Міністерство освіти та науки України
Національна металургійна академія України

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

Збірник наукових праць
Випуск V

Том 1

Кривий Ріг
Видавничий відділ НМетАУ
2005

УДК 371

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. Випуск V: В 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2005. – Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – 375 с.

Збірник містить статті з різних аспектів дидактики математики і проблем її викладання в вузі та школі. Значну увагу приділено проблемам розвитку методичних систем навчання математики та застосування засобів інформаційно-комунікаційних технологій навчання математики у шкільній та вузівській практиці.

Для студентів вищих навчальних закладів, аспірантів, наукових та педагогічних працівників.

Редакційна колегія:
В.М. Соловйов, доктор фізико-математичних наук, професор
Є.Я. Глушко, доктор фізико-математичних наук, професор
О.І. Олейніков, доктор фізико-математичних наук, професор
М.І. Жалдак, доктор педагогічних наук, професор
П.С. Атаманчук, доктор педагогічних наук, професор
В.І. Клочко, доктор педагогічних наук, професор
Ю.О. Дорошенко, доктор технічних наук, професор
О.Д. Учитель, доктор технічних наук, професор
І.О. Теплицький, відповідальний редактор
С.О. Семеріков, відповідальний секретар

Рецензенти:
Г.Ю. Маклаков – д-р техн. наук, професор кафедри кібернетики та обчислювальної техніки Севастопольського національного технічного університету, науковий керівник лабораторії біокібернетики, дійсний член Міжнародної академії біоенерготехнологій
А.Ю. Ків – д-р фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри теоретичної фізики Південноукраїнського державного педагогічного університету (м. Одеса)

ISBN 966-537-619-1

МЕТОД НАВЧАННЯ У СПІВПРАЦІ ЯК ОДИН ІЗ ШЛЯХІВ АКТИВІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНО-ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТУДЕНТІВ ПРИ НАВЧАННІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

М.Л. Бакланова
м. Черкаси, Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького
bml@ukr.net

Вступ

Однією з важливих тенденцій розвитку вищої школи є поява нового навчального середовища, яке ґрунтується на нових освітніх та інформаційно-комунікаційних технологіях. В статті 12 Всесвітньої декларації про вищу освіту для XXI сторіччя "Можливості і проблеми, пов'язані з технологією" записано: "Вищі навчальні заклади, спираючись на переваги та можливості, що надають їм нові інформаційно-комунікаційні та педагогічні технології, … повинні відігравати провідну роль та забезпечувати якість та суворі норми практики та результатів навчання шляхом … створення нових форм навчального середовища …" [6]. Безперечно, створення такого середовища передбачає появу та використання нових методів навчання. Інноваційні процеси у методах навчання, як зазначається в [5], розгортаються, зокрема, в таких напрямках:

- в аспекті універсальності методу з погляду реалізації в ньому основних функцій навчання: одержання знань, вироблення умінь і навичок, формування та тренінг професійних якостей;
- у зрізі вузької спеціальної (йдеться про методи професійного навчання) спрямованості методу на досягнення локального ефекту;
- у розвитку методичних систем, що становлять не певний метод сам по собі, а повну методичну систему;
- посилення у розвитку методів акцентів на можливість їх самостійного використання студентами без спеціальної допомоги з боку викладача, тобто методи навчання стають методами самоосвіти;
- зростання орієнтації методів не на одержання конкретних знань чи формування певних умінь і навичок, а на розвиток пізнавального потенціалу особистості, здатності до навчання, оволодіння новими системами знання, творчих здібностей;
- розвиток таких методів навчання, що впливають на внутрішню структуру особистості: мотивацію, ціннісні установки й орієнтації, інтереси і потреби.

Таким чином, з огляду на зміни, які відбуваються в системі освіти, кожному викладачеві потрібно впроваджувати в навчальний процес такі методи навчання, за допомогою яких можна залучити кожного студента до активної пізнавальної діяльності.

Тому мета нашого дослідження полягає в:

- аналізі можливостей методу навчання у співпраці як одного із шляхів активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів;
- виділенні основних етапів впровадження методу навчання у співпраці у навчальний процес;
- визначенні особливостей методу навчання у співпраці при навчанні вищої математики з використанням інформаційно-комунікаційних технологій.

1. Основні принципи методу навчання у співпраці

Навчання в співпраці (cooperative learning), а також навчання в малих групах використовувалося в педагогіці досить давно. Воно є важливим елементом прагматичного підходу до освіти у філософії Дьюї (1970), його проектного методу. Навчання в малих групах широко використовується в Західній Німеччині, Нідерландах, Великобританії, Австралії, Ізраїлі, Японії. Але основна ідеологія навчання в співпраці була детально розроблена трьома групами американських педагогів: з університету Джона Хопкінса (Р. Славін), університету Міннесота (Р. Джонсон і Д. Джонсон), групою Дж. Аронсона, Каліфорнія. Найцікавішими варіантами цього методу є, на нашу думку, Learning Together (вчимося разом), Student Team Learning (навчання в команді), Jigsaw (пилка), які детально описані в [3]. Метод навчання у співпраці відноситься до так званого гуманістичного підходу в психології й в освіті, головною відмітною рисою якого є особлива увага до індивідуальності студента, його особистості, чітка орієнтація на свідомий розвиток самостійного критичного мислення. Цей підхід розглядається у світовій педагогічній практиці як альтернативний традиційному підходу, заснованому, головним чином, на засвоєнні готових знань й їхньому відтворенні [1].

Навчання у співпраці зводиться до трьох основних принципів [2]:

- *“нагороди” (team rewards)* – команди (групи) одержують одну на всіх у вигляді бальної оцінки, сертифікату, відзнаки, похвали й інших видів оцінки їхньої спільної діяльності. Для цього їм необхідно виконати запропоноване для всієї групи одне завдання. Групи не змагаються одна з одною, тому що всі команди мають різну “планку” і час на її досягнення;
- *“індивідуальна” (персональна) відповідальність* кожного студента означає, що успіх або невдача всієї групи залежить від удач або промахів кожного її члена. Це стимулює всіх членів команди стежити за успіхами один одного й всю команду приходити на допомогу товаришеві в засвоєнні, розумінні матеріалу так, щоб кожний почував себе експертом з даної проблеми;
- *рівні можливості для досягнення успіху* означають, що кожен студент приносить бали своїй групі, які він заробляє шляхом поліпшення своїх власних попередніх результатів. Порівняння, таким чином, проводиться не з результатами інших студентів цієї або іншої груп, а із власними, раніше

досягнутими результатами. Це дає сильним, середнім і слабким студентам рівні можливості в одержанні балів для своєї команди, тому що, намагаючись щосили поліпшити результати попереднього опитування, заліку, іспиту (і поліпшуючи їх), і середній, і слабкий студенти приносять своїй команді рівну кількість балів, що дозволяє їм почувати себе повноправними членами команди й стимулює бажання піднімати вище свою персональну "планку".

Психологи, що вивчали даний підхід до навчання, давно помітили, що, якщо оцінюються зусилля, які витрачають студенти в групі для досягнення загального результату, то мотивація у всіх студентів набагато вище, ніж при традиційних формах навчання. За словами студентів, робота в групах, крім усього іншого, дозволяє їм навчитися спілкуватися між собою, що дуже корисно в житті. Тобто, не підлягає сумніву той факт, що використання методу навчання у співпраці активізує навчальну діяльність студентів як в аудиторії, так і поза нею. Але впровадження цього методу в процес навчання повинно мати систематичний характер. До того ж більш ефективним використання цього методу буде за умов поєднання його з модульно-рейтинговою системою навчання, за якої навчальний матеріал є чітко структурованим, критерії оцінювання навчальної діяльності студентів є строго визначеними, форми та види роботи з академічними та малими групами відповідають цілям навчання. Крім того, методика проведення занять згідно методу навчання у співпраці дозволяє широко використовувати інформаційно-комунікаційні технології, що активізує навчально-пізнавальну діяльність студентів ще в більшій мірі.

2. Основні етапи впровадження методу навчання у співпраці

У Черкаському державному бізнес-коледжі проводиться робота по впровадженню методу навчання у співпраці на заняттях з вищої математики у групах, які навчаються за спеціальністю "Програмування для електронно-обчислювальної техніки та автоматизованих систем". Це дозволило автору визначити основні етапи роботи викладача щодо впровадження методу навчання в співробітництві або його варіантів у навчальний процес.

1. *Аналіз навчального матеріалу*. На цьому етапі викладачеві потрібно розбити навчальний матеріал курсу на розділи, розділи – на теми, теми – на логічні блоки, і блоки – на питання, аналізуючи, які з цих питань він встигне розкрити протягом лекції, а які можна дати на самостійне опрацювання студентам під час підготовки до заняття. Крім того, враховуючи можливість використання ІКТ, виділити ті питання, які краще розв'язувати за допомогою математичних пакетів таких, зокрема, як Mathcad, Maple та ін.

2. *Формування малих груп*. Розпочати цей етап викладач повинен перед вивченням курсу, проаналізувавши на попередньому етапі за допомогою анкетування та тестування рівні розумових здібностей, математичних навичок та комунікативних можливостей студентів даної академічної групи. В результаті цієї роботи можна сформувати початкові склади малих груп.

Протягом наступних занять з урахуванням поточної успішності або в залежності від обраного варіанту методу навчання у співпраці відбуватиметься корекція складу малих груп. Можливо, краще починати проводити заняття за цим методом на початку другої теми першого розділу або використовувати навчання в малих групах спочатку для виконання лише певних форм роботи.

3. *Вибір видів занять та підбір для них таких варіантів методу навчання* у співпраці, які б найкраще відповідали цілям цих занять. Досвід показав, що заняття з формування та відпрацювання певних навичок краще проводити за таким варіантом навчання в команді (Student Team Learning) як індивідуально-групова робота (Student-Teams-Achievement-Divisions); заняття по закріпленню та контролю сформованих навичок – методом навчаємося разом (Learning Together); підвищити рівень теоретичних знань студентів з даної теми та перевірити їх дозволить інший підхід в організації навчання в співпраці, названий Jigsaw (у дослівному перекладі з англійського – ажурна пилка, а у педагогічній практиці – скорочено “пилка”) або його модифікація “Пилка-2” (Jigsaw-2). В залежності від обраного варіанту даного методу відбудеться і розбиття на групи (з однаковим рівнем навченості чи з різним), і підбір видів фронтальних та контролюючих заходів.

4. *Підготовка роздаткового матеріалу*. Викладач визначає критерії розподілу завдань за складністю (наприклад, за трьома рівнями складності: достатнім, середнім і високим), формує набори тренувальних завдань для кожної групи та контрольних – для кожного студента.

