін та інші).

У дослідженнях згаданих авторів простежуються різні підходи щодо розуміння професійної підготовки вчителя. Проблема модернізації педагогічної освіти ставиться ними досить гостро, але в загальному плані. А ось конкретна проблема професійної підготовки вчителя математики як особливої соціальної особистості, що навчається в нових умовах, ще не стала в українській педагогічній науці предметом спеціальних досліджень. Вивчення широкої джерельної бази (дисертації, монографії, навчальні посібники, статті, матеріали конференцій) не дає уявлення про цілісну систему професійної підготовки вчителя математики в Україні як процесу і як суттєвого фактора впливу на якість освіти майбутніх учителів математики в умовах модернізації освіти на всіх рівнях. Можна лише стверджувати, що на формування системи професійної освіти майбутніх учителів математики впливають різноманітні фактори. Більше того, нова система, що народжується, є результатом впливу цих факторів, які проявляються у різних зв’язках і відношеннях, стимулюючи при цьому сам процес модернізації педагогічної освіти.

Завдання поліпшення підготовки майбутніх учителів зумовили потребу в розробці сучасної концепції педагогічної освіти, нових підходів до системи професійного навчання вчителя. Головними чинниками нових підходів до підготовки є:

– соціально-економічні, пов’язані із змінами цінностей в освіті, тобто переваги саморозвитку, самовиховання, самоосвіти над передачею знань, вмінь і навичок; інтереси особистості мають пріоритетне значення порівняно з навчальними планами і програмами; створюються умови для постійного звеличення людини, гармонізації її відносин з природою і суспільством, державою й іншими людьми;

– практичні, що виникли внаслідок соціально-економічних перетворень в нашій країні, появи нових типів навчально-виховних закладів, окрім загальноосвітньої школи; для них потрібний новий учитель з цілісним уявленням про професійну діяльність; майбутній учитель повинен діяти самостійно, оволодіти завдяки психолого-педагогічній підготовці спеціальними вміннями і навичками взаємодії й спілкування; щоб підготовка відповідала сучасним вимогам, треба активізувати розробку методологічної і теоретичної основи педагогічної освіти;

– теоретичні, зумовлені як соціально-економічними, так і практичними змінами в розвитку народної освіти; педагогічна освіта розвивається шляхом формування у майбутніх педагогів цілісного уявлення про свою професійну діяльність.

Нами розроблена і науково обґрунтована концепція професійної підготовки майбутніх вчителів математики в умовах модернізації педагогічної освіти, яка складається з таких положень:

1. Визнання головним ціннісним орієнтиром педагогічного університету – особистість студента, її конкретні зрушення в процесі напруженої діяльності по розвитку і формуванню власного потенціалу.

В умовах ступеневої системи вищої педагогічної освіти єдиним можливим шляхом подолання труднощів і негативних явищ, що склалися, є особистісно-орієнтоване навчання, диференціація та індивідуалізація навчально-виховного процесу.

На Другому з'їзді працівників освіти України пріоритетним у галузі модернізації системи шкільної політики визнано здійснення особистісно-орієнтованої освіти. У Національній доктрині розвитку освіти (затверджений Указом Президента від 17 квітня 2002 року) перехід предметного на особистісно-орієнтоване навчання визнаний одним із актуальних напрямів удосконалення якості освіти. Сутність цього переходу полягає в людському вимірі, тобто у формуванні цілісного "образу" особистості:

1) озброюючи студентів знаннями, уміннями і навичками, необхідними для розв'язання професійних завдань, слід розвивати їхню активність, самостійність ініціативу, творчість, стимулювати емоційно-вольову сферу;

2) перетворення кожного студента з об'єкта на суб'єкт навчальної роботи; демократизація і гуманізація відносин у системі "викладач-студент";

3) конкретизація програми і змісту навчання, метою якого повинна бути особистість студента, його професіональні риси;

4) орієнтування освітянського процесу на формування професійного "Я" майбутнього спеціаліста; студент повинен розвивати в собі здатність ефективно використовувати змістовний потенціал предметів, що вивчаються, з метою збагачення власного професійного багажу і розширення обріїв індивідуальної самосвідомості;

5) навчити майбутніх спеціалістів орієнтуватися і гідно діяти в сучасних соціокультурних і соціопрофесійних ситуаціях;

6) сформувати в студентів справжні цінності, моральні принципи, ідеа-

ли, сенс буття;

7) навчальні плани, програми, підручники повинні бути концептуально обґрунтовані і розроблені з урахуванням моделі особистості майбутнього спеціаліста. Отже, одна з вимог до професійної підготовки вчителя полягає в здійсненні переходу від: навчального предмета як джерела інформації до предмета як джерела духовного спілкування, творчої дії й діалогу культур; вузько навчальних завдань до завдань ціннісного професійного розвитку майбутнього спеціаліста, його активної професійної позиції і творчого стилю діяльності; "академічних" відносин викладача і студентів до педагогічної взаємодії, співпраці й співтворчості.

Додержання етапів індивідуального становлення особистості майбутнього спеціаліста: входження (зустріч з професією, усвідомлення специфіки професійної праці, переживання перших вражень від обраної професії, спеціальності та ін.); аналітичний пошук (організація діяльності й спілкування, подолання труднощів, що виникли, активізація професійно-ціннісних орієнтацій, домінування мотивів навчальної роботи і майбутньої професійної роботи); утвердження (нагромадження досвіду професійних дій). Саме поступовим переходом від етапу до етапу в професійній підготовці студентів закріплюється їхня позиція щодо самих себе, якій властива потреба в особистісному зростанні, нетрадиційному виконанні професійних функцій, стійкому інтересі до професійного самовдосконалення.

Оновлення структурних елементів професійної підготовки, серед яких важлива роль відводиться: особистісно-гуманітарній орієнтації навчальної інформації, змісту освіти; системному баченню професійної діяльності; педагогічному діагностуванню й педагогічному моніторингу; становленню активної професійної позиції і творчого стилю діяльності; формуванню рефлективної і комунікативної культури; засвоєння методики творчої роботи та інноваційної діяльності; розвитку професійних здібностей.

2. Основними принципами професійної підготовки майбутніх учителів в умовах навчання ВНЗ є:

– гуманізація, демократизація, індивідуалізація, інформатизація і інтернаціоналізація;

– професійний відбір талановитої молоді сферу педагогічної діяльності;

– забезпечення розвитку індивідуальності і самостійності майбутнього спеціаліста;

– орієнтація на широкий профіль підготовки за рахунок фундаменталізації вищої освіти; поглиблення її теоретико-методологічного аспекту інтенсифікації професійно-практичної підготовки через підвищення значення педагогічної практики, надання їй як і іншим формам організації підготовки, науково-дослідного характеру;

– індивідуалізацію підготовки (навчання за індивідуальними навчальними планами, індивідуальна робота зі студентами);

– інформативність підготовки – широке використання комп'ютерної техніки;

– інтернаціоналізацію – вивчення іноземних мов.

3. Випускник університету може бути якісно підготовленим до творчої, професійно-педагогічної діяльності за умови: розробки і впровадження методичної системи, за якою підготовка педагога проводилася би у відповідності з концепцією системи безперервної освіти в країні; спрямованість професійної підготовки майбутніх вчителів математики на перспективу.

4. Необхідність підготовки спеціалістів стосовно до умов, багато я яких будуть складатися в перспективі і визначатися будівництвом національної школи, переходом до ринкової економіки, дальшим впровадженням науково-технічного прогресу у виробництво і інші сфери народного господарства, ставить завдання пошуку і реалізації нових підходів до особистості майбутнього педагога, а саме: формування педагогічної культури на основі загальнолюдських цінностей, досвіду етнопсихології і народної педагогіки, активізації навчальної життєдіяльності майбутніх педагогів шляхом впровадження активних методів навчання, використання досвіду зарубіжної вищої школи та ін.

5. Забезпечити рівень підготовленості спеціаліста, адекватний вимогам часу, можна за умов створення в університеті автономної цілісної методичної системи, яка ґрунтується на основі введення інноваційних технологій підготовки: інновації щодо організації і управління процесом підготовки впроваджуються якнайскоріше, оскільки традиційна практика не повністю відповідає вимогам суспільства до педагогічної освіти; інновації технології навчання і виховання передбачають різні форми і методи освіти, оновлення її змісту, реалізацію гнучких, варіативних навчальних планів.

6. Багатоступенева структура підготовки: бакалавр, спеціаліст, магістр.

У сучасних умовах першочерговим завданням педагогічної освіти є організація, розвиток і функціонування в країні єдиної системи безперервної освіти. Законом України “Про вищу освіту” запроваджено багаторівневу підготовку, що повинна сприяти доступності всіх видів педагогічної освіти й створювати умови для повного задоволення потреб кожної особистості. Багаторівнева підготовка закладає основи для інтеграції вітчизняної системи в загальносвітовий освітній простір. Визначено, що в Україні встановлюються такі освітньо-кваліфікаційні рівні: кваліфікований працівник; молодший спеціаліст; бакалавр; спеціаліст; магістр. Багатоступенева підготовка фахівців надає можливість забезпечити всі їх освітньо-професійні рівні: робітничу професію, освітній (професійний) рівень бакалавра, кваліфікацію молодшого спеціаліста, спеціаліста, магістра.

Така структура кваліфікаційних рівнів педагогічних спеціальностей, за нормативним положенням міністерства освіти і науки, має забезпечити широкі можливості в освіті для задоволення різноманітних культурно-освітніх потреб особи і суспільства, підвищення гнучкості загальноосвітньої, загальнокультурної, професійної та наукової підготовки фахівців, соціальної значущості, престижу знань і соціального захисту в умовах змін потреб економіки і ринку праці, фундаментальність знань та інтеграцію у світову систему освіти.

7. Перепідготовка викладачів ВНЗ – на курсах підвищення кваліфікації потрібні не тільки лекції із спеціальності, а й лекції про нові підходи до процесу освіти, потрібна безпосередня участь педагогів у моделюванні й обробці активних методів навчання, читання лекцій перед експертною групою.

Деякі питання концепції розглянемо більш детально.

1) необхідна фундаментальна математична підготовка вчителя, яка забезпечує йому дійові математичні знання в границях, які далеко виходять за рамки шкільного курсу математики і універсальність в володінні ним різними математичними навчальними предметами в школі. Але ця фундаментальність є не ціллю, а засобом підготовки вчителя;

2) основи побудови математичних дисциплін в педагогічній ВНЗ складає об'єднання загальнонаукової і методичної лінії. Це об'єднання означає, зокрема, що комплекс математичних предметів педагогічних ВНЗ повинен забезпечити студенту достатньо широкий визначений рівень математичної культури і в той же час знайомство з методами викладання шкільного курсу математики. Мова йде про те, що при виборі методів навчання викладач педагогічного ВНЗ усюди, де можливо свідомо віддає перевагу тим із них, які студент буде використовувати в своїй наступній педагогічній діяльності. Курс методики навчання математики зможе успішно розв'язувати свої завдання в області часткових методик тільки на основі єдності доброї математичної підготовки студента і уже сформованих його методичних поглядів;

3) зв'язок конкретного математичного курсу педагогічного ВНЗ з відповідним шкільним предметом. Реалізація цього зв'язку забезпечує цілеспрямованість курсу, розуміння студентами перспективи його вивчення, а значить, сприятиме свідомому засвоєнню курсу.

Здійснення безперервного осягнення майбутньої педагогічної діяльності в процесі навчання студента в педагогічному ВНЗ. Відсутність вказаної безперервності є одним із головних факторів, які гальмують формування професійної спрямованості особистості майбутнього вчителя.

Розроблена і науково обґрунтована концепція професійної підготовки майбутніх учителів математики, в якій реалізується нова педагогічна ідея : трансформаційні процеси в суспільстві і пов'язана з ними модернізація педагогічної освіти, стимулюють можливість того, що оновлена освіта буде слугувати особі та сприяти її розвитку.

Література:

1. Моторіна В.Г. Дидактичні і методичні засади професійної підготовки майбутніх учителів математики у вищих педагогічних навчальних закладах. Дис. на здобут. наук. ступ. док. пед. наук (13.00.04). –Х.: 2005. – 504 с.

ЕЛЕМЕНТИ КОНКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ В ПРОФЕСІЙНІЙ ПІДГОТОВЦІ ВЧИТЕЛЯ

Ю.І. Волков, Н.М. Войналович
м. Кіровоград, Кіровоградський державний педагогічний університет
ім. В. Винниченка
yvolkov@kspu.kr.ua

Незважаючи на всі зміни, що відбулися в освіті України за останні роки, продовжується зниження рівня математичної підготовки в школах та університетах. Постає питання: "Чи можна врятувати математичну освіту?" Щоб відповісти на нього, необхідно з'ясувати причини цієї негативної тенденції.

Аналіз вітчизняної та зарубіжної педагогічної преси виявляє, що одна з причин міститься у змісті тієї "сучасної математики", якої навчають у школах та вищих навчальних закладах. Гострота проблеми оновлення змісту математичної освіти викликана як мінімум двома обставинами: 1) проблемами гуманізації та демократизації освіти; 2) змінами, які відбулися в математиці у середині XX століття і пов'язані з появою комп'ютерів.

В таких умовах одним з можливих напрямків оновлення змісту є реалізація концепції дискретики. Під концепцією дискретики мається на увазі та лінія у модифікації математичної освіти, яка направлена на посилення ролі скінченої (дискретної) математики та впровадження нових її розділів у середню та вищу школу.

За кордоном багато уваги приділяється педагогічним аспектам дискретної математики: створюються підручники, Американська математична асоціація розробляє педагогічний проект DIMACS. В Україні педагогічні дослідження з дискретної математики представлені ще недостатньо: в основному досліджуються методичні проблеми, пов'язані з викладанням комбінаторики та елементів теорії ймовірностей у школі.

Постають актуальні питання. Якими повинні бути взаємовідносини дискретної і неперервної математики? Яким повинно бути співвідношення їх об'ємів у загальному курсі математики? Які розділи дискретної математики викладати вчителям?

Цікава ідея відповіді на ці питання з'явилася в закордонній педагогічній літературі: "У змісті математичної освіти належне місце мають посісти розділи конкретної математики". У цьому напрямку створено ряд підручників. На жаль, нашому читачу доступною є лише книга американських фахівців з дискретної математики Д. Кнута, Р. Грехема, О. Паташніка "Конкретна математика", нещодавно перекладена в Росії. Чи варта ця ідея уваги, можуть з'ясувати лише спільні ґрунтовні дослідження математиків та педагогів. Передусім з'ясуємо, що таке "конкретна математика"?

У свій час Д. Кнут, автор відомого "Мистецтва програмування", виявив, що математика, яка потрібна для досконалого тлумачення комп'ютерних програм, докорінно відрізнялася від тієї, яку автор вивчав у коледжі як профільну дисципліну. Тому згодом він розробив новий спецкурс з "конкретної математики", наповнивши його тим матеріалом, який у свій час сам хотів би почути. Цей спецкурс виник, як протиставлення "абстрактній математиці", бо конкретні класичні результати стрімко "вимивалися" із сучасної математичної освіти. Абстрактна математика – чудовий предмет: вона красива і корисна. Проте, її прибічники припустилися помилкової думки, що уся інша математика не така важлива і цікава, а тому далі не заслуговує на увагу. В результаті стрімких узагальнень, абстрактна математика стала втрачати зв'язок з дійсністю. Г. Вейль писав: "Математика живе в розрідженому повітрі абстракцій і тому здобула дурну славу". Як наслідок, відповідний навчальний предмет став важким для більшості тих, хто навчається; засвоєння математики часто відбувається в умовах невиправданого насилля над особистістю. І тому математична освіта вбачає в конкретній математиці противагу вищевказаним тенденціям для відновлення стійкої рівноваги.

Що ж в дійсності являє собою конкретна математика? Це поєднання КОНтинуальної та дисКРЕТНОЇ математики. Ще більш конкретно: це осмислене оперування математичними формулами з використанням певного набору методів розв'язування задач.

Знаходження сум, рекурентні співвідношення, елементарна теорія чисел, біноміальні коефіцієнти, твірні функції, дискретна теорія ймовірностей, асимптотичні методи, функціональні рівняння, діофантові рівняння, цілочисельні функції – ось найбільш важливі розділи. При цьому перевага віддається технічній стороні справи, а не теоремам існування чи комбінаторним міркуванням.

Якщо проаналізувати вищевказані розділи, то можна помітити, що вони є невеликими закінченими математичними теоріями – цікавими, доступними і давно відомими. Їх задачі можна сформулювати на вузькій понятійній базі і подати у привабливому сюжетному оформленні. Тому ці розділи можуть бути варіативною основою для включення їх у систему сучасної загальної освіти з математики. Матеріал цих розділів може бути використаний при підготовці та проведенні факультативних чи гурткових занять, організації навчально-дослідницької діяльності слухачів територіальних відділень МАН.

Крім цього, пропоновані розділи мають багаті професійно-педагогічні можливості для реалізації принципу бінарності – поєднання загальнонаукової і методичної ліній при побудові й викладанні матеріалу майбутнім вчителям, для наповнення конкретним змістом таких компонентів методичної моделі математичного курсу, як мотивація, пропедевтика, навчання студентів математичному моделюванню, побудові та застосуванню алгоритмів, реалізації і правильному розумінню міжпредметних зв'язків. До того ж, з'явиться можливість на нескладному, цікавому, доступному навіть для учнів матеріалі організувати специфічну для педвузу діяльність по дидактичній обробці наукового матеріалу з метою перетворення його у фрагмент навчальної дисципліни.

В Кіровоградському державному педагогічному університеті розпочалися дослідження в цьому напрямку. Ми керуємося гіпотезою про те, що ефективність процесу професійної підготовки у педвузі підсилиться, якщо знання з конкретної математики будуть необхідною складовою математичної освіти вчителя математики та інформатики.

Мета дослідження – розробка методики навчання елементам конкретної математики в педагогічних вузах, пошук можливостей професійно-педагогічної направленості навчання та створення на основі виявлених можливостей практичних рекомендацій щодо впровадження пропонованого матеріалу в школу.

Поставлена мета конкретизується в таких завданнях:

1. Виявити тенденцій розвитку математичної освіти у вищих педагогічних закладах на підставі тих змін, які відбуваються у суспільстві та математиці; дослідити напрям модифікації математичної освіти, який направлений на посилення ролі конкретної математики й впровадження нових її розділів у середню та вищу школу.
2. Проаналізувати історичні аспекти посилення ролі конкретної математики у математичній освіті.
3. Обґрунтовано відібрати розділи конкретної математики, які варто включити в систему математичної підготовки вчителя, визначити зміст базового понятійного апарату розділів; розробити зміст навчальної діяльності, добрати мети, організаційні форми та засоби навчання, що сприяють формуванню знань у студентів про основні поняття цих розділів конкретної математики, конкретних прикладних навичок.
4. Виявити можливості й резерви розділів конкретної математики для здійснення професійно-педагогічної направленості навчання студентів предмету свого майбутнього викладання.
5. Розробити систему методичного забезпечення процесу формування знань студентів з указаних розділів.
6. Створити методичні рекомендації щодо використання елементів конкретної математики у школі.
7. Розкрити світоглядний потенціал і, зокрема, прикладний потенціал конкретної математики.

Результати дослідження можуть бути використані:

- вищими навчальними закладами в системі фахової професійної підготовки вчителів математики та інформатики;
- інститутами післядипломної освіти при перепідготовці уже працюючих вчителів;
- вчителями середніх загальноосвітніх закладів у гуртковій роботі та

на факультативах;

- вчителями закладів нового типу при підготовці та проведенні спецкурсів; при формуванні варіативної частини шкільних навчальних планів;
- керівниками територіальних відділень МАН при підготовці та проведенні занять, а також при написанні науково-дослідних робіт.

В осінньому семестрі 2005–2006 навчальному році в рамках дослідження на фізико-математичному факультеті студентам 3 курсу зі спеціальності «Математика і інформатика» читався спецкурс з конкретної математики.

Кількість годин за навчальним планом: 36 год. лекцій, 18 год. самостійної роботи, залік.

На лекціях розглядались такі теми. Вступ до дисципліни, приклади: побудова правильних многокутників, одна чудова тотожність $(a^3+b^3+c^3-3abc)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$, нерівність Коші, формула Кардано, синус фон Штаудта. Мішані середні. Числення сум, позначення сум, перетворення сум, суми та рекурентності, загальні методи знаходження сум. Числові теореми. Твірні функції. Ряди Лагранжа. Формула Валліса. Формула Стірлінга для $n!$. Спеціальні числа: біноміальні коефіцієнти, числа Стірлінга першого і другого роду, числа Бернуллі, числа Фібоначчі. Перетворення Без'є, криві Без'є, многочлени Бернштейна. Ланцюгові дроби. Рівняння Пелля.

Література:

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. – М.: Мир, 1998.
2. Волков Ю.І., Войналович Н.М. Елементи дискретної математики. – Кіровоград: РВЦ КДПУ, 2000.
3. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. – М., ИЛ, 1963.
4. Волков Ю.І., Войналович Н.М. Мішані середні // У світі математики. – Том 10, випуск 5. – 2004. – С. 36-40.

РОЛЬ ЭСТЕТИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ В ФОРМИРОВАНИИ МОТИВАЦИИ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

А.М. Петров[1], Е.Н. Грубич[1], Т.Б. Кузема[2], О.Д. Пташный[3]
[1] г. Харьков, Харьковский национальный педагогический университет имени Г.С. Сковороды
[2] г. Севастополь, Севастопольский городской гуманитарный университет имени Князя Владимира
[3] г. Харьков, Украинская инженерно-педагогическая академия

Система образования во все времена преследовала цель формирования всесторонне образованной личности, обладающей высоким уровнем общей и профессиональной культуры, соответствующей задачам, стоящим перед обществом на современном этапе развития.

Эта система является одной из основополагающих в жизни общества. Она отражает не только уровень развития науки, техники, общественных отношений, но и напрямую связана с историей именно этого общества, с особенностями его национальной культуры, и поэтому любые изменения, происходящие в сфере образования, рано или поздно обязательно сказываются на жизни каждого его члена. Именно в силу этого любые реформы в образовании должны проводиться чрезвычайно осторожно.

Наша система образования с середины второй половины двадцатого столетия находится в состоянии реформирования. Процесс и результаты такого реформирования нельзя признать однозначным. С одной стороны, нельзя не признать некоторых достижений в сфере гуманизации образования, а с другой стороны – резкое снижение показателей представителей стран бывшего Советского Союза (например, России) на международных олимпиадах (особенно, в сфере точных наук), снижение рейтинга национальных систем образования этих стран на международном уровне.

Эти процессы также могут трактоваться как признаки снижения общего уровня культуры школьников и студентов.

О снижении уровня математической культуры студентов свидетельствует, например, такой факт. Студентам первого курса были предложены две задачи: а) вычислить определитель четвертого порядка; б) найти матрицу, обратную данной матрице третьего порядка. При этом, каждую из задач студент должен был решить двумя способами. Часть студентов, в ходе решения задачи разными способами получили разные ответы. И этот факт не вызвал у них ни вопросов, ни сомнений в правильности решения. Это, на наш взгляд, свидетельствует, с одной стороны, о формальном усвоении знаний, а с другой – о полном безразличии к результатам своего труда. Если что и интересовало эту группу студентов, так это лишь оценка.

Одной из причин создавшегося положения в современной школе, на наш взгляд, может являться недостаточное внимание к вопросам *эстетиче-*

ского воспитания учащихся.

В конце концов, именно понятие красоты, стремление сделать результат своего труда эстетически и функционально привлекательным, приводит не только к субъективно, но, зачастую, и к объективно важным для общества результатам. И уж, конечно, такое стремление способствует уверенности в своих силах, «работает» на совершенствование личности, открывает просторы для творчества в самых различных сферах. А творчество, возможно, и есть наиболее яркое выражение свободы.

Одной из проблем школьного образования является отсутствие специфической учебной мотивации, а без нее ожидать творчества практически не приходится (профилизация школы в нынешнем ее состоянии не решает этой проблемы). Многие исследователи отмечают, что высокая позитивная мотивация в известной степени может компенсировать недостаток способностей. В то же время наличие способностей не может компенсировать отсутствие мотивации. При этом следует заметить, что в силу особенностей математики формирование познавательных мотивов должно быть осуществлено своевременно.

Если взглянуть на проблему шире, то можно предположить, что основная задача учителя состоит в том, чтобы учащемуся был чрезвычайно интересен сам процесс учебного труда, чтобы учение происходило в процессе деятельности, которая для важна непосредственно для учащегося.

В рамках традиционного обучения решить эту задачу не удается. Один из путей ее решения является переход от «знаниевого» подхода к «деятельностному», который, согласно Г.А. Атанову, «предполагает, что человек в процессе обучения должен не выучить что-то, а *научиться чему-то*, т.е. научиться что-то делать, *осуществлять деятельность*» [1].

Другой путь — переход от традиционного обучения к эвристическому, которое, по мнению Е.И. Скафы, «позволяет… сделать первичными те цели и задачи, которые поставят ученики для себя. Роль преподавателя сводится к помощи учащимся в формировании своих целей и последующем сопровождении его деятельности по их достижению.

Эвристическое обучение в данном смысле сопровождающее, что не умаляет, а повышает значимость учителя, который из транслятора знаний превращается в организатора индивидуального образовательного движения учеников» [2].

Возможно, осуществление концепции профильного обучения, явится некой промежуточной моделью при переходе от традиционного обучения к эвристическому.

Однако вопросы формирования познавательных мотивов не потеряют своей важности при любом развитии ситуации.

Одним из приемов формирования мотивации, как указано в работе Э.М. Ваврук [3], является «создание ситуации увлеченности»

Эстетическое воспитание в процессе изучения математики как раз и направлено на создание такой ситуации.

Оно может осуществляться как на школьных уроках или факультативных занятиях, так и во внешкольном обучении. Например, в вузе в рамках адаптационного курса математики (который в том или ином виде читается в большинстве технических вузов) или в основном курсе высшей математики. Понятно, что эстетика должна в определенной степени отражать специфику вуза и учитывать будущую специальность студентов.

Поскольку студенты-педагоги в дальнейшем будут иметь дело со «школьной математикой», мы приведем вначале несколько примеров из элементарной математики.

В ходе повторения основных тем школьного курса математики студентам 1-го курса была предложена задача «Найти геометрические решения задач»:

1) Решить систему уравнений $\begin{cases}(x+y+1)^2+(x+y)^2=25\\ x^2-y^2=3\end{cases}$.

2) Вычислить: $0{,}25\cdot\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+1-\sqrt{3}\right)}$.

Часть студентов увидела в первом уравнении системы (1) запись теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника, длины сторон которого равны соответственно $x+y$ и $x+y+1$ и, воспользовавшись заменой переменных: $x+y=z$, получили квадратное уравнение. Однако, они были поражены тем, что задача решается практически устно, если вспомнить известный «египетский» треугольник со сторонами 3, 4, 5.

После этого решения обсуждался вопрос о том, почему стандартный путь дает два решения, а геометрический – одно. Это позволило выяснить, что в ходе «геометрического» решения не была учтена возможность «существования» в алгебре треугольника с отрицательными сторонами.

С другой стороны, приведенный подход вызвал повышенный интерес ко второй из представленных задач. Здесь уже нашлись студенты, которые, увидев в приведенной записи формулу Герона, не остановились на этом, а попытались выяснить, какой именно треугольник рассматривается. А обнаружение того, что этот треугольник со сторонами 1, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ – прямоугольный (что непосредственно следует из теоремы, обратной теореме Пифагора) с катетами 1 и $\sqrt{2}$ сопровождалось бурей эмоций. Выяснилось, что и эта задача могла быть решена устно.

Похожий прием – использование межпредметных связей для привлечения внимания учащихся может быть с успехом применен и при соответствующем подборе примеров из данной предметной области. Так, например, при изучении метода неопределенных коэффициентов (МНК) студентам-химикам предлагались задачи на составление уравнений химических реакций.

Примером такой задачи может служить задача расстановки коэффициентов в записи реакции разложения марганцовокислого калия:

$$KMnO_4 \to K_2O+MnO+O_2.$$

Здесь использование метода неопределенных коэффициентов практически мгновенно приводит к решению, в то время как использование обычного приема «подбора» коэффициентов оказывается трудоемким, а, главное, он не обладает общностью МНК.

Нестандартным может быть не только решение, но и сама постановка задачи. Так, например, нестандартными и интересными для студентов были уравнения и неравенства вида $f(x)=g(x)$ и $f(x)>g(x)$, где функции $f(x)$ и $g(x)$ имели разную природу.

Такими задачами были, например, следующие:

3) Решить уравнение $x^2+4x\cos(xy)+4=0$;

4) Доказать неравенство $\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$.

Конечно, использование нестандартных форм постановки задачи, нестандартность самого решения привлекают студентов, хотя при этом для преподавателя крайне важно, чтобы в аудитории создалась такая атмосфера поиска, когда каждый из присутствующих имеет возможность внести свой вклад в неизбежный успех.

Другая возможность мотивации студентов – использование элементов истории в преподавании.

Так, в курсе «Алгебры и теории чисел» (2-й курс) при изучении теоремы Виета был подготовлен рассказ о жизни Франсуа Виета, а незадолго до изучения формулы Тарталья-Кардано студентами 3-го курса для второкурсников был подготовлен и поставлен спектакль по мотивам истории открытия этой формулы.

Этот прием оказывается весьма эффективным, хотя и требует существенных временных затрат от преподавателя. С другой стороны, создаваемая в аудитории психологическая атмосфера, существенно облегчает труд преподавателя и студентов, делает его радостным.

ДЕЯКІ МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ РЕАЛІЗАЦІЇ НАСТУПНОСТІ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ У ШКОЛІ ТА ВУЗІ

Т.Г. Крамаренко
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет
KTANJA@nm.ru

Постановка проблеми. Реформування освіти на засадах неперервності та забезпечення такого домінантного напрямку як наступність між різними ланками ступеневої системи освіти, зокрема школа-вуз, є найбільш виразною ознакою останніх змін в українській освіті. Водночас змінюється й парадигма європейської вищої освіти в тому плані, що «...від навчання у форматі «teaching» відбувається перехід до формату "learning"». Тепер не студента вчать, а він сам навчається» [1]. Тому проблема «учити вчитися» в забезпеченні наступності за своєю важливістю не поступається іншій – ліквідації прогалин у знаннях студентів з елементарної математики.

В умовах гуманізації особливо актуальним стає забезпечення належного рівня математичної підготовки, оскільки математика є однією з найважливіших фундаментальних наук, що творить та формує сучасний науково-технічний світогляд, алгоритмічну культуру, уміння аналізувати різні причинно-наслідкові зв'язки, моделювати ситуації, абстрагуватися, робити узагальнюючі висновки та розповсюджувати результати досліджень для вирішення певних задач в різних галузях виробництва.

Аналіз досліджень і публікацій. Проблеми наступності між рівнем математичної підготовки випускників шкіл та вимогами вузів стали предметом обговорення на сторінках журналу «Математика в школі» [2], на одній із секцій Всеукраїнської конференції «Проблеми математичної освіти (ПМО-2005)» в Черкасах [3]. Окреслена проблема, питання підвищення рівня знань випускників шкіл висвітлюються і в матеріалах конференції в Кривому Розі [4]. Автори статті [3, 366] серед причин, що не дозволяють студентам належним чином вивчати курс вищої математики, відзначають знижений загальний культурний рівень, недостатньо сформовану логічну культуру, не розвинуті вербальні здібності і дивергентне мислення, невміння працювати з літературою, невисокий рівень володіння комп'ютером, недостатньо сформоване математичне мовлення і володіння символікою, що перешкоджає ефективному конспектуванню.

Недостатній рівень математичної культури студентів-першокурсників діагностують також автори публікації [4, 222] і вважають доцільним викладання на першому курсі педагогічного вузу інтегрованого курсу «Математика-0» з метою забезпечення всіх студентів у мінімальному, але достатньому для подальшого навчання об'ємі математичних знань. Підкреслюється важливість прикладної спрямованості курсу та впровадження ідеї математичного моделювання в шкільну практику.

Мета нашого дослідження – розглянути методичні аспекти реалізації наступності та методику організації і управління освітньою діяльністю студентів-першокурсників індустріально-педагогічного факультету (ІПФ) педагогічного вузу під час вивчення пропедевтичного курсу вищої математики в умовах сучасного інформаційно-навчального середовища.

Основний матеріал. Для сприятливої соціально-психологічної адаптації старшокласників до навчання у вузі велике значення має наступність у цілях, змісті, методах і формах навчання, врахування психологічних особливостей учнів. Необхідно, щоб знання, уміння й навички формувались систематично, безперервно, в певній логіці, коли кожен елемент змісту логічно пов’язується з іншими, коли наступне спирається на попереднє і готує до засвоєння нового. Першорядну роль у здійсненні наступності відіграють узгодженість шкільної та вузівської програми, такі принципи добору змісту освіти, як єдина змістова та процесуальна сторони навчання, структурна єдність змісту навчання на різних рівнях; гуманізація; фундаменталізація; відповідність основних компонентів змісту навчання структурі базової культури особистості. Принципами забезпечення наступності навчання є принципи науковості, діяльності, співробітництва учнів і вчителя як суб’єктів спільної діяльності, єдності навчальної і дослідницької роботи, самоосвіти і розвитку [3, 326].

Що стосується методів і форм навчання, то для шкільної системи освіти властиве засвоєння нового матеріалу незначними порціями, що відповідає структурі уроку – опитування, повторення, вивчення нового матеріалу, закріплення і т.д. Для навчання у вузі характерна лекційно-практична система, за якої інформація подається великими порціями, значна частина яких має бути засвоєна самостійно, а контроль здійснюється через більші інтервали часу. Для школярів, не приучених до систематичної роботи, це створює значні проблеми. Як показує практика, у старшокласників не в повній мірі сформовані навички самостійної роботи з підручниками чи іншими джерелами інформації, вони відносно мало працюють з теоретичним матеріалом, не завжди вміють відбирати потрібну інформацію, виділяти в ній головне. Тому в умовах профільного навчання в старшій школі все більшого поширення мають набувати лекції, хоча б вступні та заключні, і такі ефективні форми організації навчання як семінари, практикуми, характерні для вузівської системи освіти. Доцільно залучати школяра до виконання індивідуальних завдань, написання рефератів, науково-дослідницьких робіт з математики.

Одним із напрямків удосконалення методики викладання математики і забезпечення наступності є застосування поряд з традиційними формами навчання сучасних інформаційних технологій, які через гармонійне вмонтовування підсилюють діючу дидактичну систему. Цінність застосування комп’ютерних технологій простежується на всіх етапах навчання – при початковому набутті навичок, закріпленні матеріалу шляхом розв’язування задач, візуалізації досліджуваних об’єктів та розвитку мислення і уяви. В умовах широкого впровадження обчислювальної техніки в навчання математики, мова йде в першу чергу про формування математичних компетентностей та розвиток мислення особистості.

Комп’ютер сприяє активному включенню в процес пізнання того, хто навчається, а головним його призначенням має стати удосконалення навичок самоконтролю, розвиток мислення та творчих здібностей студента. Спланована самоосвітня діяльність суб’єкта спрямована на власний інтелектуальний розвиток, на самостійне здобування, перетворення і використання знань, формування навичок та умінь особистості, яка зможе адаптуватися в сучасному інформаційному просторі. До послуг користувачів різноманітні електронні посібники з вищої математики, тренажери, мережа Internet, програмні педагогічні засоби, насамперед ті, що вивчаються за шкільною програмою з математики та інформатики, – GRAN, DG, Microsoft Excel тощо. Однак через невисокий рівень володіння студентами-першокурсниками комп’ютером, через слабку матеріально-технічну базу навчальних закладів і недостатність методичного забезпечення НІТН математики ще не займають належного їм місця.

Важливу роль у забезпеченні наступності в системі школа-вуз відіграють підготовчі курси при вузах з відповідного предмету, на яких школярі можуть підвищити рівень знань через виконання комплексних контрольних завдань і систематизацію матеріалу. Однак і вони готують в більшій мірі до вступних іспитів, а не до навчання у вузі. Крім того, постає питання, чи залишиться ця важлива ланка з введенням зовнішнього сертифікаційного тестування у загальноукраїнському масштабі, чи буде в ній потреба?

Вивчення курсу математики на ІПФ включає блок шкільної математики (І семестр, 36 год., лабораторні заняття) і такі змістові модулі, як лінійна алгебра, аналітична геометрія, границя функції та неперервність (ІІ семестр), диференціальне та інтегральне числення, диференціальні рівняння і ряди (ІІІ семестр). Методичне забезпечення курсу відображає як логічну та кількісну структуру, так і особливості теоретичного, практичного, контролюючого блоків, а також блоку для самостійної роботи студента, що включає домашні та індивідуальні завдання. Останнє надзвичайно важливо, оскільки результативність професійної підготовки студентів безпосередньо залежить від якості їх самостійної діяльності, яка стає головним способом надбання знань.

Шкільний курс математики (ШКМ) на індустріально-педагогічному факультеті є пропедевтичним курсом вищої математики. Головними його завданнями є доповнити, систематизувати, узагальнити знання студентів з елементарної математики, створити умови для неперервної самоосвіти на основі систематичної самостійної роботи і, як наслідок, забезпечити підвищення рівня знань з математики та сприяти розвитку особистісних якостей майбутніх висококваліфікованих, професійно підготовлених фахівців.

Нами створений і апробований методичний посібник з ШКМ, структура якого включає вступ; робочу програму курсу; перелік питань з теорії до кожного лабораторного заняття з посиланням на відповідну літературу; диференційовані завдання для самостійної роботи; рекомендації по виконанню окремих вправ чи відповіді до завдань; шкалу рейтингового оцінювання в залежності від об'єму та якості виконаної роботи; подано зразки завдань до діагностичної контрольної роботи, поточної та семестрової. Переважна більшість завдань для самостійної роботи пов'язана з порядковим номером N студента в журналі, не лише з метою запобігання списуванню, але й для того, щоб завдання могла виконати за аналогією значна частина студентів, що має низький та середній рівень знань з математики. З іншого боку, номер N можна розглядати як параметр і розв'язувати завдання для довільних його значень. У цьому випадку рівень складності багатьох вправ автоматично підвищується, оскільки завдання з параметрами є дослідницькими мініатюрами, що сприяють розвитку інтелектуально-логічних здібностей особистості.

З метою удосконалення навичок самоконтролю та становлення саморозвитку особистості в посібнику подано рекомендації із застосування програмних педагогічних засобів (ППЗ) GRAN1, GRAN-2D, Advanced Grapher до побудови графіків функцій, розв'язування рівнянь та нерівностей, представлено розробку лабораторного заняття в комп'ютерному класі, а також наведені завдання для самостійної роботи на комп'ютері, виконання яких заохочується. Зазначені засоби вивчалися у школі, вони досить прості у користуванні і водночас дозволяють розглянути широке коло задач курсу. Особливо актуальним є застосування систем комп'ютерної математики до вивчення тригонометричних, обернених тригонометричних функцій, побудови графіків шляхом елементарних перетворень.

Розробка містить короткий довідник з елементарної математики, що враховує запити вищої математики. У ньому можна знайти алгоритми розв'язування певних типів рівнянь чи нерівностей, відомості про елементарні функції, їхні властивості та графіки, заготовки для побудови графіків шляхом елементарних перетворень тощо. Всі формули згруповані за темами і пронумеровані, що надзвичайно зручно в роботі, бо дозволяє швидше адресувати студентів до тієї чи іншої інформації. В переліку запитань до заняття зазначаються пов'язані з ними номери формул. Для окремих формул залишені порожні місця, щоб студенти могли їх вписати за словесним формулюванням. При повторенні формул скороченого множення, особливо біному Ньютона, добиваємося смислового сприйняття та засвоєння інформації, оскільки досить часто трапляється, що першокурсники можуть записати формулу, але не вміють її застосувати.

Розпочинаємо роботу з первинної діагностики студентів з метою виявлення рівня їх знань, навичок та умінь та готовності до організації власної діяльності, умовно розподіляємо їх на групи і складаємо план для кожної з груп, базуючись на їхньому досвіді з врахуванням принципів індивідуалізації та диференціації навчання. Контроль і коригування є нерозривними, взаємодоповнюючими та об'єктивно необхідними етапами процесу навчання. Інформація, яку дістаємо внаслідок здійснення контролю, та її аналіз стають основним способом зворотного зв'язку між суб'єктами педагогічного процесу.

В ході навчання використовуємо групові форми роботи, роботу в парах змінного складу. Індивідуальні заняття проводимо з врахуванням рівня групи (середній, продуктивний рівень чи рівень трансформації). Не секрет, що окремих студентів доводиться навчати діям зі звичайними дробами, з числами різних знаків. З одного боку, калькулятор дозволяє швидко отримувати результат, але з іншого – деякі першокурсники не володіють навичками усного рахунку. В таких умовах важливо не тільки підтягнути студентів з низьким рівнем знань хоча б до середнього рівня, але «не загубити» при цьому кращих і забезпечити їм просування вперед.

Діагностичні дослідження показують низький та середній рівень знань про властивості функцій та застосування їх до розв'язування задач. Особливо це стосується тригонометричних та обернених тригонометричних функцій, показникової та логарифмічної, і взагалі складеної та оберненої функцій. Враховуючи потребу у відповідних знаннях при вивченні диференціального та інтегрального числення, в пропедевтичному курсі вищої математики має бути посилена змістова лінія функцій.

Як уже зазначалося вище, реалізація наступності у системі «школа – вуз» суттєво залежить від формування мотиваційної сфери першокурсників до пізнання, адекватної змістові навчальної підготовки. При систематизації знань з ШКМ необхідно розширювати окремі питання, додаючи відомості, які в школі не вивчалися або вивчалися лише в класах з поглибленим вивченням математики. Наприклад, перетворюючи раціональні вирази, не обмежитися скороченням дробів чи спрощенням їх через зведення до спільного знаменника, а освоїти ділення кутом многочлена на многочлен з остачею, ділення многочлена на двочлен за схемою Горнера, розкладання дробу на прості дроби методом невизначених коефіцієнтів. Розглядаючи зведення до раціонального виду знаменника або чисельника дробу, провести паралель з обчисленням границі функції, що містить невизначеність типу 0/0; розв'язування нерівностей за властивостями квадратичної функції чи методом інтервалів пов'язати з дослідженням функції на монотонність; властивості логарифмів з перетворенням загального розв'язку диференціального рівняння; перетворення добутку тригонометричних функцій на суму, пониження степеня, розкладання на прості дроби – з інтегруванням.

Незважаючи на обмаль часу, відведеного для ШКМ на індустріально-педагогічному факультеті, потрібно приділити увагу задачам практичного змісту, оскільки математичне моделювання не просто сприяє розвитку мислення тих, хто навчається, але й наповнює реальним змістом математичні абстракції, поглиблює міжпредметні зв'язки. Пропонуємо першокурсникам задачі на відсоткові розрахунки. При вивченні арифметичної та геометричної прогресій не тільки акцентуємо увагу на тому, що відповідні знання потрібні будуть при вивченні теми «Ряди», але й розв'язуємо деякі задачі фінансової математики. Вивчаючи властивості квадратичної функції, розглядаємо траєкторію польоту тіла, кинутого від кутом до горизонту, тригонометричні функції – гармонічні коливання маятника, системи лінійних рівнянь – відповідні задачі електротехніки на розрахунок сили струму в колі тощо. На заняттях розглянули застосування показникової функції в задачах про радіоактивний розпад, про зміну атмосферного тиску і вакуумування, про розмноження бактерій і приріст деревини. Практичні задачі сприяють накопиченню досвіду застосування математичних методів в майбутній професійній діяльності, а тому підвищують внутрішню мотивацію студентів.

Висновки. Зрізи знань, проведені в кінці семестру показали зміщення рівнів знань, умінь та навичок першокурсників у бік покращення – зросла кількість студентів з достатнім (продуктивним) рівнем та високим рівнем (рівнем трансформації) та відповідно зменшилась кількість студентів з середнім (репродуктивним) рівнем. Дослідження підтвердили також ефективність застосування комп'ютерних технологій в курсі математики, оскільки вони дозволяють підвищити наочність навчання, удосконалити зміст, збільшити частку самостійної роботи студента, врахувавши при цьому індивідуальні психологічні особливості. Пропедевтичний курс вищої математики дозволяє систематизувати й узагальнити знання першокурсників, підсилити мотивацію, активізувати пізнавальну діяльність, що і повинно забезпечити ґрунтовні знання з математики.

Література:

1. Вища освіта України і Болонський процес: Навчальний посібник / За редакцією В.Г.Кременя. – Тернопіль: Навчальна книга–Богдан, 2004. – 384 с.
2. Дорофеев Г.В. Непрерывный курс математики в школе и проблема преемственности // Математика в школе. – 1998. – №5. – С. 70-76.
3. Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО-2005), м. Черкаси. – Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б.Хмельницького, 2005. – 382 с.
4. Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. Випуск V: В 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2005. – Т.1: Теорія та методика навчання математики. – 375 с.

ВИВЧЕННЯ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ В ПЕДАГОГІЧНОМУ ВУЗІ ЗА ЄВРОПЕЙСЬКОЮ КРЕДИТНО-ТРАНСФЕРНОЮ СИСТЕМОЮ

В.В. Корольський, О.В. Лобас
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Процеси європейської інтеграції охоплюють дедалі більше сфер життєдіяльності, включаючи вищу освіту. Україна, яка чітко визначила орієнтир на входження в освітній і науковий простір Європи, починає здійснювати модернізацію освітньої діяльності в контексті Болонських угод.

У зв’язку з цим навчальна програма кожного виучуваного курсу має бути побудована у відповідності до вимог кредитно-модульної системи організації процесу навчання у вищих закладах освіти та узгоджена з примірною структурою змісту навчального курсу, рекомендованою Європейською кредитно-трансферною системою (ECTS).

Перш за все, така перебудова стосується фундаментальних дисциплін і зокрема математики. Зміст навчання математики у вищій школі забезпечує досить високий рівень математичної підготовки студентів. Проте зміни в галузі техніки, виробництва, освіти, комунікацій ставлять нові вимоги до професійної підготовки майбутніх вчителів математики.

З метою активізації самостійної навчально-пізнавальної діяльності студентів вважаємо за доцільне звернути особливу увагу на технологію навчання в рамках кредитно-модульної системи.

З упровадженням кредитно-модульної системи роль викладача-методиста з математики зміщується в бік управління самостійною навчально-пізнавальною діяльністю за умови застосування різноманітних форм контролю, особливо на молодших курсах. Це означає, що викладач-методист має реалізувати своє найголовніше завдання: не вчити студента, а навчити його вчитись самостійно, з урахуванням власних потреб та нахилів.

За таких умов, на наш погляд, важливою складовою професійної підготовки мають бути методичні рекомендації щодо вивчення шкільного курсу математики. Далі ми виходимо з того, що виклад матеріалу має бути послідовним згідно з порядком змістових модулів навчальної програми.

Оскільки кредитно-модульна система передбачає запровадження рейтингової системи оцінювання знань студентів і шкалу оцінок за єдиними критеріями, то ми пропонуємо такі критерії.

Шкала ECTS	Національна шкала	В балах
A	Відмінно	90-100
BC	Добре	75-89
DE	Задовільно	60-74
FX	Незадовільно з можливістю повторного складання	35-59
F	Незадовільно з обов’язковим повторним курсом	1-34

Наприклад, для вивчення матеріалу змістового модуля ЗМ-1 "Раціональні рівняння і нерівності" методичні рекомендації можуть бути такими:

<table>
<tr><th colspan="2">Навчальний текст</th><th>Рекомендації щодо вивчення модуля</th></tr>
<tr><td colspan="2">ЗМ-1 «Раціональні рівняння та нерівності»
- Кількість годин на вивчення даної теми – 6 годин
- Мета вивчення модуля: вивчення основних понять елементарної математики та можливостей їх застосування для розв'язання прикладних задач.</td><td>Ключові поняття: рівняння, область визначення, корінь рівність, нерівність, розв'язок нерівності, основні методи розв'язання рівнянь та нерівностей.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Плани проведення занять:
Лекція 1. Раціональні рівняння.
План:
1. Основні види розв'язання (мм-1).
2. Деякі спеціальні типи цілих раціональних рівнянь (мм-2).
Лекція 2. Раціональні нерівності.
План:
1. Методи рівносильних перетворень (мм-3).
2. Загальні методи (мм-4).
3. Метод інтервалів (мм-5).</td><td rowspan="4">Вивчення ЗМ-1 слід починати з усвідомлення мети своєї подальшої діяльності.
Рекомендації про те, як працювати з даною літературою.
Короткий коментар або анотація до кожного джерела.
Оцінювання мікромодулів (бали):
мм-1 – мм-5 (відвідування лекцій): 30
мм-6: 20
мм-7: 20
мм-8: 30</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичне заняття 1. Основні види розв'язування раціональних рівнянь (мм-6).</td></tr>
<tr><td>Студент повинен знати:
- означення цілого раціонального рівняння;
- означення дробово-раціонального рівняння;
- означення квадратичного рівняння;
- означення біквадратного рівняння;
- основні методи розв'язання цілих раціональних рівнянь.</td><td>Студент повинен вміти:
- розрізняти види рівнянь;
- виконувати рівносильні перетворення над цілими раціональними рівняннями;
- використовувати основні методи розв'язання цілих раціональних рівнянь.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота за лекційним матеріалом ЗМ-1 (мм-7):
- означення цілого раціонального рівняння (4 б.)
- означення дробово-раціональні рівняння (4 б.)
- означення квадратичного рівняння (4 б.)</td></tr>
</table>

Навчальний текст	*Рекомендації щодо вивчення модуля*
- означення біквадратного рівняння (4 *б.*) - запишіть метод зведення дробово-раціонального рівняння до раціонального (4 *б.*) *Контрольна робота за ЗМ*-1 (мм-8). Розв'язати рівняння: 1. $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$ (5 *б.*) 2. $(8x^2 + 3x + 1)^2 = 32x^2 + 12x + 1$ (5 *б.*) 3. $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$ (5 *б.*) Розв'язати нерівності: 1. $(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) < 1680$ (5 *б.*) 2. $(x^2 - 2x)(2x - 2) - 9(2x - 2)/(x^2 - 2) \leq 0$ (5 *б.*) 3. $(x + 4)(3x - 2)^3 (5 - x)^5 (5x + 8)^4 < 0$ (5 *б.*)	

Кредитно-модульна система має свої переваги та недоліки.

Переваги для студентів:

- студенти точно знають, що вони повинні засвоїти, в якому об'ємі і що повинні уміти після вивчення модуля;
- студенти можуть самостійно планувати свій час, ефективно використовувати свої здібності;
- навчальний процес сконцентрований на студенті, а не на викладачі.

Переваги для викладачів*:*

- викладач має нагоду сконцентрувати свою увагу на індивідуальних проблемах студентів;
- викладач своєчасно ідентифікує проблеми в навчанні;
- викладач виконує творчу роботу, що полягає в стимулюванні мислення студентів, активізації їх уваги, мислення і пам'яті, активізації потрібних реакцій, наданні всілякої допомоги.

Основні труднощі *для студентів:*

- студенти повинні володіти самодисципліною, щоб досягти поставлених цілей;
- студенти повинні виконувати великий об'єм самостійної роботи;
- студенти самі несуть відповідальність за своє навчання.

Основні труднощі *для викладачів:*

- викладачам важко змінити звичний хід думок і дій, оскільки їм необхідно відмовитися від центральної ролі в навчальному процесі і стати помічником студента в досягненні поставлених цілей;
- викладачу необхідно змінити структуру і стиль своєї роботи для забезпечення активної, самостійної, цілеспрямованої і результативної роботи кожного студента [2].

Запропоновані рекомендації вивчення шкільного курсу математики мають орієнтовний характер і потребують вдосконалення в майбутньому, при напрацюванні відповідного досвіду.

Література:

1. Баранов С.П Болотина Л.Р. Педагогика: Учеб. пособие. – М: Просвещение, 1981. – 367 с.

2. Шамова Т.И. Самостоятельно, по индивидуализированной программе // Народное образование. – 1997. – № 9.

УЗАГАЛЬНЕННЯ Й СИСТЕМАТИЗАЦІЯ – ДЖЕРЕЛО ЗНАНЬ УЧНІВ

Н.В. Богатинська, С.Ф. Голубєва
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Математика, як і всяка наука, являючи собою систему понять і їхніх відносин, має свою специфіку. Тому в ній потрібна систематичність. Якщо випадає хоча б одна ланка, то стає незрозумілим все інше.

«Голова, наповнена уривчастими, нескладними знаннями, писав К.Д. Ушинський, – схожа на комору, у якій все безладно і де сам хазяїн нічого не відшукає; голова, де тільки система без знання, схожа на крамницю, у якій на всіх ящиках є напис, а в ящиках порожньо» [1, 355].

Послідовне здійснення систематизації – необхідна умова формування узагальнених знань, творчо застосовуваних у різних ситуаціях. Узагальнення знань, у свою чергу, припускає їхню систематизацію.

На жаль, аналіз уроків узагальнення й систематизації знань і виявлення труднощів, пов'язаних з їхнім проведенням, показує, що нерідко такі уроки перетворюються на уроки простого повторення. Зокрема, актуалізація опорних знань найчастіше перетворюється в просте відтворення матеріалу попереднього уроку безвідносно до того, як цей матеріал «працює» на тему й мету даного уроку. На таких уроках формуванню системи знань, розуміння учнями досліджуваного матеріалу належної уваги не приділяється.

Розглянемо роль узагальнення й систематизації у процесі навчання математики, виділимо етапи та виявимо доцільність їх використання.

При узагальненні понять встановлюються міжпредметні зв'язки, завдяки чому знання стають системними.

Узагальнення теми або розділу ставить школяра в умови, коли необхідно піднятися над вивченим матеріалом, оглянути його зверху, виділивши найголовніше. Одночасно йде активне повторення навчального матеріалу, знання поглиблюються, розширюються, доводяться до світоглядного рівня, виробляються інтелектуальні уміння й навички. Паралельно формуються практичні уміння й навички, тобто теоретичні знання застосовуються в прикладній діяльності учнів. Завдяки тому, що ці знання також узагальнюються й систематизуються, вдається значно розширити зону їх використання, збільшити обсяг вправ і підняти ефективність практичної роботи учнів.

Залежно від ролі й місця в навчальному процесі розрізняють наступні етапи узагальнення й систематизації знань.

1. Первинні узагальнення – найбільш елементарні узагальнення, що здійснюються під час сприйняття й усвідомлення навчального матеріалу. В результаті цього процесу в пам'яті учнів утворюються загальні уявлення про предмети та явища.

2. Локальні або понятійні узагальнення – здійснюються на уроці в

процесі роботи над засвоєнням нових понять (на етапі осмислення знань). Основним напрямком навчання з метою засвоєння понять є розкриття причинно-наслідкових й інших зв'язків у досліджуваних об'єктах, виявлення їхньої внутрішньої сутності.

3. Міжпонятійні узагальнення й систематизація – визначають у досліджуваних поняттях загальні й істотні ознаки і властивості. Такі узагальнення сприяють переходу від менш загальних до більше загальних понять, об'єднанню засвоєних понять у системи, розкриттю зв'язків і відносин між елементами даної системи, розміщенню їх у певному порядку й раціональній послідовності. Виділення даного виду узагальнення дає можливість вивчені на уроці поняття звести в єдину систему, передбачену програмою або вчителем, і веде до засвоєння відповідних теорій і найважливіших ідей. Цей вид узагальнення й систематизації здійснюється головним чином на спеціально виділеному етапі уроку.

4. Тематичні узагальнення й систематизації – забезпечують засвоєння цілої системи або циклу понять, досліджуваних протягом тривалого часу, що становлять зміст великих розділів програми.

5. Підсумкові узагальнення й систематизації служать для встановлення зв'язків і відносин між системами знань, засвоєними в процесі оволодіння цілим курсом, засвоєння цілісної системи знань в окремих галузях наук. Уроки підсумкових узагальнень і систематизації проводяться наприкінці вивчення того або іншого навчального курсу. Для систематизації відбираються основні положення, ідеї, теорії, що характеризують загальні закономірності історичного розвитку природи й суспільства.

6. Міжпредметні узагальнення й систематизації здійснюються по ряду споріднених предметів (наприклад, математика, фізика, хімія й ін.) на спеціальних уроках міжпредметного узагальнюючого повторення.

У процесі навчання математики в середній школі систематизація й узагальнення проводяться у двох напрямках: 1) узагальнення й систематизація всього шкільного курсу математики (курсу єдиної математики, геометрії, алгебри й початків аналізу) і 2) навчання учнів математики через узагальнення й систематизацію знань, умінь і навичок.

Багато методик базуються на тому, що узагальнення й систематизація знань учнів стають обов'язковим компонентом навчання.

Особлива увага приділяється формуванню системи знань, роз'ясненню учням ієрархічної структури основних закономірностей, понять, фактів, що становлять основне ядро певної частини програмного матеріалу даного класу. Швидкий темп проходження навчального матеріалу забезпечується тим, що спочатку учні добре й свідомо заучують ті означення, формули, правила, без яких не можливо успішне оволодіння яким-небудь предметом. Установивши (за допомогою вчителя) взаємозв'язок між ними, учні потім дуже швидко усвідомлюють і всі інші знання, що базуються на цих фундаментальних закономірностях.

Важливим є також те, що при повторному відтворенні тієї чи іншої навчальної інформації учні вчаться виділяти істотне, відкидаючи другорядне.

Узагальнення і систематизація здійснюється за наступною схемою.

Кожний рік в середній школі починається з повторення системи узагальнених і систематизованих за змістом навчального курсу знань умінь і навичок учнів за всі попередні роки навчання. Після достатнього повторення проводиться контроль і корекція знань, умінь і навичок з обов'язковим висновком не тільки необхідності, але й можливості поглиблення й подальшого розширення знань, умінь і навичок. Тільки після цього починається вивчення курсу даного року. На першому уроці узагальнюються й систематизуються знання, уміння й навички отримані на цьому уроці. На другому уроці узагальнюються й систематизуються знання, уміння й навички двох уроків і т.д. Кожну тему (поняття, змістову лінію) узагальнюємо й систематизуємо на спеціальних уроках.

Таким чином, від узагальнення й систематизації на кожному уроці переходимо до узагальнення відповідної теми в цілому, а від узагальнення й систематизації однієї, двох, трьох і решти тем – до узагальнення й систематизації розділу й змістової лінії. І щоразу узагальнення й систематизація проводяться з обов'язковим виділенням й активізацією головних, основних знань, навичок й умінь учнів.

Закінчується кожний рік узагальненням і систематизацією знань, умінь і навичок учнів у межах даного року й усіх попередніх років навчання.

У подібних методиках курс математики узагальнюється за принципом понятійних, тематичних і змістовних блоків знань. Для простоти їх оформлюють у вигляді спеціальних, так званих «шпаргалок», тобто окремих аркушів паперу з короткими символічними записами й рисунками, що відбивають істотні зв'язки в тому або іншому досліджуваному матеріалі. Учні зберігають їх у зошитах і за необхідності завжди можуть повернутись до вже вивченого матеріалу, не звертаючись до підручника.

«Шпаргалки», що видозмінюються залежно від вікової групи, забезпечують поетапне формування у дітей «математичних» розумових дій на основі поступового перекодування з побутової мови на мову математики.

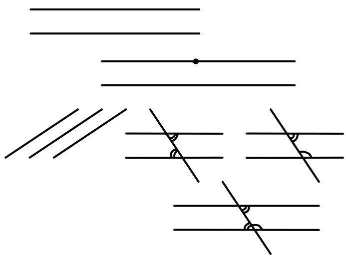
Приклад «шпаргалки» з теми «Паралельність та перпендикулярність в геометрії» наведений у додатку до статті.

Література:

1. Ушинський К.Д. О первоначальном преподавании русского языка // Собр. соч.: В II т. – М.; Л.: Изд-во АПН, 1949. – Т.5. – С. 333-356.
2. Иржавцева В.П., Федченко Л.Я. Систематизация и обобщение знаний учащихся в процессе изучения математики: Пособие для учителя / Под. ред. Н.Л. Коломинского. – К.: Рад. шк., 1989. – 208 с.
3. Погорелов А.В. Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. сред. шк. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1992. – 383 с.

Додаток. **Паралельність та перпендикулярність в геометрії**

<u>На площині</u>

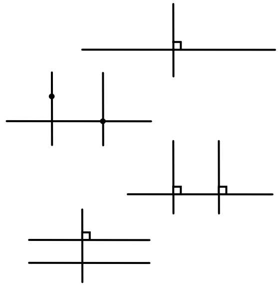


Означення

Існування

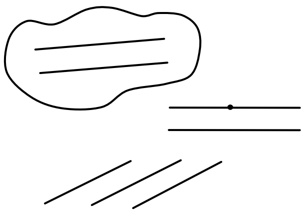
Ознаки

Властивості



<u>У просторі</u>

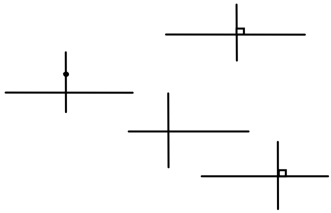
<u>Прямі</u>



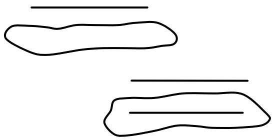
Означення

Існування

Ознаки



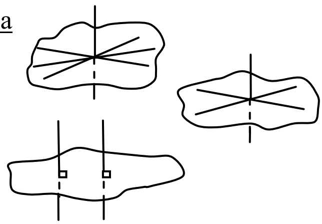
<u>Пряма та площина</u>



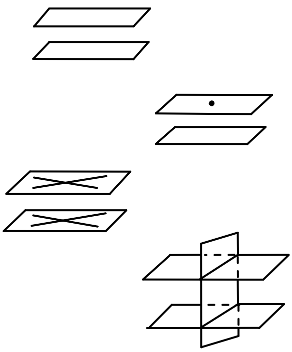
Означення

Ознаки

Властивості



<u>Площини</u>

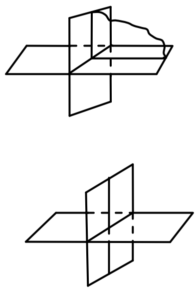


Означення

Існування

Ознаки

Властивості



ДЕЯКІ АСПЕКТИ ПРОБЛЕМНОГО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

О.В. Віхрова, А.М. Легостаєва
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Математика, як навчальний предмет, відіграє одну з пріоритетних ролей у справі формування особистості, оскільки має значний освітній та розвиваючий потенціал. Провідним завданням математичної освіти є інтелектуальний розвиток учнів, формування якостей мислення, необхідних людині для повноцінного життя в суспільстві. Математика виступає як предмет загальної освіти, який сприяє формуванню у молодої людини здібностей, необхідних для вільної суспільної адаптації. Відомо, що при вивченні математики учні повинні засвоювати не лише зміст знань, а й способи їх отримання. Ефективним засобом активізації пізнавальної діяльності учнів є проблемний підхід до навчання. Він сприяє інтелектуальному розвитку учнів, формує їхній світогляд, впливає на становлення морально-емоційних якостей особистості.

Проблемно-пошукове навчання математики зближує процес навчання в школі з науковим пізнанням, адже на думку психологів “результат пізнання не зможе взагалі бути “відкритим”, якщо учень не повторює “процес народження” цього результату” [1, 27].

З точки зору зародження, розвитку і становлення математичного знання, математична діяльність не зводиться лише до відтворення отриманих раніше знань, а включає в себе процес пошуку і відкриття нових фактів та закономірностей. Тобто виявлення специфіки структури і способів математичної діяльності, складу пізнавальних засобів, які повинні засвоювати школярі необхідно здійснювати з позицій методології наукового пошуку в математиці. Процес пізнання в математиці проходить різними шляхами. Той, який важливий з точки зору організації пізнання математики школярами в рамках проблемного навчання, можна представити таким чином:

Накопичення фактів ⇒ Висування гіпотез ⇒ Перевірка істинності доведенням ⇒ Побудова теорії ⇒ Вихід у практику

Отже, процес проблемного вивчення певного математичного матеріалу слід організовувати у такий спосіб, щоб відкриття учнями нових знань в певній мірі моделювало зазначену схему процесу пізнання. Це відбувається, якщо учні, ознайомлюючись з новим навчальним матеріалом, не отримують від учителя готових знань. Педагог лише створює проблемну ситуацію та надає фактичний матеріал, необхідний для її розв’язання. Вирішуючи питання, які виникають у зв’язку зі змістом цієї ситуації та використовуючи наведені вчителем відомості, школярі мають самостійно “відкрити” знання, заплановані навчальною програмою.

При створенні на уроці проблемних ситуацій можуть бути використані такі особливі методичні прийоми:

– вчитель підводить школярів до суперечності і пропонує їм самим знайти спосіб її подолання;
– зіштовхує суперечності практичної діяльності;
– викладає різні точки зору на одне й те саме питання;
– пропонує класу розглянути явище з різних позицій;
– спонукає учнів робити порівняння, узагальнення, висновки з ситуації, зіставляти факти;
– ставить конкретні питання (на узагальнення, обгрунтовування, конкретизацію, логіку міркування;
– визначає проблемні теоретичні і практичні завдання;
– ставить проблемні задачі (з недостатніми або надмірними початковими даними; з невизначеністю в постановці питання, із суперечливими даними, з явно допущеними помилками, з обмеженим часом розв'язування, на подолання психічної інерції й іншим).

Рівень інтелектуальної активності школярів у процесі проблемного засвоєння знань визначається рівнем проблемності. Проблемність навчання – це ефективний спосіб забезпечення активного учіння, що передбачає продуктивне включення школярів у процес навчального пізнання, прискорений розвиток їх розумових здібностей. Психологи вважають, що проблемність виражає не лише суб'єктивний психічний стан того, хто пізнає, "вона закономірно випливає з об'єктивного відношення пізнання до буття ... наявність проблем, проблемних ситуацій об'єктивно обумовлена нескінченністю існуючого і взаємозв'язком всіх явищ у світі" [2, 56]. Взаємодоповнюючи научіння, проблемність навчання є одним з основних показників ефективного процесу.

Отже, використання проблемних технологій в процесі навчання математики зумовлено психологічними закономірностями процесу пізнання. Для реалізації таких технологій в навчальному процесі необхідна значна підготовча робота вчителя. Вона включає:

– відбір найактуальніших, сутнісних задач;
– визначення особливостей проблемного навчання в різних видах учбової роботи;
– побудова оптимальної системи проблемного навчання, створення навчальних і методичних посібників і керівництва;
– особливий підхід і майстерність вчителя здатна викликати активну пізнавальну діяльність дитини.

Безперечно весь програмовій матеріал практично не можливо засвоювати шляхом розв'язання проблем. Використання проблемного підходу до навчання математики залежить від багатьох чинників. Проблемне навчання доцільно застосовувати, якщо:

1) зміст учбового матеріалу містить причинно-наслідкові зв'язки і залежність, спрямовану на формування понять, законів, теорій;

2) учні підготовлені до проблемного вивчення теми;
3) учні розв’язують задачі на розвиток самостійності мислення, формування дослідницьких умінь, творчого підходу до справи;
4) у вчителя є час для проблемного вивчення теми;
5) вчитель добре володіє відповідними методами навчання.

При цьому загальна схема організації уроку математики в рамках реалізації проблемного підходу до вивчення навчального матеріалу може включати наступні етапи:

1. Створення учбової проблемної ситуації (реальної або формалізованої) з метою створення в учнів інтересу до даної учбової проблеми і мотивувати доцільність її розгляду.
2. Постановка пізнавальної задачі (або задач), що виникає з даної проблемної ситуації, чітке її формулювання.
3. Вивчення різних умов, що характеризують поставлену задачу, обговорення можливостей моделювання її умови або заміни наявної моделі більш простою і наочною.
4. Процес розв’язування поставленої задачі (обговорення задачі в цілому і деталях, виявлення істотного і неістотного в її умовах, орієнтація в можливих труднощах при її розв’язанні, співвідношення даної задачі з наявними знаннями і досвідом. Розробка можливих напрямів рішень основної задачі, відбір, відтворення відомих теоретичних положень, що можуть бути використані у вказаному напрямі рішення задачі, порівняльна оцінка напряму розв’язання і вибір одного з них, розробка плану рішення задачі у вибраному напрямі і його реалізація в цілому, детальна реалізація плану рішення задачі і обґрунтовування правильності всіх кроків виникаючого рішення задачі).
5. Дослідження отриманого розв’язку задачі, обговорення його результатів, виявлення нового знання.
6. Застосування нового знання за допомогою розв’язування спеціально підібраних учбових задач для його засвоєння.
7. Обговорення можливих розширень і узагальнень результатів розв’язання задачі в рамках початкової проблемної ситуації.
8. Вивчення отриманого розв’язку задачі і пошук інших більш економічних або більш витончених способів її розв’язання.
9. Підведення підсумків виконаної роботи, виявлення істотного в змісті, способах розв’язування, результатах, обговорення можливих перспектив застосування нових знань і досвіду.

Даний схематичний план організації проблемного уроку математики динамічний (залежно від конкретної характеристики тієї або іншої учбової проблеми). Він виконується повністю або частково, окремі пункти плану можуть об’єднуватися тощо.

Ми пропонуємо декілька проблемних ситуацій, які можна створити на уроках під час викладання матеріалу з геометрії.

1. «*Теорема про суму кутів трикутника*» (7 клас)

Використовуючи проблемну ситуацію, можна легко привести учнів до трьох різних способів доведення теореми про суму кутів трикутника (геометрія-7 клас), що додасть уроку і знанням учнів істотно нову якість.

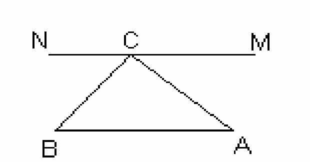
ПРОБЛЕМА 1. *Як знайти суму кутів трикутника*?

Природний імпульс учнів – заміряти кути і скласти їхні градусні міри.

ПРОБЛЕМА 2.

Як, не вимірюючи градусну міру кутів, довести, що їхня сума рівна 180°?

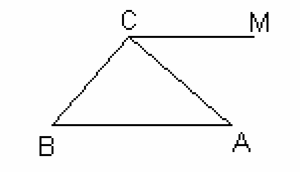
На дошці зображено малюнок.



I. Відкладемо кути A і B від сторін кута C “по різні сторони від нього”. Отримаємо кут MCN. Потрібно довести, що він рівний 180º, тобто є розгорнутим.

З рівності внутрішніх різносторонніх кутів CBA і NCB, кутів CAB і MCA слідує паралельність прямих CM і AB; CN і AB, посилаючись на аксіому паралельних приходимо до висновку, що прямі CM і CN співпадають. Отже, кут MCN рівний 180º.

II. В процесі доведення помічаємо, що кут B можна було не відкладати, він “сам відклався”: CM||AB, тому кути NCB і CBA рівні, як внутрішні різносторонні. Звідси і слідує кінцевий висновок.



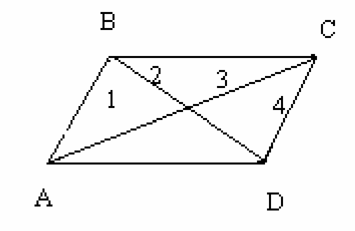
III. Нарешті, кут NCB можна навіть не розглядати. Відклавши кут A і довівши, що CM||AB, помічаємо, що A + B + C = MCB + B = 180º, як сума внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих CM і AB і січною CB. Розв’язавши дану проблему, учні приходять до самостійного доведення теореми.

Вказані способи доведення мають і інші методичні переваги. Так, I доказ виявляє провідну роль аксіоми паралельних в доведенні теореми про суму кутів трикутника. В доказі II, використовуючи ознаку паралельних прямих і властивість паралельних прямих, ми привчаємо учнів розрізняти пряму і обернену теореми.

Геометричні фігури займають центральне місце в шкільному курсі. Проте традиційна схема вивчення – означення фігури, формулювання і доведення її властивостей, – що проводиться, як правило, вчителем, залишає для учнів лише репродуктивну діяльність. Але існує більш ефективна методика, що передбачає залучення школярів до побудови “маленьких теорій” геометричних фігур через проблемні ситуації, які їм доводиться розв’язувати самим. Подібні маленькі дослідження включають сукупність задач типу “Що з чого слідує?”, пов’язаних з однією і тією ж геометричною фігурою. Вони орієнтують на глибоке вивчення фігури, розкривають можливість різних способів її означення (задання, описання).

2. «*Властивості ромба*» (8 клас)

Розглянемо задачу математичного описання зображеної на даному малюнку ситуації.



Питання: Записати за допомогою символів всі дані про чотирикутник ABCD, зображений на малюнку.

В результаті колективної праці в учнів з’являється безліч тверджень:

1. ABCD – паралелограм;
2. AB=BC;
3. AC=BD;
4. 1 = 2;

Ці твердження безпосередньо підказані малюнком. Питання: Що виходить з даних пропозицій?

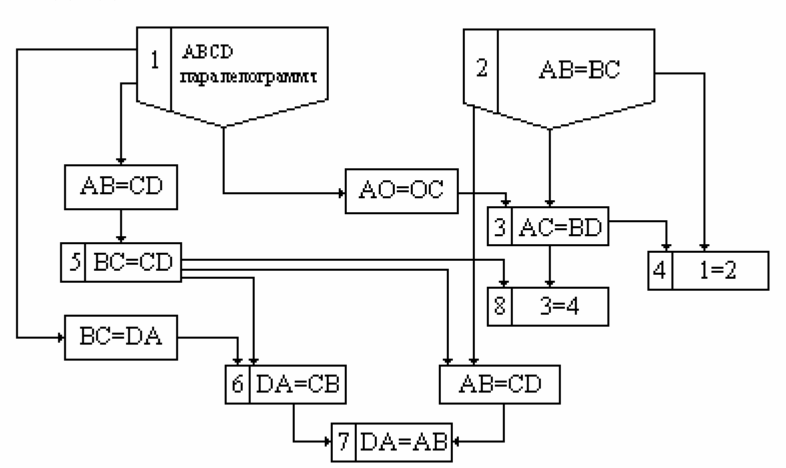
1. BC=CD;
2. CD=DA;
3. DA=AB;
4. 3 = 4.

А ці твердження – результат, що виникає на базі вже існуючих в учнів знань про паралелограм. Другий етап – “Що з цього виходить”?

Ставиться проблема – виділити із сукупності (1)–(8) мінімальне число тверджень як початкових, з яких виходила б уся решта тверджень. При цьому учні залучаються до активного пошуку можливих поєднань початкових тверджень, тобто до діяльності, в якійсь мірі схожій з діяльністю з аксіоматики. Виявляються, зокрема, такі підмножини початкових тверджень:

а) {(1); (2)}; б) {(1); (3)}; в) {(1); (4)};

Будується структурна схема доказу того, що з (1) і (2) слідують твердження (3)–(8).



При цьому виявляються і різні способи визначення ромба. Аналогічно можна будувати вивчення й інших видів чотирикутників. При такому підході до викладення навчального матеріалу учні не просто механічно зазубрюють висновки відповідних операцій, а осягають суть даної проблеми.

Безумовно, реалізація проблемного підходу в процесі вивчення математики вимагає від учителя великих зусиль і великої кропіткої роботи. Але проблемне навчання порівняно з традиційним має суттєві переваги. Воно сприяє формуванню в учнів готовності до творчої діяльності, забезпечує високий розвиток пізнавальної активності, усвідомленості знань, попереджає появу формалізму. Проблемне навчання забезпечує більш міцне засвоєння матеріалу; розвиває аналітичне мислення школярів; орієнтує на комплексне використовування знань. Це у сукупності забезпечує засвоєння знань на більш високому рівні абстрактності.

Література:

1. Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении (логико-психологические проблемы построения учебных предметов). – М.: Педагогика; 1972. – 325 с.
2. Рубинштейн С.Л. Проблемы общей психологии. – М.: Педагогика, 1976. – 390 с.
3. Махмутов М.И. Проблемное обучение. – М., 1975.
4. Рубинштейн С.Л. О мышлении и путях его исследования. – М., Изд-во АН СССР, 1958.
5. Фурман А.В. Проблемні ситуації в навчанні. – К.: Рад. школа, 1991. – 170 с.

ВИКОРИСТАННЯ ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

О.С. Прудкий[α], З.Ю. Філер[β]
м. Кіровоград, Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка
[α]alex_pruds@mail.ru
[β]Filer@kw.ukrtel.net

Проблема міжпредметних зв'язків у навчально-виховному процесі сучасної школи є дуже актуальною – від її розв'язання залежить підвищення ефективності навчання й виховання учнів.

У школі учень має засвоїти систему знань не тільки з даного предмета, а й пізнати його зв'язки з іншими. При цьому міжпредметні зв'язки повинні відбивати об'єктивно існуючі зв'язки між науками про природу й суспільство.

Зв'язок математики з фізикою прослідковується з початкових класів і до 11 класу, де розв'язується задачі по знаходженню довжини пройденого шляху, швидкості рівномірного руху, нерівномірного руху, розглядаються задачі радіоактивного розпаду та ін.

На жаль, в шкільній практиці взаємодію фізики й математики можна побачити не часто. Предметний егоїзм, недостатня кваліфікація викладачів і увага, яка приділяється інтеграції навчання в педвузі, не сприяють створенню навіть у вчителів спеціальностей «Математика та фізика» і «Фізика та математика» відповідних умінь і навичок. Тим більше це відноситься до майбутніх учителів математики й інформатики, трудового навчання та ін. дисциплін. На уроках математики розглядається велике число вправ і «прикладів» на розв'язання рівнянь і нерівностей без мотивації їх необхідності і дуже мало розв'язується змістовних задач, зокрема, із фізичним змістом, які моделюють реальну дійсність, учать свідомому застосуванню математики. Спостереження авторів та їх колег під час педагогічної практики, анкетування студентів-практикантів, свідчать про недостатнє використовування фізики при вивченні математики в школі.

Принцип історизму у викладанні математики, показ реальних джерел абстрактних математичних понять заохочують вчителя використовувати прості фізичні моделі для побудови на уроці "нового" математичного апарату; аналіз математичних конструкцій та властивостей доповнюється, а інколи й замінюються їх фізичним тлумаченням.

Задачі на уроці пропонується давати з фізико-технічної тематики, що сприятиме не тільки підвищенню інтересу учнів й кращому засвоєнню математики та фізики, а й створенню в них навичок побудови математичних моделей явищ реального світу.

Зменшення кількості годин на вивчення точних дисциплін потребує не спрощення вимог при перевірці знань та початкових умінь студентів, а глибокої інтеграції цих дисциплін. Розв’язування більшої кількості фізичних задач на уроках математики, на жаль, утрудняється як недостатньою кількістю годин на вивчення математики, так і незначною кількістю задач у підручниках та збірниках задач. Аналіз підручників із математики показує, що вони містять незначну кількість таких задач, більшість задач містить побутово-економічний характер, що теж необхідно, але економіка вивчається лише у профільних класах старшої школи.

Гонитва за кількістю розглянутих вправ, небажання і неготовність вчителів доводити рішення до кінця (до числа), використовуючи не тільки «ручні» обчислення, а й таблиці, калькулятор, комп’ютер, ведуть до формалізму у викладанні математики, невмінню оцінити й відчути результат. При використовуванні тригонометрії вчителя й підручники вибирають дані так, щоб одержати кути, для яких заучуються значення функцій (0^o, 30^o, 45^o, 60^o і 90^o), тоді як для таких кутів тригонометрія не потрібна зовсім: достатньо знати теорему Піфагора та той факт, що катет проти кута в 30^o рівний половині гіпотенузи. Для рівняння $3^x=5$ задовольняються відповіддю $x=\log_3 5$, хоча це лише інший спосіб запису умови, не доводячи результат хоча б до наближеного значення, яке можна знайти, логарифмуючи дане рівняння за основою 10. Правда, більшість учнів не пам’ятає правил логарифмування, не знає понять характеристики й мантиси логарифма, не вміє користуватися таблицями (навіть Брадіса). Виник черговий парадокс: чим більше в учнів можливостей користування обчислювальною технікою, тим менше вони обчислюють взагалі. Тим часом реальним стає комплексний підхід до вивчення фізико-математичних дисциплін – від постановки технічних або «природничих» задач, до побудови їх математичних моделей і дослідження цих моделей за допомогою ЕОМ з аналізом і тлумаченням отриманих результатів у термінах поставленої задачі.

При вивченні застосування похідної у 11 класі, а саме екстремумів функції, можна використовувати задачі з фізики про кидання м’яча під кутом до горизонту, де потрібно визначити максимальну висоту, якої досягне м’яч, та час його польоту. Для розв’язання цієї задачі за допомогою ЕОМ можна використати програму, яка нещодавно з’явилася у мережі Інтернет. Це програма «Agrafer» [2], де можна дуже просто записати умову, побачити на екрані траєкторію польоту та все, що потрібно було знайти, записавши тільки початкові умови. Цю ж задачу варто застосовувати при вивченні параболи у курсі алгебри 9 класу та при вивченні похідної у 11 класі.

Після цього ще залишається важлива задача тлумачення одержаних результатів у світлі поставленої змістовно задачі. Такий підхід сприятиме свідомому вивченню відповідних дисциплін. Інтернет допоможе тут пошуку необхідної інформації, а комп’ютер – представленню залежностей і результату в зручній наочній формі. У разі потреби може бути проведений математичний «експеримент» – варіювання параметрів і даних, вивчення характеру змін результату при зміні вхідної інформації.

Вступ до Болонського процесу дехто розуміє як спрямування контролю знань учнів та студентів до простих тестових завдань, які дуже часто містять тільки перевірку теоретичної частини матеріалу, або задачу на знаходження (угадування) множника, або дільника, веде до примітивізації.

Відсутність у навчальних програмах минулих років [3] та сучасному підручнику з алгебри за редакцією Г.П. Бевза [1] такої теми, як стандартний вигляд числа, призводить до того, що вчителю фізики потрібно самому вводити цю «нефізичну» тему. Самі назви дольних та кратних одиниць органічно пов'язані з таким записом величин (мм – міліметр – 0,001 метра=10^{-3} м; МВт=1000000 Вт=10^{6} Вт тощо). Тема є дуже важливою, особливо при вивченні таких розділів, як молекулярна теорія, закон всесвітнього тяжіння та квантова фізика у старшій школі, тобто при вивченні мікро та макросвітів. Саме на уроках математики потрібно формувати ґрунтовні уміння оперувати числами виду $3 \cdot 10^{8}$; $9{,}61 \cdot 10^{-34}$ та ін. Розуміння того, що числа типу 0,02; 0,003; 0,000000017 можна записувати у вигляді добутку $2 \cdot 10^{-2}$, $3 \cdot 10^{-3}$, $17 \cdot 10^{-9}$ важливе й корисне.

Догматичне введення нових понять математики ігнорує «ноогенетичний» закон, відповідно до якого кожна дитина у своєму розумовому розвитку повинна пройти ті ж шляхи, якими пройшло людство. Більшість же математичних понять виникла як абстракція від задач і понять фізики. Такі можливості дає вже початкова школа. Прості задачі рівномірного руху зрозумілі сучасним дітям ще з дошкільного віку, допомагають потім уведенню таких абстрактних понять, як миттєва швидкість, прискорення, сила струму, границя послідовності та функції. Історія науки зберегла апорії Зенона, які свідчили про суперечність понять руху і подільності відрізків, нескінченності цього процесу. Безперервність руху допомагає ввести поняття границі функції при прагненні аргументу x до заданого значення a. Дискретна структура матерії допомагає з'ясувати складну побудову дискретних множин, з'ясувати поняття їх потужності і міри.

Відомо, що для відкриттів І. Ньютона 1665–67 рр. механіка, задачі руху були відправними при побудові нових математичних понять. Навіть назви введених ним нових конструкцій: флюента – для змінних і флюксія – для швидкостей – похідних мають «гідравлічне» походження. Та і видана в 1687 р. його грандіозна праця «Математичні засади натуральної філософії» має характерну назву. Пошук швидкості по даному закону руху веде до поняття похідної, а зворотна задача відшукання пройденого шляху по заданому закону зміни швидкості – до поняття інтеграла. Спідометр і лічильник були першими інтеграторами. Старший з авторів, який служив у Кронштадті штурманським електриком, ознайомився з різними конструкціями лагів, які і виконують цю функцію – визначають пройдений шлях по швидкісному потоку води.

Задача про рівноприскорений рух тіла допомагає формуванню поняття многочлена Тейлора. Використовування поняття сталої різкості r (похідної прискорення) дає многочлен Тейлора 3-ого ступеня $s=s_0+v_0t+a_0t^2/2+rt^3/3!$. Коливальні процеси допомагають при вивченні тригонометрії.

Уся теорія диференціальних рівнянь тісно пов’язана з механікою і фізикою. Ми починаємо із задачі про радіоактивний розпад, де природно виникає поняття про початкову умову, переходячи потім до задач динаміки матеріальної точки і системи таких точок. Побудова рівнянь руху за допомогою лагранжевого формалізму сприяє засвоєнню поняття квадратичної форми, частинних похідних по координатах та повних похідних (по часу). Для лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами неважко показати механічні й електромагнітні моделі, дати фізичне трактування всіх випадків коренів характеристичного рівняння і поняття резонансу. Для систем з 2 ступенями вільності можна показати поняття антирезонансу, вперше використаного Фрамом для гасіння коливань корабля на хвилюванні. За звичаєм вивчають тільки поняття резонансу, хоча для системи з двома ступенями вільності поняття антирезонансу досліджувати легше ніж резонансу (особливо при нехтуванні опорами).

Задачами з практичним змістом можуть бути:

1. Задачі статики на знаходження сил – складових відомої суми. Це веде до розкладання вектора по даному базису й задачі на розв’язання системи алгебраїчних рівнянь для його координат.

2. Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, веде до параметричного завдання функції $y(x)$, де x – горизонтальне, а y – вертикальне переміщення, як функції часу, який відіграє роль параметру. Ця задача корисна при вивченні поняття екстремуму функції $y(x)$ та $y(t)$. При врахуванні опору повітря необхідно перейти до системи диференціальних рівнянь.

3. Положення і рух тіла на похилій площині веде до тригонометричних рівнянь і нерівностей та диференціального рівняння.

4. Тригонометричні функції $\sin\alpha$ та $\cos\alpha$ легко вводити при вивченні руху матеріальної точки по колу. Очевидною стає їх періодичність, інтервали монотонності, екстремуми, знаки у різних квадрантах тощо.

5. Задача про роботу по переміщенню тіла під дією сталої сили, направленої під кутом до переміщення, веде до поняття *скалярного* добутку векторів. Більшість властивостей скалярного добутку стає очевидною з точки зору законів фізики, зокрема, розподільний закон для скалярного добутку суми векторів на третій вектор.

6. Другий закон динаміки Ньютона дозволяє ввести поняття добутку вектора – сили на скаляр – масу. Його запис у формі $\boldsymbol{F}=d(m\boldsymbol{v})/dt$ дозволяє розглядати задачі динаміки тіла змінної маси.

7. Поняття моменту сили, прикладеної до тіла, яке закріплено у сферичному шарнірі, приводить до абстрактного *векторного* добутку векторів. Закон незалежності дії сил пояснює розподільний закон добутку суми двох векторів на третій.

8. Пошук часу рівноприскореного руху за даними відстанню, початковою швидкістю та прискоренням, веде до квадратного рівняння. Додатній корінь відповідає майбутньому, від'ємний – минулому.

9. Знаходження максимальної амплітуди й відповідної частоти вимушених коливань веде до умов екстремуму для частоти.

10. Задача про роботу змінної по модулю та напрямку сили на криволінійному шляху веде до поняття криволінійного інтеграла по координатах. Задача про масу криволінійного неоднорідного стержня веде до криволінійного інтеграла першого роду (по довжині дуги).

Кількість таких задач можна збільшувати й збільшувати. Багато з них дають збірники задач із фізики. Всі ці задачі можна використовувати і на заняттях із математики, підвищуючи зацікавленість учнів у вивченні математики.

Висновки:

1. Фізичні задачі та поняття можуть стати базою при введенні нових абстрактних математичних понять, відповідних теорем та формул.
2. Бажано при розв'язанні математичних задач давати їх умовам та отриманим результатам фізичне тлумачення.
3. При різкому дефіциті аудиторного часу можна в деяких випадках обмежитися фізичною аналогією.
4. Можна розглядати задачі, які містять параметр, отримуючи результати для різних значень параметра. Реалізуючи ідеологію математичного експерименту, бажано вивчити залежність шуканої величини від цього параметру. При необхідності можна знайти рівняння регресії та графік, користуючись, наприклад, електронними таблицями.

Література:

1. Бевз Г.П. Підручник з алгебри 7-9 кл. – К.: 2002. – 303 с.
2. Использование информационных технологий на уроках математики и физики в старшей школе при построении графиков различных функций // В.Н.Томашов, Вопросы интернет образования, №5. www.serpik.com/agrafer
3. Програма для загальноосв. навч. закладів. Математика. 5–11 кл.; Математика. 8–11 кл. / Прогр. для кл. з поглибл. вивч. математ / Математика. 10–11 кл. / Прогр. для гуманіт. напрямку./ – К.: Шк. світ, 2001. – 110 с.

УЗАГАЛЬНЕННЯ ПЕРЕХОДУ ДО ДВОЇСТИХ ЗАДАЧ В ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

С.Д. Титов
м. Миколаїв, Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова
ss1@mksat.net

В багатьох розділах математики (теорія множин, предикатів, висловлювань, алгебра подій, геометрія тощо) існують так звані теореми двоїстості. За певними правилами прямій теоремі ставиться у відповідність двоїста. У класичному розділі лінійного програмування (ЛП) відома така пара екстремальних задач. Пов'язано це з особливістю опуклих множин – замкнені опуклі множини у векторному просторі можливо описувати двояко, як у вихідному R^n, так і у спряженому R^m просторі. Існуючи схеми переходу від прямої задачі I лінійного програмування до двоїстої II мають, як правило змістовно економічний характер [1–4] і тому не можуть задовольняти таку точну науку, як математика. Отримання загального алгоритму переходу та строге доведення цих правил є головна ціль наведеної роботи.

Означення двоїстості для стандартної форми задачі ЛП

Означення

Нехай маємо пряму задачу лінійного програмування у стандартній формі

$$W_I = CX - max,$$

I: $AX \le B,$

$$X \ge 0.$$

Двоїстою до неї задачею прийнято називати задачу вигляду:

$$W_{II} = Y\,B - min,$$

II: $Y\,A \ge C^T,$

$$Y \ge 0.$$

Надалі будуть застосовуватися такі позначення: $\boldsymbol{c}$=C=$\{c_1, c_2, ..., c_n\} \in R^n$, $\boldsymbol{y}$=Y=$\{y_1, y_2, ..., y_m\} \in R^m$, $\boldsymbol{a}^j$=$\{a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn}\} \in R^n$, $j \in \{1, 2, ..., m\}$,

$$\boldsymbol{x} = X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = C^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ . \\ . \\ a_{mi} \end{bmatrix},\ i \in \{1, 2, ..., n\},$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{bmatrix}=\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n\}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^1 \\ \boldsymbol{a}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{a}^m \end{bmatrix}=\{a_{ij}\}\in R^m$$

З означення двоїстої задачі випливає декілька очевидних фактів:

– екстремальні властивості цільових функцій протилежні за смислом: пряма задача ЛП на максимум, а двоїста на мінімум;

– система обмежень прямої задачі складається тільки з нерівностей, з'єднаних відношенням ≤ – для задачі на максимум обов'язковою є вимога наявності тільки обмежень-нерівностей вигляду ≤;

– коефіцієнти цільової функції двоїстої задачі є компонентами вектора правих частин системи обмежень прямої задачі ЛП;

– матриця системи обмежень двоїстої задачі є транспонованою по відношенню до прямої. Це дійсно так, оскільки $YA=A^TY^T$;

– праві частини системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнтами цільової функції прямої задачі;

– кожному обмеженню-нерівності прямої задачі ставиться у відповідність невід'ємна двоїста невідома: $(\boldsymbol{a}_j\mathbf{X}) \le b_j \xrightarrow{def} y_j \ge 0$;

– кожній невід'ємній невідомій прямої задачі ЛП ставиться у відповідність обмеження-нерівність двоїстої: $x_j \ge 0 \xrightarrow{def} (\mathbf{Y}\boldsymbol{a}_i) \ge c_i$.

Підтвердимо спряженість або двоїстість наведеного означення – застосування операції отримання двоїстої задачі від двоїстої призводить до прямої задачі.

$$\mathrm{I} \xrightarrow{def\ Двоїстість} \mathrm{II} \xrightarrow{def\ \ Двоїстість} \mathrm{I}$$

Представимо двоїсту задачу у вигляді задачі на максимум та, застосовуючи правила переходу й еквівалентні перетворення, доводимо двоїстість.

$$\begin{matrix} W_{II}=-Y\,B-max, & & W_{II}=-\left(C^T\right)^T X-min, & & W_I=C\,X-max, \\ -Y\,A\le -C^T, & \xrightarrow{def\ Двоїстість} & -AX\le -B, & \Leftrightarrow & A\,X\le B, \\ Y\ge 0. & & X\ge 0. & & X\ge 0, \end{matrix} \quad .$$

Таким чином, головною ознакою двоїстості задач в ЛП є можливість зведення їх одна до одної за означенням.

Розглянемо пару задач ЛП та доведемо їх спряженість.

$$\mathrm{I}:\ \begin{matrix} W_I=C\,X-max, \\ A\,X=B, \end{matrix} \xrightarrow{def\ Двоїстість} \mathrm{II}:\ \begin{matrix} W_I=YB-min, \\ YA=C^T, \end{matrix}$$

Доведення.

$$
\text{I:}\quad \begin{array}{l} W_I = C\,X - max, \\ A\,X = B, \end{array} \xrightarrow{X=X''-X',\,X''\geq 0,\,X'\geq 0} \begin{array}{l} W_I = C\,(X''-X') - max, \\ \begin{cases} A(X''-X') \leq B, \\ -A(X''-X') \leq -B, \end{cases} \\ X'' \geq 0, X' \geq 0, \end{array}
$$

$$
\xrightarrow{def\ Двоїстість} \text{II:}\quad \begin{array}{l} W_{II} = (Y''-Y')B - min, \\ \begin{cases} (Y''-Y')A \geq C^T, \\ (Y''-Y')(-A) \geq -C^T, \end{cases} \\ Y'' \geq 0, Y' \geq 0, \end{array} \Leftrightarrow \text{II:}\quad \begin{array}{l} W_I = YB - min, \\ YA = C^T. \end{array}
$$

Доведена двоїстість задач дозволяє сформулювати наслідки з означення двоїстості:

1) кожному обмеженню-рівнянню прямої задачі ставиться у відповідність довільна за знаком двоїста невідома; I: $AX=B$, $\xrightarrow{def\ Двоїстість}$ II: Y.

2) довільній за знаком невідомій прямої задачі ставиться у відповідність обмеження-рівняння двоїстої. I: X $\xrightarrow{def\ Двоїстість}$ II: $YA=B$.

Застосовуючи аналогічні ідеї, неважко довести спряженість основних форм пар двоїстих задач:

$$
\text{I:}\quad \begin{array}{l} W_I = C\,X - max, \\ A\,X = B, \end{array} \xrightarrow{def\ Двоїстість} \text{II:}\quad \begin{array}{l} W_{II} = YB - min, \\ YA = C^T, \\ Y \geq 0. \end{array}
$$

$$
\text{I:}\quad \begin{array}{l} W_I = C\,X - max, \\ A\,X = B, \\ X \geq 0, \end{array} \xrightarrow{def\ Двоїстість} \text{II:}\quad \begin{array}{l} W_{II} = YB - min, \\ YA \geq C^T, \end{array}
$$

$$
\text{I:}\quad \begin{array}{l} W_I = C\,X - min, \\ A\,X \geq B, \end{array} \xrightarrow{def\ Двоїстість} \text{II:}\quad \begin{array}{l} W_{II} = YB - max, \\ YA = C^T, \\ Y \geq 0. \end{array}
$$

Означення двоїстості для загальної форми задачі ЛП

Наведені пари двоїстих задач дозволяють виконати узагальнення означення двоїстості в задачах лінійного програмування на випадок прямої задачі в загальній формі.

Означення

Нехай маємо загальну задачу лінійного програмування

$$
\text{I:}\quad \begin{array}{l} W_I = C\,X - max, \\ \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \leq \\ = \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \right., \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\ldots,l \end{array}
$$

або із застосуванням символів сумування

$$W_I = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - max,$$

$$\text{I:} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,2,3,\ldots,k, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = k+1, k+2, k+3, \ldots, m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1,2,\ldots,l$$

Двоїстою до неї будемо називати задачу вигляду

$$W_{II} = Y\,B - min,$$

$$\text{II:} \left\{ \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \ge \\ = \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \right.$$

$$y_i \ge 0, \qquad i = 1,2,\ldots,k$$

або із застосуванням символів сумування

$$W_{II} = \sum_{i=1}^{m} b_i\, y_i - min,$$

$$\text{II:} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} y_i\, a_{ij} \ge c_j, \quad j = 1,2,3,\ldots,l, \\ \sum_{i=1}^{m} y_i\, a_{ij} = c_i, \quad i = l+1, l+2, l+3, \ldots, n, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \qquad i = 1,2,\ldots,k.$$

Модельний приклад.

До прямої задачі лінійного програмування

$$W_I = x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 7x_4 - max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \ge 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \le 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_4 \ge 0$$

скласти двоїсту задачу.

Для початку переходу до двоїстої задачі підготуємо систему обмежень – для задачі на максимум необхідна наявність нерівностей тільки $\le$. Змінюємо знак першої нерівності на протилежний.

$$W_I = x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 7x_4 - max,$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \le 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \end{cases} .$$
$$x_1 \ge 0, x_4 \ge 0$$

Перехід до двоїстої задачі зручно виконувати в таблиці №1.

Таблиця №1

$Y\backslash X$	$X_1 \ge 0$	X_2	X_3	$X_4 \ge 0$	$?_{\mathrm{I}}$	B
$Y_1 \ge 0$	-1	-1	-1	1	$\le$	-4
$Y_2 \ge 0$	2	-1	3	-2	$\le$	3
Y_3	3	1	-2	1	=	2
$?_{\mathrm{II}}$	$\ge$	=	=	$\ge$		
C	1	9	5	-7		

Двоїста задача має вигляд
$$W_{II} = -4y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ - min,$$
$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 1, \\ -y_1 - y_2 + y_3 = 9, \\ -y_1 + 3y_2 - 2y_3 = 5, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \ge -7, \end{cases}$$
$$y_1 \ge 0, y_4 \ge 0.$$

Недослідженою залишилася ситуація присутності недодатних невідомих у прямій задачі та порушення відповідності знака нерівності типу екстремуму.

Доведемо, що кожній недодатній невідомій прямої задачі ставиться у відповідність обмеження-нерівність для max – ≥, та для min – ≤.

Пара задач ЛП є двоїста

$$W_I = C\,X - max, \qquad\qquad W_{II} = YB - min,$$
$$\text{I:} \quad A\,X \ge B, \quad \xrightarrow{def\ Двоїстість} \text{II:} \quad YA \le C^T, \quad .$$
$$X \ge 0 \qquad\qquad Y \le 0.$$

Дійсно

$$W_I = C\,X - max, \qquad W_I = C\,X - max,$$
$$\text{I:} \quad A\,X \ge B, \quad \Leftrightarrow \text{I:} \quad -A\,X \le -B, \quad \xrightarrow{def\ Двоїстість}$$
$$X \ge 0 \qquad\qquad X \ge 0$$
$$W_{II} = Y'(-B) - min, \qquad W_{II} = YB - min,$$
$$\text{II:} \quad Y'(-A) \ge C^T, \quad \overset{Y'=-Y}{\Leftrightarrow} \text{II:} \quad YA \le C^T,$$
$$Y' \ge 0. \qquad\qquad Y \le 0.$$

Таким чином доведено, що в разі порушення відповідності знака нерівності типу оптимуму, двоїста невідома має бути недодатньою.

Аналогічно встановлюється, що кожній недодатній невідомій прямої задачі ставиться у відповідність обмеження-нерівність у двоїстій задачі, протилежне за знаком основному означенню. На цих підставах наведені пари задач є двоїстими.

$$\text{I:}\ \begin{cases} W_I = CX - max, \\ AX \le B, \\ X \le 0 \end{cases} \xrightarrow{def\ Двоїстість} \text{II:}\ \begin{cases} W_{II} = YB - min, \\ YA \le C^T, \\ Y \ge 0. \end{cases}$$

$$\text{I:}\ \begin{cases} W_I = CX - max, \\ AX \ge B, \\ X \le 0, \end{cases} \xrightarrow{def\ Двоїстість} \text{II:}\ \begin{cases} W_{II} = YB - min, \\ YA \le C^T, \\ Y \le 0 \end{cases}$$

$$\text{I:}\ \begin{cases} W_I = CX - min, \\ AX \ge B, \\ X \le 0, \end{cases} \xrightarrow{def\ Двоїстість} \text{II:}\ \begin{cases} W_{II} = YB - max, \\ YA \ge C^T, \\ Y \ge 0. \end{cases}$$

Означення двоїстості для довільної форми задачі ЛП

Узагальнюючи наведені вище доведення та наслідки можливо отримати загальний алгоритм переходу до двоїстої задачі для довільної форми задачі лінійного програмування.

Означення

Для довільної форми задачі лінійного програмування

$$W_I = CX - max,$$

$$\text{I:}\quad \begin{cases} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_2 \end{pmatrix}, \\ x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \\ x_j \le 0, \quad j = k+1, k+2, \ldots, l, \\ x_j\ , \quad j = l+1, l+2, \ldots, n \end{cases}$$

або із застосуванням символів сумування

$$W_I = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - max,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i = 1,2,3,\ldots,s, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, & i = s+1, s+2, s+3,\ldots,t, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = t+1, t+2, t+3,\ldots,m, \end{cases}$$

I: $x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\ldots,k,$

$x_j \le 0, \quad j = k+1, k+2,\ldots,l,$

$x_j\ , \quad j = l+1, l+2,\ldots,n,$

двоїстою до неї будемо називати задачу вигляду

$$W_{II} = Y\,B - min,$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \ge \\ \le \\ = \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \right.$$

II: $y_i \ge 0, \quad i = 1,2,\ldots,s,$

$y_i \ge 0, \quad i = s+1, s+2,\ldots,t,$

$y_i\ , \quad i = t+1, t+2,\ldots,m$

або із застосуванням символів сумування

$$W_{II} = \sum_{i=1}^{m} b_i\, y_i - min,$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} y_i\, a_{ij} \ge c_j, & j = 1,2,3,\ldots,k, \\ \sum_{i=1}^{m} y_i\, a_{ij} \le c_j, & j = k+1, k+2, k+3,\ldots,l, \\ \sum_{i=1}^{m} y_i\, a_{ij} = c_i, & i = l+1, l+2, l+3,\ldots,n, \end{cases}$$

II: $y_i \ge 0, \quad i = 1,2,\ldots,s,$

$y_i \le 0, \quad i = s+1, s+2,\ldots,t,$

$y_i, \quad i = t+1, t+2,\ldots,m.$

Модельний приклад.

Скласти двоїсту задачу до наведеної прямої задачі

$$W_I = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 - max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 \geq 9, \\ 9x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 \leq 3, \\ x_1 + 9x_2 - 8x_3 + 3x_4 = 1, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_4 \geq 0$$

Перехід до двоїстої задачі виконуємо в таблиці №2.

Таблиця №2

$Y \backslash X$	$X_1 \geq 0$	$X_2 \leq 0$	X_3	$X_4 \geq 0$	?$_{\text{I}}$	B
$Y_1 \leq 0$	– 1	3	– 6	– 1	≥	9
$Y_2 \geq 0$	9	– 5	9	– 1	≤	3
Y_3	1	9	– 8	3	=	1
?$_{\text{II}}$	≥	≤	=	≥		
C	2	3	– 4	– 1		

Двоїста задача має вигляд

$$W_{II} = 9y_1 + 3y_2 + y_3 \ - min,$$

II:
$$\begin{cases} -y_1 + 9y_2 + y_3 \geq 2, \\ 3y_1 - 5y_2 + 9y_3 \leq 3, \\ -6y_1 + 9y_2 - 8y_3 = -4, \\ -y_1 - y_2 + 3y_3 \geq -1, \end{cases}$$

$$y_1 \leq 0, \ y_2 \geq 0.$$

Література:

1. Ашманов С.А. Линейное программирование. – М.: Наука, 1981.

2. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.

3. Бугір М.К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі. – К.: Видавничий центр “Академія”, 1998.

4. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1975.

МОЖЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ ПРОСТОРОВОЇ УЯВИ УЧНІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ГЕОМЕТРІЇ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

Н.В. Богатинська, О.О. Кокова
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Актуальною проблемою сучасної математичної освіти є розвиток просторової уяви учнів. Якщо вчитель не розвиває її на уроках геометрії молодших та середніх класів, то через деякий час уроки стереометрії у старших класах будуть втрачати більшу частину своєї ефективності.

Усі психічні процеси, в тому числі і просторова уява, удосконалюються в результаті діяльності. Ця діяльність повинна чим-небудь стимулюватися і направлятися, тобто необхідна система доцільно підібраних вправ [1].

В цій статті пропонуються нестандартні та цікаві задачі для розвитку просторової уяви. У деяких випадках описана методика роботи із задачами. У дужках подаються відповіді, короткі розв'язання, вказівки.

<u>Перший вид задач ми умовно називаємо "вихід у простір"</u>. Це усні задачі, в яких зовсім не йдеться про простір, але для того щоб їх виконати необхідно, начебто, "вивести" свою думку у "простір" [2].

1. Розділіть шматок сиру, що має форму циліндра трьома розрізами на вісім частинок. [Відповідь на рис. 1]

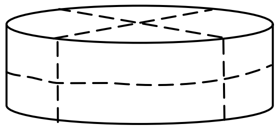


Рис. 1.

2. Із шести сірників складіть чотири правильних трикутника так, щоб сторона кожного була із цілого сірника. [Трикутна піраміда з ребром, рівним сірнику]

3. Чи можливо розташувати 6 однакових олівців так, щоб кожний торкався п'яти інших? [Відповідь на рис. 2]

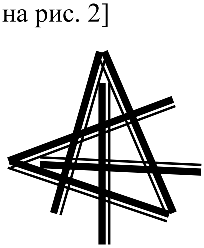


Рис. 2.

Вивчення аксіом стереометрії та їх наслідків бажано супроводжувати зображеннями многогранників, розв'язуванням задач на побудову перерізів і тощо. Але учні повинні "бачити" цей многогранник. Тому ще до вивчення систематичного курсу стереометрії ми пропонуємо задачі з кубом, паралелепіпедом і деякими іншими фігурами. Ця група завдань пов'язана з ілюзіями та неможливими об'єктами [1].

На рисунку 3 зображено куб, вершини якого попарно з'єднані. Бачити куб ми можемо завдяки добре розвинутій просторовій уяві.

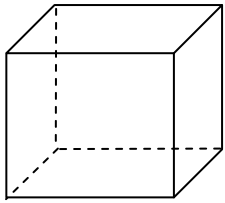


Рис. 3.

Але дивно: один раз ми бачимо цей куб нібито зверху і праворуч (рис. 4*а*), а другий - знизу і ліворуч (рис. 4*б*). Це начебто ілюзії наших думок, якими потрібно керувати, використовуючи свою уяву, про яку йдеться у даній задачі. Але багато учнів довгий час не можуть цьому навчитися. Допоможіть їм ще у середніх класах, запропонувавши вправи 4-6.

1. Закрийте аркушем кольорового паперу передню грань куба та поясніть, що ви уявляєте. [Добре видно такий куб, як на рис. 4*а*].

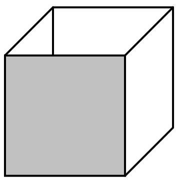


Рис. 4*а*

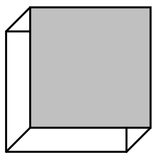


Рис. 4*б*

2. Закрийте аркушем кольорового паперу задню грань куба та поясніть, що ви уявляєте. На що схожий ваш рисунок: на шафу? на палицю?

3. На рис. 5*а* фігура не добудована (верхня частина зображення закрита аркушем паперу). Добудуйте її [Діти зазвичай добудовують фігуру так, як на рис. 5*б*, і не бачать ніякої перешкоди. Вона стає зрозумілою тільки при розгляді рис. 5*в*. Тільки у цей момент учні починають розуміти, що такі фігури, як на рисунку 5 в у дійсності не існують]

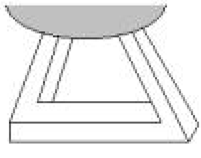


Рис. 5*а*.

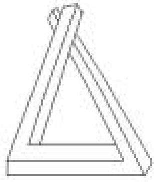


Рис. 5*б*.

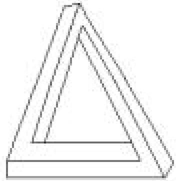


Рис. 5*в*.

У третьому виді завдань використовуються розгортки куба.

1. Скільки граней у шестигранного олівця? [Вісім, якщо олівець не заточений. Часто відповідають “шість”]

2. На рис. 6 ліворуч показана розгортка куба. Які куби з тих, що дані праворуч на цьому ж рисунку, можна скласти з цієї розгортки? [Куби на рис. 6 *b*, *c*, *f*]

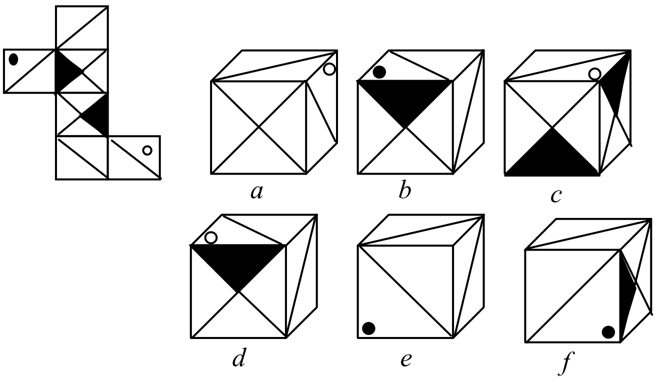


Рис. 6.

Завдання на проекції фігур

1. Яку форму має тінь куба на площину, перпендикулярну його діагоналі, від пучка променів світла, паралельних цій діагоналі? [Правильний шестикутник.]

2. Зігніть із м’якого дроту фігуру, при паралельному проектуванні яких на різні площини виходять літери С, Л, О, Г. [Відповідь на рис. 7]

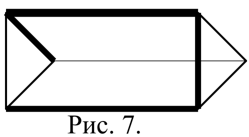


Рис. 7.

Багато з представлених тут задач доцільно пропонувати учням, бо предмети, про які говориться, учні можуть виготовити самі. Легко зігнути дріт і перевірити по ньому своє розв'язання задачі 10, не виникнуть труднощі при виготовленні паперових розгорток куба, про які йдеться в задачі 8. Але зауважимо: у всіх випадках моделі бажано робити після розв'язання, а не для розв'язання. Якщо вчитель починає розглядати запропоновані задачі з моделей, то уява учнів зовсім не використовується і розвиток її дуже слабкий.

Наприкінці наголосимо, що оригінальність задач викликає в учнів зацікавленість, і це є однією з необхідних умов успішного вивчення предмету.

Література:

1. Гольдберг Я.Е. С чего начинается решение стереометрической задачи: Пос. для учителя. – К.: Рад. шк., 1990. – 118 с.
2. Литвиненко В.Н. Задачи на развитие пространственных представлений: Кн. для учителей. – М.: Просвещение, 1991. – 127 с.

ФОРМАЛІЗАЦІЯ В ГЕОМЕТРІЇ

Л.О. Іваненко
м. Суми, Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
Luda_Iv@mail.ru

Розвиток математики виявляється у виведенні нових теорем, знаходженні нових методів у межах уже сформульованих понять. Коли думка рухається в цих межах, її рух значною мірою має формальний характер, бо всяке доведення йде більш-менш формальним шляхом. Тут на перший план виступає дедуктивний метод [3, 37-38].

Аксіоматичний метод був підготовлений тривалим розвитком людської думки. Ще Евклід, узагальнюючи величезний нагромаджений до нього матеріал з геометрії, показав у своїх “Началах”, що геометрія – це не просто сукупність тверджень, кожне з яких має самостійне значення, що геометричні припущення тісно зв’язані між собою логічними залежностями, що одні твердження геометрії можна вивести з інших, застосовуючи лише правила логіки. Логічні залежності не є окремими прикладами, а пронизують увесь зміст геометрії [3, 38].

Якщо в аксіоматичну теорію включають у явному вигляді правила логічного доведення (логіку), то кажуть, що дана теорія побудована за допомогою *формального* аксіоматичного методу. Саму теорію в цьому випадку називають *формальною аксіоматичною теорією* [1, 41].

Для прикладу розглянемо одну з можливих формалізацій площини О.В. Погорєлова. Для зручності введемо такі позначення для предметних змінних:

$A_1, A_2, A_3, \ldots$ – для точок.

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ – для прямих.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ – для площин.

$x_1, x_2, x_3, \ldots$ – для чисел.

Наступні елементи формули змістовно матимуть таку інтерпретацію:

$P_1^2(A_1, A_2)$ – “точка A_1 збігається з точкою A_2”.

$P_2^2(a_1, a_2)$ – “пряма a_1 збігається з прямою a_2”.

$P_3^2(\alpha_1, \alpha_2)$ – “площина α_1 збігається з площиною α_2”.

$P_4^2(A_1, a_1)$ – “точка A_1 лежить на прямій a_1”.

$P_5^2(a_1, \alpha_1)$ – “пряма a_1 лежить на площині α_1”.

$P_6^3(A_1, A_2, A_3)$ – “A_1, A_2, A_3 – три різні точки, що лежать на одній прямій так, що точка A_2 лежить між A_1 і A_3”.

$P_7^2(A_1, A_2)$ – “$A_1 \neq A_2$ і A_1A_2 – відрізок”, $\left|P_7^2(A_1, A_2)\right|$ – довжина відрізка.

$P_8^3(A_1, A_2, A_3)$ – "A_1, A_2, A_3 – три різні точки і $A_1A_2A_3$ – кут", $\left|P_8^3(A_1, A_2, A_3)\right|$ – градусна міра.

$P_9^2(a_1, \alpha_1)$ – "пряма a_1 розбиває площину α_1 на дві півплощини".

$P_{10}^2(a_1, a_2)$ – "пряма a_1 паралельна прямій a_2".

$P_{11}^3(A_1, A_2, A_3)$ – "A_1, A_2, A_3 – три різні точки і $A_1A_2A_3$ – трикутник".

$P_{12}^3(A_1, A_2, a_1)$ – "$\left|P_7^2(A_1, A_2)\right| \cap a_1$".

Аксіоми планіметрії.

I. *Аксіоми належності точок і прямих.*

I_1. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій і точки, що не належать їй.

$$\forall a\left(\exists A_1\left(P_4^2(A_1, a)\right) \wedge \exists A_2\left(\overline{P_4^2(A_2, a)}\right)\right)$$

I_2. Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.

$$\forall a_1 \forall a_2 (P_4^2(A_1, a_1) \wedge P_4^2(A_2, a_1) \wedge P_4^2(A_1, a_2) \wedge P_4^2(A_2, a_2) \Leftrightarrow P_2^2(a_1, a_2))$$

II. *Аксіоми розміщення точок і прямих на площині.*

II_1. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

$$\forall A_1 \forall A_2 \forall A_3 (\overline{P_1^2(A_1, A_2)} \wedge \overline{P_1^2(A_2, A_3)} \wedge \overline{P_1^2(A_1, A_3)} \Rightarrow P_6^3(A_1, A_2, A_3) \vee$$
$$\vee P_6^3(A_3, A_1, A_2) \vee P_6^3(A_2, A_3, A_1))$$

II_2. Пряма розбиває площину на дві півплощини.

$$\forall a_1 \forall \alpha_1 (P_5^2(a_1, \alpha_1) \Rightarrow P_9^2(a_1, \alpha_1))$$

III. *Аксіоми вимірювання відрізків і кутів.*

III_1. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля.

$$\forall A_1 \forall A_2 (\left|P_7^2(A_1, A_2)\right|) > 0$$

Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

$$\forall A_1 \forall A_2 \forall A_3 (\overline{P_1^2(A_1, A_2)} \wedge \overline{P_1^2(A_1, A_3)} \wedge \overline{P_1^2(A_2, A_3)} \wedge P_6^3(A_1, A_2, A_3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\left|P_7^2(A_1, A_3)\right| = \left|P_7^2(A_1, A_2)\right| + \left|P_7^2(A_2, A_3)\right|))$$

III_2. Кожний кут має певну градусну міру більшу від нуля.

$$\forall A_1 \forall A_2 \forall A_3 (\left|P_8^3(A_1, A_2, A_3)\right|) > 0$$

Розгорнутий кут дорівнює 180^0.

$$\forall A_1 \forall A_2 \forall A_3 (\overline{P_1^2(A_1,A_2)} \wedge \overline{P_1^2(A_1,A_3)} \wedge \overline{P_1^2(A_2,A_3)} \wedge P_6^3(A_1,A_2,A_3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\left|P_8^3(A_1,A_2,A_3)\right| = 180^0))$$

Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким його променем, що проходить між його сторонами.

$$\forall A_1 \forall A_2 \forall A_3 \forall A_4 (\overline{P_1^2(A_2,A_3)} \wedge \overline{P_1^2(A_2,A_4)} \wedge \overline{P_1^2(A_3,A_4)} \wedge$$
$$\wedge P_6^3(A_2,A_3,A_4) \wedge \overline{P_1^2(A_1,A_2)} \wedge \overline{P_1^2(A_1,A_3)} \wedge \overline{P_1^2(A_2,A_3)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\left|P_8^3(A_2,A_1,A_4)\right| = \left|P_8^3(A_2,A_1,A_3)\right| + \left|P_8^3(A_3,A_1,A_4)\right|))$$

IV. *Аксіоми відкладання відрізків і кутів.*

IV$_1$. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини і тільки один.

$$\forall A_1 \forall A_3 \forall a_1 \forall x (\exists A_2 \left|P_7^2(A_1,A_2)\right| = x \wedge P_4^2(A_2,a_1) \wedge P_4^2(A_3,a_1) \wedge$$
$$\wedge \left|P_7^2(A_1,A_3)\right| = x \Rightarrow P_1^2(A_2,A_3) \vee P_6^3(A_3,A_1,A_2))$$

IV$_2$. Від будь-якої півпрямої у даній півплощині можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою 180^0, і тільки один.

$$\forall A_1 \forall A_3 \forall A_4 \forall a_1 \forall x (\exists A_2 \left|P_8^3(A_2,A_1,A_3)\right| = x^0 < 180^0 \wedge P_4^2(A_2,a_1) \wedge$$
$$\wedge \overline{P_4^2(A_3,a_1)} \wedge P_4^2(A_3,a_1) \wedge \overline{P_1^2(A_1,A_2)} \wedge \overline{P_4^2(A_4,a_1)} \wedge \left|P_8^3(A_2,A_1,A_4)\right| =$$
$$= x^0 < 180^0 \Rightarrow P_4^2(A_3,a_2) \wedge P_4^2(A_4,a_2) \wedge P_4^2(A_1,a_2))$$

IV$_3$. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому у заданому розміщенні відносно даної півпрямої.

$$\forall a_1 \forall \alpha_1 P_9^2(a_1,\alpha_1) \wedge \forall A_1 \forall A_2 \forall A_3 P_{11}^3(A_1,A_2,A_3) \wedge \overline{P_1^2(A_1,A_1')} \wedge$$
$$\wedge \overline{P_1^2(A_1,A_2')} \wedge \overline{P_2^1(A_2,A_1')} \wedge \overline{P_1^2(A_2,A_2')} \wedge \overline{P_1^2(A_2,A_3')} \wedge \overline{P_1^2(A_3,A_1')} \wedge$$
$$\wedge \overline{P_1^2(A_3,A_2')} \wedge \overline{P_1^2(A_3,A_3')} \Rightarrow \exists A_1' A_2' A_3' P_{11}^3(A_1',A_2',A_3') = P_{11}^3(A_1,A_2,A_3)$$

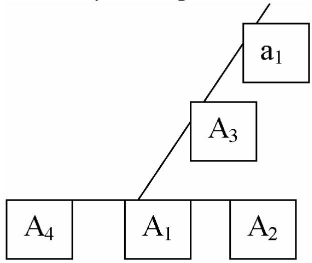
V. *Через точку, що не лежить на прямій, можна провести на площині не більш як одну пряму, паралельну даній.*

$$\forall A_1 \forall a_1 \forall a_3 (\overline{P_4^2(A_1,a_1)} \wedge P_4^2(A_1,a_2) \wedge P_{10}^2(a_1,a_2) \wedge P_4^2(A_1,a_3) \wedge$$
$$\wedge P_2^2(a_1,a_3) \Rightarrow P_2^2(a_2,a_3))$$

[2, 33-34].

Розглянемо приклади формалізації деяких теорем.

Теорема 1. Сума суміжних кутів дорівнює 180^0.

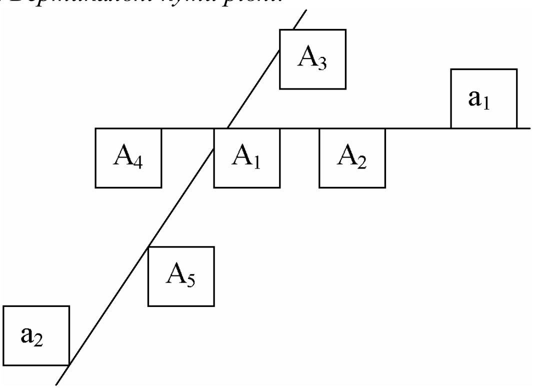


$$P_6^3(A_4,A_1,A_2)\wedge P_{12}^3(A_4,A_2,a_1)\wedge P_4^2(A_3,a_1)\wedge \overline{P_4^2(A_4,a_1)}\wedge$$
$$\wedge \overline{P_4^2(A_2,a_1)}\wedge P_8^3(A_4,A_1,A_3)\wedge P_8^3(A_2,A_1,A_3)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\left|P_8^3(A_4,A_1,A_3)\right|+\left|P_8^3(A_2,A_1,A_3)\right|=180^0)$$

Доведення.

$$\forall A_4\forall A_1\forall A_3(\left|P_8^3(A_4,A_1,A_3)\right|)>0;$$
$$\forall A_2\forall A_1\forall A_3(\left|P_8^3(A_2,A_1,A_3)\right|)>0;$$
$$P_{12}^3(A_4,A_2,a_1)\wedge P_4^2(A_3,a_1)\wedge P_6^3(A_4,A_1,A_2)\wedge(\left|P_8^3(A_4,A_1,A_2)\right|=180^0)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\left|P_8^3(A_4,A_1,A_3)\right|+\left|P_8^3(A_2,A_1,A_3)\right|=180^0);$$
$$P_6^3(A_4,A_1,A_2)\wedge P_{12}^3(A_4,A_2,a_1)\wedge P_4^2(A_3,a_1)\wedge \overline{P_4^2(A_4,a_1)}\wedge$$
$$\wedge \overline{P_4^2(A_2,a_1)}\wedge P_8^3(A_4,A_1,A_3)\wedge P_8^3(A_2,A_1,A_3)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\left|P_8^3(A_4,A_1,A_3)\right|+\left|P_8^3(A_2,A_1,A_3)\right|=180^0).$$

Теорема 2. Вертикальні кути рівні.



$$P_6^3(A_4, A_1, A_2) \wedge P_6^3(A_3, A_1, A_5) \wedge P_{12}^3(A_3, A_5, a_1) \wedge P_{12}^3(A_4, A_2, a_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\left|P_8^3(A_3, A_1, A_4)\right| = \left|P_8^3(A_2, A_1, A_5)\right|)$$

Доведення.

$$(P_6^3(A_4, A_1, A_2) \wedge P_6^3(A_3, A_1, A_5) \wedge P_{12}^3(A_3, A_5, a_1) \wedge P_{12}^3(A_4, A_2, a_2)) \wedge$$

$$\wedge (P_6^3(A_4, A_1, A_2) \wedge P_{12}^3(A_4, A_2, a_2) \wedge P_4^2(A_3, a_2) \wedge \overline{P_4^3(A_4, a_2)} \wedge$$

$$\wedge \overline{P_4^2(A_2, a_2)} \wedge P_8^3(A_4, A_1, A_3) \wedge P_8^3(A_2, A_1, A_3) \Rightarrow (\left|P_8^3(A_4, A_1, A_3)\right| +$$

$$+ \left|P_8^3(A_2, A_1, A_3)\right| = 180^0)) \wedge (P_6^3(A_3, A_1, A_5) \wedge P_{12}^3(A_3, A_5, a_1) \wedge P_4^2(A_2, a_1) \wedge$$

$$\wedge \overline{P_4^2(A_3, a_1)} \wedge \overline{P_4^2(A_5, a_1)} \wedge P_8^3(A_3, A_1, A_2) \wedge P_8^3(A_5, A_1, A_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\left|P_8^3(A_3, A_1, A_2)\right| + \left|P_8^3(A_5, A_1, A_2)\right| = 180^0)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|P_8^3(A_4, A_1, A_3)\right| = \left|P_8^3(A_5, A_1, A_2)\right|.$$

Аксіоматична побудова науки або тієї чи іншої її частини дає можливість викласти теорію у вигляді формальної дедуктивної схеми. Це надає теорії стрункості і виразності.

У математиці сучасний аксіоматичний метод, за визначенням групи французьких математиків, яка виступала під псевдонімом Н. Бурбаки, дає змогу "... краще зрозуміти внутрішнє життя математики, зрозуміти те, що створює її єдність і вносить у неї різноманітність, зрозуміти це велике місто, чиї передмістя не перестають розростатися дещо хаотично на навколишньому просторі, тоді як центр періодично перебудовується, ідучи щоразу за все чіткішим планом і прагнучи до все величнішого розташування, а старі квартири з їх лабіринтами зносяться для того, щоб прокласти до околиці вулиці більш прямі, широкі, зручніші" [3, 48–49].

Література:

1. Вивальнюк Л. М. Числові системи. – К.: Вища школа, 1977. – 184 с.
2. Іваненко Л.О. Про формальну аксіоматику математичних теорій // Збірник наукових праць (у двох частинах).Частина ІІ. Природничі та гуманітарні науки: за результатами конкурсу студентських наукових робіт. – Суми: СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2005. – 152 с.
3. Солдатов В.І., Семенович О.Ф., Нагибін Ф.Ф. Формування наукового світогляду при викладанні математики. – К.: Радянська школа, 1972. – 144 с.

АНАЛОГІЯ ЯК МЕТОД НАВЧАННЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ У СТЕРЕОМЕТРІЇ

Р.Л. Дітчук, І.В. Корнейчук
м. Дрогобич, Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка
ira_korneczyk@mail.ru

Термін "аналогія" вживають часто як синонім до термінів "схожість", "подібність". Так при вивченні математики в багатьох випадках кажуть: "твердження аналогічне такому-то твердженню", маючи на увазі, що дане твердження є майже таким самим, подібним до іншого твердження. Використання аналогії супроводжується перенесенням знань з одного предмету на інший. Перенесення знань, одержаних при вивченні одного об'єкта, на інші об'єкти є дуже важливою науково-дослідницькою і методичною задачею. В цій статті ми розглянемо теоретичні положення аналогії як логічної форми мислення і як методу навчання і спробуємо знайти основні можливості використання цього методу вчителем та учнями при вивченні стереометрії. Зміст шкільного курсу геометрії дозволяє зробити це в повній мірі, – він буквально наповнений аналогічними поняттями і судженнями: аксіомами, означеннями понять, властивостями понять, їх відношеннями, формулюванням теорем та задач, висловленнями, які вживають при доведеннях тверджень і розв'язуванні задач.

Поняття "аналогія" має декілька значень: логічна операція, логічна форма мислення, науковий метод пізнання, дидактичний метод або прийом. Стисло розкриємо суть кожного з цих значень.

Логічна операція аналогії полягає в тому, що, маючи певний об'єкт (ідеальний або матеріальний), мислено утворюють новий об'єкт, в цілому відмінний від даного, який має певні подібні ознаки з ознаками даного об'єкту. В результаті виконання логічної операції аналогії на основі одного поняття (предмету, об'єкту), утворюють нове поняття шляхом перенесення властивостей, схожих (або таких самих) до властивостей першого поняття.

Аналогія як логічна форма мислення – це є умовивід, в якому, на основі порівняння двох предметів і виявлення в них окремих схожих властивостей, здійснюють перенесення інших властивостей одного предмета на другий предмет.

Структуру умовиводу за аналогією схематично подають так:

Об'єкт **A** має ознаки (властивості) **a, b, c, d**
Об'єкт **B** має ознаки (властивості) **a, b, c**

Отже, об'єкт **B**, можливо має ознаку (властивість) **d**

При аналогії рух думки йде від одного об'єкта до іншого об'єкта, тобто від окремого до окремого.

Аналогія, як і будь-яка логічна форма, є відображенням певних зв'язків і відношень предметів реальної дійсності. Оскільки між ознаками предмета існують стійкі зв'язки і залежності, то в силу матеріальної єдності світу від схожості двох предметів за одними ознаками природно можна припускати схожість цих предметів за іншими ознаками.

Аналогія дає висновки не вірогідні, а тільки ймовірні, умовиводи, зроблені за аналогією, можуть бути як істинними, так і хибними. Аналогія не має "доказової сили", висновки за аналогією треба перевіряти більш надійними методами. В математиці це робиться за допомогою дедукції – ланцюга умовиводів, які будуються на основі аксіоматичного методу через використання законів і правил формальної логіки.

В.Є. Жеребкін [3] формулює умови, при яких умовивід зроблений за аналогією, буде більш вірогідним, якщо:

а) кількість схожих ознак порівнюваних предметів є якнайбільшою;

б) співставлювані ознаки матимуть істотний, а не випадковий характер;

в) ознака **d**, яку переносять, повинна бути тісно зв'язана із ознаками **a**, **b**, **c** і однотипною з ними;

У випадку в) аналогію називають строгою. Якщо ми не знаємо залежності між ознаками **a**, **b**, **c**, **d**, то аналогія по перенесенню ознаки **d** називається нестрогою або простою.

Якщо на основі схожих властивостей між двома поняттями, переносять певну властивість з одного поняття на друге, то в цьому випадку говорять про аналогію понять. Якщо здійснюється перенесення деяких відношень між поняттями однієї групи на відношення між поняттями іншої групи, то говорять про аналогію відношень.

Аналогія як метод пізнання займає важливе місце в наукових дослідженнях, особливо на початкових етапах вивчення тих чи інших об'єктів. В різних галузях науки відомо дуже багато прикладів відкриттів, здійснених за аналогією. Аналогії присвячено немало крилатих висловів великих вчених.

В своїй евристичній діяльності дослідники користуються такими видами аналогії:

1. *Аналогія парадигми* (Слово "парадейгма" в перекладі з грецької мови означає "висновок через приклад"). Це є безпосередній формально логічний умовивід аналогії, означення і схему якої ми давали вище. Парадигму широко застосовував Аристотель при пізнанні явищ природи.

2. *Каузальна* (причинно-наслідкова) аналогія. Логічною суттю цієї аналогії є припущення, що з однаковості (схожості) відношень-наслідків між елементами двох систем (двох груп предметів) випливає однаковість (схожість) причин, які породжують ці наслідки. Класичним прикладом цього виду аналогії в науці є відкриття І. Ньютоном закону всесвітнього тяжіння.

3. *Аналогія моделювання* (ілюстративна). В сучасній науці широко використовується метод моделювання, який полягає в тому, що при пізнанні деякого об'єкта (оригіналу), дослідження якого з певних причин є утрудненим, створюється інший об'єкт (модель), який замінює об'єкт-оригінал і є схожим з ним за багатьма властивостями. Опосередковано вивчають модель, встановлюють ті властивості, які цікавлять дослідника, і переносять їх на оригінал. Диференціальні рівняння та їх системи, системи лінійних нерівностей, різні математичні структури часто виступають моделями-аналогами певних явищ і процесів природи та суспільно-економічного життя. Знаходячи розв'язки рівнянь і нерівностей, вивчаючи відношення і властивості елементів структур, дослідники дають відповіді на виниклі проблеми природи та економіки.

4. *Аналогія відповідності*. Сюди можна віднести дві різновидності: аналогію гомоморфізму (ізоморфізму) і структурно-функціональну аналогію. Суть аналогії гомоморфізму полягає в тому, що між двома структурами елементів встановлюють певну відповідність (відображення, перетворення, функціональну, гомоморфізм або ізоморфізм), яка дозволяє властивості елементів однієї структури переносити на елементи іншої структури із збереженням основних операцій та основних відношень між елементами обох систем. Структурно-функціональною аналогією називається така аналогія, в якій на основі схожості структур елементів двох систем здійснюють перенесення функціональної залежності між цими елементами з однієї системи в іншу.

5. *Систематизуюча аналогія*. В мисленні часто після умовиводу за аналогією йде розумова операція узагальнення. Справді, після того, як встановлені два чи більше аналогічні об'єкти, їх властивості чи відношення, мимовільно наступає об'єднання їх у клас, а це є перший крок до узагальнення цих об'єктів. З іншого боку подібність між предметами або їх відношеннями, можливо, і дуже віддаленими, зумовлює віднести їх до одного роду, можливо, дуже загального, до певної єдиної системи. Так відбувається систематизуюча аналогія.

Аналогії каузальна, моделювання, відповідності і систематизуюча є опосередкованими аналогіями; вони є більш складнішими і відтягненими в способах міркувань, ніж аналогія парадигми, для них важче встановити схожі ознаки і буває важко знайти ознаку, яку можна перенести.

Розглянемо тепер аналогію як метод (прийом) навчання. В основі міркувань за аналогією, як і будь-яких інших міркувань, лежать операція порівняння з його формами зіставлення і протиставлення, аналіз і синтез, в результаті чого думка виходить на вищий ступінь узагальнення.

Розвиваючись, дитина мимовільно задіює розумові операції і творить зародкові, недосконалі, навіть в багатьох випадках хибні перші логічні форми. В цей період розвитку (маємо на увазі саме розумовий розвиток) найбільше потрібні цілеспрямовані систематичні впливи дорослих (вчителів в першу чергу і батьків), спрямовані на формування здатності мислити правильно, повно і логічно. Звичайно, весь процес навчання формує здатність мислити логічними формами, але, як і засвоєння знань та вмінь, в масовій школі, орієнтованій на середнього учня, далеко не кожний школяр здобуває добрі знання і вчиться логічно мислити. Здебільшого в дітей закріплюється обмежений, однобічний, часто хибний стиль мислення і такий же світогляд, який проектується згодом у свідомість дорослої людини. Очевидно, більшість пересічних людей в побутовому мисленні користуються недосконалим, неповним аналізом, частковим синтезом, неповною індукцією та аналогією, що часто приводить їх до хибних узагальнень і неправильних висновків.

Педагогами (наприклад, [4]) відмічається, що успішне оволодіння школярами основами наук і першими фаховими вміннями та навичками неможливе без набуття навичок розумової праці, культури мислення або як її ще називають, логічної грамотності. Знаменитий американський винахідник Т.А. Едісон говорив, що основною задачею цивілізації є навчити людину мислити, а відомий швейцарський психолог Ж. Піаже дуже гарно висловився про те, що логіка – це моральність мислення.

Логічна грамотність включає деякий мінімум логічних знань та вмінь, необхідних в будь-якій інтелектуальній діяльності. Навчання дітей логічному мисленню є особливо природним під час вивчення математики, оскільки саме в математиці логічні форми і відношення виступають в чіткому, явному, відкритому вигляді. Логіка внутрішньо присутня математиці, є її невід'ємною складовою частиною.

Аналогія є однією із логічних форм мислення, отже формування вмінь робити висновки за аналогією, бути готовим перевіряти їх дедукцією, інтуїтивно відділяти правильні висновки від хибних, як, зрештою, вчити дітей взагалі правильно мислити є основним завдання школи при навчанні всіх шкільних предметів, особливо – математики.

Аналогія як метод навчання – це діяльність вчителя і учня (викладання і учіння), спрямована на засвоєння частини математичних знань за аналогією і формування на цій основі вмінь робити правильні умовиводи за аналогією в повсякденному житті.

Педагоги (наприклад, [1; 5]) виділяють дві дидактичні функції методу аналогії – пояснювальну і пошукову. Пояснювальна функція методу аналогії полягає в тому, що під час викладу нових знань вчитель ілюструє його прикладами, і за допомогою цих аналогових моделей добивається конкретизації або спрощення важких місць матеріалу.

На нашу думку, одним із важливих питань проведення навчального методу аналогії на уроках математики, зокрема стереометрії, є створення аналогових моделей прикладів до всіх тем курсу, які допомогли б вчителю конкретизувати пояснювальний матеріал.

Пошукова функція методу аналогії полягає в тому, що за допомогою аналогії здобуваються нові знання. Аналогія сприяє висуненню гіпотез, припущень, знаходженню можливостей створення нових об'єктів (нових понять), встановленню їх властивостей, доведенню теорем, пошуку способів розв'язування задач, тематизації набутих знань.

Можна виділити ще одну функцію методу аналогії – повторення знань. Як діє метод аналогії в навчальному процесі? На основі вивчених понять будуємо нові подібні поняття, встановлюємо деякі їх властивості, знову знаходимо схожість між властивостями понять, що вивчаються, і вже вивченими раніше, і переносимо інші властивості раніше вивчених понять на ті, що вивчаються.

Таким чином, маємо дві різні можливості повторення:

1) повторюємо раніше вивчений матеріал і методом аналогії відкриваємо нові знання;

2) вивчаємо новий матеріал і методом аналогії встановлюємо його схожість з раніше вивченим.

Очевидно, було б цікаво розкрити суть функції повторення методу аналогії у конкретному застосуванні при вивченні окремих тем, наприклад, курсу стереометрії.

Для навчального пізнання можна пропонувати майже всі види аналогій, які зустрічаються в пізнанні науковому. Проте для навчальних цілей найбільше підходять аналогії роз'яснення (ілюстрації), парадигми і систематизації.

В навчанні математиці, як вже говорилося, є багато можливостей для застосування методу аналогії, особливо це стосується шкільного курсу геометрії. Дослідниками-методистами давно помічено, що курс стереометрії у значній своїй частині можна будувати за аналогією із курсом планіметрії [6]. Розрізняють аналогію між геометричними поняттями, між доведеннями теорем, між способами розв'язування геометричних задач. Аналогія між поняттями є найважливішою, тому що вона виступає основою для розкриття аналогії тверджень та їх доведень, формулювання задач та їх розв'язань. При аналізі геометричних понять можна виділити два рівні аналогії за математичним змістом: аналогія понять в означеннях і аналогія понять у властивостях [2]. Поняття вважаються аналогічними в означеннях, якщо характеристичні властивості, що містяться в означеннях цих понять, аналогічні. Поняття вважаються аналогічними у властивостях, якщо в них є аналогічними інші властивості, крім характеристичних. Помічено, що коли два поняття мають аналогічні характеристичні властивості, то часто в них аналогічними є ще інші властивості.

Для розкриття аналогії між поняттями планіметрії і стереометрії в методиці математики складено список пар аналогічних понять, як в означеннях, так і в властивостях ([6], [2]). В цьому списку, наприклад, поняттям точка, пряма, відрізок, промінь в планіметрії відповідають поняття пряма (точка), площина (пряма), многокутник (відрізок), півплощина (промінь) в стереометрії тощо. Цей список дуже важливий для вивчення стереометрії методом аналогії і править основою для навчання використанню аналогії при побудові понять, доведенні теорем, розв'язуванні геометричних задач.

В самому курсі стереометрії легко можна помітити аналогії між окремими темами і підтемами. Це такі: паралельність прямих – паралельність прямої і площини – паралельність площин; перпендикулярність прямих – перпендикулярність прямої і площини – перпендикулярність площин; паралельність прямих і площин – перпендикулярність прямих і площин; прямокутний паралелепіпед – довільний паралелепіпед; призма – циліндр; піраміда – конус; зрізана піраміда – зрізаний конус; сфера – куля; площі поверхонь тіл – об'єми тіл. П.К. Магомедбеков [6] звернув увагу на специфічний вид аналогії в стереометрії, що підлягає принципу двоїстості: якщо у поняттях і твердженнях, що стосуються прямих і площин у просторі, слово "пряма" змінити на слово "площина" і навпаки, а все інше залишити без зміни, то одержуємо нові поняття і твердження, які будуть правильними в евклідовому просторі. Існує двоїстість також серед правильних многогранників, яку можна тлумачити як своєрідний вид аналогії.

Проблема створення методики викладання стереометрії з максимальним використанням методу аналогії і питання формування хоч би в частини учнів вмінь правильно будувати аналогію як умовивід залишаються ще не розв'язаними до кінця. В окремих дослідженнях (наприклад, [2]) розкриваються деякі аспекти цієї проблеми, але здебільшого вони зводяться до формування вмінь при розв'язуванні стереометричних задач на основі правил-орієнтирів. Тут аналогія здебільшого розглядається як допоміжний засіб при розв'язуванні складніших задач.

На те, що учні при засвоєнні знань та вмінь з математики роблять масові помилки, породжені хибною аналогією, вказували методисти А.Я. Хінчин, В.М. Брадіс, І.І. Соколов, Д.М. Маєргойз та ін. Зокрема, Д.М. Маєргойз [7] розкрив логіко-психологічну природу таких учнівських помилок і наголошував на тому, що той, хто умовиводить за аналогією, не звертає уваги на властивості предметів, якими вони відрізняються один від одного. Методисти-математики підкреслювали, що постійне застосування аналогії в педагогічному процесі містить небезпеку прищеплення учням схильності користуватися хибними аналогіями. Тому при застосуванні методу аналогії в навчанні поряд із відшуканням схожих властивостей предметів потрібно кожного разу знаходити також відмінності між ними. Учням потрібно показувати, що аналогія – не достовірний умовивід, і її потрібно перевіряти доведенням.

У статті ми намітили можливість реалізації при викладанні стереометрії пояснювальної функції аналогії і функції повторення. Здійснені нами начерки мають хороші перспективи розвинутись в подальшому в більш змістовні напрацювання. В цьому ж ключі ми бачимо також можливості створення методики формування в учнів загальних прийомів використання аналогії при навчанні стереометрії, в першу чергу – на рівні засвоєння знань, а згодом – на рівні їх закріплення задачами.

Література:

1. Бондар С.П. Суть аналогії та її дидактичні функції // Радянська школа. – 1974. – № 5. – С. 26–29.
2. Буй З. Х. Метод аналогии при обучении решению стереометрических задач в средней школе. Автореф. дисс…канд. пед. наук. Санкт-Петербург, 1991. – 17 с.
3. Жеребкин В.Е. Логика. – Харьков: Изд-во Харьковського ун-та, 1968.
4. Кондрашенкова Т.А., Никольская И.Л. Формирование общелогических учений при обучении математике в 4, 5 классах // В сб. «Самостоятельная деятельность учащихся при обучении математике». – М.: Просвещение, 1985.
5. Корнейчук І.В. Евристична функція методу аналогії у шкільному курсі геометрії // Тези доповідей міжнародної науково-методичної конференції (15-17 листопада 2005 р.). – Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2005. – С. 48-49.
6. Магомедбеков П.К. Очерки преподавания геометрии в школе. – Махачкала: Дагучпедгиз, 1970. – 194 с.
7. Маергойз Д.М. Аналогия в педагогическом процессе // Математика в школе. – 1947. – №1. – С. 60-65.

ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

О.В. Мартиненко[1], О.П. Маслов[2]
[1] м. Суми, Сумський державний педагогічний університет
ім. А.С. Макаренка
[2] м. Суми, Сумський державний університет
amas@maimo.sumdu.edu.ua

Сьогодні розвиток України визначається у загальному контексті євроінтеграції з орієнтацією на такі фундаментальні цінності, як права людини, свобода пересування, свобода отримання освіти будь-якого рівня та інше. Згідно зі "Стратегією інтеграції України до Європейського союзу" поряд з іншими напрямами європейської інтеграції культурно-освітній та науково-технічний напрями займають особливе місце. Це зумовлено потенційною можливістю досягти вагомих успіхів у інтеграційному процесі саме на цих напрямах. Вони охоплюють галузі середньої і вищої освіти, перепідготовку кадрів, науку, культуру, мистецтво, технічну і технологічну сфери.

Необхідність реформування системи освіти України, її удосконалення та підвищення рівня якості є найважливішою соціокультурною проблемою, яка значною мірою обумовлюється процесами глобалізації та потребами формування сприятливих умов для індивідуального розвитку людини, її соціалізації та самореалізації у цьому світі.

Одним з провідних фундаментальних напрямів як середньої, так і вищої освіти є удосконалення математичної освіти, оскільки саме рівень математичної освіти забезпечує належну підготовку фахівців в економічній, технічній, військовій та інших сферах сучасного суспільства.

Актуальність проблеми забезпечення належного рівня математичної освіти обумовлена найширшими можливостями розвитку логічного мислення, уяви, алгоритмічної культури, культури обґрунтування тверджень, моделювання різноманітних процесів, формування творчої особистості. Нажаль, за останнє десятиліття рівень математичної освіти школярів значно погіршився. Вимоги розвантаження програм з математики, зменшення тижневого навантаження, відміна обов'язкових екзаменів з математики не сприяли забезпеченню належного рівня математичної підготовки, який висуває до школи сучасне високотехнологічне та інформатизоване суспільство. Очевидно, що вихід із становища, яке склалося сьогодні, слід шукати у глибокій рівневій і профільній диференціації математичної підготовки, розробці й використанні нових технологій навчання і сучасних інформаційних технологій.

Аналіз досліджень з проблеми формування творчої особистості свідчить, що неможливо переоцінити ту роль, яку відіграє в цьому навчання математики, оскільки математичні знання є не тільки продуктами пізнавальної діяльності, а й змістовою складовою цієї діяльності.

Однією з фундаментальних ідей сучасної математичної науки та її застосувань є ідея векторного простору. На векторній основі будується багато розділів математики (аналітична та диференціальна геометрія, лінійна алгебра, теорія багатовимірних просторів та інші). Вектори широко використовуються у фізиці й астрономії; векторний аналіз, створений як математичний апарат для вивчення електрики та магнетизму, став науковою базою для розвитку багатьох фізичних теорій.

У школі при вивченні курсу геометрії вектори передбачено вивчати в два етапи: спочатку вивчають вектори на площині, а потім – у просторі. Зміст теоретичного матеріалу є досить об'ємним і складним для сприйняття учнями, але без його глибокого усвідомлення у школярів виникають труднощі під час практичного застосування векторного апарату до розв'язування задач не лише з геометрії, а й з інших дисциплін.

У зв'язку із зменшенням кількості годин на вивчення математики як базова програма, так і автори підручників з геометрії не ставлять собі за мету систематично використовувати векторний метод при доведенні теорем та розв'язуванні задач, а передбачають лише ознайомлення учнів з векторами із загальноосвітньою метою і використання їх для розв'язування найпростіших стандартних задач. Як було вже зазначено, вектори мають широке застосування не лише в геометрії, а й у фізиці, тому треба звернути особливу увагу на те, що у фізиці і геометрії розглядаються різні поняття вектора. У фізиці розрізняють зв'язні (прикладені) і ковзні вектори. Ковзні вектори визначаються довжиною, напрямом і прямою. Два ковзних вектори рівні тільки тоді, коли вони мають рівні довжини (модулі), однакові напрями і розміщені на одній прямій. Такі вектори не завжди можна додавати за правилом паралелограма чи трикутника. Зв'язні (прикладені) вектори визначаються довжиною, напрямом і точкою прикладання. Їх також не завжди можна додавати за правилом паралелограма чи трикутника, тому вони, як і ковзні вектори, не є елементами векторного простору. Фізики досить часто використовують і такі прикладені вектори, які не мають спільних точок.

Які ж поняття вектора використовують у геометрії? У геометрії розглядають вільні вектори – елементи векторного простору, для яких суттєвими є лише довжина і напрям. Будь-які два вільні вектори можна додавати за правилом паралелограма. Зазначимо, що для потреб математики (алгебри і геометрії) потрібні тільки вільні вектори, тому, говорячи про вектори, математики мають на увазі лише вільні вектори. Крім того, у літературі можна зустрітися з поняттям вектора як напрямленої величини. Розглянемо одне з означень вектора: "Величини, які характеризуються не тільки числовим значенням, а й напрямом, називаються векторними величинами, або коротко векторами". Це означення є особливо зручним для фізиків, оскільки вони мають справу з вільними, ковзними і прикладеними векторами, а всі вони відповідають сформульованому означенню. Крім того можна зустріти поняття вектора як довільної стрілки, наприклад, у картографії. При цьому векторами називають будь-які стрілки, зокрема і криволінійні, якими позначають напрями морських течій, вітрів, переміщення повітряних потоків, тощо. Картографи розрізняють вектори не тільки за розмірами і напрямами, а й за кольорами, формами, внутрішніми структурами [1]. Такі вектори ні додавати, ні віднімати не можна, тому математики, говорячи про вектори, мають на увазі зовсім інше поняття.

Постає слушне питання: яке ж поняття вектора доцільніше використовувати у шкільному курсі математики? У математиці використовують лише вільні вектори, крім того вільні вектори застосовують і у фізиці (швидкість, прискорення твердого тіла, що рухається поступально).

У навчально-методичній літературі подаються різні означення вільних векторів. Вони трактуються як:

1) напрямлений відрізок прямої евклідового простору;
2) впорядкована пара точок;
3) паралельне перенесення;
4) впорядкована пара, трійка,..., *n*-ка чисел;
5) клас еквівалентних напрямлених відрізків.

Кожне з наведених трактувань є інтерпретацією більш загального абстрактного поняття вільного вектора (будь-яку множину об'єктів, що задовольняє перші вісім аксіом Вейля, називають множиною векторів, а будь-який елементи цієї множини – вектором). Всі множини об'єктів, що відповідають зазначеним вище трактуванням, ізоморфні одна одній. Проаналізуємо різні трактування поняття вектора. Якщо під вектором розуміють напрямлений відрізок, то необхідно спочатку з'ясувати, що ми будемо розуміти під напрямленим відрізком, ввести поняття суми векторів з зазначенням її властивостей (перші вісім аксіом Вейля).

Часто пропонують визначати вектор через клас еквівалентних напрямлених відрізків, але восьмикласникам важко уявити собі цей клас еквівалентності. Означення вектора через паралельне перенесення не лише коректне з наукової точки зору, але воно найбільш зрозуміле учням, при цьому додавання векторів за правилом трикутника сприймається досить природно (на відміну від випадку, коли під вектором розуміють напрямлений відрізок або клас еквівалентних напрямлених відрізків). Отже в школі з дидактичних міркувань у восьмому класі, на наш погляд, найдоцільніше вводити поняття вектора як напрямного відрізка, а в десятому класі (враховуючи те, що учні вже знайомі з векторами та їх властивостями) можна ввести більш загальне поняття вектора як елемента векторного простору.

Вивчення векторів у шкільному курсі математики є важливим не тільки з точки зору з'ясування природи і властивостей даного математичного об'єкта, але також з точки зору застосування векторів при розв'язуванні задач з математики та фізики. Відомо, що застосування теорії векторів до розв'язування задач називається векторним методом. Суть векторного методу полягає в тому, що певне взаємне положення точок, прямих і площин у просторі виражається мовою векторів у вигляді векторних рівностей (співвідношень), які перетворюють із застосуванням апарату векторної алгебри, а потім мову векторних формул і рівностей наповнюють геометричним змістом. При цьому до складу діяльності учнів при використанні векторного методу входять наступні специфічні розумові дії:

- переформулювання відношень між фігурами з геометричної мови на мову векторів і навпаки;
- дії (операції) над векторами;
- подання векторів у вигляді суми, різниці векторів та добутку вектора на число;
- перетворення векторних рівностей та співвідношень з використанням законів векторної алгебри і властивостей скалярного добутку;
- перехід від співвідношень між векторами до співвідношень між їх довжинами.

При розв'язуванні задач векторним методом важливе відпрацювання кожної розумової дії. Але слід звернути увагу учнів на те, що векторний метод розв'язування задач (особливо доведення теорем) не є універсальним. Він є доцільним при доведенні паралельності і перпендикулярності прямих і відрізків, належності трьох точок одній прямій, подільності відрізка в даному відношенні, при доведенні співвідношень між довжинами відрізків і величинами кутів та інше.

Переваги векторного методу полягають у тому, що він дає можливість:

1) раціоналізувати та узагальнити розв'язування окремих задач, які іншими методами розв'язуються досить складно;

2) розглянути нові типи задач, які за традиційною програмою не пропонувались учням.

Література:

1. Бевз Г. Ще раз про вектори // Математика в школі. – 2001. – №3 – С. 10-13.

ВИКОРИСТАННЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПЛОЩИНИ В ЗАДАЧАХ НА ПОБУДОВУ

П.І. Ульшин, І.В. Мединська
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Задачі на побудову мають довгу і цікаву історію. Отримавши перші теоретичні обґрунтування ще в Стародавній Греції, вони століттями збільшувалися кількісно, збагачувалися змістом і завжди приваблювали людей своєю глибиною задуму, красою і витонченістю логічних міркувань. Більшість із них в усі часи були важливим компонентом математичної освіти. Розв'язування їх і зараз є невід'ємною частиною навчального процесу.

Серед великої різноманітності методів, якими розв'язуються задачі на побудову, важливе значення мають методи перетворення площини. Вони базуються на властивостях цих перетворень і мають, відповідно, назви методів: паралельного перенесення, симетрії, повороту, подібності, інверсії. Розглянемо ефективне використання цих методів в задачах на побудову.

Суть методу паралельного перенесення полягає в тому, що він використовує відповідну властивість, за якою всі точки площини переходять в нове положення на цій же площині, переміщуючись в одному і тому ж напрямі на одну і ту ж відстань. Тому маємо правило: якщо при паралельному перенесенні даної частини фігури в нове положення можна знайти невідомі точки шуканої фігури, то така задача ефективно розв'язується методом паралельного перенесення.

Приклад 1. Дано коло радіусом R і центром у точці O та відрізок $AB=a<2R$ поза ним. Побудувати паралелограм $ABCD$ так, щоб вершини C і D лежали на даному колі.

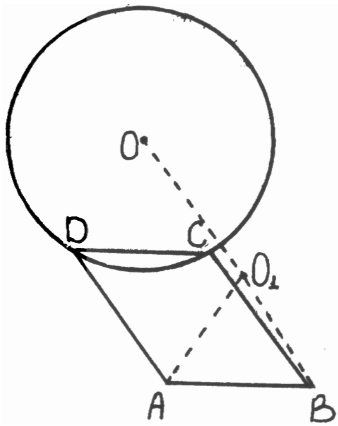


Рис. 1

Розв'язання. Відомо, що через дві точки A і B можна побудувати коло радіусом R. Для нього центром буде точка $O_1=(A, R)\cap(B, R)$. Два кола з рівними радіусами можна сумістити. Тому відрізок O_1O вказує напрям і відстань паралельного перенесення (рис. 1).

Побудова.

1) Знаходимо точку $O_1=(A,R)\cap(B,R)$.

2) $\overrightarrow{O_1O}$ – вектор паралельного перенесення.

3) Паралельне перенесення: $A\to D$, $B\to C$, C і $D\in(O, R)$.

4) $ABCD$ – шуканий паралелограм.

Симетрія може бути центральною або осьовою. Суть методу центральної симетрії полягає в тому, що відповідні точки шуканої фігури лежать на прямій, яка проходить через центр симетрії, по різні сторони від цієї точки і на рівних відстанях від неї. Суть осьової симетрії полягає в тому, що відповідні точки шуканої фігури лежать на прямій, яка проходить перпендикулярно до вісі, по різні сторони від неї і на однакових відстанях. Звідси, правило: задачі на побудову розв'язуються ефективно методом симетрії, якщо шукана фігура має центр або вісь симетрії.

Приклад 2. Дано дві прямі l_1 і l_2 та точка A поза ними. Через точку A провести пряму l, яка б перетинала прямі l_1 і l_2 у точках M і N так, що $MA=AN$.

Розв'язання. Згідно умови, точка A є центром симетрії відрізка MN. Тому застосуємо метод центральної симетрії (рис. 2).

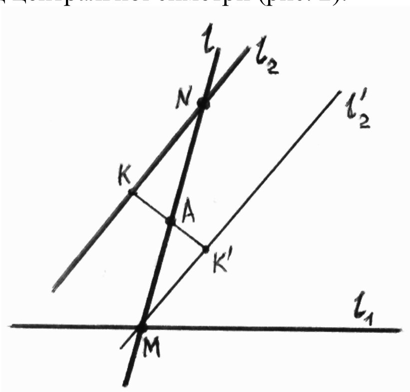


Рис. 2

Побудова:

1) Будуємо: $l'_2 \parallel l_2$ симетрично відносно A, $AK=AK_1$.
2) $M= l'_2 \cap l_1$.
3) (MA) – пряма, $(MA)\cap l_2=N$.
4) Згідно побудови: $\Delta AMK_1=\Delta ANK$, $MA=AN$.
5) $(MN)=l$ – шукана пряма.

Приклад 3. Знайти таку точку M на даній прямій l, щоб ця пряма була бісектрисою кута, утвореного дотичними, проведеними з точки M до двох даних кіл (O_1, R_1) і (O_2, R_2).

Розв'язання. Відомо, що бісектриса є віссю симетрії сторін кута. Тому задача розв'язується методом осьової симетрії (рис. 3).

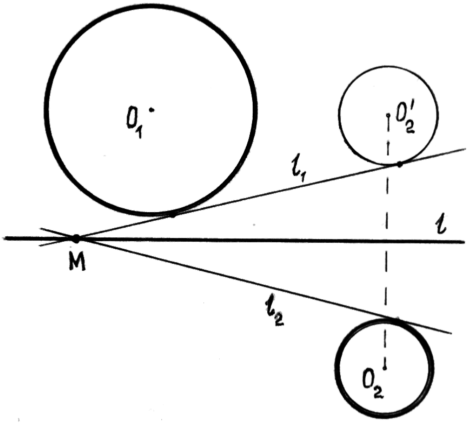


Рис. 3

Побудова:

1) Будуємо коло (O_2', R_2), симетричне до кола (O_2, R_2) відносно l.
2) Проводимо спільну дотичну l_1 до кіл (O_1, R_1) і (O_2', R_2), $l_1 \cap l = M$.
3) Проводимо дотичну l_2 з точки M до кола (O_2, R_2).
4) Згідно побудови l є бісектрисою $\angle(l_1, l_2)$, тому точка M є шуканою.

Поворот завжди задається точкою обертання і кутом, на якій відбувається повертання точок площини. В зв'язку з цим, методом повороту розв'язуються такі задачі, в яких відомо кут, що належить шуканій фігурі.

Приклад 4. Дано три паралельні прямі l_1, l_2, l_3. Побудувати рівносторонній ΔABC так, щоб вершини його належали даним прямим: $A \in l_1$, $B \in l_2$, $C \in l_3$.

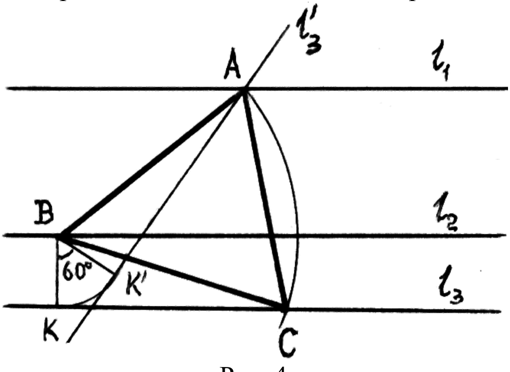


Рис. 4

Розв'язання. Оскільки ΔABC рівносторонній, то кожний його внутрішній кут дорівнює 60˚. Тому задача ефективно розв'язується методом повороту.

Побудова:

1) Будуємо точку $B\in l_2$.

2) Виконуємо поворот: $R_B^{\varphi=60^\circ}(l_3)=l_3'$, $l_3' \cap l_1 = A$.

3) Зворотній поворот: $R_B^{\varphi=-60^\circ}(A)=C$, $(A\to C)$, $\angle CBA=60^\circ$, $BA=BC$.

4) ABC – шуканий трикутник.

Подібне перетворення, не змінюючи форми фігури, змінює її розміри в k разів, де k – коефіцієнт подібності. В зв'язку з цим, метод подібності застосовується в таких задачах на побудову, в яких, відкинувши одну із умов, можна побудувати фігуру, подібну до шуканої.

Приклад 5. Побудувати ΔABC за даними двома його кутами α і β та периметром $2p$.

Розв'язання. Згідно ознаки подібності, за двома даними кутами можна побудувати трикутник, подібний до шуканого. Тому задача ефективно розв'язується методом подібності.

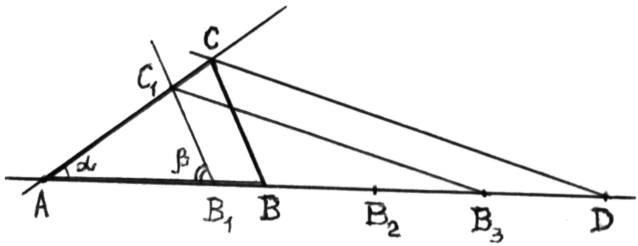


Рис. 5

Побудова:

1) Будуємо: ΔAB_1C_1, $AB_1\subset l$, $\angle B_1AC_1=\alpha$, $\angle AB_1C_1=\beta$.

2) Відкладаємо: $B_1B_2=AC$, $B_2B_3=B_1C_1$, $AB_3=2p_1$ – периметр ΔAB_1C_1.

3) Відкладаємо: $AD=2p$.

4) Будуємо: B_3C, $DC \parallel B_3C_1$, $CB \parallel C_1B_1$.

5) ABC – шуканий трикутник з периметром $2p$.

Інверсія – це перетворення точок площини, відносно кола з центром у точці O і радіусом R, при якому для відповідних точок M і M' має місце рівність $OM'\cdot OM=R^2$. Метод інверсії базується на властивостях цього перетворення. Як правило методом інверсії ефективніше, ніж іншими методами, розв'язуються задачі на знаходження кола, яке дотикається до даних кіл і прямих.

Приклад 6. Дано дві прямі l_1 і l_2 та точка A поза ними. Побудувати коло, яке проходило б через точку A і дотикалося б до даних прямих.

Розв'язання.

1) Нехай A - центр інверсії. Будуємо (A, R) – коло інверсії радіусом R

(рис. 6.).

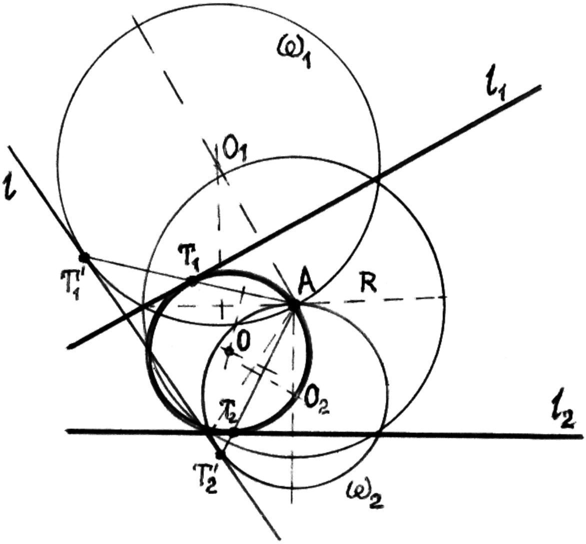


Рис. 6

2) Знаходимо інверсно відповідні кола ω_1 і ω_2 до прямих l_1, і l_2.

3) Проводимо пряму l – дотичну до кіл ω_1 і ω_2 в точках T_1' і T_2'.

4) Знаходимо точки T_1 і T_2 інверсно відповідні точкам T_1' і T_2'.

5) Знаходимо точку O – рівновіддалену від трьох точок A, T_1, T_2.

6) (O, OA) – шукане коло, дотикається до прямих l_1 і l_2 і проходить через точку A. Задачу розв'язано.

Розглянуті приклади вказують на можливості ефективного використання властивостей перетворень площини при розв'язуванні задач на побудову. За допомогою розроблених правил по змісту задачі можна швидко підібрати відповідний метод її розв'язування.

У приведених прикладах розкривається методика розв'язування задач, за якою розробляються алгоритми побудови шуканих фігур. Розв'язування таких задач сприятиме розвитку логічного мислення учнів та міцного засвоєнню теоретичних знань і навиків.

Література:

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия, ч. І. – М.: Просвещение, 1986. – 336 с.

ПОВЕРХНІ ПОСТІЙНОЇ КРИВИНИ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ

П.І. Ульшин, А.А. Орел
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Поверхні постійної кривини мають нескладну будову і широко використовуються в науці і техніці. Вони привертали увагу вчених на всіх етапах розвитку математики. До них відносяться: площина, сфера, прямі кругові циліндри і конуси та поверхні обертання інших тіл.

У стереометричних задачах шкільного курсу геометрії розглядаються, в основному, такі тіла із кривими поверхнями, які мають постійну кривину. Ці задачі пов’язані з обчисленням площ поверхонь, об’ємів тіл, обмежених поверхнями, знаходженням окремих елементів поверхонь. Чимало задач розглядаються на вписані і описані поверхні, які носять екстремальний характер.

Теоретично поняття кривини поверхні було введене в диференціальній геометрії, яка виникла у 18 столітті. В ній розглядаються нормальна і головні кривини, повна (гауссова) і середня кривини поверхні. Розвитку поняття кривини поверхні важливу увагу приділяли видатні вчені: Л.Ейлер, Я. Бернуллі, Ж. Меньє, К. Гаусс та ін. Л. Ейлер встановив формулу взаємозв’язку між нормальною і головними кривинами поверхні. К. Гаусс створив внутрішню геометрію поверхні, в якій показав, що для характеристики поверхні першочергове значення має її перша диференціальна квадратична форма. Він визначив повну кривину поверхні через коефіцієнти першої квадратичної форми.

Відомо [1], що перша і друга квадратичні форми поверхні визначаються такими формулами:

$$I_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \qquad I_2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2, \tag{1}$$

де

$$E = \vec{r}_u^{\,2}, \quad F = \vec{r}_u \vec{r}_v, G = \vec{r}^{\,2}_v, \quad L = \frac{(\vec{r}_{uu}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$M = \frac{(\vec{r}_{uv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{(\vec{r}_{vv}, \vec{r}_{u,} \vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

– коефіцієнти цих форм. (2)

За допомогою цих коефіцієнтів знаходяться повна (гаусова) і середня кривини поверхні, відповідно:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}. \tag{3}$$

Розглянемо, як можна визначити поверхню з постійною повною кривиною. Відомо [2], що на будь-якій гладкій регулярній поверхні можна задати напівгеодезичну параметризацію, при якій перша квадратична форма приймає такий вигляд:

$$I_1 = du^2 + G(u,v)dv^2, \tag{4}$$

де $G(0,v) = 1$, $G_u(0,v) = 0$. (5)

При такій параметризації повна кривина поверхні згідно формули Гауса [1, 228], записується так: $K = -\left(\sqrt{G}\right)_{uu}\left(\sqrt{G}\right)^{-1}$. Звідси одержується диференціальне рівняння:

$$\left(\sqrt{G}\right)_{uu} + K\sqrt{G} = 0\,. \qquad (6)$$

Припустивши, що повна кривина K даної поверхні є постійною величиною, знайдемо коефіцієнт G. Для цього проінтегруємо рівняння (6) з початковими умовами (5), розглядаючи всі можливі випадки:

1) якщо $K = 0$, то рівняння (6) має вигляд: $\left(\sqrt{G}\right)_{uu} = 0$. Його розв'язок: $G = 1$, а перша квадратична форма поверхні: $I_1 = du^2 + dv^2$;

2) якщо $K = k^2 > 0$, то розв'язок рівняння (6) має вигляд: $G = \cos^2 ku$, а $I_1 = du^2 + \cos^2 ku dv^2$;

3) якщо $K = -k^2 > 0$, то одержимо: $G = ch^2 ku$, $I_1 = du^2 + ch^2 ku dv^2$.

Із проведеного дослідження випливає, що вигляд поверхні залежить лише від значення її постійної повної кривини. Оскільки всі поверхні з рівними першими квадратичними формами ізометричні, то існують три різні види локально ізометричних поверхонь.

Розглянемо приклади.

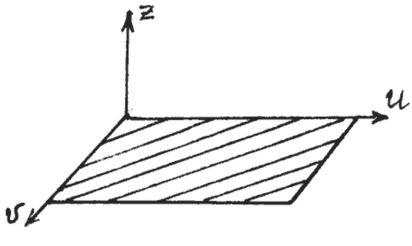


Рис. 1

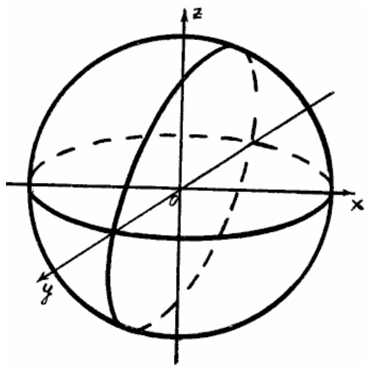


Рис. 2

<u>Приклад 1</u>. Дано площину (рис. 1). Векторне рівняння її: $\vec{r} = \vec{r}(u, v, 0)$. Згідно формул (1), (2) і (3) знаходимо: $I_1 = du^2 + dv^2$, $K = 0$, $H = 0$.

Отже, площина є поверхнею з нульовою постійною кривиною. До поверхонь з такою ж повною кривиною відносяться циліндри і конуси, оскільки вони ізометричні площині.

Замітимо, що площина є основним об'єктом евклідової геометрії. На ній мають місце всі аксіоми планіметрії.

<u>Приклад 2</u>. Дано сферу (рис. 2). Векторне рівняння її в параметричній формі має вигляд: $\vec{r} = \vec{r}(R\cos u \cos v;\ R\cos u \sin v;\ R\sin u)$.

Користуючись формулами (1), (2) і (3), одержимо: $I_1 = du^2 + R^2\cos^2 u dv$, $K = \dfrac{1}{R^2}$, $H = \dfrac{1}{R}$.

Звідси слідує, що сфера з радіусом R є поверхнею з постійною повною додатною кривиною. До таких поверхонь відносяться всі поверхні, локально ізометричні сфері.

Замітимо, що на поверхні сфери мають місце аксіоми сферичної геометрії. Сферична геометрія використовується для вивчення поверхонь Землі і планет Сонячної системи.

Приклад 3. Дано псевдосферу (рис. 3). Векторне рівняння поверхні можна записати так: $\vec{r} = \vec{r}\left(a\sin u\cos v;\ a\sin u\sin v;\ a\left(\ln\operatorname{tg}\dfrac{u}{2} + \cos u\right)\right)$, де a=OA – параметр псевдосфери.

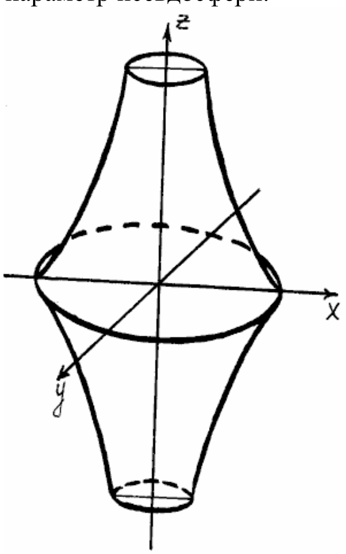


Рис. 3

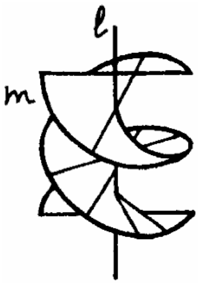


Рис. 4

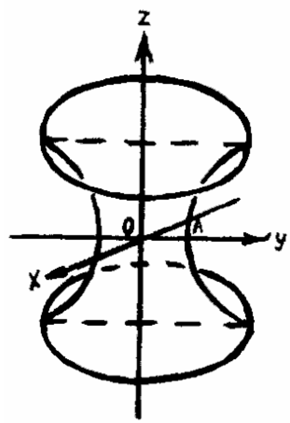


Рис. 5

За допомогою формул (1), (2) і (3) знаходимо

$$I_1 = du^2 + a^2\sin^2 u dv^2,\ K = -\frac{1}{a^2}.$$

Отже, псевдосфера є поверхнею з постійною повною від’ємною кривиною. До таких поверхонь відносяться всі поверхні локально ізометричні псевдосфері.

Псевдосфера, як поверхня обертання трактриси навколо її асимптоти, дістала таку назву тому, що між нею і поверхнею сфери існує глибока аналогія. Наприклад, нескінченно видовжене тіло псевдосфери має скінчену поверхню: $S = 4\pi a^2$, яка відповідає поверхні сфери з радіусом a. Геодезичний трикутник на сфері має суму внутрішніх кутів більшу від π радіан на величину S_Δ/a^2, де S_Δ – площа трикутника, a – радіус сфери, а геодезичний трикутник ABC на псевдосфері має суму внутрішніх кутів меншу від π радіан на величину S_Δ/a^2, де S_Δ – площа трикутника, a – параметр поверхні.

Цікавим є і той факт, що на будь-якій частині псевдосфери проявляються властивості гіперболічної геометрії Лобачевского. Таке відкриття було зроблене у 1863 році італійським геометром Е. Бельтрамі. Воно підтвердило правильність цієї геометрії і відвернуло ту недовіру, з якою раніше відносилися до неї майже всі відомі математики.

Існують поверхні з нульовою середньою кривиною в усіх своїх точках. Такі поверхні називаються *мінімальними*. Назва “мінімальна поверхня” пояснюється тим, що така поверхня має найменшу площу, серед всіх гладких поверхонь, обмежених даним замкнутим контуром. Розглянемо приклади таких поверхонь.

Приклад 4. Дано прямий гелікоїд (рис. 4). Це поверхня, що утворюється одночасним обертанням і поступальним рухом вздовж вісі обертання l прямої m, перпендикулярної до вісі обертання. Рівняння прямого гелікоїда можна записати так: $\vec{r} = \vec{r}\left(u\cos v; u\sin v; bv\right)$.

Згідно формул (2) і (3) одержуємо: $K = -\dfrac{b^2}{(u^2+b^2)^2}$, $H = 0$.

Приклад 5. Дано катеноїд (рис. 5). Це поверхня, утворена обертанням ланцюгової лінії навколо її директриси. Рівняння катеноїда має такий вигляд: $\vec{r} = \vec{r}\left(ch u\cos v; ch u\sin v; u\right)$.

Користуючись формулами (2) і (3) знаходимо: $K = -\dfrac{1}{ch^4 u}$, $H = 0$.

Замітимо, що назва катеноїд походить від латинського *catena* – ланцюг. Властивості цієї поверхні вивчали Л. Ейлер і Ж. Меньє ще у 18 столітті.

Розглянуті мінімальні поверхні (площина, прямий гелікоїд, катеноїд) завжди привертали до себе увагу вчених, оскільки використання в техніці цих поверхонь сприяє економії матеріалу. Отже, ми показали, що поверхні постійної повної кривини відрізняються між собою трьома видами перших квадратичних форм, а мінімальні поверхні мають різні повні кривини. Важливо пам’ятати, що поверхні з постійними гауссовими кривинами (площина, сфера і псевдосфера) є основними об’єктами, відповідно, евклідової, сферичної і гіперболічної геометрії.

Література:

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия, ч. II. – М.: Просвещение, 1987. – 352 с.

2. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: Первое знакомство. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 384 с.

ДИДАКТИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ АЛГОРИТМІВ У НАВЧАННІ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

Н.В. Богатинська, Л.О. Черних
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Значна кількість задач шкільної математики розв'язується за певними правилами, орієнтирами, а тому озброєння учнів алгоритмами – найбільш ефективний шлях навчання розв'язуванню таких задач.

Дослідження відомих методистів, педагогів, психологів (О.Ф. Єсаулов, І.С. Якіманська, Л.М. Фрідман, Н.О. Менчинська, Ю.М. Колягін, Г.П. Бевз, З.І. Слепкань, Л.М. Лоповок, І.Г. Габович, В.М. Осинська, М.Л. Крайзман та ін.) переконливо свідчать про те, що однією з головних причин труднощів, що виникають в учнів під час розв'язування задач, є те, що вони часто не знають тих операцій (дій), які необхідно виконати, щоб розв'язати задачу, або не володіють цими операціями, оскільки вони у них не сформовані. Якщо систему операцій (дій), необхідних для розв'язання деякого класу чи типу задач, назвати методом (способом) розв'язання, то можна сказати, що учні тому незадовільно розв'язують задачі, що не знають основних методів (способів) їх розв'язання, не знають, як і в якій послідовності треба діяти, щоб знайти розв'язання задачі. У шкільній практиці вчитель часто турбується лише про те, щоб дати учням знання про зміст матеріалу, який вивчається, і значно менше про те, щоб дати йому знання про способи оперування цим змістом, не звертає уваги на операції, з яких складається розв'язання задачі, спеціально не формує уміння виконувати ці операції. Проблема "чому навчати", досить сильно домінує над проблемою "як і за допомогою яких прийомів слід учити і засвоювати те, що вивчається". Навчаючи учнів розв'язувати задачі кожного конкретного типу, необхідно формувати достатньо загальні прийоми мислення і взагалі діяльності, загальні способи підходу до будь-якої задачі даного класу чи типу. Коли говорять про методи, то мають на увазі деякі приписи або вказівки про способи дій людини для досягнення певної мети (вказівки про те, які операції необхідно виконати, щоб розв'язати певні задачі).

Алгоритм є одним з видів загальних способів діяльності. Діяльність людини завжди можна розглядати як певну послідовність її дій і операцій, тобто вона може бути представлена у вигляді деякого алгоритму з початковою і кінцевою дією.

Під алгоритмом розуміють «точний загальнозрозумілий припис про виконання в певній (у кожному конкретному випадку) послідовності елементарних операцій (з деякої системи таких операцій) для розв'язання будь-якої із задач, що належать деякому класу чи типу» [2].

У методичній літературі під терміном «метод (спосіб) розв'язання задачі» розуміють алгоритм розв'язання задачі. Його методичним еквівалентом є алгоритмічний припис, різні форми якого (правила-орієнтири, приклади-взірці, формули тощо) все більше входять у шкільний курс математики.

Зрозуміло, що алгоритми самі по собі ніяких задач не розв'язують. Задачі розв'язуються в процесі виконання послідовності дій (операцій), які зазначаються алгоритмом або які відповідають деякому алгоритму. Цілком природно чітко розрізнити приписи про виконання певної системи операцій і саму цю систему операцій. Якщо певного типу припис про виконання системи операцій називається алгоритмом або алгоритмічним приписом, то саме виконання системи операцій, процес розв'язування задачі за алгоритмом чи у відповідності з алгоритмом доцільно назвати алгоритмічним процесом.

В.А. Успенський характеризує алгоритмічний процес так: «Алгоритмічний процес – процес застосування алгоритму до якого-небудь об'єкта...» [6]. Учень часто розв'язує задачі способом, який не являє собою застосування якогось відомого йому алгоритму. Проте в його діях може бути строгий порядок, строга закономірність, яка може бути виявлена і точно алгоритмічно описана. Природно назвати алгоритмічним процесом не тільки процес застосування відомого людині чи машині алгоритму до розв'язання певного класу задач, а й процес, який відбувається настільки закономірно, що може бути алгоритмічно описаний. В останньому випадку мова йде про процес, якому може бути поставлений у відповідність деякий певний алгоритм.

Під час побудови алгоритму розв'язання тієї чи іншої задачі (класу задач) необхідно знати найбільш раціональний спосіб її розв'язання. Раціональними способами розв'язання володіють більш підготовлені і здібні учні. Тому, складаючи алгоритм розв'язання задачі, необхідно враховувати шлях його одержання цими учнями. Для останніх учнів такий алгоритм буде взірцем діяльності. Так як кожний учень може розв'язувати одну й ту ж саму задачу своїм шляхом, то процес її розв'язування може бути представлений декількома алгоритмами.

Побудова алгоритму розв'язання задачі – це, перш за все, виділення чіткої послідовності елементарних операцій (дій), які приводять до потрібного результату. Кожна дія повинна бути завершена учнем перш ніж він перейде до виконання наступної. Успішне використання алгоритмічного методу при навчанні учнів розв'язувати математичні задачі залежить від ряду умов. Я.І. Грудьонов виділяє найголовніші з них:

1. Алгоритм повинен бути по можливості стислим. Він є для учнів планом, схемою, своєрідним стимулом, який допомагає відтворити в пам'яті щойно прослухані міркування вчителя, але які ще добре не запам'ятались. Стислі вказівки легко запам'ятовуються, після виконання декількох вправ учні вільно відтворюють їх.