5. *Розробка системи оцінювання*. Найскладніший етап даного підходу, тому що тут викладачеві потрібно врахувати багато нюансів, не пропустити жодного моменту активної роботи студентів протягом заняття чи при підготовці до нього, тобто, крім письмових робіт (які, як правило, є результатом навчальної діяльності студентів при традиційній системі навчання), оцінюється ще й активність студента під час роботи в групі щодо виконання запропонованих завдань та підготовки до заняття. Оцінювання роботи студента протягом заняття відбувається за трьома складовими:

1) рейтинг студента в групі, тобто бали, які одержуються в результаті опитування інших членів малої групи (див. табл. 1), щодо активності даного студента при розв’язуванні загальних групових завдань;

2) бали за контрольну письмову роботу, співвідношення між якими можна визначити, наприклад, за такою схемою (табл. 2, де М – максимальна кількість балів;

3) додаткові бали, що одержує група за місце, яке вона посіла в результаті роботи, тобто бали з другого пункту студентів кожної малої групи підсумовуються і група займає певне місце в залежності від ступеня наближеності до можливого максимуму. Наприклад, нехай кожний з чотирьох членів групи із середнім рівнем навчальних досягнень може одержати за виконання самостійної роботи максимально 6 балів (тобто вся група може мак-

симально набрати 24 бали), з достатнім рівнем – 9 балів (тобто вся група – 36 балів), з високим – по 12 балів (вся група – 48 балів). Після перевірки (без урахування балів першого пункту) виявилося, що група із достатнім рівнем навчальних досягнень набрала всі можливі 24 бали, група із середнім рівнем навчальних досягнень набрала 33 бали (тобто не добрала до максимуму 3 бали), а група із високим рівнем навчальних досягнень набрала 46 балів (тобто не добрала до можливого максимуму 2 бали). В результаті кожному члену групи із достатнім рівнем навчальних досягнень додається до його особистої суми балів 3 додаткових бали, кожному члену групи із середнім рівнем – 1 додатковий бал, із високим рівнем – 2 додаткових бали. Таким чином, стимулюється робота в групах, тобто кожний студент несе відповідальність, як за свої власні досягнення з набуття певних навичок, так і за досягнення кожного члена своєї малої групи.

Таблиця 1

Оцініть внесок кожного члена групи у розв'язування завдань вашої групи				
Прізвище студента	Бали (від 1 до чотирьох)			
	Студент 1	Студент 2	Студент 3	Студент 4
Студент 1				
Студент 2				
Студент 3				
Студент 4				

Таблиця 2

Рівні навчальних досягнень	Бали
Початковий	менше 25% від числа М
Достатній	від 26% до 50% числа М
Середній	від 51% до 75% числа М
Високий	від 76% числа М і більше

6. *Проведення занять за методом навчання у співпраці*. Викладач, який прагне навчати студентів за методом у співпраці, повинен проаналізувати кожен із запропонованих етапів і продумати, де і яким чином можна використовувати інформаційно-комунікаційні технології.

3. Приклади впровадження методу навчання у співпраці при вивченні вищої математики

Проілюструємо використання методу навчання у співробітництві при вивченні теми "Знаходження невизначених інтегралів" з курсу вищої математики для студентів спеціальності "Програмування для електронно-обчислювальної техніки та автоматизованих систем" Черкаського державного бізнес-коледжу.

Навчальний матеріал був попередньо розподілений на такі логічні блоки:

1) поняття первісної та невизначеного інтегралу;
2) властивості невизначених інтегралів;
3) таблиця основних інтегралів;
4) основні методи інтегрування;
5) інтегрування раціональних функцій;
6) інтегрування ірраціональних функцій виду;
7) інтегрування за допомогою тригонометричних підстановок;
8) інтегрування за допомогою підстановок Ейлера.

Причому, оскільки на лекції було висвітлено лише перші чотири питання, то всі інші питання були винесені на самостійне опрацювання.

Заняття з активізації роботи студентів з теоретичним матеріалом методом "Пилка-2" у формі колоквіуму. Після прочитаної лекції студенти з урахуванням поточних оцінок розбиваються на групи (різні за рівнем знань та статтю) по 4 особи. При цьому кожний студент одержує два питання для підготовки, оскільки всього 8 логічних блоків. Заняття проводиться за рахунок годин, відведених на консультації, за такою схемою.

I крок. "Зустріч експертів", коли студенти, що вивчають одне й те саме питання, але належать до різних малих груп, зустрічаються й обмінюються інформацією як експерти з даного питання. (Тривалість 10 хв.)

II крок. Обговорення студентами матеріалу, коли всі студенти малих груп доповідають іншим про те, чого довідалися самостійно та під час зустрічі експертів. (Тривалість 40 хв.)

III крок. Письмовий зріз знань (табл. 3). (Тривалість 30 хв.)

Таблиця 3

I варіант

1. Дайте означення первісної (1 б.)

2. Сформулюйте і доведіть властивість невизначеного інтегралу від суми скінченого числа функцій (2 б.)

3. Виведіть формулу знаходження невизначених інтегралів методом заміни змінної (4 б).

4. Як знаходяться інтеграли виду $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$? (5 б.)

Заняття з формування та відпрацювання методом індивідуально-групової роботи можна проводити за такою схемою.

I крок. Аналіз результатів колоквіуму та поділ згідно них на малі групи по чотири особи, що є обов'язково різними за рівнем навченості та статтю. (Тривалість 5 хв.)

II крок. Актуалізація опорних знань – фронтальна робота по обговоренню теоретичного матеріалу у формі бесіди. (Тривалість 10 хв.)

III крок. Формування та відпрацювання навичок у вигляді розв'язування малими групами завдань, взятих з [4] (табл. 4) або вроздріб, коли кожен студент виконує свою частину завдання, або за "вертушкою", коли кожний наступний приклад із завдання виконується наступним студентом, при цьому починати може або сильний, або слабкий студент. При цьому кожен студент повинен виконувати кожне завдання і це виконання контролюється всією групою. (Тривалість 45 хв.)

Можливість проводити заняття в комп’ютерному класі значно спростить роботу викладача та самих студентів щодо перевірки правильності виконання завдань кожною малою групою під час третього кроку за допомогою, наприклад, такої системи комп’ютерної математики як Mathcad 2001. Цей пакет дозволяє при правильному введенні підінтегральної функції знайти навіть дуже складні невизначені інтеграли.

Таблиця 4

І група Знайти невизначені інтеграли: 1) $\int \frac{\sin^2 x + 2\sin x - 5}{\sin^2 x} dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$; 3) $\int x^2 e^{3x} dx$; 4) $\int \frac{xdx}{x^4 - 5x^2 + 6}$; 5) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$; 6) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$; 7) $\int \sqrt{4x - x^2} dx$; 8) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

IV крок. Контроль рівня сформованості навичок у вигляді розв’язування індивідуальних, диференційованих завдань (табл. 5). (Тривалість 20 хв.)

Таблиця 5

Самостійна робота		
Знайти невизначені інтеграли		
Достатній рівень **І варіант**	***Середній рівень*** **І варіант**	***Високий рівень*** **І варіант**
1) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 9}}$; 3) $\int x \arcsin x dx$; 4) $\int \frac{xdx}{x^2 - 3x + 3}$.	1) $\int \frac{\lg x}{x^3} dx$; 2) $\int \frac{(8x - 11)dx}{\sqrt{5 + 2x - x^2}}$; 3) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}$; 4) $\int \cos^3 x \sin x dx$.	1) $\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$; 2) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3} + 1} dx$; 3) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$; 4) $\int \frac{dx}{(x^2 + 9)\sqrt{16 - x^2}}$.

V крок. Домашнє завдання. Додому кожний студент одержує своє індивідуальне контрольне завдання (Тривалість 1 хв.)

У перевірці правильності виконання так званої “роботи над помилка-ми” може допомогти комп’ютер. Наприклад, система комп’ютерної математики Mathcad 2001 лише за кілька секунд виведе на екран відповіді завдань високого рівня, для розв’язування яких навіть викладачу потрібно значно більше часу. Для цього необхідно в палітрі **Math** обрати панель і в палітрі **Calculus** натиснути кнопку та, користуючись клавіатурою, згідно правил набору в даній системі ввести підінтегральну функцію. Потім знову ж в в палітрі **Math** обрати панель і в новому меню **Symbolic** за допомогою кнопки одержати результат (рис. 1).

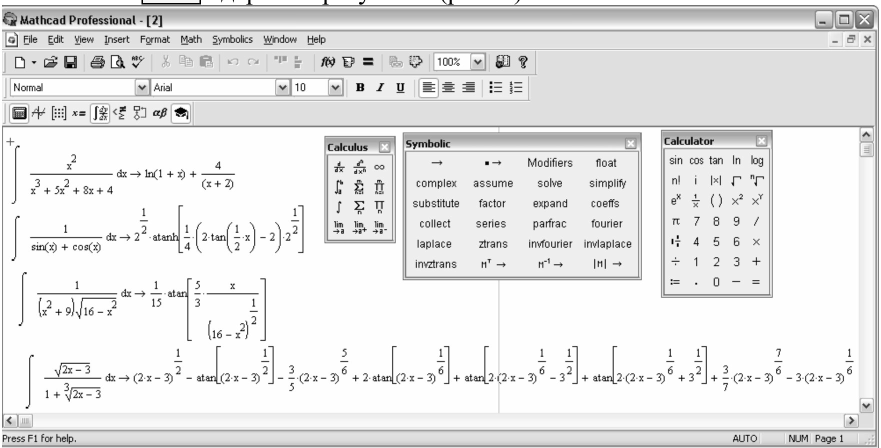


Рис. 1

<u>Заняття по закріпленню набутих навичок</u> краще проводити за такою схемою.

I крок. Оголошення результатів роботи студентів минулого практичного заняття і з урахуванням цих результатів поділ на малі групи по чотири особи, що є тепер вже однаковими за рівнем навченості. (Тривалість 5 хв.)

II крок. Перевірка домашнього завдання у вигляді обговорення по групах. (Тривалість 10 хв.)

III крок. Корекція та закріплення навичок у вигляді розв’язування кожною малою групою завдань відповідного рівня (табл. 6). (Тривалість 30 хв.)

Таблиця 6

Рівень складності	**Завдання по знаходженню невизначених інтегралів**
достатній	Основними методами: 1) безпосереднє інтегрування; 2) підстановки (заміни змінної); 3) частинами.
середній	Від раціональних, ірраціональних та тригонометричних функцій.
високий	За допомогою тригонометричних підстановок або підстановок Ейлера.

IV. Контроль корекції сформованих навичок у вигляді розв’язування індивідуальних диференційованих контрольних завдань (див., наприклад, табл. 7). (Тривалість 35 хв.)

Таблиця 7

Контрольне завдання достатнього рівня №1	
Знайти невизначені інтеграли і обрати правильну відповідь	
1. $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}dx$ **(1 б.)**	1) $3x - \frac{2x(1.5)^x}{\ln(1.5)} + C$; 2) $3x - \frac{2(1.5)^x}{\ln(1.5)} + C$; 3) $\frac{2(1.5)^x}{\ln(1.5)} + C$.
2. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$ **(2 б.)**	1) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-2} + C$; 2) $\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-2} + C$; 3) $2\sqrt{x-2} - \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$.
3. $\int \sin(\ln x)dx$ **(3 б.)**	1) $\frac{1}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x) + C$; 2) $\frac{1}{2}x(\sin\ln x - \cos\ln x) + C$; 3) $\frac{1}{2}(\cos\ln x - \sin\ln x) + C$.