2. Важливе значення має така рекомендація вчителя: «Читаючи і засто-

совуючи алгоритм, намагайтесь запам'ятати його». Подібна рекомендація і відповідні вимоги вчителя викликають в учнів установку на міцне запам'ятовування. Без такої установки формування умінь сповільнюється і багато хто з учнів не запам'ятовує алгоритм, плутається під час розв'язання задач.

3. Важливе значення має дотримання даного вчителем взірця розв'язання задачі. Учитель сам продумує і алгоритм, і взірець його застосування, але потім дотримується обраної послідовності міркувань. Якщо послідовності міркувань, заданої вчителем і алгоритмом, учень не дотримується, то формування асоціацій ускладнюється та уповільнюється. Вони, так би мовити, виникають та одразу «руйнуються», тому що в учня немає твердої лінії, міцної основи, яка б повторювалась у цих міркуваннях. При таких умовах учням важко проводити міркування і вони перестають до них прислухатись.

4. В алгоритм бажано включати вказівки, які спонукають учнів контролювати свої дії. Це дозволяє попереджати типові помилки.

5. Вказівки в алгоритмі бажано давати в такому вигляді (і в такій формі), щоб вони містили в собі всі необхідні пояснення, які вчитель хоче чути від учнів в процесі розв'язання задачі [1].

У навчальному процесі під час застосовування алгоритмів у готовому вигляді учні здійснюють як репродуктивну, так і творчу діяльність. У потрібний момент алгоритм може згортатись або розгортатись з метою збільшення чи відповідно зменшення частки самостійної творчої роботи учнів. Проте при алгоритмічному підході не виключена можливість прояву формалізму, шаблонного, нетворчого підходу учнів до розв'язування задач. Ці негативні фактори можна послабити і навіть усунути, якщо учнів навчати не тільки готовим алгоритмам, а й під керівництвом вчителя самостійно знаходити алгоритми розв'язання типових задач. «Вчитель повинен визначити, в яких випадках доцільно навчати учнів готовим алгоритмам, а коли важливо організувати самостійний чи колективний пошук алгоритму розв'язання задач. ... Інтуїція учня буде тим краще і швидше розвиватись, чим більше він буде пам'ятати про методи чи способи розв'язання різного роду задач» [4, 132].

«Здібні до математики учні швидко переходять у процесі розв'язування задач до мислення «згорнутими» структурами. Цей перехід здебільшого розпочинається безпосередньо після розв'язування першої задачі даного типу і досить швидко досягає максимального розвитку, коли проміжні ланки міркування «випадають» і виникає своєрідна пряма асоціація між усвідомленням задачі і виконанням певної системи дій, а нерідко навіть між усвідомленням результату» [7, 105]. Всі інші учні вимушені рухатись за вчителем довгим шляхом емпіричних узагальнень, часто не досягаючи мети-усвідомлення методу розв'язання задач даного класу.

Деякі методисти, педагоги, психологи іноді висловлюють думку про те, що «потрібно виховувати творчість, а не навчати алгоритмам!». Л.Н. Ланда з цього приводу зазначав: «По-перше, треба виховувати не тільки творче мислення. Велике місце у навчанні займає формування навичок. Жоден творчий процес неможливий, якщо окремі його ланки не автоматизовані. По-друге, навчання алгоритмам ні в якій мірі не зводиться до оволодіння тільки готовими алгоритмами, до їх заучування. Вірно поставлене навчання алгоритмам неодмінно передбачає навчання самостійному відкриттю, побудові, формулюванню алгоритмів, а це, як правило, процеси творчого характеру. Навчання алгоритмам може бути чудовим засобом виховання творчого мислення. По-третє, все вище сказане про алгоритми не означає, що навчання алгоритмам повинно замінити собою виховання в учнів кмітливості, здогадки і взагалі формування у них умінь здійснювати пошук способів розв'язання у тих випадках, коли алгоритм відсутній або невідомий.

Мова йде тільки про те, що якщо для деяких задач можна побудувати алгоритми і розв'язувати ці задачі за допомогою алгоритмічних процедур більш раціонально, ніж будь-яким іншим способом, то не намагатись знаходити відповідні алгоритми і не навчати цим алгоритмам у багатьох випадках недоцільно». [2, 145-146].

Отже, на питання про те, чи слід навчати учнів певним алгоритмам, формувати у них конкретні алгоритмічні прийоми розв'язання тих чи інших типів математичних задач, позитивна чи негативна відповідь залежить від ряду факторів, які в кожному конкретному випадку потрібно спеціально враховувати, аналізувати і оцінювати.

По-перше, виходячи з того, що будь-який алгоритм завжди є методом розв'язання деякого типу чи класу задач, необхідно, перш за все, оцінити значення тих задач, які будуть розв'язуватись за допомогою алгоритму. Якщо ці задачі не мають необхідного наукового, практичного чи загальноосвітнього значення, то, очевидно, немає змісту витрачати навчальний час на те, щоб навчати учнів алгоритмам їх розв'язання.

По-друге, на розв'язування питання про доцільність навчання алгоритмам впливає складність алгоритму. Якщо алгоритм складний, а за допомогою деякого неалгоритмічного методу або за допомогою пошукових випробувань розв'язати задачу можна простіше, то очевидно, що у цих випадках не має сенсу навчати алгоритмам. Час і енергія, витрачені на навчання алгоритмам, себе не виправдовують. Отож, однією з умов доцільності навчання алгоритмам є їх невисока складність.

По-третє, щоб алгоритмам було доцільно навчати, необхідно, щоб задачі, які будуть розв'язуватись за допомогою цих алгоритмів, зустрічались досить часто. Так, якщо час, витрачений на формування того чи іншого алгоритму, значний, а задачі, які пропонується розв'язувати за допомогою алгоритму, будуть зустрічатись рідко, то навчати алгоритмам розв'язання таких задач недоцільно.

Враховуючи вище сказане, можна виділити три навчальні ситуації, які обумовлюють різну стратегію навчання розв'язуванню задач:

1) розв'язується стандартна задача і відповідний алгоритм, відомий учням;

2) розв'язується стандартна задача і відповідний алгоритм, ще не відомий учням;

3) розв'язується нестандартна задача.

У ситуації 1 необхідно навчати розпізнавати клас чи тип стандартних задач, до якого належить дана задача, і застосовувати загальний припис (алгоритм), призначений для розв'язання будь-якої задачі даного класу чи типу, до даної частинної задачі.

У ситуації 2 необхідно навчати переходу від розв'язання частинних, однотипних задач, що належать до даного класу, до описання загального методу (алгоритму) розв'язання будь-якої задачі цього класу.

У ситуації 3 виникає потреба пошуку розв'язання, а тому необхідно навчати учнів деяким методам чи способам такого пошуку, а саме: як звести нестандартну задачу до однієї або декількох стандартних задач. [5].

Отже, навчання учнів застосуванню алгоритмів при розв'язуванні математичних задач є найважливішим завданням методики. Використання алгоритмічного підходу у навчальному процесі не тільки не зменшує ініціативи учнів, творчого пошуку, інтуїції, а навпаки сприяє розвитку важливих якостей мислення, допомагає не тільки управлінню, а й самоуправлінню мисленням при розв'язуванні типових задач. Формування в учнів певних алгоритмічних прийомів розумової діяльності звільняє їх інтелектуальні сили для розв'язування нових, найбільш складних задач, зокрема і творчого характеру. Алгоритмізація навчання у поєднанні з проблемним підходом допомагає полегшити і прискорити вивчення програмового матеріалу.

Література:

1. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
2. Ланда Л.Н. Алгоритмизация в обучении. – М.: Просвещение, 1966. – 523 с.
3. Осинская В.Н. Активизация познавательной деятельности учащихся на уроках математики в 9-10 классах. – К.: Рад. шк., 1980. – 143 с.
4. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике. – К.: Рад. шк., 1983. – 190 с.
5. Столяр А.А. Практикум по педагогике математики. – Минск: Вышэйшая шк., 1974.
6. Успенский В.А. Алгоритм. // В кн.: Философская энциклопедия. – Т. 1. – М.: Советская энциклопедия, 1960.
7. Фридман Л.М., Кулагина И.Ю. Психологический справочник учителя. – М.: Просвещение, 1991. – 288 с.

ФОРМУВАННЯ В УЧНІВ УМІННЯ АНАЛІЗУ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

О.В. Віхрова
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Аналіз змісту шкільного курсу математики свідчить, що в основному він складається з теоретичного обґрунтування способів розв'язування різноманітних задач. Тому природно, що розв'язуванню задач приділяється велика увага та значний учбовий час. Одним із основних завдань навчання математики є формування в учнів загального підходу до розв'язування будь-якої математичної задачі, оскільки цей загальний підхід є моделлю розумного раціонального підходу до розв'язування довільних побутових, практичних та інших задач, які доводиться вирішувати людині протягом всього життя.

Відомо, що не всі випускники школи оволодівають цим загальним умінням. На думку психологів, основна причина такого становища полягає в тому, що традиційна методика навчання розв'язуванню математичних задач не забезпечує формування в учнів загальних умінь та здібностей, необхідних для успішного розв'язування таких задач.

Аналізуючи недоліки традиційної методики навчання розв'язуванню задач, Л.М. Фридман виділяє дві основні причини:

1. Перша причина має суто психологічний характер. Для того, щоб учень оволодів будь-якою діяльністю, (а розв'язування задач є розумова діяльність), він повинен направити всі свої зусилля та здібності на оволодіння нею. Основним мотивом розв'язування задач повинно бути оволодіння вміннями в цій справі, (внутрішній мотив); тільки тоді ця діяльність стане засобом формування загальних вмінь та здібностей в розв'язуванні будь-яких задач. Проте реально основними мотивами розв'язування задач учнями є мотиви благополуччя, оцінки та престижу (зовнішні мотиви).
2. Друга причина має не лише психологічний, а й методичний характер. Розв'язування задач є складна розумова діяльність. Щоб свідомо володіти нею, потрібно, по-перше, мати чітке уявлення про її об'єкти, по-друге завчасно оволодіти тими елементарними діями й операціями, з яких складається ця діяльність і, по-трете, знати основні методи їх виконання та вміти ними користуватися [4].

Щоб навчити школярів розв'язувати задачі, необхідно дати їм ті основи, на базі яких можна сформувати навички свідомої та раціональної діяльності:

1. Учні повинні мати уявлення про те, як виникають задачі. Першоджерелом задач є проблемні ситуації і, з цієї точки зору, задачі – це знакові моделі таких ситуацій. Щоб учні в цьому переконались необхідно використовувати різноманітні завдання на складання задач.

2. З логічної точки зору, в кожній задачі розглядається один або декілька об’єктів. Відносно кожного з цих об’єктів вказуються його якісні або кількісні характеристики у формі висловлень, які приймаються за істинні. Такі висловлення або висловлювальні форми називають елементарними умовами. У текст задачі входить її вимога: запитальне речення, яке у процесі розв’язування має перетворитись на істинне висловлення(щодо даної задачі). Текст задачі, як правило, дається в скороченому вигляді. Важливою складовою роботи вчителя є навчання учнів розгортанню тексту задачі в систему взаємопов’язаних висловлень та вимог – логічну модель задачі.

3. Кожна елементарна умова має певну структуру. З логічної точки зору вона є предикатом, в якому описується якісна чи кількісна характеристика об’єкта, якщо він один, або відношення між об’єктами, якщо їх декілька. В залежності від цього об’єкти умови можуть бути відомими, невідомими, в тому числі невизначеними.

4. В залежності від відношень між елементарними умовами та вимогами, задачі поділяються на: 1) визначені, які містять необхідне і достатнє число умов для задоволення вимоги; 2) недовизначені, в яких недостатньо умов для розв’язування; 3) перевизначені, що мають зайві умови, які, в свою чергу, поділяються на несуперечливі задачі (коли зайві умови є логічним наслідком решти) і суперечливі (якщо зайві умови суперечать іншим умовам задачі). Тому з методичної точки зору для формування загальних прийомів та вмінь розв’язувати задачі необхідно в шкільному курсі математики значну увагу приділяти кожному з даних видів задач.

Процес розв’язування задачі, як відомо включає наступні етапи: 1) аналіз (змістовний і логічний); 2) схематичний запис умови; 3) пошук способу розв’язування; 4) реалізація способу (плану) розв’язання; 5) перевірка знайденого розв’язку; 6) дослідження задачі та знайденого розв’язку; 7) формулювання відповіді задачі; 8) учбово-пізнавальний аналіз задачі та її розв’язку. Причому в реальному процесі розв’язування задач всі ці етапи виконуються не послідовно. Деякі з них паралельно, іноді в іншому порядку, не відокремлюючи один етап від наступного.

Зазначене вище складає той мінімум знань про задачі і процес їх розв’язування, який є основою для формування свідомої діяльності учнів при розв’язуванні задач. При цьому є обов’язковим сформованість вміння аналізу, який вони в процесі розв’язування запропонованої задачі здійснюють на різних його етапах.

Потужним засобом формування вміння аналізу у школярів є, на наш погляд, логічні задачі. Виходячи із запропонованої нами типізації логічних задач, до задач, при розв’язуванні яких створюються найбільш сприятливі умови для формування вмінь аналізу, слід віднести задачі на використання закону суперечності [1]. Зазвичай такі логічні задачі мають проблемний характер, їх можна “переробляти”, тобто на основі умови однієї задачі можна скласти багато задач подібного змісту. Складання обернених до заданих задач вимагає проведення “аналізу з кінця“, що допомагає учням краще зрозуміти умову задачі, перевірити отриманий розв’язок і проявити творчість і пізнавальну активність.

У логічних задачах даного типу мова йде про дві або більше множини певних об’єктів, що знаходяться в певних відношеннях один з одним, причому ці відношення задовольняють умови взаємооднозначної відповідності (тобто є функціональними відношеннями). Тому дані задачі є складовою функціональної змістово-методичної лінії шкільного курсу математики. Традиційним способом розв’язання задач даного типу у шкільному курсі математики є побудова “умовної таблиці”, в клітини якої вписують різноманітні комбінації елементів розглядуваних множин. Таблиця дозволяє не тільки розв’язувати логічну задачу, але й знаходити оптимальні (мінімальні за кількістю) елементарні умови, що використовуються для знаходження розв’язку, дозволяє виявляти серед них зайві, перевіряти суперечність і повноту, а також можливість розбиття задачі на підзадачі. Ці вміння є складовими загальноінтелектуального вміння аналізу.

Формування у школярів вміння аналізу досить складна справа. Як складова етапу розв’язування задачі, аналіз іноді відбувається на інтуїтивному рівні. Висновки при цьому не завжди отримуються достатньо глибокими, а мета досягнутою. Тому навчання свідомому оволодінню прийомами аналізу має велике значення і цьому сприятиме ознайомлення учнів з узагальненою схемою аналізу. Побудова такої схеми потребує чіткого уявлення про поняття, пов’язані з аналізом, і вчителю потрібно розкрити їхній зміст. Слово “аналіз” означає розбиття цілого на складові частини. Творчість учнів і полягає в умінні визначити, на які саме частини корисно розбити це ціле в кожному окремому випадку. Безумовно, аналіз і, відповідно, усвідомлення задачі, яку потрібно розв’язати, здійснюється на всіх стадіях процесу розв’язування. Але глибина цього усвідомлення на кожній стадії різна. Тому для вивчення цей процес розбивають на три етапи: попередній аналіз задачі, аналіз задачі в процесі розв’язування і аналіз задачі після її розв’язування.

Попередній аналіз має за мету усвідомлення проблемної ситуації в цілому, для досягнення якої здійснюють: 1) розбиття формулювання задачі на умову та вимогу; 2) розбиття умови та вимоги на елементарні твердження; 3) оцінку необхідності та достатності наявних даних та їх несуперечності; 4) виключення зайвих умов; 5) визначення необхідності й напрямку подальших досліджень.

Об’єктивні труднощі, які можуть ускладнювати аналіз на даному етапі, пов’язані з особливостями формулювання деяких логічних задач. Формулювання задачі може бути завантаженим згорнутими твердженнями або узагальненими поняттями. Такі поняття можуть містити в собі багато додаткової інформації, яка до даної задачі не матиме жодного відношення.

Визначити необхідну інформацію учням допоможе переформулювання задачі. Кожне конкретне переформулювання реалізує один із можливих варіантів розбиття невідомого цілого на складові частини.

Аналіз задачі у процесі розв'язування логічних задач даного типу спрямований на з'ясування суперечливих елементарних тверджень, на які умову розбито на попередньому етапі аналізу, і виключення даних суперечливих умов із подальшого розгляду. Аналіз задачі після її розв'язання є, на наш погляд, найголовнішим у процесі розв'язування логічних задач. На цьому етапі виконуються два головних завдання: здійснюється перевірка правильності та оцінка якості розв'язку задачі; переглядаються можливості подальшого розвитку даної задачі, тобто її конкретизація, узагальнення та аналогізування [2]. Відмітимо, що виконання завершального аналізу з'являється лише з досвідом і навчити цього не просто. Тим більше, що для багатьох задач, він, як і будь-який творчий процес, індивідуальний та суб'єктивний. Але і тут наявні стандартні моменти, на які треба звертати увагу учнів. Якщо запропонувати ситуацію, описану меншим набором умов вихідної задачі – учні отримують задачу, яка є конкретизацією вихідної. Аналіз більш загальної ситуації, в яку умови вихідної задачі входять фрагментом, приводить школярів до узагальнення заданої задачі. Розгляд ситуації, яку можна розбити на фрагменти, що знаходяться між собою у відношеннях, подібних з тими, в яких існують умови вихідної задачі, дозволяє учням сформулювати аналогічну задачу. Отже, здійснення завершального аналізу розв'язування певної логічної задачі відбувається в процесі складання учнями нових логічних задач на основі задачі, що розв'язана. Складання задач сприяє кращому розумінню самих задач, їх структури та механізму розв'язування. При цьому доцільно запропонувати завдання такого типу: 1) за поданим схематичним записом задачі (її символічною моделлю) скласти текст задачі; 2) за поданою таблицею скласти текст задачі. Такі завдання допомагають з'ясувати зміст схематичної та символічної моделі задачі та способів її побудови.

Література

1. Віхрова О.В., Білоусова Г.М. Навчання розв'язуванню логічних задач на уроках математики // Науковий часопис КПУ ім. Драгоманова. Серія 3. Фізика і математика у вищій і середній школі. – Випуск 1. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2004. – С. 61–65.
2. Ізюмченко Л., Лутченко Л. Організація навчальної діяльності школярів під час розв'язання логічних задач // Математика в школі. – 2003. – №6. – С. 29–33.
3. Середа В.Ю. Вчись мислити логічно: Для ст. шк. віку. – К.: Рад. шк., 1989. – 175 с.
4. Фридман Л.М. Методика обучения решению математических задач // Математика в школе. – 1991. – №5. – С. 59–62.

ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ НАВЧАЛЬНИХ ЗАДАЧ В МЕТОДИЧНІЙ ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Л.О. Черних, Н.В. Богатинська
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Для майбутніх вчителів математики важливо усвідомлювати роль навчальних задач в математичній підготовці учнів. Навчальні математичні задачі – основний і найбільш ефективний засіб засвоєння учнями математичних понять та методів, розвитку мислення, формування вмінь та навичок практичного застосування математики.

В методиці математики і в практичній діяльності вчителів основна увага приділяється розвитку розумової діяльності учнів, пов'язаної з процесом розв'язування задач. На наш погляд, велике значення для методичної підготовки майбутніх вчителів має також дослідження задач як таких, знання студентами елементів теорії задач (структура задачі, типологія задач, побудова системи задач тощо).

Під задачею будемо розуміти "об'єкт розумової діяльності, що містить вимогу деякого практичного перетворення або відповіді на теоретичне питання через пошук умов, які дозволяють розкрити зв'язки (відношення) між відомими і невідомими її елементами" [2, 12]. Виходячи з цього означення, слід враховувати взаємодію в системі "задача – учень", характер діяльності учнів в процесі пошуку вказаних зв'язків та відношень між відомими та невідомими елементами.

За своєю структурою кожна задача містить одну або декілька умов (відомі елементи) та одну або декілька вимог (невідомі елементи). Вміння проаналізувати структуру задачі, виділити умову і вимогу задачі – це базове, вихідне вміння, пов'язане з розв'язуванням задач. Щоб вдосконалити це уміння, доцільно виконувати логічний та методичний аналіз вже розв'язаної задачі, зокрема здійснювати подальший розвиток цієї задачі. Під розвитком задачі розуміють отримання певних результатів (складання нових задач, формул, гіпотез, відшукання нових методів розв'язання). З цієї метою доцільно спробувати узагальнити дану задачу, конкретизувати її, сформулювати обернену задачу; відшукати аналогію геометричного змісту задачі з алгебраїчним, планіметричного – з стереометричним; ввести параметри або, навпаки, підібрати доцільну заміну параметра числом.

Важливою частиною методичного аналізу задачі (поруч з виділенням її структури та розвитком задачі) є встановлення характеру задачі в рамках певної типології. В методичній літературі представлений поділ математичних задач за різними основами. За функціями в навчанні виділяють задачі з дидактичними, пізнавальними, розвиваючими функціями. В залежності від того, яку вимогу поставлено в задачі, розрізняють задачі на обчислення, побудову, доведення та дослідження. За кількістю розв’язків задачі поділяють на визначені (ті, що мають один або декілька певних розв’язків), невизначені (мають безліч розв’язків), перевизначені (ті, що не мають розв’язків або зводяться до визначених). За своїм математичним змістом розрізняють арифметичні, алгебраїчні, тригонометричні, стереометричні задачі (цей поділ умовний, оскільки для розв’язання геометричної задачі іноді використовують апарат тригонометрії, алгебри, математичного аналізу).

Розглядаючи задачу як об’єкт розумової діяльності учнів, важливо враховувати характер зв’язків між елементами задачі, співвідношення між репродуктивною та творчою діяльністю учнів в процесі розв’язування задачі. В зв’язку з цим розрізняють стандартні задачі (що мають певний алгоритм розв’язання) і нестандартні (які не мають загального алгоритму розв’язання). Стандартні задачі можна поділити на шаблонні (алгоритмічні) та нешаблонні (напівалгоритмічні).

Якщо учням відомий алгоритм розв’язання задачі, то її можна вважати шаблонною, або алгоритмічною. До алгоритмічних задач відносять такі задачі, які розв’язуються за допомогою безпосереднього застосування означення, формули, доведеної теореми, тобто ті, які можна і доцільно розв’язувати за допомогою алгоритму. Алгоритми, а отже і алгоритмічні задачі, відіграють в навчанні математики велику роль. Розв’язання задач за алгоритмом швидко і легко приводить до бажаного результату. Функція алгоритмічних задач полягає в тому, щоб навчити учнів важливим алгоритмам, безпосередньому застосуванню означень, теорем, формул, навчити їх діяти стандартно у відповідних ситуаціях. Самостійне розв’язування алгоритмічних задач автоматизує деякі дії учнів і звільняє розумову діяльність для розв’язання інших, складних проблем.

Якщо на момент розв’язування стандартної задачі загальний метод її розв’язання не відомий, то така задача вважається нешаблонною, або напівалгоритмічною. Правила розв’язання таких задач носять узагальнений характер; в межах одного й того ж узагальненого правила розв’язання задачі відрізняються варіативністю умов. Напівалгоритмічні задачі містять в собі алгоритмічні як підзадачі. В залежності від педагогічної ситуації одна і та сама задача може вважатись напівалгоритмічною і може не вважатись такою. Зокрема, більшість задач на побудову на зображеннях доцільно розглядати як напівалгоритмічні.

Нестандартні (евристичні) задачі мають чітко виражену розвиваючу функцію. До них відносяться ті задачі, для розв’язання яких слід виявити деякі заховані зв’язки між елементами умови та вимоги або знайти спосіб розв’язання, який не є очевидною конкретизацією деякого узагальненого правила, відомого учню. Клас евристичних задач надзвичайно великий. До них відносяться задачі, що містять один, два або більше неявних зв’язків між елементами задачі. В процесі розв’язування нестандартних задач учень використовує та свідомо переносить в нову ситуацію ті прийоми, що сформовані в його попередній діяльності, пов'язаній з практикою розв'язування задач. До таких прийомів можна віднести: переформулювання умови та вимоги, складання допоміжних задач, співставлення проміжних висновків з вимогою задачі, дослідження часткових та граничних випадків, заміна способу дії на обернений до нього, використання аналогії та ін. [6].

Нестандартні задачі інколи називають задачами підвищеної складності або підвищеної трудності. Слід розрізняти складність задачі як об'єктивну якість, притаманну в певній мірі кожній задачі, і трудність задачі, яка відображає відношення між задачею і тим, хто її розв'язує. Поняття "трудність задачі" носить суто прагматичний характер. Щоб полегшити для учнів розв'язування задач (зменшити для них трудність задач), слід побудувати систему задач так, щоб при розв'язанні особливо "складних" задач можна було б спиратись на раніше розв'язані задачі – компоненти.

Проаналізуємо характер певної конкретної задачі в рамках тієї чи іншої типології. Розглянемо для прикладу таку задачу: "Об'єм правильної чотирикутної призми дорівнює 125 $см^3$. Якими повинні бути її розміри, щоб площа поверхні була найменшою?" За функціями в навчанні цю задачу слід віднести до задач пізнавального або розвиваючого характеру (в залежності від конкретної педагогічної ситуації). За характером вимоги – це задача на обчислення. За кількістю розв'язків – це визначена задача. За своїм математичним змістом – це геометрична (стереометрична) задача; при цьому розв'язувати її доцільно, використовуючи апарат математичного аналізу. За наявністю готового алгоритму – це напівалгоритмічна (нешаблонна) задача.

Подальший розвиток теми цієї задачі дозволяє сформулювати такі два послідовних узагальнення для неї:

а) Правильна чотирикутна призма має об'єм V. Якими мають бути її розміри, щоб площа поверхні призми була найменшою?

б) Прямокутний паралелепіпед має об'єм V. Знайти його розміри, при яких площа поверхні була б найменшою.

Ознайомлення майбутніх вчителів математики з елементами теорії задач спирається перш за все на їх власний практичний досвід, пов'язаний з розв'язуванням великої кількості задач. Разом з тим формування такого професійного вміння, як вміння провести методичний аналіз задач, вимагає спеціально організованої навчальної діяльності на практичних і лабораторних заняттях з методики викладання математики.

Література:

1. Балл Г.А. Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект. – М.: Педагогика, 1990.
2. Гурова Л.Л. Психологический анализ решения задач. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1976.
3. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Ч. 1, 2. – М.: Просвещение, 1977.

4. Ольбинский И.Б. Развитие задачи // Математика в школе. – 1998. – №2. – С. 15–18.
5. Рогановский Н.М. Методика преподавания математики в средней школе: Учеб. пособие. – Мн.: Вышэйшая школа, 1990.
6. Цукарь А.Я. О типологии задач // Современные проблемы методики преподавания математики: Сб. статей. – М.: Просвещение, 1985. – С. 132 -139.

РОЗВИТОК МАТЕМАТИЧНОЇ МОВИ ШКОЛЯРІВ У ПРОЦЕСІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ

Л.О. Черних, О.І. Матієк
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Розв'язування задач у навчальній діяльності учнів вимагає не тільки математичних навичок, але і певної мовної культури, зокрема вміння підійти до формулювання задачі як до особливого типу текста на рідній мові, тобто вміння розв'язати традиційну лінгвістичну проблему – аналіз тексту. Вчитель математики виступає при цьому у двох ролях – математика та лінгвіста.

Більш того, при розв'язанні задач лінгвістична діяльність, як правило, передує математичній. Дійсно, до безпосередньо математичної діяльності відноситься тільки процес розв'язання рівнянь, нерівностей і т.ін., тоді як сам спосіб їх отримання складає не тільки математичну проблематику, але і в значній мірі пов'язаний з розбором лінгвістичного матеріалу. Великі можливості для розвитку мови учнів містить в собі робота з текстовими задачами. Текстова задача – це особливий вид завдань, який вимагає аналізу описаної в тексті ситуації з метою виділення даних і шуканих, встановлення відносин і зв'язків «причина-наслідок» між ними, знаходження послідовності виконання тих або інших дій і т.д. Ці важливі уміння формуються в процесі виконання таких завдань:

1. Виділити в тексті задачі ключові слова.
2. Розділити текст задачі на смислові частини.
3. Скласти задачу за запропонованою моделлю (схемою, коротким записом, кресленням, виразом, малюнком і т.п.).
4. Переформулювати текст задачі та ін.

Успішність оволодіння школярами вмінням розв'язувати задачі багато в чому залежить від розуміння ними прочитаного тексту. Математичний текст – це особливий текст, і треба спеціально вчити дітей читати його. Невміння читати математичний текст є однією з істотних причин труднощів при вивченні математики. Вчителю важливо навчити дітей читати текст задачі частинами, робити наголос на числових даних і на словах, які визначають вибір арифметичних дій. Важливість формування цього вміння полягає в тому, що пошук розв'язання будь-якої задачі полягає у висуненні гіпотези, перевірки правильності цієї гіпотези і здатності висунути іншу гіпотезу, якщо перша виявилася хибною.

В математиці багато специфічних термінів, властивих саме цій науці, проте є і такі, які мають міжпредметне значення. Такими є, наприклад, логічні поняття: «кожний», «будь-який», «деякі», «хоча б один», «тільки один» і т. ін. Вживання цих слів у мові робить її змістовною, короткою, точною. В курсі математики достатньо можливостей для формування вмінь вживати ці слова в мові. Зрозуміло, тут необхідно обмовитися, що кожне з них вимагає попереднього розкриття свого змісту. Необхідно навчити дітей встановлювати логічні відносини між частинами умови, як ті, що виражені явно, так і приховані; відновлювати відсутні кванторні слова.

Уміння ділити текст на смислові частини є важливим етапом у роботі над текстом задачі на лексичному рівні. При навчанні розв'язуванню простих задач йдеться про уміння виділяти в тексті задачі умову і вимогу. При цьому важливо організувати діяльність учнів так, щоб вони виконували цю операцію, спираючись не тільки на зовнішні ознаки (текст задачі представлений двома реченнями: перше речення – розповідне – умова задачі, друге речення – запитальне – питання задачі). Для цього учням слід пропонувати тексти різних конструкцій. Сутність роботи з формування вміння ділити текст складних задач на смислові частини полягає в тому, щоб навчити дітей виділяти в даній задачі окремі, менш складні задачі, послідовне розв'язання яких дозволяє отримати відповідь на вимогу даної.

В системі роботи з розвитку усної мови велику роль відіграє переказ. На заняттях він використовується при викладі змісту прочитаного тексту, завдань до вправ, умов задач, повідомлень вчителя і в багатьох інших випадках. Засвоюючи техніку переказу, школяр вчиться умінню повно і логічно грамотно передавати зміст прочитаного і почутого, правильно вживати загальні і спеціальні поняття і терміни.

На уроках математики переказ тексту часто пов'язаний з розбором змісту текстових задач. Цей розбір дозволяє з'ясувати, як діти осмислили зміст задачі, як вони уявляють собі описану в ній ситуацію. Вчитель може запропонувати повторити задачу, учень повинен переказати текст задачі своїми словами і за допомогою підручника назвати необхідні числові дані і питання. Добре, якщо при такому повторенні учні будуть привчені робити первинний аналіз задачі у формі: «Нам відомо ..., потрібно взнати ...», «В умові задачі сказано ..., вимагається знайти ...» і т.п.

Розвитку уміння учнів передавати зміст прочитаного тексту сприяє такий методичний прийом, як переформулювання тексту задачі. Переформулювання тексту задачі полягає в заміні даного в задачі опису деякої ситуації іншим описом, що зберігає всі первинні відносини, зв'язки, якісні характеристики, але більш явно їх підкреслює. Вся зайва, несуттєва інформація при цьому відкидається, текст задачі перетворюється у форму, що полегшує пошук шляху розв'язання. В ході переформулювання виділяються основні ситуації, про які йдеться в задачі. Цей методичний прийом доцільно використовувати при навчанні школярів розв'язанню не тільки складних, але і простих задач, виражених в непрямій формі, розв'язання яких, як правило, викликає в учнів певні труднощі.

При навчанні розв'язанню подібних задач слід вчити дітей аналізувати текст задачі і замислюватися над тим, яке число вийде в результаті розв'язання – більше або менше, ніж дане число. Корисно вчити дітей переформульовувати задачу і виражати її в прямій формі.

Розглянемо на прикладі задачі: «У двох спортивних секціях займаються 36 учнів. В одній з них учнів у 3 рази більше, ніж в іншій. Скільки учнів займаються в кожній секції?»

Наведемо міркування, які призводять до переформулювання тексту даної задачі, що полегшує пошук шляху її розв’язання.

Кількість учнів у секції, меншій за чисельністю, приймемо за 1 частину. Учнів в іншій секції в 3 рази більше, тобто 3 таких частини. Тепер задачу можна сформулювати так: «У двох спортивних секціях займаються 36 учнів. В одній з них 1 частина, в іншій – 3 частини. Скільки учнів займаються в кожній секції?»

Текст останньої задачі дозволяє учням перейти до стандартної для них схеми (моделі), орієнтуючись на яку їм простіше знайти її розв’язання.

Лексичний рівень розвитку мови відпрацьовується і в ході формування уміння виділяти головні слова в тексті задачі. Тільки в тому випадку, коли школярі самостійно і осмислено пройдуть весь шлях скорочення тексту задачі до повного виключення з нього всіх слів, які не чинять впливу на хід розв’язання задачі, створюється сприятлива можливість для переходу від тексту задачі до її моделі. На початковому рівні учням пропонуються тексти задач, в яких «зайві слова» представлені явно. Працюючи з таким матеріалом, ми маємо нагоду впливати не тільки на вимовний, синтаксичний рівень розвитку мови, але і на граматичний, оскільки тут на перше місце постає робота з побудови синтаксичних конструкцій: словосполучень, речень.

В цій роботі важливо, наскільки чітко і грамотно вчитель ставитиме перед учнями проблему, наскільки вміло направлятиме хід їхніх міркувань. Від цього залежить успіх розумової діяльності дітей. При вивченні математики учні вчаться правильно будувати і обґрунтовувати свої думки. Тут школярі вперше зустрічають високу вимогливість до повноти аргументування. В математиці аргументування, яке не має характеру повної, абсолютної вичерпності, що залишає хоча б найменшу можливість обґрунтованого заперечення, визнається помилковим і відкидається.

В ході виконання різних вправ необхідно привчати школярів міркувати, з’ясовувати зв’язок «причина – наслідок», обґрунтовувати свою точку зору. При цьому учні проводять логічні міркування і формулюють з них певні висновки, які є обґрунтовуванням виконуваних дій. Ці завдання вимагають від школяра уміння послідовно, чітко і зв’язно виражати свої думки.

Розвиток мови учнів – процес безперервний. Він не може бути обмежений рамками того або іншого уроку. Ефективність цього процесу залежить від ступеня пізнавальної активності учнів, від їх зацікавленості в тому або іншому предметі. Щоб привернути увагу дитини до математики, а заразом і збагатити її мову новими словами, корисно на уроках і позакласних заняттях використовувати історичний і цікавий матеріал, спонукати учнів до виконання творчих завдань (складати математичні кросворди, загадки, казки;

робити добірку прислів'їв, приказок, крилатих слів і виразів і т.п.).

Так, при вивченні теми «Геометрична та арифметична прогресії» один з учнів може розповісти про походження слова «прогресія».

Термін походить від латинського *progredior* – «іду вперед»; *progression* – «рух вперед», «успіх», «поступове підсилення». Задачі на прогресії знаходять у математичних рукописах найдавніших часів – у папірусі Рінда, вавілонських астрономічних таблицях. Знак для геометричної прогресії ввів В. Оутред (1631). Це позначення відразу набуло широкого поширення. Назва «геометрична» пояснюється тим, що будь-який її член є середнім геометричним між двома сусідніми. Для позначення арифметичної прогресії вживали різні знаки. Символ «÷» став загальновживаним завдяки роботам французьких математиків Т. Ланьї (1692), де Белідора (1725), Е. Безу (1797) та ін. Формулу суми нескінченої геометричної прогресії вивів Е. Торрічеллі.

На завершення підкреслимо, що поновлення відсутніх елементів, ділення тексту на смислові частини, переказ, переформулювання, а також інші операції над вихідним текстом задачі не означають будь-якого виправлення тексту. Ці операції направлені виключно на полегшення сприйняття понятійного змісту задачі.

Точність і лаконічність математичної мови сприяє не тільки засвоєнню математичних знань, умінню описати хід розв'язання задачі, числового виразу, свідомому виконанню дій. Принципово важливим є навчання математичної мові як специфічного засобу комунікації в її зіставленні з реальною мовою. Грамотна математична мова є свідченням чіткого і організованого мислення; володіння цією мовою, розуміння точного змісту речень, логічних зв'язків між реченнями розповсюджується і на опанування природної мови, і тим самим дає вагомий внесок у формування і розвиток мислення людини в цілому. Тому вчителю необхідно стежити не тільки за правильністю розв'язування задач, але і за правильною вимовою слів, грамотністю написання, правильним стилем при побудові речень.

Література:

1. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
2. Жохов В.П. Преподавание математики в 5–6 классах: Метод. рекоменд. для учителей. – М.: Вербум, 2002. – 314 с.
3. Ковалев В.А. Что такое математический язык? // Математика в школе. – 1998. – №6. – С. 76–78.
4. Крейдлин Г.Е., Шмелев А.Д. Языковая деятельность и решение задач // Математика в школе. – 1989. – №3. – С. 39–45.
5. Столяр А.А., Рогановский Н.М. Основы современной школьной математики. Ч.1. – Мн.: «Нар. асвета», 1975. – 240 с.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ, СВОДЯЩИХСЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

О.В. Небратенко, Т.А. Ярхо
г. Харьков, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
jneb1970@pisem.net

В течение многих лет задачи с параметрами постоянно предлагались абитуриентам на вступительных экзаменах во многие вузы. В последние годы эти задачи включают в тестовые задания вступительных экзаменов в различные университеты, а также в задания внешнего тестирования по математике выпускников школ. Это связано с высокой диагностической ценностью указанных задач, позволяющих проверить не только знание основных разделов математики, но и уровень математического и логического мышления, а также первоначальные навыки в самостоятельном проведении исследования, что чрезвычайно важно для будущих специалистов.

В школьном курсе математики для задач с параметрами в лучшем случае предусмотрен ознакомительный уровень, которого явно недостаточно для приобретения умения и навыков их решения. В этой связи особую значимость имеет обучение решению указанных задач на факультетах довузовской подготовки университетов в рамках программ подготовительных отделений и курсов.

Настоящая работа посвящена методике решения класса задач с параметрами, связанных с расположением корней квадратичной функции, к исследованию которой сводится множество вопросов из разных разделов математики.

Напомним, что выражение

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c}\ (\boldsymbol{a}\neq 0)$$

называется квадратным трехчленом.

Графиком соответствующей квадратичной функции

$$\boldsymbol{y=ax^2+bx+c}$$

является парабола, ветви которой при $\boldsymbol{a}>0$ направлены вверх, а при $\boldsymbol{a}<0$ – вниз.

В зависимости от величины дискриминанта

$$Д=\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{ac},$$

имеют место различные случаи расположения параболы относительно оси Оx (рис. 1).

$$\boldsymbol{x}_0=-\frac{\boldsymbol{b}}{2\boldsymbol{a}}$$ – абсцисса вершины параболы.

Выделим два наиболее распространенных типа задач, связанных с расположением корней квадратичной функции.

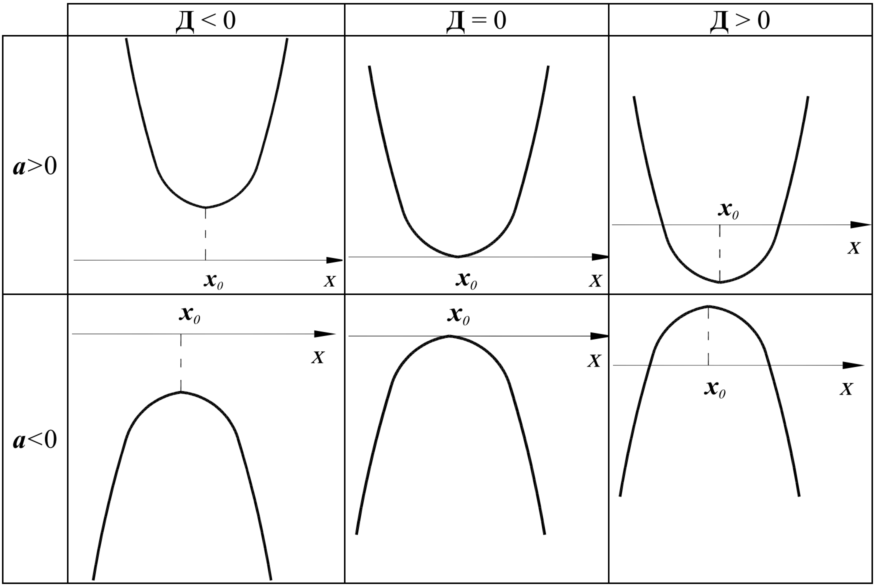


Рис. 1

К первому типу относятся задачи, в которых изучается расположение корней относительно заданной точки $\boldsymbol{A}$. Возможны три случая (не считая отсутствия корней): оба корня больше $\boldsymbol{A}$, оба корня меньше $\boldsymbol{A}$, один из корней меньше, а другой больше $\boldsymbol{A}$.

В задачах второго типа исследуется расположение корней относительно заданного отрезка $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$.

Для решения указанных задач на первый взгляд представляется естественным найти корни $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ квадратичной функции (если они существуют) и сопоставить их с заданной точкой $\boldsymbol{A}$ (или точками $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$).

<u>Пример 1.</u> Найти все значения параметра $\boldsymbol{m}$, при которых один из корней уравнения

$$\boldsymbol{x}^2-(2\boldsymbol{m}+5)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m}^2+5\boldsymbol{m}+4=0$$

находится между числами 0 и 2, а второй между числами 3 и 5.

Решение. Вычислим дискриминант

$$Д=(2\boldsymbol{m}+5)^2-4(\boldsymbol{m}^2+5\boldsymbol{m}+4)=9>0,$$

а затем корни данного квадратного уравнения

$$\boldsymbol{x}_1=\frac{2\boldsymbol{m}+5-3}{2}=\boldsymbol{m}+1; \quad \boldsymbol{x}_2=\frac{2\boldsymbol{m}+5+3}{2}=\boldsymbol{m}+4.$$

Очевидно, что $\boldsymbol{x}_1<\boldsymbol{x}_2$.

По условию $\begin{cases} 0<\boldsymbol{x}_1<2 \\ 3<\boldsymbol{x}_2<5, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} 0<\boldsymbol{m}+1<2 \\ 3<\boldsymbol{m}+4<5, \end{cases}$ откуда $-1<\boldsymbol{m}<1$.

Ответ: $\boldsymbol{m}\in(-1, 1)$.

Заметим, однако, что предложенный путь непосредственного нахождения корней $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ оправдан лишь в тех случаях, когда дискриминант квадратичной функции представляет собой полный квадрат. При невыполнении указанного условия (что встречается в большинстве задач) применение указанного подхода может повлечь за собой большие технические трудности.

Пример 2. При каких значениях параметра $\boldsymbol{m}$ число 2 находится между корнями квадратного уравнения $\boldsymbol{x}^2-(4\boldsymbol{m}+5)\boldsymbol{x}+3-2\boldsymbol{m}=0$?

Решение. Вычислим дискриминант

$$Д=(4\boldsymbol{m}+5)^2-4(3-2\boldsymbol{m})=16\boldsymbol{m}^2+40\boldsymbol{m}+25-12+8\boldsymbol{m}=16\boldsymbol{m}^2+48\boldsymbol{m}+13.$$

Поскольку из условия задачи следует, что $\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2$, то должно быть выполнено требование $Д>0$.

Найдем корни $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ данного квадратного уравнения

$$\boldsymbol{x}_1=\frac{4\boldsymbol{m}+5-\sqrt{16\boldsymbol{m}^2+48\boldsymbol{m}+13}}{2};\quad \boldsymbol{x}_2=\frac{4\boldsymbol{m}+5+\sqrt{16\boldsymbol{m}^2+48\boldsymbol{m}+13}}{2}.$$

Искомое значение параметра $\boldsymbol{m}$ можно найти, решив систему неравенств

$$\begin{cases}\textbf{Д}>0\\ \boldsymbol{x}_1<2\\ \boldsymbol{x}_2>2\end{cases}\text{ или }\begin{cases}16\boldsymbol{m}^2+48\boldsymbol{m}+13>0\\ \dfrac{4\boldsymbol{m}+5-\sqrt{16\boldsymbol{m}^2+48\boldsymbol{m}+13}}{2}<2\\ \dfrac{4\boldsymbol{m}+5+\sqrt{16\boldsymbol{m}^2+48\boldsymbol{m}+13}}{2}>2\end{cases}.$$

Ясно, что в связи со сложностью решения последней системы для данной задачи выбранный путь решения не оправдан.

Приведем формулировку теоремы, содержащей, в частности, необходимые и достаточные условия расположения корней квадратной функции по разные стороны от числа $\boldsymbol{A}$ [1].

Теорема. Пусть числа $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ ($\boldsymbol{x}_1<\boldsymbol{x}_2$) – корни квадратичной функции

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c},$$

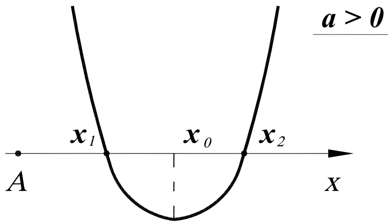
где $Д=\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{ac}>0$, $\boldsymbol{a}\neq0$, и пусть заданы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – некоторые точки на оси Оx. Тогда

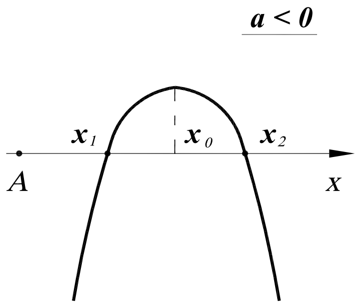
1. Оба корня больше числа $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{x}_1>\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{x}_2<\boldsymbol{A}$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}>0\\ \boldsymbol{x}_0=-\dfrac{\boldsymbol{b}}{2\boldsymbol{a}}>\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})>0\end{cases}\qquad\text{или}\qquad\begin{cases}\boldsymbol{a}<0\\ \boldsymbol{x}_0=-\dfrac{\boldsymbol{b}}{2\boldsymbol{a}}>\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})<0\end{cases}\qquad(1)$$



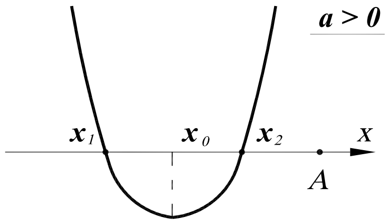


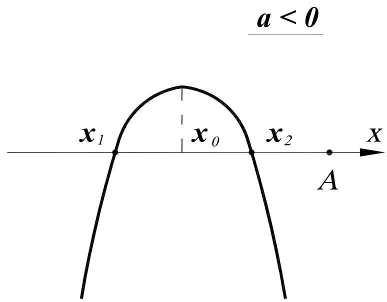
2. Оба корня меньше числа $\boldsymbol{A}$:

$$x_1<A,\ x_2<A$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a>0 \\ x_0=-\dfrac{b}{2a}<A \\ f(A)>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a<0 \\ x_0=-\dfrac{b}{2a}<A \\ f(A)<0 \end{cases} \qquad (2)$$

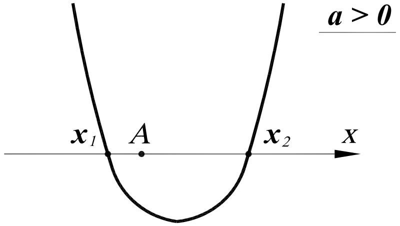


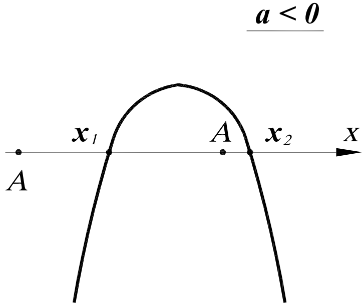


3. Один корень меньше числа $\boldsymbol{A}$, другой корень больше числа $\boldsymbol{A}$ (корни лежат по разные стороны от числа $\boldsymbol{A}$):

$$x_1<A<x_2$$

тогда и только тогда, когда





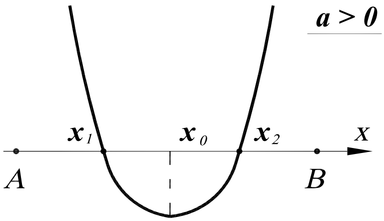
$$\begin{cases} a > 0 \\ f(A) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0 \\ f(A) > 0 \end{cases} \qquad (3)$$

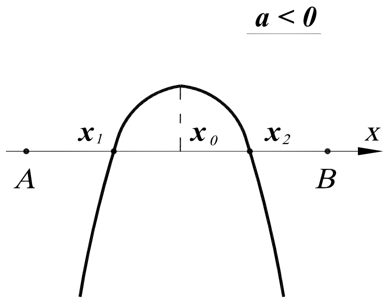
4. Оба корня лежат между точками A и B

$$A<x_1<B;\ A<x_2<B$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0 \\ A < x_0 < B \\ f(A) > 0 \\ f(B) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0 \\ A < x_0 < B \\ f(A) < 0 \\ f(B) < 0 \end{cases} \qquad (4)$$



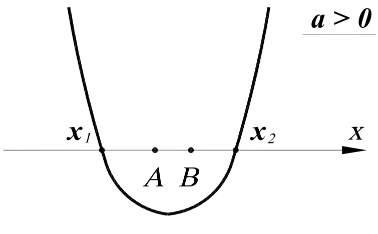


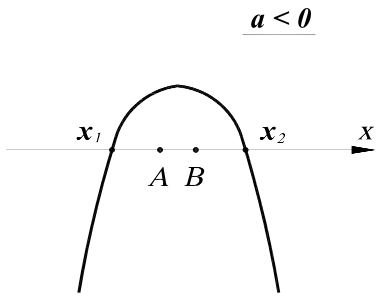
5. Корни лежат по разные стороны от отрезка [A, B]:

$$x_1<A<B<x_2$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0 \\ f(A) < 0 \\ f(B) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0 \\ f(A) > 0 \\ f(B) > 0 \end{cases} \qquad (5)$$





Воспользуемся утверждением 3 теоремы для решения примера 2. Здесь

$$f(x)=x^2-(4m+5)x+3-2m=0.$$

Поскольку $a=1>0$, то достаточно потребовать выполнения неравенства

$$f(2)=2^2-(4m+5)\cdot 2+3-2m<0,$$

откуда $-3-10\boldsymbol{m}<0$ или $\boldsymbol{m} > -\dfrac{3}{10}$.

Ответ: $\boldsymbol{m} > -\dfrac{3}{10}$.

Заметим, что сформулированные в теореме необходимые и достаточные условия не следует заучивать. Нужно понять принцип их получения из геометрических соображений и проводить соответствующие рассуждения при решении конкретных задач. То есть для любого свойства, сформулированного на алгебраическом языке, необходимо давать геометрическую интерпретацию на графике. И наоборот, любое свойство графика нужно уметь описать аналитическими условиями [2].

Получим, например, из геометрических соображений необходимые и достаточные условия того, что оба корня $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ больше некоторого числа $\boldsymbol{A}$, сформулированные в утверждении 1 теоремы.

Рассмотрим случай $\boldsymbol{a}>0$ (случай $\boldsymbol{a}<0$ анализируется аналогично).

Изобразим соответствующее расположение параболы относительно оси Оx.

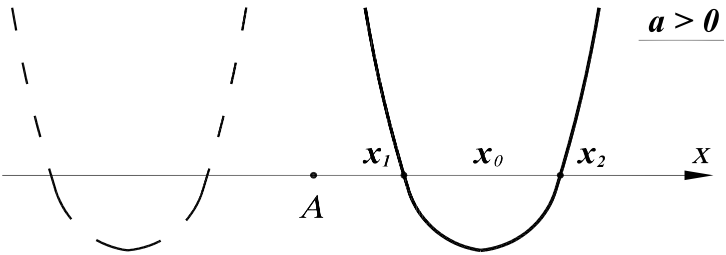


Рис. 2

Значение $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{A}$ положительно

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})>0. \tag{6}$$

Однако, одного этого условия еще недостаточно для выполнения

$$\boldsymbol{x}_1>\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{x}_2<\boldsymbol{A}. \tag{7}$$

На рис. 2 пунктиром изображен график квадратичной функции, обладающий свойством (6), но не удовлетворяющей условиям (7).

Для того, чтобы «отфильтровать» такие «посторонние» квадратичные функции, достаточно потребовать, чтобы абсцисса вершины параболы лежала правее точки $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{x}_0 = -\frac{\boldsymbol{b}}{2\boldsymbol{a}} > \boldsymbol{A}\,.$$

Таким образом, геометрическая интерпретация задачи привела к системе

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} > 0 \\ \boldsymbol{x}_0 = -\dfrac{\boldsymbol{b}}{2\boldsymbol{a}} > \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) > 0 \end{cases}.$$

В заключение, рассмотрим решение задачи, основанное на утверждении 4 теоремы.

Пример 3. При каких значениях параметра $\boldsymbol{m}$ оба различных корня уравнения $(\boldsymbol{m}-1)\boldsymbol{x}^2-(\boldsymbol{m}+1)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m}=0$ удовлетворяют условию $0<\boldsymbol{x}<3$.

Решение. Обозначим

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{m}-1)\boldsymbol{x}^2-(\boldsymbol{m}+1)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m}=0.$$

Из условия задачи функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ имеет два различных корня, поэтому

$$\boldsymbol{m}\neq 1 \text{ и } Д=(\boldsymbol{m}+1)^2-4(\boldsymbol{m}-1)\boldsymbol{m}>0.$$

Решим последнее неравенство. Получим

$$\boldsymbol{m}^2+2\boldsymbol{m}+1-4\boldsymbol{m}^2+4\boldsymbol{m}>0; \quad -3\boldsymbol{m}^2+6\boldsymbol{m}+1>0;$$

$$3\boldsymbol{m}^2-6\boldsymbol{m}-1<0; \qquad \left(\boldsymbol{m}-\frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right)\left(\boldsymbol{m}-\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)<0,$$

следовательно,

$$\boldsymbol{m}\in\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3},\quad \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{m}\in\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3},\quad \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right),\ \boldsymbol{m}\neq 1. \tag{8}$$

Необходимым и достаточным условием того, что $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ имеет все корни внутри отрезка [0, 3], согласно (4), будет выполнение следующий совокупности систем неравенств, в которой $\boldsymbol{x}_0=\dfrac{\boldsymbol{m}+1}{2(\boldsymbol{m}-1)}$:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \boldsymbol{m}-1>0 \\ 0<\boldsymbol{x}_0<3 \\ \boldsymbol{f}(0)>0 \\ \boldsymbol{f}(3)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \boldsymbol{m}-1<0 \\ 0<\boldsymbol{x}_0<3 \\ \boldsymbol{f}(0)<0 \\ \boldsymbol{f}(3)<0 \end{cases} \end{array}\right., \text{ что равносильно } \begin{cases} (\boldsymbol{m}-1)\boldsymbol{f}(0)>0 \\ (\boldsymbol{m}-1)\boldsymbol{f}(3)>0 \\ 0<\dfrac{\boldsymbol{m}+1}{2(\boldsymbol{m}-1)}<3. \end{cases}$$

Поскольку

$f(0)=m$; $f(3)=(m-1)\cdot 9-(m+1)\cdot 3+m=7m-12$, имеем

$$\begin{cases} m(m-1)>0 \\ (m-1)(7m-12)>0 \\ \dfrac{m+1}{m-1}>0 \\ \dfrac{m+1}{2(m-1)}<3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} m(m-1)>0 \\ (m-1)(7m-12)>0 \\ \dfrac{m+1}{m-1}>0 \\ \dfrac{5m-7}{m-1}>0. \end{cases}$$

Решив каждое из неравенств методом интервалов, получим

$$\begin{cases} m\in(0,1) \\ m\in(-\infty,1)\cup\left(\dfrac{12}{7},+\infty,\right) \\ m\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty,) \\ m\in(-\infty,-1)\cup\left(\dfrac{7}{5},+\infty,\right) \end{cases}, \text{ откуда}$$

С учетом условий (8) получаем

$$m\in\left(\frac{12}{7},\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Ответ: $m\in\left(\dfrac{12}{7},\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Литература:

1. Игудисман О.С. Математика на устном экзамене. Пособие для поступающих в вузы с повышенными требованиями по математике. – М.: Московский лицей, 1995. – 192 с.
2. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. – М.: Наука, 1970. – 640 с.
3. Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами. – М.: Просвещение, 1986. – 128 с.

ПРО ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ У ВИКЛАДАННІ МАТЕМАТИКИ

П.І. Ульшин, Н.О. Пиреу
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Індукція використовується як в елементарній, так і у вищій математиці. В середній школі нею користуються при виведенні правил подільності чисел, при вивченні дій над раціональними числами, при доведенні формул арифметичної і геометричної прогресій, при вивченні властивостей логарифмів. Використовується метод математичної індукції в алгебрі, теорії чисел, вищій геометрії, математичному аналізі, теорії функцій тощо. Індукція або індуктивний метод полягає у встановленні загального висновку, основаного на вивченні властивостей часткових фактів (об'єктів, фігур, чисел і т.д.). Слово індукція походить від латинського *inductio*, що означає наведення.

Індукція може бути повною, якщо загальний висновок зроблено на основі вивчення всіх часткових фактів, або неповною, якщо загальний висновок робиться на основі лише частини множини всіх фактів. В зв'язку з цим вона може привести як до вірних, так і до невірних висновків. Про це свідчать приклади із раніше проведених досліджень [1].

Часто при доведеннях тверджень користуються методом математичної індукції. Суть цього методу полягає в слідуючому:

1. Перевіряється вірність даного твердження при найменшому числі n.
2. Припускається, що твердження вірне для будь-якого натурального числа n і доводиться вірність його для числа $n+1$.

Цей метод встановлено на основі логічних міркувань і розглядається як принцип (аксіома) математичної індукції. Обидві частини цього принципу обов'язкові. Перша частина вказує на те, що існує натуральне число, яке задовольняє твердження. Найменше натуральне число n не обов'язково дорівнює одиниці. Якщомова йде про сторони многокутників, то найменша кількість їх у трикутнику (n=3). У другій частині припущення про вірність твердження можна розглядати для всіх чисел менших від n, а потім доводити вірність його для n. Такий підхід теж відповідає даному принципу.

Математична індукція є строгим дедуктивним методом доведень, але, як і будь-яка дедукція, він включає в себе і елементи індукції, тобто безпосередньої перевірки розглянутого твердження для найменшого числа n.

Замітимо, що в початковій школі вчителі більше використовують індукцію, тобто розглядають конкретні наочні доведення, які не стільки доводяться, скільки переконують учнів. Дедуктивні міркування і доведення проводяться після індуктивних у старших класах. У вищих учбових закладах метод математичної індукції використовують у різних розділах математики.

Розглянемо деякі цікаві випадки ефективного використання методу математичної індукції на конкретних прикладах.

<u>Приклад 1</u>. Розв'язати рівняння: $2^{[x]}=1+2x$, де $[x]$ – ціла частина числа x.

<u>Розв'язання</u>. Згідно означення, $[x] = n$, якщо $x = n + \{x\}$, де n – ціла частина, а $\{x\}$ – дробова частина числа x, причому $0 \le \{x\} < 1$.

Запишемо дане рівняння в такому вигляді:

$$2^{[x]-1} = \frac{1}{2} + x \text{ або } 2^{n-1} = \frac{1}{2} + n + \{x\} \qquad (1)$$

Доведемо за допомогою методу математичної індукції, що для $n \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$ має місце нерівність:

$$2^{n-1} > \frac{1}{2} + n + \{x\} \qquad (2)$$

I. Нехай $n \in [4; +\infty)$.

1. Перевіримо при $n = 4$: $2^3 > \frac{1}{2} + 4 + \{x\}$, $\{x\} < \frac{7}{2}$.

2. Припустимо, що при $n = k$ вірна нерівність $2^{k-1} = \frac{1}{2} + k + \{x\}$. Доведемо нерівність при $n = k + 1$: $2^k > \frac{3}{2} + k + \{x\}$.

Поділивши одержану нерівність почленно на 2 і віднявши її від записаної за припущенням, маємо $\{x\} > -\frac{1}{2} - n$, при $n \ge 4$.

II. Нехай $n \in (-\infty;-2]$.

1. Перевіримо при $n = -2$: $\{x\} < \frac{13}{8}$.

2. Припустимо, що при $n = k$ вірна нерівність $2^{k-1} = 1/2 + k + \{x\}$. Аналогічно до попереднього випадку одержимо: $\{x\} > -1/2 - n$, при $n \le -2$.

Отже, нерівність (2) має місце для всіх чисел $n \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$, а рівняння (1) може задовольнятися цілими числами $n \in (-2; 4)$, тобто $n = -1; 0; 1; 2; 3$. Підставляючи ці числа в рівняння (1), одержимо: при $n=-1$, $\{x\} = \frac{3}{4}$; при $n = 0$, $\{x\} = 0$; при $n = 3$, $\{x\} = \frac{1}{2}$; при $n = 1$ і $n = 2$ рівняння не має розв'язків. Знайшовши цілі і дробові частини чисел, запишемо шукані корені даного рівняння: $x_1 = -\frac{1}{4}$; $x_2 = 0$; $x_3 = 3\frac{1}{2}$.

<u>Приклад 2</u>. Довести, що для многогранної однозначної поверхні, має місце рівняння

$$e + f - k = 1, \qquad (3)$$

де позначено кількість: e – вершин, f – граней, k – ребер.

<u>Розв'язання</u>. Застосуємо метод математичної індукції.

1. Перевіримо рівняння (3) для $f = 1$. В цьому випадку поверхня складається із однієї грані, яка є многокутником. Тому $e = k$ і формула (1) задово-

льняється: $k + 1 – k = 1$.

2. Зробимо розріз даної многогранної поверхні по k_0 ребрах, при якому вона розпадається на дві поверхні Φ_1 і Φ_2. Позначимо на поверхні Φ_1 кількість: e_1 – вершин, f_1 – граней, k_1 – ребер, а на поверхні Φ_2 кількість: e_2 – вершин, f_2 – граней, k_2 – ребер. Припустимо, що рівняння (1) виконується для будь-якої однозначної многогранної поверхні з кількістю граней, меншою за число f. У кожній із поверхонь Φ_1 і Φ_2 окремо кількість ребер менша від f, тому мають місце рівняння: $e_1 + f_1 – k_1 = 1$ і $e_2 + f_2 – k_2 = 1$. Додавши почленно ці рівняння, одержимо:

$$(e_1 + e_2) + (f_1 + f_2) – (k_1 + k_2) = 2 \qquad (4)$$

Визначимо суми, що стоять у дужках, через характеристики даної поверхні: $e_1+e_2=e+k_0+1$, $f_1+f_2=f$, $k_1+k_2=k+k_0$. Підставимо одержані значення в рівняння (4). Після елементарних перетворень маємо: $e+f–k=1$.

Твердження доведено.

***Приклад* 3.** Довести, що

$$1 + x + x^2 + x^3 +\ldots+ x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \qquad (5)$$

де $n \in N$.

Розв'язання. Застосуємо метод математичної індукції:

1. Перевіримо рівність (5) при $n = 1$. В цьому випадку отримуємо:

$$1+x=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1.$$

2. Припустимо, що при $n=k$ вірна рівність $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k=\frac{x^{k+1}-1}{x-1}$.

Доведемо рівність при $n = k +1$: $1 + x + x^2 + x^3 +\ldots+ x^k + x^{k+1} = \frac{x^{k+2}-1}{x-1}$.

Дійсно:

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k+x^{k+1}=(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k)+x^{k+1}=\frac{x^{k+1}-1}{x-1}+x^{k+1}=\frac{x^{k+1}-1}{x-1}.$$

Твердження доведено.

Отже, метод математичної індукції можна ефективно використовувати при розв'язуванні рівнянь з ціло-дробовими функціями, при доведенні показникових нерівностей, при вивченні властивостей многогранних поверхонь тощо.

Використання методу математичної індукції забезпечує ефективне розв'язування задач із різних розділів математики, спрямовує розумову діяльність учнів під час навчання, сприяє розвитку логічного мислення.

Література:

1. Головина Л.И., Яглом И.М. Индукция в геометрии. – М.: Гостехиздат, 1956. – 99 с.

ДВОЧЛЕННІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

С.П. Ткаченко
м. Кіровоград, Технікум Кіровоградського національного технічного університету
serro@ukr.net

Досить часто у підручниках та посібниках при розв'язуванні нерівностей зустрічається такий вислів "розв'язків немає". Причому не зауважується, що дійсних розв'язків немає. Немов би в множині комплексних чисел **C**, у випадку нестрогих нерівностей, не можна знайти частину розв'язків, розглядаючи граничний випадок, тобто рівняння. Зрозуміло, що якщо замість знака нерівності стоїть знак "дорівнює", то не важко знайти різні способи розв'язання таких рівнянь, і тоді вислів "розв'язків немає" стає більш коректнішим: "дійсних розв'язків немає, але існують комплексні". Можливо саме за допомогою апарату рівнянь і вдасться відшукати комплексні розв'язки нерівностей, які будуть задовольняти їх умови.

Враховуючи те, що з задачею відшукання коренів рівняння учні справляються набагато вправніше, ніж з задачею відшукання розв'язків нерівності, пропонуємо розв'язувати нерівності шляхом зведення їх до рівнянь. Запропонований у [1–3] метод розв'язування нерівностей можна використати і для розв'язання двочленних нерівностей.

1. ДВОЧЛЕННІ РІВНЯННЯ

Нагадаємо, що рівняння n-го степеня

$$ax^n \pm b = 0 \tag{1}$$

називається двочленним рівнянням. Розглянемо випадок, коли a і b дійсні. Заміною $x = y\sqrt[n]{\left|\frac{b}{a}\right|}$, , де $\sqrt[n]{z}$ – арифметичне значення кореня з z, рівняння (1) зводиться до рівняння $y^n \pm 1 = 0$, яке і будемо розглядати.

1.1. Двочленне рівняння $y^n - 1 = 0$

Дане рівняння при непарному n має один корінь $y = 1$. В множині комплексних чисел це рівняння має n коренів (з яких один дійсний і n–1 комплексних):

$$y_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, \;\; 1, \;\; 2, \;\; ..., \;\; n-1 \tag{2}$$

При парному n в множині дійсних чисел маємо два кореня: y_1=1, y_2=–1; а в множині комплексних чисел n коренів, які обчислюються за формулою (2).

1.2. Двочленне рівняння $y^n + 1 = 0$

Дане рівняння при непарному n має один дійсний корінь y= –1, а в множині комплексних чисел n коренів, які обчислюються за формулою

$$y_k = \cos\frac{\pi(2k+1)}{n} + i\sin\frac{\pi(2k+1)}{n}, \quad k = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ n-1 . \tag{3}$$

При парному n дійсних коренів немає. В множині комплексних чисел рівняння має n коренів, які обчислюються за формулою (3).

1.3. Загальний вигляд двочленного рівняння

Розглянемо рівняння (1) в загальному випадку. Перетворимо його до вигляду

$$x^n = \mp\frac{b}{a}. \tag{4}$$

Звідси випливає, що $|x| = \sqrt[n]{\left|\frac{b}{a}\right|}$ $\left(\mp\frac{b}{a} \in \mathbf{R}\right)$. Тоді

$$x_k = \sqrt[n]{\left|\mp\frac{b}{a}\right|}\left(\cos\frac{\arg\left(\mp\frac{b}{a}\right)+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg\left(\mp\frac{b}{a}\right)+2\pi k}{n}\right), \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1. \tag{5}$$

Очевидно, що корені лежать у вершинах правильного n-кутника, і всі зауваження щодо парності або непарності n, наведені в пп. 1.1, 1.2, теж мають місце.

Розв'язки рівняння $2x^3 + 16 = 0$

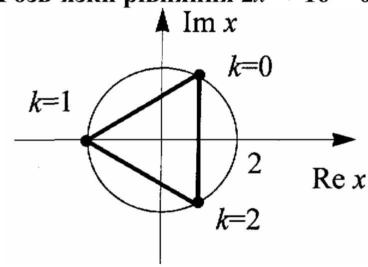


Рис. 1

Приклад 1. Розв'язати рівняння $2x^3 + 16 = 0$.

Розв'язання. Зведемо рівняння до вигляду (4): $2x^3 = -8$. За формулою (5) маємо

$$x_k = 2\left(\cos\frac{\pi(2k+1)}{3} + i\sin\frac{\pi(2k+1)}{3}\right), k = 0, 1, 2.$$

При $k = 0$ маємо $x = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}.$

При $k = 1$ маємо $x = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2.$

При $k = 2$ маємо $x = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$

Дані розв'язки є вершинами правильного трикутника, який вписано в коло радіуса 2 (рис. 1), і містяться на променях, які виходять з т. О і мають між собою кут π/3. Зробимо перевірку:

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 = 1+3i\sqrt{3}+3i^2\sqrt{3}+3i^3\sqrt{3} = 1+3i\sqrt{3}-9-3i\sqrt{3} = -8.$$

Отже, число $1+i\sqrt{3}$ є розв'язком даного рівняння.

2. ДВОЧЛЕННІ НЕРІВНОСТІ

Відповідно до означення двочленного рівняння, запишемо позначення двочленної нерівності n-го степеня: вираз

$$ax^n \pm b \vee 0, \qquad (6)$$

де $\vee = \{>, <, \geq, \leq\}$, називатимемо двочленною нерівністю. Розв'язувати дану нерівність пропонуємо зведенням останньої до рівняння, враховуючи нев'язку t (різницю між відповідними частинами нерівності в залежності від знаку), і використовуючи методи розв'язування рівнянь наведені вище.

2.1. Двочленна нерівність $ax^n - b < 0$ (a, $b > 0$)

Вводячи нев'язку t, прирівнюємо обидві частини нерівності $ax^n - b + t = 0$. Тоді загальний розв'язок даного рівняння можна знайти за формулою (5):

$$x_k = \sqrt[n]{\left|\frac{b-t}{a}\right|}\left(\cos\frac{\arg\left(\frac{b-t}{a}\right)+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg\left(\frac{b-t}{a}\right)+2\pi k}{n}\right),$$

$t>0$, $k=0, 1, 2, ..., n-1$.

Тоді якщо $b < t$, то $b - t < 0$, отже $\arg\left(\frac{b-t}{a}\right) = \pi$:

$$x_k = \sqrt[n]{\left|\frac{b-t}{a}\right|}\left(\cos\frac{\pi(2k+1)}{n} + i\sin\frac{\pi(2k+1)k}{n}\right), \quad t>0, \quad k = 0,1,2,...,n-1. \qquad (7)$$

А якщо $0 < t < b$, то $b - t > 0$, отже $\arg\left(\frac{b-t}{a}\right) = 0$:

$$x_m = \sqrt[n]{\left|\frac{b-t}{a}\right|}\left(\cos\frac{2\pi m}{n} + i\sin\frac{2\pi m}{n}\right), \quad t>0, \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-1. \qquad (8)$$

2.1.1. *n* – непарне. Тоді множина дійсних розв'язків нерівності буде $\left(-\infty;\ \sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)$, а в множині комплексних чисел розв'язки будуть розташовуватись на відрізках, які є радіусами n-кутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. Згідно формули (8) , а також на променях-продовженнях радіуса іншого n-кутника, який теж вписаний в коло радіуса $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, і отримується поворотом на кут π/n, згідно формули (7). Отже, множина розв'язків даної нерівності буде розташовуватись на n-променях, початки яких лежать на колі радіуса $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$.

2.1.2. *n* – парне. Тоді множина дійсних розв'язків нерівності буде $\left(-\sqrt[n]{\frac{b}{a}};\ \sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)$. В множині **C**, в силу формули (8) розв'язки будуть лежати на радіусах n-кутника, який вписаний в коло радіуса $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ а за формулою (7) ми отримаємо промені, які мають початок в т. O і проходять через вершини n-кутника, який отримується поворотом на кут π/n попереднього n-кутника.

2.2. Двочленна нерівність $ax^n - b > 0$ ($a, b > 0$)

Введемо нев'язку $t>0$ і прирівняємо обидві частини нерівності: $ax^n - b - t > 0$. Загальний розв'язок запишемо у вигляді

$$x_k = \sqrt[n]{\left|\frac{b+t}{a}\right|}\left(\cos\frac{\arg\left(\frac{b+t}{a}\right)+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg\left(\frac{b+t}{a}\right)+2\pi k}{n}\right),$$

$t>0$, $k=0, 1, 2, ..., n-1$.

Число $b + t > 0$, отже $\arg\left(\frac{b+t}{a}\right) = 0$, бо це число належить додатній частині осі Re x. Тоді

$$x_k = \sqrt[n]{\left|\frac{b+t}{a}\right|}\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right),\quad t>0,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-1. \qquad (9)$$

2.2.1. *n* – непарне. Множина дійсних розв'язків буде складатись з $x \in \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}};\ +\infty\right)$. А в множині комплексних чисел розв'язки будуть знаходитись на променях, які мають початок у вершинах n-кутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$.

2.2.2. *n* – парне. Тоді множина дійсних розв'язків буде складатись з усіх точок двох променів, які співпадають з віссю Re x і мають початки в точках $-\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$ та $\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$, тобто маємо проміжки $\left(-\infty;\ -\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}\right)\cup\left(\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}};\ +\infty\right)$. В множині C розв'язки будуть знаходитись на променях, які мають початок у вершинах n-кутника, вписаного в коло радіуса $-\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$.

2.3. Двочленна нерівність $ax^n + b < 0$ ($a, b > 0$)

За допомогою способу зведення нерівності до рівняння, вводячи нев'язку $t > 0$, отримаємо $ax^n + b + t = 0$. Загальний розв'язок даного рівняння запишемо у вигляді

$$x_k = \sqrt[n]{\left|\frac{-b-t}{a}\right|}\left(\cos\frac{\arg\left(\frac{-b-t}{a}\right)+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg\left(\frac{-b-t}{a}\right)+2\pi k}{n}\right),$$

$t>0$, $k=0, 1, 2, ..., n-1$.

При всіх $t > 0$ $\arg\left(\dfrac{-b-t}{a}\right)=\pi$, , тобто число $-(b + t)$ завжди знаходиться на від'ємній частині осі Re x.

2.3.1. *n* – непарне. В даному випадку дійсні значення будуть $\left(-\infty;\ -\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}\right)$. В множині комплексних чисел розв'язки будуть знаходитись на променях, які є продовженнями радіусів n-кутника ($n > 3$) і мають початок у вершинах n-кутника, який вписано в коло радіуса $\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$.

2.3.2. *n* – парне. В цьому випадку множина розв'язків містить лише комплексні числа, які знаходяться на променях, що є продовженнями радіусів n-кутника ($n > 3$) і мають початок у вершинах n-кутника, який вписано в коло радіуса $\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$.

2.4. Двочленна нерівність $ax^n + b > 0$ ($a, b > 0$)

Методом параметризації (параметр $t > 0$), зводимо дану нерівність до вигляду $ax^n + b - t = 0$. Тоді загальний розв'язок даного рівняння запишеться у вигляді:

$$x_k = \sqrt[n]{\left|\frac{t-b}{a}\right|}\left(\cos\frac{\arg\left(\frac{t-b}{a}\right)+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg\left(\frac{t-b}{a}\right)+2\pi k}{n}\right),$$

$t>0$, $k=0, 1, 2, ..., n-1$.

Тоді якщо $t > b,$ то $t - b > 0$, отже $\arg\left(\frac{t-b}{a}\right) = 0$:

$$x_k = \sqrt[n]{\left|\frac{t-b}{a}\right|}\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right), \quad t > 0, \quad k = 0, \ 1, \ 2, \ ..., \ n-1. \qquad (10)$$

А якщо $0 < t < b$, то $t - b < 0$, отже $\arg\left(\frac{b-t}{a}\right) = \pi$:

$$x_m = \sqrt[n]{\left|\frac{t-b}{a}\right|}\left(\cos\frac{\pi(2m+1)}{n} + i\sin\frac{\pi(2m+1)}{n}\right), \quad t > 0, \quad m = 0,1,2,...,n-1. \qquad (11)$$

2.3.1. *n* – непарне. В даному випадку множина дійсних розв’язків складається з проміжку $x \in \left(-\sqrt[n]{\frac{b}{a}}; \ +\infty\right)$. А в множині комплексних чисел розв’язки будуть розташовуватись на відрізках, які є радіусами n-кутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, згідно формули (10), а також на радіусах та їх продовженнях іншого n-кутника, який теж вписаний в коло радіуса $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, і отримується поворотом на кут π/n, згідно формули (11). Отже, множина розв’язків даної нерівності буде розташовуватись на n-променях, початки яких лежать на колі радіуса $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$.

2.3.2. *n* – парне. В цьому випадку множина дійсних розв’язків нерівності буде $(-\infty; +\infty)$.

В множині **C**, в силу формули (10) розв’язки будуть лежати на радіусах n-кутника, який вписано в коло радіуса $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, а за формулою (11) ми отримаємо промені, які мають початок в т. О і проходять через вершини n-кутника, який отримується поворотом на кут π/n, попереднього n-кутника.

Приклади розв’язків нерівностей наведемо в таблиці 1.

Таким чином, при застосуванні методу нев’язки до розв’язання двочленних нерівностей ми отримуємо не тільки дійсні, а й комплексні розв’язки.

Запропонований метод зведення двочленних нерівностей до двочленних рівнянь дозволяє використовувати все різноманіття методів розв’язання рівнянь, а також дає структуровану відповідь на питання оцінки близькості “лівої” і “правої” частин нерівності в кожній точці множини розв’язка.

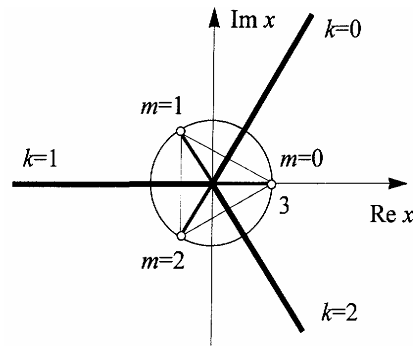
Цей підхід можна застосовувати при розгляданні довільних нерівностей з комплексними коефіцієнтами (параметрами).

Таблиця 1.

Приклади графічних і аналітичних розв'язків двочленних нерівностей

<table>
<tr>
<td>

Розв'язки нерівності $x^3-27<0$



$x_k=\sqrt[3]{|27-t|}\left(\cos\frac{\pi(2k+1)}{3}+\right.$

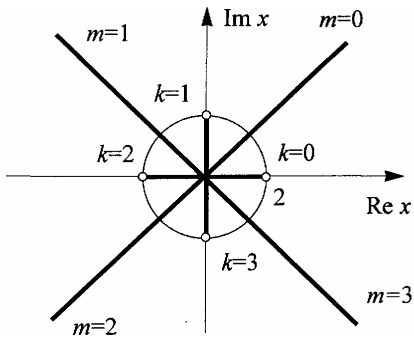
$\left.+i\sin\frac{\pi(2k+1)}{3}\right), t>27,\ k=0,1,2;$

$x_m=\sqrt[3]{|27-t|}\left(\cos\frac{2\pi m}{3}+i\sin\frac{2\pi m}{3}\right),$

$0<t<27,\ m=0,1,2.$

</td>
<td>

Розв'язки нерівності $x^4-16<0$



$x_k=\sqrt[4]{|16-t|}\left(\cos\frac{\pi(2k+1)}{4}+\right.$

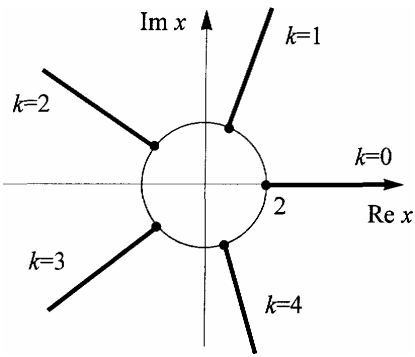
$\left.+i\sin\frac{\pi(2k+1)}{4}\right), t>16,\ k=0,1,2,3;$

$x_m=\sqrt[4]{|16-t|}\left(\cos\frac{2\pi m}{4}+i\sin\frac{2\pi m}{4}\right),$

$0<t<16,\ m=0,1,2,3.$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Розв'язки нерівності $2x^5-64\geq 0$

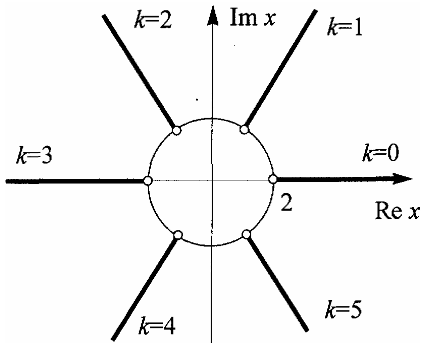


$x_k=\sqrt[5]{\frac{t+64}{2}}\left(\cos\frac{2\pi k}{5}+i\sin\frac{2\pi k}{5}\right),$

$t>0,\ k=0,1,2,3,4.$

</td>
<td>

Розв'язки нерівності $\frac{1}{2}x^6-32>0$

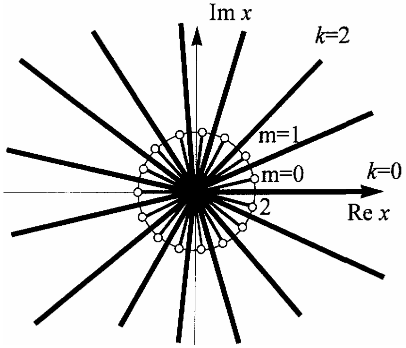


$x_k=\sqrt[6]{64+2t}\left(\cos\frac{2\pi k}{6}+i\sin\frac{2\pi k}{6}\right),$

$t>0,\ k=0,1,2,3,4,5.$

</td>
</tr>
</table>

Розв'язки нерівності $x^{15} + 32768 > 0$



$$x_k = \sqrt[15]{|t-32768|}\left(\cos\frac{2\pi k}{15} + i\sin\frac{2\pi k}{15}\right),$$

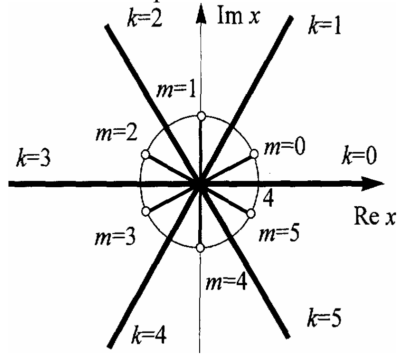
$t > 32768,\ \ k = 0, 1, 2, ..., 14.$

$$x_m = \sqrt[15]{|t-32768|}(\cos\frac{\pi(2m+1)}{15} +$$

$$+ i\sin\frac{\pi(2m+1)}{15}),$$

$0 < t < 32768, t > 0, m = 0, 1, 2, ..., 14.$

Розв'язки нерівності $x^{6} + 4096 > 0$



$$x_k = \sqrt[6]{|t-4096|}\left(\cos\frac{2\pi k}{6} + i\sin\frac{2\pi k}{6}\right),$$

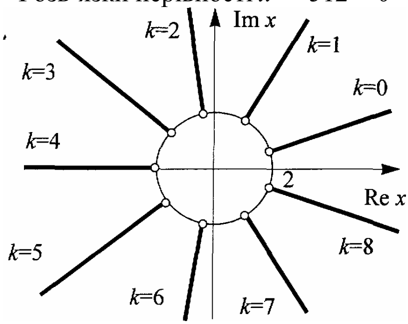
$t > 4096, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

$$x_m = \sqrt[6]{|t-4096|}(\cos\frac{\pi(2m+1)}{6} +$$

$$+ i\sin\frac{\pi(2m+1)}{6}), 0 < t < 4096,$$

$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

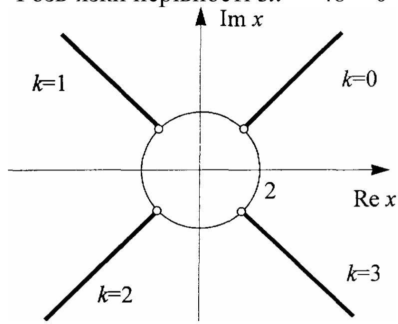
Розв'язки нерівності $x^{9} + 512 < 0$



$$x_k = \sqrt[9]{512+t}\left(\cos\frac{\pi(2k+1)}{9} +\right.$$

$$\left.+ i\sin\frac{\pi(2k+1)}{9}\right), t > 0, k = 0, 1, 2, ..., 8.$$

Розв'язки нерівності $3x^{4} + 48 < 0$



$$x_k = \sqrt[4]{\frac{48+t}{3}}\left(\cos\frac{\pi(2k+1)}{4} +\right.$$

$$\left.+ i\sin\frac{\pi(2k+1)}{4}\right),$$

$t > 0, k = 0, 1, 2, ..., 8.$

Якщо рівняння моделює систему точок, то нерівність моделює систему променів і відрізків. Можливо в деяких задачах, де треба моделювати систему відрізків і променів, доцільно використати апарат нерівностей.

Література:

1. Ткаченко С.П., Філер З.Ю. Комплексні розв'язки квадратної нерівності // Математика в школі. – 2003. – №2. – С. 47-49.

2. Філер З.Ю., Ткаченко С.П. Від нерівностей до прообраза множини // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції "Україна наукова '2003". Т. 30. Технічні науки. Математика. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2003. – С. 44-47.

3. Ткаченко С.П., Філер З.Ю. Розв'язування нерівностей способом зведення до рівнянь // Наукові праці академії: випуск VII, частина II / За ред. Р.М. Макарова. – Кіровоград: Видавництво ДЛАУ, 2003. – С. 157-168.

НАВЧАННЯ УЧНІВ ДОВЕДЕННЮ ПРИ ВИВЧЕННІ НЕРІВНОСТЕЙ В КУРСІ АЛГЕБРИ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ

Л.О. Черних, Т.С. Армаш
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

В навчанні доведенню можна виділити два основних рівні. На першому рівні (неповна середня школа) правила виводу, що застосовуються в доведеннях, представленні в неявному вигляді і залишаються нез'ясованими; основна увага приділяється усвідомленню готових доведень, розумінню того, що саме треба довести і з яких положень це випливає. Традиційне вивчення шкільної математики, як правило, не піднімається вище цього рівня.

На другому рівні (старші класи) може бути уточнене поняття доведення, розкрита його логічна структура, з'ясовані правила виводу. Навчання доведення на цьому рівні – це навчання розумовим процесам пошуку, знаходження та побудови доведення.

Організуючи процес навчання доведенню, слід враховувати таке: а) на жодному етапі навчання шкільний курс математики не будується як формальна дедуктивна система; б) в шкільних доведеннях завжди присутні елементи інтуіції; в) розуміння потреби в логічних доведеннях краще всього формується на нестандартних задачах.

Традиційно склалося так, що учнів навчають доведенню здебільшого на уроках геометрії при вивченні теорем та розв'язанні геометричних задач. Тут спочатку вчать відтворювати та запам'ятовувати готові доведення теорем, а потім пропонують учням шукати свої способи доведення теорем та розв'язування задач на доведення. Роль алгебри для навчання учнів доведенням недооцінюють. Тема «Нерівності», яка систематично вивчається з VII класу на уроках алгебри, містить широкі змістовні та методичні можливості для навчання різноманітним методам доведення.

Задачі на доведення нерівностей складні, оскільки не існує єдиного способу їх доведення. Навіть знаючи основні способи реалізації логічних схем для доведення нерівностей, не завжди легко визначити, які саме методи потрібні в даному конкретному випадку.

Навчати учнів доведенню нерівностей доцільно шляхом їх ознайомлення і навчання основним методам доведення та специфічним прийомам.

Одне і те саме твердження можна доводити по-різному. Різні доведення можуть відрізнятися як аргументами, так і логікою (тобто правилами виводу, які в змістовних доведеннях не фіксуються). Аргументи і логіка доведень характеризують метод доведення.

Основні методи доведення можна виділяти:

– за напрямком міркувань;
– за загальнологічними основами;
– за формою умовиводів.

За напрямом міркувань виділяють аналітичний метод доведення та синтетичний. Історично склалося, що аналітичний метод поділяють на два види: аналіз Евкліда та аналіз Паппа.

В аналізі Евкліда міркування проводяться від того, що треба довести. При цьому з припущення правильності того, що треба довести, виводяться наслідки, які приводять до очевидного правильного твердження. Проте цей аналіз не вважають доведенням і тому його називають інколи «недосконалим аналізом».

При аналізі Паппа спочатку підшукують таке твердження, з якого випливає доводжуване, потім таке, з якого випливає підшукане раніше, і т. д. доти, доки не приходять до вже відомого твердження. Даний вид називають також аналітичним методом.

У синтетичному методі доведення міркування проводяться від умови або від уже відомого твердження до доводжуваного. Синтетичний метод доведення дуже простий з логічного погляду, такі доведення найбільш переконливі і порівняно короткі. Логічною основою в цьому доведенні є аксіома, що з правильного твердження завжди випливає і правильний наслідок.

Якщо умову доводжуваного твердження позначити буквою А, а висновок – буквою Х, то описані вище методи схематично можна зобразити так:

A→B→…→Y→X – синтетичний метод;

X←Y←…←B←A – аналітичний метод (аналіз Паппа);

X→Y→…→B→A – аналіз Евкліда.

Проілюструємо описані методи на прикладах.

<u>*Приклад* 1.</u> Довести, що $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}>2, \quad n\in N$.

Доведення.

Виділимо окремо умову та висновок доводжуваного твердження.

Дано: $n \in N$.

Довести: $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}>2$.

Доведення будемо проводити аналітичним методом.

Використаємо такі відомі твердження: нерівність $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, причому $a{\cdot}b>0$ і рівність $\sqrt[n]{\frac{1}{2+\sqrt{3}}}=\sqrt[n]{\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}}=\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}$. Для того, щоб $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}>2$, достатньо, щоб $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}}>2$, а це вірно, оскільки $1\cdot\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}>0$. Нерівність доведено.

<u>*Приклад* 2.</u> Довести: якщо $a>0$, $b>0$, то $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

Доведення.

Виділимо окремо умову та висновок доводжуваного твердження.

Дано: $a>0$, $b>0$.

Довести: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Доведення будемо проводити синтетичним методом.

Якщо $a>0$, $b>0$, то відомо, що $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, або $a-2\sqrt{ab}+b \geq 0$, звідки $a+b \geq 2\sqrt{ab}$. Поділивши обидві частини на 2, дістанемо $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, що і треба було довести.

<u>*Приклад* 3.</u> Довести нерівність $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) > \dfrac{1}{2}$, де $n \in N$.

Доведення.

Виділимо окремо умову та висновок доводжуваного твердження.

Дано: $n \in N$.

Довести: $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) > \dfrac{1}{2}$.

Доведення будемо проводити за допомогою аналізу Евкліда.

Припустимо, що нерівність $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) > \dfrac{1}{2}$ правильна, тоді $\dfrac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\dfrac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2} > \dfrac{1}{2}$, або $\dfrac{n+1}{2n} > \dfrac{1}{2}$, звідки $\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) > \dfrac{1}{2}$, а це правильна нерівність при $n \in N$. Отже, нерівність доведено.

Часто вимагається довести нерівність для трьох чисел a, b, c, про які відомо, що вони є довжинами сторін деякого трикутника дана умова для a, b, c означає, що це додатні числа такі, що $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$. З цих трьох нерівностей для додатних чисел і потрібно одержати запропоновану нерівність.

<u>*Приклад* 4.</u> Довести, що для довжин сторін трикутника виконується нерівність $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 > \dfrac{1}{2}\left(a^4 + b^4 + c^4\right)$.

Доведення.

Виділимо окремо умову та висновок доводжуваного твердження.

Дано: $a>0$, $b>0$, $c>0$, причому $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$.

Довести: $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 > \dfrac{1}{2}\left(a^4 + b^4 + c^4\right)$.

Доведення будемо проводити аналізом Паппа.

Щоб виконувалась нерівність $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 > \frac{1}{2}\left(a^4 + b^4 + c^4\right)$, достатньо, щоб $2a^2b^2+2c^2b^2+2a^2c^2 > a^4+b^4+c^4$ або $a^4–2a^2(b^2+c^2)+(b^2–c^2)^2 < 0$

[Цей вираз можна розглядати як квадратний тричлен відносно a^2. Відшукавши корені цього тричлена, розкладемо його на множники:

$$a^4 – 2a^2(b^2 + c^2) + (b^2 – c^2)^2 = (a^2\ (b + c)^4)(a^2 – (b – c)^4)].$$

Щоб виконувалась остання нерівність, достатньо

$$(a – b – c)(a + b + c)(a – b + c)(a + b – c) < 0,$$

а це вірно, оскільки другий, третій та четвертий множники додатні, а перший – від'ємний. Отже, $a^4 + b^4 + c^4 – 2a^2b^2 – 2c^2b^2 – 2a^2c^2 < 0$, тобто нерівність доведено.

За загальнологічними основами методи доведення поділяють на пряме доведення і доведення від супротивного. Доведення від супротивного ґрунтується на такому логічному законі: якщо з висловлення А випливає висловлення В і висловлення В – хибне, то хибне також і висловлення А.

<u>*Приклад* 5.</u> Довести, що при $a > 0$ справджується нерівність $a + \frac{4}{a} \geq 4$.

Доведення.

Припустимо, що при деяких $a > 0$ нерівність $a + \frac{4}{a} \geq 4$ не виконується, тобто правильною є нерівність $a + \frac{4}{a} < 4$. Помножимо обидві частини нерівності на $a > 0$, дістанемо рівносильну нерівність $a^2 + 4 < 4a$, з якої випливає, що $a^2 + 4 – 4a < 0$, або $(a – 2)^2 < 0$. Одержана нерівність хибна, оскільки квадрат дійсного числа $a – 2$ не може бути від'ємним числом. Отже, хибна й нерівність $a + \frac{4}{a} < 4$. Тому правильною є нерівність $a + \frac{4}{a} \geq 4$, що й треба було довести.

За формою умовиводів методи доведення поділяють на індуктивне доведення, дедуктивне доведення. Прикладом індуктивного доведення є метод математичної індукції. Доведення нерівностей методом математичної індукції, ґрунтується на принципі математичної індукції.

<u>*Приклад* 6.</u> Довести, що при всіх натуральних n, більших за 4, виконується нерівність $2^n>n^2$.

Доведення.

При $n = 5$ нерівність правильна, бо $32 > 25$. Припустимо, що ця нерівність правильна при деякому довільному $k > 4$, тобто $2^k > k^2$.

Тоді $2^k+2^k>k^2+k^2$, але $2^k+2^k=2^{k+1}$ і при $k\geq5$ $k^2\geq2k+1$, тому $2^{k+1}>k^2+2k+1$, або $2^{k+1} > (k + 1)^2$.

Як бачимо, доводжувана нерівність правильна при $n = 5$, і якщо правильна при $n = k$, то правильна і при $n = k + 1$. Отже, ця нерівність правильна при всіх натуральних $n > 4$.

В рамках певного методу доведення використовують різноманітні прийоми, які відповідають тому чи іншому розділу математики. Так, при доведенні нерівностей використовуються різноманітні прийоми доведення як елементарні (за означенням, методом посилення, методом використання відомих нерівностей та нерівностей про середні величини, методом використання результатів дослідження квадратного тричлена та ін.), так і прийоми математичного аналізу (використання теорем про диференційовані функції на відрізку, застосування властивостей функцій, використання похідної першого та другого порядку, використання визначеного інтеграла тощо).

Проілюструємо деякі прийоми доведення на прикладах.

Доведення за означенням: складають різницю між лівою і правою частинами нерівності і доводять, що вона додатна, від'ємна, невід'ємна або недодатна (це залежить від нерівності, що доводиться).

Щоб довести, що якийсь вираз є невід'ємним, досить його подати у вигляді добутку кількох невід'ємних множників або парного числа від'ємних множників, або у вигляді повного квадрата суми кількох повних квадратів.

<u>*Приклад* 7.</u> Довести, що при невід'ємних a, b виконується нерівність $2a^3 + b^3 \geq 3a^2b$.

Доведення.

Виділимо окремо умову та висновок доводжуваного твердження.

Дано: $a > 0$, $b > 0$.

Довести: $2a^3 + b^3 \geq 3a^2b$.

Розглянемо різницю між лівою та правою частинами нерівності:

$2a^3+b^3-3a^2=2a^3-2a^2b+b^3-a^2b=2a^2(a-b)-b(ab)(a+b)=(a-b)(2a^2-ab-b^2)=$
$= (a-b)(a^2 - b^2 + a^2 - ab) = (a-b)(a-b)(a + b + a) = (a-b)^2(2a + b)$.

Оскільки $(a - b)^2 \geq 0$ і $2a + b \geq 0$ (за умовою), робимо висновок, що $2a^3 + b^3 - 3a^2b \geq 0$. Це означає, що $2a^3 + b^3 \geq 3a^2b$, при цьому рівність виконується при $a = b$.

Розглянемо приклад нерівності, що доводиться методом посилення.

<u>*Приклад* 8.</u> Довести, що для додатних чисел a, b, c має місце нерівність

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}.$$

Доведення.

З умови, що $a, b, c \in R^+$, робимо висновок, що нам треба довести нерівність $bc + ab + ac \leq \dfrac{a^6}{b^2c^2}+\dfrac{b^6}{a^2c^2}+\dfrac{c^6}{a^2b^2}$

Відомо, що $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Тому запишемо три правильні нерівності:

$$\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2} \geq 2\frac{a^3}{bc}\cdot\frac{b^3}{ac} = 2\frac{a^2b^2}{c^2},\ \frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2} \geq 2\frac{a^2c^2}{b^2},$$

$$\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2} \geq 2\frac{b^2c^2}{a^2}.$$

Додавши ці нерівності та поділивши суму на 2, одержимо правильну нерівність $\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2}\ge\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{a^2c^2}{b^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}$.

Аналогічно одержимо $\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{a^2c^2}{b^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}\ge a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$.

Таким чином, нерівність $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$ доведено.

Використані для доведення нерівностей ідеї майже такі ж різноманітні, як і самі нерівності. З цього приводу доведення нерівностей нерідко відносять до області творчості.

Таким чином, нерівності є найбільш компактним, легко оглядовим та доступним для учнів матеріалом, на якому відпрацьовуються найскладніші математичні методи та вдосконалюються вже засвоєні знання.

Задачі, які розглянуті в статті, можуть бути запропоновані учням на факультативних заняттях з математики та при підготовці до математичних олімпіад.

Література:

1. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навчальний посібник. – 3-тє вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк., 1989. – 367 с.
2. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Розв'язування алгебраїчних задач. – К.: Рад. шк., 1991. – 224 с.
3. Козира В. Систематизація та узагальнення знань і умінь учнів, пов'язаних з доведенням нерівностей // Математика в школі. – 2000. – №3. – С. 18–21.
4. Столяр А.А. Педогогика математики: Учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – Мн.: Выш. шк., 1986. – 414 с.
5. Тимощук М.Е. Как научить доказывать? // Математика в школе. – 2001. – №4. – С. 38–40.
6. Шавальова В. Доведення нерівностей // Математика в школі. – 2002. – №1. – С. 20–27.

Розділ III

Дидактика математики вищої школи

ПЕРЕВІРКА ЯК ЗАСІБ НАВЧАННЯ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

З.Ю. Філер
м. Кіровоград, Кіровоградський державний педагогічний університет
ім. Володимира Винниченка
filer@kw.ukrtel.net

Вступ. Якщо в *початковій* школі дітей привчають до перевірки отриманих результатів при виконанні арифметичних *дій* (додавання – відніманням, множення – діленням і навпаки), а в 6–7-х класах – перевірки отриманих коренів при розв'язанні рівнянь, то пізніше велику увагу приділяють еквівалентності перетворень, стверджуючи, що тоді немає необхідності робити перевірку отриманих коренів. Розв'язок нерівності перевіряти не прийнято; отримані розв'язки у вигляді числових *символів* учні не тільки не перевіряють, але й не відчувають як конкретні числа. Це ще в більшій мірі відноситься до вивчення математики у *вищій* школі. Так, у відомій книзі [1] немає й згадки про перевірку, як і в цікавій книзі [2]. Спілкування автора з колегами – викладачами математики різних ВНЗ показує, що більшість з них, як і викладачів ЗОШ, вважають за краще розв'язати на заняттях якомога більше задач, жалкуючи витрачати час на перевірку. Досвід автора протягом 52 років свідчить про бажаність та можливість перевірки не тільки як засобу виховання *відповідальності* за правильність отриманого результату, а як форми органічного повторення раніше вивченого матеріалу, усвідомленню зв'язків між різними розділами та поняттями.

1. **Перевірка при повторенні матеріалу середньої школи.** Значна кількість першокурсників має слабкі знання шкільного матеріалу, іноді навіть із таблиць додавання та множення. Особливо це стало проблемою з появою калькуляторів. Учителі початкової школи не змогли забезпечити ці елементарні знання у дітей; учителі математики, починаючи з 5 класу, бачать відсутність навичок дій з багатоцифровими числами, не забезпечуючи, у свою чергу вміння виконувати дії з дробами. Автор дає вже на першій зустрічі зі студентами “Матдиктант”, де, крім анкетних даних, перевіряє наявність елементарних навичок. Даючи дії додавання, віднімання, множення та ділення багатозначних чисел, автор пропонує студентам зробити й перевірку. Невисокий темп їх роботи в зв'язку з утратою (або й не виробленням) навичок швидкої безпомилкової роботи веде до невиконання ними перевірки, навіть якісної. Теж саме відноситься до алгебраїчних перетворень. Дуже повільно вчорашні учні розв'язують рівняння та їх системи, особливо ірраціональні та трансцендентні, витрачаючи час на знаходження ОДЗ, проміжні записи. Майже ніхто не розуміє потребу перевірки хоча б для “виловлювання” описок та простих помилок. Після диктанту студентам пропонується вдома провести *аналіз* матдиктанту, наводячи необхідні правила та формули, виконуючи *перевірку.* Значна частина студентів ухиляється від своєчас-

ного виконання вимог викладача, маючи надію, що викладач забуде. Мабуть, так їх привчили в школі.

Особливо "не везе" дії *ділення* – цифру частки вгадують, не розуміючи, що її можна знайти, ділячи старшу цифру (або двозначне число з округлених перших цифр) діленого на округлену старшу цифру дільника; наступні кроки алгоритму ділення – множення на знайдену цифру дільника й віднімання, покажуть чи не треба зменшити (збільшити) цю *цифру*. Не вміють першокурсники виконувати ділення *многочленів*, не знаючи алгоритму ділення многочленів, впорядкованих по спаданню показників степенів. Для чисел у звичній позиційній системі – це впорядкування вже зроблене. Вони не знають як записати результат ділення з *остачею*; мішане число дехто сприймає як *добуток*, бо в алгебрі запис букв a і b без знаку між ними ab розуміють як добуток, тому $3\frac{2}{3}$ дехто сприймає як $3*\frac{2}{3}$. Тільки після виконання дій $3+\frac{2}{3}$ й $3*\frac{2}{3}$ вони бачать, що це не одне й теж. На жаль, вони не бачать і не відчувають, що мішане число – сума – більше 3, а добуток – тільки 2. Мало хто з них розуміє, що для комутативних операцій однією з форм перевірки може бути й виконання дій в іншій послідовності.

Перевірка знайдених коренів *підстановкою* у задане рівняння відсіює сторонні корені. *Утрату* коренів при скороченні перевіркою не встановиш, хоча перед скороченням треба не забути можливості обертання відповідного множника в 0. Для рівнянь із періодичними функціями треба перевірити корені лише на *одному* з періодів. Це відноситься й до *графічної* перевірки.

Для *нерівностей* часто перевірка зводиться до *методу інтервалів*, коли між коренями та точками розриву (коренями знаменника) неперервна функція зберігає знак. На жаль, випускники школи не мають навіть інтуїтивного розуміння поняття неперервності функції. Майже ніхто з них не володіє *графічним* методом розв'язання нерівності типу $f_1(x)>f_2(x)$, коли треба знайти проміжки, де графік функції $y=f_1(x)$ лежить *вище* графіка функції $y=f_2(x)$.

Методам перевірки арифметичних дій та буквених перетворень вчорашніх учнів треба вчити й вимагати від них перевірки *завжди*.

2. **Перевірка при вивченні вступу до аналізу.** При знаходженні ОДЗ функції приходиться розв'язувати нерівності; тому перевірка знайденої ОДЗ здійснюється, як уже зазначено для нерівностей. Для перевірки вірності отриманої *границі* функції (послідовності) треба знайти значення функції при $x\approx x_0$ або при великому $|x|$ при $x\to\infty$. Якщо отримане значення далеко від знайденої границі, то треба ще наблизитись до x_0 (∞). При цьому інтуїтивно зрозуміле "границя – *число*, до якого прямує значення функції" стає очевидним, принаймні, для монотонної функції. Навички ж обчислення (хоча б за допомогою таблиці, калькулятора чи комп'ютера) потрібні; перевірка змушує студента обчислювати. Допомагає цьому й побудова *графіка*; це відно-

ситься й до вивчення *неперервності*.

3. **Перевірка при вивченні аналітичної геометрії.** Отримані *рівняння* ліній (поверхонь) можна перевірити, підставивши до них *координати* даних точок. Знайдені аналітично *кути* можна перевірити транспортиром. Умовні малюнки після розв'язання задачі треба побудувати за отриманими результатами. Ясно, що треба зберігати однаковий масштаб у декартовій системі координат для метричних задач, хоча паралельність зберігається й при лінійній деформації фігури. У полярній системі координат треба користатися *радіанним* транспортиром. Його може виконати для себе сам студент. При перевірці отриманого рівняння *лінії* не треба брати якомога більше точок; для прямої достатньо двох, для "шкільної" параболи (із віссю, паралельній осі координат) – трьох точок тощо.

4. **Перевірка операцій лінійної алгебри.** При збереженні декартового базису для n=2 чи 3 способи перевірки ті ж, що й в аналітичній геометрії. Обчислення визначника можна перевірити, отримуючи його розкладанням по іншому рядку (стовпчику), а для n=3 – за правилом Саррюса. *Обернена* матриця $\mathbf{A}^{-1}$ в добутку на **A** повинна дати *одиничну* **E**, *розв'язок* $\boldsymbol{x}$ системи $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ повинен їй задовольняти; загальний розв'язок, який містить довільні сталі C_k, повинен задовольняти її тотожно відносно цих сталих.

5. **Перевірка у диференціальному численні.** Якщо є графік функції $y=f(x)$, то знайдену похідну *якісно* можна перевірити, встановивши її знаки на проміжках монотонності; кількісно значення похідної $f'(x_0)$ можна зіставити з тангенсом кута нахилу її *дотичної* у точці $M_0(x_0; f(x_0))$ або зі значенням кутового коефіцієнта відрізка M_0M_1 для точки M_1 на кривій, близькій до точки M_0. Аналітичний вираз похідної можна перевірити знаходженням похідної в іншій послідовності, за іншими правилами. Наприклад, замість дробу $y_1(x)/y_2(x)$ можна розглядати добуток $y_1(x)*y_2^{-1}(x)$ або скористатися логарифмічним диференціюванням тощо.

6. **Перевірка при вивченні інтегрального числення.** Отриману *первісну* можна перевірити, взявши *похідну*, яка повинна співпасти з підінтегральною функцією, або *диференціал*, що дасть підінтегральний вираз. При цьому засвоюється не лише розуміння взаємної оберненості операцій, а й формули та правила диференціювання. На жаль, студенти погано засвоюють відміну понять похідної та диференціала, тому треба перевіряти й тим, та іншим способом. Бажано робити перевірку окремих етапів розв'язання – знайдена сума простих дробів повинна після додавання дорівнювати даному дробові тощо. Знайдену первісну можна зіставити з виразом, уміщеним у *довідниках*. При цьому можливо буде впевнитися у тотожності різних виразів із точністю до сталого доданка. Підстановки (заміни) після знаходження первісної треба звести до "старої" змінної, чого не треба робити у визначеному інтегралі при перерахунку меж інтегрування.

Знайдений **інтеграл** можна тлумачити геометрично як *площу* й перевірити, знаходячи площу відповідної криволінійної трапеції, побудованої у декартовому базисі. Бажано зробити перевірку знайденої первісної до застосування формули Ньютона-Лейбніца. Для задач про площу та центр мас фігури на площині геометрична та *фізична* перевірка можлива і здійснюється за допомогою підвішування фігури на нитці, закріпленої у центрі мас. Інколи достатньо наближеної перевірки із заміною підінтегральної функції (фігури) простішою, яка є частковим випадком даної. Наприклад, площа еліпса πab перевіряється як узагальнення площі круга πa^2, об'єм еліпсоїда 4/3 πabc узагальнює об'єм кулі 4/3 πa^3 тощо.

7. **Диференціальні рівняння та перевірка.** Ще до вивчення конкретних рівнянь бажано розв'язувати задачі типу "Упевнитися, що вираз (1) дає розв'язок диференціального рівняння (2)". Студенти не завжди знають, що в українській мові є два слова "*розв'язання*" (процес) та *розв'язок* – результат (аналог *кореня* у "шкільних" рівняннях); у російській мові маємо одне слово "решение" із двома значеннями. Треба перевіряти як *частинний*, так і *загальний* розв'язок, який містить довільні сталі; при перевірці треба побачити *тотожність* відносно аргументу та сталих. *Інтеграл* $F(x, y, C)=0$ рівняння $f(x, y, y')=0$ або $P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0$ перевіряється знаходженням похідної *неявної* функції $F(x, y, C)$ або її диференціала з наступними тотожними перетворюваннями, що приведуть до даного рівняння.

Інколи дане диференціальне рівняння можна віднести до різних класів, наприклад, рівняння $dy=(2x–3y)dx$ можна розглядати як лінійне неоднорідне першого порядку зі *сталими* коефіцієнтами $y'+3y=2x$ та спеціальною правою частиною, що різко спрощує пошук загального розв'язку: характеристичне рівняння $\lambda+3=0$ дає загальний розв'язок однорідного рівняння $y_{одн}=Ce^{-3x}$, а пошук частинного розв'язку у вигляді $y_{неодн}=Ax+B$ зводиться до знаходження двох *чисел* A та B.

Геометричні *задачі*, що зводяться до диференціальних рівнянь, треба перевіряти за допомогою графіка шуканої лінії. Чисельні методи дають лінію, яку можна зіставити з *полем напрямків*.

Дещо складніше перевіряти розв'язки рівнянь у частинних похідних, знайдених у формі *рядів*. Якісний характер розв'язків можна перевірити, обмежуючись декількома членами.

8. **Перевірка в теорії рядів.** Типові задачі на знаходження декількох перших членів ряду за формулою загального члена та загального члена за першими членами ряду потребують перевірки – чи дійсно ці члени є частинним випадком загального члена a_n. Те ж саме відноситься до знаходження формули частинної суми. Перевіркою тут може бути отримання різниці $S_{n+1}–S_n$ послідовних частинних сум, яка повинна дорівнювати останньому члену a_{n+1}. Ці формули можуть бути доведені методом математичної індукції, який включає в себе й перевірку. Це відноситься й для обчислень за допомогою рядів. При застосуванні ознаки Даламбера доцільно знайти відношення членів a_{n+1}/a_n із великим n, яке повинно бути близьким до границі цього відношення. Швидкість збіжності ряду визначається величиною цього

відношення. Треба підкреслювати, що збіжність визначає поведінку членів ряду при $n \to \infty$; при використовуванні ряду для наближень повинно розв'язуватися інше питання: на скільки взята частинна сума наближає величину, яка обчислюється. Для функціональних рядів можна робити часткову перевірку в окремих точках як в області збіжності, так і в множині точок розбіжності.

9. **Математична статистика та вибірковий метод контролю масового виробництва.** Знамените: "суми по горизонталі = суми по вертикалі" є класичним прикладом перевірки. Бухгалтери не заспокоюються, якщо ці суми відрізняються хоча б на копійку. Уже давно ВТК не приймає у працівників кожну виготовлену деталь, здійснюючи *вибірковий контроль*. Якщо перевірена деталь (виріб) не задовольняє вимоги стандарту, вся партія вважається бракованою. Виробник повинен *сам* перевірити кожну деталь, відбракувати ті, які є нестандартними й тільки після цього здавати продукцію ВТК. Норма тих, що перевіряє ВТК, розраховується методами математичної статистики за правилами теорії надійності, виходячи з відомих допусків та припустимого максимального рівня неприємностей від прийняття бракованої продукції як стандартної.

10. **Вибірковий контроль виконання студентами домашніх завдань.** При сучасному поточному "конвеєрному" способі навчання, жорсткому ліміту на навчальне планове навантаження викладача, пов'язане з економією фонду заробітної плати у ВНЗ, коли планується малий час на контрольні заходи при різкому зменшенню аудиторного навантаження та збільшення часу на самостійну роботу студента, важливо вимагати від студента дійового регулярного *самоконтролю.* Описані форми контролю повинні стати невід'ємною частиною виконання самими студентами всіх форм самостійної роботи. Крім того, бажано, принаймні, в педвузі, організовувати *взаємоконтроль* виконання завдань студентами. Ми призначаємо на кожен елемент індивідуальних *типових* домашніх завдань *відповідального.* Він зобов'язаний розв'язати "своє" завдання одним із перших, перевірити з викладачем правильність розв'язання та системи записів, а потім контролювати виконання цього завдання *всіма* студентами групи. В разі потреби він допомагає своїм колегам виконати задачу. Все це відмічається у відомостях про виконання ІДЗ, які доступні всім студентам і заповнюються та контролюються викладачем на заняттях. Щоб не допустити різкого відставання окремих студентів від основної маси (чому сприяє й дух змагальності – "всі зробили, тільки я відстав") та необхідного темпу, після вивчення теми (підтеми) підводяться підсумки виконання ІДЗ і виставляється оцінка в журнал групи. При прийомі заліків (екзаменів) викладач здійснює *вибірковий випадковий* контроль виконання ІДЗ у кожного студента. Організації такої роботи допомагають відомі збірники типових завдань Кузнєцова та Чудесенка, видані ще в 70-80 рр. Мінвузом Союзу РСР. Корисні тут і методичні вказівки для студентів-заочників, які містять 10 варіантів завдань – по 2-3 однако-

вих завдання на групу. Так створюються мікроколективи для виконання спільної роботи. Тут треба впевнитись, що врешті решт кожен учасник цієї групки розуміє написане, а не просто списує у більш сильного та старанного студента.

Висновки:

1. Перевірка – необхідний елемент виконання студентом кожного завдання. Без перевірки задача вважається не розв'язаною до кінця і не може бути прийнята та оцінена найвищим балом.

2. Перевірка є спосіб органічного повторення раніше вивченого матеріалу. Її виконання сприяє засвоєнню властивостей операцій, взаємозв'язку протилежних (полярних) понять.

3. Інколи достатньо *часткової* (вибіркової) перевірки. Студенти повинні знати необхідну кількість елементів часткової перевірки.

4. Перевірка *розмірності*, *порядку* на частинних випадках знайденої величини дає можливість "відбракувати" явно помилкові результати або збільшити надію на їх правильність.

5. Звичка до самоперевірки є важливим елементом виховання обов'язковості, відповідальності, порядності майбутнього інтелігента – викладача, науковця, інженера, економіста, члена демократичного громадянського суспільства. Відсутність почуття відповідальності за результати розумової праці потім приводить до порушень правил техніки безпеки, до аварій з вини "людського фактора".

6. Розглянута проблема може стати темою спеціального дисертаційного дослідження в галузі методики викладання математики.

7. Показово, що ні п'ятитомна «Математическая энциклопедия», ні «Математический энциклопедический словарь», ні «Короткий тлумачний математичний словник» А.С. Бугая не містять статті, присвяченої перевірці, як і двохтомна книга «Математика в понятиях, определениях и терминах». Це свідчить про недооцінку такого важливого етапу в розв'язанні задач та елемента виховання при навчанні та використанні математики.

Література:

1. Потоцкий М.В. Преподавание высшей математики в педагогическом институте. (Из опыта работы). – М.: Просвещение, 1975. – 208 с.

2. Вірченко Н. Вибрані питання методики вищої математики. – К., 2003. – 283 с.

3. Філер З.Ю. Розвиток критичного мислення при вивченні математики // Математика, вересень 2003 р. – С. 1-3.

ОСМИСЛЕНІСТЬ – ШЛЯХ ДО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ҐРУНТОВНИХ ЗНАНЬ З МАТЕМАТИКИ

В.Д. Мальцева, С.В. Волков
м. Красноармійськ, Красноармійський індустріальний інститут Донецького національного технічного університету

Математика – наука абстрактна. Ця її особливість захоплює одних, народжених з математичним складом ума, надає їм наснагу і викликає острах і нерозуміння у інших, які, як правило, останнім часом становлять основну масу студентства вищих технічних навчальних закладів. Тому сьогодення не породжує оптимізму у викладачів математики технічних вузів щодо значних успіхів студентів інженерних спеціальностей в оволодінні математикою, яка являється фундаментом всіх інженерних дисциплін.

Забезпечення ґрунтовних знань з математики у студентів вищих технічних навчальних закладів поки що залишається проблемою. А в зв'язку з приєднанням української вищої школи до Болонського процесу забезпечення ґрунтовних знань становиться нагальною проблемою.

Авторами виявлені об'єктивні причини, які забезпечують життєздатність цієї проблеми:

- недосконаліість системи загальної середньої освіти;
- практична відсутність методичної підготовки викладацьких кадрів вищих технічних навчальних закладів;
- недостатність методичної літератури, яка б могла знівеліювати наслідки першої причини;
- ліквідація системи підвищення кваліфікації викладацького складу і ін.;

а також суб'єктивні причини:

- ігнорування викладачами здобутків методики викладання математики в школі та досягнень педагогічної науки;
- культивація у студента-платника, з певних причин, свідомості нероба.

Наслідками вказаних причин являються:

- порушення принципу осмисленого вивчення матеріалу студентами;
- ігнорування принципу "від конкретного споглядання до абстрактного мислення";
- невміння викладача сформувати у студента принципи "я сам", "я зможу" та створити у нього мотивацію "мені це цікаво", "мені це потрібно";
- відсутність акценту в роботі зі студентами на "принцип чайника" – зведення невідомого до відомого та на ефективність методу виключення;
- неозброєність студентів загальним алгоритмом розв'язання задач та ін.

Оскільки жоден конкретний викладач не зможе без певної державної політики усунути об'єктивні причини, що породжують проблему, то йому доводиться самостійно знаходити методичне підґрунтя, яке б забезпечило міцні знання студентів, та вдосконалювати свою педагогічну майстерність через участь в науково-методичних конференціях та семінарах, які забезпечують можливість обміну досвідом.

Автори пропонують своє бачення вивчення на основі принципу осмисленості тем "Техніка диференціювання" та "Безпосереднє інтегрування", на яких базується виклад математичних і спеціальних дисциплін.

Викладач, перш ніж приступити до розв'язання задач диференціювання чи інтегрування, вчить студентів смисловому читанню формул, роблячи акценти на те, що:

- у виразі для похідної обов'язкова присутність похідної аргументу даної функції;
- в підінтегральному виразі обов'язкова присутність диференціала аргументу підінтегральної функції.

Для того, щоб студент зумів успішно скористатися таблицями похідних та інтегралів, він повинен:

- знати порядок дій;
- вміти визначати назву функції, яку необхідно продиференціювати чи проінтегрувати;
- назвати аргумент даної функції;
- користуватися формулами похідних та інтегралів від складеної функції;
- користуватися смисловим читанням формул, а не буквальним.

Так, наприклад, формулу

$$(\sin u)'_x = \cos u \cdot u'_x$$

треба читати: "похідна синуса дорівнює косинусу цього аргументу, помноженому на похідну аргументу по незалежній змінній", а не: "синус у штрих дорівнює косинус у на у штрих".

При опануванні методом безпосереднього інтегрування викладач забезпечує усвідомлення студентами того, що в кожній формулі інтегрування підінтегральним виразом являється добуток певної функції на диференціал її аргументу.

Працюючи з конкретним інтегралом, студент повинен:

- визначити назву підінтегральної функції в даному прикладі та назвати її аргумент;
- знайти в таблиці формулу з такою назвою функції;
- перевірити, чи являється підінтегральний вираз в даному прикладі добутком підінтегральної функції та диференціалу її аргументу.

Тільки при ствердній відповіді на останнє запитання застосовуємо відповідну формулу або застосовуємо її після конструювання диференціалу аргументу під знаком інтегралу в разі недостатності сталого множника. До речі, формулу

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

доцільно читати так: якщо підінтегральний вираз-дріб, чисельник якого є диференціалом знаменника, то інтеграл дорівнює логарифму модуля знаменника плюс *C*, а не: інтеграл від де у поділеного на у дорівнює логарифму модуля у плюс *C*. Останнє читання студентами не осмислюється, і його треба запам'ятовувати формально.

При роботі з таблицею інтегралів звертається увага студентів на те, що диференціал під інтегралом являється множником і пропонується студентам дати обґрунтування цього факту. Осмислення такої конструкції підінтегрального виразу служить осмисленому засвоєнню правила розв'язання диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними і запобіганню помилок при цьому. Доцільно при вивченні тем, вказаних вище користуватися таблицями, в яких паралельно розміщені похідні і інтеграли.

При викладеному підході до вивчення названих тем зникає потреба опрацьовувати окремо конкретні види функцій, що суттєво впливає на розвиток абстрактного мислення студентів, економить час, який можна заповнити евристичними діалогами-співтворчістю викладача і студента, короткими доповідями студентів про самостійне опрацювання питань або надати його для самостійної роботи чи використати для контролю засвоєння студентами матеріалу, що вивчається.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОСТЬ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ

А.Т. Проказа, В.П. Хмель
г. Луганск, Луганский национальный педагогический университет
имени Тараса Шевченко
prokaza_r@mail.ru

Практика рождается из тесного соединения
физики и математики.
Френсис Бэкон

Научная междисциплинарность обусловлена различными объективными факторами, многообразными по своей природе. Междисциплинарные связи имеют вполне определенную методологическую основу, а реализуются очень часто и достаточно эффективно с помощь «царицы и служанки всех наук», т.е. математики. Французский математик Эмиль Борель считал, что наука становится наукой постольку, поскольку в нее проникает число. А Карл Фридрих Гаусс любил повторять: «Математика – царица наук, а теория чисел – царица математики». Вероятно, дело в том, что в теории чисел наиболее ярко проявляется суть математики, ее дух. Сейчас наиболее крупные результаты теории чисел получены с помощью методов функций комплексного переменного.

Функция – это одно из основных математических и общенаучных (а потому междисциплинарных) понятий, выражающее зависимость между переменными величинами. Каждая область знаний: физика, химия, биология, социология, лингвистика и т.д. – имеет свои объекты изучения, устанавливает свойства и взаимосвязи этих объектов. В различных науках возникают количественные взаимоотношения, которые на математическом языке называются функциональными зависимостями. Понятие функции для математики и ее приложений в различных областях человеческой деятельности, связанных с изучением переменных величин, столь же фундаментально, как и понятие числа при изучении количественных соотношений реального мира. Роль математики в различных науках трудно переоценить. Ее роль огромна и в образовательном процессе. Именно педагогические аспекты физико-математической междисциплинарности мы и намерены рассмотреть в настоящей статье, причем рассмотреть под углом зрения интеллектуально-эстетического наслаждения от математического видения физической сущности законов и теорий.

В образовательном процессе (обучение, воспитание в процессе обучения и, как следствие, развитие личности) рациональное и эмоционально призваны каталитически воздействовать друг на друга таким образом, чтобы научные знания усваивались на основе переживаний. Этому должен способствовать дидактический динамизм в сочетании с педагогическим романтизмом. Вся суть педагогического действия и воздействия состоит в том, чтобы объективировать субъективное и субъективировать объективное. Без этого эффективное, плодотворное обучение, воспитание и профессиональное самостановление вряд ли возможно. Диполь «объяснение–понимание» должен стать дистинкцией, обеспечивающий двуединый педагогический процесс и движение мысли в этом процессе. Понимать объяснение – значит ощущать его необходимость, усматривать место объяснения в определенной системе знаний, видеть сущность объясняемого в неразрывном единстве с конкретизацией этой ситуации, ибо общее существует лишь в отдельном.

Глубоко понимать содержание – значит пережить его эмоционально, проникнуться интеллектуальной удовлетворенностью, которая приносит радость! Глубокое понимание предполагает определенную интеллектуальную готовность на основе совершенно свободного владения ранее изученным (на основе необходимой системы опорных знаний). Великий Джеймс Максвелл утверждал, что нет лучшего метода сообщения уму знаний, чем метод преподнесения их в возможно более разнообразных формах и, добавим, под разными «углами зрения».

В физике и математике есть удивительные числа, которые в системе знаний присутствуют «на каждом шагу». Как же можно не восхищаться этими числами?!

Вот удивительное число «Пи – $\boldsymbol{\pi}$»! Его математическая природа весьма интересна и «загадочна», а его физическая природа – тем более! Число, которое не является корнем никакого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами, есть число $\boldsymbol{\pi}$. Оно – результат предельного перехода. Дробная часть $\boldsymbol{\pi}$, как и всех иррациональных чисел, бесконечная и непериодическая. Это число не алгебраическое, а потому трансцендентное! Хотя это удивительное число было известно из «незапамятных времен», его трансцендентность была доказана молодым профессором Фрейбургского университета Фердинандом фон Линдеманом только в 1882 году.

Иоганн Вольфганг фон Гете оставил нам замечательные слова: «Суха, мой друг, теория всегда, а древо жизни пышно зеленеет». Можно заключить, что теория чисел суха, а где же «дерево жизни»? Попробуем его разглядеть... $\boldsymbol{\pi}$ – отношение длины окружности к ее диаметру! Но ведь $\boldsymbol{\pi}$ «возникает» во многих ситуациях, которые к окружностям не имеют никакого отношения! Английский математик Август де Морган назвал $\boldsymbol{\pi}$ «загадочным числом 3,14159..., которое лезет в дверь, через окна и через крышу».

Чтобы подойти к пониманию трансцендентности числа $\boldsymbol{\pi}$, необходимо иметь, как мы уже отмечали, интеллектуальную готовность на основе совершенно свободного владения необходимой системой опорных знаний. Необходимо «безоговорочно» владеть понятиями: целого положительного числа, дробного числа, отрицательного числа, что в совокупности составляет систему всех рациональных чисел. Чтобы получить систему действительных чисел, добавляем иррациональные числа. Таким образом «запас» чисел расширяется, причем каждое расширение дает дополнительную возможность находить корни таких уравнений, которые раньше корней не имели.

Так, уравнение $2x–1=0$ имеет корень только при наличии дробных чисел; уравнение $x+1=0$ – при наличии отрицательных чисел; уравнение $x^2–2=0$ – при введении понятия иррациональных чисел.

Запас чисел аналогично обогащается введение понятия и построением системы комплексных чисел $c=a+bi$, где $i=\sqrt{-1}$ или $i^2=–1$.

Все это говорит о том, что понятие числа значительно сложней, чем кажется на первый взгляд.

Удивительное число $\boldsymbol{\pi}$ не одиноко в своей трансцендентности. Правда, тому, кто не занимается математикой или физикой, с этим числом приходится встречаться реже. Речь идет о числе «$\boldsymbol{e}$», фундаментальный характер которого выразительно проявляется, когда речь идет о возрастании какой-либо величины.

Предположим, кто-то положил в банк одну гривну под 4% годовых. Если проценты простые, то через 25 лет вклад превратится в две гривны. Если же банк выплачивает сложные проценты («проценты на проценты»), то сумма вклада будет возрастать быстрее. Причем, чем чаще будет происходить начисление, тем быстрее растет вклад. Например, если ежегодно начислять «прибавку», то через 25 лет гривна превратится в 2,66 грн. Этот результат получается после вычисления выражения $\left(1+\frac{1}{25}\right)^{25}$. Если же начисления выполнять каждые полгода, то тогда через 25 лет вклад составит $\left(1+\frac{1}{50}\right)^{50}$ =2,69 грн. Может показаться, что если начисления делать, например, ежечасно, то вклад превратится в огромную сумму. Однако это не так! Увеличение вклада происходит по закону $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, где n – количество перерасчетов. Оказывается, что при $n\to\infty$ выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ $\to e$! (e=2,718...)

Однако далеко не все величины возрастают по этому математическому закону, а только те, которые обладают одной особенностью: в каждый момент времени скорость увеличения пропорциональна самой величине в этот же момент времени! Это означает, что отношение прироста величины к каждому ее значению всегда одно и то же. Эти величины описываются формулами, в которые входит функция $y=e^x$. Эта показательная функция настолько важная, что получила особое название – экспоненциальная или, просто, экспонента!

Как и число $\boldsymbol{\pi}$, число $\boldsymbol{e}$ – трансцендентное число, т.е. оно не может быть корнем какого-либо алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами. Как и число $\boldsymbol{\pi}$, число $\boldsymbol{e}$ записывается лишь двумя способами: либо в виде бесконечной цепной дроби, либо как сумма бесконечного ряда!

Существует ли связь между этими удивительными трансцендентными числами? Да, существует! Очень красивую связь получил знаменитый Леонард Эйлер на основе своей знаменитой формулы $e^{ix}=\cos x+i\sin x$. Если $x=\pi$, то $e^{i\pi}=-1$! Или $e^{i\pi}+1=0$, или еще красивее $e^{i\pi}+e^{0}=0$! «Лаконичное, утонченное, наполненное глубоким смыслом», – так характеризовали это выражение Э. Каснер и Дж. Ньюмен в своей книге «Математика и воображение».

В математической литературе описывается подробно история все более точных вычислений этих «загадочных» чисел, а также доказательств их иррациональности и трансцендентности, например [1, 61], [2]. Однако, вопросы, связанные с глубинными физическими смыслами, которые ставят эти числа в ряд с мировыми физическими константами, как правило, не рассматриваются. А ведь $\boldsymbol{\pi}$ и $\boldsymbol{e}$ входят во многие физические формулы, выражающие фундаментальные физические законы!

Мировые физические константы, связанные с глубинными свойствами пространства-времени, задают определенную структуру Вселенной и масштабы физических событий в ней.

Эти константы задают планковскую фундаментальную длину $l_p=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{Gh}{c}}\approx 10^{-35}$ м, которая, безусловно, характеризует физические свойства пространства-времени, связанные с его дискретностью.

Есть основания предполагать, что и удивительные числа $\boldsymbol{\pi}$ и $\boldsymbol{e}$ связаны со свойствами пространства-времени, причем $\boldsymbol{\pi}$ – с его <u>изотропностью</u>, а, следовательно, с <u>законом сохранения импульса</u>. При описании сферической симметрии пространства обязательно «возникает» число $\boldsymbol{\pi}$, которое, безусловно, с этой симметрией и связано.

Показательная функция $y=e^{nx}$, производная которой отличается от самой функции только числовым множителем, называется собственной функцией данного оператора. Показательная функция комплексного переменного является решением дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Такие уравнения описывают процессы, для которых характерны линейные и линеаризованные функции. Общее решение этих уравнений не зависит от параллельного переноса систем координат, что отражает <u>однородность пространства-времени</u>. Следствием однородности пространства является <u>закон сохранения импульса</u>, а следствием однородности времени – <u>закон сохранения энергии</u>!

В своей статье [3, 243-247] мы акцентировали внимание на межпредметных дидактических инвариантах и констатировали, что поисковая учебно-познавательная деятельность студентов по физике возможна только тогда, когда в систему опорных знаний входят и необходимые математические знания. Проникновение в физическую сущность явлений в образовательном процессе зачастую становится невозможным без «математического видения» этой сущности.

Инновационные педагогические технологии предполагают необходимость более существенного «педагогического вмешательства» в научное содержание учебного материала.

Литература:

1. Звонкин А. //Квант, №1, 1995. – М.: Бюро «Квантум».
2. Кымпан Ф. История числа π. – М.: Наука, 1971.
3. Проказа А.Т., Хмель В.П. Дидактико-методическая система классической педагогики и инновационные технологии наполнения ее компонентов // Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі: Збірник наукових праць. – Кривий Ріг: Видавничій відділ НМетАУ, 2005.

О СПЕЦИФИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ КУРСА «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА» ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ «ФИЗИКА»

Т.В. Ломаева
г. Киев, Национальный педагогический университет
имени М.П. Драгоманова
tlomaeva@gmail.com

Основной направленностью при изучении аналитической геометрии и линейной алгебры студентами-физиками является умение использовать полученные теоретические сведения к последующим теоретико-экспериментальным исследованиям. Системы условных неравенств являются математическим аппаратом, применимым для количественного описания результатов экспериментальных измерений, для решения многих научных и технических проблем. Однако именно вопросу практического приложения вышеуказанных разделов линейной алгебры и аналитической геометрии уделяется крайне мало внимания, что обусловлено недостаточным количеством учебного времени, отсутствием необходимой литературы. Поэтому мы предлагаем в настоящей статье показать на ряде элементарных примеров широту возможного приложения теории условных линейных неравенств для формулировки и решения ряда физических задач, а также изложить в элементарной форме необходимость теории условных линейных неравенств. Для успешной работы в применении теории условных неравенств студент должен знать элементарные сведения из теории алгебраических уравнений, теории линейных форм и определителей, а также сведения из аналитической геометрии.

Источником всякого познания являются сведения об объектах, получаемые из опыта. Когда речь идет о количественных соотношениях и измерениях, результаты измерения всегда имеют форму неравенства. Например, пытаясь установить из опыта размеры какого-либо тела, момент совершения некоторого события и т.п., мы приходим к экспериментальному результату, что измеряемые величины лежат между некоторыми крайними значениями $l–\Delta l$ и $l+\Delta l$ соответственно. То же можно сказать о результатах всякого другого опыта. Следовательно, результат количественного эксперимента над величиной x всегда имеет форму неравенства вида $c>x>b$ или $c \geq x \geq b$, где c и b – крайние (наибольшее и наименьшее) значения, задаваемые опытом. В частных случаях одно из них (или оба) могут отсутствовать, т.е. пределы c и b могут измеряться очень большими числами. В первом случае величина x окажется ограниченной только с одной стороны, во втором – неопределенной. Таким образом понятие неравенства возникает в процессе эксперимента. Однако не только результаты опыта, но и требования, предъявляемые на практике к величинам разного рода, иногда имеют формы неравенств. Действительно, если речь идет о геометрических размерах тел, о величине приложенных к ним сил, об их метрических путях, скоростях и ускорениях, электрических или магнитных свойствах, температурах, давлениях и т.п. требования, предъявляемые практикой, сводятся к тому, чтобы эти величины заключались в определенных интервалах. Наоборот, достижение того, чтобы какая-либо величина имела точно заданное значение, практически не возможно. Таким образом, общий вид требований, накладываемых практикой на разного рода величины, выражается системой неравенств

$$\begin{array}{l} c_1 > f_1 > b_1 \\ c_2 > f_2 > b_2 \\ -------- \\ c_m > f_m > b_m \end{array} \tag{1}$$

Если величины $f_1, f_2, \ldots, f_m$ являются функциями каких-либо независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то и практически достижимые значения этих последних никогда не бывают любыми и в общем случае ограничены неравенствами вида

$$\begin{array}{l} \xi_1 > f_1 > \eta_1 \\ \xi_2 > f_2 > \eta_2 \\ -------- \\ \xi_m > f_m > \eta_m \end{array} \tag{2}$$

Существенный интерес представляет случай, когда требуется установить, имеет ли общая система, содержащая неравенства систем (1) и (2), своими решениями любые решения системы (2). Заметим, что на практике чаще встречаются с обратной задачей: так определить интервалы (2) для независимых переменных при заданных интервалах для их функций, чтобы требования системы (1) удовлетворялись при любых значениях независимых переменных из заданных системой (2) интервалов. Следовательно, количество накладываемых условий (m+n) в общем случае всегда больше числа независимых переменных n. Если бы мы выбрали для $f_1, f_2, \ldots, f_m$ определенные значения из указанной системы (1) интервалов, то полученная система уравнений, даже в том случае, когда она оказалась бы совместной, могла бы дать значения $x_1, \ldots, x_n$, выпадающие из назначенных для них системы (2) интервалов. В таком общем виде задача могла бы быть решена (или даже корректно сформулирована) с помощью уравнений. Только в частных случаях, когда система, полученная назначением для $f_1, f_2, \ldots, f_m$ определенных значений из заданной системы (1) интервалов, совместна и интервалы изменения независимых переменных неограниченны (практически независимые переменные могут изменяться в очень широких интервалах), задача всегда может быть решена с помощью уравнений. Часто подобные задачи решают или методом подбора, или привлекают на помощь непосредственный эксперимент (что далеко не всегда желательно и возможно). Однако, если даже не обращать внимание, на кропотливость метода подбора, следует отметить другой его недостаток – сколько бы неудачных попыток решить задачу методом подбора мы не делали, никогда нельзя быть уверенным в принципиальной несовместности систем (1) и (2). Практически такие задачи обычно упрощают, отбрасывая некоторые неравенства и заменяя оставшиеся неравенства равенствами. В результате может получиться совместная система уравнений из несовместной изначально системы неравенств и полученное решение окажется неудовлетворительным. Таким образом, в ряде случаев не может дать ни критерия разрешимости задачи, ни ее решения. Переходя к условным линейным неравенствам, следует заметить, что высокая функциональная зависимость между переменными x и y вида $y><f(x)$ при определенных ограничениях, накладываемых на функцию, может рассматриваться как линейная в определенном интервале изменения x с помощью разложения Тейлора или Маклорена и, таким образом, в этом интервале значения x окажутся приложимыми на дальнейшие результаты. При сравнении формулировок практических задач в терминах неравенств и уравнений легко заметить, что последние выражают действительные соотношения в упрощенном идеализированном виде. В этом смысле язык неравенств стоит ближе к действительности и точнее передает практические, экспериментальные результаты и требования. Однако, несмотря на то, что в ряде вопросов фундаментальные положения сформулированы в терминах неравенств, а именно: в термодинамике – второе начало со всеми его следствиями в приложении к необратимым процессам, в механике – начало наименьшей работы при наличии произвольных связей и законы, относящиеся к силам трения и т.д., обычно неравенства заменяются по разным соображениям или вследствие разных ограничений, накладываемых на условие задачи, уравнениями, и все дальнейшие исследования проводятся в формулах теории уравнений, с которой студенты достаточно хорошо знакомы.

Покажем на простейших элементарных примерах, что формулировка и решение некоторых физических задач могут быть сведены в наиболее естественной форме к составлению, исследованию и решению соответствующих неравенств.

Широкий класс задач механики можно сформулировать в следующей форме.

Пусть тело под воздействием сил P_1, P_2, …, P_n и моментов Q_1, Q_2, …, Q_m находится в устойчивом равновесии. Пусть к этому телу прикладываются дополнительно силы F_1, F_2, …, F_k и моменты M_1, M_2, …, M_L, стремящиеся вывести тело из состояния равновесия. Тогда можно утверждать, что для сохранения равновесия необходимо и достаточно, чтобы некоторые линейные функции дополнительно приложенных сил и моментов лежали в определенных пределах. Это следует из устойчивости равновесия – небольшие сдвиги не должны нарушать это состояние. К такого рода задачам относятся такие, где силами (моментами), стремящимися сохранить равновесие, являются силы трения, их моменты, реакции связей и т.д. Например: тело весом P, лежащее на горизонтальной плоскости при коэффициенте трения k (зависимостью k от направления, так же как и различием значения k при движении и трогании с места мы пренебрегаем), находится в равновесии до тех пор, пока горизонтальная составляющая F_x всех приложенных к нему активных сил лежит в пределах $0<[F_x]<kN$, где N – нормальная реакция плоскости. То же тело при наличии некоторого опрокидывающего момента (трение теперь не учитывается) будет сохранять равновесие до тех пор, пока приложенный момент M не превышает максимально возможного момента Q пары сил – силы тяжести и реакции поверхности $0<[M]<Q$. В первом случае опыт показывает, что при изменении приложенной внешней активной силы F_x от 0 до kN тело остается в покое, а следовательно, и возникающая сила трения, равная F_x, которая и является здесь пассивной силой, изменяется здесь от 0 до kN (по абсолютной величине). При дальнейшем увеличении F_x, как показывает опыт, равновесие нарушается (так как сила трения остается постоянной и равной kN) и тело приходит в движение.

Во втором случае при отсутствии другого внешнего момента, кроме момента силы тяжести, равнодействующая сила реакции проходит через центр тяжести тела, так как опыт показывает, что тело сохраняет равновесие и, следовательно, момент пары сил – силы веса P и силы реакции $N=-P$ должен быть равен нулю. При приложении внешнего активного момента равнодействующая сила реакции уже не проходит через центр тяжести тела (например, в случае тела, опирающегося на плоскость, силы реакции неравномерно распределяются на площади опоры), и возникающий момент пары сил P и N уравновешивает внешний момент до тех пор, пока тело остается в покое. При возрастании внешнего момента сверх величины Ph, где h – плечо силы Р относительно той оси, вокруг которой вращает внешний момент, момент сил Р и N достигает максимальной величиныPh (при этом сила реакции приложена на оси вращения) и далее при возрастании внешнего момента тело приходит во вращение.

Приведенные примеры являются простейшими и легко обобщаются. В общем случае, обозначая активные силы через $F_1, F_2, \ldots, F_m$, пассивные через $P_1, P_2, \ldots, P_n$, соответственно моменты сил $M_1, M_2, \ldots, M_L$ и $Q_1, Q_2, \ldots, Q_h$, получим следующее условие равновесия

$$\sum_{L=1}^{m} F_L + \sum_{L=1}^{n} P_L = 0\,,$$

$$\sum_{L=1}^{h} Q_L + \sum_{L=1}^{L} M_L = 0\,.$$

Согласно вышеуказанному, обозначая минимальные и максимальные значения сумм $\sum_{L=1}^{n} P_L$ и $\sum_{L=1}^{h} Q_L$ через $\overline{p}$ и $\overline{P}$, $\overline{q}$ и $\overline{Q}$ соответственно, получим условия, накладываемые на значения активных сил (моментов) для сохранения устойчивого равновесия в следующем виде:

$$\begin{gathered} \overline{q} < -\sum_{L=1}^{L} M_L < \overline{Q} \\ \overline{p} < -\sum_{L=1}^{m} F_L < \overline{P} \end{gathered} \tag{3}$$

Таким образом, указанный класс задач естественно формулируется в терминах неравенств, и решение этих задач сводится исследованию и решению систем неравенств. При этом благодаря многозначности решений системы неравенств всегда имеется возможность удовлетворить некоторым другим требованиям, не связанным непосредственно с условиями равновесия системы, что на практике часто представляет значительный интерес.

В теории упругости интерес представляет расчет допустимых нагрузок в узлах ферм. Пусть задана ферма узлами 1, 2, …, n, нагруженная только в узлах нагрузками P_1, P_2, …, P_n. Обозначим усилия в стержнях через x_{ik} (i и k – номера соответствующих узлов). Потребуем, чтобы эти усилия лежали в определенных пределах технически допустимых и экономически целесообразных

$$c_{ih} > x_{ih} > b_{ih} \tag{4}$$

Слишком малые напряжения говорили бы о непроизводительном расходе металла, слишком большие недопустимы согласно техническим требованиям, предъявляемым ко всякому сооружению (прочность, максимальная величина деформации и т.п.). Так как между силами x_{ih} и P_j существует линейная зависимость, то выражая x_{ih} через P_j, получим $x_{ih}=f_{ih}(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, где f_{ih} – линейные формы от P_j. Принимая во внимание (4), получим систему неравенств вида

$$c_{ih}>f_{ih}(P_1, P_2, \ldots, P_n)>b_{ih} \tag{5}$$

Таким образом, если усилия в стержнях ограничены неравенствами (5), вопрос о совместимости поставленных условий и о допустимых значениях нагрузок P_j, приложенных в узлах фермы, сводится к исследованию и решению систем неравенств (3). Может показаться, что неравенства типа (5) возникают в связи только с требованиями практики к оптимальным интервалам усилий в стержнях ферм. Однако если x_{ij} выражены линейными функциями нагрузок P_1, P_2, …, P_n, т.е. если требуется, чтобы при работе конструкций соблюдался закон Гука, то максимальные интервалы c_{ih}, b_{ih}, в которых должны лежать усилия в стержнях независимо от каких-либо специальных технических требований, должны быть такими, в которых справедлив закон Гука. Т.е. в этом случае физическая природа явления обусловливает описание этого явления (в пределах закона Гука) системой неравенств.

ОПТИМИЗАЦИЯ КУРСОВ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ ЗА СЧЁТ УСИЛЕНИЯ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ

В.В. Волчанский[1α], З.Е. Филер[2β], А.Н. Бурмистров[1γ]
[1] г. Кировоград, Государственная лётная академия Украины
[2] г. Кировоград, Кировоградский государственный педагогический университет имени Владимира Винниченко
[α]volya6@yandex.ru, [β]filer@kw.ukrtel.net, [γ]asup@glau.kr.ua

Постановка проблемы. В связи с присоединением Украины к Болонскому соглашению обострились проблемы функционирования системы профессиональной подготовки. С одной стороны, насущной становится необходимость перенесения значительной части рабочего времени студентов на самостоятельную работу, с другой – сохранение качества теоретической подготовки и повышение уровня готовности обучаемых к решению практических задач.

Особенно близка эта проблема преподавателям, готовящим операторов особо сложных систем управления (ОССУ, пилотов и диспетчеров), поскольку в этой отрасли давно изучается проблема управления качеством подготовки (куда входят вопросы назначения, надёжности, безопасности и др. [1]).

Анализ исследований. Тем не менее, по мнению экспертов, проблема оптимизации содержания профессиональной подготовки этой отрасли не только не решена, но и не была чётко сформулирована [2]. При этом наиболее далека от решения проблема оптимизации дисциплин фундаментальной подготовки профессионала.

Ю.К. Бабанский определяет оптимизацию учебно-воспитательного процесса, как «выбор такой методики его проведения, которая позволяет получить наилучшие результаты при минимально необходимых затратах времени и усилий учителей и учащихся» [3, 8]. Такое решение целиком соответствует поставленной нами проблеме.

В.В. Балясников и А.Г. Кальченко, изучая приложение системного подхода к проблеме повышения надёжности деятельности операторов ОССУ и безопасности полётов, рассматривают как важнейшие принцип максимума эффективности системы (т.е. оптимизации) и приоритет общих критериев её эффективности перед частными для её компонентов [1].

Основные принципы системного подхода, управления и оптимизации позволили нам разработать условия задачи оптимизации содержания курса математики, исходя из необходимости усиления его связей с курсом физики. Результаты исследований были частично опубликованы, ожидается публикация других материалов.

Основной идеей такого подхода является предположение о повышении эффективности системы в результате усиления связей между её компонентами. Говорить об оптимизации, а не только о повышении эффективности, нам позволяет противопоставление внутренних и внешних связей отдельного модуля (например, внутрипредметных и межпредметных связей). Это противопоставление соответствует принципу «приоритета общих критериев».

Следует подчеркнуть, что усиление связей системы не является единственным критерием её оптимизации. Мы полагаем, что критерии оптимизации могут соответствовать любому из принципов системного подхода и каждому из возможных объектов исследования. В нашем исследовании объектом было избрано содержание учебной методики.

Постановка задания. Условия оптимизации формализованы нами до уровня *целевой* функции и неравенств. Это позволяет выработать алгоритм решения задачи укрепления межпредметных связей и оптимизации.

Оптимизация содержания учебных дисциплин. Целевая функция задачи оптимизации, с точки зрения дидактики, является функцией прогноза эффективности методики. Важнейшим критерием оптимальности методики, по мнению Ю.К. Бабанского [3], служит *результат* обучения, то есть, в данном случае, успешность решения учебных задач.

Исходя из основной гипотезы исследования, о влиянии связей в системе на оптимальность её функционирования, в качестве критерия оптимальности была избрана успешность решения учебных задач в границах «акцептора». Акцептором в нашем исследовании была названа деятельность, во время выполнения которой исполнитель вынужден воспользоваться результатами другой учебной деятельности – «донора». Таким образом, критерий позволяет оценить успешность выполнения будущей деятельности (учебной или профессиональной), опираясь на успешность выполнения данной учебной деятельности.

В качестве индексов измерения (т.е. определяемых понятий) была избрана «сила» связи между успешностью решения учебных задач в рамках донора и акцептора. Была прията классическая величина «силы» связи – коэффициент корреляции между успеваемостями.

Индикаторами измерения стали экспертные оценки силы связи между деятельностями по решению учебных задач. Такое содействие методов экспертных оценок и психолого-педагогического измерения позволило подняться выше ранговой шкалы оценок в измерении силы связи, и использовать основные арифметические операции для обработки данных.

Как известно, экспертные оценки в большинстве случаев относятся к ранговой шкале измерений, для которой «разрешены» только ранжирование, вычисление частоты, моды, медианы и коэффициента ранговой корреляции [4; 5].

Значения коэффициентов r линейной корреляции, которые были найдены для уровней связи между деятельностями (условно обозначенным 1, 2, 3, 4, 5) и соответствующим определённым критериям [6], позволили определить реальные интервалы между делениями шкалы, а также естественную «нулевую точку», которая соответствует случаю отсутствия связей (*r*=0) между успешностями.

Для того чтобы коэффициенты корреляции отражали действительную связь между событиями (успешным решением учебных задач), применять их следует к оценкам, полученным хотя бы с помощью шкалы интервалов. Объяснить это можно тем, что при вычислении коэффициента корреляции используются лишь разности между оценками, что позволяет получать верные значения даже при ошибочно выбранной общей «нулевой точке».

Исследователи согласны во мнении, что максимально возможный уровень оценки, которого можно достичь для психолого-педагогических измерений, и является уровнем шкалы интервалов. В своих исследованиях [7] мы применили метод оценки психической *стоимости* отдельных элементов деятельности для достижения измерительной шкалы интервалов.

Всё это позволяет искать прогнозирующую функцию в форме рациональной функции двух переменных. Значения корреляции, полученные из опыта (рис. 1), позволяют использовать линейную функцию.

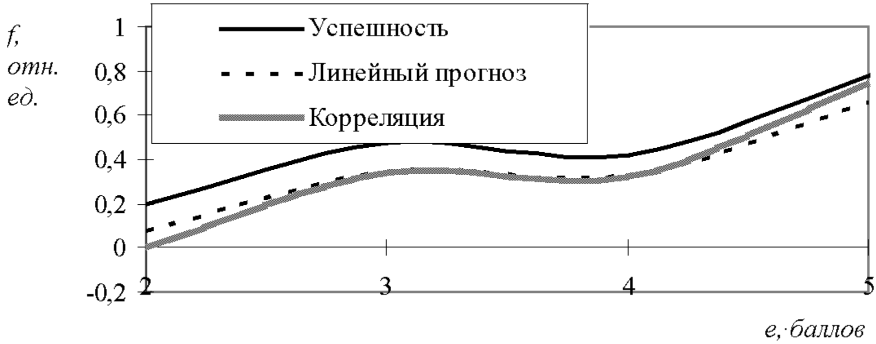


Рис. 1. Прогноз успешности

На участке, соответствующем экспертной оценке (*e*) от 2 до 5 (значения корреляции $0 \leq r \leq 0{,}74$) линейный прогноз успешности (*U*) выполняется с коэффициентом корреляции 0,998 и достоверной связью (критерий Стьюдента *t*=27,7). Кроме того, форма кривой говорит о показательной или степенной функции прогноза значений корреляции относительно экспертной оценке «силы» связи между деятельностями. Но, поскольку результаты экспертного оценивания определяются по ранговой шкале, для которой «запрещены» арифметические операции, прогноз корреляции можно ограничить таблицей соответствия экспертных оценок измеренным значениям корреляции (табл.).

Следует заметить, что в таблице представлены значения корреляции, которые были получены после «сглаживания» измеренных данных с помощью квадратичной функции.

Таблица

Соответствие экспертных оценок измеренным значениям связи между учебными деятельностями

e, баллов	0	1	2	3	4	5
r, отн. ед.	0	0	0,06	0,21	0,42	0,71

Таким образом, целевую функцию берём в виде регрессии:

$$U=\alpha R_{внеш}(r_{il}, x_i, x_l)+\beta R_{внутр}(r_{il}, x_i, x_l)+\gamma,$$

где $R_{внутр}(r_{il}, x_i, x_l)$ – суммарное значение силы связей внутри массива донора; $R_{внеш}(r_{il}, x_i, x_l)$ – суммарное значение силы связей между массивами донора и акцептора; α, β, γ – коэффициенты, полученные экспериментальным путём.

Условия задачи, представленные в форме неравенств [8, 32], ограничивают «сверху» и «снизу» число задач, которые выносятся в качестве контролирующих

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p_j} x_{jk} = S \quad , \quad \sum_{k=1}^{p_j} x_{jk} \ge S_j \quad ,$$

где x_{jk} – квантификатор существования k-й задачи j-го раздела (принимает значения 0 или 1); S и S_j – количество задач, отобранных для контроля.

Общее число задач S определяется такими факторами, как время, отводимое на контроль знаний, навыков и умений (ЗНУ), минимальный % общего числа заданий, который, по мнению экспертов, должен приходиться на респондента при одном измерении и др. Минимальное число задач S_j, приходящихся на j-й раздел учебного курса, ограничивает «деформацию» содержания учебной дисциплины.

Оптимизация содержания учебной дисциплины при усилении её связей выполняется в два этапа. Первый относится к реорганизации практической части учебного курса и состоит из шагов:

1) определение направления донорно-акцепторного подчинения, которое становится объектом исследования (у нас – использование физикой математических моделей и методов);
2) формирование списка моделей и методов донора (математика), которые применяются при решении контрольных заданий учебной деятельности акцептора (физика);
3) составление заданий для контроля качества донора на основании полученных моделей и методов, и объединение их с существующими заданиями в единый массив;
4) экспертная оценка связей внутри массива, а также с решениями задач акцептора;
5) ранжировка задач по силе связей (сумма всех коэффициентов корреляции для каждой задачи, измеренных по шкале отношений);
6) удаление задач с наименьшим значением силы связей (для приведения модели в соответствие условиям 1, 2 и 3).

Второй этап (изменение теоретической части курса) состоит из шагов:

1) составление графа, отражающего внутренние связи донора (исходя из его структуры, определённой на первом этапе);
2) создание ориентирующей основы учебной деятельности, достаточной для успешного выполнения учебных заданий донора.

Придерживаясь такой стратегии, мы должны получить оптимальный результат усиления межпредметных связей и повышения эффективности системы профессиональной подготовки (эти величины пропорциональны).

Разработанная нами процедура была применена к оптимизации содержания учебного модуля «Векторная алгебра» и усиления его связей с модулем «Механика» курса физики. В качестве рабочего материала использовались задачи для контрольных работ к соответствующим модулям (которые мы толкуем как нормативные модели обучаемого) [9; 10]. При этом подразумевается, что методики содержат компоненты, необходимые для усвоения соответствующих ЗНУ (учебные задачи, теоретический материал и т. д.)

В результате, в список контрольных заданий по математике были добавлены задачи, диагностирующие умения находить: проекцию линейной комбинации векторов на ось, модуль вектора, заданного через его компоненты, направление вектора векторного произведения и т.п.

После оценки связей между задачами модулей по физике и расширенного – по математике, а также применения к ним условий максимума успешности (или корреляции) и сохранения количества задач, часть заданий была удалена. К ним относятся задачи, диагностирующие умения вычислять линейную комбинацию векторов в координатах, скалярное и векторное произведение в координатах и т.п.

Ориентирующие основы действия (решения каждой из задач математики) методом построения семантической сети были объединены в общую структуру, составившую теоретическую часть оптимизированного учебного курса.

Выводы. 1. Проблема оптимизации профессиональной подготовки (её содержания и методов) по мере развития технологий и коммуникации становится всё острее.

2. Одним из принципов оптимизации содержания учебной дисциплины является усиление её внешних и внутренних связей. Критерием оптимизации тогда является успешность деятельности следующего уровня системной иерархии (т.е. акцептора).

3. Для измерения успешности по шкале интервалов целесообразно использовать метод оценки психической стоимости этапов деятельности. Многочисленные измерения показали, что успешность совместного выполнения деятельностей линейно зависит от силы связи между ними.

4. Поднимаясь в оценке силы связи до уровня шкалы отношений, мы можем решить задачу оптимизации содержания учебной дисциплины относительно общих целей системы профессиональной подготовки.

Литература:

1. Балясников В.В., Кальченко А.Г. Обеспечение безопасности полётов в гражданской авиации. Теоретические аспекты безопасности полётов: Учебное пособие. – Ленинград: ОЛАГА, 1988. – 78 с.
2. Макаров Р.Н. Наука. Истоки и движение цивилизации. Конструкция диссертационного исследования: Краткий энциклопедический справочник. – М.: МАПЧАК, 2004. – 1286 с.
3. Бабанский Ю.К. Оптимизация пед. процесса: (В вопросах и ответах). Для преподавателей. – К.: Радянська школа, 1984. – 227 с.
4. Ингенкамп Карлхайнц. Педагогическая диагностика: [Пер. с нем.]. – М.: Педагогика, 1991. – 238 с.
5. Беспалько В.П. Теория учебника: Дидактический аспект. – М.: Педагогика, 1989. – 160 с.
6. Волчанський В.В. Чи відповідають задачі математики потребам фізики // Наукові записки. – Випуск. – Серія: Педагогічні науки. – Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка. – 2005. – Частина 2. – С.
7. Волчанський В.В., Філер З.Ю., Бурмістров О.М., Дмитрієва І.П. Адитивність оцінки: до проблеми прогнозу ефективності міжпредметних зв'язків // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського державного університету: Серія педагогічна: Дидактика фізики в контексті орієнтирів Болонського процесу. – Кам'янець-Подільський державний університет, інформаційно-видавничий відділ, 2005. – Вип. 11. – С. 25.
8. Леонтьев Л.П., Гохман О.Г. Проблемы управления учебным процессом: Мат. модели. – Рига: Знание, 1984. – 239 с.
9. Кравченко В.В., Лубенська Т.В., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – 144 с.
10. Фізика для інженерних спеціальностей. Кредитно-модульна система: Навчальний посібник. – У 2 ч. – Ч. 2. / В.В. Куліш, А.М. Соловйов, О.Я. Кузнєцова, В.М. Кулішенко. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – 380 с.

РОЛЬ МАТЕМАТИКИ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ СТАНОВЛЕНИИ СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Т.П. Монако
Россия, г. Владикавказ, Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова
monako_tatyana@bk.ru

Переход России к рыночным формам ведения хозяйства существенно изменил значимость экономической науки. В новых условиях работы для того, чтобы поддерживать свою квалификацию на уровне, предъявляемом современным рынком труда, от каждого специалиста в области ведения хозяйства в рыночных условиях требуется соответствующее экономическое и математическое образование.

В настоящее время экономика является одной из самых математизированных наук. Успешное развитие мировой экономической науки в современных условиях тесно связано с применением всего арсенала математики к исследованию возникающих проблем. Ведь само определение экономики как науки о наиболее полном удовлетворении потребностей при ограниченных ресурсах является классической формулировкой математической задачи на нахождение условного экстремума. Математический аппарат является одним из главных инструментариев в экономических исследованиях, что особенно важно при отсутствии возможностей проведения эксперимента над реальными экономическими системами. Нобелевский лауреат в области экономики Р. Лукас в 1993 году писал: «Можно ли приобрести знания о реальности с помощью пера и бумаги? Математические модели – это вымышленные миры, придуманные экономистами. Все рассмотренные мною модели могли бы быть, но не были сопоставлены с наблюдениями. Несмотря на это, я полагаю, что процесс создания моделей, в который мы вовлечены, совершенно необходим, и я не могу представить себе, как без него мы могли бы организовать и использовать массу имеющихся данных».

На сегодняшний день математика является одним из главных инструментариев изучения экономической реальности. Итальянский экономист, классик математической экономики Вильфредо Парето писал: «Экономисты, не знающие математики, находятся в положении людей, желающих решить систему уравнений, не зная ни того, что она из себя представляет, ни даже того, что представляет из себя каждое входящее в нее единичное уравнение».

Известный российский экономист Г.Б. Клейнер считает, что вероятность признания любой новой экономической концепции едва ли не в решающей степени зависит от того, в какой мере эта концепция допускает математическую формализацию, насколько интересен используемый при этом аппарат и насколько впечатляют полученные при исследовании модели математические результаты. Значимость и важность использования математического аппарата в экономических исследованиях отражена в Нобелевских премиях в области экономики, присуждаемых с 1969 года. Из 42 ученых, ставших ее лауреатами, 26 ученых получили премии за экономические исследования на стыке экономики и математики. Эти работы стали возможными в виду осознания роли и места математики в экономике ее авторами. Использование соответствующего математического аппарата позволили получить этим ученым конкретные выводы о развитии как самой экономической системы в целом, так и о функционировании отдельных ее частей.

В высших учебных заведениях математика изучается студентами, обучающимися на разных факультетах и специальностях. При этом вполне очевидно, что проникновение в ее сущность, освоение различных фрагментов ее содержания, уровень математической строгости не может быть одинаковым для всех студентов. Преподавание математики традиционно осуществляется кафедрами высшей математики и соответствующие курсы читаются на достаточно высоком математическом уровне со всей строгостью доказательств. В этом случае существуют стандартные ссылки на тот факт, что математика изучается сама по себе, как часть мировой культуры. Математическая подготовка студентов различных специальностей проводится по традиционной схеме «от простого к сложному». При таком подходе изучение математики в вузе начинается со знакомства с основными определениями, аксиомами и доказательствами простых теорем. На их основе проводится доказательство более сложных и тонких теорем. Изучаемые понятия и теоремы, как правило, иллюстрируются абстрактными примерами и моделями. Если модельные примеры и носят прикладной характер, то он обязательно физический или механический, что является отражением исторического пути становления и развития математики. Следует заметить, что и эти примеры не достигают желаемой педагогом цели, поскольку у студентов фактически отсутствуют необходимые знания из области физики. Демонстрация применения получаемых математических знаний к решению реальных задач из области будущей профессиональной деятельности вообще отсутствует или носит случайный характер. Такой подход может удовлетворить только студентов математических специальностей, которые довольствуются красотой и строгостью излагаемого материала, или студентов, обучающихся на физических или технических специальностях. Студенты же, обучающиеся на других факультетах и специальностях, быстро теряют интерес к изучаемому предмету. Изучение курса математики сводится к простой «зубрежке» множества определений, формул, теорем.

Традиционное обучение математике студентов обучающихся на экономических специальностях, основано преимущественно на репродуктивных методах обучения и ориентации на запоминание конкретных фактов и алгоритмов. Решение задач исключительно репродуктивного характера не приводит к глубокому, осознанному освоению изучаемого материала, а приводит к формализму в знаниях. Задачи, возникающие в будущей профессиональной деятельности студентов-экономистов, носят иной характер и могут иметь множественность решения. Опыт показывает, что если изучаемый материал по математике преподносится вне связи с задачами из области будущей профессиональной деятельности, то он не превращается в действенный инструмент в практической деятельности специалиста. Человек, привыкший к репродуктивной деятельности, оказывается не в состоянии выбрать соответствующий алгоритм решения возникающей задачи, проанализировать возможные пути решения и выбрать из них оптимальный. Для него уже на начальной стадии решения характерна попытка привязать к ситуации случайную идею, вспоминаемую по признаку внешнего сходства. Такой подход к обучению в современных условиях не является эффективным.

После такого изучения традиционного курса математики у студентов экономического факультета складывается негативное отношение к математике, поскольку они не приобретают при этом так необходимых навыков практического применения полученных знаний к изучению явлений не только экономической, но окружающей действительности. Как показал опрос, проведенный среди студентов первых курсов экономических специальностей, обучающихся в различных вузах г. Владикавказа, 74% считают математику «лишним», «второстепенным» предметом.

При обучении студентов в высшей профессиональной школе необходимы определенные стимулы, главными из которых является личный интерес, связанный с профессиональной необходимостью. Придя в вуз, студенты желают получать информацию о прикладной направленности изучаемых дисциплин, то есть хотят сразу видеть профессиональную пользу от изучаемых дисциплин. В этой связи преподавание математики в вузе, с одной стороны, должно обеспечить студентов соответствующим математическим аппаратом необходимом при изучении специальных дисциплин, создать базу для использования получаемых математических знаний в будущей профессиональной деятельности, с другой – способствовать развитию мировоззрения, формированию личности будущего специалиста.

Все это требует построения процесса обучения на первом и втором курсах экономического факультета, позволяющего создавать целевую ориентацию, связанную с главной целью обучения в вузе – подготовкой высококвалифицированного специалиста и направленной на осознание студентами значимости и важности всех изучаемых дисциплин в процессе профессионального обучения и становления. Это означает, что студент и его интересы становятся центральной фигурой учебного процесса. Начиная с первых дней пребывания в вузе, он должен вовлекаться в активный познавательный процесс, учиться применять на практике получаемые знания и четко осознавать где, каким образом и для решения каких профессиональных задач в дальнейшем эти знания могут быть применены. Построенный таким образом процесс обучения в высшем учебном заведении будет являться для студентов важнейшим мотивационным фактором повышения эффективности обучения по всем изучаемым дисциплинам независимо от их цикловой принадлежности.

Мы согласны с мнением А.В. Бухвалова о том, что квалифицированный экономист нуждается в массе разнообразных знаний, умений и навыков в значительно большей степени, чем инженер, сконцентрированный, как правило, на одной, узкой области знания. Поэтому при обучении экономистов нет необходимости и возможности тратить учебное время на решение формальных задач и упражнений – надо сразу учить в том стиле, который способствует основной задаче образования – выработке экономического образа мышления.

Особенность подготовки современных экономистов заключаются в том, что им предстоит роль организаторов, менеджеров, непосредственно участвующих в выборе и обосновании соответствующих управленческих решений на различных уровнях управления экономикой: от микроуровня, где решаются задачи по развитию предприятия, фирмы, цеха, участка, до макроуровня – решение стратегических вопросов развития города, республики, региона. Поэтому целью математического образования на первом курсе должно стать развитие навыков системного подхода для обоснования решений на различных уровнях управления экономикой. В этой ситуации у кафедр, ведущих дисциплины математического цикла, возникает необходимость разработки новых программ обучения, в которых отражено оптимальное соотношение между фундаментальной и профессиональной составляющей с помощью задач на применение соответствующих разделов математики к решению конкретных профессионально ориентированных проблем.

Формирование у студентов интереса к решению задач является важнейшим средством повышения их заинтересованности изучения математики и приобщения к творческой деятельности. Интерес к математическим методом возникает после решения пусть простейших, но профессионально ориентированных задач. Изложение каждого раздела математики должно начинаться с постановки соответствующих экономических задач, которые впоследствии будут решаться полученными математическими методами. Такой подход позволяет студентам уже с первого курса чувствовать свою причастность к профессиональной деятельности, ясно видеть необходимость изучения каждого нового раздела математики.

Первое самостоятельное овладение студентами методами анализа пусть простейших экономических явлений получаемыми математическими методами, осознание этих методов как инструментария для принятия правильного решения, – необходимое условие для профессионального становления и преодоления будущими экономистами недоверчивого отношения к выводам и рекомендациям науки. Как показывают исследования, 59% решений в области экономической деятельности, принимаемые на уровне интуиции, оказываются ошибочными. Поэтому главной целью курса математики на первом курсе является не столько техническая сторона решения практических задач, сколько выработка навыков использования математических методов в оценке явлений экономической деятельности. При таком подходе к преподаванию математики уже с первого курса студент начинает чувствовать свою причастность к профессиональной деятельности, четко осознавая при этом необходимость изучения математики для профессионального становления и роста. Это позволяет расширять профессиональный кругозор, вырабатывает профессиональную интуицию, позволяющую в последствии решать нетривиальные экономические проблемы. Культура овладения предметом «Математика» у студентов-экономистов должна проявляться в умении интегрировать математические и экономические знания в единое целое.

Данное исследование выполняется при поддержке Российского гуманитарного научного фонда (РГНФ), проект №05-06-37601а/Ю.

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМ ЕКОНОМІЧНОГО ПРОФІЛЮ

О.В. Шепеленко
м. Донецьк, Донецький державний університет економіки і торгівлі
ім. М. Туган-Барановського

Незалежно від профілю майбутніх фахівців вищій навчальний заклад повинен виконати одну з головних своїх задач – сформувати у майбутніх фахівців основи інноваційної поведінки, дати їм набір соціальних технологій, які б дозволяли в конкретному соціальному середовищі оперативно реагувати на постійні зміни цього середовища і приймати випереджальні рішення. Міждисциплінарний підхід, використання синергетичних принципів, необхідність значних змін і координації роботи викладачів вузів над сучасними методиками, програмами і навчальними посібниками, врахування зростаючої тенденції інформатизації суспільства і деякі інші фактори вимагають впровадження в навчальний процес вищої школи нових інноваційних технологій навчання. Однією зі складових інноваційної поведінки є стратегічне бачення й уміння прогнозувати, уміння користуватися казуальними (причинними) методами аналізу, що включають аналіз структур зв'язків і залежностей.

Формування фахівця нового рівня ставить перед викладачем проблему пошуку нових і удосконалення традиційних методик викладання. Максимальної ефективності можна досягти лише в тому випадку, коли весь процес навчання вищої математики побудовано на основі тісного зв'язку зі спеціальними дисциплінами та використанні останніх наукових досягнень.

Нова реальність, у якій опинилася система вищої освіти, вимагає і нових підходів у правильній побудові міжпредметних зв'язків – однієї з найважливіших передумов інноваційної поведінки майбутніх фахівців. Професійна орієнтованість математичних задач, постійне звертання до економічного змісту понять і дій актуалізують теоретичні знання, отримані студентами на заняттях з вищої математики. Засвоєні навички використання сучасних методів математичного моделювання реальних економічних процесів, поняття значущості досліджуваної моделі, елементи наукового передбачення і прогнозування, уміння інтерпретувати результати наукового дослідження є найважливішим фундаментом підготовки фахівця з економіки.

Одним із немаловажних аспектів викладання вищої математики в економічних вузах є тіснота взаємозв'язку лекцій і практичних занять. Оскільки особливістю викладання вищої математики в економічному вузі, на наш погляд, є формування в майбутніх економістів навиків їхньої професійної діяльності, то систему лекційно-практичних занять варто будувати як єдину конструкцію.

Для зміцнення взаємозв'язку лекції з практичним заняттям необхідно на лекції актуалізувати практичні знання й уміння студентів. У ході лекції студент повинен зрозуміти: Що робити? Навіщо це робити? Як це робити? І тим самим стимулювати інтерес і мотиви для інтенсивної пізнавальної діяльності під час практичних занять. Стимулювання самостійної роботи студентів з отримання знань, необхідних у пізнавальній діяльності під час практичних занять, є одним із важливих аспектів зміцнення взаємозв'язку лекцій і практичних занять.

Для зміцнення взаємозв'язку практичних занять із лекціями слід студентів орієнтувати на те, що практичні заняття є логічне продовження роботи, розпочатої на лекції. Викладачу в ході практичного заняття необхідно здійснювати актуалізацію опорних знань, отриманих на лекціях. На практичному занятті можна стимулювати мотиви й інтерес до пізнавальної діяльності на лекціях. Наприклад, у якості домашнього завдання можна поставити запитання, відповідь на яке може бити знайдена в ході прослуховування майбутньої лекції. Також на практичному занятті можна використовувати дискусійну постановку питання, проблемні ситуації, і тим самим викликати інтерес до опорних знань, вмінь і навиків.

Важливу роль для зміцнення взаємозв'язку лекцій із практичними заняттями мають узгоджені дії лектора й асистента. Перед лектором і асистентом стоять єдині педагогічні задачі і цілі. Асистент зобов'язаний знати про тему, цілі, задачі, зміст і методи проведення кожної лекції для якісного проведення практичного заняття, з огляду на всі рекомендації і вказівки лектора. Про уміння і навики, що придбані студентами на практичному занятті, асистент повинен інформувати лектора.

На лекціях і практичних заняттях з вищій математики викладачам необхідно ілюструвати синтез різних розділів математики в їхньому внутрішньому зв'язку, намагатися підкреслювати спадкоємність курсу математики, розкривати логіку проходження тем і розділів, підкреслювати чітку побудову всього курсу, рухатися від простого до складного, використовувати в наступних темах поняття і методи, вивчені раніше, постійно повертатися до вже пройденого матеріалу.

Деякі з цих пропозицій важко виконувати в умовах скорочення кількості аудиторних годин, відведених на освоєння матеріалу. Але лектор і асистент повинні прагнути до оптимальної форми викладання курсу вищої математики, з огляду на нюанси спеціалізації студентів. Необхідно також пропонувати історичні довідки про виникнення понять, алгоритмів і підходів, показуючи математичні побудови в їхньому історичному розвитку.

Хоча в курсі математики вивчаються не реальні об'єкти, а математичні структури, що представляють собою абстрактні поняття, у яких описаний ряд співвідношень між їхніми елементами, варто постійно підкреслювати, що математичні структури можуть бути (і в більшості випадків є) безпосередніми математичними моделями реальних явищ. Наприклад, похідна моделює швидкість руху матеріальної точки, швидкість течії економічного або соціального процесу, коефіцієнт еластичності попиту від ціни. Природно, що в курсі вищої математики у вищому спеціальному, не математичному навчальному закладі і повинні вивчатися математичні структури, що не є безпосередньою математичною моделлю реального явища, лише остільки, оскільки вони є зручним математичним апаратом для вивчення математичних моделей реальних явищ.

Однак варто враховувати, що зміст математичного поняття не залежить від галузі його подальшого застосування, тому задача викладача полягає в роз'ясненні змісту досліджуваних математичних понять.

Вміння потрібним чином застосовувати математичні методи для розв'язування практичних задач із тим, щоб одержувати необхідні результати, є основним критерієм для оцінки правильної постановки навчання. Для досягнення певної цілі першорядну роль грає підбір досліджуваного матеріалу. Методологічно неправильним і навіть шкідливим варто вважати підхід, при якому обмежуються вивченням методів, що знаходять безпосереднє застосування в спеціалізованих побудовах і розрахунках. Подібне вивчення математики приводить до збідніння уявлення про понятійний апарат науки, виключає все багатство і різноманіття математичних побудов і конструкцій, принижує роль математики як вершини розвитку людської наукової думки. Однак існує й інша крайність – вивчення матеріалу “у повному об'ємі”, із докладними трудомісткими викладеннями, із скрупульозними виводами тверджень і строгим математичним доказом всіх положень. Суть питання – не у важливості повідомлення студенту десятків теорем, а, насамперед, у тому, щоб студент активно оволодів основними поняттями. Тоді на базі фундаментальних знань виховується математична культура, необхідна надалі для використання математичного апарата.

Розуміння і поглиблення міжпредметних зв'язків теж є немаловажним аспектом у формуванні освіти студентів економічного профілю. Однією з основних рис математичного знання, що обумовлює можливість його застосування в різних галузях людської діяльності, є високий рівень абстракції. У процесі навчання необхідно встановити зв'язок між спеціальними дисциплінами та курсом вищої математики, що дозволити студентам уже на молодших курсах вникати в проблеми спеціальності і використовувати математичні наукові результати надалі при написанні курсових та дипломних робіт.

У зв'язку з цим професійно-орієнтоване навчання стає важливим інструментом у реалізації цього підходу, оскільки професійно-орієнтоване навчання дозволяє формувати і направляти активність у навчальному процесі, не допускаючи однобічного сприйняття і поверховості знань, вимагає відмови від старих методів, дидактичних схем навчання, що пропонують уривчасті знання з різних галузей і відступають від головного – свідомості.

Для реалізації професійно-орієнтованого навчання необхідним є створення психологічного мікроклімату навчальної взаємодії. Розв'язання професійно-орієнтованих наукових задач допомагає встановленню більш тісного зв'язку курсу вищої математики з предметами спеціальних курсів, що не тільки сприяє поглибленому вивченню останніх, але і мотивує опанування студентами такими фундаментальними поняттями, як похідна, невизначений та визначений інтеграли тощо. Тому необхідним є складання систематизованого набору професійно-орієнтованих задач з вищої математики. Добре зарекомендувала себе практика "наскрізних" індивідуальних завдань, що розраховані на застосування всього досліджуваного матеріалу.

Як показує досвід, великий інтерес у студентів викликають завдання, пов'язані з розв'язанням математичних задач за допомогою комп'ютера, які мають яскраво виражену прикладну постановку з тієї області, що їм доступна на момент виконування роботи. Студент повинен безпосередньо усвідомити, що мова математики – це плідний засіб опису процесів у природі й економіці. При вивченні елементів лінійної алгебри, наприклад, можна розглянути модель багатогалузевої економіки. При вивченні похідних, наприклад, доцільно розглянути задачі про витрати виробництва та виручку, про продуктивність праці, швидкість і темпи її зміни. При вивченні визначеного інтеграла, наприклад, доцільно розглянути задачі про обсяг виробленої продукції при відомій функції продуктивності праці.

Практика показує, що саме професійно-орієнтоване навчання студентів дає їм можливість поглибити математичні і професійні знання, закріпити навички використання комп'ютерних програм, підвищити інтерес до вивчення дисциплін математичного циклу.

Також ланкою, що пов'язує лекції і практичного заняття, є самостійна робота студентів.

При проведенні практичних занять з математичних дисциплін перед асистентом стоїть задача не тільки повідомити студентам певну систему знань, але навчити їх думати, розвити мислення, творчу ініціативу, самостійність. Основна ціль практичних занять з математичних дисциплін – придбання студентами практичних знань і умінь, що може бути досягнута тільки за допомогою активної роботи при самостійному рішенні задач і прикладів.

Для проведення більш плідних і результативних практичних занять з математичних дисциплін до класичної схеми (перевірка домашнього завдання – опит теоретичного матеріалу – розв'язування задач і прикладів – видача домашнього завдання) варто додати два елементи: самостійна робота та самоконтроль.

Повторення теоретичного матеріалу варто проводити у формі бесіди або дискусії, у якій беруть участь практично всі студенти групи. На наш погляд, із метою обхвату всіх студентів групи цим видом роботи, доцільно проводити так звані математичні "диктанти", що включають деякі з основних питань і формул досліджуваної теми. Перевіряти цю роботу може як викладач, так і в якості самоконтролю студент, використовуючи при цьому конспект лекцій. Задача викладача при цьому допомогти усвідомити, що такий вид роботи є сполучною ланкою між попередньою позааудиторною роботою і наступною самостійною роботою по вивченню і закріпленню пройденого матеріалу.

Для активізації розумової діяльності студентів рекомендується також використовувати на практичних заняттях, як і на лекціях, створення проблемних ситуацій у сполученні з традиційним підходом. Для формування проблемних ситуацій можна використовувати задача, парадокси, штучно створені помилки. На практичних заняттях найчастіше застосовують мікропроблемні ситуації, що використовуються для більш глибокого засвоєння окремих моментів теми. При цьому в студентів розвивається мислення, творча ініціатива, самостійність.

Після рішення типових задач, студентам варто запропонувати написати самостійну або контрольну роботу, у яку повинні бути включені індивідуальні завдання. Важливо, щоб кожний студент мав своє індивідуальне завдання. Ця робота обов'язково повинна бути перевірена й оцінена.

Важливим чинником підвищення ефективності викладання математичних дисциплін є індивідуалізація процесу навчання, оскільки студенти мають різний рівень початкової математичної підготовки. Індивідуальні завдання є основним видом самостійної роботи. При впорядкуванні різноманітних завдань необхідно чітко дотримуватися єдності теоретичного і прикладного напрямів у математиці, а також приділяти увагу підбору задач, слідуючи принципу від простого до складного, всебічного охоплення найважливіших розділів навчального матеріалу, практичної спрямованості і професійної орієнтації запропонованих задач. Використання індивідуальних завдань сприяє формуванню логічного мислення в студентів і прищепленню їм навичок самостійної і дослідницької роботи.

Таким чином, для підготовки фахівця з економіки нового рівня викладачу слід процес викладання дисциплін математичного циклу побудувати на основі тісного зв'язку зі спеціальними дисциплінами, використанні останніх наукових досягнень, взаємодії лектора й асистента, організації самостійної роботи студентів, реалізації принципів професійно-орієнтованого навчання. Такий підхід дозволить підвищити інтерес до вивчення дисциплін математичного циклу студентів не математичних спеціальностей.