Досвід показав: даний метод настільки активізує навчально-пізнавальну діяльність студентів, що кілька осіб протягом заняття змогли, досягнувши певних результатів у групах з низьким рівнем складності, приєднатися до груп із середнім рівнем складності, і, як показали результати, недарма.

Висновки

Метод навчання у співпраці безперечно можна використовувати на заняттях з дисциплін різних циклів як один із шляхів активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів. Але при викладанні математичних дисциплін він повинен стати неодмінною частиною методичних систем – про це говорять основні принципи навчання у співпраці. По-перше, в роботу груп включаються студенти з різним рівнем навченості (це важливо, тому що рівень знань студентів коливається від дуже низького до досить високого), і з різним рівнем сприйняття та швидкості реакції (це також важливо, тому що багатьом студентам досить складно сприймати матеріал математичних дисциплін у швидкому темпі, в якому викладач читає лекції “щоб все встигнути”). По-друге, допомога студентів один одному все рівно має місце, але в аудиторії вона відбувається під пильним оком викладача, який в разі потреби може втрутитися і допомогти в свою чергу. По-третє, цей метод гарно інтегрується із використанням інформаційно-комунікаційних технологій при навчанні вищої математики. І, по-четверте, при правильній організації роботи за цим методом відбувається активізація навчально-пізнавальної діяльності, до чого і прагнуть сьогодні провідні педагоги вищої школи.

Література:

1. Беспалько В.П. Слагаемые педагогической технологии. – М.: Педагогика, 1989. – 190 с.

2. Кларин М.В. Технологи обучения: идеал и реальность. – Рига: Педагогический центр «Эксперимент», 1999. – 180 с.

3. Полат С.Е., Бухаркина М.Ю., Моисеева М.В., Петров А.Е. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования: Учебное пособие для студентов пед. вузов и системы повышения квалификации пед. кадров / под ред. Полат С.Е. – М.: Издательский центр «Академия», 2000. – 272 с.

4. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2001. – 480 с.: іл. – (Унів. б-ка).

5. Ситуаційна методика навчання: теорія і практика / Упор. О. Сидоренко, В. Чуба. – К.: Центр інновації та розвитку, 2001. – 256 с.

6. http://international.edu.ru/international_edu_library/scientific/monograph/1232/ – Образовательный стандарт высшей школы: сегодня и завтра. Монография / Под общей редакцией доктора педагогических наук В.И. Байденко и доктора технических наук Н.А. Селезневой. – М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2001. – 206 с.

ВРАХУВАННЯ ВІКОВИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ СТУДЕНТІВ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ В ПЕДАГОГІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

В.Г. Бевз
м. Київ, Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Освіта XXI століття – це освіта для людини. Її стержень – розвиваюча, культуротворча домінанта, виховання відповідальної особистості, яка здатна до самоосвіти і саморозвитку, вміє використовувати набуті знання і вміння для творчого розв'язування проблем, критично мислити, опрацьовувати різноманітну інформацію, прагне змінити на краще своє життя і життя своєї країни, здатна до продуктивного діалогу з природою і соціумом [1, с. 4].

Такий підхід до розуміння освіти породжує нове тлумачення поняття навчання. На нашу думку, навчання у вищій школі – це цілісний двосторонній процес педагогічної діяльності викладача та навчально-пізнавальної діяльності студентів, спрямований на розвиток особистості як самоцінності і мети суспільного розвитку, у результаті якого відбувається засвоєння суб'єктами учіння знань, навичок і умінь, які в цілому сприяють формуванню конкурентоспроможного на ринку праці фахівця.

В психології виховання і навчання вважають формою психічного розвитку людини. Виховна і навчальна діяльність за своєю суттю мають скеровувати, спрямовувати, організовувати індивідуальне становлення людської особистості, формувати її риси та якості згідно з вимогами суспільства [2, с. 166]. Сучасна психологічна наука розглядає особистість, як складну систему, в якій диференціюються та інтегруються психічні властивості, що розвиваються в індивіді під впливом соціальних факторів в умовах здійснення ним діяльності та спілкування з іншими людьми.

Модель системної психологічної структури особистості має вигляд трьох ортогональних базових вимірів:

I – соціально-психолого-індивідуальний ("вертикальний"): спілкування, спрямованість, характер, самосвідомість, досвід, інтелектуальні процеси, психофізіологічні якості;

II – діяльнісний вимір ("горизонтальний"): потребнісно-мотиваційні компоненти, інформаційно-пізнавальні компоненти, цілеутворюючі компоненти, результативні компоненти, емоційно-почуттєві компоненти діяльності;

III – генетичний вимір ("віковий"): задатки, здібності.

Розвиток особистості у горизонтальному та вертикальному вимірах – це єдиний процес. Будь-яка психічна функція горизонтального ряду залишає свої сліди у вертикальному ряді нашарувань, диспозицій і навпаки. За допомогою вікового виміру характеризується рівень розвитку властивостей особистості, її задатків і здібностей на певному етапі становлення індивіда як особистості [2, с. 118].

Розглянемо, як вікові особливості студентів впливають на їх навчання математики і підготовку до майбутньої професійно-педагогічної діяльності. Вікові особливості студентів, як і взагалі дорослих людей, розглядаються в акмеології (спеціальний розділ вікової психології, або наука про період розквіту всіх життєвих сил людини).

Час людського життя між юністю та старістю називають циклом дорослості. Вікові межі дорослості (від 17–18 років до 55–60 років) визначаються комплексом соціальних та біологічних причин і залежать від конкретних соціально-економічних умов індивідуального розвитку людини [3, с. 193]. В рамках циклу дорослості виділяють два періоди життя – ранню і середню дорослість. Перша фаза ранньої дорослості триває приблизно до 30 років життя і співпадає з періодом молодості людини, частина якої може проживатися у формі студентського життя.

В цей час завершується загальносоматичний розвиток людини, статеве дозрівання, встановлюються розумові здібності та інтереси. Формуються певна система цінностей (особистісний світогляд і життєва позиція), цілісний образ "Я", готовність до самовдосконалення особистості та професійні наміри. Збагачується психологічний досвід людини, відбувається включення людини у всі види соціальної активності та оволодіння багатьма соціальними ролями.

Психологічними особливостями 20-річних є:

1) прагнення відірватися і відрив від батьківських коренів;

2) бажання "закріпитися" у світі дорослих, стати одним з них;

3) необхідність зробити вибір – обрати професію, а також внести визначеність у своє особисте життя [4, с. 12].

Свідомий вибір професії спирається на знання власних можливостей та їх відповідності вимогам професії, що обирається, і відбувається з орієнтації на цінності, прийняті людиною. Людина, що зробила свій перший професійний вибір, включається в процес освоєння обраного фаху і таким чином переходить на фазу професійного розвитку.

Навчання студентів у вузах може мати форму професійної освіти або професійної підготовки. У першому випадку навчання спрямовується на розвиток особистості студентів, зокрема самостійності, комунікативних якостей, гуманістичних установок, аналітичних та інтелектуальних здібностей, сприяє культурному збагаченню та формуванню творчих ідей та задумів тощо. Другий напрямок спрямований перш за все на забезпечення студентів необхідними для роботи знаннями і практичними навичками, що в цілому сприяє підвищенню конкурентоспроможності майбутнього фахівця на ринку праці [5, с. 47].

Час навчання в університеті можна умовно розділити на два основних етапи: етап молодших курсів, коли відбувається адаптація студента-новачка до навчального закладу, до діяльності в умовах вищої школи, і етап старших курсів (починаючи з третього) – основний етап професійного самовизначення студента як майбутнього спеціаліста.

На першому етапі відбувається корінна ломка уявлень, звичок школяра, яка пов'язана з необхідністю змінювати й перебудовувати свою поведінку і діяльність, "входити" в нові умови. Головною метою для студента на цьому етапі є оволодіння способами і прийомами навчальної діяльності. Першокурсники інколи неуспішно засвоюють знання зовсім не тому, що отримали слабку підготовку в школі, а тому, що у них не сформовані такі якості особистості, як здатність навчатися самостійно, контролювати і оцінювати себе, рефлексувати свої індивідуальні особливості пізнавальної діяльності, вміння правильно розподілити робочий час для самостійної підготовки. У них недостатньо сформоване прагнення до самоосвіти та самовиховання.

Система навчання в університеті відрізняються від шкільної, бо розрахована на високий рівень свідомості та особисті інтереси студентів. Тут формально відсутня жорстка система щоденної шкільної перевірки, "страх" перед учителем, необхідність щоденно вчити уроки. Деякі студенти, які витримали складний і важкий вступний конкурс, потім виявляються непідготовленими до відповідального ставлення до навчання. Психологи відносять такі процеси до "кризи першого курсу" (криза адаптації до умов навчання в університеті). З цього приводу слушним є зауваження З.І. Слєпкань: "Навчальна діяльність студентів багатогранна і досить велика за обсягом. Це пов'язано із значною кількістю предметів і досить великою складністю частини з них. Тому вже у перші тижні навчання у вузі слід навчати студентів вчитися. Цю роботу мають проводити в першу чергу викладачі, які викладають відповідні курси, куратори академічних груп, працівники бібліотеки" [6, с. 58].

Враховуючи ці обставини, які особливо проявляються в процесі вивчення студентами вищої математики, навчальний процес на першому курсі слід організувати у такий спосіб, щоб допомогти студентам з меншими втратами перейти на вищий рівень навчання. З цією метою для студентів організовуються регулярні консультації з кожної математичної дисципліни, проводиться міжсесійний контроль, створюються методичні рекомендації щодо вивчення конкретної математичної дисципліни. Велику допомогу надають першокурсникам викладачі, які до списку рекомендованої літератури включають посібники, в яких подаються зразки розв'язування задач. Бажано також навчити студентів ними користуватися.

Молодість – це важливий етап розвитку розумових здібностей людини. У становленні цілісності інтелекту визначну роль відіграє освіта (обсяг засвоєних знань, загальний рівень інформації) і навчання, тобто діяльність по засвоєнню знань, навичок, вмінь. Саме тому в структурі інтелекту особливо значне положення займають мислення та пам'ять. Мислення в цей період значно відстає від рівня розвитку пам'яті, що знижує ефективність засвоєння і збереження навчального матеріалу. В той же час потік інформації, що постає перед студентами, зростає набагато швидше, ніж розвивається пам'ять. Все це вимагає правильної організації навчання.

На перших курсах відповідальність за організацію навчального процесу в більшій мірі має покладатися на викладачів. Навчальний матеріал для першокурсників має спеціально структуруватися і подаватися невеликими дозами. У дослідженні [7, с. 22] встановлено також, що з метою кращого запам'ятовування навчального матеріалу для студентів молодших курсів важливо кодувати запропонований для вивчення матеріал символами, які містять менше інформації, але подавати такий матеріал з більшою частотою.