ЗВ'ЯЗОК ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ З ДИСЦИПЛІНАМИ ЕКОНОМІЧНОГО ПРОФІЛЮ

І.Б. Рудь
м. Ірпінь, Національна академія державної податкової служби України
lusind@rambler.ru

Зміст викладання вищої математики має відповідати кваліфікаційним вимогам до спеціаліста, якого готує вищий навчальний заклад економічного профілю. Як визначає кваліфікаційна характеристика (ОКХ), спеціаліст з економіки за фаховим спрямуванням "Фінанси" – це фахівець з високим потенціалом фундаментальної освіти, підготовлений для планово-економічної, організаційно-управлінської, аналітичної та дослідницької діяльності в галузі економіки на підприємствах різних сфер власності, у сфері послуг, в управлінні, в науково-дослідних установах та державних податкових адміністраціях, комерційних банках та їх управлінні. В таблиці наведені данні щодо кількісних показників вимог до випускника ВНЗ економічного профілю та їх безпосередній і опосередкований зв'язок з вищою математикою. Серед 64 вимог безпосередній зв'язок з вищою математикою мають 30 показників (46,8%), опосередкований – 14 (21,9%). Таким чином, більше двох третин вимог до випускника пов'язані з вищою математикою. Це свідчить про надзвичайно важливу роль цього предмету та його викладення для підготовки фахівців.

Таблиця 1. Кількісні показники вимог ОКХ до випускника

Категорії вимог до випускника	Загальна кількість	Кількість вимог, які безпосередньо стосуються вищої математики	Кількість вимог, які опосередковано стосуються вищої математики
Знати	37	11	12
Вміти	16	12	1
Мати навички	11	7	1
Всього	64	30 (46,8%)	14 (21,9%)

У вищому навчальному закладі економічного профілю з метою виконання кваліфікаційних вимог передбачена комплексна навчальна дисципліна "Математика для економістів", що має такі складові: вища математика, математичне програмування; теорія ймовірностей і математична статистика. Зосередимося на вищій математиці, яка є базовою складовою загального комплексного курсу.

Метою навчальної дисципліни "Вища математика" є: ознайомити з основами математичного апарату, необхідного для розв'язання теоретичних і практичних завдань економіки, виробити навички математичного дослідження прикладних задач, зокрема побудови економіко-математичних моделей; виробити вміння самостійно вивчати навчальну літературу з математики та її прикладних питань; дати необхідну математичну підготовку та знання для вивчення інших дисциплін математичного циклу (“Теорія ймовірностей та математична статистика”, “Математичне програмування”). Предметом дисципліни є фундаментальні положення аналітичної геометрії, лінійної алгебри та математичного аналізу.

Реалізація цієї мети на засадах особистісно-орієнтованого викладання вищої математики забезпечить студентам:

- формування математичного кругозору в контексті застосування знань в інтересах загальнолюдських, моральних, гуманістичних якостей;
- усвідомлення своєї ролі як суб’єкта навчального процесу, а в майбутньому – свідомого громадянина і фахівця своєї держави;
- засвоєння студентами цілісної системи математичних знань для аналізу та прогнозування соціально-економічних процесів в суспільстві, обчислення макро- та мікроекономічних показників розвитку галузей народногосподарського комплексу;
- оволодіння кращими здобутками вітчизняної і світової математичної науки та застосування їх в національній економіці;
- можливість здійснювати наукову діяльність, розвивати свій творчий потенціал;
- навички з розв’язання економічних задач з урахуванням невизначеності, розробки відповідних економіко-математичних моделей з використанням ЕОМ;
- навички виконання техніко-економічних розрахунків, пов’язаних з аналізом і обґрунтуванням раціональної поведінки мікросистем у ринкових умовах;
- можливість здійснення статистичної обробки зібраних даних, аналізу одержаних результатів та розробки науково обґрунтованих висновків;
- здатність здійснювати системний аналіз категорій активного ризику в спектрі економічних проблем на базі спеціальних економіко-математичних методів;
- формування мотивації, творчого мислення, комунікативних якостей в сфері майбутньої професійної діяльності;
- розвиток потреби в самоосвіті та пізнавальній активності.

Як зазначалось вище, більше двох третин вимог до випускника (ОКХ) пов’язані з вищою математикою. Тому при побудові курсу вищої математики потрібно виявити та врахувати її зв’язки з іншими предметами і відповідним чином здійснити відбір та структурування навчального матеріалу. Безпосередній зв’язок вищої математики з іншими дисциплінами (математичного та економічного циклів) навчального плану з підготовки фахівців за професійним спрямуванням “Фінанси” відображено у таблиці 2.

Таблиця 2. Зв’язок вищої математики дисциплінами математичного та економічного циклів навчального плану спеціальності “Фінанси”

<table>
<tr><td>Навчальна дисципліна економічного циклу</td><td rowspan="25">Вища математика
⇐ ⇒</td><td>Навчальна дисципліна математичного циклу</td></tr>
<tr><td>Мікроекономіка</td><td rowspan="4">Теорія ймовірностей і математична статистика</td></tr>
<tr><td>Макроекономіка</td></tr>
<tr><td>Економіка підприємства</td></tr>
<tr><td>Маркетинг</td></tr>
<tr><td>Фінанси</td><td rowspan="5">Математичне програмування</td></tr>
<tr><td>Бухгалтерський облік</td></tr>
<tr><td>Економічний аналіз</td></tr>
<tr><td>Інвестування</td></tr>
<tr><td>Розміщення продуктивних сил</td></tr>
<tr><td>Фінансовий менеджмент</td><td rowspan="5">Економетрія</td></tr>
<tr><td>Страхування</td></tr>
<tr><td>Оподаткування</td></tr>
<tr><td>Банківські операції</td></tr>
<tr><td>Ринок фінансових послуг</td></tr>
<tr><td>Фінансовий аналіз</td><td rowspan="5">Економічний ризик</td></tr>
<tr><td>Бюджетна система</td></tr>
<tr><td>Аудит</td></tr>
<tr><td>Облік у бюджетних установах</td></tr>
<tr><td>Статистика</td></tr>
<tr><td>Інформатика та комп’ютерна техніка</td><td rowspan="5">Економіко-математичні методи</td></tr>
<tr><td>Статистика фінансів</td></tr>
<tr><td>Соціологія</td></tr>
<tr><td>Ціноутворення</td></tr>
<tr><td>Менеджмент</td></tr>
</table>

Структурно-логічні зв’язки розділів та тем вищої математики з основними дисциплінами економічного та математичного циклів відображені у таблиці 3.

Викладені зв’язки вищої математики з іншими дисциплінами навчального плану та структурно-логічні зв’язки розділів та тем вищої математики з основними дисциплінами економічного та математичного циклів свідчать про надзвичайно важливу роль цього предмету та його викладення для підготовки фахівців-економістів.

Таблиця 3.

Предмети / Розділи вищої математики	Векторна алгебра	Лінійна алгебра	Аналітична геометрія	Границя функції	Похідна функції	Інтегральне числення	Диференціальні рівняння	Ряди	Функції кількох змінних
Мікроекономіка	+	+	+	+	+	+		+	
Макроекономіка	+	+		+	+	+			
Економетрія	+	+		+	+	+			+
Економічний ризик		+			+			+	
Статистика		+			+	+	+	+	+
Економічний аналіз					+	+		+	+
Страхування	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Інформатика та комп'ютерна техніка	+	+			+	+		+	
Менеджмент		+			+				
Фінанси	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Інвестування				+	+	+	+	+	
Розміщення продуктивних сил	+	+	+						
Фінансовий менеджмент	+	+			+			+	
Страхові послуги				+	+		+	+	+
Ринок фінансових послуг				+	+			+	
Статистика фінансів		+			+	+		+	+

НЕПЕРЕРВНА МАТЕМАТИЧНА ПІДГОТОВКА СТУДЕНТІВ ЗА СПЕЦІАЛЬНІСТЮ "МЕНЕДЖМЕНТ ЗОВНІШНЬОЕКОНОМІЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ"

О.В. Цибуленко, В.В. Крючковський, А.Н. Хомченко
м. Херсон, Херсонський національний технічний університет
meo@kstu.edu.ua

Стрімкі процеси інформатизації та інтелектуалізації суспільства вимагають ґрунтовної математичної підготовки спеціалістів різних галузей. Тому в стандарт економічної освіти розвинутих країн як обов'язкова складова входить вільне володіння математичним апаратом. Загальний курс вищої математики є підґрунтям освіти кваліфікованого спеціаліста.

Підготовка з математичних дисциплін дає студентам, що навчаються на спеціальностях з економічною спрямованістю, необхідні знання та вміння, які сприяють формуванню світогляду, забезпечують можливість оволодіти комплексом професійно-орієнтованих дисциплін та дозволяють науково-обґрунтовано розв'язувати економічні задачі. Математика має широкі можливості розвитку логічного мислення, просторових уявлень і уяви, алгоритмічної культури, формування вмінь встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, обґрунтовувати твердження, моделювати ситуації.

У той же час математична підготовка молодих фахівців, що приходять на роботу в організації, уміння використати математику у своїй практичній діяльності, а головне - розширювати свій світогляд, залишають бажати кращого.

Причиною цього прийнято вважати розрив у часі між викладанням курсів математики та спеціальних дисциплін, а ефективним засобом запобігання цьому - розробку та впровадження планів безперервної математичної підготовки протягом усього строку навчання студентів. Однак складання таких планів показало, що ніякого тимчасового розриву використання математичних методів між молодшими і старшими курсами формально не існує.

Об'єктом нашого дослідження є розгляд змісту дисциплін, що вивчаються студентами спеціальності 050206 - "Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності".

Мета роботи аналіз застосування плану неперервної математичної підготовки в навчальному процесі.

Базова математична підготовка студентів спеціальності "Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності" включає наступні фундаментальні дисципліни:

- вища математика для економістів;
- математичне програмування;
- теорія ймовірності та математична статистика;

- дослідження операцій;
- економетрія.

Протягом перших трьох семестрів навчання студенти економічних спеціальностей отримують достатньо широкий спектр математичних знань, які використовує сучасна економіка - від елементарних базових знань про функцію до спеціальних методів оптимізації, що складають основу математичного програмування, теорії ігор, мережного планування, теорії масового обслуговування та інших прикладних математичних наук.

Курс "Математика для економістів" розбито на основні 9 розділів (таблиця 1).

Таблиця 1

№ розділу	Назва розділу
1	Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії
2	Вступ до математичного аналізу
3	Диференціальне числення функції однієї незалежної змінної
4	Застосування диференціального числення для дослідження функцій та побудови їх графіків
5	Функції кількох змінних
6	Невизначений інтеграл
7	Визначений інтеграл
8	Звичайні диференціальні рівняння
9	Ряди

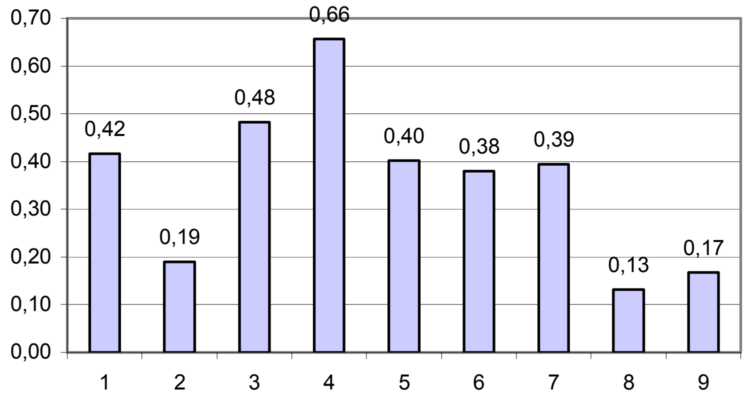
Аналіз змісту програм з передбачених навчальним планом курсів показав, що математичні поняття та методи систематично використовуються як при вивченні багатьох спеціальних дисциплін, так і при розв'язанні прикладних задач. Наприклад, при вивченні "Міжнародних економічних відносин" майбутнім менеджерам ЗЕД необхідні знання розділів вищої математики, які вказані в таблиці 2.

Таблиця 2

№	Назва тем курсу "Міжнародні економічні відносини"	Теми у програмі вищої математики
1	Інструментарій стратегічного менеджменту	Матриці та дії з ними. Системи лінійних рівнянь методи їх розв'язання. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка. Функції двох аргументів.
2	Особливості основних функцій менеджменту міжнародних корпорацій	(ті самі)
3	Особливості прийняття управлінських рішень в транснаціональних корпораціях	(ті самі)
4	Міжнародна логістика	Матриці та дії з ними.

		Системи лінійних рівнянь, методи їх розв'язання. Вектори. Скалярний, векторний та змішаний добуток векторів. Пряма лінія на площині і у просторі. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка.

Так, з 137 розділів по 25 проаналізованим дисциплінам, що містять елементи вищої математики, розділ “Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії” використовується у 57 темах, що становить 42%, розділ “Вступ до математичного аналізу” використовується у 26 темах (відповідно 19%) і т.д. (графік 1).



Графік 1. Коефіцієнт використання розділів вищої математики іншими дисциплінами (по горизонталі номера розділів, що наведені в таблиці 1).

Графік 1 доводить, що найбільше застосовуються розділи:

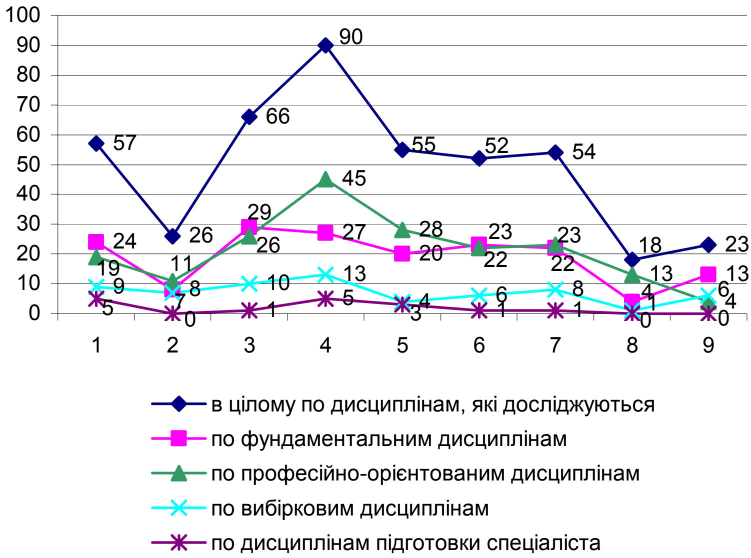
- Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії
- Диференціальне числення функції однієї незалежної змінної
- Застосування диференціального числення для дослідження функцій та побудови їх графіків
- Функції кількох змінних
- Невизначений інтеграл
- Визначений інтеграл

І майже не притягуються до викладання нематематичних дисциплін такі розділи, як

- Вступ до математичного аналізу
- Звичайні диференціальні рівняння

▪ Ряди

На графіку 2 відображене порівняння об’єму математичного апарату у кожному з чотирьох циклів дисциплін, що викладаються: фундаментальними, професійно-орієнтованими, вибірковими та підготовки спеціалістів.



Графік 2. Частота появи розділів математики при викладанні курсів інших дисциплін

Отже, наявний план неперервної математичної підготовки студентів спеціальності “Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності” передбачає підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів з підсиленням її прикладної направленості.

Для того, щоб в подальшому навчанні студенти не втрачали набутий математичний досвід, необхідний контроль щодо організації і впровадження неперервної математичної підготовки студентів з першого курсу до захисту дипломного проекту.

По-перше, необхідно запроваджувати нові математичні поняття, теорії, методи із використанням математичних об’єктів, процесів, наближених до реальних. По-друге, бажано дотримуватись природної послідовності викладання курсу математики для економістів та інших математичних дисциплін.

Робота по складанню та застосуванню у навчальному процесі єдиного плану неперервної математичної підготовки студентів має призвести до взаємопроникнення інтересів математичних, загальнонаукових та спеціальних економічних кафедр, посилення контактів між викладачами цих кафедр для широкого використання математичного інструменту у викладанні спеціальних економічних дисциплін, та їх співпраці у науковій та методичній роботі.

Значну роль відіграє і відношення студентів до математики, а від цього залежить їх рівень знань. В основному це визначається тим, наскільки математичний апарат використається в курсовому та дипломному проектуванні. Студенти не бажають вивчати математику, тому що вона, на їх думку, майже не використовується надалі. А викладачі професійно-орієнтованих дисциплін часто зводять використання математики до мінімуму через слабку математичну підготовку студентів. Щоб покласти край цьому "порочному колу", математичні дисципліни повинні навчати студентів не тільки математичним методам, але й додаткам математики до завдань майбутньої професії [1].

Треба також відзначити існування розриву між середнім рівнем математичної підготовки випускників шкіл та вимогами вищої освіти і сучасного ринку праці. І цей розрив тільки збільшується.

Тому орієнтація вищої школи на підвищення якості підготовки спеціалістів економічного профілю в професійному плані потребує пошуку нових форм і методів організації навчального процесу взагалі і в тому числі в організації математичної підготовки. В цьому контексті метою сучасної математичної підготовки студентів економічних спеціальностей має бути цілеспрямована їх підготовка к майбутній професійній діяльності.

На наш погляд, напрямом для успішного вивчення дисциплін майбутніми менеджерами ЗЕД є професійна орієнтація курсу вищої математики, тобто вивчення кожної теми курсу має супроводжуватися прикладними задачами, щоб студент мав чітке уявлення про те, де знання з вищої математики можна застосувати в майбутній діяльності.

Література:

1. Олейник Ю.Т. Информатика и прикладная математика в подготовке экономистов // Математика в вузе. Сб. научн. трудов. – СПб.: ПГУПС, 2004. – С. 52-54.

МАТЕМАТИЧНА СКЛАДОВА ПРОПЕДЕВТИКИ РИЗИКОЛОГІЇ У ШКОЛІ ТА ВИЩОМУ ЗАКЛАДІ ОСВІТИ

О.Л. Лещинський[1], О.В. Школьний[2]
[1] м. Київ, Промислово-економічний коледж
Національного авіаційного університету
[2] м. Київ, Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
shkolnyi@ukr.net

Вступ. Соціально-економічна діяльність в умовах ринкової економіки завжди пов’язана з мінливістю, недетермінованістю оточуючої дійсності. Ця невизначеність проявляється у непередбачуваності впливу партнерів, конкурентів, а також у зміні законодавства, інфляційних процесах тощо. Крім того, вона є причиною виникнення *ризику*, який доводиться враховувати всім суб’єктам ринкових стосунків. Можна сказати, що ризик є сутнісною характеристикою сучасного життя.

Зважаючи на перелічені причини, природним є те, що у економічних вищих закладах освіти (ВЗО) дисципліна “Економічний ризик та методи його вимірювання” є обов’язковою для підготовки фахівців з економіки, менеджменту, фінансів, бухгалтерського обліку, банківської справи тощо. При цьому даний предмет, як правило, завершує цикл економіко-математичних дисциплін. Це зумовлено тим, що для охоплення усіх граней економічного ризику необхідні ґрунтовні знання з економічної теорії, теорії ймовірностей, статистики, математичного програмування, економетрії та інших. Як наслідок, не можна обійти стороною і пропедевтичні аспекти ризикології при вивченні згаданих дисциплін.

Зрозуміло, що пропедевтика системного вивчення економічної діяльності в умовах ризику повинна здійснюватися як при вивченні економічних дисциплін (макро- і мікроекономіка, менеджмент, банківська справа, бухгалтерський облік тощо), так і при розгляді математичних курсів, які входять до системи підготовки фахівців з економіки. У даній роботі нами буде розглянута, в основному, *математична складова* пропедевтики ризикології. Однією з найголовніших цілей даного дослідження є встановлення міжпредметних зв’язків за пропедевтичним фактором між теорією економічного ризику та економіко-математичними дисциплінами, що їй передують. Важливо також з’ясувати роль лінії ризикології при вивченні кожної із розглянутих дисциплін і на конкретних практичних задачах продемонструвати необхідність та важливість цієї лінії.

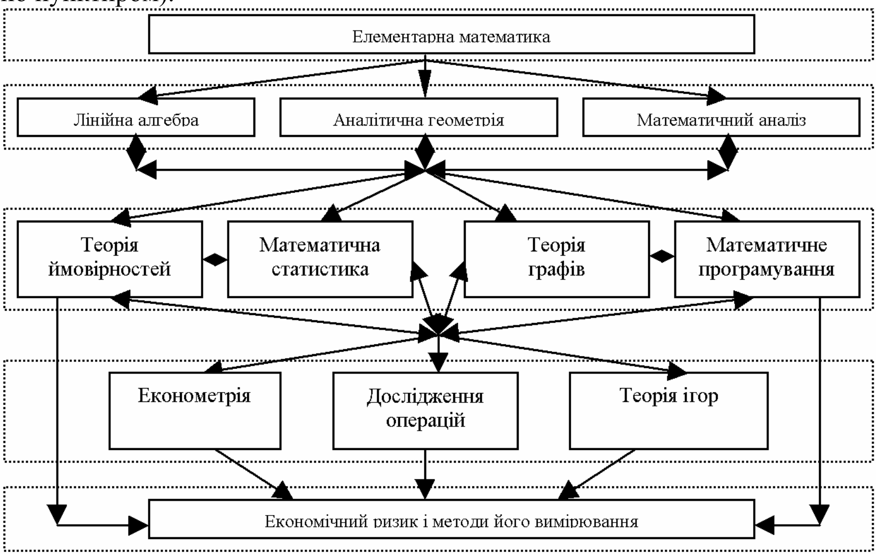
На жаль, авторам невідомі ґрунтовні і систематичні дослідження стосовно пропедевтики ризикології у школі та ВЗО. Тому при написанні цієї роботи ми будемо спиратися на власний багаторічний досвід викладання дисциплін економіко-математичного циклу в ПЕК НАУ та НПУ імені М.П. Драгоманова [1], а також думки і досвід колег, які викладають аналогічні дисципліни у даних та інших ВЗО.

Міжпредметні зв’язки

Розглянемо детальніше місце дисципліни “Економічний ризик і методи його вимірювання” у циклі економіко-математичних дисциплін.

Математична складова підготовки фахівця з економіки, як правило складається з наступних частин (предметів): “Елементарна математика” (алгебра, геометрія, початки математичного аналізу); “Вища математика” (лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз), “Теорія ймовірностей і математична статистика”, “Математичне програмування”, “Дослідження операцій” (останні 4 дисципліни часто об’єднують у одну під назвою “Математика для економістів”), “Економетрія”, “Економічний ризик та методи його вимірювання”. У окремих ВЗО додатково окремо вивчаються теорія графів, математична економіка та фінансова і актуарна математика.

Умовно названі складові економіко-математичної освіти можна розділити на наступні рівні: *0 рівень:* елементарна математика (алгебра і геометрія); *1 рівень*: лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз; *2 рівень*: теорія ймовірностей, математична статистика, теорія графів; математичне програмування; *3 рівень*: теорія ігор, дослідження операцій, економетрія; *4 рівень*: економічний ризик і методи його вимірювання. Поділ здійснювався за принципом: кожен наступний рівень базується на знаннях, здобутих на попередньому рівні. Крім того, можливі зв’язки між окремими складовими дисциплін одного рівня. Найбільш важливі з названих міжпредметних зв’язків подамо у вигляді структурно-логічної схеми (рівні виділено пунктиром).



Виходячи з наведеної схеми, стають зрозумілими місце роль дисципліни “Економічний ризик…” у системі економіко-математичної освіти: вона ніби підсумовує знання з усіх раніше вивчених дисциплін і акумулює їх практичні застосування. Саме тому важливою є пропедевтика ризикології на всіх рівнях, що їй передують.

Зазначимо водночас, що не варто також піддаватися ілюзії (яка може скластися після поверхового розгляду наведеної вище схеми), що дослідження ризику є головним результатом чи головною метою вивчення усіх інших економіко-математичних дисциплін. Місце науки про ризик зумовлено тим, що без фундаментальних знань з *практично всіх* наведених дисциплін неможливо адекватно сприйняти суть поняття “економічний ризик”, а також здійснити його оцінку та виробити стратегію подолання і управління ризиком.

Розглянемо детальніше пропедевтику ризикології на рівні елементарної математики (у школі), на рівні вивчення фундаментальних математичних дисциплін (лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз) та на рівні прикладних розділів математичної науки. Наведемо конкретні задачі, за допомогою яких дана пропедевтика може здійснюватися.

Пропедевтика ризикології у школі

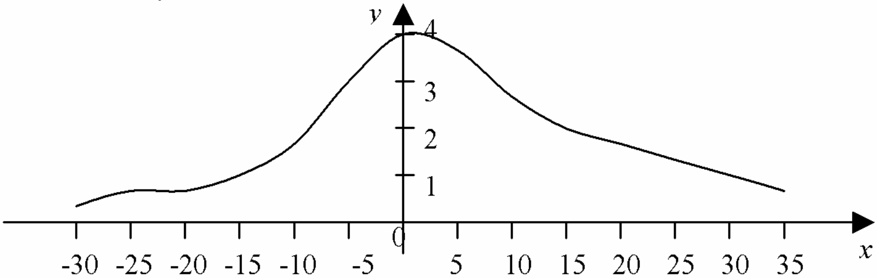
Звичайно, у школі вивчення курсу економічного ризику є неможливим через надмірну складність математичного апарату. Однак, готувати свідомість дитини, яка в подальшому планує здобути якісну економічну освіту, до сприйняття ризикології необхідно вже із шкільних років. Це можна робити, наприклад, при вивченні курсу алгебри та алгебри і початків аналізу, зокрема за програмою [2].

Взагалі, викладання алгебри у спеціалізованих школах і профільних класах з поглибленим вивчення економіки, на нашу думку, повинно мати фахову спрямованість вже з перших занять – це дозволяє підсилити мотиваційні аспекти сприйняття матеріалу.

Особливо важливим для економічних досліджень є поняття функціональної залежності. Досить широкий клас задач економіки фактично зводиться до визначення типу і параметрів залежності між двома чи більше економічними показниками. У 8–9 класах вивчаються, зокрема, лінійна та квадратична функції, а у 10–11 класах – степенева, показникова та логарифмічна.

Спочатку наведемо приклади задач з алгебри для учнів 8–9 класів, де здійснюється пропедевтика ризикології при вивченні саме функціональних залежностей. Відзначимо, що при розв’язуванні цих задач необхідними є також знання, що відповідають іншим логічним лініям елементарної математики: арифметики, рівнянь та нерівностей.

Задача 1. На малюнку подано залежність між величиною прибутків (збитків) та кількістю випадків їх реалізації для деякого підприємства протягом року. (Цю залежність називають *кривою економічного ризику*.) По осі абсцис відкладено величину прибутку у тис. грн. (випадок збитків відповідає від'ємній частині осі), а по осі ординат – число реалізацій прибутку різної величини у сотнях.



Знайти за малюнком: 1) кількість випадків прибутку у розмірі а) 5 тис. грн., б) 12 тис. грн., в) 28 тис. грн.; 2) кількість випадків збитків у розмірі а) 15 тис. грн., б) 22 тис. грн.; 3) величину прибутку та збитку, яка реалізувалася а) 200 разів, б) 320 разів. Описати якісну тенденцію для залежності випадків реалізації збитків та прибутків від їх величини.

Задача 2. Залежність величини прибутку (y) (у млн. грн.) підприємства, яке виробляє хутряні шуби, від номера місяця року (t) аналітично можна задати у вигляді $y=1{,}1t^2-13{,}2t+45{,}1$. У якому місяці ризик банкрутства підприємства є найбільшим?

Задача 3. Фірма користується послугами двох перевізників вантажу у рівних долях. Перший перевізник за виклик автомобіля бере плату 10 грн. за 1 тону, а другий – 5 грн. за 1 тону. Плата за 1 кілометр перевезення тони вантажу у першого перевізника становить 0,25 грн, а у другого – 0,35 грн. Для яких відстаней варто користуватися послугами першого перевізника, а для яких – другого, щоб ризик перевитрат коштів був найменшим?

Матеріал, який розглядається у шкільному курсі алгебри і початків аналізу і стосується математичного аналізу, у повному обсязі входить до відповідного курсу у ВЗО. Тому задачі цього розділу математики, у яких може здійснюватися пропедевтика ризикології, буде наведено нижче. Тут наведемо суто алгебраїчні задачі для учнів 10–11 класів.

Задача 4. Підприємець має змогу вкласти 1000 у.о. на 3 роки під 10 відсотків річних або під 32 відсотки з виплатою відсотків у кінці 3-го року. У якому випадку ризик недоотримання прибутку є меншим?

Задача 5. Функції $f(t)=2000(4^t-3)$ та $g(t)=2000(3-2^t)$ описують залежність попиту і пропозиції від часу для деякого приватного підприємства. У який момент часу ризик недовиробництва і перевиробництва є найменшим?

Пропедевтика ризикології при вивченні курсу вищої математики

Курс вищої математики традиційно поділяють на три суттєво взаємопов'язані розділи: лінійну алгебру, аналітичну геометрію і математичний аналіз. Тому розділяти задачі з вищої математики на відповідні блоки є, на нашу думку, недоцільним. Більшість із наведених тут задач стосуються математичного аналізу, однак при їх розв'язуванні майже неможливо обійтися без відповідних знань, зокрема з лінійної алгебри. Зрозуміло також, що наведені задачі, в основному, стосуються застосування у економіці похідної та визначеного інтеграла.

Задача 6. Загін золотошукачів відкрив у глухій тайзі золотоносну жилу і наніс на карту місця залягання золота. Якщо накласти на карту певну прямокутну декартову систему координат, то концентрація золота у точках на місцевості наближено описується функцією $z=x^2+2y^2+5x+3y+4$. Невдовзі після цього в даний район з вертольота було скинуто загін золотовидобувачів у точку з координатами (4;2). Знайти вектор, у напрямку якого просування загону зумовить мінімальний ризик втрат від можливого недовиробництва золота.

Задача 7. Обсяг виробництва продукції, виробленої підприємством протягом доби, становить $y=-t^3+6t^2+120t+40$ одиниць, де t – робочий час ($0\leq t\leq 8$). У який момент часу ризик непродуктивної роботи є найменшим?

Задача 8. Вартість алмаза пропорційна квадрату його маси. Обробляючи алмаз, його розкололи на 2 частини і при цьому ризик втрати вартості виявився максимальним. Яка маса частин, на які розкололи алмаз?

Задача 9. На малому підприємстві виготовляють продукцію двох видів. Витрати на виробництво x одиниць продукції першого виду та y одиниць продукції другого виду виражаються функцією $V(x;\, y)=800-12x-10y+0{,}3x^2+$ $+0{,}1y^2$ (грн). При якій схемі випуску продукції ризик перевитрати коштів на виробництво є мінімальним?

Задача 10. Маргінальні витрати виробництва задано функцією $f(x)=0{,}06x^2-0{,}2x$, а маргінальний дохід – функцією $g(x)=240-0{,}4x$. Обчислити функцію загальних витрат, якщо фіксовані виробничі витрати становлять 200 грн. Обчислити витрити та прибуток при виробництві 100 одиниць продукції. Чи є ризикованим при цьому збільшення виробництва із 100 одиниць до 150 одиниць?

Пропедевтика ризикології при вивченні економіко-математичних дисциплін

Поділ дисциплін економіко-математичного циклу на два рівні зумовлений, у першу чергу, послідовністю їх вивчення. З іншого боку, дисципліни третього рівня фактично вимагають попереднього опанування дисциплін другого рівня, оскільки суттєво використовують їх основні положення і методи дослідження. Однак зауважимо, що як теорія ймовірностей і математичне програмування, так і економетрія та дослідження операцій містять велику кількість оптимізаційних задач, у яких пропедевтика ризикології проявляється особливо яскраво. Наведемо приклади таких задач.

Задача 11. (Теорія ймовірностей і математична статистика). За результатами опитування 200 осіб з різних соціальних прошарків населення деякої країни рівень домагань стосовно оптимальної місячної заробітної плати (в умовних одиницях) є наступним:

Оптимальний рівень місячної зарплати, у.о.	Кількість осіб
до 100	10
100–150	23
150–200	37
200–250	48
250–300	33
300–350	26
350–400	15
більше 400	8
Разом	200

Який середній рівень заробітної плати має надати підприємство цієї країни з метою уникнення соціального ризику, зумовленого конфліктами стосовно її розміру?

Задача 12. (Теорія ігор). Бізнесмен може придбати автомобілі трьох різних марок. Характеристики надійності конструктивних елементів автомобілів цих марок (у балах за 100-бальною шкалою) подано у таблиці:

Марка	Надійність конструктивних елементів		
	Двигун	Шасі	Кузов
А	70	90	85
Б	80	75	65
В	95	70	70

Який автомобіль варто придбати бізнесменові, якщо для нього пріоритетність характеристик двигуна, шассі та кузова однакові?

Задача 13. (Економетрія). Підприємство випускало певну продукцію протягом 8 місяців. При цьому прибуток підприємства, інвестиції, витрати на рекламу та заробітна плата (в у.о.) були наступними:

Місяць	Прибуток	Інвестиції	Витрати на рекламу	Заробітна плата
1.	15,70	17,37	5,28	1,42
2.	17,34	18,24	6,47	1,58
3.	21,57	22,47	6,98	1,98
4.	33,50	18,47	7,05	2,04
5.	32,30	16,82	7,94	2,38
6.	37,90	17,60	8,12	3,48
7.	40,78	17,12	8,69	3,07
8.	48,02	19,81	9,31	3,84

Вважаючи залежність між прибутком та іншими факторами лінійною, знайти який із факторів спричинює найбільший ризик втрат прибутку; здійснити прогноз стосовно мінімального можливого прибутку у 9-му місяці та оцінити рівень ризику при виплаті в цьому місяці кредиту на розвиток у розмірі 30 у.о.

Задача 14. (Математичне програмування). Підприємство виготовляє два види виробів, що обробляються на трьох видах устаткування. Час обробки обох виробів відповідно становить: на I – 0,5 год. і 0,5 год., на II – 0,4 год. і 0,3 год., на III – 0,2 год. і 0,4 год., а загальний час роботи кожного устаткування складає 50 год., 36 год. і 32 год. Визначити план виробництва, що забезпечує підприємству мінімальний ризик втрати прибутку, за умови, що реалізація 1-го виробу дає прибуток 15 грн., а 2-го – 10 грн.

Задача 15. (Дослідження операцій). Нехай операції над деталями p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 задані строками виконання на дорогому обладнанні (хвилин):

Деталь / Операція	Розточка	Фрезерування	Шліфування
p_1	7	6	4
p_2	11	5	12
p_3	8	3	7
p_4	7	5	8
p_5	6	3	3

Знайти оптимальну послідовність обробки деталей з метою досягнення мінімального простою обладнання.

Висновки

Як видно із наведених вище задач, елементи теорії економічного ризику можна і, на нашу думку, потрібно розглядати при вивченні дисциплін економіко-математичного циклу. При цьому слід вводити термінологію, притаманну ризикології вже зі школи. Цим самим досягається "ефект знайомості" при подальшому систематичному вивченні цього курсу, що безумовно сприятиме його якісному засвоєнню студентами.

При підборі задач до цієї статті, крім власних задач, було використано задачі із шкільних підручників різних років видання та задачі із джерел [3–7]. Користуючись нагодою, вклоняємося світлій пам'яті та висловлюємо щиру вдячність члену-кореспонденту НАНУ, доктору фіз.-мат. наук, професору М.Й. Ядренку, який зародив інтерес авторів до даної тематики, а також видавцеві книги [1] Д.С. Терещенку, колегам та студентам, без підтримки та розуміння яких була б неможливою дана стаття.

Література:

1. Лещинський О.Л., Школьний О.В. Економічний ризик та методи його вимірювання. Навч. посіб. для вищ. навч. закл. – К.: Дельта, 2005. – 112 с.

2. Вайнрауб М.А., Стрельченко О.С., Стрельченко І.Г. Програма з математики для загальноосвітніх навчальних закладів, спеціалізованих шкіл, гімназій, ліцеїв економічного профілю // Математика. Програми для загаль-

ноосвітніх навчальних закладів. – К.: Навчальна книга, 2003.– 302 с.

3. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі / Посібник. – К.: Академія, 2003. – 624 с.

4. Жильцов О.Б., Торбін Г.М. Вища математика з елементами інформаційних технологій: Навч. посіб. – К.: МАУП, 2002.– 408 с.

5. Чорней Р.К., Дюженкова О.Ю., Жильцов О.Б. та ін. Практикум з теорії ймовірностей і математичної статистики: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – К.: МАУП, 2003. – 328 с.

6. Лещинський О.Л., Рязанцева В.В., Юнькова О.О. Економетрія: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – К.: МАУП, 2003. – 208 с.

7. Кулян В.Р., Юнькова Е.А., Жильцов А.Б. Математическое программирование с элементами информационных технологий: Учеб. пособие для нематем. спец. вузов – К.: МАУП, 2000. – 124 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСА «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ» СТУДЕНТАМИ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

С.Ф. Максименко, А.А. Горшкова, М.А. Кислова
г. Кривой Рог, Криворожский металлургический факультет
Национальной металлургической академии Украины

Высокий профессионализм инженеров-экономистов предполагает владение аппаратом высшей математики для решения экономических задач. Это требует перестройки преподавания высшей математики в направлении сближения ее с будущей или выбранной профессией.

Один из путей такого сближения видится нам в насыщении курса математики задачами прикладного характера. Необходимость слитного преподавания математики и ее приложений в экономике объясняется и тем психологическим барьером студентов младших курсов по отношению к понятийной системе математики из-за ее весьма высокого уровня абстракции.

Экономика как наука об объективных причинах функционирования и развития общества пользуется разнообразными количественными характеристиками, а поэтому вобрала в себя большое число математических методов.

Разумеется, содержание общего курса математики не может быть определено с чисто прагматической точки зрения, основанной на специфике будущей специальности обучаемого. Нельзя не учитывать внутреннюю логику математики. Но использование задач практического характера делает изучаемые абстракции более осязаемыми для студентов, способствует развитию их математической интуиции.

Так, при изучении темы «Предел последовательности. Второй замечательный предел. Число *e*» можно использовать известную экономистам формулу сложных процентов:

$$Q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t \tag{1}$$

где: Q_0 – первоначальная сумма вклада в банк;

p – процент начисления за определенный период времени (год, месяц и т.п.);

t – количество периодов времени хранения вклада;

Q – сумма вклада по истечении t периодов времени.

Важно подчеркнуть, что эта формула используется также в демографических расчетах (прирост народонаселения) и в прогнозах экономики (увеличение валового национального продукта).

Если уменьшать срок размещения депозита в банке с последующим размещением его после изъятия, то через t лет сумма депозита достигнет величины:

$$Q_n = Q_0\left(1+\frac{P}{100\cdot n}\right)^{\frac{100\cdot n}{P}t} \tag{2}$$

где n – число частей, на которые разбит год.

Пусть $n = 100$, $t = 1$ год. Рассмотрим последовательность $\{Q_n\} = \{(1+1/n)^n\}Q_0$

При $n = 1$ имеем $Q_1 = 2Q_0$;

$n = 2$ $\quad Q_2 = 2{,}25Q_0$;

$n = 3$ $\quad Q_3 = 2{,}37\ Q_0$;

……………

$n = 12$ $\quad Q_{12} = 2{,}61Q_0$

……………

$n = 365$ $\quad Q_{365} = 2{,}714Q_0$

……………

$n = 8720$ $\quad Q_{8720} = 2{,}718Q_0$

Как видим, последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает, но с увеличением n ее рост замедляется и стремится к пределу. Этот предел называется числом e.

Итак: $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ – второй замечательный предел.

Число e – иррациональное, его приближенное значение равно 2,7182818…

Число e является одной из фундаментальных величин в математике. Показательная функция с основанием e носит название экспоненты – $y = e^x$. С ее помощью описываются многие явления (рост народонаселения, радиоактивный распад и др.).

Возвращаемся к формуле (2) $Q_n = Q_0\left(1+\frac{P}{100\cdot n}\right)^{\frac{100\cdot n}{P}t}$ и преобразуем ее, введя новую переменную $m = \frac{100n}{P}$, стремящуюся к бесконечности, при $n \to \infty$: $Q_n = Q_0\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{\frac{Pt}{100n}}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = \lim\limits_{n\to\infty} Q_0\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{\frac{Pt}{100n}} = Q_0 e^{\frac{Pt}{100n}}$.

Т.е. можем считать, что при достаточно частом манипулировании «изъятие-вложение» сумма депозита:

$$Q_n \approx Q_0 e^{\frac{Pt}{100n}} \qquad (3)$$

Расчеты, выполненные по формуле (3), называют вычислениями по непрерывным процентам.

На закрепление можно рассмотреть задачи:

1. Прирост населения страны составляет 3% в год. За сколько лет население страны удвоится?

2. Темп инфляции составляет 6% в месяц. На сколько уменьшится первоначальная сумма через год?

Литература:

1. Красс М.С., Чупринов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. – М.: Дело, 2000.
2. Зельдович Я.Б., Яглом И.М. Высшая математика для начинающих физиков и техников. – М.: Наука, 1982.
3. Высшая математика для экономистов / Под ред. проф. Н.Ш. Крамера. – М.: Юнити, 1998.

О ФОРМАЛЬНОМ АППАРАТЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ В ПОДГОТОВКЕ СПЕЦИАЛИСТОВ В ОБЛАСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

С.А. Поттосина, И.Г. Савосько
Беларусь, г. Минск, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
pottosina@sam-solutions.net

1. Структура дисциплин по дискретной математике и исследованию операций

Дисциплина «Основы дискретной математики и теории алгоритмов» является составной частью цикла дисциплин по информационным технологиям, изучаемых студентами специальности 40.01.02 «Информационные системы и технологии» по направлению 40.01.02-02 «Информационные системы и технологии в экономике». Она обеспечивает формирование у студентов базовых понятий и навыков разработки дискретных моделей, без которых невозможно изучение многих последующих дисциплин данного направления, а также эффективное использование информационных технологий в специальных дисциплинах. Цель изучения данной дисциплины – овладение знаниями и навыками использования теоретических знаний в области математической логики, теории графов, теории алгоритмов и автоматов, применяемых при автоматизации решения экономических задач, для представления и обработки дискретной информации. В результате изучения дисциплины «Основы дискретной математики и теории алгоритмов» студенты должны научиться применять и самостоятельно модифицировать некоторые дискретные объекты, встречающиеся в практике программирования, построения и разработки приложений в социально-экономической области. Перечень основных разделов курса и их назначение представлены в табл. 1.

Таблица 1

Наименование разделов и тем курса	*Назначение*
Множества, отношения, алгебры	Язык дискретной математики. Терминологический запас для логического проектирования и объектно-ориентированного программирования
Способы задания множеств. Операции над множествами. Свойства бинарных отношений. Отношения эквивалентности и порядка. Функции, соответствия, отображения. Алгебраические структуры	
Булевы функции	Автоматизация производственных процессов. Логическое проектирование. Программирование. Теория абстрактных автоматов.
Способы задания логических функций. Алгебра булевых функций. Нормальные формы логических функций. Полнота и замкнутость. Минимизация логических функций	

Наименование разделов и тем курса	*Назначение*
Метод минимизации Квайна. Визуально матричный метод минимизации	
Логические исчисления Основные понятия логики высказываний. Тождественно истинные формулы логики высказываний и их формальный вывод. Основные понятия логики предикатов. Применение выражений логики предикатов для описания некоторых отношений.	Формализация рассуждений и нематематических дисциплин: языкознание, экономика, психология, медицина, право. Разработка интеллектуальных информационных технологий
Графы Основные понятия и определения. Матричное представление. Маршруты, цепи, циклы, разрезы, … Обходы в графе. Кратчайшие пути. Деревья. Построение остовных деревьев. Независимые и доминирующие множества. Раскраска и планарность. Паросочетания и покрытия.	Конструирование и анализ нетривиальных алгоритмов. Построение и исследование организационных структур. Социально-психологическая оценка коммуникационных сетей. Решение оптимизационных задач на сетях и графах. Маршрутизация сообщений.
Комбинаторные задачи и методы комбинаторного поиска Перечислительные и оптимизационные комбинаторные задачи Комбинаторные конфигурации: перестановки и размещения. Методы комбинаторного поиска. Производящие функции. Дерево поиска. Принцип включения и исключения. Задача о кратчайшем покрытии и алгоритмы ее решения.	Развитие логического мышления у специалистов в области прикладной и теоретической информатики Использование аппарата производящих функций при вычислении моментов высоких порядков. Инструментарий комбинаторных подсчетов.
Основы теории алгоритмов и автоматов Интуитивное понятие алгоритма и его уточнение в модели Маркова. Алгоритмическая модель Тьюринга. Частично-рекурсивные функции. Алгоритмически разрешимые и неразрешимые проблемы. Вычислительная сложность проблем. Понятие о конечном автомате. Интерпретация автоматов. Распознавание множеств автоматов. Автоматы и теория алгоритмов.	Теоретический фундамент для постановки и решения проблем в области информатики, для осознания целей и ограничений при создании вычислительных структур, алгоритмов и программ обработки информации. Интеллектуальные информационные технологии и формализация распознавания закономерностей.

Отметим, что задача о наименьшем покрытии булевой матрицы часто возникает как подзадача в ряде разделов теории графов (наименьшее доминирующее множество, наибольшее независимое множество, наименьшее покрытие и наибольшее паросочетание) [2; 3].

Рассмотренные темы курса «Основы дискретной математики и теории алгоритмов» являются необходимым фундаментом для дальнейшего освоения различных курсов лекций по изучению и разработке современных корпоративных информационных систем, проектированию распределенных информационных систем и баз данных. Так, немаловажное значение эти темы имеют для освоения дисциплины «Визуальные средства разработки приложений» [6] при изучении таких вопросов, как маршрутизация сообщений в операционной системе Windows, разработка приложений работы с базами данных, организация многопоточных приложений, программирование сетевых возможностей средствами Visual C++ и другие. Кроме того, данные разделы дискретной математики способствуют развитию навыков логического мышления, строгой постановке задач, быстрой разработке алгоритмов программ. Без этих навыков освоение раздела «Оптимизационные задачи на сетях и графах» курса «Исследование операций в экономике» будет менее эффективным.

Лекционный материал дисциплины «Исследование операций в экономике» состоит из четырех разделов:

1) детерминированные оптимизационные задачи исследования операций (задачи математического программирования);

2) игровые модели исследования операций (игры с нулевой и ненулевой суммой, кооперативные игры с побочными платежами и без побочных платежей, игры с природой);

3) модели массового обслуживания;

4) оптимизационные задачи на сетях и графах.

В разделе «Оптимизационные задачи на сетях и графах» особое внимание уделяется задачам и алгоритмам поиска кратчайших путей и близких к ним, таких как наиболее надежные пути, пути с максимальной пропускной способностью, пути с «узкими» местами, пути с усилением. При нахождении оптимальных в том или ином смысле путей между всеми парами вершин используется один и тот же алгоритм, в основе которого лежит трехместная операция $Z^{(k)}_{ij} = \mathrm{opt}[Z^{(k-1)}_{ij}, Z^{(k)}_{i\,k} * Z^{(k)}_{kj}]$, где Z – функция пути, подлежащая оптимизации, * – некоторая общая операция, обладающая свойством транзитивности. В зависимости от решаемой задачи возможны различные комбинации пар (opt, *), например, (min, +) в задаче поиска кратчайшего пути между всеми парами вершин, (max, min) в задаче о путях с наибольшей пропускной способность, (max, *) в задачах о наиболее надежном пути и пути с усилением, (min, max) в задаче об «узких местах». Все эти задачи иллюстрируются приложениями из экономической деятельности. Так, задачу о финансисте, который наилучшим образом распределяет во времени вложение своего капитала в различные активы, можно рассматривать как задачу о путях с усилением в некотором графе [1]. Задача поиска покрывающих деревьев с различными свойствами, задача китайского почтальона и задача коммивояжера также сопровождаются экономической интерпретацией и предлагаются алгоритмы их решения. Предусмотрено знакомство с задачами и алгоритмами поиска максимального потока и потока минимальной стоимости в транспортной сети. Проводится параллель между этими задачами и задачами календарного планирования трудовых ресурсов и задачами СПУ [5].

Для исследования структуры руководства или влияний некоторой организации полезно знание некоторых фундаментальных понятий, касающихся достижимости и связности графов, а также алгоритмов для определения базы и антибазы графа, графа конденсаций, сильной и ограниченной базы, сильной компоненты графа. Прикладной интерес имеют и такие задачи теории графов как задачи размещения центров и медиан [2].

Данный раздел курса сопровождается выполнением студентами разработанных автором индивидуальных заданий, выполнение которых является допуском к экзамену. В каждом задании предлагается определенная экономическая, организационная или управленческая задача, решение которой необходимо свести к решению некоторой оптимизационной задачи на графах, предложить алгоритм решения и реализовать его в виде программы. При этом используются такие методы анализа графа как методы поиска в глубину и ширину, комбинаторные алгоритмы, методы ветвей и границ.

2. Задачи теории графов в процессе анализа коммуникативных связей в организации

Задача упорядочения коммуникативных процессов, происходящих в организациях в связи с их развитием и усложнением, так или иначе встает перед управленцами любого уровня многих современных компаний. Модели коммуникативных сетей представляют собой коммуникативное измерение организации. Социальные психологи, рассматривая коммуникационные сети, прежде всего, описывают формальные и неформальные группы. В формальной группе четко сформулирована цель группы, определена структура власти, т.е. система подчинения, заданы все позиции и роли ее членов, регулирующие вертикальные и горизонтальные отношения в группе, сформулированы и предписаны групповые нормы и правила. Создание неформальной группы внутри формальной приводит к скрытому переплетению двух структур отношений, в значительной степени затрудняющих управленческий контроль над групповыми процессами. В реальной жизни очень трудно вычленить чисто формальные и неформальные группы. Особую сложность для менеджера представляют случаи, когда направленность неформальной группы мешает достижению организационных целей формальной группой.

Социально-психологическое исследование группы предусматривает измерение ряда важнейших ее параметров [7]. Так, бывает необходимо выделить саму неформальную группу, идентифицировать ее лидеров, выяснить социальный статус того или иного ее члена, определить уровень групповой сплоченности, наконец, представить себе, из каких микрогрупп она состоит. Информацию о связях можно получать с помощью опроса, наблюдения, эксперимента, а также из архивов, каталогов и дневников.

В рамках аппарата теории графов полученные данные можно интерпретировать следующим образом: каждый человек группы будет вершиной ориентированного графа $G(V)$ – ориентированный граф, V – множество вершин графа и $v \in V$ элементы множества. $E = (a, b)$, a, $b \in V$ – ориентированное ребро или дуга графа. Дуги этого графа представляют собой связи между членами группы – их направление совпадает с направлением ответа, вес – с оценкой силы связи каждым респондентом. При этом между двумя вершинами может вообще не быть дуги, если респонденты отметили отсутствие связи друг с другом; может быть одна дуга, если лишь один из опрашиваемых признает имеющуюся связь; или пара дуг, если оба члена сети имеют связь друг с другом. При анализе неформальных групп могут быть использованы следующие показатели:

Плотность – процент связей в группе, которые существуют в сети из всех возможных связей $\Delta = 2L \big/ n(n-1)$, где L – количество дуг в графе, n – количество вершин в графе. В очень плотных сетях уменьшается вероятность информационного контроля со стороны отдельной личности (группы лиц). В таких сетях количество подгрупп минимально. Плотность 1.0 подразумевает, что каждый член связан с каждым другим членом. Плотность 0 подразумевает, что никто никого не знает

Центрированности по степени – показатель деятельности сети. Член сети, имеющий высокую центрированность по степени, непосредственно связан со многими другими членами. Это показатель прямых связей $C_S = \dfrac{S(v_i)}{n-1}$, где $S(v_i)$ – степень вершины v_i, то есть число ребер, соединенных с этой вершиной, n – число вершин в графе. При этом n–1 представляет собой максимально возможное число связей в графе.

Центрированность по близости - мера независимости группы от контроля других. $C_C(i) = \dfrac{(n-1)*100}{\sum_{j=1}^{n} d(i,j)}, i \neq j$, где n – число вершин в графе, $d(i, j)$ – длина самого короткого пути между i и j. Данный показатель рассматривает путь, а не одни прямые связи. Отдельный человек имеет очень высокую центрированность по близости, если он связан короткими путями со многими другими членами сети.

Центрированность по посредничеству - показатель информационного контроля. Он равен сумме отношений $g_{jk}(v_i)$ числа самых коротких путей между вершинами V_K и V_J, которые проходят через вершину V_I, к общему числу путей g_{jk} между этими вершинами Показатель стандартизуется делением на максимально возможную величину $(n–1)(n–2)/2$, т.е. количество возможных пар, исключающих индивида i: $C_b(i) = \dfrac{\sum\limits_{j \langle K} \dfrac{g_{jk}(v_i)}{g_{jk}}}{(n-1)(n-2)} * 100$, $i \neq j \neq k$. Если у отдельного человека имеется высокая центрированность по посредничеству, то это означает, что он находится на многих *геодезиях* (самых коротких путях между участниками). Таким образом, он может потенциально управлять информацией.

Клика в личной сети – набор человек, которые непосредственно привязаны друг к другу. Число клик, которые существуют в графе – показатель числа подгрупп, которые существуют.

Используя эти и другие показатели, менеджер может оценить неформальную группу с точки зрения наличия в ней лидера, подгрупп, крепости социальных и информационных связей. Это позволит управлять данным коллективом, наилучшим образом раскрывая человеческий потенциал сотрудников.

Иерархические структуры используются при описании различных систем: технических, организационных и т.п. Структура организационных систем описывает взаимодействие людей в различных сферах деятельности. Обычно модели организационных систем включают в себя «поведение» отдельных элементов, подсистем и системы в целом, которое связано с некоторой целенаправленностью, математически формулируемой как задача оптимизации некоторой целевой функции. В связи с этим, иерархичность структуры, то есть определенная соподчиненность элементов и подсистем, является важнейшим свойством организационной системы. Следует отметить, что задачи структурной динамики организационных систем естественным образом связаны с появившимся в последнее десятилетие интересом к проблеме «устойчивого развития». В различных науках этот термин и сама проблема трактуется по-разному, однако, общее их содержание сводится, по существу, к задачам структурной динамики социоприродных систем: структурной устойчивости, механизмам и способам структурных преобразований, самоорганизации, управлению развитием и т.п.

Иерархией над множеством элементов $N=\{a_1,..., a_n\}$ называется дерево, вершины которого являются некоторыми подмножествами N; корнем является $f=N$; множества g_1, ..., g_k на концах дуг, входящих в g, удовлетворяют условиям $g=g_1 \cup ... \cup g_k$, $g_i \cap g_j = \emptyset$, $l \leq i < j \leq k$; висячими вершинами являются одноэлементные подмножества N. Определенная таким образом иерархия является, согласно определениям, деревом организации группы f, то есть принадлежит $D(f)$. В зависимости от конкретной содержательной интерпретации элементов и управляющих центров, в различных частных постановках по-разному определяется функционал стоимости, возможны различные ограничения на деревья, то есть исследуемое множество структур Ω является подмножеством $D(f)$: $\Omega \subseteq D(f)$.

Достаточно интересной является задача организация технологического взаимодействия элементов в производственной системе. Как отмечается в различных работах, структура производственных потоков в наибольшей степени определяет организационную структуру. В связи с этим можно рассмотреть задачу надстройки управляющего графа организации над множеством элементов, связанных технологическими взаимодействиями. Задача поставлена следующим образом.

Технологическим графом над множеством элементов N назовем ориентированный граф без петель $T=(N, E_T)$, ребрам которого $(u, v) \in E_T$ сопоставлены s -мерные вектора $l_T(u, v)$ с неотрицательными компонентами: $1_T : E_t \rightarrow R^s_+$. Вершины графа T это элементарные операции технологического процесса предприятия или конечные исполнители. Связь $(u, v) \in E_T$ в технологическом графе означает, что от элемента u к элементу v идет s – компонентный поток сырья, материалов, энергии, информации и т. п. Интенсивность каждой компоненты потока и определяется компонентами вектора $l_T(u, v)$. Исходной информацией для построения технологического графа может служить анализ различных аспектов функционирования предприятия, например, анализ структуры систем связи, анализ документооборота и т.п. Считаем технологический граф связным, так как в противном случае происходит декомпозиция на никак не связанные друг с другом части, которые могут быть рассмотрены по отдельности. Для того чтобы каждая связь кем-то контролировалась, и каждая вершина была подчинена только одному «начальнику», необходимо наличие управляющего центра, которому подчинено все множество исполнителей (элементов) $f=N$. Таким образом, рассматривается множество Ω всевозможных деревьев организации: $\Omega=D(f)$.

Рассмотрим группу элементов $g \in 2^N \backslash \{O\}$. Через $l_t(g)$ обозначим суммарную интенсивность потоков внутри группы, то есть $l_t(g)= \sum_{u,v \in g,(u,v) \in E_T} l_T(u,v)$.

Пусть в некотором дереве $D=(V, E) \in D(f)$ группа $g \in V$ организуется из непересекающихся подгрупп $Q_D(g)=\{g_1, ..., g_k\}$. Тогда центр, соответствующий группе g, координирует потоки между подгруппами $g_1, ..., g_k$. Их суммарная интенсивность, очевидно, равна $l_T(g)–l_T(g_1)–...–l_T(g_k)$. Предполагаем, что затраты на содержание (функционирование) управляющего центра являются некоторой неотрицательной функцией $K(–)$ от интенсивности координируемого потока. Тогда можно записать функционал стоимости организации взаимодействия подгрупп $g_1, ..., g_k$ следующим образом:

$$P_{T, K}(g_1, ..., g_k)=K(l_T(g_1 \cup ... \cup g_k)–l_T(g_1)–...–l_T(g_k)).$$

Стоимость $P(D) = \sum_{g \in V \backslash N_D} P(g_1,...,g_k)(Q_D(g) = \{g_1,...,g_r\})$ содержания (функционирования) всей организации D будет структурным функционалом и задача об оптимальной организации технологического взаимодействия – частный случай общей задачи [9].

3. О некоторых возможностях использования задачи о кратчайшем покрытии

Ниже рассматривается возможность использования задачи о кратчайшем покрытии при реализации метода экспертных оценок и проведении диагностирования состояния фирмы для выбора типа управления.

Метод экспертных оценок основан на обработке результатов опроса группы экспертов, когда результаты опроса являются единственным источником информации для принятия решений по той или иной экономической проблеме. Эффективность данного метода во многом определяется тем, как сформирована группа экспертов. При формировании группы полезны некоторые формальные характеристики экспертов, к числу которых можно отнести следующие: (*a*) компетентность; (*b*) креативность; (*c*) конформизм; (*d*) аналитическое мышление; (*e*) широта мышления; (*f*) прагматизм мышления; (*g*) умение вести дискуссию; (*h*) самокритичность эксперта.

Обозначим множество экспертов, из которого можно производить выбор, через $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, а множество присущих им характеристик обозначим через $S=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Введем булеву матрицу $V=[v_{ij}]$ отношения экспертов к характеристикам, полагая, что элемент v_{ij} матрицы V равен 1, если эксперту присуща характеристика; в противном случае элемент v_{ij} равен 0. Для формирования минимальной по численности группы экспертов, обладающей всеми заданными характеристиками, необходимо решить задачу нахождения кратчайшего покрытия булевой матрицы. Если процессу диагностики явления придать динамический характер, когда выбор очередного проверяемого признака ставится в зависимость от результатов проверки значений предыдущих признаков, то идет речь о построении условного диагностического теста. Реализация алгоритма отображается некоторым деревом поиска, из точек ветвления которого исходят верхние (нижние) ветви, соответствующие наличию (отсутствию) проверяемого признака.

В [4] представлен алгоритм точного решения задачи о покрытии булевой матрицы, позволяющий существенно сократить перебор и снизить в связи с этим затраты времени на получение точного решения, а также алгоритм получения одного из приближений к кратчайшему покрытию произвольного минора заданной булевой матрицы. Решение этой задачи в теории графов можно представить как решение задачи о поиске паросочетания в двудольном графе $G=(A, S, E)$, где E – множество ребер, соединяющих вершины множеств A с вершинами множества S в соответствии с заданной матрицей, которую нужно рассматривать как матрицу смежности данного графа.

С задачей о покрытии булевой матрицы тесно связана задача построении диагностического теста, решение которой позволяет найти минимальное подмножество внешних признаков, позволяющее диагностировать (опознавать) некоторое явление (процесс), о котором мы может только догадываться. Подобная задача диагностики появляется при антикризисном управлении фирмой (предприятием), когда о неплатежеспособности, финансовой неустойчивости или предстоящем банкротстве предприятия сигнализируют определенные комбинации признаков (сигналов) из заданного множества S. Организация проверки значений некоторого признака связана с определенными затратами, отсюда и появляется необходимость в минимизации числа признаков, образующих тест.

При определении безусловного диагностического теста определяется совокупность признаков $S_r \subseteq S$, различающая множество явлений A при известной диагностической матрице $D=(d_{ij})$ с элементами $d_{ij}=1$, если явление i характеризуется признаком j; в противном случае $d_{ij}=0$. Точное решение задачи построения минимального безусловного диагностического теста заключается в нахождении кратчайшего покрытия матрицы различий, каждый столбец которой соответствует некоторой паре столбцов диагностической матрицы и показывает, какими компонентами эти столбцы отличаются. Можно получить приближенное решение данной задачи, в соответствии с которым отыскивается строка с наибольшим количеством единиц. Данная строка вводится в искомое покрытие, после чего удаляются столбцы, покрывающие единицы этой строки. Над оставшейся частью матрицы проводится описанная выше процедура до тех пор, пока остаются непокрытые столбцы.

Если процессу диагностики явления придать динамический характер, когда выбор очередного проверяемого признака ставится в зависимость от результатов проверки значений предыдущих признаков, то идет речь о построении условного диагностического теста. Реализация алгоритма отображается некоторым деревом поиска, из точек ветвления которого исходят верхние (нижние) ветви, соответствующие наличию (отсутствию) проверяемого признака.

4. Заключение. Одной из важных и конструктивных идей в области стратегии дальнейшего развития современной системы образования является идея опережающего образования. В системе опережающего образования значительную часть учебного времени отводится для изучения новых фундаментальных знаний, процессов и технологий. Важным условием эффективности системы опережающего образования является необходимость его органической связи с наукой. Образование должно быть «встроено» в систему научных исследований [8]. Активизации образовательного процесса способствует технология обучающе-исследовательского принципа, в соответствии с которым восприятие научной информации не только стимулирует их научные интересы, но и способствует развитию самостоятельного мышления, что особенно существенно при постоянном нарастании потока информации. Полезным оказалось использование обучающе-исследовательского принципа и при изучении дискретных математических моделей. Так, задача о кратчайшем покрытии булевой матрицы явилась одним из тех благодатных объектов, с помощью которого можно стимулировать студентов к научному творчеству. Можно предложить различные алгоритмы решения этой задачи – от точного до приближенных. Разработка программной поддержки этих алгоритмов проводится студентами в рамках курсового проектирования по дисциплинам «Компьютерные сети», «Современные технологии обработки экономической информации». Некоторые курсовые проекты в дальнейшем могут оказаться ядром программной части дипломного проекта.

Литература:

1. Кристофидес Н. Теория графов. – М.: Мир, 1978. – 432 с.

2. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. – М.: Мир, 1981. – 321 с.

3. Лекции по теории графов / Емеличев В.А., Тышкевич Р.И., Мельников О.И., Сарванов В.И. – М.: Наука, 1990. – 384 с.

4. Закревский А.Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов. – М.: Наука, 1971. – 511 с.

5. Вагнер Г. Основы исследования операций. Т.3. – М.: Мир, 1973. – 330 с.

6. Кириенко Н.А. Опыт подготовки студентов по дисциплине «Визуальные средства разработки приложений» // Мат. IV Междунар. науч.-метод. конф. «Дистанционное обучение – образовательная среда XXI века» (10-12 ноября 2004 г., г. Минск). – Мн.: БГУИР, 2004. – С. 100-102.

7. Сакова И.Г., Поттосина С.А. Моделирование коммуникационных процессов в организации // Известия Белорусской инженерной академии 1(17) /3. – Мн., 2004. – С. 180-183.

8. Открытое образование – стратегия XXI века для России. Под общей редакцией В.М. Филиппова и В.П. Тихомирова. – М.: Международная академия открытого образования, 2000. – С. 355.

9. Воронин А.А., Мишин С.П. Оптимальные иерархические структуры. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 214 с.

ТИПОВІ РОЗРАХУНКИ ПРАКТИЧНОГО КУРСУ «МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ» ДЛЯ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

С.Д. Титов
м. Миколаїв, Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
ss1@mksat.net

Кафедра вищої математики НУК забезпечує викладання спеціального курсу математики для економістів «Математичне програмування» [1–4]. Робоча навчальна програма курсу акцентує увагу на поняттях, означеннях та методах дисципліни з метою використання їх в практичній економічній діяльності. Основні принципи мистецтва оптимізації економіко-математичних моделей та використання їх у розв'язуванні економічних задач надаються у лекційному та практичному курсах навчання.

Особливе значення має практичний курс, важливою складовою якого є типові розрахунки або індивідуальні завдання. За учбовою програмою університету вони об'єднання у лабораторний практикум і виконуються кожен другий тиждень четвертого семестру. Кожна лабораторна робота включає 2 типові задачі. Згідно з номером групи (2 групи) та варіанту (30 варіантів) студент отримує поточне завдання, на виконання якого виділено 2 тижні. Виконання та захист робіт сприяють поглибленню знань та повторенню розділів курсу.

Лабораторний практикум складається з таких робіт:

Завдання №1. Алгебраїчний вступ до математичного програмування.

1.1. Метод повного виключення Жордана-Гаусса для розв'язування неквадратних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

1.2. Геометрична інтерпретація множини розв'язків невизначеної системи у вигляді поліедру (многокутника розв'язків).

Завдання №2. Основні теореми та методи розв'язування задач лінійного програмування.

2.1. Еквівалентність форм задач лінійного програмування.

2.2. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.

Завдання №3. Основні теореми та методи розв'язування задач лінійного програмування.

3.1. Математична модель економічної задачі. Економічний аналіз на підставі графічного розв'язування.

3.2. Двоїстість в задачах лінійного програмування. Загальні правила переходу до двоїстої задачі.

Завдання №4. Симплекс-метод

4.1. Симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування. Графічна інтерпретація процесу розв'язування.

4.2. Двоїстий симплекс-метод. Графічна інтерпретація процесу розв'язування. Розв'язок прямої задачі за допомогою графічного розв'язку двоїстої.

Завдання №5. Метод штучного базису та цілочислове програмування.

5.1. Метод штучного базису.

5.2. Метод Гоморі в задачах цілочислового програмування. Графічна інтерпретація перерізу Гоморі.

Завдання №6. Післяоптимізаційний аналіз. Дробово-лінійне програмування.

6.1. Післяоптимізаційний аналіз економічної задачі лінійного програмування. Використання теореми про доповнюючу нежорсткість.

6.2. Задача дробово-лінійного програмування випадки однорідної та неоднорідної цільової функції.

Завдання №7. Транспортна задача та задача про призначення.

7.1. Класична транспортна задача по мінімізації витрат. Отримання первісного опорного плану методом північно-західного кута та мінімального елементу. Метод потенціалів.

7.2. Задача про призначення. Угорський метод.

Завдання №8. Елементи теорії ігор та динамічне програмування.

8.1. Матричні ігри в чистих та змішаних стратегіях. Спрощення вихідних задач теорії ігор завдяки використанню теореми про домінування.

8.2. Метод рекурентних співвідношень – принцип оптимальності Беллмана. Задача про найкоротший маршрут.

Приклад одного завдання з розв'язком наведений нижче.

Завдання №1.1. Алгебраїчний вступ до математичного програмування.

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язати методом повного виключення у табличній формі – методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 + a_{26}x_6 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 + a_{36}x_6 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 + a_{46}x_6 = b_4. \end{cases}$$

Знайти загальний розв'язок $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, обравши за базисні невідомі довільну комбінацію невідомих.

Записати частинний розв'язок X_0, надавши вільним невідомим нульові значення.

Вихідні дані задано розширеною матрицею коефіцієнтів

$$A^{Розш} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & b_4 \end{bmatrix}.$$

Модельний розв’язок завдання №1.1

Нехай маємо вихідні дані

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 7 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь, яка відповідає умові, має вигляд

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 + 4x_6 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 7x_5 + 4x_6 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_5 + x_6 = 6, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 4x_6 = 4. \end{cases}$$

Для розв’язування системи методом Жордана-Гаусса переписуємо її у табличному вигляді

Таблиця 1.1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	↙
$\boxed{1}$	1	1	1	8	4	5	21
2	-1	1	0	7	4	0	13
-1	2	1	0	4	1	6	13
2	1	-1	4	5	4	4	19

Результати розв’язування подано в таблиці 1.2

Таблиця 1.2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	↙	
1	1	1	1	8	4	5	21	
0	-3	-1	-2	-9	-4	-10	-29	II − 2·I
0	3	2	1	12	5	11	34	III + I
0	$\boxed{-1}$	-3	2	-11	-4	-6	-23	IV − 2·I
1	0	-2	3	-3	0	-1	-2	I − IV_{new}
0	0	$\boxed{8}$	-8	24	8	8	40	II + 3·IV_{new}
0	0	-7	7	-21	-7	-7	-35	III − 3·IV_{new}
0	1	3	-2	11	4	6	23	IV·(−1)
1	0	0	1	3	2	1	8	I + 2·II_{new}
0	0	1	-1	3	1	1	5	II/8
0	0	0	0	0	0	0	0	III + 7·II_{new}
0	1	0	1	2	1	3	8	IV − 3·II_{new}

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	0	0	1	3	2	1
0	0	1	- 1	3	1	1
0	1	0	1	2	1	3

Алгебраїчна форма запису розв'язаної системи має вигляд

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 1, \\ x_3 - x_4 + 3x_5 + x_6 = 1, \\ x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_4 - 3x_5 - 2x_6, \\ x_3 = 1 + x_4 - 3x_5 - x_6, \\ x_2 = 3 - x_4 - 2x_5 - x_6. \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3 – базисні невідомі, x_4, x_5, x_6 – вільні невідомі. Система сумісна і невизначена.

Відповідь:

Загальний розв'язок системи дорівнює $X=\{1–x_4–3x_5–2x_6,\ 1+x_4–3x_5–x_6,\ 3–x_4–2x_5–6,\ |\ x_4, x_5, x_6\}$.

Частинний розв'язок системи при умові $x_4=x_5=x_6=0$ рівний $X_0=\{1, 3, 1, |\ 0, 0, 0\}$.

Література:

1. Ашманов С.А. Линейное программирование. – М.: Наука, 1981.

2. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.

3. Бугір М.К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі. – К.: Видавничий центр "Академія", 1998.

4. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1975.

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ІЗ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Н.О. Вірченко
м. Київ, Національний технічний університет України «КПІ»
conf@ptf.ntu-kpi.kiev.ua

... При вивченні наук приклади корисніші від правил.
І. Ньютон

Практичні заняття з математики – один із важливих складників математичної освіти. Лекції закладають підвалини наукових знань, а практичні заняття розширюють, поглиблюють, закріплюють ці знання. На практичних заняттях відбувається своєрідне переосмислення знань, отриманих з лекцій, підручників, посібників, наукових статей та інших джерел.

Практичне заняття як форма навчання у порівнянні з лекцією має багато переваг, а саме: викладач ближче до студентів; студенти (в групі) навчаються один в одного, обмінюючись думками; вони набувають практики дій з новими поняттями; у них виробляється впевненість у свої сили; студенти вчаться працювати самостійно; студентів привчають до постійного пошуку вдалого способу розв'язання тієї чи іншої задачі; студенти навчаються правильно користуватись навчальною літературою і т.д.

Основна мета практичних занять – закріплення зворотної інформації, отриманої студентами в процесі слухання лекцій і вивчення навчальної літератури; детальний, глибший розгляд окремих теоретичних положень навчальної дисципліни; формування вміння та навичок практичного застосування здобутих теоретичних знань.

Загальнометодичні вимоги до проведення практичних занять з вищої математики такі:

- чітко поставлена мета кожного заняття;
- високий науково-теоретичний рівень кожного заняття;
- дотримання програми, систематичне і послідовне виконання її;
- доступність і природність підібраних задач;
- вироблення у студентів чіткої системи вмінь та навичок;
- формування та розвиток логічного й образного мислення у студентів;
- розвиток мовлення, уваги й пам'яті, творчої здатності до розв'язання задач;
- створення час від часу проблемних ситуацій;
- прищеплення студентам науково-дослідницьких методів;
- формування вміння зіставляти, порівнювати, аналізувати, систематизувати, узагальнювати конкретні задачі;

- доброзичливе й об’єктивне ставлення до студентів.

Ні в якому разі не можна дотримуватись такої форми проведення практичного заняття, коли праця викладача з групою протягом двох годин зводиться до розв’язування задач з почерговим викликом студентів до дошки, як у школі. За такої форми багато студентів – це пасивні спостерігачі подій біля дошки, вони механічно списують те, що пише викликаний до дошки студент. А коли це ще непідготовлений студент, то ефективність його перебування біля дошки для групи в цілому нескінченно мала.

Деякі методисти пропонують таку схему побудови практичного заняття:

- оголошення теми заняття;
- опитування, повторення відповідного теоретичного матеріалу та взаєморецензування відповідей студентів;
- тренувальні вправи;
- розв’язання складніших задач;
- підсумки викладача;
- відповіді на запитання студентів;
- завдання для самостійної праці;
- загальний висновок.

Звісно, це лише приблизна схема практичного заняття. Фактично кожен викладач, згідно зі своєю педагогічною майстерністю та досвідом, урізноманітнює форми занять, постійно вдосконалюючи їх, враховуючи, що студентам треба прищепити «вміння розв’язувати задачі, і то не лише стандартні, але й такі, які потребують певної незалежності мислення, тверезого розуму, оригінальності, винахідливості» [1]. Ще цінніші ті практичні заняття, коли студенти не тільки успішно вивчають і засвоюють обов’язкову навчальну програму, але й привчаються до творчості, бо, як писав Д. Пойа:

«Дрібка відкриття присутня у розв’язанні будь-якої задачі: задача може бути скромна, але якщо вона збуджує вашу цікавість і примушує вас бути винахідливим і якщо ви розв’язуєте її власними силами, то ви можете зазнати такого напруження розуму, що веде до відкриття, і відчути радість перемоги.

Такі емоції, пережиті у сприйнятливому віці, можуть пробудити смак до розумової роботи і на все життя позначитись на розумі й характері» [2].

Практичне заняття часто починається виступом викладача з вузлових питань розглядуваної теми. Цей момент для викладача особливо відповідальний. Саме в цьому моменті проявляються педагогічні здібності викладача, вміла постановка питань і т.п. Так, попереднє обговорення дає тверду основу для самостійного виконання студентами відповідних вправ.

Далі викладач дає окремі вказівки й поради до нового циклу вправ, виконуючи деякі показові вправи. До речі, ці показові вправи повинні бути посправжньому навчальними і за змістом, і за оформленням. Ще краще – якщо виконає ці вправи під керівництвом викладача хтось із здібніших студентів.

Чергове завдання містить номер, тему, перелік відповідних вправ і задач. Студенти починають працю в аудиторії, а закінчують іноді й удома. Відокремлювати аудиторні заняття від домашніх не слід.

Потрібно постійно виховувати в студентів почуття відповідальності, звичку до самоконтролю, а тому бажано часто давати задачі і без відповіді.

Розглянемо декотрі **типи задач** при вивченні вищої математики:

1. Задачі при запровадженні нових понять і нових тем. Приміром, вводячи означений інтеграл, розглядають задачі про площу криволінійної трапеції, про кількість електрики, що протікає через переріз провідника при заданій силі струму та ін.

2. Задачі ілюстративного характеру при вивченні якогось теоретичного факту.

3. Задачі для глибшого розуміння теоретичного факту. Наприклад, для кращого розуміння зв'язку між диференційованістю функції та існуванням у неї частинних похідних можна запропонувати студентам такі функції:

а) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

б) $$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

Перша функція показує, що існування частинних похідних у точці – це необхідна умова її диференційованості в цій точці, а неперервність у точці обох частинних похідних (якщо вони існують і в околі точки) – достатня умова диференційованості функції в цій точці.

4. Задачі для вироблення навичок розв'язування задач.

5. Задачі для контролю рівня знань, вмінь, для самоконтролю. Наприклад, задача:

Чи збігається інтеграл $\int\limits_0^\infty e^{-x}\cos ax\,dx$?

6. Задачі для підтримки інтересу студентства до математики. Задачі цього типу привертають увагу або своєю відповіддю, або способом розв'язання, несподіваними думками тощо.

Подамо деякі **вимоги до задачі:**

- задача має максимально сприяти досягненню мети заняття;
- задачу потрібно формулювати так, щоб вона захопила студентів;
- числові дані задачі мають бути реальними;
- задача має бути посильною;
- задача допускає допомогу викладача в складанні плану розв'язання студентом;
- задача має бути зв'язана з попереднім та наступним навчальним

матеріалом.

Розв'язування задач – складний процес. Існують різні способи розчленування розв'язання задачі на етапи. Наприклад,

1-ий етап: осмислення умови та цілі задачі;

2-ий етап: співвіднесення умов та цілей задачі, виникнення ідеї та плану розв'язання;

3-ий етап: реалізація плану розв'язання;

4-ий етап: аналіз результатів.

Вдалі приклади з детальним аналізом можна знайти в [3], [4].

На практичних заняттях має панувати напружений робочий ритм, студенти повинні бути зайняті великою творчою роботою, наполегливо шукати правильні й точні розв'язки. Практичне заняття, якщо є така потреба, слід належно забезпечити додатковим матеріалом: це тести, анкети, картки із завданням, задачники, методичні вказівки і т.п. Належить добирати такі вправи, щоб кожен новий крок у навчанні студентів поступово ускладнювався.

Потрібна гнучка методика та прозірливість викладача, щоб вловлювати можливості всієї групи та окремих студентів. Часто виникає проблемне питання: на якого студента слід орієнтуватись? Але оскільки є загальна програма, розрахована на студентів відповідних курсів, то від них і треба вимагати її виконання. З практики знаємо, що всі студенти мають намір добре вчитись, однак не всі з них включаються в активну діяльність.

Досвід показує, що ефективність практичних занять залежить від якості лекцій, роботи кабінетів, бібліотеки, характеру та особистості викладача, від підготовки студентів до заняття тощо.

Підкреслимо, що основною частиною практичних занять повинна бути **самостійна праця** студентів. Образно про це сказав американський математик Дж.В. Янґ: «Так звана самостійна робота – це вершки математики... Без роботи такого характеру вивчення математики – майже даремна річ...» [2]. Втягнути в активну самостійну роботу кожного студента, дати йому змогу працювати з **його** власною швидкістю – це теж допоможе досягти більшої ефективності практичного заняття.

Частину практичних занять доцільно відвести на самостійну працю студентів під керівництвом викладача, коли викладач тільки дає консультації і контролює роботу студентів. Студенти на занятті групами проводять дискусії, допомагають один одному. Самостійній студентській праці передує велика робота викладача зі складання індивідуальних завдань. Видавати індивідуальні завдання доцільно перед початком лекцій з певної теми. Якщо розв'язання задач індивідуального завдання повністю обґрунтовано на лекції, то студенти на занятті користуються конспектами, підручниками і самостійно виконують завдання. Асистент дає консультації, контролює роботу студентів, приймає звіти. Для сильніших студентів потрібно дати завдання підвищеного типу, можна включити і задачі олімпіадного характеру.

Якщо в завданні є задачі, прийоми розв'язання яких не лекціях не розглядались, то початок заняття проходить фронтально. У слабкій групі можна фронтально проводити основну частину заняття. Можливо використовувати і бригадну форму: одне завдання видається на групу з 3–4 студентів з наступною індивідуальною звітністю. Цю форму доцільно застосувати, якщо викладач добре знає групу і зуміє правильно скомплектувати бригади. Значну частину завдань бажано перевіряти на занятті. Роботи слабших і недисциплінованих треба перевіряти регулярно й особливо пильно.

Деякі індивідуальні завдання можна оформляти у вигляді тестів. Знаючи шифр правильної відповіді, можна протягом 3–5 хв. перевірити роботи всіх студентів групи.

Добре, якщо лектор веде практичні заняття в одній із груп. Цим він підтримує кращий контакт зі студентами, може вияснити, які теоретичні знання викликають труднощі, на що під час лекцій потрібно звернути більшу увагу. При цьому йому буде легше підбирати задачі для вправ. Іноді буває і так, як згадує академік Б. Гнєденко: «Я пам'ятаю, як перед війною, в 1940–1941 навчальному році, на механіко-математичному факультеті Московського університету вправи з курсу диференціальних рівнянь проводили три провідних професори – В. Степанов, С. Соболєв та І. Петровський, а лекції читав доцент С. Гальперн».

В окремих випадках викладач може сам провести розв'язання тієї чи іншої задачі, залучаючи до цього студента лише частково. Це робиться тоді, коли метод складний і студенти наробили багато помилок. При розв'язанні викладач повинен пропустити прості обчислення, щоб краще виділити суть методу.

Доцільно часом практикувати **колективне розв'язування** задач. Задача, що виноситься на колективне розв'язання, повинна бути важливою, а метод її розв'язання – повчальним. Із групи аналогічних задач загальними зусиллями розв'язується одна, а решту студенти розв'язують самостійно. При цій формі практичного заняття спочатку відбувається загальне обговорення задачі, накреслюється план розв'язання, а потім можна викликати до дошки одного студента. Роль викладача тут полягає в допомозі студентам через навідні питання, причому в процесі заняття викладач повинен домагатись активної роботи кожного студента.

Підкреслимо велике значення **контролю** за роботою студента. Контроль має пронизувати практичне заняття в цілому, бути в кожній його частині. Також систематичним повинен бути контроль за виконанням домашніх завдань. Цінними й потрібними є контрольні роботи. Краще їх проводити за картками. Коли студент знає, що його варіант єдиний, то всі дії його скеровані на розв'язання свого варіанту. Інколи багато часу витрачається на переписування контрольних. У таких випадках доцільніше примусити студента попрацювати над своїми помилками, а потім дати йому невеличке завдання. На консультації, якщо в цьому є потреба, проводиться аналіз помилок. Через деякий час слід провести співбесіду за результатами роботи студента над помилками і перевірити виконання завдання.

У викладача повинен бути повний і детальний облік успіхів кожного студента. Результати цього обліку мають знати й студенти. Небажано обговорювати на занятті неуспіхи чи зриви окремих студентів.

Створення доброго робочого настрою на заняттях досягається поєднанням вимогливості та уважним ставленням до кожного студента. До студентів завжди належить ставитись коректно, доброзичливо і уважно, підкреслюючи спільність цілей. На всі запитання слід відповідати і не кпити з наївних запитань. Краще похвалити студента за питання. Одного студента треба за щось похвалити, другого – прискіпливо опитати, третього – захопити складнішими й цікавішими задачами.

Окремого розгляду потребують семінари й колоквіуми – це найвищі форми практичних і теоретичних занять.

Нагадаємо ще 10 заповідей Д. Пойа викладачеві математики [1]:

1. Цікавтесь своїм предметом.
2. Знайте свій предмет.
3. Знайте, яким способом можна вивчити те, що вам необхідне. Найкращий спосіб вивчити – це відкрити самому.
4. Вмійте читати з облич учнів. Намагайтеся побачити, чого від вас чекають, зрозуміти труднощі учнів; вмійте ставити себе на їхнє місце.
5. Не обмежуйтесь голою інформацією; намагайтесь розвинути в учнів певні навички, необхідний склад розуму та звичку до методичної праці.
6. Докладайте зусиль, щоб навчити учнів здогадуватись.
7. Докладайте зусиль, щоб навчити їх доводити.
8. Вишукайте у вашій задачі те, що може стати в пригоді при розв'язуванні інших задач; за даною конкретною ситуацією намагайтесь виявити загальний метод.
9. Не виказуйте свого секрету відразу – нехай учні спробують вгадати його до того, як ви їм це розкриєте; дайте змогу учням самим знайти якомога більше.
10. Користуйтесь навідними вказівками, але не нав'язуйте своєї думки.

Література:

1. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: Наука, 1970.
2. Математика (воспитание через предмет). – Куйбышев, 1965.
3. Куваев М.Р. Методика преподавания математики в вузе. – Томск, 1990.
4. Пойа Д. Как решать задачу. – М.: Учпедгиз, 1959.

ВИКОРИСТАННЯ СПЕЦІАЛІЗОВАНИХ МЕТОДИК РОЗРАХУНКІВ У ВИКЛАДАННІ МАТЕМАТИКИ

О.М. Дрєєв[1α], З.Ю. Філер[2β]
[1] м. Кіровоград, Кіровоградський національний технічний університет
[2] м. Кіровоград, Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка
[α] drey_sanya@mail.ru
[β] filer@kw.ukrtel.net

Зараз інженерів не можна уявити без сучасної обчислювальної техніки, бо всі вузли агрегатів верстатів та машин, всі параметри мостів та шляхів проходять ретельні розрахунки на працездатність та зносостійкість. Сучасна теорія керування вимагає в реальному часі опрацьовувати потік даних та на їх основі приймати рішення. Звісно, інженер повинен розв'язувати всі ці задачі. Але якщо взяти навмання один з підручників із завданнями чи прикладами виконання завдань, стає помітною навмисна «хитрість» авторів: кожне з завдань в умові має *цілі* числа, в процесі розв'язання проміжні результати приймають форму з цілими радикалами, навіть більшість обчислень можна провести, не знаючи значення числа e чи π. Завдяки такому штучному спрощенню практичних завдань часто можна спостерігати парадокс, коли студент з труднощами розв'язує квадратне рівняння $2{,}15365x^2+9{,}1254x-1{,}02354=0$. Ще гірші вміння у студентів працювати з тригонометричними формулами, коли аргументи відрізняються від 0^o, 30^o, 45^o, 60^o, 90^o. Для виховання загального підходу до алгоритмів ми практикуємо генерування завдань, коли різні цифри числа незалежно вибирають різні студенти.

Для поліпшення засвоювання матеріалу та методик обчислень спрощені задачі є лише першим і необов'язковим кроком. Більшість завдань повинні відображати світ, в який попадає молодий інженер при проведенні розрахунків. Звідси випливає умова, що кожна відповідь до задачі повинна мати вид конкретного числа без умовних позначень π, e, нерозкритих радикалів тощо. Як показала практика, учні, що погано засвоюють матеріал, при такому підході свої знання та навички не погіршили, але інші учні позбулися шоку від «неправильних та нецілих» відповідей, лабораторні та практичні роботи з інших дисциплін обчислюють швидше й надійніше.

Від викладача такий підхід вимагає додаткових зусиль на перевірку завдань, де записи стають більш довгими та заплутаними. Тому доцільним є впровадження викладання методик перевірки отриманих результатів і вимагати їх використання студентами. Це не лише є доповнення учбового матеріалу, а й значно полегшує перевірку письмових робіт.

Вивчення класичних методик обчислення на практиці обмежується універсальними методами, що при певних умовах дають змогу розв'язати будь-яку поставлену задачу (інтегрування, відшукання коренів, розв'язання задачі Коші та інші). Але в практичних розрахунках, наприклад, в пристроях автоматичного керування, задачу потрібно не лише розв'язати, але й зробити це за даний проміжок часу. Тут на першу чергу постає проблема скорочення кількості дій для обчислення, бо використання більш продуктивних процесорів недоцільне з цінової політики.

В минулі роки, коли електронні обчислювальні прилади не панували в світі, інженерні розрахунки проводилися з використанням лише множення та додавання, що відбилося на методиках обчислень: методи інтегрування прямокутників, трапецій та Симпсона, методи розв'язання задач Коші, Ейлера та Рунге-Кутта, інтерполяція Ньютона та Тейлора, і т.д. – всі методики використовують обчислення значень многочленів, а не синусів, експоненти тощо.

Сучасні ЕОМ та арифметичні процесори використовують таблично-апроксимаційні методики розрахунку елементарних функцій, тому відшукання значень синусів та косинусів з використанням сопроцесорів не набагато довше, ніж множення та ділення. Саме з приходом у життя ЕОМ є можливість впровадження більш точних методик для врахування поведінки функції, яку досліджують. Яскравим та нескладним прикладом є узагальнення методу Симпсона чисельного інтегрування функцій з високочастотною складовою, де частота ω приблизно відома (допустимі відхилення порядку в 0,8–1,6 разів).

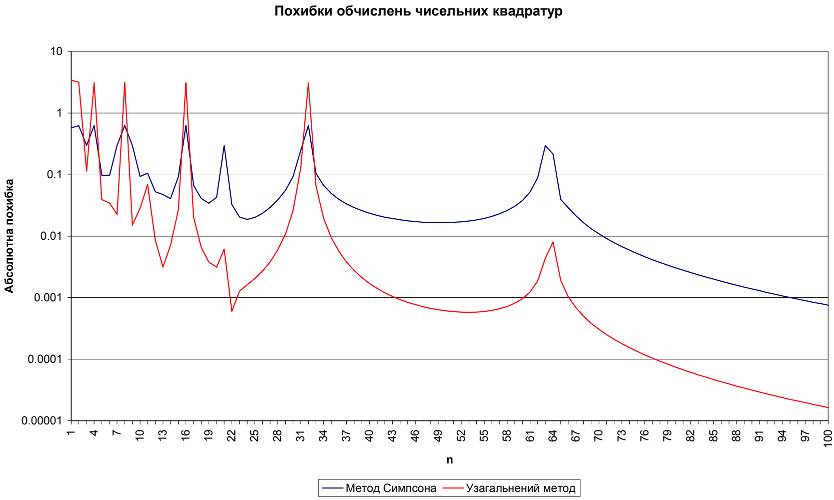
Для наближення сигналу в такій ситуації замість квадратного тричлену використовується лінійно-тригонометричний многочлен виду $f(x_0+t)\approx a_0+a_1t+b_0\cos(\omega t)+b_1\sin(\omega t)$, де a_0, a_1, b_0, b_1 – сталі шукані коефіцієнти, t – незалежна змінна. Виведення робочої формули аналогічно отриманню класичної формули Симпсона при h=const – кроку рівномірного розбиття. Використовуються значення підінтегральної функції в точках розбиття, інтегрується наближуючий многочлен на проміжку довжиною $2h$, а потім відшукується отриманий вираз через значення функції в цих 3 точках. Потім "малі формули" додаються, зводяться подібні (бо права точка одного інтервалу є лівою точкою наступного інтервалу). Це й дає наближене значення інтегралу:

$$I_n = \frac{h}{\cos(\omega h)-1}\left(\left(\frac{\sin(\omega h)}{\omega h}-1\right)\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+2ih)\right)+\right.$$
$$\left.+2\left(\cos(\omega h)-\frac{\sin(\omega h)}{\omega h}\right)\sum_{i=1}^{n} f(a+(2i-1)h)\right)\approx\int_a^b f(x)dx.$$

Формула для обчислення має лише інші коефіцієнти, що залежать від частоти коливань ω функції, яка інтегрується, та кроку h розбиття. Ці коефіцієнти обчислюються один раз, але формула дає в 10–1000 разів меншу відносну похибку розрахунку, ніж формула Симпсона. На те, що ця формула є узагальненням методу Симпсона, вказує той факт, що при $\omega h\to 0$, коефіцієнти при значеннях функції $f(a+kh)$ співпадають з класичними для методу Симпсона. Для пошуку інтегралу (тестовий приклад)

$$\int_{-1}^{1} x\cdot\sin(200x)dx = \left.\left(\frac{\sin(200x)}{40000} - \frac{x\cdot\cos(200x)}{200}\right)\right|_{-1}^{1}$$

з метою наочного порівняння точності розрахунків класичною формулою Симпсона та її узагальненням, наведено на рисунку. З графіку залежності похибки обчислення чисельних квадратур видно, що зі зростанням кількості кроків розбиття, похибка обчислень зменшується спочатку нерівномірно, а потім переходить у рівномірне спадання, що зі збільшенням кількості кроків розбиття дедалі уповільнюється. Так відношення похибок R_{2n}/R_{4n} прямує при збільшенні n до 15 для обох методів. При n=400 відношення похибок є близьким до 16,4, а при n=1000 відношення похибок є близьким до 16,1.



Але у використаної методики є обмеження: $\omega h\neq 2\pi k$, де k – натуральне число. На рисунку для n, при яких $\omega h\approx 2\pi k$, чітко видно піки зростання абсолютної похибки обчислень, пов'язаною з тим, що машина працює з наближеними числами і не може достатньо точно вирахувати відношення числа, близького одиниці $(\cos(\omega h)–\sin(\omega h)/(\omega h))$ до числа, близького нулеві $(\cos(\omega h)–1)$. Найбільш продуктивним метод буде при виборі ωh меншим за $4\pi/3$. Метод не вимагає додаткових обчислень в циклах розрахунку сум, тому машинний час розрахунку методом Симпсона та його узагальненням майже співпадають і відмінності стають непомітними вже при n>20.

Описаний метод квадратур для коливних функцій корисний при гармонічному аналізі. Для рядів Фур'є коефіцієнти функції, заданої на одному періоді, визначаються через інтеграли від її добутку на синуси та косинуси. Для гармонік високих порядків n підінтегральні функції сильно коливаються, тому їх знаходження класичним методом Симпсона вимагає великої кількості кроків (порядку 20 на періоді найвищої частоти, тобто загальна кількість кроків буде порядку $20n$ для n-ої гармоніки).

Досить ефективно використовувати спеціалізоване наближення при пошуку коренів функцій. У класичних методів послідовних наближень пошуку коренів, зокрема, у методі дотичних, є важливий недолік – не можна дістатися кореня, що лежить за локальним екстремумом. Апріорне знання про поведінку досліджуваної функції, як схожої на квадратичну, експоненту чи синусоїду, дозволяє екстраполювати значення до коренів з більшою точністю та скоротити кількість ітерацій за рахунок знаходження розумного початкового наближення.

У багатьох задачах необхідно знайти не тільки дійсні, а й комплексні корені функції, яка для дійсного аргументу приймає дійсні значення. Навіть спеціалізовані посібники радять переходити від одного рівняння для комплексної змінної x до системи рівнянь для дійсних компонентів x_1 та x_2 комплексного аргументу $x=x_1+ix_2$. Ми пропонуємо інший підхід. Для квадратичної функції $a_0+a_1x+a_2x^2$ дійсна частина кореня $x_1=-a_1/(2a_2)$ співпадає з точкою x_0 екстремуму – коренем похідної a_1+2a_2x. Тому розумно для дійсної частини комплексного кореня в околі точки додатного максимуму та від'ємного мінімуму, коли знак другої похідної в точці екстремуму співпадає зі знаком самої функції, шукати з її квадратичного наближення $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)/2(x-x_0)^2$. У точці екстремуму перша похідна дорівнює нулеві, тому дискримінант буде від'ємний, а корені для $x-x_0$ – уявними й спряженими. Подальші уточнення можна проводити відомими методами, зокрема, ітераціями Ньютона. Автори навчили студентів розв'язувати, зокрема, рівняння типу $a^x+bx+c=0$, визначаючи графічним методом наявність дійсних коренів; при їх відсутності описаним методом шукались комплексні корені.

Метод Ньютона погано працює, якщо в початковій точці x_0 функція $y(x)$ та її друга похідна мають різні знаки. Тоді пошук наближуючої функції у вигляді $y(x)=a+b*\exp(c(x-x_0))$, яка в точці x_0 має ті ж значення разом з першою та другою похідними, як і дана функція, дає значення для $a=y_0-b$, $b=y_0'/c$, $c=y_0''/y_0'$. Звідси отримаємо формулу для наступного наближення $x_1=x_0+y_0'/y_0''\cdot\ln(1-y_0y_0''/(y_0')^2)$. При малих значеннях y_0 ця формула переходить у формулу Ньютона. При $y_0y_0''/(y_0')^2>1$ отримаємо наближення до комплексного кореня. При різних знаках y_0 та y_0'' отримана "формула логарифмів" дає дійсне наближення x_1. Ознакою доцільності такого (експоненціального) наближення $y(x)$ є майже сталість відношення другої і першої похідних. Для майже сталого відношення функції та її другої похідної добрим наближенням є синусоїдальне, а $y'''/y'\approx\mathrm{const}$ – сума сталої та тригонометричної (гіперболічної).

Дослідження спеціалізованих методів на швидкодію, точність розрахунків, оцінку похибки розрахунків можна й потрібно доручати студентам, як теми для курсових та дипломних робіт, що містять високу кількість не реферативної, але ж посильної, навіть далеко не найкращим студентам, саме пошукової роботи.

Спеціалізовані методи для чисельного інтегрування диференціальних рівнянь квазілінійного типу розроблялися одним з авторів (З.Ю. Філером) в процесі навчання студентів спеціальності "Прикладна математика" Донецького політехнічного інституту ще у 70-тих роках. Вони стали витоками чисельних методів для задач теорії коливань [1]. На цій основі вдалося узагальнити формулу Тейлора, яка є розв'язком задачі Коші для найпростішого диференціального рівняння (n+1)-го порядку:

$$y(x)=y(x_0)\cdot 1+y'(x_0)\cdot(x-x_0)+y''(x_0)\cdot(x-x_0)^2/2!+\ldots+y^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n/n!+R_n(x, x_0),$$

$$R_n(x, x_0)=\int_{x_0}^{x} y^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n / n!\,dt .$$

Останній член $R_n(x, x_0)$ є залишковим членом в інтегральній формі. З неї можна отримати за допомогою теорем про середнє всі відомі формули залишкового члену (Лагранжа, Коші, Пеано, Шльомільха-Роша, зокрема). Використані тут функції $u_k(x)=(x-x_0)^k/k!$, k=0, 1, 2, …, n є розв'язками задачі Коші $u^{(n+1)}=0$ з початковими умовами $u_k^{(j)}(x_0)=\delta_{kj}$, де δ_{kj} є символ Кронекера, рівний 1 при $k=j$ та 0, якщо $k\neq j$. Узагальнення формули Тейлора полягає у використанні більш загального $L[y]=f(x)$, $L[y]\equiv y^{(n+1)}+a_n y^{(n)}+\ldots+a_1 y'+a_0 y$, коли в ролі $u_k(x)$ будуть розв'язки задачі Коші для відповідного однорідного рівняння $L[u]=0$ з тими ж початковими умовами $u_k^{(j)}(x_0)=\delta_{kj}$. Так, для рівняння $y''+\omega^2 y=f(x)$ матимемо

$$y(x)=y(x_0)\cos\omega(x-x_0)+y'(x_0)\sin\omega(x-x_0)/\omega+\int_{x_0}^{x} f(t)\sin\omega(x-t)/\omega\,dt.$$

Перші два члени описують вільні коливання частоти ω із даними початковими умовами, а останній – вимушені коливання з нульовими початковими умовами. Для нелінійних рівнянь при $f(x, y, y', ..., y^{(n)})$ отримана формула дозволяє побудувати ітерації та спеціалізовані чисельні методи. Для сталих значень $f(x, y, y', ..., y^{(n)})$ на шуканому розв'язку метод дає точний розв'язок.

Формулу Тейлора ми отримуємо за допомогою інтегрування частинами з формули Ньютона–Лейбніца, а її узагальнення – при вивченні лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Література:

1. Филер З.Е. Об одном обобщении формулы Тейлора и её применении к решению дифференциальных уравнений // УМЖ. – 1981. – Т. 33, в. 1. – С. 123–128.

ПРО ДЕЯКІ ПРИНЦИПОВІ ПОЛОЖЕННЯ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В АГРАРНОМУ ВИЩОМУ НАВЧАЛЬНОМУ ЗАКЛАДІ

І.М. Суліма, І.І. Ковтун, І.А. Нікітіна
м. Київ, Національний аграрний університет України
ira@otblesk.com

Відомо, що вища школа України в останні роки переживає реформування. Після переходу на триступеневу систему навчання – бакалавр, спеціаліст, магістр – з'ясувалося, що ступеня "спеціаліст" у європейській освіті немає. Прийнято двоступеневу систему: бакалавр (4 роки навчання) і магістр (додаткові 2 роки навчання). Реформування вищої освіти продовжується. Україна приєдналася до Болонської конвенції і переходить на кредитно-модульну систему освіти. Нажаль, кількість годин на викладання вищої математики неуклінно зменшується.

Але вища математика повинна займати одне із пріоритетних місць у вищій інженерній освіті. Студенти мають зрозуміти, для чого їм потрібна вища математика і як її використовувати. Зокрема, для студентів інженерних спеціальностей математика є фундаментом для вивчення спеціальних дисциплін і, по суті, має прикладний характер. При цьому викладання основних понять має бути, з однієї сторони, строгим, з іншої – зрозумілим ([1], [2]).

Одним із способів звернути увагу прикладників на необхідність знання вищої математики є пояснення "навіщо це потрібно?" Крім того, потрібно підкреслити, як використовується введене нове поняття і в теорії, і в прикладних задачах.

Розглянемо специфіку викладання вищої математики в аграрному вищому навчальному закладі. Курс вищої математики включає, крім математичного аналізу, лінійну і векторну алгебру, аналітичну геометрію, диференціальні рівняння, ряди. Зупинимося на способі викладення деяких розділів.

Фундаментальним і, безумовно, важким для сприйняття, є поняття границі упорядкованої величини. Як відомо, його було введено як обґрунтування диференціального і інтегрального числення вже після використання похідних і інтегралів на практиці.

Перед тем, як ввести поняття границі упорядкованої величини, формулюємо задачу про миттєву швидкість тіла, що падає в порожнечі, і задачу про площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=x^2$, віссю Ox і прямою $x=1$ [3].

Відомо, що середня швидкість тіла, що падає, дорівнює $v_{сер} = gt + \frac{g}{2}\Delta t$ або $v_{сер}=gt+\alpha(\Delta t)$, де $\alpha(\Delta t) = \frac{g}{2}\Delta t$. Площа сум вписаних у криволінійну трапецію прямокутників дорівнює $S_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n} \right)$ або $S_n = \frac{1}{3} + \alpha_{n-1}$, де $\alpha_{n-1} = \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n}$.

Швидкість в момент часу t і площа криволінійної трапеції відомими до цього часу методами нам знайти не вдається. Для того, щоб знайти відповідь на запитання сформульованих задач, потрібно зробити дещо нове – здійснити граничний перехід. Отже, введення поняття границі є необхідним і природнім. Можна наводити означення границі послідовності та границі функції.

У наведених задачах природно з'являються і нескінченно малі величини, тому даємо означення такої величини.

Розглянуті задачі знову використовуємо у диференціальному та інтегральному численні.

Повертаємося до задачі про знаходження миттєвої швидкості при нерівномірному русі, якщо відомий пройдений шлях. Маємо середню швидкість руху за час від t до Δt: $v_{сер} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Шукана швидкість v дорівнює границі середньої швидкості, тобто $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{сер} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Ця границя є похідною $\frac{ds}{dt}$ від шляху $s(t)$ по часу t

Робимо висновок: *похідна – це швидкість зміни заданого процесу*.

Починаючи вивчення визначених інтегралів, повертаємося до задачі про площу криволінійної трапеції, яка пояснює геометричний зміст визначеного інтеграла.

Розглядаючи невласні інтеграли першого роду, наводимо задачу про "площу" криволінійних трапецій, необмежених праворуч. А саме, трапецій, обмежених ліворуч прямою x=1, зверху кривою $y = \frac{1}{x}$ або $y = \frac{1}{x^2}$, знизу віссю Ox. Дістаємо невласні інтеграли першого роду $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x} dx$ та $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$, перший із яких розбіжний, а другий – збіжний, тобто у першому випадку "площа" криволінійної трапеції не існує, а у другому – існує.

Задачі про знаходження площі використовуємо і для пояснення, що таке *числовий ряд*, що означає *збіжність* числового ряду, як і чому з'являється необхідна умова збіжності числового ряду, навіщо потрібні достатні умови збіжності. Зокрема, стає зрозумілим, як пов'язана достатня умова збіжності – інтегральна ознака Коші – зі збіжністю невласного інтеграла першого роду.

Як з'являється числовий ряд, пояснюємо на такому прикладі [4].

Знайти площу прямокутного трикутника з катетами OA=1, AB=2 і гіпотенузою *OB*.

Площа цього прямокутного трикутника дорівнює 1.

Тепер знайдемо площу заданого трикутника так. На осі *Ox* вибираємо точки A_1, A_2, A_3, ... таким чином, щоб $OA_1 = \frac{1}{2},\ OA_2 = \frac{1}{3},\ OA_3 = \frac{1}{4},\ldots$. З'єднаємо точки A_1, A_2, A_3, ... з точкою *B*. Дістанемо трикутники, сума площ яких дорівнює

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

Тут $\left\{\frac{1}{n(n+1)}, \forall n \ge 1\right\}$ – числова послідовність.

Маємо вираз, який називають *числовим рядом*, і $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ – загальний член числового ряду.

Даємо означення числового ряду, часткової суми і збіжності числового ряду. У наведеному прикладі знаходимо *n*-у часткову суму $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, використовуючи яку дістаємо суму даного числового ряду, виходячи із означення суми ряду. Маємо $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$. Дістаємо, що знайдена сума ряду дорівнює 1. Це і є площа заданого прямокутного трикутника.

На цьому прикладі демонструємо поняття числового ряду, часткової суми ряду, означення суми числового ряду та її знаходження.

Умовою збіжності числового ряду є $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, при невиконанні якої ряд є розбіжним. Наводимо задачі, які показують, що ця умова є *необхідною,* але не достатньою для збіжності числового ряду.

При використанні наведеної методики викладання основних положень курсу вищої математики для прикладників, зокрема, для студентів аграрних вищих навчальних закладів, на нашу думку:

- стає більш зрозумілою необхідність введення нових математичних понять: математичне поняття виникає, зокрема, при розв'язання конкретних практичних задач;
- зрозумілим є і те, що зміст самого математичного поняття не залежить від того, як надалі це поняття використовується;
- знання властивостей математичних понять допомагає при розв'язанні конкретних задач;
- важливим є і співвідношення між строгими доведеннями теорем і їх поясненнями: пояснення допомагають осмислити твердження, але не замінює їх.

Література:

1. Кудрявцев Л.Д. Основные положения преподавания математики // Математика в высшем образовании. – Нижний Новгород: Нижегородский гос. университет, 2003. – Т. 1. – С. 127-144.

2. Мышкис А.Д. О преподавании математики прикладникам // Математика в высшем образовании. – Нижний Новгород: Нижегородский гос. университет, 2003. – Т. 1. – С. 37-52.

3. Ковтун И.И., Никитина И.А. Об одном подходе к введению понятия предела // Труды Российской ассоциации «Женщины-математики». – Чебоксары: Чувашский гос. университет, 2000. – Т. 7. – Вып. 2. – С. 87-89.

4. Вечорик А.Н., Дума А.С., Ковтун І.І. Дослідження математичної моделі за допомогою рядів // Проблеми науки, освіти і управління: Збірник наукових праць. – Харків: Харківський національний університет, 2004. – Вип. V. – С. 74-77.

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С УЧЕТОМ АССОЦИАТИВНОЙ ПАМЯТИ СТУДЕНТОВ

И.А. Драчева, Т.Г. Ершова, Н.В. Ивановский
г. Керчь, Керченский морской технологический институт

Одним из важнейших направлений реформы высшей и средней школы в Украине на современном этапе является гуманистическая направленность образования на всех уровнях обучения. Речь идет о значительном усилении личностного начала во всех сферах общественной жизни. Сознательная деятельность будущего специалиста, который, стремясь создать новую реальность, руководствуется критериями знаний, профессионализма, осознанием ответственности, как за себя, так и за общество в целом – одна из доминирующих тенденций в целостной системе образования конца XX начала XXI века.

Гуманистическая направленность образования требует от педагогов поиска новых путей и методов обучения, толерантного отношения к студентам. Переход на модульную систему обучения в высших учебных заведениях Украины направляет процесс изучения физико-математических дисциплин общеобразовательного цикла на индивидуализацию и дифференциацию обучения. При этом проводится учет индивидуальных психологических особенностей каждого студента.

В работах Я.И. Груденова, И.Ю. Кулагиной, З.И. Слепкань, Е.Н. Турецкого, Л.М. Фридмана, Б.П. Эрдниева, П.М. Эрдниева, А.Ф. Эсаулова и многих других исследователей в области методики математики уделяется большое внимание развитию у учеников и студентов различных видов психологической деятельности при решении математических примеров и задач.

В статье мы рассматриваем **проблему** обучения решению примерам из высшей математики по теме «Неопределенные интегралы» с учетом обобщенной ассоциативной памяти. Рассматриваем случаи, когда ассоциативную память надо использовать для обучения, а когда «с ней надо бороться».

При поиске решения задач по высшей математике большую роль играют обобщенные ассоциации. Проявление обобщенных ассоциаций эквивалентно свернутому умозаключению. Это такая широкая связь мыслительных процессов человека, которая в прошлом им уже осуществлялась и которая видоизменяется в зависимости от конкретной ситуации и в результате применения к этой ситуации различных приемов мыслительной деятельности (анализа, синтеза, обобщения, сравнения и др.) [1, 55].

Я.И. Груденов называет *ассоциацией* такую связь двух процессов P1 и P2, протекающих в сознании, при которой первый процесс влечет за собой возникновение второго. Обозначение: (P1; P2), где P1 – первый член ассоциации, P2 – второй [2, 6].

Ассоциация называется *обобщенной*, если компоненты ее членов варьируются в зависимости от условия решаемой задачи и эти вариации влияют на получаемый результат. (Такие варьируемые компоненты членов ассоциации называются существенными). Ассоциация называется *константной*, если ее существенные компоненты всегда неизменны; изменяться в ней могут лишь несущественные компоненты, т.е. те, которые не влияют на результат решаемой задачи [2, 6].

Обобщенную ассоциацию надо рассматривать не как механическое соединение нескольких исходных элементов, а как сокращенное умозаключение. Формирование обобщенной ассоциации происходит не помимо деятельности, а путем активной мыслительной деятельности студента в процессе решения задач [1, 42]. В обучении высшей математике важное значение имеет ход рассуждения студентов при решении задач. Они вспоминают определения, теоремы, графики функций и т.п., то есть используют ранее изученный материал. Подобные процессы называются *стимулирующими звеньями.*

По Я.И. Груденову *стимулирующим звеном* называется промежуточный мыслительный процесс, который вводится между двумя другими процессами, протекающими в сознании студента, помогая устанавливать связи между ними, углублять понимание и активизировать мыслительную деятельность [2, 10].

В качестве стимулирующих звеньев могут выступать следующие процессы: вспоминание, применение по ходу решения задачи определений, теорем, законов, различных правил; созерцание, представление наглядных образов (моделей, графиков, рисунков); любая деятельность с ними; оперирование знаками, символами (введение стрелок, подчеркивание записей и т.д.); любые рассуждения, действия, углубляющие понимание нового материала [2, 11].

Сформулируем закономерность формирования ассоциаций необходимых в практике обучения.

Ассоциация (Р1; Р2) образуется, если психические процессы Р1 и Р2 возникают по ходу деятельности и повторяются или непосредственно друг за другом, или с участием стимулирующего звена М. Если это звено в дальнейшем сохраняется, то образуются две ассоциации (Р1; М) и (М; Р2) [1, 44].

Проявление обобщенной ассоциации – сложный мыслительный процесс, который включает в себя синтез и анализ. В него могут входить другие, более простые обобщенные и константные ассоциации, но каждый раз в другой комбинации. Проявление каждой обобщенной ассоциации есть не что иное, как свернутое умозаключение, но при необходимости обобщенная ассоциация может развернуться в полное логическое умозаключение.

В процессе решения задачи студент выполняет многие промежуточные преобразования, не вспоминая определений, аксиом, теорем, но действуя в полном соответствии с ними благодаря проявлению обобщенных ассоциаций. Если студент вспоминает определения, теоремы, аксиомы в нужный момент, то это также происходит в результате проявления некоторых обобщенных ассоциаций, подобных (Р1; М) [1, 46-48].

Помимо полезной ассоциации психологи выделяют понятие «*ошибочной ассоциации*». Ассоциация называется *ошибочной*, если на основе ее проявления студент иногда решает задачи данного типа верно, иногда ошибается, либо она вообще не проявляется при решении задач этого типа [1, 51]. Например, при решении интегралов $\int xe^{x}dx$ и $\int xe^{x^2}dx$ многие студенты используют метод интегрирования по частям, хотя второй интеграл решается методом подстановки.

Существуют определенные закономерности формирования обобщенных ассоциаций:

– если существенные компоненты двух психических процессов при их повторении друг за другом изменяются, варьируются, может образоваться обобщенная ассоциация, если они всегда неизменны – константная;

– если какая-либо особенность К, присущая отдельным задачам данного типа, не отражена в системе упражнений, либо в рассматриваемых способах решения задач, то у студентов может образоваться ошибочная ассоциация, в состав первого члена которой не входит осознание особенности К;

– для формирования обобщенной ассоциации требуется тем меньше тренировочных упражнений, чем более студент развит и обогащен знаниями, умениями и навыками, относящихся к данной области науки;

– для сохранения и упорядочения обобщенных ассоциаций рассредоточенное повторение эффективнее концентрированного;

– использование стимулирующих звеньев по ходу решения задач приводит к формированию прочных и устойчивых обобщенных ассоциаций [1, 53].

Опираясь на эти закономерности, преподаватель может в максимальной мере активизировать мыслительную деятельность студентов, прогнозировать их ошибки при обучении решению задач по высшей математике.

При изучении темы «Неопределенное интегрирование» у студентов возникают трудности при вычислении интегралов методом подстановки (или внесение под знак дифференциала). Они не «видят» какую нужно сделать подстановку (что именно внести под знак дифференциала), часто путают интегралы, решаемые подстановкой с интегралами, к которым применяется другой метод решения. Для определенной группы студентов данную проблему можно решить с помощью следующей методики, учитывающей особенности проявления ассоциативного мышления:

- объясняется суть метода интегрирования подстановкой,
- показываются несколько примеров решения,
- студентам предлагается самим сконструировать интегралы, решае-

мые данным методом,

- как один из вариантов студентам предлагается задания, где они должны вместо черты _ поставить выражение, чтобы интеграл можно было вычислить с помощью метода подстановки:

I.

$$\int \_\ln x dx, \int \_ tgx dx, \int \_\arcsin x dx, \int \_\sin x dx, \int \_\cos x dx, \int \_\operatorname{arctg} x dx,$$

$$\int \frac{\_}{1-\cos x} dx; \int \frac{\_}{\sin x} dx; \int \frac{\_}{x^3 - 2x + 1} dx;$$

II.

$$\int \_\left(x^2-5\right)^{100} dx, \int \_\sin x^2 dx, \int \_\sin^2 x dx, \int \_\cos(x^3+2) dx, \int \_ e^{\sin x} dx,$$

$$\int \_\cos(\ln x) dx, \int \sqrt{a+b\cos x}\ \_\ dx, \int \_ e^{x^3} dx, \int \_ e^{\sqrt{x}} dx, \int \_\ln^2 x dx,$$

$$\int \_\frac{1}{\sqrt{a+b\sin(cx)}} dx, \int \_\frac{1}{\sqrt{x^2+10}} dx.$$

- в первом ряду примеров вместо черты надо записать производную от известной функции в подынтегральном выражении, используя подстановку вида $\int f(x)\cdot f^{/}(x)dx$, замена $f(x)=t$;
- во втором – производную от аргумента известной функции, используя подстановку вида $\int f(\varphi(x))\cdot \varphi^{/}(x)\,dx$, замена $\varphi(x)=t$.

При выполнении подобных заданий у студентов формируется обобщенная ассоциация, о том, что метод подстановки связан с производной от функции или от аргумента функции. После заданий на конструирование интегралов предлагается решить обратную задачу, т.е. непосредственно используя метод подстановки вычислить интеграл. Например:

$$\int x\sin(x^2+2)dx, \int \frac{\ln^5 x}{x} dx, \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx, \int 3x^2 e^{x^3-2} dx, \int \frac{\sqrt{7+2\ln x}}{x} dx,$$

$$\int e^{\cos x}\sin x dx, \int \frac{\cos x}{3-\sin x} dx, \int \sin^2 x\cos x dx.$$

При переходе к теме «Интегрирование по частям» целесообразно предлагать студентам задачи «на распознавание». Какой интеграл можно вычислить с помощью подстановки, а какой методом интегрирования по частям.

Можно предлагать интегралы по парам:

$\int \frac{\ln x}{x} dx$ и $\int x\ln x dx$;

$\int x\sin(x^2+5)dx$ и $\int x^2\sin x dx$;

$\int \arcsin x dx$ и $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Можно предложить ряд интегралов

$\int (x-5)\ln x dx$, $\int x^3 \cos(x^4+1) dx$, $\int \frac{1}{x \ln^3 x} dx$, $\int 3xe^{x-2} dx$, $\int \sin 3xe^x dx$,

$\int \operatorname{arctg} 2x dx$, $\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx$, $\int (x^2+4)\sin\frac{x}{2} dx$.

При выполнении этого задания необходимо сначала распознать, а затем решить его подходящим методом. При выполнении подобных заданий будет усваиваться новая тема, а также закрепляться пройденный материал. Такие задания при дальнейшем обучении уменьшают вероятность ошибок, связанных с ассоциативным мышлением.

Выводы:

1. Обучение, которое ориентировано на запоминание и сохранение материала в памяти, уже только отчасти удовлетворяет современным требованиям. Поэтому преподаватель должен строить занятия таким образом, чтобы направить работу студента на формирование у него таких качеств мышления, которые позволили бы студенту самостоятельно находить и усваивать новую информацию, т.е. не давать все в готовом виде.

2. Деятельность преподавателя должна быть направлена на активизацию учебно-познавательной деятельности студентов. Использование преподавателями активных методов в вузовском процессе обучения способствует преодолению стереотипов в обучении, выработке новых подходов к профессиональной ситуации, развитию творческих способностей студентов.

Литература:

1. Груденов Я.И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике. – М.: Педагогика, 1987. – 160 с.

2. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ» В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

В.И. Вербицкий, Е.Д. Толстяк
г. Харьков, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
verbv@reg.kharkov.ua

В настоящей работе предложена схема изложения темы «Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью» в курсе высшей математики технического вуза. Изложение по предлагаемой схеме может быть рекомендовано при работе со студентами, обучающимися по направлениям «Электромеханика» и «Автоматика и компьютерно-интегрированные технологии», при условии предварительного овладения темой «Комплексные числа» (включающей раздел «Комплексная экспонента»).

Основной задачей темы является задача отыскания частного решения y^* уравнения вида

$$y''+py'+qy=P_n(x)\cdot e^{\mu x}, \tag{1}$$

где p, q и μ – числа (вообще говоря, комплексные), а $P_n(x)$ полином n-й степени (n=0; 1; 2; …) с, вообще говоря, комплексными коэффициентами.

На первом этапе изложения рассматривается уравнение с полиномом в правой части (μ=0):

$$y''+py'+qy=P_n. \tag{2}$$

Нетрудно показать, что в этом случае частное решение можно отыскать в виде полинома, причем:

а) если $q\neq 0$, то $y^*=Q_n(x)$;

б) если $p\neq 0$, $q=0$, то $y^*=xQ_n(x)$;

в) если $p=q=0$, то $y^*=x^2Q_n(x)$.

Действительно, пусть $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ ($a_n\neq 0$). В случае а) ищем y^* в виде $y^*=\sum\limits_{k=0}^{n} b_k b_k x^k$. С учетом (2):

$$\begin{cases} qb_n = a_n; \\ pnb_n + qb_{n-1} = a_{n-1}; \\ n(n-1)b_n + p(n-1)b_{n-1} + qb_{n-2} = a_{n-2}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ 2b_2 + pb_1 + qb_0 = a_0. \end{cases}$$

Полученная система, очевидно, однозначно разрешима.

В случае б) ищем y^* в виде

$$y^* = x \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k x^k .$$

Получаем систему

$$\begin{cases} p(n=1)b_n = a_n; \\ n(n-1)b_n + pn\ b_{n-1} = a_{n-1}; \\ 2b_1 + pb_0 = a_0. \end{cases}$$

Эта система также однозначно разрешима.

В случае в) уравнение (2) принимает вид $y''=P_n(x)$. Очевидно, y^* можно выбрать в виде

$$y^* = x^2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)\left(k+2\right)} \cdot x^k .$$

На следующем этапе рассматривается уравнение (1) с $\mu \neq 0$. Частное решение ищем в виде

$$y^* = Q(x) \cdot e^{\mu x}. \qquad (3)$$

Подставляя выражение (3) в (1), получаем уравнение

$$Q'' + (2\mu + p)Q' + (\mu^2 + p\mu + q)Q = P_n(x). \qquad (4)$$

Полученное уравнение имеет ту же форму, что и (2), т.е. задача сводится к предыдущей.

Особенно просто найти y^* в том случае, когда $P_n(x)$=const, причем μ не является характеристическим корнем соответствующего однородного уравнения, т.е. $\mu^2 + p\mu + q \neq 0$. Уравнение (1) при этом имеем форму

$$y'' + py' + qy = Ae^{\mu x},$$

а y^* находится по формуле

$$y^* = \frac{Ae^{\mu x}}{\mu^2 + p\mu + q}.$$

На последнем этапе отдельно рассматривается уравнение

$$y'' + py' + qy = P_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot S(\beta x),$$

где p; q; α; β – действительные числа;

$P_n(x)$ – полином n-й степени с действительными коэффициентами;

$S(x)$ – одна из двух функций $\sin x$ или $\cos x$.

В этом случае мы переходим к вспомогательному уравнению

$$\tilde{y}'' + p\tilde{y}' + q\tilde{y} = P_n(x) \cdot e^{(\alpha + i\beta)x}, \qquad (5)$$

которое имеет вид (1), т.е. заменой (3) может быть сведено к форме (4).

Частное решение y^* исходного уравнения находится в виде

$$y^* = \operatorname{Re} \tilde{y}^*,$$

если $S(x)=\cos x$, и $y^* = \operatorname{Im} \tilde{y}^*$,

если $S(x)=\sin x$, где $\tilde{y}^*$ – частное решение уравнения (5).

Пример 1. Найдем частное решение уравнения

$$y''-4y'+4y=3x^2e^{2x}.$$

Здесь $p=-4$; $q=4$; $P_n(x)=3x^2$; $\mu=2$.

Уравнение (4) имеет вид

$$Q''=3x^2.$$

$$Q=\frac{x^4\cdot e^{2x}}{4}.$$

$$y^*=\frac{x^4\cdot e^{2x}}{4}.$$

Пример 2. Найдем по указанной схеме частное решение уравнения.

$$y''+2y'+5y=x\cos x.$$

Здесь $p=2$; $q=5$; $P_n(x)=x$; $\alpha=0$; $\beta=1$; $S(x)=\cos x$. Вспомогательное уравнение имеет вид

$$\tilde{y}''+2\tilde{y}'+5\tilde{y}=xe^{ix}.$$

Здесь $\mu=i$. Уравнение (4) имеет вид

$$Q''+(2+2i)Q'+(4+2i)Q=x$$

$$Q=Ax+B$$

$$(2+2i)A+(4+2i)(Ax+B)=x$$

$$\begin{cases}(4+2i)A=1;\\(2+2i)A+(4+2i)B=0.\end{cases}$$

$$A=\frac{1}{4+2i}=\frac{2-i}{10};$$

$$B=-\frac{(1+i)A}{2+i}=\frac{-7+i}{50}$$

$$Q=\frac{(10-5i)x-7+i}{50}.$$

$$\tilde{y}^*=\frac{((10-5i)x-7+i)\cdot e^{ix}}{50}.$$

$$y^*=\operatorname{Re}\tilde{y}^*.$$

$$y^*=\frac{(10x-7)\cos x+(5x-1)\sin x}{50}.$$

Таким образом, предложена методика изложения темы «Уравнения со специальной правой частью». Данный способ изложения по мнению авторов, удобнее, чем стандартный. Изложение по этому способу опробовано и эффективно в том случае, если студенты хорошо освоили действия с комплексными числами.

ЙМОВІРНОСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ: МЕЖІ ЗАСТОСУВАННЯ

Л.І. Сорока
м. Луцьк, Волинський державний університет імені Лесі Українки
andrewsorry@mail.ru

Сучасна теорія ймовірностей ділиться на математичну і прикладну. До першої примикає математична статистика, друга пов’язана з так званою “прикладною статистикою”.

На математичному факультеті вивчається математична теорія ймовірностей. Вона користується складним математичним апаратом і займається вивченням наслідків з аксіоматики Колмогорова. Цей напрям глибоко розвинений і продовжує розвиватись. Проте спроба його застосування в прикладних задачах часто викликає труднощі і помилки. Хоча студентам математичних спеціальностей конкретний матеріал програмою навчання взагалі не передбачений, вважаємо за потрібне звернути на це увагу.

Раніше підручники з теорії ймовірностей були повні реальних прикладів статистичних даних; в новітніх виданнях такі приклади зникають. Тому, крім підручників, рекомендуємо студентам книгу [4] і деякі нариси з історії предмета.

Першу частину своєї знаменитої праці “Аналітична теорія ймовірностей”, яка називається “Філософський нарис”, Лаплас починає словами: “… я викладу тут, не звертаючись за допомогою до математичного аналізу, принципи і загальні результати теорії ймовірностей … застосовуючи їх до найбільш важливих життєвих питань, які значною мірою є лише задачами теорії ймовірностей”. Деякі з цих застосувань не викликають заперечення, наприклад, в демографії. Але застосування ймовірнісних методів в політиці, в судовій практиці носять сумнівний характер і в наш час відкинуті наукою. В сучасній теорії ймовірностей склались уявлення про області застосування науки більш досконалі, ніж в часи Лапласа, але, на жаль, межі їх не такі вже чіткі.

Виклад теоретичного матеріалу в діючих підручниках починається з поняття стохастичного експерименту, що дається описово; з цим поняттям пов’язується поняття простору елементарних подій. На нашу думку, слід більше звернути увагу студентів (це може бути коротке повідомлення викладача, самостійне опрацювання вказаної літератури) на статистичну стійкість експериментів. Часто в науці і техніці повної стійкості результатів експерименту добитися не вдається, але виникає явище статистичної стійкості. Статистична стійкість (статистична однорідність) характеризується стійкістю частот. Деякі вимоги статистичної стійкості сформульовані Р. Мізесом, хоча на них немає вичерпної відповіді. Але в багатьох випадках статистична однорідність досить вірогідна. Саме ці випадки і становлять за сучасними мірками область наукового застосування теорії ймовірностей. Виникає бажання застосувати теорію ймовірностей і в інших випадках: коли результати експерименту невизначені, але не можна говорити про статистичну стійкість. Такі застосування не наукові, але їх не можна ігнорувати. Інколи, не дивлячись на нібито логічну безпідставність, ймовірнісне дослідження може дати практично незаперечні результати. Ознайомлення студентів з таким конкретним прикладом з генетики можливе, наприклад, при вивченні критерію згоди Колмогорова [2]. Більшість задач з теорії ймовірностей формулюються не в термінах простору елементарних подій, а звичайною мовою. Саме на задачах студенти знайомляться з тими конкретними ситуаціями, де можна застосовувати теорію ймовірностей. Потрібно, взагалі кажучи, перекласти умову задачі з однієї мови на іншу. Розв'язання задачі з теорії ймовірностей чітко поділяється на дві частини:

1) вибір математичної моделі явища чи експерименту;

2) обчислення в рамках математичної моделі.

Перша частина – вибір математичної моделі – без сумніву є трудніша. При вивченні таких понять, як класична ймовірність, умовна ймовірність, незалежність подій, випадкової величини акцентуємо увагу саме на виборі математичної моделі. Наприклад, модель випробувань Бернуллі часто застосовують для оцінки якості продукції (приймальний контроль), проте це можна робити лише тоді, коли виробництво добре налагоджено.

Розглянемо ще один аспект проблеми. В теорії ймовірностей є визначні теореми, які відносяться до граничних: Муавра-Лапласа, Пуассона, центральна гранична теорема. Ці теореми широко застосовуються на практиці для наближених обчислень ймовірностей. Вже їх автори застосовували свої відкриття на всі випадки життя.

Студентам чітко визначаються умови, коли застосовуються ті чи інші наближені формули, які випливають з граничних теорем. Задачі такого змісту із збірників можна доповнити з пізнавальною метою прикладами з інших джерел. Наприклад, великий набір задач на застосування формули $P\{\mu = m\} \approx \frac{\lambda^m}{m!}\ell^{-\lambda}$ (закон Пуассона) міститься в книзі Феллера [4].

При дослідженні реальних явищ вчені часто намагаються використати ЦГТ, вважаючи, що результати спостережень мають нормальний розподіл. Якщо ж ймовірності близькі до нуля, то застосування нормального наближення може дати велику відносну похибку, при цьому абсолютна похибка згідно ЦГТ буде малою. Обґрунтовуємо цей факт студентам.

При вивченні математичної статистики варто зазначити, що на практиці по одній вибірці не можна зробити висновок про властивості генеральної сукупності. Але якщо є декілька вибірок, то ситуація інша. Зокрема, можна перевірити точкові чи інтервальні оцінки параметрів, обчислені по одній вибірці. Відкидаючи статистичну гіпотезу, ми повинні знову її перевірити по нових статистичних даних. Модель, яка будується на невеликій кількості статистичної інформації, може бути непридатна для описання реальних явищ.

Підсумовуючи, відмітимо, що ймовірносно-статистичні методи в багатьох галузях дійсно дають хороші результати, але варто не переоцінювати їх практичні можливості. Реальні застосування теорії ймовірностей носять конкретний характер і вимагають особливої обережності.

Література:

1. Коваленко И.Н., Гнеденко Б.В. Теория вероятностей. – К.: Вища школа, 1990. – 324 с.

2. Колмогоров А.Н. Об одном подтверждении законов Менделя. // Доклады АН СССР. – 1940. – Т. 27, №1. – С. 38-42.

3. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – М.: Мир, 1990. – 240 с.

4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. – М.: Мир, 1984. – 528 с.

ЕЛЕМЕНТИ КОНТРОЛЮ ТА КОРЕКЦІЇ ПРИ ВИВЧЕННІ СТОХАСТИКИ

Т.М. Задорожня
м. Ірпінь, Національна академія державної податкової служби України

Реформування освіти в Україні взагалі і математичної зокрема пов’язане із необхідністю вирішення багатьох проблем. Серед основних – створення особистісно орієнтованої методичної системи навчання, обов’язковим компонентом якої є контроль знань, умінь та навичок.

В середніх навчальних закладах освіти об’єктом дидактичного контролю є виявлення рівня навчальних досягнень учнів у засвоєнні програмного матеріалу, передбаченого державним стандартом зі спеціальності, та формування вмінь і навичок, досвіду, творчої діяльності та емоційно цілісних ставлень до навколишньої дійсності з урахуванням професійного спрямування.

Під поняттям “контроль” розуміють виявлення, вимір і оцінювання навчально-пізнавальної діяльності тих, хто навчається.

За місцем у навчальному процесі розрізняють попередній, поточний, періодичний, підсумковий види контролю.

Найдієвішим у практичній роботі викладача є застосування різних видів контролю.

На підставі аналізу матеріалів таких авторів, як Я.С. Бродський, В.П. Безпалько, І.Е. Булах, К. Інгенкамп, З.І. Калмикова, Л.П. Одерій, О.Л. Павлов, та матеріалів спостережень за роботою викладачів, ми дійшли висновку, що найбільш виразно недоліки в організації навчально-виховного процесу при вивченні стохастики проявляються у формах і методах організації контролю й оцінювання знань та вмінь студентів. Саме тут чітко виявляються суперечності між традиційною методичною системою та новими цілями навчання в умовах профільної освіти. Усунути негативні явища формалізму можна лише за умови здійснення контролю на індивідуальному для кожного рівні засвоєння стохастичних знань. Саме в цьому напрямі ведуться активні пошуки в педагогічній науці і практиці. В психологічному плані провідною тут виступає ідея значного розвитку виховної функції процесів контролю, корекції та оцінювання знань студентів, виявлення факторів, що активно впливають на формування позитивних мотивів та стійких інтересів до навчання, які можуть бути засобом спрямування навчальної діяльності студента з боку викладача та керування нею.

Виявляється, що суттєвим стимулюючим фактором в студентів виступає розвинене почуття відповідальності – перед собою та студентським колективом. У свою чергу виховання цієї важливої риси особистості безпосередньо пов’язане з діями контролю та взаємоконтролю, самооцінювання та взаємооцінювання студентами результатів своєї навчальної праці. Цікавим є висновок психологів про те, що, по-перше, відповідальність перед будь-ким за свою роботу передбачає обов'язковий контроль та оцінювання цієї роботи і, по-друге, формування в студентів дій контролю та оцінювання відбувається успішніше в умовах кооперації з ровесниками, ніж у процесі спілкування з дорослими. Отже, процес навчання потрібно організувати так, щоб реалізувались обидві форми спілкування – студентів з викладачем і студентів між собою.

Частково функції контролю, корекції та оцінювання знань і вмінь доцільно перекласти з викладача на студентський колектив, а студентів потрібно навчити методам контролю й оцінювання, керувати цими процесами і в окремих випадках коригувати діяльність студентів, знайомити з обов'язковими результатами навчання, з критеріями, за допомогою яких можна судити про якість результатів навчання. Якщо правильно організовані процеси контролю, само- та взаємоконтролю, то створюються умови для постійного співвідношення власної оцінки своєї діяльності з оцінками викладача та товаришів по навчанню, самооцінка стає адекватною результатам навчання. До того ж у студента формується почуття відповідальності перед студентським колективом, перед самим собою.

Таким чином, розвиваючи виховну функцію контролю, ми виховуємо в студента почуття відповідальності. При цьому важливо дотримуватись педагогічної формули А.С. Макаренка – "якомога більше вимогливості до людини і якомога більше поваги до неї". В цілому навчально-виховний процес повинен бути психологічно забезпеченим, тобто емоційне ставлення до нього студента має бути позитивним. Ми поділяємо думку психологів про те, що емоційні та мотиваційні фактори взаємопов'язані і впливають один на одного. Тому для нормального психологічного забезпечення процесів контролю, корекції та оцінювання знань і умінь студентів на заняттях математики надзвичайно важливо, щоб у групі не було студентів з відчуттям емоційного дискомфорту.

Враховуючи важливість усіх цих факторів, необхідно організувати систему навчання так, щоб студент не відчував тиску оцінок, за бажання міг їх покращити. А саме: щотижнево викладачем проводяться заняття-консультації, які не є обов'язковими для всіх. На таких заняттях студент в індивідуальному порядку може поставити незрозумілі для нього питання і отримати вичерпні відповіді. Тут також можна порозв'язувати важкі на цей час практичні завдання чи задачі за допомогою викладача або з використанням так званих карток корекції, які розроблені до кожної теми. Наведемо приклади завдань для корекції.

Тема: Повторні незалежні випробування

<u>Картка №1.</u> Митний пост дає статистичну оцінку того, що 30% усіх осіб, які повертаються з-за кордону, не декларують весь товар, який оподатковується. Якщо випадково відібрати 5 осіб, то яка ймовірність того, що 3 із них не задекларували весь товар?

Теоретичний матеріал

Під схемою Бернуллі розуміємо систему повторних випробувань, що проводяться в однакових умовах, результатом яких є незалежні події з однаковими ймовірностями. Ймовірність того, що в серії з n незалежних випробувань подія A з'явиться рівно m разів, за умови, що в кожному випробуванні подія A з'являється з імовірністю p й не з'являється з імовірністю $q=1-p$, обчислюється за формулою:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (1)$$

де $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, формула (1) називається формулою Бернуллі.

Картка №2.

Вказівки:

1. Проаналізуйте систему подій, що розглядається, відповівши на запитання:
   - чи в однакових умовах відбуваються події?
   - які події за характером – залежні чи незалежні?
   - "декларую товар повністю" і "не повністю декларую товар" – які ці події?
   - якою є ймовірність подій, що розглядаються?
2. Зробіть висновок про події, що розглядаються.
3. Введіть позначення події та знайдіть їх імовірність.
4. Скористайтеся формулою Бернуллі для знаходження розв'язку задачі.

Картка №3.

Розв'язання: В даній задачі розглядається один тип перевірок, а саме: перевірки на митниці, тому можна вважати, що випробування проходять в однакових умовах. Події "товар задекларовано повністю" і "товар задекларовано не повністю" є незалежними, оскільки рішення про декларування приймається кожною особою окремо. За статистичними даними, ймовірності подій однакові. Тому вважаємо, що розглянуті випробування відбуваються за схемою Бернуллі, отже для підрахунку ймовірностей складних подій можна використовувати формулу Бернуллі.

Нехай події A відповідає, що навмання вибрана особа не задекларувала весь товар, $P(A)=0,3$. При цьому $n=5$, $m=3$, $p=0,3$.

Студентові не обов'язково використовувати всі три картки, інколи достатньо першої.

Якщо ж всі питання теоретичного і практичного характеру студент з'ясував, то він може попрацювати ще й над підвищенням свого рівня з картками індивідуальних завдань.

Індивідуальні завдання

1. Оптова база обслуговує 8 магазинів. Від кожного може надійти вимога на обслуговування наступного дня з імовірністю 0,4. Знайти ймовірність, що наступного дня надійдуть вимоги від 5-ти магазинів. Обчислити

найвірогіднішу кількість вимог кожного дня та ймовірність цієї кількості вимог.

2. Податкова інспекція одного з районів міста визначила, що 50% усіх особистих декларацій про прибуток містять принаймні одну помилку. Якщо випадково відібрати 10 декларацій, то яка ймовірність того, що шість із них будуть містити принаймні одну помилку.

3. Банк видає кредитні картки VISA. Було встановлено, що 45% усіх рахунків оплачуються повністю за їх допомогою. З попереднього року вибрали навмання 10 рахунків. Яка ймовірність, що половина з них оплачені за допомогою карток VISA? Не більше половини?

На заняттях-консультаціях студент може також перескласти певний блок матеріалу і тим самим покращити свої результати. Лише при перескладанні відповіді студента оцінюються, всі інші види робіт студента на заняттях-консультаціях не оцінюються за звичайною шкалою.

Можливість покращити свої результати активізує, стимулює навчальну діяльність студента, позитивно впливає на його поведінку.

Використовуючи різні методи контролю (усне, письмове, комбіноване опитування), ми допомагаємо студентам правильно організувати роботу, навчатися самостійно і постійно.

Нами практикується ціла система індивідуальних карток із завданнями різних типів і рівнів складності:

1) на відтворення раніше засвоєного матеріалу й застосування знань до розв’язування задач відомих типів;

2) на перетворення даного матеріалу;

3) на мислення або зовнішньо виражене конструювання об’єктів, аналогічних вивченим;

4) на самостійне складання задач і формулювання питань на пройдений матеріал.

При цьому бажано дотримуватися таких умов:

– завдання повинні бути спрямовані не лише на з’ясування результатів вивчення теми, але й на простеження динаміки помилок, їх рецидивів, нових досягнень кожного студента;

– вправи на 5–10 хв. мають стати звичними, не викликати неспокою та напруження студента.

Аналіз самостійно виконаних робіт не обов’язково щоразу пов’язувати з моментом оцінювання. Не побоюючись одержати негативну оцінку, студенти активніше включаються в обговорення проблемних питань. Саме в процесі такого обговорення викладач може одержати інформацію про правильні чи неправильні розумові дії студентів та скоригувати їх, що досить важливо у вивченні стохастики.

Ще одним із різновидів контролю є підсумковий контроль, який використовується нами після вивчення окремих тем стохастики, а в кінці семестру – рубіжний (тематичний, модульний) контроль знань, умінь, навичок.

Він проводиться у вигляді письмової роботи, яка може містити як теоретичні, так і практичні завдання.

Після закінчення курсу математики обов’язковим для всіх студентів є написання комплексної контрольної роботи, до якої входять також завдання із стохастики.

Гармонійне поєднання всіх, і, в першу чергу, добре відомих і відпрацьованих методів контролю може забезпечити об’єктивність контрольно-оцінювальної діяльності, в ході якої не тільки викладач, а насамперед сам студент перевіряє досягнення навчальних цілей.

Література:

1. Андрущук А.О. Рейтингова технологія оцінки знань в навчально-виховних закладах // Педагогіка і психологія. – 1996. – №3.
2. Бродський Я.С., Павлов О.Л. Діагностика математичної підготовки // Математика в шк. – 1998. – № 4. – С. 15–19.
3. Булах І.Е. Діагностика рівня знань та різних методів вимірювання // Нові технології навчання. – 1995.
4. Інгенкамп К. Педагогічна діагностика / Пер. з нім. – К., 1991.
5. Калмикова З.І. Проблеми діагностики розумової діяльності учнів. – К.: 1975. – 207 с.
6. Одерій Л.П. Основи системи контролю якості навчання. – К., 1995.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ЗАДАЧИ НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ ТЭРНЕРА

И.А. Астионенко, А.Н. Хомченко
г. Херсон, Херсонский национальный технический университет
mkmm@kstu.edu.ua

Постановка проблемы. По терминологии метода конечных элементов (МКЭ) треугольник Тэрнера – это произвольно ориентированный в плоскости треугольный элемент (двумерный симплекс) с тремя расчетными узлами в вершинах и соответствующим базисом из трех линейных функций. Такие треугольники применяются для кусочно-линейного представления скалярных и векторных полей. Ключевую роль здесь играют барицентрические координаты симплекса, так как именно они образуют базис. Проблема заключается в изучении вероятностных свойств базисных функций вообще и барицентрических координат в частности. Многочисленные эксперименты со случайными блужданиями (и случайным стартом) в треугольнике Тэрнера позволяют утверждать, что конечно-элементный интерполянт совпадает с монте-карловской оценкой значения полевой функции в точке старта. Как и следовало ожидать, эмпирические данные подтверждают закон больших чисел об устойчивости относительных частот поглощения частиц в углах треугольника, что оправдывает замену апостериорных переходных вероятностей априорными в схеме блужданий по симплексам [1]. Однако сформулированные в последние годы новые рабочие гипотезы относительно других вероятностных свойств кусочно-планарного базиса пока не нашли теоретического подтверждения. Некоторые доказательства приводятся ниже.

Анализ предшествующих публикаций и цели статьи. Треугольник Тэрнера появился в 1956 году как естественное обобщение треугольника Куранта – автора первой версии [2] метода конечных элементов (МКЭ). По мнению Стренга и Фикса [3], кусочно-линейная интерполяция функции двух аргументов является излюбленной темой в прикладной математике. Она требует знания алгебры лишь в рамках средней школы, а результаты её очень важны – редкая и счастливая комбинация. Простота пространства Тэрнера связана с тем, что внутри каждого треугольника три коэффициента функции

$$\varphi(x, y)=a+bx+cy \tag{1}$$

однозначно определяются значениями φ в трех вершинах. Подставляя поочередно эти значения и координаты соответствующих вершин треугольника в (1), получим

$$\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix} \tag{2}$$

Легко заметить, что определитель матрицы коэффициентов в (2) равен удвоенной площади треугольника. Подстановка решения СЛАУ (2) в уравнение (1) дает

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Комбинируя x, y и элементы обратной матрицы в новые функции положения, приведем (3) к форме Лагранжа

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i(x, y) \cdot \varphi_i \ . \tag{4}$$

Здесь

$$\xi_1(x, y) = \frac{1}{2A}\left((x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3) \cdot x + (x_3 - x_2) \cdot y\right) \tag{5}$$

барицентрическая координата текущей точки (x, y), отвечающая узлу 1, A – площадь треугольника. Функции $\xi_2(x, y)$ и $\xi_3(x, y)$ получаются из (5) циклической перестановкой индексов. С помощью (5) легко убедиться, что функции $\xi_i(x, y)$ $\left(i = \overline{1,3}\right)$ образуют базис и обладают всеми свойствами вероятностей полной группы случайных событий [4]:

$$0 \le \xi_i \le 1, \ \sum_{i=1}^{3} \xi_i = 1 \ , \ \xi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \tag{6}$$

где δ_{ij} − символ Кронекера.

Свойства (6) позволяют говорить о вероятностно-геометрическом дуализме базиса кусочно-линейной интерполяции. С одной стороны, $\xi_i(x, y)$ − это вероятность перехода частицы из текущей точки (x, y) в узел i, с другой стороны, это аппликата в (x, y) поверхности (плоскости), нависающей над треугольником.

Цель статьи – продолжить изучение вероятностных свойств $\xi_i(x, y)$. Это наименее изученный аспект барицентрического исчисления, развитие которого началось ещё в 1827 г. (Мёбиус). О других свойствах и многочисленных применениях барицентрических координат можно прочитать в [5].

Основная часть. Здесь мы изложим некоторые результаты обобщений знаменитой задачи об игле Бюффона [6], положившей начало развитию нового направления в теории вероятностей. Речь пойдет о случайных вбрасываниях (вложениях) геометрических объектов (отрезка, треугольника, квадрата) в основной треугольник Тэрнера (рис. 1).

Вложенным n-угольником будем называть выпуклый n-угольник, все вершины которого лежат внутри основного треугольника, за исключением, быть может, некоторых, лежащих на границе треугольника. В качестве примера мы рассмотрим квадрат с вершинами M_k $(k = \overline{1,4})$ и сформулируем следующее

Утверждение. Математическое ожидание переходной вероятности из вершины вложенного квадрата в вершину основного треугольника равно вероятности перехода из барицентра вложенного квадрата в указанную вершину основного треугольника.

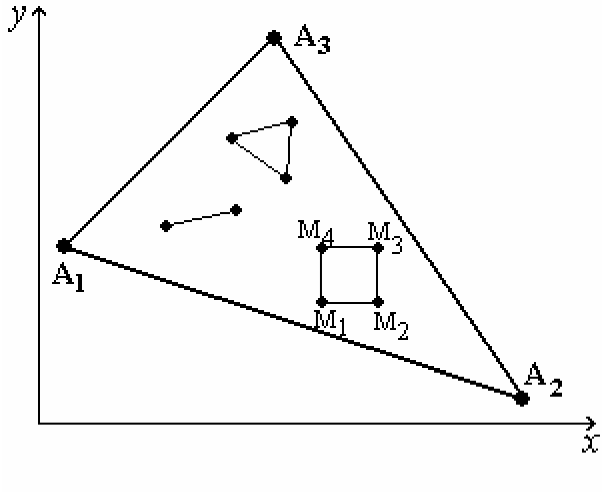


Рис. 1. Случайные вложения фигур в треугольный КЭ

Чем обусловлен случайный характер переходной вероятности из M_k в A_i? Это поворот квадрата на произвольный угол α около барицентра, равномерное растяжение или сжатие квадрата к барицентру.

Доказательство. Формулу (5) удобно представить в виде отношения определителей третьего порядка

$$\xi_1(x,y)=\frac{\Delta_1}{\Delta}\text{, где } \Delta=\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix},\ \Delta_1=\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}.$$

Для узла i имеем $\xi_i(x,y)=\frac{\Delta_i}{\Delta}$, где определитель Δ_i получается из Δ заменой строки i строкой с координатами текущей точки (x, y). Напомним, что $\xi_i(x, y)$ определяет вероятность перехода из точки $M(x, y)$ в вершину A_i (i=1, 2, 3). Вычислим среднее значение (математическое ожидание) переходной вероятности из M_k в A_i:

$$m=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\xi_i(M_k)=\frac{1}{4\Delta}\sum_{k=1}^{4}\Delta_i(M_k)=\frac{\Delta_i(M_0)}{\Delta}=\xi_i(M_0),$$

где $x_0=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}x_k$, $y_0=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}y_k$, то есть M_0 − барицентр вложенного квадрата.

Следствие. Математическое ожидание расстояния от вершины M_k вложенного квадрата до какой-либо стороны основного треугольника равно расстоянию от барицентра вложенного квадрата до указанной стороны основного треугольника.

Аналогичные утверждения справедливы для вложенного отрезка (блуждания с двумя стартами) и треугольника (блуждания с тремя стартами).

Выводы. В работе построено вероятностное доказательство теоремы Кёбе-Привалова о гармонической функции. Гармоничность по Лапласу очевидна, поскольку $\xi_i(x, y)$ − линейная функция. В настоящее время продолжаются исследования вероятностных свойств базиса билинейной интерполяции. Предстоит найти удовлетворительное объяснение некоторым парадоксальным результатам, обнаруженным экспериментально в задачах о случайных вложениях фигур в мультиплекс.

Литература:

1. Хомченко А.Н. О базисных функциях МКЭ для уравнений в частных производных // III Республиканский симпозиум по дифференциальным и интегральным уравнениям: Тезисы докладов. – Одесса: ОГУ, 1982. – С. 257–258.
2. Courant R.L. Variational method for the solution of problems of equilibrium and vibration. Bulletin of the American Mathematical Society, 49, 1943. – P. 47-64.
3. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
4. Хомченко А.Н. Случайные блуждания и конечно-элементные аппроксимации температурных полей // Математические модели, методы решения и оптимальное проектирование гибких пластин и оболочек: Межвузовский сб. научн. тр. – Саратов: СГТУ, 1988. – С. 80-82.
5. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
6. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. – М.: Наука, 1972. – 192 с.

ИСПЫТАНИЯ БЕРНУЛЛИ
КАК ПРОСТЕЙШИЙ СЛУЧАЙ РЕКУРРЕНТНЫХ СОБЫТИЙ

К.И. Кабанов, Т.И. Лукащук
г. Харьков, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
kkabanov@ukr.net

В данной работе обсуждается вопрос методики преподавания введения в теорию случайных процессов, которые являются основным инструментом в исследованиях, связанных, в частности, с транспортными потоками. Ввиду того, что изучение этого раздела вызывает существенные затруднения у студентов университетов технических специальностей, основной акцент мы предлагаем делать на понятии рекуррентных событий. Как правило, этот раздел не входят в основной курс теории вероятностей, но рассмотрение достаточного количества примеров, которые описывают различные ситуации, дает достаточно полное представление об объекте исследования.

Отметим, что теория рекуррентных событий имеет самостоятельный интерес, объясняющийся тем, что часто такие события возникают в связи с различными последовательностями случайных величин. Сложность законов, которым подчиняется последовательность случайных величин, может сделать невозможным ее исчерпывающий анализ, однако существование повторяющихся событий всегда позволяет указать характерные особенности последовательности, доказать существование некоторых пределов и т.п. Такой подход способствует упрощению и стандартизации многих исследований.

В общем случае рассматриваются наборы исходов, связанные с серией испытаний. В простейшем частном случае серию испытаний Бернулли. Для описания некоторых числовых характеристик такой последовательности, в частности среднего времени ожидания определенных комбинаций исходов, удобным является следующий метод. Рассмотрим последовательность исходов, как рекуррентную последовательность, в том смысле, что последовательность испытаний, следующих за появлением некоторого события, образуют копию всей последовательности.

Продемонстрируем указанный подход на наиболее простом примере, связанном с серией бросаний правильной монеты. Вычислим среднее число бросаний, до появления комбинации из двух решек, идущих подряд.

Следует обратить особое внимание на то, что методы, использующиеся при решении этой задачи (задачи с дискретным временем), являются родственными задачам с непрерывным параметром времени, но обладают намного большей простотой и наглядностью. У большинства подобных задач существуют вполне элементарные решения, требующие знания лишь основных понятий курса теории вероятностей.

Введем следующие обозначения. Пусть X – случайная величина, равная номеру шага, на котором впервые встречается комбинация **РР**, и рассмотрим два события **О** и **Р**, которые заключаются в выпадении на первом шаге орла и выпадении на первом шаге решки соответственно. Очевидно, что вероятности обоих этих событий равны $\frac{1}{2}$. Пусть $M(X)$ обозначают математическое ожидание числа бросаний до первого появления комбинации **РР**. Пусть M_o и M_p среднее число бросаний до первого появления **РР** при условии, что при первом бросании выпал орел или решка соответственно. Очевидно, имеем $M(X)=\frac{1}{2}\cdot M_o+\frac{1}{2}\cdot M_p$. Вычислим математические ожидания в правой части. При выпадении на первом месте **О**, очевидно, имеем $M_o=1+M(X)$. При выпадении на первом месте **Р**, на втором шаге с вероятностью $\frac{1}{2}$ появляется **Р** и $X=2$, либо с вероятностью $\frac{1}{2}$ появляется **О,** и получаем $M_p=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\left(1+M_o\right)$. С учетом предыдущей формулы $M_p=2+\frac{1}{2}\cdot M(X)$. Подставляя эти значения, получаем соотношение $M(X)=\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\cdot M(X)$, откуда $M=6$.

Далее, проведем аналогичные рассуждения для случайной величины Y, которая равна номеру шага, на котором впервые встречается комбинация **РО.** В прежних обозначениях, $M(Y)=\frac{1}{2}\cdot M_o+\frac{1}{2}\cdot M_p$, где M_o удовлетворяет уравнению $M_o=1+M(X)$, а M_p находим из равенства $M_p=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\left(1+M_p\right)$, откуда $M_p=3$. Подставляя полученные выражения, имеем $M(Y)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+M(Y)\right)+\frac{1}{2}\cdot 3$. Вопреки ожиданиям, получаем результат $M(Y)=4$, который показывает, что имеется существенное различие между различными сериями орлов и решек одинаковой длины.

Литература:

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984.
2. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – М.: Мир, 1990.
3. Li Shou-Yen R. A martingale approach to the study of occurrence of sequence patterns in repeated experiments. – Annals of Probability, 8, 1980.

РІВНЯННЯ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ЙМОВІРНОСТІ СТАНІВ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

В.М. Серебреніков[1], Н.І. Марченко[2]
[1] м. Кривий Ріг, Криворізький технічний університет
[2] м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Все життя людини пов'язано з випадковими процесами. Промислові проекти, військові дії, соціальні хвилювання і багато інших процесів відбуваються з вини безлічі причин, врахувати які людина не в змозі (частково через їх кількість, частково через їх незнання). Проте люди навчилися оцінювати ймовірність процесів загалом, особливо не вдаючись в ті, що породжують причини. Завдяки цьому стало можливим передбачити результат подій, виходячи з досвіду попередніх повторень з певною часткою математичних розрахунків. Чим більш точно людина намагалася науковим шляхом передбачити події, тим більше ускладнювалися розрахунки. На сьогоднішній день більшість процесів людина вже не в змозі вирішити власноруч, для цього використовуються ЕОМ або їх цілі комплекси, спеціально призначені для цих задач. Наприклад, метеорологічні центри прогнозу погоди не змогли б розраховувати результати своєї праці без ЕОМ. Але в той же час навіть тих обчислювальних потужностей, якими людина у наш час володіє, часто буває недостатньо (ефективність тих же метеорологічних центрів, на жаль, украй низька, щоб в більшості випадків вчасно попереджати людей про стихійні лиха, що насуваються). Прогрес візьме своє, ця межа теж буде досягнута, але з'являться нові задачі. Тому люди знов і знов прагнутимуть представити ці процеси як би із сторони, моделюючи їх на комп'ютерах і приносячи в світ нові ідеї.

На практиці значно частіше зустрічаються ситуації, коли переходи системи із стану в стан відбуваються не у фіксовані, а у випадкові моменти часу, які заздалегідь вказати неможливо – перехід може здійснитися, взагалі кажучи, у будь-який момент. Наприклад, вихід з ладу (відмова) будь-якого елемента апаратури може відбуватися у будь-який момент часу; закінчення ремонту (відновлення) цього елемента також може відбуватися в завчасно не зафіксований момент і т.д.

Для опису таких процесів у ряді випадків може бути з успіхом застосована схема марківського випадкового процесу з дискретними станами і безперервним часом, який називається безперервним ланцюгом Маркова.

Покажемо, як виражається ймовірність станів для такого процесу. Нехай маємо ряд дискретних станів: $S_1, S_2, \ldots, S_n$; перехід системи S із стану в стан може здійснюватися у будь-який момент часу.

Позначимо $p_i(t)$ – ймовірність того, що в момент t система S знаходиться в стані S_i (i=1, …, n). Очевидно, для будь-якого моменту t сума ймовірності станів дорівнює одиниці: $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1$, оскільки події, що полягають в тому, що у момент t система знаходиться в станах S_1, S_2, …, S_n, несумісні і утворюють повну групу [1].

Для того, щоб знайти ймовірність станів у будь-який момент часу t, необхідно знати характеристики процесу, аналогічні перехідній ймовірності для марківського ланцюга. У разі процесу з безперервним часом нам не доведеться задавати визначені, відмінні від нуля, перехідна ймовірність P_{ij}; ймовірність переходу системи із стану в стан точно в момент t_0 буде рівний нулю (так само як ймовірність будь-якого окремого значення безперервної випадкової величини). Замість перехідної ймовірності P_{ij} розглянемо поняття густини ймовірності переходу λ_{ij}.

Густина ймовірності переходу λ_{ij} границя відношення ймовірності переходу системи за час Δt із стану S_i, в стан S_j до довжини проміжку Δt.

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t},$$

де P_{ij} (Δt) – ймовірність того, що система, що знаходилася в момент t в стані S_i, за час Δt перейде з нього в стан S_j (густина ймовірності переходу визначається тільки для $i \neq j$. При малому Δt ймовірність переходу P_{ij} (Δt) з точністю до нескінченно малих вищих порядків рівна λ_{ij} (Δt).

$$P_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij}(\Delta t)$$

Якщо вся густина ймовірності переходу λ_{ij} не залежить від t (тобто від того, в який момент починається елементарна ділянка Δt), марковський процес називається однорідним; якщо ця густина є якимись функціями часу λ_{ij} (t), процес називається неоднорідним [2].

Знаючи розмічений граф станів, можна визначити ймовірність станів: $p_i(t)$ як функції часу. А саме, ця ймовірність задовольняє певного вигляду диференціальним рівнянням – так званим рівнянням Колмогорова. Розв’язуючи ці рівняння, ми отримаємо ймовірність. У лівій частині кожного рівняння стоїть похідна ймовірності стану, а права частина містить стільки членів, скільки стрілок пов’язано з даним станом. Якщо стрілка направлена із стану, відповідний член має знак «мінус»; якщо в стан – знак «плюс». Кожний член рівний добутку густини ймовірності переходу, відповідній даній стрілці, помноженій на ймовірність того стану, з якого виходить стрілка. Це правило складання диференціальних рівнянь для ймовірності станів є загальним і справедливо для будь-якого безперервного марківського ланцюга; за його допомогою можна механічно, без всіляких міркувань, записувати диференціальні рівняння для ймовірності станів безпосередньо по розміченому графу станів.

Запишемо систему диференціальних рівнянь Колмогорова в загальному вигляді для k станів:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dp_1}{dt} = -p_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum\limits_{j=1}^{m} p_j \lambda_j, \\
\dfrac{dp_2}{dt} = -p_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum\limits_{j=1}^{m} p_j \lambda_j, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\dfrac{dp_k}{dt} = -p_k \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum\limits_{j=1}^{m} p_j \lambda_j.
\end{cases},
$$

де $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$ – сума інтенсивностей вихідних потоків, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_j \lambda_j$ – сума добутків ймовірностей та інтенсивностей вихідних потоків [1].

Будь-який природний або штучно створений людиною процес може бути представлений і промодельований як потоки подій. Вивчення і подальше удосконалення їх людством дасть великі переваги в представленнях протікання процесів, які можна охарактеризувати лише теоретично. З першого погляду може здатися, що це нікому не потрібно, проте це помилкова думка. Дев’ята планета нашої сонячної системи Плутон, а також величезна безліч інших віддаленіших небесних тіл спочатку було відкрито теоретично, а потім було доведено їх існування. Знання про розташування раніше невідомих космічних тіл дає неймовірні переваги астрофізикам при розрахунку траєкторій польоту штучних супутників і зондів. Прогноз процесів польоту великих астероїдів і комет, які можуть загрожувати життю на Землі також можна моделювати потоками подій, дійсно, у такому разі вже не можна буде дискретизувати стани системи. Уявлення про процеси такого глобального масштабу і прагнення їх передбачити і управляти ними матимуть велике значення для всієї людської цивілізації.

Література:

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – Мн.: Вышейшая школа, 1977.
2. Солодовников А.С. Теория вероятности. – М.: Просвещение, 1983.

ВУЗІВСЬКА ЛЕКЦІЯ В УМОВАХ КРЕДИТНО-МОДУЛЬНОЇ СИСТЕМИ НАВЧАННЯ

Т.О. Горзій, В.Г. Моторіна, І.Т. Сіра
м. Харків, Харківський національний педагогічний університет імені Г.С. Сковороди

Цільові орієнтації особистісно-орієнтовної технології модульного навчання – засвоєння студентами системи знань і спеціальних умінь з конкретної навчальної теми; способів самостійної діяльності; розвиток пізнавальних і творчих здібностей. Принцип модульності передбачає організацію засвоєння навчального матеріалу у дискретно-неперевному полі за наперед заданою модульною програмою, яка складається з логічно завершених доз навчального матеріалу (змістовних модулів) із структурованим змістом кожного модуля та системою оцінювально-контрольних параметрів. Ця теорія базується на специфічних принципах, тісно зв'язаних з загально дидактичними. Вони виступають як первісні ідеї. Відмітимо наступні: виділення із змісту навчання відокремлених елементів; динамічності; дієвості; оперативності знань і їх системності; гнучкості; усвідомленої перспективи; різнобічності методичного консультування; паритетності.

Кредитно-модульна система навчання – це цілісний алгоритм повного засвоєння знань та умінь майбутніми фахівцями за структурно інтегрованими освітньо-професійними програмами в кредитних вимірах, свідомим самостійним вибором студентами навчальних дисциплін з метою прикладання максимальних інтелектуальних зусиль для їх вчасного засвоєння та модульними принципами з дотриманням психолого-педагогічних та кібернетичних вимог до навчального процесу в межах модуля, навчальної дисципліни, міждисциплінарного курсу і ступеня підготовки загалом.

Викладачі кафедри математики Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди другий рік працюють в умовах кредитно-модульної системи навчання. Створені модульні програми навчальних дисциплін, студентам пропонується пакет матеріалів, в який, крім усього іншого, входять і конспекти лекцій. Це вимагає від викладачів перебудови викладання лекційного матеріалу. На кожній лекції треба не тільки називати тему наступної, але і пропонувати студентам підготувати необхідний теоретичний матеріал. Розглянемо ці питання на прикладі лекції "Задачі на пряму і площину". Така тема є в відповідних модулях курсів "Вища математика" для економічних спеціальностей і "Аналітична геометрія" для фізико-математичних спеціальностей. На попередній лекції перед студентами були поставлені такі питання: згадати умови перпендикулярності і паралельності векторів; умову компланарності векторів; геометричний зміст коефіцієнтів в рівняннях площини і прямої; поняття точки, симетричної даній відносно прямої і площини, формули ділення відрізка навпіл.

I. Задача.

Розглянемо паралельно дві задачі.

Знайти точку A', симетричну точці $A(x_1, x_2, x_3)$ відносно площини

$$Ax+By+Cz+D=0$$

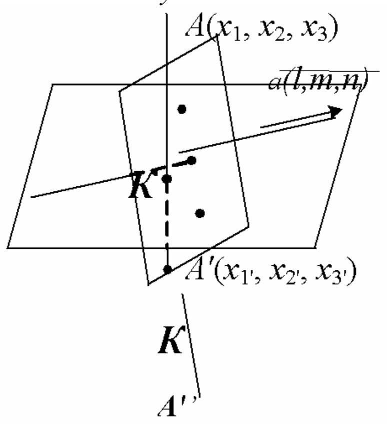


Рис. 1

Знайти точку A', симетричну точці $A(x_1, x_2, x_3)$ відносно прямої

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

Алгоритм розв'язку

1. Перевіримо, чи точка A не належить площини (прямій) – студенти записують умови самостійно

2. Знаходимо рівняння прямої, перпендикулярної даній площині, яка проходить через точку A

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}$$

2. Знаходимо рівняння площини, перпендикулярної даній прямій, яка проходить через точку A

$$l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0$$

3. Знаходимо точку K перетину прямої з площиною, розв'язуючи системи:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz=0 \\ \dfrac{x-x_1}{A}=\dfrac{y-y_1}{B}=\dfrac{z-z_1}{C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n} \\ l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0 \end{cases}$$

Зауваження 1. Точка K – проекція точки А на площину (пряму).

Зауваження 2. Для того, щоб знайти відстань точки від площини (прямої), треба знайти $|AK|$.

Завдання для самостійної роботи: розглянути нормальне рівняння площини і знаходження за його допомогою відстані точки до площини. Студентам пропонується один заліковий бал за вміння користуватися алгоритмом знаходження відстані точки до площини; два залікових бали за вміння обґрунтувати цей алгоритм.

4. Точку A' знаходимо за допомогою формул ділення відрізка навпіл.

Ставимо питання до студентів. Провести самоаналіз I задачі. Розглянуто задачі знаходження:

а) прямої, яка проходить через точку, перпендикулярно площині;

б) площини, яка проходить через точку, перпендикулярно до прямої;

в) проекції точки на площину(пряму);

г) відстані від точки до площини (прямої);

д) симетричної точки.

<u>II. Задача.</u>

Записати рівняння площини, якій належать прямі:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1};$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$$

Алгоритм розв’язку

1. Записати умову перетину двох прямих

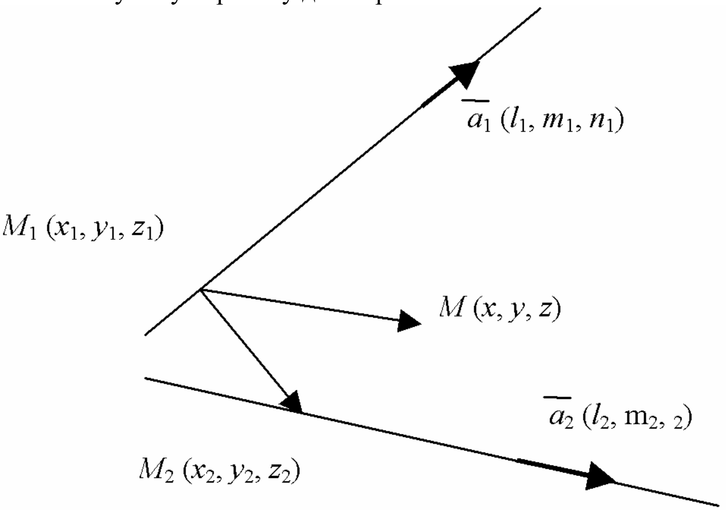


Рис. 2

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

2. Записати відповідне рівняння площини:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Завдання для самостійної роботи:

1. Записати рівняння площини, яка містить такі прямі:

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n};$$

$$\frac{x-x_2}{l} = \frac{y-y_2}{m} = \frac{y-y_2}{n}$$

Студент отримує 1(один) заліковий бал, якщо це завдання буде зроблено на лекції.

2. Записати рівняння спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих.

3. Знайти відстань між мимобіжними прямими.

Студент отримує по 2 (два) залікових бали за завдання 2-3, якщо це буде зроблено до наступної лекції.

<u>ІІІ. Задача.</u>

Знайти відстань від точки $A(x_1, x_2, x_3)$ до прямої $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ (другий спосіб).

Задача розв’язується студентами самостійно після виконання на дошці відповідного рисунку 3.

$$h = \frac{\left|\left[\overline{M_0 A} \cdot \overline{a}\right]\right|}{|\overline{a}|}.$$

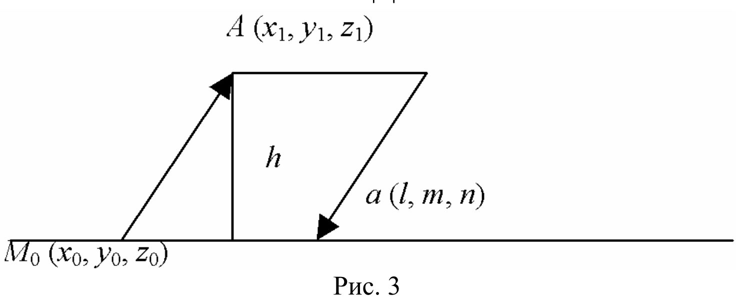


Рис. 3

Досвід роботи показує, що поки що лише третина студентів усвідомлює необхідність працювати так, щоб отримати достатню кількість залікових балів на протязі семестру, інші складають традиційні заліки та екзамени.

РЕАЛИЗАЦИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТНОГО ПОДХОДА ПРИ МОДУЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ ОРГАНИЗАЦИИ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

Е.Г. Евсеева
г. Донецк, Донецкий национальный технический университет
eeg@dise.donbass.com

Вхождение Украины в европейскую образовательное пространство требует модернизации системы образования. Содержание этой модернизации раскрывается в статье «Модернизация высшего образования Украины и Болонский процесс» (М.Ф. Степко, Я.Я. Болюбаш, К.М. Левкивский, Ю.В. Сурников. Образование Украины, № 60-61, 10.08.04): «... настало время перейти к новой философии образования, основанной на подготовке выпускников высших учебных заведений к конкретному рынку труда». Фактически это означает, что в процессе профессиональной подготовки выпускники высших учебных заведений должны приобрести необходимый уровень **профессиональной компетенции**. Существующее обучение, нацеленное на получение знаний (по словам Б.Ц. Бадмаева, знаниевое [3]), с этим справиться не может.

Построить эффективную систему обучения, обеспечивающую приобретение профессиональной компетенции студентом, возможно лишь в том случае, если обучение будет организовано в соответствии с принципами **деятельностного подхода к обучению** [1]:

- при проектировании и организации обучения *первичными являются заданная характером будущей специальности деятельность и действия*, составляющие эту деятельность;
- *конечной целью обучения является формирование способа действий*, обеспечивающих осуществление будущей профессиональной деятельности;
- содержание обучения составляет *заданная характером будущей профессиональной деятельности система действий* и только те знания, которые обеспечивают выполнение всех этих действий;
- в учебном процессе обучаемые должны осуществлять *учебную деятельность, которая моделирует будущую профессиональную деятельность*;
- *механизмом осуществления учебной деятельности является решение задач*, и если обучаемый не решает учебные задачи, то это значит, что его учебная деятельность не организована;
- в современном понимании *знать – значит с помощью знаний осуществлять определенную деятельность*, а не только помнить определенные знания;
- усваивать знания можно, только *применяя их, оперируя ими*, а не

просто запоминая их. Запоминание знаний должно быть результатом их применения и использования;

- обучение представляет собой *совокупность двух взаимосвязанных, но самостоятельных деятельностей,* – деятельности обучающего и деятельности обучаемого, или учебной деятельности;
- деятельность преподавателя заключается в *проектировании* учебной деятельности, *организации* учебной деятельности и *управлении* учебной деятельностью.

В завершенном виде теория деятельностного обучения была сформулирована Г.А. Атановым и применена к преподаванию таких дисциплин, как физика, информатика, высшая математика, психология, украинский язык.

В процессе обучения студент выполняет различные виды **учебной деятельности**, которые с организационной точки зрения разделяют на аудиторную и внеаудиторную учебную нагрузку. Под аудиторной нагрузкой понимают занятия, проводимые в аудитории при непосредственном участии преподавателя: лекции, практические и семинарские занятия, консультации, контрольные мероприятия. Внеаудиторная нагрузка студента – это все виды его учебной деятельности, которые выполняются вне аудитории, без непосредственного участия преподавателя; это выполнение домашних и индивидуальных заданий, подготовка к аудиторным занятиям, выполнение учебной научно-исследовательской работы, подготовка к контрольным и экзаменам, практическая подготовка.

Внеаудиторная нагрузка обычно отождествляется с самостоятельной работой студентов, что с дидактической точки зрения не верно. Психологически **самостоятельная работа** студента тождественна его учебной деятельности. Ведь учебная деятельность осуществляется самим студентом, это и есть его работа. Рассматривая самостоятельную работу как учебную деятельность, по особенностям организации ее можно разделить на такие виды: самостоятельная работа во время учебных занятий (в аудитории), самостоятельная работа, выполняемая вне аудитории. Преподаватель должен спроектировать самостоятельную работу во всех видах учебной нагрузки студента. Это означает, что в виде учебной нагрузки студента должна быть выделена, описана и организована деятельность, которую студент выполнит самостоятельно как в аудитории, так и вне неё.

Решение задачи формирования профессиональной компетенции специалиста в процессе обучения требует повышения роли и эффективности самостоятельной работы как учебной деятельности. Для этого необходимо увеличить время, отводимое на самостоятельную работу, выполняемую вне аудитории и направленную на решение задач, моделирующих будущую профессиональную деятельность специалиста. Это влечет за собой сокращение аудиторной учебной нагрузки студента, что требует перестройки учебного процесса и специальной организации учебной деятельности.

При этом должна быть построена эффективная система контроля, обеспечивающая контроль, в первую очередь, не знаний, а результатов учебной деятельности, то есть сформированности необходимых для будущей профессиональной деятельности умений.

В настоящее время основной формой организации учебного процесса, отвечающей требованиям Болонского процесса, является модульно-рейтинговая организация [7]. В ряде высших учебных заведений Украины, в том числе в Донецком национальном техническом университете, достигнуты определённые успехи по внедрению модульно-рейтинговой организации учебного процесса. При этом предполагается разделение учебных дисциплин на содержательные модули, количество которых должно быть от 2-х до 4-х. Усвоение каждого модуля завершается модульной контрольной работой. Итоговое оценивание усвоения учебного материала дисциплины определяется без проведения семестрового экзамена как интегрированная оценка усвоения всех модулей. Полученные балы переводятся в традиционную оценку в соответствии с критериями, разработанными преподавателем и заранее доведёнными до ведома студентов. Студент, который набрал необходимое для получения положительной оценки количество баллов, имеет право не сдавать экзамен и получить итоговую оценку в качестве экзаменационной или сдавать экзамен с целью повышения оценки. Студент, который, который не набрал необходимые баллы, обязан сдавать экзамен.

Тем не менее, существующая практика имеет ряд недостатков:

- содержание обучения предмету оторвано от будущей профессиональной деятельности;
- как правило, оцениваются знания, а не результаты учебной деятельности, которыми, в первую очередь, являются умения;
- не контролируются и не оцениваются результаты выполнения самостоятельной работы;
- при итоговом оценивании не учитывается вся деятельность, выполняемая студентом при усвоении содержания модуля: посещение занятий, активность, систематичность и своевременность выполнения заданий и т.д.;
- существует возможность необъективного оценивания;
- недостаточно эффективны рычаги повышения мотивации к учению;
- не проектируется и в достаточной мере не организовывается самостоятельная работа студентов.

Целью данной работы является реализация деятельностного подхода при модульно-рейтинговой организации учебного процесса в процессе обучения дисциплинам цикла «Математика для экономистов».

Важное место в подготовке экономиста занимают математические дисциплины, объединённые общим названием «Математика для экономистов». Это такие, фундаментальные дисциплины как «Высшая математика» (1 и 2 семестры), «Теория вероятности и математическая статистика» (3 семестр), «Математическое программирование» (4 семестр). Распространённая практика заключается в том, что преподаватели математических дисциплин стремятся преподнести материал в наибольшей полноте, сформировать у студентов математический образ мышления. При этом преподавание ведётся на математическом уровне строгости, студентам излагается большое количество материала, который никогда не будет востребован. Между тем, понятно, что у экономистов должно быть развито экономическое мышление, и в процессе преподавания математики у экономистов надо формировать именно его. Математические дисциплины должны рассматриваться как средство, обеспечивающее выполнение профессиональной деятельности экономистов, как инструмент для решения экономических задач.

Основным моментом в реализации деятельностного подхода при модульно-рейтинговой организации учебного процесса является то, что для всех видов учебной нагрузки студентов преподаватель должен проектировать и организовывать учебную деятельность, имеющую профессиональную направленность [6]. На практике это осуществляется следующим образом. Разработана система заданий, которые студент выполняет как на аудиторных занятиях, так и при подготовке к ним, а также во время учебной научно-исследовательской работы. При итоговом оценивании учитываются как результаты выполнения заданий, так и систематичность их выполнения, активность студента. Для возможности осуществления такого оценивания автором разработана система формирования рейтингового показателя студента – числовой величины, показывающей процентное отношение набранных студентом баллов к максимально возможному их количеству. Для удобства перевода в проценты принята 100-бальная система оценивания результатов учебной деятельности.

Используемая автором система организации и оценивания результатов учебной деятельности состоит в следующем:

1. Материал каждого семестра по математическим дисциплинам разбивается на два модуля. По положению, принятому в Донецком национальном техническом университете, в первом и третьем семестрах, состоящих из 18 недель, первый модуль охватывает с 1-й по 8-ю неделю, а второй – с 10-й по 17-ю неделю. На 9-й и 18-й неделях студенты соответственно пишут первую и вторую модульные контрольные работы, соответственно. Второй и четвёртый семестры состоят из 17 недель. Первый модуль изучается с 1-й по 7-ю неделю, а второй – с 9-й по 16-ю. Модульные контрольные работы приходятся на 8-ю и 17 недели.

2. На лекциях используется семантический конспект [2; 4; 5]. Семантический конспект представляет собой полный набор лаконично представленных высказываний (семантических фактов), расположенных в порядке изучения материала. Изданный отдельно, он представляет собой тонкую брошюру, потому что в ней нет выкладок, доказательств и объяснений. Тем не менее, она содержит все положения изучаемого курса. Студенты, имея семантический конспект на лекции, следят по нему за логикой изложения материала, а у преподавателя отпадает необходимость задиктовывать ос-

новные положения, сформулированные в вербальной форме. Преподаватель, таким образом, имеет возможность уделить больше внимания толкованию, доказательствам, примерам. В результате лекция получается более информативная, появляется больше возможностей для организации самостоятельной работы.

3. На каждой лекции студенты получают задание на самостоятельное изучение. Как правило, это небольшие вопросы, которые не были рассмотрены на лекции. В начале следующей лекции один из студентов в течение 5-10 минут докладывает результаты выполненной работы. Преподаватель комментирует, дополняет, объясняет приведенный студентом материал. Остальные студенты имеют возможность внести коррективы в составленный конспект, записать, если работа не была выполнена дома. Кроме того, желающие могут показать преподавателю результаты выполнения такой работы до начала лекции, и преподаватель определяет, кто будет излагать работу у доски. За каждое выступление у доски студент получает +2 балла, а каждый, кто показал результаты выполнения задания, получает +1 балл.

4. После того, как у студентов уже сформировано умение изучать материал самостоятельно (как правило, это происходит к концу изучения первого модуля первого семестра), они получают задание по самостоятельному изучению материала целой лекции. На самостоятельное изучение целесообразно выносить лекции, материал которых знаком студенту из ранее изученных курсов и не включен в семантический конспект по дисциплине. Так, в курсе «Высшая математика» это могут быть темы «Прямая линия на плоскости», «Элементарные функции одной переменной и их графики» и т.п. Преподаватель предоставляет студентам подробный план лекции, цели изучения, сформулированные в терминах умений, список необходимой литературы. Результатом выполнения такой работы может быть конспект, а в идеале – и семантический конспект лекции. Составленный конспект лекции студент должен представить на проверку преподавателю. За лучшие конспекты студенты получают +2 балла, а за отсутствие конспекта студент получает – 2 балла.

5. Контроль усвоения студентами теоретического материала осуществляется на практических занятиях с помощью тестовых заданий отрытого типа, составленных на основе семантического конспекта. Контрольная работа по теории содержит десять тестовых заданий, за каждое из которых при правильном ответе ставится 1 балл. При изучении каждого модуля проводится 2 таких контрольных работы, результаты которых учитываются при формировании рейтингового показателя (всего 20 баллов). Студенты имеют право пересдавать на консультации контрольные по теории, что стимулирует их к изучению лекционного материала. Тестовые задания могут быть также использованы при отработке студентами пропущенных занятий.

6. На каждом практическом занятии студенты получают задание, общее для всей группы. Это задание включает в себя задачи, в результате ре-

шения которых формируются все умения, являющиеся целью занятия. Часть задания выполняется в аудитории, часть решается дома. При этом студенты имеют возможность работать на практическом занятии в различном темпе. Преподаватель может проверить, выполняется ли студентами задание практического занятия в полном объёме, и если нет, то снизить 2 балла. Эти снижения аннулируются, если задание отработано на консультации.

7. В качестве домашнего по каждой теме студентам выдаётся индивидуальное задание, которое сдаётся в конце изучения темы. В случае, если задание содержит ошибки, преподаватель возвращает его студенту на доработку. Выполненное без ошибок или доработанное задание зачитывается. До модульной контрольной работы должны быть зачтены все индивидуальные домашние задания, количество которых планируется в рабочей программе по дисциплине. За каждое зачтённое в срок индивидуальное задание студент получает призовые 5 баллов. Если же индивидуальные задания к модульной контрольной работе не выполнены и не сданы преподавателю на проверку, то студент штрафуется на 5 баллов за каждое задание.

8. Пропущенные занятия студент должен отработать, выполнив тестовые задания практического или теоретического характера на консультации. Если занятие не отработано, то студент штрафуется на 2 балла за каждый пропуск.