Перевести отримані знання у довготривалу пам'ять можливо лише за умови активного повторення. В цьому випадку повторення має полягати у збудженні асоціацій і використанні відомого студентам матеріалу в нових умовах [8, с.9 8]. А тому, кожну лекцію бажано починати з повторення основних положень попередньої лекції, а закінчувати – доступними проблемними запитаннями, які спонукатимуть студентів до активного опрацювання лекційного матеріалу дома.

Введення нового поняття слід супроводжувати роз'ясненням його місця в системі вивчених раніше понять та встановленням перспективних зв'язків з поняттями, що будуть вивчатися пізніше. Для цього бажано використовувати таблиці, схеми чи діаграми. Позитивні асоціації для запам'ятовування викликатимуть також цікаві повідомлення з історії створення і розвитку поняття чи методу, який вивчається.

Важким етапом у навчанні в університеті є підготовка і складання екзаменів. Допоможуть підготуватися і адаптуватися до цього процесу спеціально розроблені посібники, методичні рекомендації чи вказівки. Наприклад, в НПУ імені М.П. Драгоманова з цією метою М.В. Працьовитий видав для студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів посібник "Екзамен з аналітичної геометрії (I семестр)".

Розвиток інтелекту в молодості тісно пов'язаний із розвитком творчих здібностей, що передбачають вияв інтелектуальної ініціативи і створення оригінального нового продукту. Важливим компонентом творчості є дивергентне мислення та здібності самостійно ставити проблеми. Творча активність молодої людини передбачає вміння долати буденні уявлення, виходити за межі звичайної логіки умовиводу і передбачає наявність таких особистісних якостей, як сміливість, самостійність, впевненість та прагнення до самовдосконалення й успіху. Разом із тим зберігається необхідність у слідуванні інтелектуальній дисципліні, організованості, систематичній роботі над собою, у розвитку вміння максимально та доцільно використовувати власні інтелектуальні ресурси.

Розвитку творчого мислення сприяють активні форми діяльності студентів з опанування математики, що впроваджуються вже з перших курсів. Серед них виконання розрахунково-графічних робіт, написання курсових робіт, підготовка виступів на наукових гуртках, участь в олімпіадах тощо. Лекторам, які викладають математичні дисципліни, вже на першому курсі слід залучати студентів до розв’язування творчих задач і заохочувати до постановки запитань у процесі лекції. Нестандартні і незвичні, на перший погляд, запитання можуть перерости у проблему, що стане предметом наукового дослідження, як це, наприклад, сталося із задачею про “чотири фарби”.

На основі формування інтелектуальних здібностей формується новий тип ставлення до світу, нова система цінностей, нове ставлення до себе. Перехід на стадію постановки проблеми та особистої позиції є індикатором пристрасного ставлення до дійсності, прийняття на себе відповідальності за перебіг подій, за долі та справи інших людей. У процесі навчання студентське мислення виходить на рівень власної позиції в судженнях. Його якісні перетворення відстежуються через ряд стадій:

1) стадію мислительного дуалізму (опора молодої людини на прості альтернативи);

2) стадію мислительного релятивізму (формування здатності виявляти толерантність до точок зору, які суперечать одна одній);

3) стадію відповідального вибору судження та оформлення власної позиції (здатність брати на себе відповідальність за вибір власних цінностей, поглядів та власного способу життя).

На першій фазі дорослості людина вже здатна осмислювати протилежні думки, синтезувати їх та інтегрувати. Особливо важливий аспект такого мислення – інтеграція ідеального та реального. Якраз у цьому виявляється сильна сторона мислення дорослої людини [5, с. 56].

Цю здатність мислення молодих людей слід використовувати для пропедевтичного навчання студентів складати конспекти поурочних планів та позакласних заходів ще до проходження педагогічної практики. Привчати студентів до такої діяльності можна вже на третьому курсі, починаючи з перших занять з методики навчання математики. Теми уроків для цього слід добирати так, щоб студенти мали змогу проявити творче мислення, використати власний досвід навчання в школі, знання математики, отримані в університеті, і відповідну навчальну і методичну літературу. Для прикладу наведемо кілька таких тем:

– Види кутів. Бісектриса кута (5 кл.);

– Формули скороченого множення (7 кл.);

– Система лінійних рівнянь з двома змінними (7 кл.);

– Симетрія відносно точки і прямої (8 кл.);

– Числові проміжки. Об’єднання та переріз числових проміжків (9 кл.).

Студенти третього курсу більш реалістично оцінюють можливості власного працевлаштування – і виявляється, що цих можливостей зовсім небагато, до того ж вони не є надто привабливими. Система вузівського навчання характеризується зміщенням акценту на теоретичний аспект професійної підготовки. Практична підготовка молодих спеціалістів починається здебільшого на 4-му курсі, якщо навіть раніше, то в невеликому обсязі. Отже, студент позбавлений можливості побачити, відчути те, на що він здатен як фахівець, і напрацювати внутрішні критерії професійного розвитку.

Поступово із здобуттям професійних знань студенти починають глибше осмислювати тонкощі своєї майбутньої спеціальності, у них формується певне ставлення до майбутньої професійної діяльності. Разом із тим відбувається розширення уявлень про себе як про особистість та майбутнього фахівця. В процесі професійної підготовки формується перш за все уявлення студентів про свої інтелектуальні можливості, лідерські якості й популярність. Розчарування в обраній професії, несвоєчасно зроблений вибір і фахова бездіяльність породжують в студентів у другий період навчання кризові переживання – кризу третього курсу (ревізії професійного вибору), яка ускладнюється невикористаністю, низьким престижем аналогічних фахівців, віддаленістю професійного навчання від реального життя. Криза виявляється у невдоволеності змістом навчання, зростанні невпевненості у майбутньому, розгубленістю, пошуками нових можливостей для реалізації та ін.

Саме для студентів цієї вікової категорії актуальними будуть зустрічі з провідними фахівцями у галузі математики, педагогіки і психології. Зацікавлять студентів лекції, прочитані співробітниками Інституту математики НАН України або дійсними членами Академії педагогічних наук України. На гуртку з методики математики можна організувати зустрічі з провідними вчителями математики і авторами шкільних підручників. Цікавими можуть стати спільні семінари і конференції студентів і вчителів практиків. Студенти, зокрема, можуть підготувати повідомлення про використання історизмів на уроках і в позакласній роботі, а також продемонструвати застосування комп'ютера чи інших сучасних засобів навчання.

Криза п'ятого курсу (криза випускника). На п'ятому курсі відбувається чи не найбільше подій, що характеризуються різними психологічними змінами. Тому можна говорити про кризу випускника, оскільки більшість випускників перебувають на етапі переходу від одного соціального рівня до іншого, пов'язаного з системними та якісними новоутвореннями у сфері соціальних відносин, провідної діяльності. На цьому етапі розвитку особистості здійснюється перехід до нового типу взаємовідносин з оточуючими, при якому потрібно враховувати нові можливості, зміну "соціальної ситуації розвитку", виду діяльності та роду занять, перебудову всієї структури свідомості особи, переорієнтацію на нові життєві цілі – усе це помітно впливає на розвиток особистості.

У реалізації вибудованих у молодості планів та сподівань молодої людини щодо майбутньої кар'єри може допомогти зустріч із досвідченою людиною-наставником. Наставник виконує у житті молодої людини роль компетентного вчителя, сприяє посадовому зростанню, є еталоном для наслідувавання і втілює високий рівень досягнень. У цей період життя людина особливо відкрита до спілкування з іншою людиною, а знайомства та дружні зв'язки, що створюються в цей час, можуть зберігатися впродовж усього життя.

Випускники особливо потребують співпраці з фахівцями в обраній професійній сфері. Неоднорідність студентської аудиторії потребує різних видів допомоги і співпраці. Студенти, що сподіваються продовжити навчання (в магістратурі, аспірантурі) і займатися науковими дослідженнями, хочуть отримати оцінку своїх досягнень, консультації з приводу актуальності тієї чи іншої теми дослідження, поради про місце і форми продовження навчання тощо. На іншу співпрацю сподіваються студенти, які вже працюють в школі, і хочуть використати останній рік навчання і роботу над кваліфікаційною роботою для підвищення своєї теоретичної підготовки.

Література:

1. Бондар С.П., Бондар В.І. Сучасні тенденції оновлення змісту і процесу навчання в школі // Наукові записки: Збірник наукових статей НПУ імені М.П. Драгоманова / Укл. П.В. Дмитренко, Л.Л. Макаренко. – К.: НПУ, 2001. – Випуск 44. – С. 3–10.
2. Психологія: Підручник / Ю.Л. Трофімов, В.В. Рибалка, П.А. Гончарук та ін.; за ред. Ю.Л. Трофімова. – 3-тє вид. – К.: Либідь, 2001. – 560 с.
3. Рыбалко Е.Ф. Возрастная и дифференциальная психология. – СПб: Питер, 2001. – 221 с.
4. Хазратова Н. Психологічні проблеми та особистісні кризи студентського віку // Особистісні кризи студентського віку: Зб. наук. ст./ За ред. Т.М. Титаренко. – Луцьк: Вежа, 2001. – 140 с.
5. Щотка О.П. Вікова психологія дорослої людини: Навчальне вид. – Ніжин: НДПУ, 2001. – 194 с.
6. Слєпкань З.І. Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі. – К.: НПУ, 2000. – 210 с.
7. Засельский В.И., Тимко Е.В., Засельская Т.А. Методология изложения лекционного курса фундаментальніх дисциплин в высшей школе // Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі: Збірник наукових праць. Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2004. – С. 98–100.
8. Амельянчик Э.В., Трегуб В.В., Церетели В.А. Усвоение и запоминание материала студентами разных возрастных групп // Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі: Збірник наукових праць. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2004. – С. 19–22.

К ВОПРОСУ О ФОРМИРОВАНИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ СИСТЕМ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.Н. БелоВодский
г. Донецк, Донецкий национальный технический университет
belovodskiy@cs.dgtu.donetsk.ua

При традиционном изложении теории линейных дифференциальных уравнений наиболее трудоёмкими являются вопросы, связанные с рассмотрением кратных корней характеристического уравнения [1, 2]. В курсе высшей математики [3] предлагается методика построения фундаментальных систем, основанная на «символическом методе». Ниже этот вопрос обсуждается с позиций теории линейных операторов.

Пусть L – линейное пространство над полем комплексных чисел K бесконечно дифференцируемых на числовой оси функций вещественной переменной x. Обозначим через

$$P_n(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+...+a_{n-1}D+a_n,$$

где $n\in N\cup\{0\}$, $a_i\in K$, линейный оператор, действие которого определим по правилу

$$P_n(D)y(x)=a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y^{(1)}+a_ny,$$

где $y(x)\in L$. При $n=1$, оператор $P_1(D)$ при $a_0=1$ и $a_1=0$ совпадает с операцией дифференцирования, при $n=0$, оператор $P_0(D)$ при $a_0=1$ представляет собой тождественный оператор.