9. При выполнении модульных контрольных работ студенты могут пользоваться своими конспектами и зачтёнными индивидуальными заданиями. При этом категорически запрещается разговаривать. Это значительно снимает напряженность во время экзамена, избавляет преподавателя от необходимости следить за тем, не списывают ли студенты. Желательно, чтобы при этом у каждого студента было отличное от других задание модульной контрольной работы. Это легко обеспечить введением в условия заданий модульной контрольной работы некоторых параметров.

10. Подготовка к модульной контрольной работе заключается в решении задач, направленных на формирование определённых умений. Перечень вопросов по подготовке к модульным контрольным работам даётся в терминах умений. В билеты включаются задания, подобные тем, которые студенты решали при выполнении индивидуальных заданий и на практических занятиях.

11. Максимальные количество баллов, которое может получить студент, безукоризненно выполнив все задания билета модульной контрольной работы, равно 100 баллам. При этом каждый билет включает в себя 4 задания, которые охватывают все изученные темы. Это, как правило, задания практического характера, направленные на оценивание степени сформированности умений. Вопрос по теории оценивается в 20 баллов, которые студент мог набрать при выполнении контрольных работ по теории в процессе изучения модуля. Рассчитана модульная контрольная работа на 2 академических часа.

12. Очень важно, чтобы задание по каждой теме в билете модульной контрольной работы содержало задачи разного уровня сложности, которые оценивались бы различным количеством баллов. Это дает возможность студентам решать задания соответственно своему уровню подготовленности. Так, например, задание по теме «Неопределённый интеграл» (всего 30 баллов) может содержать такие задачи:

а) вычислить табличный интеграл (5 баллов);

б) вычислить интеграл, использую замену переменной (10 баллов);

в) вычислить интеграл, использую метод интегрирования по частям или специальные методы интегрирования (15 баллов).

13. В билете модульной контрольной работы обязательно указывается стоимость каждого задания в баллах. Задания оцениваются пропорционально выполненной работе. Так, например, если студент, выполняя задание на вычисление неопределённого интеграла методом замены переменной (10 баллов), правильно сделал замену, но не сумел вычислить полученный интеграл, то он получает 3 балла (1/3 максимальной оценки). Если же он вычислил первообразную, но при этом допустил ошибки в применении формул таблицы интегралов, то он получает 7 баллов (2/3 максимальной оценки). Если же формулы были применены правильно, но допущена ошибка в вычислениях, то за задание студент получает 9 баллов (снижение на 1 балл).

14. Набранные студентом в результате выполнения модульной контрольной работы баллы (РМКР), могут быть увеличены за счет призовых баллов модуля (ПБМ), или снижены за счет штрафных баллов модуля (ШБМ). В результате получается рейтинговый показатель студента по данному модулю (РПМ). Таблица 1 иллюстрирует формирование ПБМ и ШБМ.

Таблица 1

№ п/п	Виды учебной деятельности	Штрафные и призовые баллы модуля
1.	Индивидуальные задания выполнены в срок и зачтены преподавателем	+5 баллов за каждое индивидуальное задание
2.	Индивидуальные задания выполнены в срок, но содержат ошибки и не были зачтены преподавателем	Баллы не снимаются и не прибавляются
3.	Индивидуальные задания не выполнены в срок и не были сданы на проверку	–5 балов за каждое индивидуальное задание
4.	У студента были пропуски аудиторных занятий, которые не отработаны.	–2 балла за каждый пропуск
5.	Задание на практическое занятие не было выполнено в полном объёме	–2 балла за каждое задание
6.	Задание практического занятия не было выполнено в полном объёме, но потом было отработано	Баллы не снимаются и не прибавляются

№ п/п	Виды учебной деятельности	Штрафные и призовые баллы модуля
7.	Студент у доски сделал сообщение на лекции по теме, изученной самостоятельно	+2 балла за каждое сообщение
8.	Работу по самостоятельному изучению отдельного теоретического вопроса выполнена	+1 балл
9.	Конспект лекции, вынесенной на самостоятельное изучение, не сдан на проверку	–2 балла
10.	Конспект лекции, вынесенной на самостоятельное изучение, сдан на проверку, но требует доработки	Баллы не снимаются и не прибавляются
11.	Конспект лекции, вынесенной на самостоятельное изучение, сдан на проверку и зачтен преподавателем	+2 балла

Таким образом, рейтинговый показатель студента по каждому модулю определяется по формуле РПМ = РМКР + ПБМ – ШБМ.

14. Рейтинговые показатели студента по всем модулям суммируются и делятся на количество модулей. В результате получается первый рейтинговый показатель семестра (РПС$_1$), который переводится в традиционную оценку в соответствии с критериями, приведёнными в таблице 2. При этом за счет призовых баллов рейтинговый показатель может превышать 100. Там же показан европейский эквивалент оценки.

Таблица 2

Рейтинговый показатель студента по семестру (РПС)	Традиционная оценка	Европейский эквивалент оценки
95 и более	отлично	A
75-90	хорошо	B, C
50-74	удовлетворительно	D, E
49 и менее	неудовлетворительно	FX, F

Таким образом, рейтинговый показатель семестра студента вычисляется по формуле РПС$_1$ = (РПМ$_1$ + РПМ$_2$)/2.

15. Оценке «неудовлетворительно» в европейской системе оценивания соответствует два уровня: FX – неудовлетворительно с правом пересдачи и F – неудовлетворительно без права пересдачи. Учитывая это обстоятельство, целесообразно разделить студентов, получивших 49 баллов и менее, на две группы. В первую (FX) включаются те, РПС$_1$ которых составил 20-49 баллов. Причиной получения неудовлетворительной оценки у этих студентов является, как правило, невыполнение домашних индивидуальных заданий, заданий по самостоятельному изучению теоретического материала, пропуски занятий. Они обязаны сдавать экзамен. Причем, если неудовлетворительные баллы у них были только по одному из модулей, сдавать они могут только материал этого модуля при условии, что индивидуальные за-

дания другого модуля выполнены и зачтены.

Во вторую группу (F) включаются студенты, $РПС_1$ которых составил мене 20 баллов. Причиной этого чаще всего является то, что они не имеют необходимых для изучения данной дисциплины знаний и умений и по этой причине не выполняют необходимые задания. Эти студенты к экзамену не допускаются. Для допуска к экзамену они должны выполнить дополнительное индивидуальное задание, направленное на формирование умений, которыми студент должен владеть для изучения данной дисциплины.

16. Если студент, $РПС_1$ которого составил 50 баллов и более, выполнил все индивидуальные задания обоих модулей и задания по самостоятельному изучению материала, он получает оценку, которая соответствует набранным баллам, автоматом, без сдачи экзамена. При желании студент может сдавать экзамен с целью получения более высокой оценки. При этом экзамен сдается по материалу модулей, по которым оценка ниже желаемой.

Так, например, если $РПМ_1$ студента составляет 77 баллов, что соответствует оценке «хорошо», а $РПМ_2$ = 53 балла («удовлетворительно»), то $РПС_1 = (77+53)/2 = 65$ баллов, оценка «автоматом» – «удовлетворительно». Если студент не доволен этой оценкой и захочет сдавать экзамен с целью получения более высокой оценки, то сдавать он должен материал только второго модуля.

17. Экзаменационную работу пишут следующие студенты:

- которые не явились на одну или обе модульных контрольных работы;
- РПМ которых хотя бы по одному модулю составил менее 50 баллов;
- $РПС_1$ которых более 50 баллов, но они хотят повысить оценку, полученную «автоматом»;
- $РПС_1$ которых более 50 баллов, но они имеют не зачтённые индивидуальные задания.

18. На экзамене студенты в течение первых десяти минут отвечают на тестовые задания по теории (20 баллов), которые выполняются без использования конспектов и сразу же сдаются преподавателю на проверку. Затем студенту выдаются билеты тех модульных контрольных работ, материал которых он должен сдавать на экзамене. Экзаменационная работа пишется, как и модульные контрольные работы, два академических часа. При работе с билетами студенты могут пользоваться своими конспектами и зачтёнными индивидуальными заданиями.

29. Набранные студентом баллы по результатам выполнения на экзамене тестовых заданий по теории (ЭТЗТ), по билету первой и второй модульной контрольной работ ($ЭМКР_1$ и $ЭМКР_2$), суммируются, и в итоге получается результат экзаменационной работы (РЭР):

$$РЭР = ЭТЗТ + ЭМКР_1 + ЭМКР_2.$$

20. РЭР студента может быть увеличен за счет семестровых призовых

баллов (ПБС) или уменьшен за счёт семестровых штрафных баллов (ШБС). Поскольку к экзамену все индивидуальные задания должны быть не только выполнены, но и зачтены, то за каждое не зачтённое индивидуальное задание студент получает –5 баллов. В случае, если задание не сдавалось на проверку, то снимается 10 баллов. Призовые баллы можно заработать, выполнив дополнительное задание, например, написание реферата, доклада на студенческую научную конференцию, участие в предметной олимпиаде.

21. Примерный перечень тем рефератов студенты получают в начале семестра. Как правило, это вопросы, касающиеся приложений математики в экономике. Студентам также выдаётся список литературы и перечень веб-сайтов, где можно найти материал для реферата. Обязательным условием является согласование найденного материала с преподавателем. Реферат должен содержать три раздела. В первом разделе описываются математические понятия и объекты, их свойства и алгоритмы их преобразования; во втором разделе приводятся экономические приложения описанных математических объектов; третий раздел представляет собой словарь экономических терминов, использованных в реферате. За реферат, выполненный по всем правилам, студент получает 10 призовых баллов.

22. Доклад на студенческой научной конференции может быть сделан по материалу, приведенному в реферате. При этом студент должен на реальных данных, согласованных с выпускающей кафедрой, выполнить экономико-математическое моделирование. За доклад на студенческой научной конференции студент получает +20 баллов.

23. Второй рейтинговый показатель семестра ($РПС_2$) получают прибавлением к результату экзаменационной работы семестровых призовых баллов и вычитанием штрафных баллов: $РПС_2 = РЭР + ПБС - ШБС$. Из двух семестровых рейтинговых показателей студента $РПС_1$ и $РПС_2$ выбирается наибольший и переводится в оценку по критериям, описанным в таблице 2.

24. К пересдаче допускаются только те студенты, у которых выполнены и зачтены все индивидуальные задания, запланированные на семестр. У студентов, которые к экзамену не были допущены, кроме этого должно быть выполнено и зачтено дополнительное индивидуальное задание (см. п. 15).

25. Пересдача проходит по правилам проведения экзамена. Если студент получает менее 50 баллов, то недостающие баллы для оценки «удовлетворительно» он может набрать в несколько приемов при последующих пересдачах.

Результаты. Исследовались результаты учебной деятельности по изучению дисциплины «Высшая математика» потоком студентов 1 курса экономических специальностей, состоящим из трёх академических групп (всего 71 человек). В первом семестре учебная нагрузка студентов составляла по 54 академических часа лекций, практических занятий и самостоятельной внеаудиторной работы. Разбиение содержания дисциплины на модули в первом семестре приведено в таблице 3.

Таблица 3

Номер модуля	Содержание модуля	Объём в академических часах			
		Лекции	Практич. занятия	СРС	Всего
1	Линейная алгебра. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве.	28	26	27	81
2	Линейные операторы и квадратичные формы. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.	26	28	27	81
	ИТОГО:	**54**	**54**	**54**	**162**

Структура и содержание учебной деятельности, которую студенты выполняли самостоятельно, приведены в таблице 4.

Таблица 4

Модуль	Содержание учебной деятельности	Объём в часах
Модуль 1	Индивидуальное задание 1. Матричная алгебра. Теория систем линейных уравнений. Векторная алгебра.	4,5
	Индивидуальное задание 2. Плоскость и прямая в пространстве. Прямая и кривые второго порядка на плоскости.	4,5
	Самостоятельное изучение теоретического материала	6
	Подготовка к практическим занятиям	6
	Подготовка к контрольным работам	6
	Итого по модулю 1	**27**
Модуль 2	Индивидуальное задание 3. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Приведение квадратичной формы к каноническому виду	3
	Индивидуальное задание 4. Построение графиков элементарных функций. Вычисление пределов. Дифференцирование и исследование функции одной переменной	6
	Самостоятельное изучение теоретического материала	6
	Подготовка к практическим занятиям	6
	Подготовка к контрольным работам	6
	Итого по модулю 2	**27**

Перед каждой модульной контрольной работой подводились итоги выполнения студентами учебной деятельности. В таблице 5 приведены результаты выполнения индивидуальных заданий.

Таблица 5

Время подведения итогов	Вид заданий	Индивидуальных заданий, %		
		Зачтено	Не зачтено	Не сдано
Перед модульной контр. 1	Индивидуальные задания модуля 1	44 %	24 %	32 %
Перед модульной контр. 2	Индивидуальные задания модуля 2	53 %	29 %	18 %
Перед экзаменом	Индивидуальные задания семестра	77 %	14 %	9 %

Как видно из таблицы 5, процент зачтенных индивидуальных заданий по мере их выполнения, особенно перед экзаменом, возрастает. Это свидетельствует, в первую очередь, о повышении мотивации студентов к обучению.

В таблице 6 приведены результаты изучения модулей и сдачи экзаменов, выраженные в оценках. Для этого рейтинговые показатели модулей и семестра были переведены в оценку по критериям, приведенным в табл. 2.

Таблица 6

	Оценка				Не явилось	Не допущено	% успеваемости	Качество знаний, %
	«5»	«4»	«3»	«2»				
Модуль 1	2	14	19	35	1	-	49 %	23 %
Модуль 2	3	11	17	35	5	-	44 %	20 %
Экзамен	8	19	11	18	5	10	54 %	38 %

Выводы. Трёхлетний опыт использования модульно-рейтинговой организации учебной деятельности студентов экономических специальностей по математическим дисциплинам на основе деятельностного подхода позволяет отметить следующие её положительные стороны:

- систематичность усвоения студентами ученого материала;
- установление обратной святи с каждым студентом на определённых этапах изучения дисциплины;
- возможность диагностики и своевременной корректировки учебного процесса;
- повышение мотивации студентов к учёбе, уменьшение пропусков занятий;
- повышение эффективности самостоятельной работы студентов;
- снятие психологического напряжения в конце семестра и в период экзаменационной сессии;
- обеспечение «прозрачности» учебного процесса, что значительно уменьшает вероятность необъективного оценивания.

Литература:

1. Атанов Г.А. Как учить применять знания, или Введение в практику деятельностного обучения. – Донецк: Изд-во ДОУ, 2004.

2. Атанов Г.А., Евсеева Е.Г. Семантическая предметная модель студента-экономиста по линейной алгебре // Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі: Зб. наук. праць. – Кривий Ріг: НМетАУ, 2002. – Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – С. 3-17.

3. Бадмаев Б.Ц. Психология и методика ускоренного обучения. – М.: Владос, 1998.

4. Евсеева Е.Г. Опорный конспект по курсу «Высшая математика» (линейная алгебра: матрицы). Дидактическое пособие для студентов экономических специальностей. – Донецк: ДИСО, 1999.

5. Евсеева Е.Г. Семантический конспект по линейной алгебре // Дидактика математики: проблемы и исследования: Международный сборник научных работ. – № 24. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2005. – С. 101-109.

6. Евсеева Е.Г. Кредитно-модульная организация учебного процесса по дисциплине «Математика для экономистов» // Материалы международной научно-методической конференции «Эвристическое обучение математике». – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2005. – С. 74-76.

7. Тимчасове положення про організацію навчального процесу в кредитно-модульній системі підготовки фахівців // Освіта. – 2004. – №8. – 11-18 лютого. – С. 4-5.

ВОПРОСЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В РАМКАХ КРЕДИТНО-МОДУЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Г.Г. Пенина, В.М. Дрибан
г. Донецк, Донецкий государственный университет экономики и торговли им. М. Туган-Барановского
matemat@kaf.donduet.edu.ua

В последнее время можно наблюдать активизацию поиска методов качественной подготовки квалифицированных специалистов, стремление ориентировать процесс обучения на увеличение самостоятельной работы студентов и повышение ее эффективности. Все большее число преподавателей направляют свои усилия на поиск форм и путей организации такой работы, которая бы рационально и сбалансировано объединяла аудиторную работу преподавателя и студента с индивидуальной самостоятельной работой студентов.

В связи с этим особая роль в формировании рационального мышления студентов высших учебных заведений отводится математическим дисциплинам. Возможность обеспечения того или иного теоретического понятия количественной оценкой всегда оценивалась очень высоко, и поэтому оценка результатов любой деятельности требует использования адекватных математических знаний. Особенно следует отметить широкие возможности в применении математических методов и методических приемов для лаконичного описания исследуемых объектов, в количественном сопоставлении и обоснованном выборе содержательных предложений. Не следует забывать и об особенном инструментарии математики как науки: математическая индукция и дедукция, аксиоматическое построение теорий, доказательство теорем и следствий, многовариантные аналитические преобразования, вычислительные процедуры и алгоритмы, математическое моделирование, которое в любом вузе можно рассматривать как философское осмысление системы общеметодических закономерностей, раскрывающих проникновение математики во все отрасли знаний и наоборот. Именно цикл математических дисциплин обеспечивает студентов знаниями, необходимыми для разрешения многих теоретических и практических задач.

Наш опыт работы в экономическом вузе свидетельствует о разном уровне знаний и умений студентов по математике, о разной мотивации к изучению этой дисциплины. Значительная часть студенческой аудитории имеет хорошую математическую подготовку по школьному курсу, сознательно и настойчиво изучает вузовские дисциплины математического цикла. Определенная часть студентов ощущает себя неуверенно и должна значительно больше времени уделять математике, чтобы достичь хороших результатов. Остальные студенты испытывают существенные трудности в изучении предмета и ищут себе оправдания, что эта дисциплина может им не понадобиться.

Для практического овладения математическими дисциплинами как неотъемлемой составляющей формирования грамотного специалиста необходимы определенные условия. Реформирование учебного процесса в рамках внедрения кредитно-модульной системы для дисциплин математического цикла имеет целый ряд особенностей. Они, в первую очередь, связаны с тем, что кафедра математики начинает свою работу с первокурсниками, для которых необходимо решить проблему адаптации, доведения уровня их знаний до требований высшей школы, устранения психологических барьеров. Эти обстоятельства требуют достаточного количества часов в рабочих учебных планах для студентов первого курса. Ни в коем случае не следует переводить их на самостоятельное изучение большинства вопросов. Должен быть разработан четкий механизм управления системой обучения в условиях кредитно-модульного подхода, чтобы она носила целостный характер. В этой части следует обеспечить оптимальное соотношение аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работы студентов: изменить структуру лекций и практических занятий; развивать концепцию индивидуально-ориентированного подхода в обучении; активно использовать инновационные технологии (компьютеризация, модульно-рейтинговые программы, электронные учебники и др.). Это, безусловно, приведет к пересмотру действующих нормативов затрат времени и внесению соответствующих изменений в педагогическую нагрузку.

Хотелось бы надеяться, что решение задачи качественного повышения успешности студентов по математике будет достигнуто за счет использования модульно-рейтинговой системы обучения. Стимулирование и самоорганизация систематической индивидуальной работы студентов, усиление мотивационного компонента, формирование самостоятельных действий, система контроля – все это должно выполнять мотивационно-стимулирующую функцию. Переход к модульной программе предусматривает доскональный анализ курса с тем, чтобы математическую дисциплину распределить на логически завершенные части – модули, причем количество модульных часов надо планировать, исходя из того, что преподаватель не только организует усвоение материала, а и имеет достаточно времени для оценки каждого студента в соответствии с подготовленными критериями. Структура учебного материала каждого модуля должна определять базовые знания, вспомогательные вопросы и практические навыки.

Необходимо подчеркнуть, что модульно-рейтинговая система несет в себе новое функциональное направление, в котором содержательный модуль рассматривается как продолжительное занятие со своими стратегическими целями и задачами. Для каждого модуля формируется программа реализации запланированных целей, определяются мотивационные стимулы и последующие рейтинговые опорные оценки. И вот здесь есть один принципиальный момент. Когда студенты обеспокоены рейтинговыми баллами лишь за один конкретный модуль по математике, то нарушается их представление относительно целостности этой дисциплины, так как в математике очень важны не только отдельные вопросы, но и их взаимосвязь, а также и формирование конкретных прикладных алгоритмов на основе нескольких модулей. А когда студент воспринимает курс математики какими-то кусками, то он не имеет представления о науке в целом. Необходимое обобщение всего материала всегда проходило во время подготовки к экзамену. Если же экзаменационную оценку выставлять формально как итог баллов за каждый модуль, то важная составляющая обобщения всех разделов утрачивается. Наверное, вопрос взаимосвязи разделов надо включать в состав последнего модуля.

Важным и ответственным является вопрос организации самостоятельной работы студентов. Под самостоятельной работой понимаем специфический вид деятельности, главной целью которого становится формирование самостоятельности обучаемого, а систематизация умений, знаний и навыков опосредствованно формируется через содержание и методы всех видов учебных занятий. При этом очень важную роль играет индивидуализация самостоятельной работы. Этот вопрос не решается автоматически. Дело в том, что значительная часть изучающих математику в экономическом вузе не умеет работать самостоятельно с математической литературой – они еще из школы привыкли к тому, что им на уроках все расскажут, докажут, проиллюстрируют многими примерами. И свою задачу ученики видели в том, чтобы закрепить изложенный материал на подобных примерах. В вузе ситуация немного другая. Времени на детальное преподавание не хватает, самостоятельно разбирать математический материал студенты затрудняются – складывается ситуация тяжелого напряжения. Поэтому считаем целесообразным не сокращать объем часов на изучение математики, а, наоборот, дополнить существующее время часами самостоятельной работы, чтобы преподаватель имел возможность учить этому виду деятельности.

Безусловно, важную роль в обучении играет использование разных форм контроля. В условиях модульно-рейтинговой системы значимость контрольных моментов существенно возрастает. Устные ответы, письменные диктанты, тесты, самостоятельные и контрольные работы, рефераты, компьютерные решения отдельных задач – все эти формы дополняют друг друга и отражают уровень и качество знаний и навыков студентов. Полноценное использование этих форм тоже требует времени. Преподаватель должен иметь возможность, с одной стороны, разъяснять основные положения, принципы, методы решения задач, то есть учить, а с другой стороны, развивать самостоятельный компонент в работе, его контролировать. В особенности следует рассмотреть вопрос тестов по математике – не по всем вопросам они имеют смысл, так как иногда важно получить не мгновенный ответ, а проверить умение решать сложную задачу по предложенному алгоритму. Таким образом, внедрение модульно-рейтинговой системы существвенно увеличивает нагрузку на преподавателя, требует обновления всего методического обеспечения дисциплины, дополнительных консультаций, чтобы реализовать те положительные возможности, которые открывает эта система.

Обучение математическим дисциплинам в рамках кредитно-модульной системы потребует от преподавателей и студентов немалого напряжения. Трудность восприятия материала и отсутствие навыков самостоятельной работы, осознание необходимости быть аттестованным по каждому модулю и своевременности представления индивидуальных заданий потребуют от студентов большой внутренней работы, самодисциплины и максимальной сосредоточенности. Что касается преподавателей, то от них тоже потребуются определенные изменения в организации работы. Эти изменения связаны с использованием индивидуально-ориентированного подхода в регулировании самостоятельной работы студентов и разработки мобильной системы объективного оценивания их знаний, в подготовке соответствующего методического обеспечения учебного процесса и системы мотивации студентов к активизации выполнения программы обучения. При этом предполагается взаимная заинтересованность в успешных результатах.

ОРГАНІЗАЦІЯ ДІЯЛЬНОСТІ СТУДЕНТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМИ «ПРЯМА ТА ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ» В УМОВАХ МОДУЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ

А.О. Розуменко[1], А.М. Розуменко[2]
[1] м. Суми, Науково-дослідний центр навчально-наукових приладів Інституту прикладної фізики НАН України
[2] м. Суми, Сумський національний аграрний університет

Тема модульно-рейтингової системи навчання активно обговорюється на сторінках психолого-педагогічних та науково-методичних видань. З’ясовано зміст основних понять, принципів даної системи, тобто досить ґрунтовно розглянуто теоретичні основи модульно-рейтингової форми навчання. Завдання викладачів та методистів реалізувати цю систему на практиці.

Досвід викладання курсу аналітичної геометрії та аналіз навчальної програми цього курсу дозволили нам виділити структуру та зміст модулів теми «Пряма та площина в просторі», а також особливості організації навчальної діяльності студентів при вивченні даної теми в умовах модульно-рейтингової форми навчання.

Ми пропонуємо навчальний матеріал з даної теми розподілити за трьома модулями, а саме:

Модуль 1. Пряма на площині.

Модуль 2. Площина в просторі.

Модуль 3. Пряма в просторі.

Кожний модуль ми розробили за такою схемою:

1) основні теоретичні питання модуля;
2) основні типи задач;
3) основні форми контролю.

Необхідною умовою модульно-рейтингової системи навчання є повідомлення студентам вимог щодо виконання ними навчального плану.

Тому треба проводити консультації перед вивченням кожного з модулів. Студентам повідомляють тему, основні питання модуля; дають характеристику навчально-методичної літератури з відповідної теми; називають форми контролю та спосіб оцінювання їх виконання.

Кожна з форм контролю оцінюється певною кількістю балів. Ми пропонуємо оцінювати кожну задачу контрольної роботи двома балами (контрольна робота містить чотири задачі, тому максимальна кількість балів за цю форму контролю – 8), кожне тестове завдання – одним балом, кожний пункт індивідуального завдання – одним балом. Таким чином, студенту повідомляють максимальну кількість балів, яку він може отримати за практичну частину модуля.

Теоретичні питання доцільно виносити на колоквіум, де студент має продемонструвати не тільки знання основних означень і рівнянь з відповідної теми, але й відтворювати елементи доведень, обґрунтовувати свої міркування. На нашу думку, колоквіум необхідно проводити в усній формі і оцінювати певною кількістю балів (яка варіюється відповідно до складності навчального матеріалу).

Очевидно, що викладач може змінювати «вартість» різних форм контролю. Головне при цьому повідомити студентам про шкалу оцінювання.

Модуль 1. Пряма на площині.

Основні теоретичні питання модуля 1:

1. Різні види рівнянь прямої.
2. Загальне рівняння прямої. Частинні випадки.
3. Взаємне розміщення двох прямих на площині. Кут між прямими.
4. Відстань від точки до прямої.
5. Пучок прямих.

Основні типи задач модуля 1:

1. Знаходження рівняння прямої, якщо задані певні умови (дві точки прямої; точка та напрямний вектор; точка та нормальний вектор).
2. Знаходження рівняння прямої, яка проходить через задану точку і паралельна до заданої прямої.
3. Знаходження рівняння прямої , яка проходить через задану точку і перпендикулярна до заданої прямої.
4. Знаходження точки перетину двох прямих.
5. Знаходження кута між двома прямими.
6. Знаходження відстані від точки до прямої.

Основні форми контролю модуля 1:

1. Виконання індивідуального завдання.
2. Контрольна робота.
3. Виконання тестових завдань.
4. Колоквіум.

Зміст індивідуального завдання до модуля 1:

Задані координати вершин трикутника ABC відносно прямокутної системи координат (кожний студент має свій варіант заданих координат). Необхідно знайти:

1) рівняння сторін трикутника;
2) рівняння медіани AM та її кутовий коефіцієнт;
3) рівняння бісектриси BK;
4) рівняння висоти CD та її довжину;
5) рівняння серединного перпендикуляра до сторони AB;
6) центр кола, яке вписано в заданий трикутник та радіус цього кола;
7) кути трикутника.

Контрольна робота, яку ми пропонуємо в чотирьох варіантах, містить чотири задачі різних типів першого модуля.

Модуль 2. Площина в просторі.

Основні теоретичні питання модуля 2:

1. Різні види рівнянь площини в просторі.
2. Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин.
3. Відстань від точки до площини.

Основні типи задач модуля 2:

1. Знаходження рівняння площини за даними умовами.
2. Знаходження рівняння площини, що проходить через точку і перпендикулярна до заданої прямої; до заданої площини.
3. Знаходження рівняння площини, що проходить через точку і паралельна до заданої прямої; до заданої площини.
4. Знаходження кута між двома площинами.
5. Знаходження відстані від точки до площини.
6. Знаходження прямої перетину двох прямих.

Основні форми контролю модуля 2:

1. Контрольна робота.
2. Виконання тестових завдань.

Модуль 3. Пряма в просторі.

Основні теоретичні питання модуля 3:

1. Різні види рівнянь прямої в просторі.
2. Кут між двома прямими . Умови перпендикулярності і паралельності прямих.
3. Взаємне розміщення двох прямих у просторі.
4. Взаємне розміщення прямої та площини.

Основні типи задач модуля 3:

1. Знаходження рівняння прямої за даними умовами.
2. Знаходження точки перетину прямої та площини.
3. Знаходження кута між прямими.
4. Знаходження кута між прямою та площиною.
5. Знаходження відстані від точки до прямої .
6. Знаходження відстані між двома мимобіжними прямими.

Основні форми контролю модуля 3:

1. Виконання індивідуального завдання.
2. Контрольна робота №1.
3. Контрольна робота №2.
4. Колоквіум.

Зміст індивідуального завдання до модуля 3:

Задані координати точок A,B,C,M (кожний студент має свій варіант заданих координат). Необхідно:

1) скласти канонічне рівняння прямої AB;

2) скласти рівняння площини, що проходить через точку C перпендикулярно до прямої AB і точку перетину цієї площини з прямою AB;

3) знайти відстань від точки С до прямої АВ. Скласти рівняння площини (АВС);

4) скласти рівняння прямої, що проходить через точку М і перпендикулярна до площини (АВС);

5) знайти відстань від точки М до площини (АВС).

Досвід викладання у вищому навчальному закладі переконує в тому, що для реалізації модульно-рейтингової форми навчання необхідно виконання двох умов:

– наявність методичного забезпечення, розробка якого потребує значних витрат часу, а також морального та фізичного напруження викладача. Більше того, виділення основного змісту модулів, розробка різнорівневих програм з навчального предмету потребує об'єднання зусиль методистів та викладачів-предметників. Необхідне як теоретичне обґрунтування цих питань, так і експериментальна перевірка висновків;

– сформованість у студентів певного рівня позитивної мотивації навчання, що само по собі є однією з актуальних проблем сучасної освіти.

На нашу думку, будь-яка технологія навчання не може вирішити всі проблеми вищої освіти. Але на сучасному етапі модульно-рейтингова система освіти має більше переваг, ніж недоліків.

Література:

1. Алексюк А.М. Педагогіка вищої школи. Курс лекцій: Модульне навчання: Навчальний посібник для студентів. – К.: ІСДО, 1993.

2. Атанасян Л.С. Геометрия, ч. 1. – М.: Просвещение, 1973.

3. Клетеник Д.В. Сборник задач и упражнений по аналитической геометрии. – М.:Наука, 1972.

4. Розуменко А.О., Розуменко А.М. Систематизація знань студентів при вивченні теми «Пряма та площина в просторі» // Вісник СДАУ, наук.-метод. журнал, вип. 5, 2000. – С. 195–200.

ЕЛЕМЕНТИ МОДУЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЇ ТЕХНОЛОГІЇ ВИВЧЕННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В КРИВОРІЗЬКОМУ КОЛЕДЖІ НАЦІОНАЛЬНОГО АВІАЦІЙНОГО УНІВЕРСИТЕТУ “КРАУСС”

В.В. Корольський[1], Н.О. Тіхова[2]
[1] м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет
[2] м. Кривий Ріг, Криворізький коледж Національного авіаційного університету “КРАУСС”

В Криворізькому коледжі Національного авіаційного університету “КРАУСС“ здійснюється підготовка фахівців на рівні бакалаврів за спеціальностями: “Обслуговування пілотно-навігаційних комплексів”, “Експлуатація авіаційних електрифікованих комплексів”, “Електричні системи та комплекси транспортних засобів”.

Спеціальна підготовка за всіма названими спеціальностями потребує вивчення фундаментальних дисциплін, серед яких курс вищої математики є пріоритетним. Ми вважаємо, що викладання в навчальних закладах такого типу має відповідати сучасним вимогам і рівню. Ці вимоги випливають зі стандартів Болонського процесу. Тому далі ми зупинимось на пропонованих нами елементах модульно-рейтингового вивчення вищої математики на прикладі підготовки майбутніх бакалаврів спеціальності “Електричні системи та комплекси транспортних засобів”.

За навчальним планом на вивчення вищої математики відводиться 594 години, з них 264 (44,4%) години на самостійну роботу. Таким чином, відповідно маємо усього 11 кредитів, аудиторних занять – 6,1 кредиту, СРК – 4,9 кредитів.

Розподіл навчального матеріалу за модулями [3] може бути таким, як показано в таблиці 1.

Таблиця 1.

Розподіл навчального матеріалу за семестрами

Навчальна семестрова форма контролю	Навчальний модуль	Змістовий модуль	Загальний обсяг, годин/кредитів	Аудиторні заняття, годин/кредитів	СРК, годин/кредитів	Контрольні заходи
І семестр екзамен	НМ1	ЗМ1, ЗМ2, ЗМ3, ЗМ4, ЗМ5, ЗМ6, ЗМ7, ЗМ8, ЗМ9, ЗМ10, ЗМ11, ЗМ12	178/3,3	112/2,07	66/1,22	Рейтинг-контроль, атестація
	НМ2	ЗМ1, ЗМ2, ЗМ3, ЗМ4, ЗМ5, ЗМ6				Рейтинг-контроль, к/р.

Навчальна семестрова форма контролю	Навчальний модуль	Змістовий модуль	Загальний обсяг, годин/кредитів	Аудиторні заняття, годин/кредитів	СРК, годин/кредитів	Контрольні заходи
II семестр Диференційований залік	НМ1	ЗМ1, ЗМ2, ЗМ3, ЗМ4, ЗМ5, ЗМ6	176/ 3,26	110/2,04	66/1,22	Рейтинг-контроль, атестація
	НМ2	ЗМ1, ЗМ2, ЗМ3, ЗМ4				Рейтинг-контроль, к/р.
	НМ3	ЗМ1, ЗМ2, ЗМ3, ЗМ4				Рейтинг-контроль, атестація
	НМ4	ЗМ1, ЗМ2, ЗМ3, ЗМ4				Рейтинг-контроль, к/р.
III семестр Диференційований залік	НМ1	ЗМ1, ЗМ2, ЗМ3, ЗМ4, ЗМ5	108/2	42/0,78	66/1,22	Рейтинг-контроль, атестація
	НМ2	ЗМ1, ЗМ2, ЗМ3, ЗМ4				Рейтинг-контроль, атестація
	НМ3	ЗМ1, ЗМ2, ЗМ3, ЗМ4				Рейтинг-контроль, к/р.
IV семестр екзамен	НМ1	ЗМ1, ЗМ2, ЗМ3, ЗМ4, ЗМ5, ЗМ6, ЗМ7, ЗМ8, ЗМ9, ЗМ10	132/2,44	68/1,26	66/1,22	Рейтинг-контроль, атестація
	НМ2	ЗМ1, ЗМ2, ЗМ3, ЗМ4, ЗМ5				Рейтинг-контроль, к/р.
Усього	НМ-11	ЗМ-64	594/11	330/6,1	264/4,89	2 екзамени, 2 заліки

Пропонується наступний зміст навчальних та змістових модулів:

<u>*I семестр*</u>

НМ1 – "Елементи лінійної алгебри і аналітична геометрія": ЗМ1 – Визначники; ЗМ2 – Матриці; ЗМ3 – Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) загального виду; ЗМ4 – Вектори; ЗМ5 – Скалярний та векторний добутки; ЗМ6 – Мішаний добуток векторів; ЗМ7 – Рівняння лінії на площині; ЗМ8 – Рівняння площини у просторі; ЗМ9 – Площина у просторі; ЗМ10 – Рівняння лінії у просторі; ЗМ11 – Криві другого порядку; ЗМ12 – Поверхні другого порядку.

НМ2 – "Вступ до математичного аналізу": ЗМ1 – Множини; ЗМ2 – Функція; ЗМ3 – Границя і неперервність функції; ЗМ4 – Похідна; ЗМ5 – Диференціальне числення функції однієї змінної.

II семестр

НМ1 – "Диференціальне числення функції декількох змінних": ЗМ1 – Основні поняття функції декількох змінних; ЗМ2 – Границя і неперервність функції; ЗМ3 – Частинні похідні; ЗМ4 – Диференціал функції; ЗМ5 – Похідна за напрямом. Градієнт; ЗМ6 – Екстремум функції декількох змінних.

НМ2 – "Інтегральне числення": ЗМ1 – Первісна функція і невизначений інтеграл; ЗМ2 – Методи інтегрування; ЗМ3 – Визначений інтеграл; ЗМ4 – Невласний інтеграл.

НМ3 – "Диференціальні рівняння": ЗМ1 – Основні поняття і означення диференціальних рівнянь; ЗМ2 – Диференціальні рівняння першого порядку; ЗМ3 – Диференціальні рівняння другого порядку; ЗМ4 – Системи диференціальних рівнянь.

НМ4 – "Ряди": ЗМ1 – Основні поняття. Збіжність ряду; ЗМ2 – Степеневі ряди; ЗМ3- Функціональні ряди; ЗМ4 – Тригонометричні ряди.

III семестр

НМ1 – "Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли": ЗМ1 – Подвійні інтеграли їх властивості; ЗМ2 – Потрійний інтеграл; ЗМ3 – Заміна змінних у потрійному інтегралі. ЗМ4 – Криволінійні інтеграли І-го та ІІ-го роду; ЗМ5 – Поверхневі інтеграли І-го та ІІ-го роду, їх обчислення.

НМ2 – "Елементи теорії поля": ЗМ1 – Теорія поля; ЗМ2 – Векторне поле; ЗМ3 – Ротор векторного поля; ЗМ4 – Типи найпростіших полів.

НМ3 – "Елементи теорії функції комплексної змінної": ЗМ1 – Поняття функції комплексної змінної(ФКЗ); ЗМ2 – Основні елементарні функції, похідна ФКЗ; ЗМ3 – Гармонійні функції; ЗМ4 – Степеневий ряд.

IV семестр

НМ1 – "Елементи теорії ймовірності та математичної статистики. Основні числові методи": ЗМ1 – Випадкові події; ЗМ2 – Комбінаторні задачі в теорії ймовірностей; ЗМ3 – Алгебра подій; ЗМ4 – Випадкові величини; ЗМ5 – Неперервні випадкові величини; ЗМ6 – Основні поняття математичної статистики; ЗМ7 – Гістограма й емпірична функція розподілу; ЗМ8 – Метод хорд і дотичних; ЗМ9 – Метод ітерацій, збіжність методу; ЗМ10- Наближення функцій.

НМ2 – "Елементи математичної логіки": ЗМ1 – Початкові поняття математичної логіки і теорії множин; ЗМ2- Класи і множини; ЗМ3 – Способи задання множин та операції над ними; ЗМ4 – Алгебра відношень; ЗМ5 – Булеві функції.

При формуванні навчального модуля ми виходимо з того, що *навчаль-*

ний модуль – це логічно завершена, відносно самостійна, цілісна частина навчального курсу, сукупність теоретичних та практичних завдань відповідного змісту та структури розробленою системою навчально-методичного та індивідуально-технологічного забезпечення, необхідним компонентом якого є відповідні форми рейтингового контролю [4].

Як бачимо з табл. 1, кожному навчальному модулю відповідає декілька змістових модулів. Під змістовим модулем ми розуміємо науково адаптовану, відкриту і взаємозалежну систему знань (теорії, закони, поняття), норм (алгоритми, програми, інструкції) і цінностей (ставлення, оцінки тощо), яка визначається науковим проектом змістового модуля, міні-підручником і дістає процесуально-функціональне втілення в міні-модулі.

Використання змістового модуля є важливою умовою для формування рейтингу курсантів при поточному контролі їх знань, умінь і навичок.

Більш детально розглянемо основні поняття модульно-рейтингової системи навчання з метою їх впровадження для вивчення курсу вищої математики.

Рейтинг (рейтингова оцінка) – кількісна оцінка досягнень курсанта за багатобальною шкалою в процесі виконання ним заздалегідь визначеної сукупності навчальних завдань.

Рейтингова система оцінювання – це система визначення якості виконаної курсантом усіх видів аудиторної та самостійної роботи та рівня набутих ним знань та вмінь шляхом оцінювання в балах результатів цієї роботи під час поточного, модульного (проміжного) та семестрового (підсумкового) контролю, з наступним переведенням оцінки в балах у оцінки за традиційною національною шкалою та шкалою ECTS [4].

Для теоретичного контролю розроблена система питань, кількість яких при здійснені одного контролю може коливатися від 7 до 17.

Модуль зараховується курсанту, якщо він під час модульного контролю отримав позитивну (за національною шкалою) контрольну модульну рейтингову оцінку та позитивну підсумкову модульних рейтингових оцінок.

Сума підсумкових модульних рейтингових оцінок у балах становить підсумкову семестрову модульну рейтингову оцінку, яка перераховується в оцінку за національною шкалою.

Таблиця 2.

Відповідність підсумкових семестрових модульних рейтингових оцінок у балах оцінкам за національною шкалою

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою
78-88	Відмінно
66-78	Добре
53-65	Задовільно
Менше 53	Незадовільно

Якщо курсант має позитивну (за національною шкалою) підсумкову семестрову модульну рейтингову оцінку, то він допускається до семестрового контролю, який здійснюється в формі семестрового екзамену.

Якщо курсант під час семестрового екзамену отримав позитивну (за національною шкалою) екзаменаційну рейтингову оцінку, то навчальний курс з вищої математики у даному семестрі зараховується.

Таблиця 3.

Відповідність екзаменаційної рейтингової оцінки у балах оцінкам за національною шкалою

Оцінка в балах	Оцінка за національною шкалою
11-12	Відмінно
9-10	Добре
7-8	Задовільно
Менше 7	Незадовільно

У випадку, коли курсант виконував навчальну роботу протягом семестру з порушенням встановлених термінів і не отримав заохочуваних додаткових балів, він повинен виконати додаткове індивідуальне завдання за узгодженою з викладачем темою і захистити його з позитивною (за національною шкалою) оцінкою (табл. 3), яка має бути додана до поточної модульної рейтингової оцінки [4].

Література:

1. Корольський В.В. Математичний аналіз: Навч. посібник. – Кривий Ріг: Друк. СПД Щербинок С.Г., 2004. – 226 с.
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика: Учеб. пособие для техникумов. – М.: Высш. шк., 1991. – 480 с.
3. Огневюк В.О., Фурман А.В. Принцип модульності в історії освіти. – К.: УІПКККО Міністерства освіти України, 1995. – 85 с.
4. “Тимчасове Положення про організацію навчального процесу за кредитно-модульною системою (в умовах педагогічного експерименту)” та “Тимчасове Положення про рейтингову систему оцінювання”, затверджених наказом ректора Національного авіаційного університету від 15.06.2004 №122/од.
5. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах і задачах. – Харків: Видавництво “Фактор”, 2004.

КРЕДИТНО-МОДУЛЬНА ТЕХНОЛОГІЯ ПРИ НАВЧАННІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ В ПЕДВУЗАХ

В.В. Корольський, Д.Є. Бобилєв
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет
bob_d@nm.ru

Україна поступово інтегрується в єдиний європейський освітній простір. Впроваджуються вимоги Болонського процесу в освітню систему. Але ці процеси особливо важливі в розвитку педагогічної освіти як стимулюючого фактора входження України у світовий та європейський освітній простір. Це зазначалось і на Всеукраїнській нараді ректорів педагогічних і класичних університетів, що відбулась 29-30 вересня 2004 р. у Харківському національному педагогічному університеті ім. Г.С. Сковороди. В рекомендаціях наради зазначалось, що з метою підвищення якості підготовки педагогічних працівників необхідно забезпечити вдосконалення навчального процесу на засадах гуманності, особистісно-орієнтованої педагогіки, розвитку і саморозвитку студентів. Для цього слід передбачити індивідуалізацію навчального процесу та посилення ролі самостійної роботи студентів [1].

В освітньо-професійній програмі підготовки бакалавра за спеціальністю "Фізика" на вивчення математичного аналізу відводиться найбільша кількість годин (702 год.). В навчальних планах цієї спеціальності, що складені у Криворізькому державному педагогічному університеті на фізико-математичному факультеті, із цих годин на самостійну роботу виділено 259 год. Тому постають проблеми оптимізації контролю за цією роботою і підвищення її якості. Ці проблеми у певній мірі допомагає вирішити модульно-рейтингова система навчання.

Основним принципом модульно-рейтингового навчання є створення розвиваючої дидактичної системи, яка повинна функціонувати за певними об'єктивними нормами. Впровадження цієї системи потребує вирішення двох досить складних проблем:

1. Проблему систематизації, організації та дозування змісту навчальної дисципліни.

2. Проблему взаємодії викладача і студента.

Розв'язок першої проблеми пов'язаний з визначенням системи *модулів*, тобто структуризації та систематизації змісту навчання протягом часу, який передбачається навчальним планом спеціальності.

Розв'язок другої проблеми пов'язаний зі створенням системи контролю та оцінювання знань, умінь та навичок студентів з метою визначення *рейтингу* в навчанні кожного студента академічної групи.

З названих проблем стає зрозумілою назва модульно-рейтингової системи навчання. Таким чином, модуль є базовим поняттям модульно-рейтингової системи навчання і оцінювання знань.

Термін “модульне навчання” семантично пов’язаний з поняттям “модуль”. Одне з найбільш розповсюджених його визначень – функціональний вузол, цілісний блок інформації. Варто також згадати існуюче на цей час означення поняття модуля в науково-методичній літературі: модуль – це “відносно самостійна частина навчального матеріалу, яка містить насамперед одне або декілька близьких за змістом і фундаментальних за значенням понять, законів” [2–4].

Ми виходимо з того, що модуль – це певний розділ, тема чи інша доза теоретичного та практичного змісту навчальної дисципліни. Саме завдяки модулю кожен викладач дозує зміст структури навчальної дисципліни на весь термін її вивчення, на кожен семестр, на певні частини навчального семестру, а можливо і на кожне аудиторне заняття. При цьому ми дійшли висновку, що на самостійну роботу студента не доцільно виносити цілі модулі, тобто самостійна робота дозується в межах кожного модуля. Вважаємо, що підтекст такого підходу зрозумілий.

При побудові модулів курсу математичного аналізу ми виходимо з таких основних принципів:

1) цільове призначення навчального матеріалу;
2) певна повнота та цілісність навчальної інформації в модулі;
3) відносна самостійність елементів модуля;
4) оптимальна за часом та дозою подача інформації в процесі навчальних занять;
5) обов’язкова реалізація зворотного зв’язку при вивченні окремих частин модуля;
6) реалізація контролюючих функцій при засвоєнні навчальних завдань для досягнення поставленої в кожному модулі мети навчання.

Виходячи зі сказаного, ми використовуємо такі модулі:

- навчальний модуль;
- змістовний модуль;
- міні-модуль.

Навчальний модуль – відносно самостійна, цілісна частина курсу математичного аналізу, яка завдяки єдиному навчально-технологічному циклу поєднує кілька змістовних модулів.

Наприклад, в першому семестрі навчальним планом спеціальності “Фізика” передбачається на вивчення математичного аналізу всього 114 годин: 36 год. – лекції; 36 год. – практичні заняття; 42 год. – самостійна робота, вид атестацій – екзамен. Згідно навчальної програми така кількість годин дозволяє вивчити протягом семестру два навчальних модуля: I – вступ до математичного аналізу; II – диференціальне числення функції однієї змінної.

Змістовний модуль – це відкрита і взаємозалежна система знань. Сюди входять поняття, означення, теореми, формули, що визначаються навчальним посібником, та методичні рекомендації. Наприклад, перший модуль (модуль I – вступ до математичного аналізу) містить такі змістовні модулі:

М1 – Елементи теорії множин.

М2 – Функція однієї змінної.

М3 – Границя функції.

М4 – Властивості границь збіжних функцій

М5 – Неперервність функції.

Кожен із змістовних модулів містить певну кількість міні-модулів.

Міні-модуль – основна форма організації навчання. В модульно-рейтинговій системі вивчення математичних дисциплін, вона характеризується такими особливостями:

1) нерозривним зв'язком зі змістовним модулем;

2) 20-30 хвилинним часовим відрізком навчального процесу;

3) має певну, чітко визначену технологію навчання, яка координує спільна діяльність викладача і студента.

Наприклад, М1 містить такі міні модулі: М1-1 – основні поняття; М1-2 – дії над множинами; М1-3 – числові множини; М1-4 – відношення між множинами; М1-5 – відображення множини на множину.

Обсяг кожного змістовного модуля різний не тільки закінченістю міні-модулів, але і за обсягом стандартних друкованих сторінок. Це пояснюється необхідністю виконання названих вище принципів побудови модулів. Але загальним для всіх навчальних та змістових модулів є те, що вони починаються з визначення структури модуля, переліку основних понять, які складають зміст саме цього модуля. Обов'язково формулюється мета вивчення модуля.

Кожен навчальний і змістовний модуль закінчується системою контрольних питань для самоперевірки. На початку кожного змістовного модуля після визначення його структури окремо визначаються питання, що виносяться на самостійне опрацювання студентом.

Декілька зауважень стосовно форм самостійної роботи студентів (СРС). При вивченні математичних дисциплін такими є:

- опрацювання лекційного матеріалу;
- доповнення конспекту лекцій з використанням запропонованих підручників та посібників;
- самостійне вивчення окремих частин змістовних модулів з використанням науково-методичної літератури;
- підготовка до практичних занять;
- підготовка та виконання контрольних робіт за матеріалом окремих змістовних модулів;
- підготовка та виконання підсумкових контрольних робіт;
- підготовка опорних конспектів з окремих міні-модулів;
- підготовка до заліку або іспиту.

Основними методами контролю СРС є:

- тестування та короткочасні опитування на лекціях;
- тестування та опитування студентів на практичних заняттях в ме-

жах вивчення окремих міні модулів;
- перевірка виконання письмових колоквіум та контрольних робіт;
- перевірка виконання індивідуальних завдань;
- індивідуальні співбесіди та консультацій;
- проведення контрольних робіт з окремих змістових модулів;
- проведення підсумкових контрольних робіт за результатами вивчення навчальних модулів;
- оцінка діяльності студентів в науковій роботі;
- залік або екзамен;
- визначення рейтингу студентів за навчальний семестр.

Таким чином, ми підійшли до визначення рейтингу студента, який повинен стати не тільки показником для одержання семестрової оцінки і оцінки за весь курс вивчення дисципліни, а й стати основним компонентом мотивації студента до якісного навчання.

Під рейтингом ми розуміємо комплексний кількісний показник, який враховує результати учбової діяльності студента за усіма видами аудиторних занять, самостійної роботи, участі в науково-дослідній роботі. При цьому ми також враховуємо відношення студентів до відвідування всіх форм занять та їх участі в наукових гуртках, проблемних групах, конкурсах, олімпіадах, виступах на конференціях, семінарах та наявність публікацій.

Методика визначення рейтингу може бути різною. Зокрема, ми випробовуємо таку:
- відвідування занять – 1 бал за кожне відвідане заняття;
- активність на практичних заняттях 0-1-2 бали протягом вивчення одного змістовного модуля;
- виконання завдань на СРС 0-1-2-3-4 бали за кожне завдання на СРС в межах одного змістовного модуля;
- виконання контрольних робіт за п’ятибальною системою: 0-1-2-3-4-5 балів;
- участь у наукових гуртках та проблемних групах, участь в конкурсах і олімпіадах – 5 балів (переможець – 10 балів);
- участь в наукових конференціях з доповідями – 5 балів;
- наявність публікацій – 10 балів.

Таким чином, за всіма видами роботи максимальна сума складає 100 балів.

Але для того, щоб бути допущеним до складання заліку або екзамену студент повинен набрати не менше 60 балів. При цьому обов’язковим є виконання всіх індивідуальних і самостійних робіт, що передбачені змістом кожного навчального модуля.

Екзамен проходить в письмовій формі. Екзаменаційні білети складаються з 6 питань (2 теоретичних, 4 практичних), кожне з яких оцінюється в 10 балів. Якщо студент виконує бездоганно завдання, то отримує 10 балів, з деякими помилками – 5 балів, зі значними помилками або не виконує – 0 балів.

Отже, на екзамені студент може отримати максимум 60 балів, а враховуючи результати поточної навчальної роботи – 160 балів.

При переведенні результатів в чотирибальну систему оцінювання знань слід користуватися наступною таблицею:

Кількість балів	Оцінка
160; 150; 140	“5”
130; 120; 110	“4”
100; 90; 80	“3”
< 80	“2”

Запропонована технологія апробована на кафедрі математики Криворізького державного педагогічного університету при викладанні математичного аналізу та інших дисциплін. Аналіз статистичних даних дозволяє зробити висновок про значне підвищення якості навчання, що вказує на доцільність використання кредитно-модульної технології навчання при викладанні математики.

Література:

1. Рекомендації Всеукраїнської наради ректорів з питань розвитку педагогічної освіти України та її інтеграції в європейський освітній простір – http://www.mon.gov.ua/.
2. Слєпкань З.І. Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі. – К.: НПУ, 2000. – 210 с.
3. Крилова Т.В. та ін. Самостійна робота студентів в умовах особистісно орієнтованого навчання // Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики: Тези Всеукр. наук.-практ. конференції. – К.: НПУ, 2004. – С. 90–91.
4. Методичні матеріали “Про запровадження кредитно-модульної системи організації навчального процесу в 2004-2005 навчальному році” в Національному педагогічному університеті ім. М.П. Драгоманова / Укл. доц. Р.М. Вернидуб. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2004. – 24 с.
5. Освітньо-кваліфікаційна характеристику (ОКХ) випускників підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр зі спеціальності 6.010100 "Педагогіка і методика середньої освіти. Фізика". – К., 2002. – 63 с.

СЕМАНТИЧЕСКИЙ КОНСПЕКТ ПО ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Е.Г. Евсеева, А.И. Савин
г. Донецк, Донецкий национальный технический университет
eeg@dise.donbass.com

Знания учебной предметной области подразделяются на тематические, процедурные, операционные, функциональные и семантические [2; 3]. Семантические знания по учебным предметам содержатся в учебниках, учебных пособиях, другой учебной литературе. С точки зрения дидактики, в содержании любого учебника принято выделять две части. К первой части относится информация, непосредственно составляющая содержание предмета, или предметные знания. Другая часть – это информация, обслуживающая предметные знания. Это могут быть, например, сведения из других предметов, выкладки, толкования, объяснения, информация о применении и использовании предметных знаний в других дисциплинах, а также в технике, в жизни и т.п.

Предметные знания в учебнике не выделены специально, они распределены по всему учебнику, переплетаются с другими знаниями, не формализованы. Для того чтобы их формализовать, необходимо из учебника выделить отдельные факты и определенным образом их сгруппировать.

По структуре факты могут быть самыми разнообразными, в той или иной мере сложными, или составными [3]. Однако основу составляют элементарные факты, которые, выступая в различных отношениях, и образуют факты сложные. Например, факт из теории множеств *«Конечным множеством называется множество, состоящее из конечного числа элементов»*, который, по сути дела, является определением конечного множества, может быть разбит на три более простых факта:

1) множество состоит из элементов,

2) число элементов множества может быть различным,

3) некоторое множество называется конечным.

Приведенные факты уже не разлагаются на более простые и поэтому являются *элементарными* фактами. Хотя они и содержат предметные термины, но предметного смысла, или семантики, не имеют. Предметный смысл возникает только тогда, когда эти элементарные факты объединяются вместе.

Простейший по составу факт, имеющий предметный смысл, носит название *семантический* факт. Семантический факт – это всегда законченная и единственная мысль, которая передается одним предложением, или высказыванием. По сути дела, семантические факты играют роль *единиц знаний* предметной области.

Семантическим фактом является приведенное выше определение конечного множества. Больше того, любое определение понятия есть семантический факт. Однако семантические факты – это не только определения, они могут передавать различное содержание. Предметом семантических фактов являются понятия, явления, процессы, законы, теоремы, выводы, причины, следствия, свойства, признаки, модели и др. Например, факт: *«Разность универсального множества и некоторого множества А равна дополнению множества А»,* представляет собой теорему.

Специфическим семантическим фактом, присущим математическим дисциплинам, является символический вид различного рода утверждений. Именно такими фактами являются формулы и обозначения. Например, факт: «*Объединение множеств А и В в символической форме имеет вид*: $A\cup B$», вводит обозначение операции объединения множеств, а семантический факт «$A\cup B=B\cup A$» является символическим видом коммутативного свойства операции объединения множеств.

Полный набор семантических фактов, или высказываний, расположенных в порядке изучения материала, получил название *семантического конспекта.* По сути дела, это полный набор лаконично представленных мыслей предметной области. Изданный отдельно, он представляет собой очень тонкую брошюру, потому что в ней нет выкладок, доказательств и объяснений. Тем не менее, она содержит все положения изучаемого курса.

По мнению преподавателей, применяющих в обучении семантический конспект, а также студентов, он оказался эффективным средством в самостоятельной работе по закреплению материала, при подготовке к практическим и лабораторным занятиям. Конспект помогает уяснить структуру материала, освещаемого на лекции, выделить и запомнить существенные моменты. При этом «выживаемость» знаний существенно возрастает. Некоторые разделы курса, не представляющие особой трудности, могут быть вынесены на самостоятельное изучение, при этом соответствующие разделы конспекта служат своеобразным планом к этому изучению. Студенты отмечают особую ценность конспекта при подготовке к экзамену, когда из-за обилия информации существует опасность не выделить и не усвоить главное. Регулярно обращаясь к семантическому конспекту в течение семестра (а это не требует сколько-нибудь значительных затрат времени), студент к сессии помнит все высказывания, т.е. мысли, составляющие существо курса, у него готов его каркас, и он быстро наполняет его знаниями, которые не вошли в семантический конспект.

Теория множеств является разделом математики, который не изучается студентами инженерных и экономических специальностей. В курсе «Высшая математика», с которого студенты начинают изучение математических дисциплин, преподаватель, в лучшем случае, может выделить одну лекцию на изложение основных положений теории множеств. При этом считается, что этот материал студентам знаком из школьного курса, поскольку в школе они работали с числовыми множествами, выполняли над ними операции пересечения и объединения, знакомы с понятием пустого множества. Тем не менее, систематизированных знаний по теории множеств студенты, как правило, не имеют. Особенную трудность для них представляет выполнение операций с множествами и использование свойств этих операций в случае, когда множества не являются числовыми.

А ведь теория множеств широко применяется как при изучении математических дисциплин, так и в цикле специальной подготовки. С позиций теоретико-множественного подхода, например, в курсе «Высшая математика» излагается теория функции одной переменной, в курсе «Теория вероятностей» – алгебра событий. Фактически, студенты должны самостоятельно изучить необходимые элементы теории множеств в начале изучения курса «Высшая математика», и повторить их перед изучением курса теории вероятностей. Пособий, рассчитанных на самостоятельное изучение теории множеств в рамках инженерного образования, практически нет.

Целью данной работы является составление семантического конспекта по теории множеств, ориентированного на студентов инженерных и экономических специальностей.

Написание семантического конспекта – дело очень непростое, хотя и благодарное. Это очень трудоемкая и кропотливая работа. Она требует от преподавателя глубокого знания учебной дисциплины, умения анализировать, синтезировать и обобщать учебный материал. Такая работа заставляет преподавателя вдумываться в каждое предложение, в каждую мысль, изложенную в учебнике. И в начале этой работы с большим удивлением открываешь, как неточно и некорректно сформулированы многие понятия в учебниках и как эти неточности переходят из одного учебника в другой без изменения. В общем контексте это не бросается в глаза, но часто становится очевидным, если сфокусировать внимание на конкретной мысли.

Перед тем как приступить к составлению семантического конспекта, необходимо уточнить учебную программу по дисциплине, восстановить в памяти все понятия и основные положения курса. Дальнейшая работа должна быть направлена на вычленение семантических фактов. Для этого оказывается необходимым проработать большое количество учебников и другой специальной литературы. Нами были использованы учебники и учебные пособия [1; 6].

Удобно иметь однородную структуру конспекта. Главным вопросом здесь является выделение разделов, из которых будет состоять конспект. Делается это по содержанию, тематически, при этом рекомендуется следить, чтобы разделы были самостоятельны, однако не слишком большими. Например, теория множеств для составления семантического конспекта может быть разбита на пять разделов:

1. Основные понятия;

2. Операции над множествами и их свойства;;

3. Свойства универсального и пустого множеств;

4. Схематическое изображение множеств;

5. Числовые множества.

Все высказывания семантического конспекта пронумерованы. Каждое высказывание имеет номер, состоящий из двух частей, разделенных точкой. Первая часть – это номер раздела, к которому принадлежит данное высказывание, вторая часть – его номер в данном разделе. Кроме того, некоторые номера стоят также после высказываний. Это номера других высказываний, от которых данное зависит, которыми оно определяется, из которых следует. Связи между высказываниями могут быть очень простыми, например, ссылки на термины, которые употребляются в данном высказывании, и более сложными, глубокими, например, связь причины и следствия. Эти связи, по существу, задают структуру предметных знаний, определяют развитие учебного предмета, формальную логическую схему рассуждений, и студенты должны самостоятельно наполнить ее конкретным содержанием. Это обстоятельство способствует повышению эффективности обучения с использованием семантического конспекта.

В качестве примера приведем фрагмент семантического конспекта:

2. Операции над множествами и их свойства.

2.1. Операции над множествами позволяют получить из исходных множеств новые множества. (1.1)

2.2. Для множеств определены операции: объединение, пересечение, разность, дополнение. (1.1)

2.3. Объединением двух множеств называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат или первому множеству, или второму, или обоим множествам. (1.1; 1.2)

2.4. Объединение множеств A и B в символической форме имеет вид: $A \cup B$*. (1.6; 2.3)*

2.5. Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих каждому из данных множеств. (1.1; 1.2)

2.6. Пересечение множеств A и B в символической форме имеет вид: $A \cap B$*. (1.6; 2.5)*

2.7. Разностью двух множеств называется множество, состоящее из всех элементов первого множества, не принадлежащих второму множеству. (1.1; 1.2)

2.8. Разность множеств A и B в символической форме имеет вид: $A \setminus B$*. (1.6; 2.7)*

2.9. Дополнением множества называется множество, состоящее из всех элементов универсального множества, не принадлежащих данному множеству. (1.1; 1.2; 1.14)

2.10. Дополнение множества A в символической форме имеет вид: $\overline{A}$*. (1.6; 2.9)*

Как видно, высказывания этого раздела имеют не только свое внутреннее обоснование (ссылки на высказывания этого раздела), но и опираются на высказывания раздела 1 (Основные понятия).

После того как выделена структура конспекта, можно приступать к формулировке высказываний, руководствуясь принципами, сформулированными Г.А. Атановым [2]. При этом очень важно следовать *грамматическому принципу.* Существуют определенные закономерности построения высказываний, которые обусловлены особенностями логико-грамматического метода. Этот метод основывается на том, что большинство высказываний отчетливо делится на две части. Первая часть, которая представляет собой исходный пункт высказывания, называется *темой*. Тема высказывания либо уже известна, либо предопределяется контекстом. Вторая часть называется *ремой*. Она сообщает нечто новое о теме и представляет собой главную цель высказывания. Рема заключает в себе содержание сообщения и является семантическим центром высказывания. Рассмотрим следующий пример:

3.1. Дополнение пустого множества равно универсальному множеству.

Здесь темой является «*дополнение пустого множества* », а ремой – *«равно универсальному множеству»*. Это высказывание служит для того, чтобы показать*, чему равно* дополнение пустого множества. Его раскрывает рема – «*универсальному множеству*». Это и есть главная цель и мысль высказывания.

Таким образом, порядок слов в предложении играет определенную роль и не может быть свободным. Если порядок слов изменить, то это может привести к изменению темы и ремы, они взаимно перевоплотятся друг в друга, и коммуникативная цель высказывания также изменится. Особенно важно соблюдать необходимый порядок слов в теоремах, которые задают необходимое или достаточное условие. Например:

1.26. Если множество A является подмножеством множества B и множество B является подмножеством множества C, то множество A является подмножеством множества C.

Первая часть высказывания «*множество A является подмножеством множества B и множество B является подмножеством множества C»* здесь является темой, а вторая – «*множество A является подмножеством множества C»* – ремой. Между ними существует четкая причинно-следственная связь: из темы следует рема. Если это высказывание переформулировать следующим образом:

1.26. Если множество A является подмножеством множества C, то множество A является подмножеством множества B и множество B является подмножеством множества C,

то в этом случае «*множество A является подмножеством множества C»* превратится в тему, из которой следует новая рема «*множество A является подмножеством множества B и множество B является подмножеством множества C»*. При этом не просто изменится смысл высказывания: утверждение теоремы станет неверным. Таким образом, необходимо внимательно следить за порядком слов в высказывании, чтобы правильно передавать смысл.

Принцип *недвусмысленности* требует, чтобы любое высказывание имело только одну рему, одну мысль. Следующее высказывание является примером, в котором этот принцип нарушается: *«Множества обозначают большими буквами латинского алфавита: A, B, C, ..., а их элементы – малыми буквами латинского алфавита*: *a, b, c, ..., x, y, z»*. Фактически данное высказывание содержит две темы и две ремы, и должно быть представлено двумя отдельными высказываниями:

1.3. Множества обозначают большими буквами латинского алфавита: A, B, C, ...

1.4. Элементы множества обозначают малыми буквами латинского алфавита: a, b, c, ..., x, y, z.

Существует особый тип высказываний, у которых отсутствует тема. Такие высказывания содержат комплексную рему и определяются как высказывания с *нулевой* темой. Высказывания с нулевой темой содержат сообщения о существовании или возникновении явлений и фактов, рассматриваемых как единое целое. Сущность таких высказываний не зависит от порядка слов в них. Высказывания с «нулевой» темой служат для введения определений понятий или обозначений. Примером могут служить высказывание, определяющее понятие пустого множества:

1.12. Пустым множеством называется множество, не содержащее элементов.

1.13. Пустое множество обозначается символом ∅.

Конспект должен соответствовать логике изложения учебного материала, а точнее, – логике развития науки, которая составляет предмет учебной дисциплины. Отсюда следует, что все понятия должны вводиться через определения до того, как они будут использоваться в высказываниях других типов. Отмеченное положение отражается принципом *первичности определений*. Например, может показаться логически стройным и последовательным следующее сочетание высказываний:

1.24. Если множество A является подмножеством множества B и множество B является подмножеством множества A, то множество A равно множеству B.

1.25. Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Однако здесь содержание первого высказывания определяется понятием *равенство множеств,* которое еще не введено, это будет сделано позднее. Поэтому это высказывание не может быть понято без апелляции к материалу из будущего и, следовательно, не имеет предметного содержания. Смысл высказываний должен формироваться предыдущими, а не последующими высказываниями. Верный порядок размещения высказываний должен быть следующим:

1.24. Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

1.25. Если множество A является подмножеством множества B и множество B является подмножеством множества A, то множество A равно множеству B. (1.24)

Точно так же не могут быть поняты высказывания, содержащие более одного нового понятия. Это положение отражается принципом *единственности*.

Когда составляешь семантический конспект, существует большой соблазн сокращать, использовать в последующем высказывании информацию из предыдущего, что создает иллюзию связного текста. Часто в последующем высказывании хочется употребить местоимение, как, например, в следующем случае:

4.1. Для схематического изображения множеств используют плоскую фигуру овальной или прямоугольной формы.

4.2. Эта фигура называется диаграммой Венна.

Видно, что вне контекста высказывание 4.2 теряет смысл. Такие ситуации запрещаются принципом *самодостаточности*.

Когда все высказывания сформулированы, они группируются в единое целое, т.е. в семантический конспект. Конечным этапом работы является определение внутренних связей между высказываниями. Ранее уже отмечалось, что после высказываний указываются номера других высказываний, связанных с данным. Самый простой, но необходимый вид связи – это напоминание понятий. Прежде всего, каждое понятие, упомянутое в высказывании, должно быть восстановлено в памяти. Без таких связей невозможно обойтись, ведь для верного толкования высказывания необходимо, чтобы был известен смысл всех его слов.

Существуют и более глубокие связи между высказываниями, например, *целого и части, общего и конкретного, причины и следствия.*

Связь общего и конкретного иллюстрируется следующими высказываниями:

2.2. Для множеств определены операции: объединение, пересечение, разность, дополнение.

2.3. Объединением двух множеств называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат или первому множеству, или второму, или обоим множествам. (1.1), (1.2)

Связи существуют не только между высказываниями одного раздела, но и теми высказываниями, которые расположены в различных разделах семантического конспекта. Так, приведенное выше высказывание 2.3, принадлежащее разделу 2 «Операции над множествами и их свойства», связано с высказываниями 1.1 и 1.2 из раздела 1 «Основные понятия»:

1.1. Множество – это совокупность каких-либо объектов, объединен-

ных общим признаком.

1.2. Объекты, образующие множество, называются элементами множества. (1.1)

Описанная работа очень полезна для установления таких связей в сознании студентов.

Выводы. Семантический конспект по теории множеств может быть использован при изучении математических дисциплин студентами инженерных специальностей. Дополненный примерами, задачами, индивидуальными заданиями, а также тестовыми заданиями открытого типа, построенными на основе высказываний конспекта, он превращается в эффективное пособие для самостоятельной работы студентов.

Литература:

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Просвещение, 1977.
2. Атанов Г.А. Возрождение дидактики – залог развития высшей школы. – Донецк: Изд-во ДОУ, 2003.
3. Атанов Г.А., Пустынникова И.Н. Обучение и искусственный интеллект, или Основы современной дидактики высшей школы. – Донецк: Изд-во ДОУ, 2002.
4. Евсеева Е.Г. Опорный конспект по курсу «Высшая математика» (линейная алгебра: матрицы). Дидактическое пособие для студентов экономических специальностей. – Донецк: ДИСО, 1999.
5. Евсеева Е.Г. Семантический конспект по линейной алгебре // Дидактика математики: проблемы и исследования: Международный сборник научных работ. – № 24. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2005. – С. 103-111.
6. Ляшенко И.Н., Ляшенко Е.И. Математика для экономистов. – Донецк: Браво, 1998.

МЕТОД НЕВ'ЯЗКИ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ НЕРІВНОСТЕЙ У ВУЗІВСЬКОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

З.Ю. Філер[1α], С.П. Ткаченко[2β]
[1] м. Кіровоград, Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка
[2] м. Кіровоград, Технікум Кіровоградського національного технічного університету
[α] filer@kw.ukrtel.net
[β] serro@ukr.net

Усі факти з теорії нерівностей та відповідні навички, отримані в школі, необхідні студентам з перших днів навчання математичним дисциплінам. На жаль, далеко не всі студенти добре засвоїли техніку розв'язання нерівностей у школі, тому необхідно повторити з ними основні факти, правила та алгоритми з теорії нерівностей. Тут доцільно познайомити їх з методом нев'язки [1–3] й далі використовувати його там, де це спростить вивчення нового матеріалу з вищої математики. Далі розглянемо деякі важливі застосування нерівностей у вузівських курсах математики.

1. Нерівності в означенні границі

Як для границі послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, так і для границі функції $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, в означенні границі фігурують *нерівності*: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0\in\mathbf{N}$: $n>n_0 \Rightarrow |a_n-A|<\varepsilon$ та $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ x_0\in\mathbf{R}$: $x>x_0 \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$. Студентам треба запропонувати приклади застосування цих означень для доведення перевірки правильності знайденої границі функції (послідовності) простого типу $\frac{3x+2}{5x-1}$ при $x\to+\infty$ ($\frac{3n+2}{5n-1}$ при $n\to+\infty$). Треба знайти очевидну границю $A=3/5=0{,}6$ й показати, що нерівність $\left|\frac{3x+2}{5x-1}-0{,}6\right|<\varepsilon$ має розв'язок виду $x>x_0$, *знайшовши* це $x_0(\varepsilon)$. Зваживши на те, що $x\to+\infty$, отримаємо під знаком модуля додатне число $2{,}6/(5x-1)$ й нерівність $2{,}6/(5x-1)<\varepsilon \Rightarrow 5x-1>2{,}6/\varepsilon \Rightarrow 5x>2{,}6/\varepsilon+1 \Rightarrow x>(2{,}6/\varepsilon+1)/5=x_0$. Тобто, знайшлося таке x_0, що для всіх $x>x_0$ виконується потрібна нерівність $\left|\frac{3x+2}{5x-1}-0{,}6\right|<\varepsilon$. Для *послідовності* границя й викладки ті ж самі, але можна в ролі n_0 взяти цілу частину числа $(2{,}6/\varepsilon+1)/5$.

Для границі A тієї ж функції при $x\to x_0$ ми повинні отримати з нерівності $|f(x)-A|<\varepsilon$ для x нерівність типу $x_0-\delta_1<x<x_0+\delta_2$, де числа δ_1, δ_2 залежать від ε. Так, для $x_0=1$ маємо $A=f(1)=5/4$. До нерівності $\left|\frac{3x+2}{5x-1}-\frac{5}{4}\right|<\varepsilon$ застосуємо метод нев'язки. В цьому випадку з подвійної нерівності $-\varepsilon < \dfrac{3x+2}{5x-1} - \dfrac{5}{4} < \varepsilon$ отримаємо рівняння з параметром, використавши нев'язку $2t$–1, $t\in(0;\ 1)$. Дійсно, при $t\to 0$ маємо –1, а при $t\to 1$ маємо 1. Отже, $\dfrac{13}{4}\dfrac{1-x}{5x-1} = \varepsilon(2t-1)$, $t\in(0;\ 1)$. Звідси отримаємо $x(t) = \left(\dfrac{13}{4\varepsilon} + 2t - 1\right) \Big/ \left(\dfrac{13}{4\varepsilon} + 5(2t-1)\right)$. При малому ε перші доданки в чисельнику та знаменнику значно більші других, тому знаменник завжди додатний і дріб неперервний. При t=0 маємо $x(0)=((13/4\varepsilon)-1)/((13/4\varepsilon)-5)>1$, $x(1)=((13/4\varepsilon)+1)/((13/4\varepsilon)+5)<1$, $x_0-\delta_1=x(1)$, $x_0+\delta_2=x(0)$ й отримуємо двосторонню нерівність $x(1)<x<x(0)$, яка описує *окіл* точки 1. В ролі δ можна взяти менше з чисел δ_1 й δ_2. Але підганяти під нерівність із модулем $|x-1|<\delta$ немає потреби.

На рис. 1 побудуємо значення $x(t)$ для трьох значень ε: 0,01; 0,001; 0,0001.

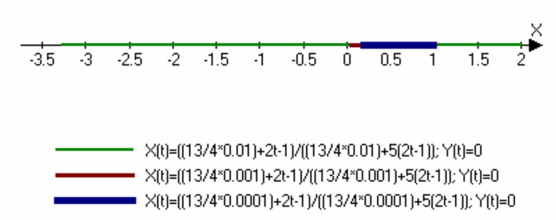


Рис. 1

2. Подвійні нерівності

Розглянемо подвійну нерівність $-2<x^2+4x+5<5$. При розв'язанні нерівностей даного типу ($A<f(x)<B$) учні розв'язують систему двох нерівностей: $f(x)>A$ і $f(x)<B$ і методом інтервалів шукають розв'язки. В даному випадку $x^2+4x+5>0$ ($x\in\mathbf{R}$), отже шукаються розв'язки нерівності $x^2+4x+5<5$: $x\in(-4;\ 0)$. Для наочності знайдених розв'язків використаємо програму Advanced Grafer, (яка доступна з мережі Інтернет за адресою http://www.serpik.net/agrapher/agrapher.zip), за допомогою якої побудуємо шукані розв'язки, як перетин двох інтервалів (рис. 2).

Розв'яжемо дану подвійну нерівність методом нев'язки. В даному випадку параметр буде у вигляді $2-7t$, $t\in(0;\ 1)$. Знаходиться він із таких міркувань: $A<f(x)<B \Rightarrow 0<f(x)-A<B-A \Rightarrow f(x)=-A+(B-A)t$. Отже, $x^2+4x+5=-2+7t$, $t\in(0;\ 1)$. Звідси $D=16-4\cdot(7-7t)=16-28+28t=4\cdot(7t-3)$; $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{7t-3}$, $t\in(0;\ 1)$.

При $3/7<t<1$, маємо дійсні розв'язки $x\in(-4;\ 0)$.

При $0<t<3/7$, маємо комплексні розв'язки $x_{1,2}=-2\pm i\sqrt{3-7t}$, $t\in(0;\ 1)$.

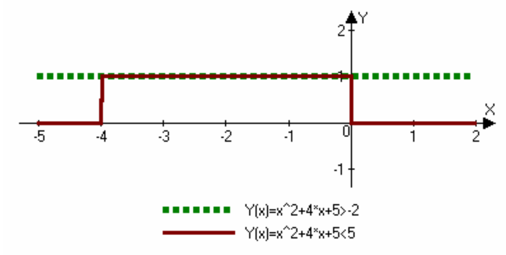


Рис. 2

Побудуємо знайдені розв'язки (рис. 3). Для зручності позначимо кожне значення x різним стилем ліній. Як бачимо з малюнка, розв'язками буде скінчений хрест: $x\in[-4;\,0]\cup$ відрізок прямої $\mathrm{Re}\,x=-2$, $\mathrm{Im}\,x\in\left[-\sqrt{3};\,\sqrt{3}\right]$.

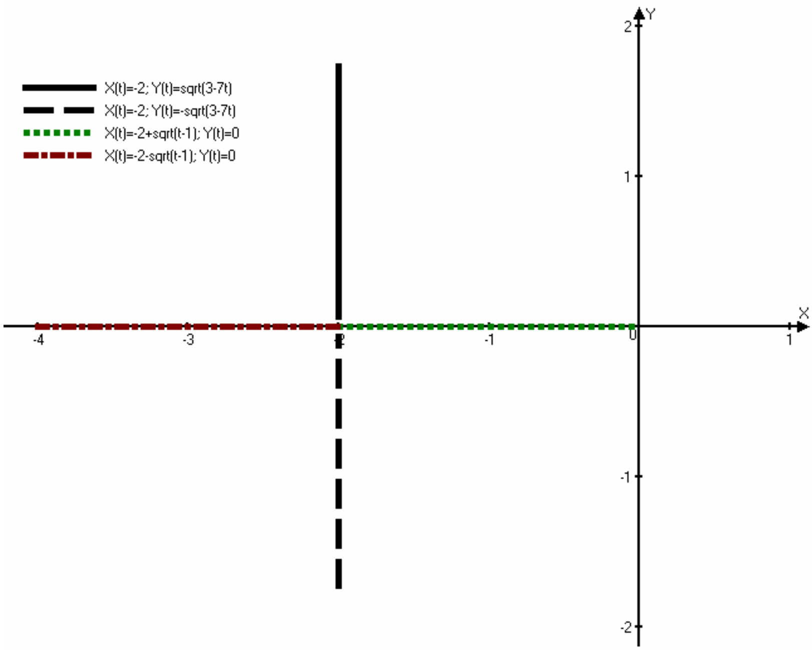


Рис. 3

3. Нерівності в означенні похідної

В означенні похідної краще приріст аргументу позначати однією літерою, наприклад, h. Тоді маємо $f'(x)=\lim(f(x+h)-f(x))/h$ при $h\to 0$, що означає на мові "$\varepsilon-\delta$": $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)$: $|h|<\delta(\varepsilon,\ x)\ \Rightarrow\ |(f(x+h)-f(x))/h-f'(x)|<\varepsilon$. При розв'язанні цієї нерівності в ролі невідомого є приріст h, а аргумент x розглядається як параметр. Використовуючи метод нев'язки, замість нерівності отримуємо рівняння $(f(x+h)-f(x))/h-f'(x)=\varepsilon(2t-1)$. Наприклад, для $f(x)=3x^2-5x+7$ отримаємо рівняння $(3(x+h)^2-5(x+h)+7-(3x^2-5x+7))/h=\varepsilon(2t-1)$, $t\in(0;\,1)$. Звідси отримаємо, скоротивши на h: $3(2x+h)-5=\varepsilon(2t-1)$, $t\in(0;\,1)$. Знаходимо $2x+h=(5+\varepsilon(2t-1))/3-2x$, звідки $|h|=|5+\varepsilon(2t-1))/3-2x\ |$. Тепер очевидно, що $\delta:=\max|(5+\varepsilon)/3\pm 2x|$. Зазвичай, студенти не знають, що δ залежить не тільки від ε, але й x. Ясно, що для похідної у заданій *точці* x_0 число δ залежить тільки від ε.

4. Нерівності в означенні інтеграла

Якщо викладач вимагає, студенти заучують означення інтеграла як границі інтегральної суми, як спільну границю верхніх та нижніх сум Дарбу для довільних розбиттів проміжку інтегрування, коли довжина кожного частинного проміжку прямує до 0. Дуже рідко виписуються умови для відповідної нерівності: $\left|\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$, тобто для $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)$: $|h|<\delta(\varepsilon)$, яке забезпечить потрібну нерівність при всіх розбиттях, коли $|\Delta x|<\delta$, і довільних виборах точок ξ_i у відповідних проміжках $[x_i,\ x_{i+1}]$. У сумах Дарбу забезпечується нерівність $m<f(\xi_i)<M$, де m й M – найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[x_i,\ x_{i+1}]$. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку інтегрування $[a,\ b]$, то вона там і *рівномірно* неперервна й тому вдається знайти спільне $\delta(\varepsilon)$ для всіх частинних проміжків, що й забезпечує *існування* границі, тобто *інтеграла*. Відповідні інтегральні суми дають чисельні методи *квадратур* прямокутників та трапецій.

5. Нерівності в означенні та ознаках екстремумів

Максимум неперервної функції досягається в точці x_0, якщо значення в цій точці $f(x_0)$ більше, ніж у всіх *сусідніх* точках, тобто, якщо існує такий *окіл* точки x_0, у якому $f(x_0)>f(x)$. Аналогічно, *мінімум*, який досягається в точці x_0, веде до нерівності $f(x_0)<f(x)$. Це *означення* екстремумів. Студенти вивчають і *ознаки* екстремумів за допомогою похідних: 1. *Необхідна* ознака. Похідна в точці x_0 дорівнює нулеві, або не існує. 2. *Достатні* ознаки: а) При переході через точку x_0 перша похідна змінює знак; б) Якщо друга похідна від'ємна у точці, де перша дорівнює нулеві, то це – точка максимуму, додатна – точка мінімуму.

6. Нерівності про дослідженні функції та побудові її графіка

У дослідженні функції крім екстремумів розглядаються ще *інтервали монотонності*, де похідна зберігає знак ("+" – при зростанні, "–" – при спаданні), та інтервали *опуклості* (друга похідна від'ємна) та *увігнутості* (друга похідна додатна). Практично це зводиться до знаходження похідних, їх коренів та точок розриву й перевірці знаків похідних у створених інтервалах, тобто з'ясуванні знаків *нерівностей* у них. Після знаходження асимптот доцільно з'ясувати, з якого боку від них знаходиться крива – графік функції (тобто, що *більше* – $y(x)$ на кривій чи на асимптоті).

7. Нерівності при оцінці функції та інтеграла, в теоремах про середнє

Знання точок екстремуму та інтервалів монотонності дозволяє шукати *найбільше* та *найменше* значення функції ($sup\ (f(x))$, $inf\ (f(x))$ на виділеному відрізку). Формула Лагранжа ($f(x)$ – диференційована на $(a;\, b) \Rightarrow \exists\ c\in(a;\, b)$: $f(b)–f(a)=f'(c)(b–a)$) разом з оцінкою похідної ($m=inf\ (f'(x))$; $M=sup(f'(x))$) дозволяють оцінювати відношення приросту функції до приросту аргументу: $m\le(f(b)–f(a))/(b–a)\le$M. Аналогом є оцінка інтегралу: $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$. З останньої нерівності та теореми про проміжне значення функції між точними нижньою та верхньою гранями випливає поняття про середнє значення функції як відношення її інтеграла до довжини проміжку інтегрування. Більш загальна теорема про середнє для інтеграла: якщо $f(x)$ неперервна, а $g(x)$ – *знакостала* на $(a;\, b)$, то $\exists\ c\in(a;\, b)$: $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.

Остання вимога дає можливість ділити *нерівність* на інтеграл $G = \int_a^b g(x)dx$.

8. Нерівності в *означенні* стійкості диференціальних рівнянь

Для задачі Коші $y'=f(x, y)$, $y(x_0)=y_0$ розв'язок $y(x, x_0, y_0)$ залежить від початкової точки $M_0(x_0,\ y_0)$. Якщо для близької точки $\overline{M}_0$ розв'язок $\overline{y}(x,\ \overline{x}_0,\ \overline{y}_0)$ буде близьким на деякому інтервалі, то кажуть про *неперервну залежність* від початкових умов. Якщо цим інтервалом є піввісь $(0, \infty)$, то кажуть про *стійкість* вправо (за Ляпуновим): $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0$: $\forall\ x>x_0$, $|M_0\ \overline{M}_0|<\delta \Rightarrow |y(x, x_0, y_0) - \overline{y}(x,\ \overline{x}_0,\ \overline{y}_0)|<\varepsilon$.

Література:

1. Ткаченко С.П., Філер З.Ю. Спосіб нев'язки (відхилу) розв'язування нерівності // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. Випуск 3: В 3-х томах.–Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2003.–Т. 1: Теорія та методика навчання математики.–С. 254-258.

2. Ткаченко С.П., Філер З.Ю. Розв'язування нерівностей способом зведення до рівнянь // Тези Міжнародної науково-методичної конференції "Евристичне навчання математики" (15-17 листопада 2005 р., Донецьк). Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2005. – С. 438-439.

3. Ткаченко С.П. Методика відшукання комплексних розв'язків нерівностей // Тези Всеукраїнської науково-практичної конференції "Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики" (6 жовтня 2004 р., Київ).– К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. – С. 179–180.

Z-ПЛОТНОСТЬ ПОДМНОЖЕСТВ Z

И.Н. Величко
г. Керчь, Керченский морской технологический институт
velichko_student@mail.ru

Натуральное число $p > 1$ называется простым, если оно не имеет никаких нетривиальных делителей. Число 1 целесообразно не считать простым, так как каждое целое число делится на 1 в сколь угодно большой степени. Таким образом, последовательность простых чисел начинается числами 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ... Возникает вопрос о величине верхней границы разности соседних простых чисел.

Этот вопрос породил пока больше гипотез, чем доказательств. Первым достаточно серьезным утверждением, касающимся этого вопроса, был доказанный Чебышевым постулат Бертрана, согласно которому расстояние d_n между простыми числами p_{n+1} и p_n не превосходит p_n. После этого было доказано множество утверждений все более уменьшающих эту величину. В работах Ингама, в частности, доказывается, что $d_n=O(p_n^{5/8})$. Но даже этот результат далек от гипотезы Крамера, которая, скорее всего, имеет место: $d_n=O(\ln^2 p_n)$. Более того, не доказана даже гипотеза Лагранжа, в которой утверждается, что $d_n=O(p_n^{1/2})$. Все вышеперечисленные результаты опираются в основном на серьезную аналитическую технику.

Попробуем найти более элементарный подход к этой проблеме. Для этого необходимо ввести понятие Z-плотности подмножеств Z:

Определение. Пусть A – некоторое подмножество $Z/\{-1, 0, 1\}$. Рассмотрим множество

$$\Omega = \{k \in \mathrm{N} \cup \{\infty\} \mid \exists t \in \mathrm{Z}\ \exists \{a_j\}_{j=1}^{k} : (a_j \in A) \wedge (a_j \mid (t + j), j = \overline{1,k}\ )\}.$$

Тогда множество A назовем:

– множеством конечной Z-плотности, если $\sup \Omega < \infty$;

– множеством почти бесконечной Z-плотности, если $\sup \Omega = \infty$ и $\{\infty\} \notin \Omega$;

– множеством бесконечной Z-плотности, если $\sup \Omega = \infty$ и $\{\infty\} \in \Omega$.

При этом в первом и втором случаях мы будем писать $\rho_Z(A) = \sup \Omega$, а в третьем случае – писать $\rho_Z(A) = \overset{\circ}{\infty}$.

Соглашение. Пусть для множеств $A \subset Z \setminus \{-1, 0, 1\}$ и $B \subset Z \setminus \{-1, 0, 1\}$ верно хотя бы одно из следующих условий:

1) если для $c \in Z$ существует, то существует $a \in A : a \mid c$;

2) если для $c \in Z$ существует $a \in A : a \mid c$, то существует $b \in B : b \mid c$.

Тогда будем писать:

- $A \geq B$, если для множеств A, B выполнено условие 1);
- $A > B$, если для множеств A, B выполнено условие 1) и не выполнено условие 2);

- $A \le B$, если для множеств A, B выполнено условие 2;
- $A < B$, если для множеств A, B выполнено условие 2 и не выполнено условие 1;
- $A \approx B$, если для множеств A,B выполнены условия 1 и 2.

Утверждение 1. Пусть $A, B \subset Z / \{-1, 0, 1\}$, $A \le B$ ($A \ge B$, $A \approx B$). Тогда $\rho_Z(A) \le \rho_Z(B)$ (соответственно $\rho_Z(A) \ge \rho_Z(B)$, $\rho_Z(A) = \rho_Z(B)$).

Доказательство. Непосредственно следует из определения.

При помощи элементарных рассуждений и китайской теоремы об остатках несложно разобраться, какой вид должны иметь множества, у которых Z-плотность конечна, бесконечна либо равна $\overset{\circ}{\infty}$:

Теорема 1. Пусть $A = \{a_j\}^{\omega}_{j=1} \subset \mathrm{Z} / \{-1, 0, 1\}$, $0 < \omega \le \infty$, тогда утверждения (1) и (1′), (2) и (2′), 3) и (3′) эквивалентны:

(1) $\rho_Z(A) < \overset{\circ}{\infty}$;

(1′) $\exists B \subset \mathrm{Z} / \{-1, 0, 1\}:(|B| < \infty) \wedge (B \ge A)$;

(2) $\rho_Z(A) = \overset{\circ}{\infty}$;

(2′) $(\exists \{a_j\}^{\infty}_{j\text{-}1} \subset A : \forall i, k \in N, i \ne k:(a_i, a_k) = 1) \wedge (\exists p \in P, \forall i \in N : p^i \notin A)$;

(3) $\rho_Z(A) = \infty$;

(3′) $\exists n \in N \cup \{0\}\ \exists \{p_s\}^n_{s=1} \subset P : (P \backslash \{p_s\}^n_{s=1} \subset A) \wedge (\forall s \in \overline{1,n}\ \exists j_s \in N : p_s^{js} \notin A)$.

Здесь и далее через P обозначено множество всех положительных простых чисел.