Определим далее сумму и произведение операторов естественным образом, а именно, будем считать, что

$$(P_n(D)\cdot P_m(D))y=P_n(D)(P_m(D)y)$$

и

$$(P_n(D)+P_m(D))y=P_n(D)y+P_m(D)y.$$

В силу соответствующих свойств дифференцирования эти операции оказываются коммутативными и в техническом плане результирующие операторы находятся по известным правилам сложения и умножения многочленов переменной D.

Рассмотрим теперь линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y^{(1)}+a_ny=0 \qquad (1)$$

где $a_i\in R$. В операторной форме оно имеет вид

$$P_n(D)y=0 \qquad (2)$$

Отсюда следует, что множество решений уравнения (1) представляет собой ядро оператора $P_n(D)$.

Назовём алгебраическое уравнение

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \qquad (3)$$

характеристическим уравнением дифференциального уравнения (1). Пусть

λ_1, ..., λ_m – его корни кратностей r_1, ..., r_m соответственно. Тогда оператор $P_n(D)$, очевидно, можно представить в виде произведения

$$P_n(D) = (D-\lambda_1)^{r_1}(D-\lambda_2)^{r_2}\ldots(D-\lambda_m)^{r_m}, \tag{4}$$

где $r_1+r_2+...+r_m=n$. Отсюда следует, что свойства оператора $P_n(D)$ определяются свойствами составляющих его операторов.

Рассмотрим операторы D и $D–\lambda$. Очевидно, что произвольное значение $\lambda\in K$ является собственным значением оператора, а функции $y(x)=Ce^{\lambda x}$ – соответствующими ему собственными векторами. Пусть $y_1(x)$ – собственный вектор оператора D, соответствующий собственному значению λ_1. Тогда $(D–\lambda_1)y_1=0$ и $(D–\lambda)y_1=(\lambda_1–\lambda)y_1$. Отсюда следует, что

1) собственные векторы оператора D, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы и
2) собственные векторы оператора D, соответствующие собственным значениям λ_1, ..., λ_m, принадлежат ядру оператора (4).

Рассмотрим теперь последовательно множители $(D-\lambda_i)^{r_i}$ из разложения (4) и образуем для каждого из них жорданову цепочку векторов

$$(D–\lambda_i)y_{i1}(x)=0,\ (D–\lambda_i)y_{i2}(x)=y_{i1}(x),\ ...,\ (D-\lambda_i)y_{ir_i}(x) = y_{ir_{i-1}}(x). \tag{5}$$

Возьмём при этом в качестве первого из них вектор $y_{i1}(x)= e^{\lambda_i t}$ и, полагая далее равными нулю появляющиеся при интегрировании постоянные, получим

$$y_{i2} = te^{\lambda_i t},\ y_{i3} = \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t}, \ldots, y_{ir_i} = \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!}e^{\lambda_i t}. \tag{6}$$

Каждый вектор каждой цепочки принадлежит ядру оператора $P_n(D)$ и справедливой оказывается теорема:

Система векторов $y_{ij}(x)$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,r_i}$, составленная из векторов цепочек (5), является линейно независимой и образует базис ядра оператора (4).

Далее, учтём, что система линейно независимых векторов остаётся таковой, если её векторы умножить на числа не равные нулю или отдельные пары векторов заменить их суммой и разностью. Это даёт возможность несколько упростить фундаментальную систему (6), убрав из неё факториалы, заменить комплексно сопряжённые жордановы цепочки, соответствующие собственным значениям $\lambda=\alpha\pm i\beta$, линейно независимыми системами действительных векторов вида

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t,\ ...,\ t^{r-1}e^{\alpha t}\cos\beta t \text{ и } e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t,\ ...,\ t^{r-1}e^{\alpha t}\sin\beta t \tag{7}$$

и, на основании этого, сформулировать следующее правило:

Для построения фундаментальной системы решений уравнения (1) необходимо найти корни $\lambda_k=\alpha_k\pm i\beta_k$ его характеристического уравнения (3) и выбрать те из них, которые имеют неотрицательную мнимую часть, т.е. $\beta_k\geq 0$. Для каждого такого корня в фундамен-

тальную систему необходимо включить совокупность функций вида (7), опустив при этом нулевые, где r – кратность корня.

Обратим внимание, что использованные выше аналогии вполне прозрачны и не выходят за рамки традиционного курса линейной алгебры.

Литература:

1. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 344 с.
2. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения: Учеб.: Для вузов. – М.: Физматлит, 2002. – 256 с.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – Т. 2 – М.: Наука, 1974. – 656 с.

МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИКЛАДЕННЯ ТЕМИ “ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ” В КУРСІ “ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ”

Д.Є. Бобилєв
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет
bob@kpi.dp.ua

Вступ. В роботі [2] вже зазначалось, наскільки тема “Оптимізаційні задачі управління запасами” є важливою в курсі “Дослідження операцій”. Саме на ній дуже легко проілюструвати цілі й задачі цього курсу. Але строге викладення цієї теми [3] більшість студентів, які, як показує практика, мають значні прогалини як із шкільної так і з вищої математики, не зрозуміє. В той же час, спрощення цієї теми [1] не є вірним рішенням, оскільки студентам пропонують більшість тверджень прийняти на віру без доведення, що не сприяє глибокому засвоєнню матеріалу.

Постановка проблеми. В процесі викладання теми “Оптимізаційні задачі управління запасами” в Інституті ділового адміністрування (м. Кривий Ріг) накопичено досвід її висвітлення. Під час відбору матеріалу поєднувались два принципи дидактики – наочність та науковість.

Результати. На вивчення теми “Оптимізаційні задачі управління запасами” виділяється 9 годин (лекції – 2 години, практичні заняття – 2 години, самостійна робота студентів – 5 годин). Лекцію доцільно побудувати за наступним планом: 1) основні поняття теорії управління запасами та приклади задач; 2) постановка задачі оптимізації поточних запасів; 3) розв’язання поставленої задачі та його аналіз; 4) чутливість розв’язку до вхідних даних.

В першу чергу студентам треба пояснити, наскільки важливо вміти регулювати поточні запаси на підприємстві. Як вважає Х. Таха [4], для забезпечення неперервного та ефективного функціювання практично кожного підприємства необхідно створювати запаси. Проблемність ситуації полягає в тому, що як і надмірна кількість запасів, так і їх нехватка призводе до збитків, тому що капітал, який не можна використати, є для компанії втраченою вартістю. Крім того, запаси, особливо ті, що швидко псуються, вимагають спеціальних умов для зберігання. Для цього необхідно виділити певні площі, найняти персонал та ін. З іншого боку, чим менше запасів, тим більша ймовірність виникнення дефіциту, що може призвести до збитків внаслідок втрати клієнтів, зупинки підприємства та ін. Крім того, при невеликому рівні запасів доводиться часто поставляти нові партії товару, що призводе до значних витрат на доставку товару.

Ці твердження потрібно ілюструвати прикладами, що виникають на підприємствах. Також треба викласти студентам елементи теорії управління запасами висвітливши наступні моменти: матеріальний запас, причини створення запасів, види запасів та їх нормування. Особливу увагу треба звернути на розкриття поняття “попит”. Треба вказати, що виділяють декілька типів попиту (див. рис. 1).

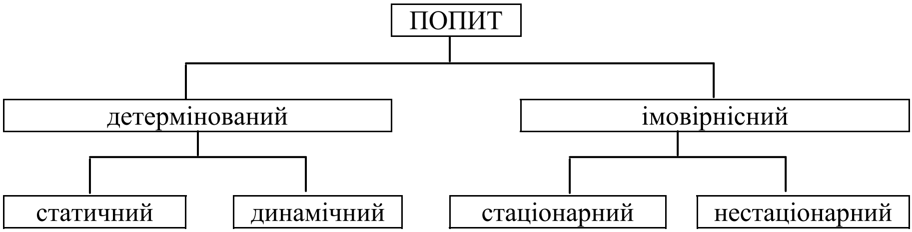


Рис. 1. Класифікація типів попиту

Детермінований попит точно відомий заздалегідь, на відміну від імовірнісного. При статичному типі попиту інтенсивність споживання ресурсу залишається незмінною в часі, при динамічному – залежить від часу. При стаціонарному типі попиту його функція густини ймовірності не залежить від часу, а при нестаціонарному – функція густини ймовірності попиту змінюється в часі.

До розгляду прикладів задач управління запасами необхідно разом зі студентами шляхом обговорення з’ясувати, які параметри є вхідними, та які необхідно отримати. Згідно Х. Таха [4], модель управління запасами повинна відповідати на два питання:

1. Яку кількість продукції замовляти?
2. Коли замовляти?

Після обговорення, підсумувавши результати, записати наступне:

1. вхідні параметри моделі:

ν – інтенсивність споживання запасів [од. тов./од. часу];

τ – плановий період поставки [од. часу];

T – необхідна кількість товару за плановий період [од. тов.];

C_1 – вартість замовлення та доставки однієї партії товару [грн.].

C_2 – затрати на зберігання запасу [грн./(од. тов.*од. часу)];

C_3 – штраф за дефіцит [грн./(од. тов.*од. часу)];

2. вихідні параметри моделі:

q – розмір однієї партії замовлення [од. тов.];

τ_i –довжина i-го етапу циклу зміни запасу;

Z – загальні витрати на управління запасами за одиницю часу, [грн./од. часу];

H – максимальний рівень запасів на складі [од. тов.];

h – максимальний рівень дефіциту [од. тов.].

Слід більш детально пояснити економічне значення кожного параметру та основну ідею задач управління запасами: потрібно завезти за плановий період τ якусь заздалегідь відому кількість товару T. Необхідну кількість товару завозять партіями розміром q через проміжки часу τ_i. Необхідно визначити q та τ_i. Звичайно, в загальній постановці студентам буде важко розібратись в підході до складання та розв'язування моделей управління тому слід навести декілька прикладів різних постановок задачі [3], проілюструвавши їх за допомогою графіків зміни кількості товару на складі в залежності від часу.

Першою варто розглянути однономенклатурну модель без дефіциту та миттєвим поповненням запасів (рис. 2).

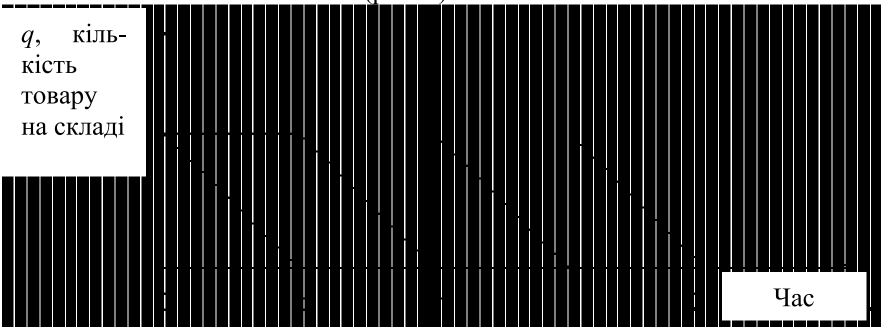


Рис. 2.

Особливість цієї моделі в тому, що запас поповнюється миттєво через рівні проміжки τ . Споживання запасів відбувається з постійною швидкістю v до того часу, поки не досягне нуля. В момент часу, коли запас досягне нуля, поступає нова партія замовлення, що рівна q од., і рівень запасу досягне максимального значення. В цій постановці C_3 – штраф за дефіцит неприпустимий.

Наступна – однономенклатурна модель із неперервним поповненням (рис. 3).

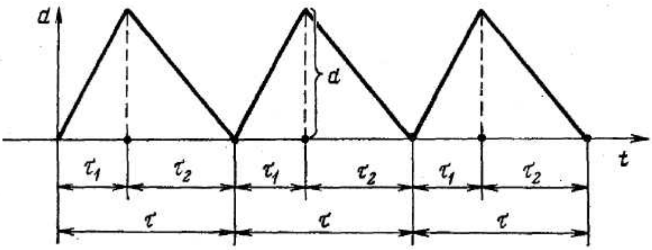


Рис. 3.

Основна ідея цієї постановки в тому, що товар потрапляє на склад безпосередньо з виробничої лінії з постійною інтенсивністю λ од. за одиницю часу. Кожна нова партія товару починаю поступати на склад у той час, коли рівень запасу знизиться до нуля.

Треба також розглянути однономенклатурну модель, що допускає дефіцит (рис. 4).

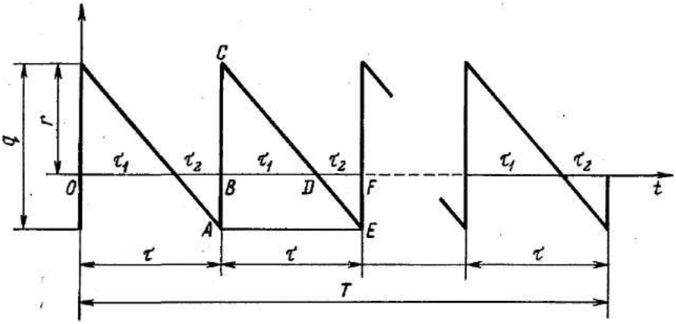


Рис. 4.

В цьому випадку товар завозиться на склад через деякі проміжки часу τ. На протязі інтервалу τ_1 кожного проміжку τ запасів, що є на складі, достатньо для задоволення попиту, а на протязі інтервалу τ_2 спостерігається дефіцит, але він покривається відразу після отримання нової партії товарів. В цій моделі буде вже присутній штраф за дефіцит (C_3).

На лекції варто розглянути розв'язання тільки першої моделі. Інші можна розв'язати на практичних заняттях. Побудову моделі першої ситуації треба разом із студентами. Вони повинні побачити, що загальні затрати на управління запасами складаються з витрат на доставку однієї порції товару та її зберігання.

Найбільші труднощі виникають при поясненні студентам як обчислити витрати на зберігання запасів. Отже, нам відомо C_2 – затрати на зберігання запасу [грн./(од. тов.*од. часу)]. Залишилось знайти кількість товару, що зберігається, але цей об'єм весь час змінюється. Тому слід використати визначений інтеграл, але більшість студентів не пам'ятає його економічного змісту. Тому доцільно коротко познайомити студентів із ним, як це зроблено в [5], але без широкого викладення цього матеріалу. Тобто, якщо деяка величини (в нашому випадку – кількість товару на складі) накопичується на протязі часу, то кількість накопиченого за цей проміжок дорівнює визначеному інтегралу від функції, що виражає миттєву швидкість накопичення, по цьому проміжку часу. Необхідно окремо взяти визначений інтеграл від функції $Q(t)$ по першому проміжку $[0, \tau]$. Але перед цим необхідно за відомою формулою

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

скласти рівняння залежності $Q(t)$, яке буде мати наступний вигляд

$$Q(t) = -\frac{q}{\tau} t + q .$$

Отже, кількість запасів, що зберігаються за проміжок τ, дорівнює

$$S = \int_0^{\tau} Q(t)dt = \int_0^{\tau} \left(-\frac{q}{\tau} t + q \right) dt = \left(-\frac{q}{\tau} \frac{t^2}{2} + qt \right)_0^{\tau} = \frac{q\tau}{2} .$$

Після того як побудована математична модель цієї задачі:

$$Z(q) = \left(C_1 \frac{q}{2} \frac{q}{\mu} + C_2 \right) n ,$$

де n – кількість замовляємих партій товару, можна її розв'язати методами шкільної математики: знайшовши похідну функції по q та прирівнявши її до нуля (попередньо обчисливши витрати за одиницю часу), але слід переконати студентів, що функція має єдину точку екстремуму (мінімум). Це легко побачити побудувавши графік функції (рис. 5) методом додавання, якщо з основної функції ми виділимо дві

$$Z_1(q) = C_1 \frac{q}{2} , \qquad Z_2(q) = C_2 \frac{\mu}{q} .$$

З графіку (рис. 5) видно, що функція має єдину екстремальну точку (мінімум).

Отримаємо наступний оптимальний розв'язок

$$q^* = \sqrt{\frac{2C_2\mu}{C_1}} .$$

Цей розв'язок слід перевірити на чутливість до вихідних даних. Поняття чутливості можна проілюструвати на фізичному прикладі про рівновагу кульки на різних поверхнях. Дуже вдало це поняття вводиться в курсі [1].

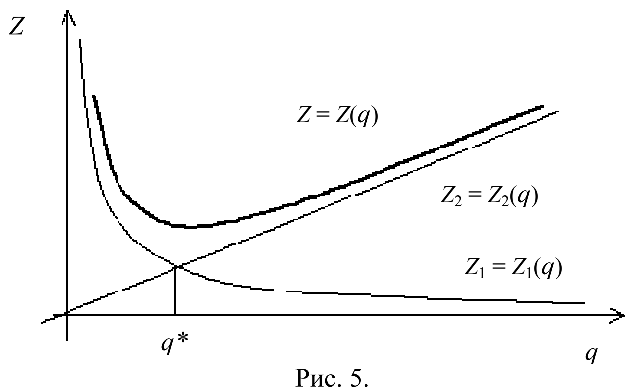


Рис. 5.

Висновки. Розглянуті основні моменти викладення теми "Оптимізаційні задачі управління запасами" та зроблена спроба підібрати зміст цієї теми таким чином, щоб він був наочним і в той же час мав чітку логічну структуру з доцільним обґрунтуванням основних положень на базі курсу шкільної математики.

Література:

1. Ащепков Л.Т. Элементы исследования операций: Учебное пособие – http://kpmit.wl.dvgu.ru/library/.

2. Бобилєв Д.Є., Кондратенко Л.П. Деякі методичні зауваження щодо вивчення теми "Моделі управління запасами" в курсі "Дослідження операцій" // Матеріали VII Міжнародної науково-практичної конференції "Наука і освіта'2004". – Том 36. Проблеми підготовки фахівців. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2004. – С. 16 – 18.

3. Костевич Л.С., Лапко А.А. Теория игр. Исследование операций. – Мн.: Высш. школа, 1981. – С. 214 – 227.

4. Таха Х. Введение в исследование операций. – М.: Мир, 1985.

5. Черняк А.А. и др. Математика для экономистов на базе Mathcad. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – С. 291–303.

РОЛЬ СИСТЕМИ ЗАДАЧ У НАВЧАННІ ГЕОМЕТРІЇ

Н.В. Богатинська, Л.О. Черних
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Розв'язування задач – творчий процес. Як показують спостереження, найважливішу роль при цьому відіграють практика, навички. "Але неправильно було б думати, що все залежить тільки від кількості розв'язаних задач. Багато значить і система пропонованих учням задач, і ті зауваження, якими супроводжує їх учитель, і загальні поради щодо пошуків розв'язань, складання планів, оформлення розв'язань і т. ін." [3].

Навички формуються на основі осмислених знань й умінь шляхом багаторазового повторення операцій, дій, прийомів, алгоритмів, які складають предмет вивчення. А тому для формування навичок потрібна ретельно продумана система вправ і задач. В такій системі має бути правильно підібрана послідовність вправ з урахуванням індивідуальних особливостей і можливостей учнів і принципу "від простого до складного". Слід дотримуватись *доцільної різноманітності* вправ і задач у системі. При цьому знання учнів з математики повинні удосконалюватись з розв'язанням кожної нової задачі. Слід домагатися, щоб умінь і навичок учні набували при найменших витратах часу. У процесі навчання стереометрії доцільно виділяти допоміжні, ключові задачі, які є основою (елементами) розв'язання інших задач. Такі задачі називають елементарними. Будь-яку складну задачу можна розчленувати на елементарні. Складні задачі – це різні комбінації обмеженої кількості елементарних задач і елементарних побудов. Так, наприклад, підзадачами багатьох стереометричних задач є задачі на побудови кута між прямою і площиною, лінійного кута двогранного кута та ін.

Навчання розв'язуванню задач може відбуватись двома шляхами. Перший шлях передбачає поступове засвоєння способів розв'язування елементарних задач в процесі розв'язування більш складних задач. Другий шлях передбачає вже на початку озброєння учнів алгоритмами розв'язування елементарних задач.

У багатьох випадках перевагу доцільно надавати другому способу, але для цього потрібно вміти складати відповідну систему вправ і задач.

Розглянемо приклад задачі з планіметрії.

<u>Задача</u>. Дано кут ABC і відрізок EF. Побудуйте геометричне місце точок площини, кожна з яких рівновіддалена від сторін кута і від кінців відрізка.

Дану задачу доцільно розбити на дві допоміжні підзадачі, послідовне розв'язування яких може скласти розв'язання даної задачі.

<u>*Підзадача*</u> <u>1</u>. Побудуйте геометричне місце точок площини, рівновіддалених від сторін кута.

Часто учні знаходять не всі розв'язки цієї підзадачі. Це пояснюється тим, що при розв'язанні даної задачі користуються неправильним твердженням: "Бісектриса кута є геометричне місце точок площини, однаково віддалених від сторін цього кута". Правильно сказати так: "Бісектриса кута є геометричне місце точок цього кута однаково віддалених від його сторін".

Отже шуканому геометричному місцю точок належить бісектриса ВК кута АВС (рис. 1). Проте це ще не остаточна відповідь. І саме тут важливою є система доцільно підібраних задач, яка дозволяє сформувати поняття відстані від точки площини до променя. Це поняття пов'язане з поняттям відстані від точки до фігури. Найпоширенішими фігурами є пряма, відрізок, промінь.

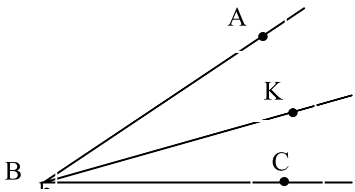


Рис. 1.