Доказательство. Для примера покажем, что (1) $\Leftrightarrow$ (1′). Действительно, если $\rho_Z(A) < \overset{\circ}{\infty}$, то в A существует лишь конечное множество попарно взаимно простых чисел, и, следовательно, существует лишь конечный набор различных простых чисел, которые являются делителями этих взаимно простых элементов A. Этот набор, который мы обозначим через B, и является искомым.

Обратно, предположим, что выполнено условие (1′). Тогда используя утверждение 1, получаем необходимое.

Из теоремы 1 следует, что наиболее интересным представляется случай, когда Z-плотность множества A конечна, поскольку в этом случае теорема не дает ответ о величине $\rho_Z(A)$. Оценкой этой величины мы и займемся далее.

Пусть $A = \{a_j\}^{\omega}_{j=1} \subset Z / \{-1, 0, 1\}$, , рассмотрим функции $\xi_A(n)$, $\eta_A(n)$ и $\varepsilon_A(n)$, заданные следующим образом:

$$\xi_A(n) = [n] + \sum_{j=1}^{\omega} \sum_{1}^{\omega} (-1)^j \left[\frac{n}{HOK(|a_{i_1}|,\ldots,|a_{i_j}|)} \right],$$

$$\eta_A(n) = \{n\} + \sum_{j=1}^{\omega} \sum_{1}^{\omega} (-1)^j \left\{ \frac{n}{HOK(|a_{i_1}|,...,|a_{i_j}|)} \right\},$$

$$\varepsilon_A(n) = n + \sum_{j=1}^{\omega} \sum_{1}^{\omega} (-1)^j \frac{n}{HOK(|a_{i_1}|,...,|a_{i_j}|)},$$

где для индексов i_1, ..., i_j выполнено неравенство $1 \le i_1 < ... < i_j \le \omega$, а $[n]$, $\{n\}$ – соответственно целая и дробная часть числа n.

Заметим, что при $\omega \in N$ в каждой из формул присутствует 2^{ω} слагаемых. Кроме того, несложно увидеть, что функции $\xi_A(n)$, $\eta_A(n)$ и $\varepsilon_A(n)$ связаны соотношением

$$\varepsilon_A(n) = \xi_A(n) + \eta_A(n) \qquad (*).$$

Отметим также, что функция $\eta_A(n)$ периодична.

В важном случае, когда множество A состоит из конечного числа положительных попарно взаимно простых чисел a_1, a_2, …, a_k формула для $\varepsilon_A(n)$ может быть записана в виде:

$$\varepsilon_A(n) = n\prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{a_j}\right).$$

Введённые функции $\xi_A(n)$, $\eta_A(n)$ и $\varepsilon_A(n)$ обладают также некоторыми менее очевидными свойствами:

Утверждение 2. Пусть $A_{k+1} = \{a_j\}_{j=1}^{k+1} : (a_i,\ a_j) = 1,$ где $i, j = \overline{1,\ k+1},\ i \neq j$, $A_k = \{a_j\}_{j=1}^{k}$, тогда:

1) $\xi_{A_{k+1}}(n) = \xi_{A_k}(n) - \xi_{A_k}(n/a_{k+1})$;

2) $\eta_{A_{k+1}}(n) = \eta_{A_k}(n) - \eta_{A_k}(n/a_{k+1})$;

3) $\varepsilon_{A_{k+1}}(n) = \varepsilon_{A_k}(n) - \varepsilon_{A_k}(n/a_{k+1})$.

Доказательство. Для доказательства соотношения 1 необходимо воспользоваться тождеством $\left[\frac{n}{a_{i_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_t}\cdot a_{k+1}}\right] = \left[\frac{n/a_{k+1}}{a_{i_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_t}}\right]$. Соотношение 3 можно доказать, используя формулу для $\varepsilon_{A_{k+1}}(n)$ в случае попарно взаимно простых a_1, a_2, …, a_{k+1}, приведенную выше. Доказательство же пункта 2 следует из соотношения (*).

Оказывается, что наиболее интересные результаты получаются при изучении функции $\eta_A(n)$. Это связано с тем, что эта функция периодична, а, следовательно, – ограничена. Кроме того, имеют место следующие утверждения:

Утверждение 3. Пусть $A = \{a_j\}_{j=1}^{k} \subset Z \setminus \{-1,\ 0,\ 1\},\ 0 < k < \infty$. Тогда $\eta_A(n+1) - \eta_A(n)$ совпадает с:

1) ε_A (1) – 1 в случае, если n + 1 не делится ни на один элемент множества A;

2) ε_A (1) в обратном случае.

Доказательство следует из соотношения (*), линейности функции ε_A (n) и того, что разность ξ_A (n + 1) – ξ_A (n) равна либо 0 либо 1, в зависимости от того, делится или нет n + 1 хотя на один элемент множества A.

Утверждение 4. Пусть $A = \{a_j\}_{j=1}^{k} \subset Z \backslash \{-1, 0, 1\}$, $0<k<\infty$, $T=НОК(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $t \in Z \cap [0, T]$, положим что $b = \eta_A(t)$. Тогда η_A $(T - t)$ равно:

1) – b – 1, в случае если t не делится ни на один элемент множества A;

2) – b в обратном случае.

Доказательство следует из тождества $\{a - \alpha\} = 1 - \{\alpha\}$, верного при любом $a \in N$ и $\{\alpha\} > 0$, и разложения для функции η_A (n), примененного при $n=(T - t)$.

Утверждение 5. Пусть $A = \{a_j\}_{j=1}^{k} \subset Z \backslash \{-1, 0, 1\}$, $0<k<\infty$ и $\max\limits_{n \in N} \eta_A(n) = b \geq 0$, тогда $\min\limits_{n \in N} \eta_A(n) = -b - \varepsilon_A(1)$.

Доказательство. Используя утверждения 3, 4, нужно показать, что, если $\eta_A(t) = \max\limits_{n \in N} \eta_A(n) = b \geq 0$, то $\eta_A(T - t - 1) = \min\limits_{n \in N} \eta_A(n) = -b - \varepsilon_A(1)$.

Существует непосредственная связь между экстремумами функции η_A (n) и ρ_Z (A), которая выражается следующей теоремой:

Теорема 2. Пусть $A = \{a_j\}_{j=1}^{k} \subset Z / \{-1, 0, 1\}$, $0 < k < \infty$ и $c_0 \leq \eta_A(n) \leq c_1$. Тогда $\rho_Z(A) \leq (|c_0| + |c_1|) / \varepsilon_A(1)$.

Доказательство. Как было замечено ранее, функция η_A (n) ограничена. Согласно утверждению 3 прирост функции η_A (n) на отрезке [a, b] равен $\Delta_{[a, b]}\ \eta_A = \eta_A(b) - \eta_A(a) = \varepsilon_A(1)(b - a) - \lambda$, где λ – количество чисел из отрезка [a, b], которые не делятся ни на одно число из множества A.

Если $\rho_Z(A) = t$, то существует такой отрезок [a, $a + t$], на котором любое целое число делится хотя бы на один элемент множества A. Поэтому

$$\Delta_{[a, a+t]}\ \eta_A = \eta_A(a + t) - \eta_A(a) = \varepsilon_A(1)t = \varepsilon_A(1)\rho_Z(A),$$

а поскольку $\Delta_{[a, a+t]}\ \eta_A$ не превосходит $|c_0| + |c_1|$, то

$$\rho_Z(A) \leq |c_0| + |c_1| / \varepsilon_A(1),$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть $P_k = \{p_j\}_{j=1}^{k}$ – множество, состоящее из первых k простых чисел, $|\eta_A(n)| \leq c$. Тогда $2p_{k-1} - 1 \leq \rho_Z(p_k) \leq \dfrac{2c \ln p_k}{c'} + 1$, для некоторой константы c'.

Доказательство. Первая часть неравенства следует из китайской теоремы об остатках. Вторая часть получается применением теоремы 2 и того факта, что $\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)<\frac{c'}{\ln p_k}$, для некоторой константы c' и любого $k \in N$.

Связь $\rho_Z(A)$ с величиной d_n заключается в том, что когда множество A состоит из простых чисел 2, …, p_n, то выполнено неравенство $d_n \le \rho_Z(A)$. Отсюда несложно получить оценки сверху на разность d_n. Такого плана рассуждения предполагают также более естественный подход к доказательству постулата Бертрана, чем метод впервые доказавшего его Чебышева.

Доказательства большей частью элементарные и не затрагивают глубоких теоретико-числовых результатов. Основными инструментами исследований будет китайская теорема об остатках и введенные выше функции $\eta_A(n)$ и $\varepsilon_A(n)$. Используя элементарные рассуждения, удается получить общие оценки для Z-плотности произвольного множества $A=\{a_j\}_{j=1}^{\omega}\subset Z/\{-1, 0, 1\}$.

Литература:

1. Трост Э. Простые числа. – М.: Гос. изд. физ.-матем. лит., 1959.
2. Прахар К. Распределение простых чисел. – М.: Мир, 1967.

ВИКОРИСТАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ ПРИ ВИВЧЕННІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ У ВНЗ

О.В. Віхрова[1], І.П. Приступа[2]
[1] м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет
[2] м. Кривий Ріг, Криворізька загальноосвітня школа І–ІІІ ступенів №90

Проблема пошуку способів та інструментів об’єктивного і ефективного вимірювання рівня знань і вмінь студентів і школярів останнім часом набуває все більшої актуальності. Найчастіше оцінювання і контроль навчальних досягнень здійснюються за кінцевим результатом. На жаль, майже не піддаються оцінці діяльність, рівень розвитку в динаміці, вплив зовнішніх факторів на момент оцінювання. У зв’язку з цим успішність учнів слід розглядати у двох аспектах: як процес просування від одного рівня навчального досягнення до іншого і як результат досягнення певного стандарту. Проблема оцінювання пов’язана, насамперед, з тим, що контроль має бути об’єктивним і давати викладачу інформацію про результат навчального процесу. Але в практичній діяльності непоодинокими є факти, коли оцінка позбавлена об’єктивності. Отже, необхідним є пошук сучасних методів, методик і засобів обліку й оцінювання знань та вмінь учнів та студентів.

Одним із шляхів підвищення якості освіти є підвищення ефективності контролю знань. У сучасних умовах одним із найпоширеніших є контроль знань за допомогою тестування. Використання тестів активізує розумову діяльність і розвиває творчі здібності, а також визначає обсяг знань і умінь.

Тест (від англійського *test* – перевірка, завдання) – коротке, стандартизоване, як правило, обмежене в часі випробування, яке дозволяє визначити рівень засвоєння матеріалу, ступінь розвитку певних психологічних якостей, здібностей, особливостей особистості. У сучасній теорії та практиці тестового контролю знань налічується понад 20 різновидів тестів: залежно від мети, характеру функції контролю, структури тестів, видів тестів, форми відповіді тощо. Зрозуміло, що перш, ніж застосовувати тести, викладач повинен ознайомитися з правилами та етапами їх складання. Так, необхідно проаналізувати зміст завдань перш за все з позиції рівної представленості в тесті різних навчальних тем.

Тест не повинен бути навантажений другорядними термінами, несуттєвими деталями з акцентом на механічну пам'ять, що може бути задіяна, якщо в тест включати завдання на відтворення формулювань з підручника або фрагментів з нього. Завдання тесту повинні бути сформульовані чітко, коротко й недвозначно, щоб всі учні розуміли зміст того, що в них запитують. Важливо простежити, щоб жодне завдання тесту не могло служити підказкою для відповіді на інше.

Правильно складені тести не повинні вимагати великих витрат часу. Вони мають бути:

1) однозначними – не допускати вільного тлумачення тестового завдання;
2) правильними – виключити можливість формулювання багатозначних відповідей;
3) відносно короткими – вимагати стислих відповідей;
4) інформаційними – забезпечувати можливість співвідносити кількісну оцінку виконання тесту з інтервальною шкалою вимірювання;
5) зручними – давати змогу здійснювати швидку математичну обробку результатів;
6) стандартними – забезпечувати вимірювання рівня навченості широких контингентів студентів, які оволодівають однаковим обсягом знань на однаковому рівні навчання [2].

Згідно [3] роботу із складання тестового матеріалу доцільно виконувати у кілька етапів.

I етап – структурування навчального матеріалу. Приступаючи до складання тестів, насамперед необхідно чітко представити структуру певної теми навчального предмета або змістовного модуля.

II етап – встановлення логічних зв'язків між елементами і складання логіко-структурні схеми тем, розділів і предмета в цілому.

III етап – підготовка тестових завдань на основі логіко-структурних схем. У схемах відбираються ті елементи, знання яких можна перевірити за допомогою тестування.

IV етап – вибір оптимальної форми тестових завдань.

V етап – складання плану тесту, розробка стандартних бланків відповідей.

VI етап – перевірка тестів у різних типах аудиторій**.**

Проблема використання тестових завдань при вивченні курсу аналітичної геометрії на різних етапах навчального процесу досліджувалася нами з метою підготовки магістерської роботи. У процесі дослідження було зроблено висновок, що при складанні тестів доцільно дотримуватись певного алгоритму, який було виділено і реалізовано в експериментальній роботі.

Алгоритм складання тестів включає такі кроки:

1. Визначення цілей тестування:
- оцінка знань специфічних фактів, термінів, понять;
- перевірка уміння давати означення поняття, визначати його зміст та обсяг;
- перевірка знань специфічних фактів, термінів, понять;
- перевірка знань формул, законів, теорій, принципів, методів, уміння застосувати їх;
- вміння знаходити схожість і відмінності;
- вміння представляти матеріал на графіках, схемах, таблицях;
- знання правил методики;
- поняття концепцій, теорій і т. д.

2. Визначення виду контролю – вхідний (настановчий), проміжний, тематичний, рубіж, підсумковий.

3. Вибір форми тестового завдання, який залежить від цілей тестування і змісту

4. Основним елементом тестових завдань є інструкція, текст завдання і ключ (відповідь яка знаходиться у викладача).

5. Інструкція визначає характер інтелектуальної діяльності студентів повинна бути чіткою, зрозумілою для виконання:

- вибрати правильну відповідь з декількох запропонованих;
- доповнити, вписати, заповнити, закінчити…;
- вставити відповідності;
- вставити правильну їх послідовність;
- визначити істинність тверджень.

6. При формулюванні тесту завдання необхідно дотримуватися наступних методичних порад:

- основний текст завдань містить не більше 8–10 слів;
- кожен тест повинен виражати одну ідею, одну думку;
- завдання повинні бути короткими, чіткими, легко читаними, думку виражати просто й лаконічно, і не в питальній формі;
- формулювання завдань не повинне містити двозначностей, а тим більше пасток;
- уникати таких слів, як «іноді», «часто», «звичайно» в правильних твердженнях і слів «завжди», «іноді», «неможливо», в невірних;
- розташовувати тести за збільшенням труднощів;
- кожне завдання і відповідь формулювати так, щоб вірну відповідь могли дати тільки ті хто добре засвоїв матеріал;
- завдання сформулювати так щоб відповіді могли бути одержанні шляхом міркування, а в число невірних відповідей в першу чергу включати такі, які були результатом типових помилок, що допускають студенти;
- правильні відповіді повинні розподілятися у випадковому порядку;
- відповіді на одне питання не повинні залежати від відповідей на інше питання;
- відповіді не повинні містити підказки.

7. Тест повинен включати різноманітні тестові завдання за формою, змістом, степенем складності і достатньо охопити матеріал теми, що перевіряється.

8. Тестові завдання повинні бути різнорівневими за ступенем складання:

- рівень А – завдання, розраховане на засвоєння основних понять, просте відображення матеріалу, на рівні пізнання і відтворення;
- рівень Б – завдання, що вимагають міркувань, охоплюють малий матеріал, виявляють уміння застосовувати знання в стандартних ситу-

аціях;

- рівень В – завдання, що вимагають творчого виконання придбаних знань і дозволяють виявити уміння, застосовувати знання в нестандартних умовах.

9. Завдання тесту повинне забезпечувати перевірку знань і умінь на трьох рівнях: пізнавання і відтворення, застосування в знайомих умовах, застосування в новій ситуації або творчого застосування.

10. Складання шкали оцінювання.

11. Час на виконання кожного завдання визначається залежно від складності:

- рівень А – 2-3 хвилини;
- рівень Б – 4-5 хвилин;
- рівень В– 9-10 хвилин.

Слід також враховувати психолого-педагогічні вимоги щодо застосування тестів.

1. Поступове впровадження тестового контролю, що дасть змогу психологічно підготувати студентів. Розпочинати слід з простих тестів, через деякий час вводячи більш складні конструкції.
2. Завдання повинні мати комплексний характер.
3. Тестовий контроль має гарантувати об'єктивність оцінки знань, умінь і навичок учнів, сприяти усуненню суб'єктивізму, а відтак, і формуванню позитивного ставлення до навчального предмета, а також до вчителя, який його викладає.
4. Важливим є дотримання організаційної чіткості у проведенні тестового контролю, яка передбачає:

а) наявність оргмоменту, під час якого вчитель пояснює тестові завдання, дає відповіді на запитання учнів, обов'язково визначає час, необхідний для виконання роботи;

б) забезпечення кожного учня бланком відповідей стандартного зразка, що великою мірою заощаджує час і учнів, і вчителя.

5. Тестові завдання дають змогу значно скоротити час очікування учнями оцінки після виконання завдання, що є дуже суттєвим фактором – як психологічним, так і виховним.
6. Обов'язково слід робити аналіз результатів тестування [1].

Як правило, тести поділяють на 4 рівні – залежно від процесу засвоєння матеріалу.

До першого рівня відносять тести розпізнавання і тести на розрізняння. Вони дають можливість перевірити засвоєння обов'язкового обсягу теоретичного матеріалу.

Наведемо тести, які можна запропонувати після вивчення теоретичного матеріалу на лекції з теми: «Пряма лінія на площині. Взаємне розміщення двох прямих на площині».

1. Яке із взаємних розташувань двох прямих на площині неможливе:

А: паралельні Б: співпадають В: мимобіжні Г: перетинаються

2. Якщо дано дві прямі l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ та умова $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то ці прямі:

А: $l_1 \| l_2$ Б: $l_1 \perp l_2$ В: $l_1 \cap l_2$ Г: $l_1 \equiv l_2$

3. Пряма l проходить через точки А(-3; 2) і В(3; -2), її рівняння має вигляд:

А: $\frac{x-3}{-3-3} = \frac{y+2}{2+2}$ Б: $\frac{x+3}{3+3} = \frac{y-2}{-2-2}$ В: $\frac{x-3}{3-3} = \frac{y+2}{2+2}$ Г: $\frac{x-3}{-3-3} = \frac{y-2}{2+2}$

4. Напрямний вектор прямої $\bar{a}\,(3;5)$ і пряма проходять через точку А (-3; -2). Рівняння прямої має вигляд:

А: $\begin{cases} x = 3t+3 \\ y = 5t+2 \end{cases}$ Б: $\begin{cases} x = -3t+3 \\ y = -2t+5 \end{cases}$ В: $\begin{cases} x = 3t-3 \\ y = 5t-2 \end{cases}$ Г: $\begin{cases} x = 3t-3 \\ y = 5t-2 \end{cases}$

5. Якщо пряма задана точкою і напрямним вектором, то її рівняння має вигляд:

А: $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2}$ Б: $\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2}$ В: $\frac{x-x_0}{y-y_0} = \frac{a_1}{a_2}$ Г: $\frac{x+x_0}{a_1} = \frac{y+y_0}{a_2}$

Тестування – це не модна новація, а прогресивний метод діагностики рівня навчальних досягнень. Критика цього методу не припинялась ніколи, так само, як і робота над його вдосконаленням. Отже, комбінування традиційних та інноваційних технологій є доцільним: на одних етапах навчання застосувати тестування, на інших – усне опитування й контрольні роботи. Ці форми роботи взаємодоповнюють одна одну. Тестування – це не універсальний засіб розв’язання всіх проблем діагностики успішності студентів та учнів, а лише інструмент вимірювання, який треба грамотно і кваліфіковано використовувати.

Література:

1. Малихін А. Тести у навчальному процесі сучасної школи // Рідна школа. – 2001. – №8. – С. 64–67.
2. Палій Л.В. Тестування в навчальному процесі // Шлях освіти. – 2001. – №2. – С. 36–37.
3. Олейник Н.М. Учебное пособие по спецкурсу «Тест как инструмент измерения уровней знаний и трудности заданий в современной технологии обучения». – Донецк: ДонГУ, 1991. – С. 66.

ВИВЧЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДЕЯКИХ ЛІНІЙ НА ПОВЕРХНІ В ТОПОЛОГІЧНОМУ ПРОСТОРІ

П.І. Ульшин, Д.М. Чабаненко
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Будемо розглядати лінії на гладких регулярних поверхнях. Поверхня *Φ*, задана векторним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(u,\upsilon)$ в області *D*, називається гладкою і регулярною класу C^k, де *k* – натуральне число, якщо вектор-функція $\vec{r}(u,\upsilon)$ має неперервні частинні похідні не рівні нулеві включно до порядку *k* ($k \geq 2$) і в даній області виконується умова $\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right] \neq 0$.

Найпростішими лініями на поверхні є координатні лінії, їх ще називають *u*- і *υ*-лініями. Вони визначають поверхню в криволінійних координатах. Оскільки параметризація поверхні є довільною, то, в залежності від вибору параметрів, поверхню можна покрити різними сітками *u*- і *υ*-ліній.

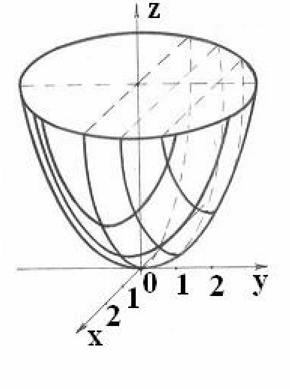


Рис. 1

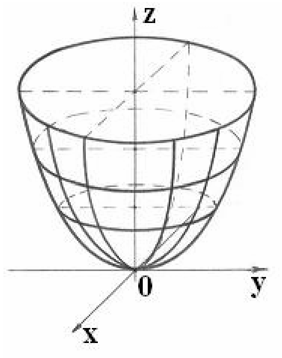


Рис. 2

Приклад 1. Дано параболоїд загальним рівнянням $x^2+y^2=z$. Розглянемо два випадки його довільної параметризації.

а) $\begin{cases} x = u \\ y = \upsilon \\ z = u^2 + \upsilon^2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = u\cos\upsilon \\ y = u\sin\upsilon \\ z = u^2 \end{cases}$

Розв'язання.

а) сітка *u*-ліній: $-\infty<u<+\infty$; $\upsilon_0=0;\ 1;\ 2$ і *υ*- ліній: $-\infty<\upsilon<+\infty$; $\upsilon_0=0;\ 1;\ 2$ (рис. 1.);

б) сітка u-ліній: $u\in(-\infty;\ +\infty)$; $\upsilon_0=0;.\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3}$; і υ-ліній: $u_0=0;\ 1;\ 2;\ \upsilon\in(0;\ 2\pi)$, рис. 2.

Параметризацію можна побудувати також ортогональною та напівгеодезичною.

Лінії на гладких і регулярних поверхнях можуть характеризуватися різними властивостями: асимптотичністю до поверхні, спряженістю, ортогональністю, кривиною, найкоротшою відстанню між точками та ін. Дамо спочатку визначення таким лініям [1].

Асимптотична лінія на поверхні має в усіх своїх точках нормальну кривину, рівну нулеві, і тому задовольняє "умові асимптотичності":

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Nd\upsilon^2 = 0 \qquad (1)$$

де L, M, N – коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні; u, υ – параметри.

Лінія кривини на поверхні має в кожній своїй точці такий напрям, який співпадає з головним напрямом поверхні в цій самій точці. Вона визначається таким диференціальним рівнянням:

$$(LF - ME)du^2 + (LG - NE)dudv + (MG - NF)d\upsilon^2 = 0, \qquad (2)$$

де E, F, G – коефіцієнти першої квадратичної форми, причому $E = \vec{r}_u^{\,2}$;

$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$, $G = \vec{r}_v^{\,2}$, $\vec{r}(u,\upsilon)$ – вектор-функція поверхні,

$$L = \frac{\left(\vec{r}_{uu}, \vec{r}_u, \vec{r}_v\right)}{\sqrt{EG - F^2}},\ M = \frac{\left(\vec{r}_{uu}, \vec{r}_u, \vec{r}_v\right)}{\sqrt{EG - F^2}},\ M = \frac{\left(\vec{r}_{vv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v\right)}{\sqrt{EG - F^2}} \qquad (3)$$

Якщо на поверхні Φ через точку P проведено дві лінії γ_1 і γ_2 у двох напрямах, відповідно, (d) і (δ), то вони будуть спряженими, при виконанні у всіх точках цих ліній "умови спряженості":

$$Ldu\delta u + M(du\delta\upsilon + d\upsilon\delta u) + Nd\upsilon\delta\upsilon = 0 \qquad (4)$$

Такі ж напрями називають ортогональними, якщо для них виконується "умова ортогональності":

$$Edu\delta u + F(du\delta\upsilon + d\upsilon\delta u) + Gd\upsilon\delta\upsilon = 0 \qquad (5)$$

Рівняння геодезичної лінії на поверхні з першою квадратичною формою $I_1 = du^2 + Gd\upsilon^2$ має такий вигляд:

$$u''\upsilon' - \upsilon''u' - \frac{1}{2}G_u\upsilon'^3 - \frac{1}{2}\frac{G_v}{G}u'\upsilon''^2 - \frac{1}{2}\frac{G_u}{G}u'^2\upsilon' = 0 \qquad (6)$$

Розглянемо на конкретних прикладах методику знаходження рівнянь цікавих ліній на поверхнях, за визначеними вище властивостями.

Приклад 2. Знайти асимптотичні лінії прямого гелікоїда, заданого рівнянням: $\vec{r} = \vec{r}(u \cdot \cos\upsilon; u \cdot \sin\upsilon; a\upsilon)$.

Розв'язання.

1) Визначаємо коефіцієнти за формулами (3):

E=1, F=0, G=u^2+a^2, $\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{u^2+a^2}$, $L=0$, $M=\dfrac{a}{u^2+a^2}$, $N=0$.

2) За допомогою умови (1) одержуємо диференціальне рівняння асимптотичних ліній: $-\dfrac{2\alpha}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}dud\upsilon=0$, яке рівносильне сукупності рівнянь: $du=0$ або $d\upsilon=0$.

3) Після інтегрування одержуємо

при $u = const = c_1$, маємо: $\vec{r}=\vec{r}(c_1\cdot\cos\upsilon;\ c_1\cdot\sin\upsilon;\ a\ )$ – гвинтові лінії;

при $\upsilon = const = c_2$, маємо: $\vec{r}=\vec{r}(u\cdot\cos c_2;\upsilon\cdot\sin c_2;ac_2)$ – прямі лінії.

<u>Приклад 3.</u> Знайти лінії кривини параболоїда, заданого рівнянням

$$\vec{r}=\vec{r}(u;\upsilon;\cdot u\upsilon)\ .$$

Розв'язання.

1) Визначаємо коефіцієнти за формулами (3):

E=1+υ^2, F=$u\upsilon$, G=1+u^2, $\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+u^2+\upsilon^2}$, L=0, $M=\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2+\upsilon^2}}$, N=0.

2) За допомогою умови (1) одержуємо диференціальне рівняння ліній кривини на поверхні:

$$-\frac{1+\upsilon^2}{\sqrt{1+u^2+\upsilon^2}}du^2+\frac{1+u^2}{\sqrt{1+u^2+\upsilon^2}}d\upsilon^2=0\,,$$

або

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\pm\frac{dv}{\sqrt{1+\upsilon^2}}\ .$$

3) Після інтегрування одержаних рівнянь, маємо:

$\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\pm\ln\left(\upsilon+\sqrt{1+\upsilon^2}\right)=const$ – дві сім'ї ліній кривини, записаних рівнянням в параметричній формі.

<u>Приклад 4.</u> Знайти спряжені і ортогональні траєкторії до асимптотичних ліній на поверхні, заданій рівнянням:

$$\vec{r}=\vec{r}(\cos\upsilon+u\cdot\sin\upsilon;-\sin\upsilon+u\cdot\cos\upsilon;\upsilon)\ .$$

Розв'язання.

1) Визначаємо коефіцієнти за формулами (3):

E=1, F=–1, G=u^2+2, $\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{u^2+1}$, L=0, $M=\dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}$, $N=-\dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}$.

2) Згідно (1) записуємо диференціальне рівняння $(2du-d\upsilon)d\upsilon=0$.

3) Після інтегрування знаходимо дві сім'ї асимптотичних ліній, визначених рівняннями в параметричній формі:

$$\gamma_1\text{: } \upsilon = const = c_1; \qquad \gamma_2\text{: } 2u - \upsilon = const = c_2.$$

3) Запишемо умову спряженості (4) для двох ліній на даній поверхні:

$$du\delta\upsilon + d\upsilon\delta u - d\upsilon\delta\upsilon = 0.$$

Припустимо, що асимптотичні лінії мають напрям (δ), а спряжені до них: (d). Користуючись припущенням, знаходимо спряжені лінії до асимптотичних ліній γ_1 і γ_2.

а) Для ліній: γ_1: $\upsilon = c_1$ ($\delta\upsilon = 0$) маємо $d\upsilon = 0$ і спряженими будуть лінії $\tilde{\gamma}_1 : \upsilon = c_3$.

б) Для ліній: γ_1: $2u - \upsilon = c_2$ ($2\delta u - \delta\upsilon = 0$) спряженими будуть лінії $\tilde{\gamma}_2 : 2u - \upsilon = c_4$.

6) Запишемо умову ортогональності (5) для двох ліній на даній поверхні:

$$du\delta u - (du\delta\upsilon + d\upsilon\delta u) + (u^2 + 2)d\upsilon\delta\upsilon = 0$$

7) Знаходимо ортогональні лінії до даних двох сімей асимптотичних ліній:

а) до лінії γ_1: $\upsilon = c_1$ ($\delta\upsilon = 0$) ортогональними будуть лінії $\tilde{\gamma}_1 : u - \upsilon = c_5$;

б) до ліній: γ_2: $2u - \upsilon = c_2(2\delta u - \delta\upsilon = 0)$ ортогональними будуть лінії $\tilde{\tilde{\gamma}}$:

$$\upsilon = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(u\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + c_6 .$$

***<u>Приклад</u>* <u>5</u>**. Знайти геодезичні лінії на поверхні циліндра:

$$\vec{r} = \vec{r}(\cos\upsilon; \sin\upsilon; u) .$$

Розв'язання.

1). Визначаємо коефіцієнти за формулами (3):

$$E = 1,\ F = 0,\ G = 1,\ \sqrt{EG - F^2} = 1,\ L = 0,\ M = 0,\ N = 1.$$

2) Оскільки перша квадратична форма поверхні $I_1 = du^2 + d\upsilon^2$, то згідно формули (6), одержуємо диференціальне рівняння: $u'\upsilon'' - u''\upsilon' = 0$.

Загальний розв'язок цього рівняння

$$u = c_1\upsilon + c_2,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі. У векторній формі на поверхні циліндра геодезичні лінії запишуться таким рівнянням: $\vec{r} = \vec{r}(\cos\upsilon; \sin\upsilon; c_1\upsilon + c_2)$.

Отже, ми розглянули методику визначення рівнянь різних кривих ліній на поверхнях та показали, що на гладких і регулярних поверхнях існують сім'ї ліній із цікавими властивостями. Вивчення таких ліній допомагає встановлювати властивості і форму складних поверхонь.

Література

1. Погорєлов А.В. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1974. – 176 с.

КВАДРАТУРЫ НЬЮТОНА-КОТЕСА: ИНТУИЦИЯ, ЛИНЕЙНОСТЬ, ИЕРАРХИЯ

Н.А. Козуб, А.Н. Хомченко
г. Херсон, Херсонский национальный технический университет
actinis@yandex.ru

Введение. Поводом для обращения к формулам приближенного интегрирования стало замечание Л. Сегерлинда [1, 252] о роли интуиции в конструировании квадратурных формул. Авторы на примере формулы Симпсона показывают, что воспитанная на линейных математических моделях интуиция нередко подводит нас в попытках дать количественную оценку конкретного явления. О роли интуиции и линейных моделей в математическом моделировании писали очень многие выдающиеся ученые. Ярко и убедительно об этом пишут И. Блехман, А. Мышкис и Я. Пановко в книге [2], где наряду с оригинальными мыслями авторов приведена богатая библиография (214 наименований) и особое мнение академика В. Новожилова о прикладных математиках.

Цель статьи – дать простое и наглядное истолкование некоторых (возможно основных) причин возникновения ошибок, основанных на интуиции. В своей книге Л. Сегерлинд категорически предупреждает: «Не пытайтесь предугадать результаты интегрирования, когда имеете дело с элементами высокого порядка». Надо признать, что наблюдения Л. Сегерлинда относительно ошибок в интуитивном определении спектра весов квадратуры Симпсона в большинстве случаев подтверждаются опытом нашего общения со студентами, изучающими вычислительную математику. Однако, используя физическую аналогию и процедуру иерархического конструирования квадратур, мы надеемся смягчить и в какой-то степени опровергнуть жесткое заключение автора [1] о невозможности «предсказать» спектр весов в квадратуре высшего порядка. По нашему мнению, попытки предугадать результат не только допустимы, но и полезны. Они прививают вкус к математическому экспериментированию, воспитывают интуицию. Ниже мы подробно покажем, как правильно распределить конвективные потери тепла через узлы одномерного конечного элемента. Аналогично распределяют плотность неоднородного стержня в задаче о массе.

Основная часть. Сначала рассмотрим схему Симпсона – элемент с тремя узлами (рис. 1).

Элемент длиной $2h$ расположен симметрично относительно начала координат. Три узла интерполяции (два на концах и один в центре) совпадают с узлами квадратуры. Мы пытаемся установить, почему интуитивное определение весов квадратуры Симпсона часто приводят к ошибочному спектру: $\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}$ [1]. Очень возможно, что наряду с другими причинами основную роль здесь играет психологический аспект. Со школьной скамьи мы находимся под сильным влиянием линейных зависимостей. Линейные зависимости обычно воспринимаются с минимальным внутренним сопротивлением, порой это само собой подразумевается, и, во всяком случае, такие зависимости воспринимаются как естественные и «справедливые» [2]. Возможно, это связано со склонностью многих людей, пользоваться формулой $\overline{f(x)} = f(\bar{x})$ для средних значений (в ее конкретных проявлениях), хотя эта формула справедлива только для линейных функций $f(x)$. Можно предположить, что, пытаясь предугадать спектр весов трехузловой квадратуры, человек в своем воображении рисует простейшую картинку (рис. 1, *а*). Надо заметить, что на квадратурах с одним и двумя узлами «линейная» интуиция никогда не подводит, освобождая от процедуры интегрального усреднения функции на [$-h$; h]. В случае с тремя узлами кусочно-линейная модель приводит к ошибочному спектру весов, а соответствующая квадратура (типа Симпсона) на трехузловом шаблоне обретает вид:

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx 2h\left(\frac{1}{4}f_{-h} + \frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{4}f_h\right) \tag{1}$$

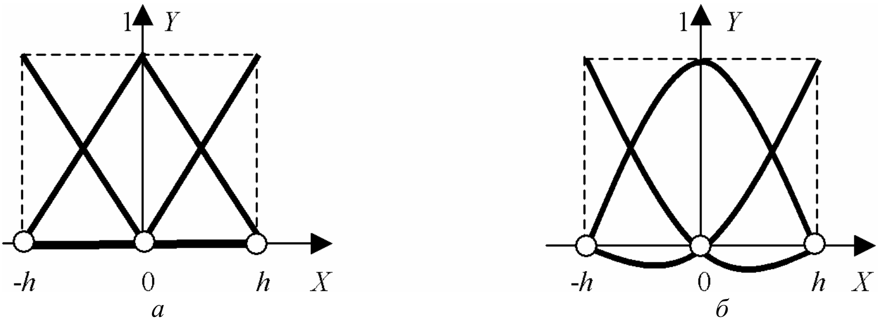


Рис. 1. Базисные функции на элементе с тремя узлами: (а) – базис кусочно-линейной интерполяции; (б) – базис квадратичной интерполяции

Ясно, что формула (1) – это одна из множества интегральных сумм. Она имеет право на существование и даже на практическое применение, однако, это не лучшая формула на трехузловом шаблоне (рис. 1). Оптимальный спектр (правило Симпсона) получается интегральным усреднением базисных функций квадратичной интерполяции (рис. 1, *б*), а соответствующая квадратура имеет вид:

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx 2h\left(\frac{1}{6}f_{-h} + \frac{2}{3}f_0 + \frac{1}{6}f_h\right) \tag{2}$$

Как видим, в формуле (2) несколько ослаблены периферийные ординаты за счет усиления центральной. Конечно, «угадать» такой спектр нелегко.

Однако он легко и просто получается с помощью физической аналогии. Напомним, что если $f(x)$ – плотность, то интеграл – масса неоднородного стержня. Здесь уместно отметить, что независимо от качества квадратуры условие сохранения весового баланса выполняется всегда, то есть сумма весов равна единице. Попробуем первоначально единичную массу стержня распределить поровну между узлами. Получим предварительный спектр: $\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}$. Теперь, если учтем, что крайние узлы являются «стыковочными» в ансамбле элементов, получим окончательное распределение $\frac{1}{6};\frac{4}{6};\frac{1}{6}$. К такому же результату приводит простая иерархическая процедура взвешенного усреднения примитивных квадратур: центральных прямоугольников и трапеций. Запишем формулу центрального интегрирования:

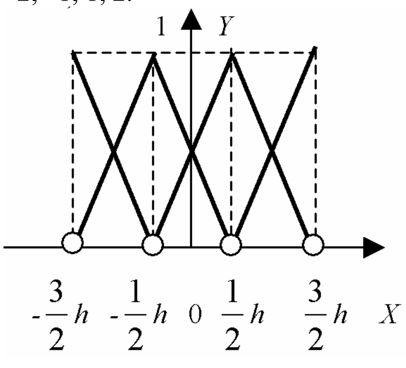
$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx 2hf_0 . \tag{3}$$

Соответственно, формула трапеции на $[-h; h]$ имеет вид:

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx 2h\left(\frac{1}{2}f_{-h} + \frac{1}{2}f_h\right) \tag{4}$$

Общее число узлов – 3. Формулы (3) и (4) «смешивают» в пропорции 2:1. Это сразу приводит к формуле (2).

Теперь рассмотрим квадратуру с четырьмя узлами (рис.2), которую называют формулой «трех восьмых». Узлам дискретизации присвоим номера –2; –1; 1; 2.



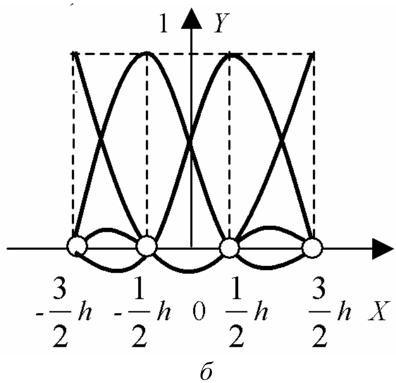


Рис. 2. Базисные функции на элементе с четырьмя узлами: (а) – кусочно-линейная интерполяция; (б) – кубическая интерполяция

Кусочно-линейная модель (рис. 2, *а*) позволяет из геометрических соображений быстро определить веса, однако расчетная формула не является совершенной (для четырех узлов):

$$\int_{-\frac{3}{2}h}^{\frac{3}{2}h} f(x)dx \approx 3h\left(\frac{1}{6}f_{-2} + \frac{1}{3}f_{-1} + \frac{1}{3}f_{1} + \frac{1}{6}f_{2}\right) \tag{5}$$

Оптимальная квадратура получается в результате интегрального усреднения базиса (рис. 2, *б*):

$$\int_{-\frac{3}{2}h}^{\frac{3}{2}h} f(x)dx \approx 3h\left(\frac{1}{8}f_{-2} + \frac{3}{8}f_{-1} + \frac{3}{8}f_{1} + \frac{1}{8}f_{2}\right) \tag{6}$$

Формула (6) достаточно просто получается на основе физической аналогии. Предварительное распределение единичной массы по узлам имеет вид: $\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}$. А если учесть, что крайние узлы стыкуются при ансамблировании с «соседями», то получим $\frac{1}{8};\frac{3}{8};\frac{3}{8};\frac{1}{8}$. К такому же результату приводит взвешивание на $\left[-\frac{3}{2}h;\frac{3}{2}h\right]$ двух формул трапеции, одна из которых использует узлы –2 и 2, другая узлы –1 и 1. При взвешивании необходимо учитывать, что внутренние узлы расположены ближе к центру тяжести элемента, нежели концевые.

Выводы. Причиной ошибочных интуитивных выводов часто служит «линейное мышление». Иерархическая процедура взвешивания простых линейных моделей, как правило, порождает совершенные модели, чувствительные к нелинейностям. В рассмотренном случае конструирования квадратур эта процедура без особых затруднений распространяется на кратные интегралы по треугольнику, квадрату, тетраэдру и кубу [3; 4]. Надежные и работоспособные формулы обычно являются результатом согласования аналитических, геометрических и физических аспектов моделирования.

Литература:

1. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.

2. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. – К.: Наукова думка, 1976. – 270 с.

3. Хомченко А.Н., Зуб П.М., Цыбуленко О.В. Кубатуры Ньютона-Котеса для пространственных дискретных элементов // Геометричне та комп’ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2004. – Вип.5. – С. 20-24.

4. Хомченко А.Н., Крючковський В.В., Тулученко Г.Я. Альтернативні кубатури Ньютона на елементах вищих порядків // Геометричне та комп’ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2004. – Вип. 7. – С. 26-32.

РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО СТЕПЕНЯ ЯК ОБ'ЄКТ ДЛЯ ДОСЛІДНИЦЬКОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ З ДИСЦИПЛІНИ "ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА"

В.В. Крючковський, А.Н. Хомченко, О.В. Цибуленко
м. Херсон, Херсонський національний технічний університет
meo@kstu.edu.ua

Як відомо, дисципліна "Обчислювальна математика" не тільки є домінуючою в учбових планах технічних вузів і фізико-математичних факультетів університетів, але й розглядається як факультативний курс в ліцеях і школах з математичним ухилом.

В програмах цієї дисципліни значне місце приділяється наближеному розв'язанню нелінійних рівнянь, як одному з видів математичних моделей. Наближені значення кореня рівняння одержують різними ітераційними методами.

З методичної точки зору доцільно розглядати такі рівняння, для яких відоме точне значення кореня.

При такому підході як студенти, так і учні проявляють особливий інтерес не тільки до порівняння одержаного наближеного значення кореня з точним, а й до порівняння переваг того чи іншого із застосованих методів.

Слід відмітити, що паралельно з вивченням відомих методів одержання наближених значень коренів рівняння можна залучати студентів до дослідницької роботи щодо знаходження інших методів, в тому числі і методів знаходження точних коренів рівняння, або критеріїв наявності таких коренів.

Щоб студенти уявили значущість і практичну необхідність їх дослідницької роботи можна розглянути, наприклад, наступну задачу [1, 6].

<u>Задача.</u> Швидкодія радіотехнічного прикладу визначається швидкістю проходження в ньому перехідних процесів. Знайти вираз для вихідного сигналу приладу, якщо відомий сигнал на його вході.

Задача математично зводиться до дослідження диференціальних рівнянь, які можна записати в наступному вигляді:

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y'+a_0y=\varphi(t) \tag{1}$$

з початковими умовами

$$y(0)=y_0;\ y'(0)=y_0';\ ...;\ y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)}.$$

Тут $y=y(t)$ – деяка функція часу, що зображує струм або напругу в досліджуваному електричному ланцюгу; $\varphi(t)$ – функція, що визначає зовнішній вплив на прилад, або вхідний сигнал.

Застосування операційного метода дозволяє одержати зображення рішення диференціального рівняння (1) у вигляді

$$\overline{y}=\frac{\Phi(p)}{p^n+a_{n-1}\cdot p^{n-1}+...+a_1p+a_0}. \tag{2}$$

Щоб перейти до оригіналу, треба розкласти на множники многочлен, що стоїть з знаменнику виразу (2).

Приймаючи до уваги, що розглядувана лінійна система повинна бути апериодично стійкою, нас цікавлять лише ті многочлени, що мають дійсні від`ємні корені.

Як відомо [1, 15], многочлен третього степеня має всі корні дійсними і від'ємними, якщо виконується нерівність

$$18a_2a_1a_0–4(a_2^3a_0+a_1^3)–27a_0^2+a_1^2a_2^2>0.$$

Для многочлена четвертого степеня такий критерій треба відшукати.

Задача не з легких. І щоб студентів зацікавити дослідницькою роботою, треба трохи спростити задачу. Рівняння

$$P_4(p)=p^4+a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0=0, \tag{3}$$

всі коефіцієнти якого відмінні від нуля, дозволяє дати студентам наступні науково-дослідницькі задачі.

Знайти необхідні і достатні умови залежності між коефіцієнтами рівняння (3), при яких його корені мають такі значення:

1) $\beta_1=\beta_2=\beta$: $p_{1,2}=\alpha_1+i\beta$; $p_{3,4}=\alpha_2\pm i\beta$;
2) $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$: $p_{1,2}=\alpha+i\beta_1$; $p_{3,4}=\alpha\pm i\beta_2$;
3) $\alpha_1=0$: $p_{1,2}=i\beta_1$; $p_{3,4}=\alpha_2\pm i\beta_2$;
4) $\beta_1=0$: $p_{1,2}=\alpha_1$; $p_{3,4}=\alpha_2\pm i\beta_2$;
5) $\beta_1=\beta_2=0$: $p_{1,2}=\alpha_1$; $p_{3,4}=\alpha_2$;
6) $\alpha_1=\alpha_2=0$: $p_{1,2}=i\beta_1$; $p_{3,4}=i\beta_2$;
....
16) $\beta_1=\beta_2=0$: $p_i=\alpha_i$; $(i=1, 2, 3, 4)$.

В даній статті розглянемо тільки перші два випадки, коли корені в загальному вигляді комплексно-спряжені:

$$p_{1,2}=\alpha_1\pm i\beta_1;\ p_{3,4}=\alpha_2\pm i\beta_2; \tag{4}$$

<u>1. Знаходження чотирьох комплексних коренів рівняння четвертого степеня з однаковою уявною частиною</u>

Якщо рівняння (3) має корені (4), то його можна зобразити у вигляді

$$\begin{aligned} p_4(p)=p^4&–2(\alpha_1+\alpha_2)p^3+((\alpha_1+\alpha_2)^2+2\alpha_1\alpha_2+\beta_1^2+\beta_2^2)p^2– \\ &–2(\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_1\beta_2^2+\alpha_2\beta_1^2)p+\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^2\beta_2^2+\alpha_2^2\beta_1^2+\beta_1^2\beta_2^2=0. \end{aligned} \tag{5}$$

Порівнюючи (3) і (5) при $\beta_1=\beta_2=\beta$, маємо:

$$\begin{cases} -2(\alpha_1+\alpha_2) & = & a_3; & (6) \\ (\alpha_1+\alpha_2)^2+2(\beta^2+\alpha_1\cdot\alpha_2) & = & a_2; & (7) \\ -2(\alpha_1+\alpha_2)\cdot(\beta^2+\alpha_1\cdot\alpha_2) & = & a_1; & (8) \\ \beta^4+(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\cdot\beta^2+\alpha_1^2\cdot\alpha_2^2 & = & a_0. & (9) \end{cases}$$

Із (6) отримуємо:

$$\alpha_1+\alpha_2=-\frac{a_3}{2}. \tag{10}$$

Із співвідношень (8) і (6) також маємо:

$$\beta^2 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{a_1}{a_3}. \tag{11}$$

Після піднесення до квадрата обох частин виразу (10) одержимо вираз

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \frac{a_3^2}{4} - 2\alpha_1 \cdot \alpha_2. \tag{12}$$

Вираз (12) і значення β^2 з (11) підставимо в (9). Матимемо:

$$\alpha_1^2 \cdot \alpha_2^2 - \left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_3^2}{16}\right)\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \frac{1}{4}\left(\frac{a_1 \cdot a_3}{4} + \left(\frac{a_1}{a_3}\right)^2 - a_0\right) = 0. \tag{13}$$

З квадратного відносно $\alpha_1\alpha_2$ рівняння (13) знаходимо

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_3^2}{16} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{a_3^2}{16}\right)^2 - \left(\left(\frac{a_1}{a_3}\right)^2 - a_0\right)}\right). \tag{14}$$

Так як сума α_1 і α_2 нам відома з (10), то значення α_1 і α_2 легко знаходяться.

З урахування (14) значення β^2 знаходимо з (11):

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{a_3^2}{16} \mp \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{a_3^2}{16}\right)^2 - \left(\left(\frac{a_1}{a_3}\right)^2 - a_0\right)}\right). \tag{15}$$

Підставимо у (7) співвідношення (10) і (11), одержимо

$$a_3^3 - 4a_2a_3 + 8a_1 = 0. \tag{16}$$

Піднесемо до квадрата обидві частини виразу (11) і з одержаного співвідношення віднімемо співвідношення (9). Маємо

$$-\beta^2(\alpha_2 - \alpha_1)^2 = \left(\frac{a_1}{a_3}\right)^2 - a_0 < 0. \tag{17}$$

Робимо висновок:

Якщо виконуються необхідна

$$\left(\frac{a_1}{a_3}\right)^2 - a_0 < 0 \tag{18}$$

і достатня (16) умови, то рівняння (3) має такі чотири корені:

$$p_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta \text{ і } p_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta.$$

Приклад. Знайти корені рівняння

$$p^4 - 10p^3 + 39p^2 - 70p + 50 = 0.$$

Розв'язання. Перевірка показує, що необхідна (18) і достатня (16) умови виконуються:

1) $\left(\frac{a_1}{a_3}\right)^2 - a_0 = -1 < 0$;

2) $a_3^3 - 4a_2a_3 + 8a_1 = (-10)^3 - 4 \cdot 39 \cdot (-10) - 8 \cdot 70 = 0$.

Тому з формули (14) знаходимо: $\alpha_1\alpha_2=6$.

Так як $\alpha_1+\alpha_2=5$ (з (10)), то за теоремою Вієта маємо: $\alpha_1=2$; $\alpha_2=3$.

З формули (15) знаходимо $\beta^2=1$.

<u>Відповідь</u>: $p_{1,2}=2\pm i$; $p_{3,4}=3\pm i$.

<u>2. Знаходження чотирьох комплексних коренів рівняння четвертого степеня з однаковою дійсною частиною</u>

В цьому випадку многочлен $p_4(p)$ лівої частини рівняння (3) може бути зображуваний так:

$$p_4(p)=(p-\alpha)^4+(\beta_1^2+\beta_2^2)(p-\alpha)^2+\beta_1^2\beta_2^2. \tag{19}$$

З іншої сторони, виходячи з формули Тейлора [2, 450], многочлен $p_4(p)$ можна подати у вигляді:

$$p_4(p)=(p-\alpha)^4+\frac{p_4'''(\alpha)}{3!}(p-\alpha)^3+\frac{p_4''(\alpha)}{2!}(p-\alpha)^2+\frac{p_4'(\alpha)}{1!}(p-\alpha)+p_4(\alpha), \tag{20}$$

де

$$\begin{cases} p_4(\alpha)=\alpha^4+a_3\alpha^3+a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0; \\ p_4'(\alpha)=4\alpha^3+3a_3\alpha^2+2a_2\alpha+a_1; \\ \dfrac{1}{2!}\cdot p''(\alpha)=6\alpha^2+3a_3\alpha+a_2; \\ \dfrac{1}{3!}p'''(\alpha)=4\alpha+a_3. \end{cases}$$

Порівнюючи (19) і (20), маємо:

$$\begin{cases} \alpha^4+a_3\alpha^3+a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0=\beta_1^2\cdot\beta_2^2; & (21) \\ 4\alpha^3+3a_3\alpha^2+2a_2\alpha+a_1=0; & (22) \\ 6\alpha^2+3a_3\alpha+a_2=\beta_1^2+\beta_2^2; & (23) \\ 4\alpha+a_3=0. & (24) \end{cases}$$

Підставимо в (21) – (23) отримане з (24) значення

$$\alpha=-\frac{a_3}{4}. \tag{25}$$

Одержимо:

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{256}a_3^4+\dfrac{1}{16}a_2a_3^2-\dfrac{1}{4}a_1\cdot a_3+a_0 = \beta_1^2\cdot\beta_2^2; & (26) \\ a_3^3-4a_2a_3+8a_1 = 0; & (27) \\ a_2-\dfrac{3}{8}a_3^2 = \beta_1^2+\beta_2^2. & (28) \end{cases}$$

Залежності (26) і (28) дозволяють скласти квадратне рівняння, з якого знаходимо:

$$\beta_{1,2}^{2}=\frac{1}{2}a_{2}-\frac{3}{16}a_{3}^{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a_{1}}{a_{3}}\right)^{2}-a_{0}}.. \tag{29}$$

Робимо висновок:

Якщо виконуються необхідна

$$\left(\frac{a_{1}}{a_{3}}\right)^{2}-a_{0}>0 \tag{30}$$

і достатня (27) умови, то рівняння (3) має такі чотири корені:

$$p_{1,2}=\alpha\pm i\beta_1 \text{ і } p_{3,4}=\alpha\pm i\beta_2.$$

Приклад. Знайти корені рівняння

$$p^4-4p^3+11p^2-14p+10=0.$$

Розв'язання. Переконуємось, що необхідна (30) і достатня (27) умови виконуються:

1) $\left(\frac{a_{1}}{a_{3}}\right)^{2}-a_{0}=\frac{9}{4}>0;$

2) $a_3^3-4a_2a_3+8a_1=(-4)^3-4\cdot11\cdot(-4)+8\cdot(-14)=0.$

Тому з формул (25) і (29) знаходимо: $\alpha=1$; $\beta_1^2=1$; $\beta_2^2=4$.

Відповідь: $p_{1,2}=1\pm i$; $p_{3,4}=1\pm 2i$.

Література:

1. Гаврилов Г.К. Приближенные методы анализа переходных процессов. – М.: Советское радио, 1966. – 152 с.

2. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. – К.: Наукова думка, 1972. – 742 с.

ДЕЯКІ МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

В.М. Серебреніков[1], О.М. Карнаух[2]
[1] м. Кривий Ріг, Криворізький технічний університет
[2] м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

При розв'язанні конкретної задачі оптимізації дослідник, перш за все, повинен вибрати математичний метод, який приводив би до кінцевих результатів з найменшими витратами на обчислення, або ж давав можливість отримати найбільший обсяг інформації про розв'язок. Вибір того чи іншого методу зазвичай визначається постановкою задачі оптимізації, а також відповідною математичною моделлю.

Для розв'язання оптимальних задач використовують різноманітні методи оптимізації, серед яких значне місце займають і методи нелінійного програмування. Назвою «методи нелінійного програмування» об'єднується велика група чисельних методів, багато з яких використовуються для розв'язання оптимальних задач відповідного класу. Вибір того чи іншого методу обумовлений складністю обчислення критерію оптимальності і складністю обмежуючих умов, необхідною точністю розв'язування, потужністю обчислювальної машини і т.д. Ряд методів нелінійного програмування практично постійно використовується в поєднані з іншими методами оптимізації.

Коли цільова функція і обмеження нелінійні і для пошуку точки екстремуму неможливо або дуже складно використовувати аналітичні методи розв'язання, тоді для розв'язання задач оптимізації використовуються методи нелінійного програмування. Як правило, при розв'язанні задач методами нелінійного програмування використовуються чисельні методи із застосуванням ЕОМ. Взагалі методи нелінійного програмування можуть бути охарактеризовані як багатокрокові методи або методи наступного покращення вихідного розв'язання. В цих задачах зазвичай одразу неможливо сказати, яке число кроків гарантуватиме знаходження оптимального значення із заданим степенем точності. Крім того, для задачі нелінійного програмування вибір величини кроку являє серйозну проблему, від успішного розв'язання якої залежить ефективність використання того чи іншого методу. Різноманітність методів якраз і пояснюється прагненням знайти оптимальний розв'язок за найменше число кроків.

Для розв'язання задач оптимізації розроблена значна кількість методів нелінійного програмування, але неможливо надати перевагу якомусь одному. Вибір методу визначається складністю об'єкта і конкретною задачею.

Перш, ніж розглянути деякі методи оптимізації, з'ясуємо загальну задачу нелінійного програмування.

У самому широкому смислі загальна задача нелінійного програмування полягає у відшуканні екстремуму цільової функції при заданих обмеженнях у вигляді рівностей і (або) нерівностей. Обмеження можуть бути лінійними і (або) нелінійними. Однак загальноприйнятою є дещо більш вузька постановка загальної задачі нелінійного програмування, у якій виключаються з розгляду наступні спеціальні випадки:

1. Змінні приймають лише цілочисельні значення (нелінійне цілочисельне програмування).

2. Обмеження включають як параметр час, при цьому використовуються диференціальні рівняння (оптимальне рівняння, динамічна оптимізація).

Нехай неперервна функція $f(x)$ являє собою цільову функцію, $h_1(x)$, ..., $h_m(x)$ задають обмеження у вигляді рівностей, а $g_{m+1}(x)$, …, $g_p(x)$ – обмеження у вигляді нерівностей, де $x = [x_1, ..., x_n]^T$ – вектор-стовпець компонент $x_1, \ldots, x_n$ в n-мірному евклідовому просторі.

Формально задача нелінійного програмування може бути сформульована в такий спосіб: мінімізувати

$$f(x),\ x \in \mathrm{E}^n, \tag{1}$$

при m лінійних і (або) нелінійних обмеженнях у вигляді рівностей

$$h_j(x) = 0,\ j=1,\ \ldots,\ m \tag{2}$$

і $(p - m)$ лінійних і (або) нелінійних обмежень у вигляді нерівностей

$$g_j(x) \geq 0,\ j = m + 1,\ \ldots,\ p. \tag{3}$$

Для задачі нелінійного програмування за відсутності обмежень необхідними умовами того, що x^* – точка локального мінімуму задачі (1), є:

1) функція $f(x)$ диференційована в точці x^*;

2) $\nabla f(x^*) = 0$, тобто існує стаціонарна точка в x^*.

Достатні умови того, що x^* – точка локального мінімуму задачі (1), крім приведених вище умов 1 і 2, включають наступне:

3) $\nabla^2 f(x^*) > 0$, тобто матриця Гессе позитивно визначена.

Розглянемо наступні методи нелінійного програмування: метод Ньютона, метод найшвидшого спуску, метод сполучених напрямків, методи змінної метрики.

Метод найшвидшого спуску відноситься до градієнтних методів, тобто тих, що використовують тільки перші похідні цільової функції. Даний метод виник як наслідок лінійної апроксимації цільової функції. На k-му етапі перехід з точки $x^{(k)}$ в точку $x^{(k+1)}$ описується наступним співвідношенням:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)}\, s^{(k)} = x^{(k)} + \lambda^{*(k)} s^{(k)}, \tag{4}$$

де $\Delta x^{(k)}$ – вектор переходу з точки $x^{(k)}$ в точку $x^{(k+1)}$; $s^{(k)}$ – одиничний вектор в напрямку $\Delta x^{(k)}$; $s^{(k)}$ – довільний вектор в напрямку $\Delta x^{(k)}$; $\lambda^{(k)}$, $\lambda^{*(k)}$ – скаляри, обумовлені співвідношеннями $\Delta x^{(k)} = \lambda^{(k)}\, s^{(k)} = \lambda^{*(k)} s^{(k)}$.

Оскільки градієнт цільової функції $f(x)$ в будь-якій точці x є вектор в напрямку найбільшого локального збільшення $f(x)$, то потрібно рухатися в напрямку, протилежному градієнту $f(x)$, тобто в напрямку найшвидшого спуску, оскільки від'ємний градієнт $f(x)$ в точці $x^{(k)}$ спрямований у бік найбільшого зменшення $f(x)$ по всіх компонентах x і є ортогональним лінії рівня

$f(x)$ в точці $x^{(k)}$. Напрямок найшвидшого спуску, визначений в точці $x^{(k)}$, знаходиться за формулою

$$s^{(k)} = -\frac{\nabla f(x^{(k)})}{\| \nabla f(x^{(k)}) \|}. \qquad (5)$$

Підстановка (5) в (4) дає наступну формулу переходу з $x^{(k)}$ у $x^{(k+1)}$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\lambda^{(k)} \nabla f\left(x^{(k)}\right)}{\| \nabla f\left(x^{(k)}\right) \|} = x^{(k)} - \lambda^{*(k)} \nabla f\left(x^{(k)}\right). \qquad (6)$$

Формула (6) повинна застосовуватися кілька разі, доки не буде досягнутий мінімум. Процедура строго найшвидшого спуску може закінчитися в сідловій точці, тоді варто застосувати який-небудь неградієнтний метод, щоб вийти з неї, після чого мінімізація може продовжуватися, як і раніше.

Метод Ньютона виник з квадратичної апроксимації $f(x)$ і відноситься до методів других похідних. Квадратичну апроксимацію $f(x)$ можна отримати, відкидаючи в рядах Тейлора члени третього і більш високих порядків:

$$f(x) \approx f(x^{(k)}) + \nabla^T f(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2}(x - x^{(k)})^T \nabla^2 f(x^{(k)})(x - x^{(k)}), \qquad (7)$$

де $\nabla^2 f(x^{(k)})$ – матриця Гессе $f(x)$; $H(x)$ – квадратна матриця других частинних похідних $f(x)$, узятих в точці $x^{(k)}$. Якщо $x - x^{(k)}$ в рівнянні (7) замінити на величину $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$, визначену з рівняння (4), то

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)}) + \nabla^T f(x^{(k)}) \Delta x^{(k)} + \frac{1}{2}(\Delta x^{(k)})^T \nabla^2 f(x^{(k)}) \Delta x^{(k)}. \qquad (8)$$

Мінімум функції $f(x)$ в напрямку $\Delta x^{(k)}$ визначається диференціюванням $f(x)$ по кожній з компонентів Δx і прирівнюванням нулю отриманих виразів. Останнє приводить до

$$\Delta x^{(k)} = -[\nabla^2 f(x^{(k)})]^{-1} \nabla f(x^{(k)}), \qquad (9)$$

де $-[\nabla^2 f(x^{(k)})]^{-1}$ – матриця, обернена матриці Гессе $H(x^{(k)})$.

Підстановка виразу (9) у рівняння (4) визначає перехід з $x^{(k)}$ у $x^{(k+1)}$ за методом Ньютона:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [\nabla^2 f(x^{(k)})]^{-1} \nabla f(x^{(k)}). \qquad (10)$$

Рівняння (10) звичайно приводять до виду (6) шляхом введення спеціального параметра довжини кроку λ:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} \lambda^{(k)} \frac{[\nabla^2 f(x^{(k)})]^{-1} [\nabla f(x^k)]}{\| [\nabla^2 f(x^{(k)})]^{-1} [\nabla f(x^{(k)})] \|},$$

або

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda^{*(k)} H^{-1}(x^{(k)}) \nabla f(x^{(k)}). \qquad (11)$$

Напрямок пошуку тепер задається вектором $s^{(k)} = -H^{-1}(x^{(k)}) \nabla f(x^{(k)})$. Рівняння (11) застосовується ітеративно, як і рівняння (6), поки не буде задоволений деякий критерій закінчення процесу.

Якщо використовувати сполучені напрямки, то будь-яка квадратична функція n змінних, що має мінімум, може бути мінімізована за n кроків, по одному в кожному зі сполучених напрямків.

Нехай цільова функція квадратична і має вигляд $f(x) = a + b^T x + \frac{1}{2} x^T Hx$, де H – позитивно визначена матриця.

Припустимо, що процес мінімізації $f(x)$ починається в $x^{(0)}$ з початковим напрямком $s^{(0)}$. Для зручності візьмемо його у вигляді одиничного вектора, тобто $(s^{(0)})^T s^{(0)} = 1$. Тоді вектор $x^{(1)}$ буде дорівнювати

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \lambda^{(0)} s^{(0)}, \tag{12}$$

де довжина кроку $\lambda^{(0)}$ визначається з умови мінімуму $f(x^{(0)} + \lambda s^{(0)})$ по λ:

$$\frac{df(x^{(0)} + \lambda s^{(0)})}{d\lambda} = 0 = \nabla^T f(x^{(0)}) s^{(0)} + (s^{(0)})^T \nabla^2 f(x^{(0)}) \lambda s^{(0)},$$

звідки

$$\lambda^{(0)} = -\frac{\nabla^T f(x^{(0)}) s^{(0)}}{(s^{(0)})^T \nabla^2 f(x^{(0)}) s^{(0)}}. \tag{13}$$

Після того як за формулами (12) і (13) обчислено $x^{(1)}$, для продовження процесу мінімізації $f(x)$ повинен бути обраний новий напрямок. Цей новий напрямок $s^{(1)}$ називається сполученим до старого напрямку $s^{(0)}$, якщо $(s^{(1)})^T[\nabla^2 f(x^{(0)})]s^{(0)}=0$. У загальному випадку система n лінійно незалежних напрямків пошуку $s^{(0)}, s^{(1)},\dots, s^{(n-1)}$ називається сполученою стосовно деякої позитивно визначеної (квадратної) матриці Q, якщо

$$(s^{(i)})^T Q\, s^{(i)} = 0,\ 0 \le i \ne j \le n-1. \tag{14}$$

Спряженість можна інтерпретувати як ортогональність у просторі перетворених координат, якщо напрямки пошуку масштабовані придатними функціями власних значень.

Існує клас методів, що називаються методами змінної метрики, які апроксимують матрицю Гессе або зворотну до неї, але використовують для цього тільки перші похідні. При використанні методів змінної метрики новий вектор x обчислюється по вектору попереднього кроку за допомогою рівняння:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} s^{(k)} = x^{(k)} - \lambda^{*(k)} \eta(x^{(k)}) \nabla f(x^{(k)}), \tag{15}$$

де матриця $\eta(x^{(k)})$, що являє собою апроксимацію $H^{-1}(x)$. У досить великій групі методів $H^{-1}(x^{(k+1)})$ апроксимується за допомогою інформації, отриманої на k-му кроці:

$$H^{-1}(x^{(k+1)}) \approx \omega\, \eta^{(k+1)} = \omega(\eta^{(k)} + \Delta\eta^{(k)}), \tag{16}$$

де η – матриця апроксимуюча $H^{-1}(x)$, $\Delta\eta^{(k)}$ являє собою визначену матрицю; ω – масштабований множник, звичайно рівний одиниці.

Вибір $\Delta\eta^{(k)}$) визначає метод змінної метрики. Для забезпечення збіжності $\omega\eta^{(k+1)}$ повинна бути позитивно визначеною і задовольняти рівнянню

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = H^{-1}(x^{(k)})\, [\nabla f(x^{(k+1)}) - \nabla f(x^{(k)})], \tag{17}$$

коли вона заміняє H^{-1}.

На $(k+1)$-му кроці ми знаємо $x^{(k)}$, $\nabla f(x^{(k)})$, $\nabla f(x^{(k+1)})$, $\eta^{(k)}$ і хочемо обчислити $\eta^{(k+1)}$, так щоб задовольнялося співвідношення

$$\eta^{(k+1)}\Delta g^{(k)} = \frac{1}{\omega}\Delta x^{(k)}, \qquad (18)$$

де $(\Delta\, x^{(k)}) = x^{(k+1)} - x^{(k)}$.

Нехай $(\Delta g^{(k)})= \nabla f(x^{(k+1)}) - \nabla f(x^{(k)})$. Нехай $\Delta\eta^{(k)} = \eta^{(k+1)} - \eta^{(k)}$. Тоді рівняння

$$\Delta\eta^{(k)}\Delta g^{(k)} = \frac{1}{\omega}\Delta x^{(k)} - \eta^{(k)}\Delta g^{(k)} \qquad (19)$$

потрібно розв'язати відносно $\Delta\eta^{(k)}$. Прямою підстановкою результату (19) маємо наступне рішення

$$\Delta\eta^{(k)} = \frac{1}{\omega}\frac{\Delta x^{(k)} y^T}{y^T \Delta g^{(k)}} - \frac{\eta^{(k)}\Delta g^{(k)} z^T}{z^T \Delta g^{(k)}}, \qquad (20)$$

де y і z – довільні вектори розмірності $n\times 1$. Якщо для $\omega=1$ вибирається спеціальна лінійна комбінація двох напрямків $\Delta x^{(k)}$ і $\eta^{(k)}\Delta g^{(k)}$, а саме $y=z=\Delta x^{(k)}-\eta^{(k)}\Delta g^{(k)}$, то використовується алгоритм Бройдена; якщо ж береться $y=\Delta x^{(k)}$, $z=\eta^{(k)}\Delta g^{(k)}$, то матриця $\eta^{(k)}$ обчислюється за допомогою алгоритму Девідона-Флетчера-Пауела.

На прикладі розглянемо реалізацію двох методів оптимізації: метода спуску і метода Ньютона та порівняємо їх. Для цього використаємо цільову функцію виду $f(x)=100\ (x_2-x_1^2)^2 +(1- x_1)^2$, дві лінії рівнів якої $f(x)=4$, $f(x)=8$. Геометрично $f(x)$ інтерпретується як повільно спадаючий скривлений яр з найнижчою точкою $x^*= [1\ \ 1]^T$, де $f(x^*) = 0$.

Метод найшвидшого спуску

Розглянемо точку $x^{(k)}= [-0{,}5\ \ 0{,}5]^T$, в якій $f(x^{(k)}) = 8{,}5$. Нормований градієнт $f(x)$ у точці $x^{(k)}= [-0{,}5\ \ 0{,}5]^T$ дорівнює

$$\frac{1}{[(\partial f/\partial x_1)^2 + (\partial f/\partial x_2)^2]^{1/2}_{x^{(k)}}}\begin{bmatrix}\partial f/\partial x_1\\ \partial f/\partial x_2\end{bmatrix}_{x^{(k)}} = \frac{1}{68{,}6}\begin{bmatrix}47\\ 50\end{bmatrix} = [0{,}685 \quad 0{,}729]^T.$$

Вектор, протилежний вектору нормованого градієнта в $x^{(k)}$, $s^{(k)}=[-\,0{,}685\ \ -0{,}729]^T$, він указує напрямок найшвидшого спуску і є ортогональним рівню $f(x)$, що проходе через $x^{(k)}$.

Щоб знайти новий вектор $x^{(k+1)}$, необхідно вибрати величину λ. Наприклад, можна вибрати заздалегідь визначене значення λ або знайти те значення λ, при якому $f(x)$ досягає мінімуму в напрямку, що задається одиничним вектором $s^{(k)}$. В точці $x^{(k)}= [-0{,}5\ \ 0{,}5]^T$ рівняння (4) має вигляд

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix}x_1^{(k+1)}\\ x_2^{(k+1)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0{,}5\\ 0{,}5\end{bmatrix} - \lambda^{(k)}\begin{bmatrix}0{,}685\\ 0{,}729\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0{,}5-0{,}685\lambda^{(k)}\\ 0{,}5-0{,}729\lambda^{(k)}\end{bmatrix}. \qquad (*)$$

Звідси $f(x^{(k+1)})=f(\lambda)=100\ [0{,}5 - 0{,}729\lambda - (0{,}5 + 0{,}685\lambda)^2]^2 + (1{,}5 + 0{,}685\lambda)^2$.

Мінімум $f(\lambda)$ по λ досягається в точці $\lambda = 0{,}164$. Підстановка $\lambda^{(k)} = 0{,}164$ у рівняння (*) дає нову точку $x^{(k+1)} = [-0{,}612\ \ 0{,}381]^T$, у якій $f(x) = 2{,}6$. Новий вектор $s^{(k+1)}$ визначається рівнянням (5) для точки $x^{(k+1)}$, а потім знаходиться і $x^{(k+2)}$ у напрямку $s^{(k+1)}$ аналогічно тому, як було знайдено $x^{(k+1)}$. Ця ітераційна процедура продовжується до тих пір, поки становиться вже неможливим зменшувати величину $f(x)$ або поки не буде задоволений деякий вибраний критерій закінчення процесу.

Метод Ньютона

Розглянемо тепер метод Ньютона, починаючи з точки $x^{(k)} = [-0{,}5 \;\; 0{,}5]^T$. Тоді $x^{(k+1)}$ визначається шляхом використання рівняння (10) або (11) наступним чином:

$$\nabla^2 f(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} (-400x_2 + 1200x_1^2 + 2) & (-400x_1) \\ (-400x_1) & 200 \end{bmatrix}_{x^{(k)}} = \begin{bmatrix} 102 & 200 \\ 200 & 200 \end{bmatrix},$$

$$\Delta x^{(k)} = -[\nabla^2 f(x^{(k)})]^{-1} \nabla f(x^{(k)}) = \frac{1}{98}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0{,}51 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 47 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}03 \\ -0{,}22 \end{bmatrix},$$

$$\Delta x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}03 \\ -0{,}22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}53 \\ 0{,}28 \end{bmatrix}.$$

У точці $x^{(k+1)} = [-0{,}53 \;\; 0{,}28]^T$ значення $f(x)$ рівне 2,33. Новий вектор $\Delta x^{(k+1)}$ обчислюється в точці $x^{(k+1)}$ за допомогою рівняння (9), $x^{(k+2)}$ визначається з рівняння (10).

Альтернативна процедура полягає в обчисленні $s^{(k)} = H^{-1}(x^{(k)}) \; \nabla f(x^{(k)})$, як і в попередньому методі, і в пошуку деякого λ в напрямку $s^{(k)}$, мінімізуючого $f(x)$ у відповідності з рівнянням (12). В будь-якому випадку ітераційна процедура повторюється, поки не буде задоволений визначений критерій закінчення процесу або до тих пір, поки становиться неможливим зменшувати величину $f(x)$. На практиці, щоб зменшити час розв'язання, елементи $H(x)$ можуть обчислюватися не на кожному кроці.

При цьому метод Ньютона кращий завдяки квадратичній збіжності в околі мінімуму цільової функції (якщо $H(x) > 0$ і цільову функцію можна апроксимувати квадратичною функцією), тобто там, де проявляються слабкі сторони методу найшвидшого спуску. Навпаки, в області, далекій від мінімуму, методи найшвидшого спуску можуть виявитись кращими.

Література:

1. Абрамов Л.М., Капустин В.Ф. Математическое программирование. – Л.: Издательство ЛГУ, 1981. – 328 с.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 544 с.
3. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – С. 156–172.

Наші автори

Армаш Тетяна Сергіївна, магістрант кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету (*математика, методика викладання*)

Астіоненко Ігор Олександрович, старший викладач кафедри вищої математики Херсонського національного технічного університету (*імовірнісні методи у обчислювальній математиці*)

Биков Валерій Юхимович, д.т.н., професор, член-кореспондент АПН України, директор Науково-дослідного інституту інформатизації освіти і засобів навчання АПН України

Білоусова Людмила Іванівна, к.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри інформатики Харківського національного педагогічного університету ім. Г.С. Сковороди (*проблеми навчання інформатики у ВНЗ і школі, ІКТ в освіті*)

Бобилєв Дмитро Євгенович, аспірант кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету (*механіка деформівного твердого тіла, методика викладання математики у вищій школі*)

Богатинська Наталія Володимирівна, доцент кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету (*проблема підготовки вчителя математики в умовах кредитно-модульної системи навчання*)

Бондаренко Злата Василівна, викладач кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету (*методика вивчення диференціальних рівнянь*)

Бурмістров Олександр Миколайович, к.ф.-м.н., зав. кафедрою фізико-математичних наук, професор Державної льотної академії України (*міжпредметні зв'язки фізики, гідроакустика*)

Васильєва Людмила Володимирівна, старший викладач Донбаської державної машинобудівної Академії (*чисельні методи, дистанційне навчання*)

Величко Ігор Миколайович, асистент кафедри вищої математики і фізики Керченського морського технологічного інституту (*математика*)

Вербицький Віктор Ілліч, к.ф.-м.н., доцент Харківського національного автомобільно-дорожнього університету (*якісна теорія диференційних рівнянь, функціональний аналіз, методика викладання математики у вищий школі*)

Вірченко Ніна Опанасівна, д.ф.-м.н., професор кафедри математичного аналізу та теорії імовірностей фізико-математичного факультету Національного технічного університету України "КПІ" (*диференціальні рівняння, математична фізика, методика вищої математики, історія математики*)

Віхрова Олена Вікторівна, к.пед.н., доцент кафедри математики, заступник декана фізико-математичного факультету Криворізького державного педагогічного університету (*методика навчання математики*)

Вовк Анатолій Іванович, к.ф.-м.н., с.н.с., зав. лабораторією розробки мережевих інформаційних технологій Державного НДІ автоматизованих систем в будівництві (*дискретна математика, символьна алгебра, web-програмування, комп'ютерна графіка*)

Войналович Наталія Михайлівна, к.пед.н., доцент кафедри математики Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка (*методика навчання математики*)

Волков Юрій Іванович, д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри математики Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка (*математичний аналіз, теорія ймовірностей*)

Волков Сергій Володимирович, старший викладач Красноармійського індустріального інституту Донецького національного технічного університету (*теорія інтерполяції та наближення функцій, лінійні методи підсумовування рядів Фур'є*)

Волчанський Володимир Володимирович, лаборант кафедри професійної педагогіки Державної льотної Академії України (*чисельні методи в дидактиці, дидактика професійної освіти, міжпредметні зв'язки фізики*)

Гетьман Ірина Анатолівна, старший викладач Донбаської державної машинобудівної Академії (*СУБД, фінансова математика*)

Гірник Анатолій Володимирович, член-кор. Академії Будівництва України, завідувач відділенням Державного НДІ автоматизованих систем в будівництві (*дистанційне навчання, Інтернет-технології, захист інформації*)

Голубєва Світлана Федорівна, магістрант кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету (*методика викладання математики*)

Гончаренко Яніна Володимирівна, к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова

Горзій Тетяна Олексіївна, к.ф.-м.н., доцент кафедри математики Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди

Горох Віктор Павлович, к.ф.-м.н., доцент, докторант Харківського національного педагогічного університету ім. Г.С. Сковороди (*інформаційні технології в математиці та викладанні математики, тестові технології в освіті*)

Горшкова Ганна Алімівна, асистент Криворізького металургійного факультету Національної металургійної академії України

Грубич Олена Миколаївна, магістрант фізико-математичного факультету Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди

Дітчук Роман Львович, старший викладач кафедри математики та методики викладання математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (*проективна геометрія, методика навчання математики*)

Драчова Ірина Олександрівна, асистент кафедри вищої математики та фізики Керченського морського технологічного інституту (*методика викладання математики у вищій школі*)

Дрєєв Олександр Миколайович, асистент кафедри програмного забезпечення Кіровоградського національного технічного університету (*програмування, побудова та реалізація математичних моделей, прогнозування сонячної активності та її вплив на клімат Землі*)

Дрибан Валерій Мусійович, доцент кафедри вищої і прикладної математики Донецького державного університету економіки і торгівлі ім. М. Туган-Барановського (*методика викладання*)

Євсеєва Олена Геннадіївна, к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики ім. В.В. Пака Донецького національного технічного університету (*дидактика вищої школи, навчання математики студентів економічних спеціальностей, економіко-математичне моделювання*)

Єршова Тамара Григорівна, старший викладач кафедри вищої математики та фізики Керченського морського технологічного інституту (*методика викладання математики у вищій школі*)

Жалдак Мирослав Іванович, д.пед.н., професор, академік АПН України, завідувач кафедри основ інформатики та обчислювальної техніки Національного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова

Жук Юрій Олексійович, к.пед.н., с.н.с., заступник директора з наукової роботи Науково-дослідного інституту інформатизації освіти і засобів навчання АПН України

Задорожня Тетяна Миколаївна, старший викладач Національної академії державної податкової служби України (*особливості вивчення математичних дисциплін в економічних закладах освіти*)

Іваненко Людмила Олександрівна, викладач Сумського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти (*математична логіка, дискретна математика, історія математики*)

Івановський Микола Володимирович, асистент кафедри інформатики та прикладної математики Керченського морського технологічного інституту (*методика викладання математики у вищій школі*)

Кабанов Костянтин Ігорович, старший викладач Харківського національного автомобільно-дорожнього університету (*теорія ймовірностей та математична статистика, методика викладання математики у вищій школі*)

Карнаух Олена Миколаївна, магістрант кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету (*математика та інформатика*)

Кислова Марія Алімівна, старший викладач Криворізького металургійного факультету Національної металургійної академії України

Клочко Віталій Іванович, д.пед.н., професор, завідувач кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету (*дидакти-*

ка математики, інформатики вищої школи)

Ковтун Ірина Іванівна, к.ф.-м.н., доцент Національного аграрного університету України (*методика викладання математики*)

Козуб Наталя Олександрівна, старший викладач кафедри інформаційних технологій Херсонського національного технічного університету (*обчислювальні алгоритми барицентричного усереднення*)

Кокова Ольга Олександрівна, магістрант кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету (*математика, методика викладання*)

Коломієць Світлана Володимирівна, к.ф.-м.н., ст. викладач кафедри вищої математики Сумського національного аграрного університету (*методика навчання математики, теорія біфуркації та її застосування до дослідження динамічних систем*)

Корнейчук Ірина Валеріївна, аспірант Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (*методика навчання математики*)

Корольський Володимир Вікторович, к.т.н., професор, завідувач кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету (*наближені методи обчислень та методика викладання математики*)

Крамаренко Тетяна Григорівна, асистент кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету (*формування та розвиток творчої особистості школяра, комп'ютерно-орієнтоване навчання математики*)

Крючковський Віктор Володимирович, к.ф.-м.н., професор кафедри прикладної математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету (*вдосконалення викладання фундаментальних дисциплін*)

Кузема Тетяна Борисівна, викладач кафедри іноземної філології Севастопольського міського гуманітарного університету імені Князя Володимира

Легостаєва Анна Миколаївна, магістрант кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету (*математика, методика викладання*)

Лещинський Олег Львович, к.ф.-м.н., доцент, зав. відділенням бакалаврату Промислово-економічного коледжу Національного авіаційного університету (*теорія фракталів та її застосування у теорії ймовірностей, теорія нечітких множин, теорія ланцюгових дробів, застосування математичних методів для розв'язування прикладних задач економічного спрямування*)

Лобас Олександр Володимирович, магістрант кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету

Ломаєва Тетяна Василівна, к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова (*геометрія*)

Лукащук Тамара Іванівна, к.ф.-м.н., доцент Харківського національного автомобільно-дорожнього університету (*методика викладання математики у вищий школі*)

Максименко Світлана Федорівна, старший викладач Криворізького металургійного факультету Національної металургійної академії України

Мальцева Валентина Дмитрівна, старший викладач Красноармійського індустріального інституту Донецького національного технічного університету (*методика навчання математичних дисциплін у вищих технічних навчальних закладах*)

Мартиненко Олена Вікторівна, к.ф.-м.н., доцент Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка (*викладання математики у вищій та середній школі*)

Марченко Наталя Іванівна, магістрант Криворізького державного педагогічного університету (*математика, методика викладання*)

Маслов Олександр Петрович, к.т.н., доцент Сумського державного університету (*викладання математики у вищій та середній школі, чисельні методи, методика викладання*)

Матієк Ольга Ігорівна, магістрант кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету (*актуальні проблеми методики викладання математики*)

Мединська Ірина Вікторівна, магістрант кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету (*математика, методика викладання*)

Монако Тетяна Петрівна, к.ф.-м.н., доцент кафедри математичного аналізу Північно-Осетинського державного університету ім. К.Л. Хетагурова (*математика, економіка, методика викладання математики у вищій школі*)

Моторіна Валентина Григорівна, д.пед.н., професор Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди (*професійна підготовка вчителя математики*)

Небратенко Олег В'ячеславович, старший викладач Харківського національного автомобільно-дорожнього університету (*методи оптимізації, методи й форми викладання математики в університетах технічного й економічного профілю*)

Нікітіна Ірина Андріївна, доцент Національного аграрного університету України (*методика викладання математики*)

Орел Альона Анатоліївна, магістрант кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету (*математика, методика викладання*)

Пеніна Галина Геннадіївна, к.е.н., доцент, завідувач кафедри вищої і прикладної математики Донецького державного університету економіки і торгівлі ім. М. Туган-Барановського (*методика викладання, використання комп'ютерних технологій у навчальному процесі*)

Петров Олександр Михайлович, к.психол.н., доцент кафедри математики Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди

Пиреу Наталія Олександрівна, магістрант кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету (*математика, методика викладання*)

Поттосіна Світлана Анатоліївна, к.ф.-м.н., доцент кафедри економічної інформатики Білоруського державного університету інформатики та радіоелектроніки (*прикладна математика, імовірнісні та статистичні методи*)

Працьовитий Микола Вікторович, д.ф.-м.н., професор, завідуючий кафедрою вищої математики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова

Приступа Ірина Павлівна, вчитель математики та інформатики Криворізької загальноосвітньої школи I–III ступенів № 90 (*методика навчання математики*)

Проказа Олександр Тихонович, к.пед.н., доцент кафедри фізики, член-кореспондент Міжнародної академії наук педагогічної освіти, почесний професор Луганського національного педагогічного університету імені Тараса Шевченко

Прудкий Олександр Сергійович, магістрант Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка (*методика викладання математики в умовах зменшення годин на вивчення дисципліни в сільській місцевості, способи зацікавлення учнів до навчання, програмне забезпечення з математики для 7–11 класів*)

Пташний Олег Дмитрович, к.пед.н., доцент кафедри вищої математики Української інженерно-педагогічної академії

Раков Сергій Анатолійович, к.ф.-м.н, доцент, проректор з інформатизації Харківського національного педагогічного університету ім. Г.С. Сковороди

Розуменко Анжела Оуреляніївна, к.пед.н., доцент, с.н.с. Науково-дослідного центру навчально-наукових приладів Інституту прикладної фізики НАН України (*методика математики, геометрія, історія математики*)

Розуменко Анатолій Михайлович, к.ф.-м.н., доцент кафедри математики Сумського національного аграрного університету (*вища математика, теорія ймовірностей*)

Рудь Ірина Борисівна, старший викладач кафедри вищої математики та математичних методів в економіці Національної академії державної податкової служби України (*методика викладання математичних дисциплін у вищій школі*)

Савін Олександр Іванович, асистент кафедри вищої математики ім. В.В. Пака Донецького національного технічного університету (*дидактика вищої школи, навчання математики студентів інженерних спеціальностей*)

Савосько Інна Геннадіївна, аспірант кафедри економічної інформатики

Білоруського державного університету інформатики та радіоелектроніки (*розробка і дослідження моделей комунікаційних зв'язків в організаціях*)

Серебреніков Вадим Михайлович, к.т.н., доцент кафедри математики Криворізького технічного університету (*математика, теоретична механіка, методика викладання*)

Сіра Ірина Тихонівна, к.пед.н., доцент кафедри математики Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди

Сорока Лілія Іванівна, старший викладач Волинського державного університету імені Лесі Українки (*методика викладання теорії ймовірностей і математичної статистики*)

Суліма Іван Максимович, к.ф.-м.н., професор Національного аграрного університету України (*методика викладання математики*)

Титов Сергій Дмитрович, доцент кафедри вищої математики Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова (*математичне програмування, дослідження операцій, теорія оптимізації, використання сучасних пакетів символьної математики в учбовому процесі*)

Тіхова Наталія Олександрівна, викладач математики Криворізького коледжу Національного авіаційного університету "КРАУСС" (*методика викладання вищої математики з впровадженням елементів модульно-рейтингової технології*)

Ткаченко Сергій Петрович, викладач математики та інформатики Технікуму Кіровоградського національного технічного університету (*методика викладання математики, інформатики та фізики, ергономіка*)

Толстяк Олена Дмитрівна, асистент Харківського національного автомобільно-дорожнього університету (*методика викладання математики у вищий школі*)

Ульшин Петро Іванович, к.т.н., доцент кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету (*математика, теоретична механіка, методика викладання*)

Філер Залмен Юхимович, д.т.н., к.ф.-м.н., професор кафедри математики Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка (*теорія коливань та вібротехніка, диференціальні рівняння та чисельні методи, методика викладання математики та фізики, проблеми сонячно-земних зв'язків*)

Хмель Валерій Петрович, к.пед.н., доцент кафедри загальної математики, директор інституту економіки і бізнесу Луганського національного педагогічного університету імені Тараса Шевченко

Хомченко Анатолій Никифорович, д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри прикладної математики та математичного моделювання Херсонського національного технічного університету (*вдосконалення викладання фундаментальних дисциплін, стохастичні аспекти обчислювальної математики*)

Цибуленко Ольга Володимирівна, к.т.н., доцент кафедри вищої математики Херсонського національного технічного університету (*вдосконалення* *викладання фундаментальних дисциплін*)

Чабаненко Дмитро Миколайович, магістрант кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету (*математика, комп'ютерне моделювання, методика викладання.*)

Чашечникова Лариса Гнатівна, к.пед.н., доцент кафедри математики Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка (*методика навчання математики*)

Чашечникова Ольга Серафімівна, к.пед.н., доцент кафедри математики Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка (*методика навчання математики*)

Чепорнюк Ірина Дмитрівна, викладач Промислово-економічного коледжу Національного авіаційного університету

Черних Лариса Олександрівна, к.пед.н., доцент кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету (*проблеми вивчення математичних дисциплін в умовах кредитно-модульної системи навчання*)

Шепеленко Оксана Владиславівна, к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої та прикладної математики Донецького державного університету економіки і торгівлі ім. М. Туган-Барановського (*методика викладання математики, економіко-математичне моделювання*)

Школьний Олександр Володимирович, к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова (*теорія фракталів та її застосування у теорії ймовірностей, методика вивчення елементів сучасних математичних теорій у школі, методика роботи з обдарованими дітьми, застосування математичних методів для розв'язування прикладних задач економічного спрямування*)

Ярхо Тетяна Олександрівна, к.т.н., доцент, зав. кафедрою вищої математики Харківського національного автомобільно-дорожнього університету (*проблеми статистичного аналізу временних рядів; методи й форми викладання математики в університетах технічного й економічного профілю*)

Зміст

Наукове видання

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

Випуск VI

В 3-х томах

Том 1

Підп. до друку 19.03.06
Папір офсетний №1
Ум. друк. арк. 23,01

Формат 80×84 1/16
Зам. №1-1903
Наклад 300 прим.

Жовтнева друкарня
50014, м. Кривий Ріг, вул. Електрична, 5
Тел. (0564) 664381

E-mail: cc@kpi.dp.ua