Відстанню від точки до прямої називають довжину перпендикуляра, проведеного з даної точки до прямої.

Іноді пояснюють, що за відстань від точки до відрізка приймають відстань від точки до прямої, якій належить відрізок. Так, вважають, що відстань від точки А до відрізка CD дорівнює довжині відрізка АМ (рис. 2).

"Таке тлумачення цього поняття суперечить і сучасній математиці, і життєвій практиці. Дійсно, якщо А – населений пункт, а D – кінцева зупинка шосе СД, далі вже траси немає, то зрозуміло, що село віддалене від шосе на відстань AD, а не на відстань АМ... Таким чином, за відстань від точки до відрізка (променя) приймають довжину найкоротшого з усіх відрізків, які сполучають дану точку з точками відрізка (променя)" [3].

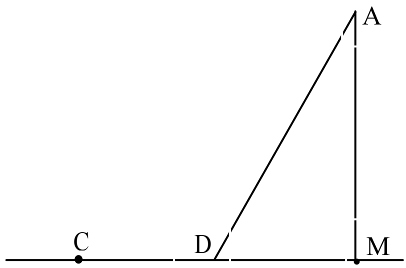


Рис. 2.

Повернемось до розв'язання *підзадачі* 1 (рис. 4).

Від сторін кута АВС рівновіддалена кожна точка променя ВМ, якщо $BM \perp BA$ (у відповідності з випадками д) і є), і кожна точка променя BL, при умові що $BD \perp BC$. Будь-яка точка Р внутрішньої області кута MBL теж рівновіддалена від сторін кута АВС.

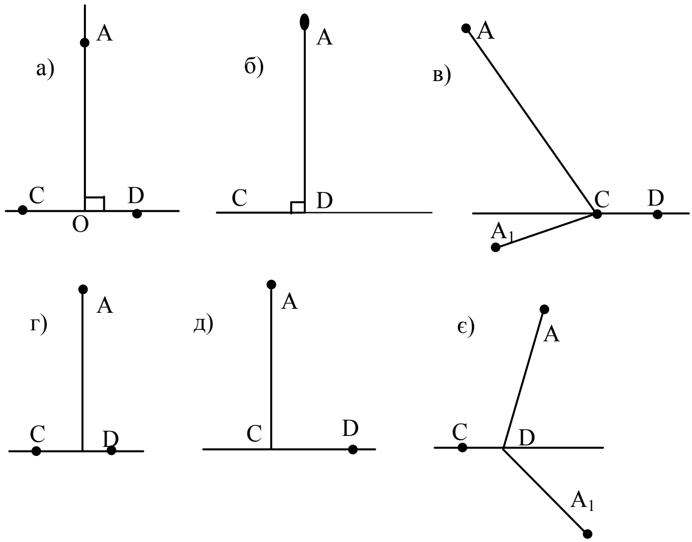


Рис. 3.

З метою формування поняття відстані від точки до відрізка (променя), можна запропонувати учням систему задач на побудову враховуючи різні розміщення точки відносно відрізка (променя) (рис. 3).

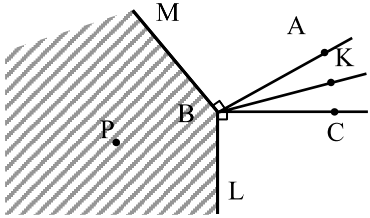


Рис. 4.

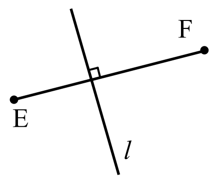


Рис. 5.

Відповідь підзадачі 1: геометричним місцем точок площини, рівновіддалених від сторін кута ABC, є бісектриса BK кута ABC і всі точки кута MBL.

<u>*Підзадача* 2</u>. Побудуйте геометричне місце точок площини, рівновіддалених від кінців відрізка.

Відповідь підзадачі 2 : пряма l, яка є віссю симетрії точок E і F (рис. 5).

Повернемось тепер до вихідної задачі. Її розв'язком є перетин розв'язків підзадач 1 і 2 (рис. 6).

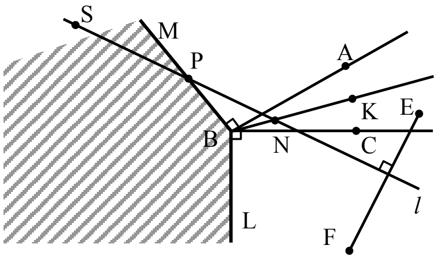


Рис. 6

Відповідь: точка N і промінь PS є шуканим геометричним місцем точок площини.

Підбираючи систему вправ і задач, слід подбати, щоб вона задовольняла принципу повноти. “Система вправ задовольняє принципу повноти, якщо вона забезпечує добре засвоєння теми, яка вивчається, і дозволяє виключити можливість формування помилкових асоціацій” [5].

Слід вчити учнів розв’язувати задачі окремих типів; навчити будь-кого розв’язувати всі задачі не можна, а навчити розв’язувати задачі певних типів можна і треба. Зрозуміло, якщо ми не розв’яжемо з учнями задач якогось типу, то вони і не навчаться їх розв’язувати. Проте порушення принципу повноти системи задач відбувається і в деяких інших випадках. Розглянемо приклад задачі.

Задача. В основі прямої призми лежить ромб зі стороною a. Діагональ призми дорівнює l і утворює з площиною основи кут α, а з бічною гранню – кут β. Знайти об’єм призми (рис. 7).

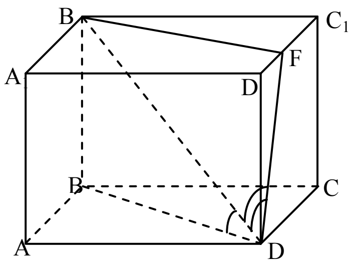


Рис. 7.

Помилкові розв’язання даної задачі пояснюються неправильною побудовою кута між діагоналлю призми і бічною гранню. Причина цього – порушення принципу повноти системи вправ і задач. Як правило в ній є задачі, при розв’язанні яких доводилось будувати кути між прямою і площиною за відомим алгоритмом, якщо пряма розташовувалась “зверху” від площини, і не зустрічались випадки, коли пряма розташована була б “ліворуч” чи “праворуч” від площини.

З аналогічною ситуацією ми маємо справу під час розв’язування задач на побудову лінійного кута двогранного кута. Якщо кожний раз пропонувати учням задачі на піраміди, в яких вимагається будувати лінійні кути двогранних кутів при сторонах основи піраміди, то учні виявляються безпорадними під час побудови лінійного кута двогранного кута при бічному ребрі піраміди (не вміють застосовувати відомий алгоритм в іншій ситуації розташування просторових об’єктів).

Звикаючи до одного розташування фігур, учні не впізнають їх в дещо незвичному положенні. Отже, підбираючи систему вправ і задач, необхідно передбачати всі можливі ситуації розташування фігур на площині і в просторі, зміну їх форм і позначень.

Свідомому засвоєнню алгоритму побудови лінійного кута двогранного кута може сприяти, наприклад, така система задач:

1. Побудуйте лінійний кут двогранного кута при стороні основи правильної трикутної піраміди.

2. Побудуйте лінійний кут двогранного кута при стороні основи правильної чотирикутної піраміди.

3. Через середини двох суміжних сторін основи правильної чотирикутної призми проведена площина так, що вона перетинає три бічних ребра. Побудуйте кут, який утворює площина перерізу з площиною основи призми (рис. 8).

4. Побудуйте лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі правильної трикутної піраміди.

5. Побудуйте лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі правильної чотирикутної піраміди.

6. Основою піраміди є прямокутник. Дві суміжні бічні грані перпендикулярні до площини основи. Побудуйте кути нахилу двох інших граней до площини основи (рис. 9).

7. Основою піраміди є ромб. Побудуйте лінійні кути двогранних кутів при сторонах основи, якщо вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в основу (Значна частина учнів помилково вважає кут MFO лінійним кутом двогранного кута при стороні основи DC піраміди (рис. 10).

8. Основою піраміди є ромб. Висота піраміди проходить через вершину гострого кута ромба. Побудуйте кути нахилу бічних граней піраміди до площини основи (рис. 11).

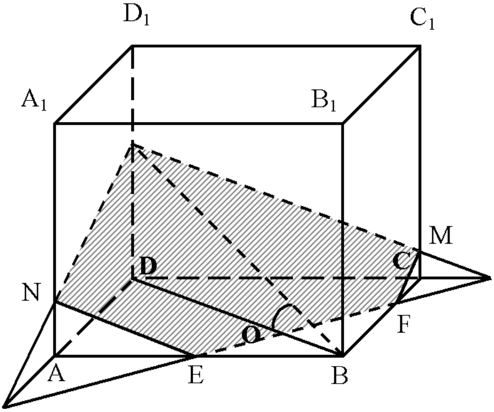


Рис. 8

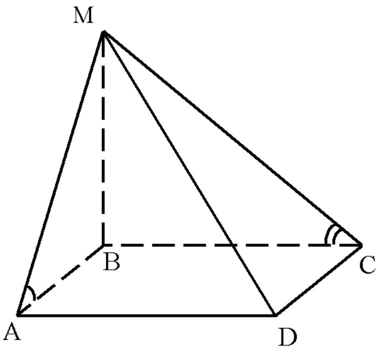


Рис. 9

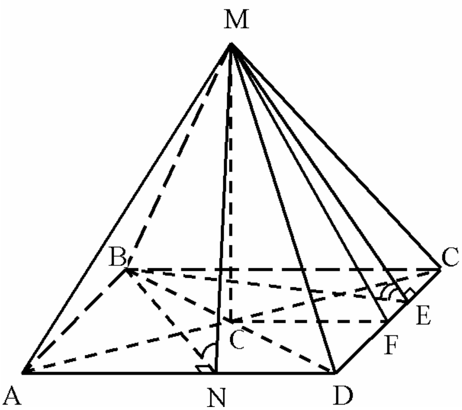


Рис. 10

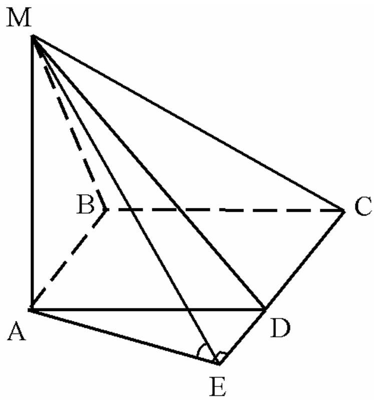


Рис. 11

Література:

1. Антоненко М.І. Розв’язування геометричних задач. – К.: Рад. шк., 1991 – 127 с.
2. Бевз Г.П. Геометрія тетраедра. – К.: Рад шк., 1977. – 375 с.
3. Бевз Г.П. Методика викладання математики. – К.: Вища школа., 1977. – 375 с.
4. Бевз Г.П.Методика розв’язування стереометричних задач. – К.: Рад. шк., 1988. – 191 с.
5. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.

СУЩНОСТЬ И СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Г.А. Варварецкая, Т.И. Климова, Т.М. Сапронова
г. Одесса, Одесская национальная морская академия
onma@yandex.ru, math@ma.odessa.ua

Решение задач занимает в математическом образовании огромное место. Поэтому обучению решения задач уделяется много внимания, но до сих пор единственным методом такого обучения были показ способов решения определённых типов задач и значительная практика по овладению ими. Поэтому все пособия для курсантов по решению задач были построены в форме сборника задач (с ответами и некоторыми указаниями к ним).

Психологические исследования проблемы обучения решению задач показывают, что основные причины несформированности у курсантов общих умений и способностей в решении задач состоят в том, что слушателям не даются необходимые знания о сущности задач и их решений, а поэтому они решают задачи, не осознавая должным образом свою собственную деятельность. У слушателей не вырабатываются отдельно умения и навыки в действиях, входящих в общую деятельность по решению задач, и поэтому им приходится осваивать эти действия в самом процессе решения задач, что многим курсантам не под силу. Не стимулируется постоянный анализ студентами своей деятельности по решению задач и выделению в них общих подходов и методов, их теоретического осмысления и обоснования.

Возникает необходимость разработки таких рекомендаций, которые помогли бы преодолеть указанные причины, и дали возможность слушателям планомерно сформировать у себя нужные умения и навыки в решении математических задач.

Умение решать задачи является одним из основных показателей уровня математического развития, глубины освоения теоретического материала. Поэтому любой экзамен по математике, любая проверка знаний содержит в качестве основной и, пожалуй, наиболее трудной части решение задач.

Решение задач – это работа, а чтобы научиться какой-либо работе, нужно предварительно хорошо изучить тот материал, над которым придётся работать, те инструменты, с помощью которых выполняется эта работа.

Значит, для того, чтобы уметь решать задачи, надо разобраться в том, что они собой представляют, как они устроены, из каких составных частей они состоят, каковы инструменты, с помощью которых производится решение задач.

Если приглядеться к любой задаче, то увидим, что она представляет собой требование или вопрос, на который надо найти ответ, опираясь и учитывая те условия, которые указаны в задаче. Поэтому, приступая к решению какой-либо задачи, надо её внимательно изучить, установить, в чём состоят её требования (вопросы), каковы условия, исходя из которых, надо решать задачу. Всё это называется анализом задачи.

В качестве примера рассмотрим анализ задач по аналитической геометрии.

Задача 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -1; -1)$, $M_3(2; 0; 2)$ и найти отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях.

Первое, что мы можем заметить при чтении этой задачи, состоит в следующем: в ней имеются определённые утверждения и требования. В ней утверждается, что через данные три точки проходит плоскость. Требование задачи состоит в том, что нужно найти отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях.

Часто требование задачи формулируется в виде вопроса. Но всякий вопрос предполагает требование найти ответ на этот вопрос, а поэтому всякий вопрос можно заменить требованием.

Формулировка любой задачи обычно состоит из нескольких утверждений и требований. Отсюда ясно, что нужно сделать при анализе задачи – это расчленить формулировку задачи на условия и требования. Заметим, что в задаче обычно не одно условие, а несколько элементарных (т.е. нерасчленимых дальше) условий; требований в задаче также может быть не одно. Поэтому необходимо расчленить все утверждения и требования задачи на отдельные элементарные условия и требования.

В задаче 1 можно вычленить такие элементарные условия:

1) в трёхмерном пространстве заданы координаты трёх точек;
2) три точки лежат на искомой плоскости;
3) на координатных осях плоскость отсекает отрезки.

Требование этой задачи можно расчленить на два элементарных:

1) составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки;
2) найти отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях.

Задача 2. Найти точку N, симметричную точке $M(1; 1; 1)$ относительно плоскости α: $x+y-2z-6=0$.

Эта задача содержит такие условия:

1) дана произвольная плоскость в пространстве, заданная своим общим уравнением $x+y-2z-6=0$;
2) дана точка $M(1; 1; 1)$, лежащая вне заданной плоскости
3) точка N симметрична точке M относительно плоскости α, т.е. точка N лежит на прямой, перпендикулярной к данной плоскости, причём $\rho(M, \alpha)=\rho(N, \alpha)$.

Анализируя эти условия, можно заметить, что каждое из них состоит из одного или нескольких объектов и некоторой их характеристики. Так, объектом первого условия является плоскость, а её характеристикой – координаты нормального вектора плоскости $N(1; 1; -2)$. Во втором условии объектом является точка M с характеристикой: её координаты (1; 1; 1).

Требование задачи состоит в том, чтобы найти точку N, симметричную точке $M(1; 1; 1)$ относительно плоскости $x+y-2z-6=0$. Это требование распадается на несколько элементарных требований:

1) из всего множества прямых, проходящих через точку $M(1; 1; 1)$, выделить прямую, перпендикулярную к плоскости α;
2) найти точку O – точку пересечения прямой и плоскости (проекцию точки M на плоскость α);
3) найти координаты точки N (симметричной точки), учитывая, что точка O – середина отрезка MN.

Процесс решения любой задачи можно разделить на несколько этапов: анализ условий и требований задачи, схематическая запись задачи, поиск способа решения задачи, осуществление решения задачи, исследование задачи, анализ выполненного решения. Приведенная схема даёт лишь общее представление о процессе решения задач как о сложном и многоплановом процессе. Такая схема является лишь примерной. При фактическом решении указанные этапы обычно не отделены друг от друга, а переплетаются между собой. Так, в процессе анализа задачи обычно производится и поиск решения. При этом полный план решения устанавливается не до осуществления решения, а в его процессе. Тогда поиск решения ограничивается лишь нахождением идеи решения.

Поиск решения состоит в составлении на основе общего правила (формулы) или общего положения (определения, теоремы) программы – последовательности шагов решения задач данного вида. Само решение стандартной задачи состоит в применении этой общей программы к условиям данной задачи, т.е. распознавание вида задачи, составление программы решения и осуществление решения на основе этой программы.

Отсюда следует, что, для того чтобы легко решать стандартные задачи и уравнения, в частности дифференциальные уравнения, нужно помнить все изученные общие правила и положения. Действительно, для того чтобы решить какое-либо стандартное дифференциальное уравнение, нужно в первую очередь распознать его вид, а для этого нужно хорошо помнить все изученные общие правила и положения, на основе которых решаются дифференциальные уравнения.

Задача 3. Решить дифференциальное уравнение

$$(1-x^2)y''-xy'=2.$$

Сначала определяем порядок и тип дифференциального уравнения. Перед нами дифференциальное уравнение второго порядка вида $y''=f(x, y')$. Применяем для данного дифференциального уравнения соответствующий алгоритм решения: понижаем порядок уравнения с помощью введения новой неизвестной функции $p(x)=y'$. После замены получаем дифференциальное уравнение первого порядка: $(1-x^2)p'-xp=2$. Определяем тип полученного дифференциального уравнения – это неоднородное линейное дифференциальное уравнение. Общее решение неоднородного линейного уравнения можно найти исходя из общего решения соответствующего однородного уравнения методом Лагранжа, варьируя произвольную постоянную или методом Фурье, полагая $y=u(x)v(x)$.

Задача 4. Составить уравнение окружности, проходящей через фокусы гиперболы $5x^2-11y^2=55$ и имеющей центр в точке $A(0; 5)$.

Можно учащимся предложить следующий алгоритм решения задачи:

1. Записать каноническое уравнение окружности с центром в точке A: $x^2+(y-5)^2=R^2$.
2. Найти фокусы гиперболы, для нахождения которых необходимо привести заданное уравнение гиперболы к каноническому виду.
3. Записать координаты фокусов.
4. Для нахождения радиуса окружности R воспользуемся тем, что по условию окружность проходит через фокусы гиперболы, а это означает, что координаты этих точек удовлетворяют уравнению окружности.
5. Запишем уравнение окружности.

Таким образом, для того, чтобы качественно решать задачи, необходимо много работать при изучении теоретического материала. И в то же время умение решать задачи упрощает восприятие и понимание лекционного курса. Надо научиться такому подходу к решению задачи, при котором задача выступает как объект тщательного изучения, а её решение – как объект конструирования.

Литература:

1. Овчинников П.П. Вища математика. Збірник задач. Ч. 1. – К.: Техніка, 2003.

2. Овчинников П.П. Вища школа. Збірник задач. Ч. 2. – К.: Техніка, 2003.

3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.

ВИКОРИСТАННЯ ВПРАВ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ СТАТИСТИЧНИХ УЯВЛЕНЬ УЧНІВ

Т.І. Війчук
м. Дрогобич, Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка
serglad@ukr.net

Традиційно в методиці викладання математики виділяють чотири основні функції вправ: навчальні, розвивальні, виховні та контролюючі.

Кожна із цих функцій важлива в загальній системі навчання, але останні роки багатьма авторами виділяється ще одна функція вправ – коректуюча.

Тому у своїх дослідженнях ми використовували завдання з врахуванням п'яти функцій вправ. Зрозуміло, що будь-яка задача, яка ставиться і розв'язується на тому чи іншому етапі навчання, несе в собі різні функції, але провідне місце однієї або декількох функцій вправ має динамічний характер. Саме це дає можливість розділяти вправи відповідно до того, які цілі досягаються при їх використанні.

Навчальні функції вправ є не тільки ціллю, але і засобом навчання. За допомогою таких вправ вводяться нові поняття, формуються навики і уміння, створюються проблемні ситуації та ін. Під навчальними розуміють такі функції вправ, які сприяють формуванню системи математичних знань, умінь і навиків в учнів на різних етапах їх засвоєння.

До таких вправ можна віднести завдання, які пропонуються учням перед вивченням нового матеріалу, для систематизації раніше отриманих знань і підготовки учнів до свідомого сприймання нових. Наприклад, під час введення поняття статистичного ряду розподілу частот учням пропонувалося проаналізувати результати статистичного дослідження, в якому значення варіант повторюються. Дуже часто учні самі приходять до висновку, що для зменшення кількості числових даних можна для кожного окремого значення записати скільки разів воно повторюється у статистичній сукупності. Надалі побудова частотної таблиці не викликає труднощів.

Подібно можна ввести формулу середнього арифметичного зваженого

$$\overline{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_i n_i}{n} \quad (1).$$

З формулою середнього арифметичного

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \qquad (2)$$

учні зустрічалися ще в 5-му класі, але для даних, згрупованих у частотну таблицю, використовувати формулу (2) нераціонально. Для введення середнього арифметичного зваженого ми пропонували учням обчислити його за формулою (2) для даних, які можна згрупувати у частотну таблицю:

$$\overline{x}=\frac{1+1+1+2+2+3+3+3+5+5+5+6+6+7+8+9+9}{17}=4{,}06$$

$$\overline{x}=\frac{1\cdot 3+2\cdot 2+3\cdot 3+5\cdot 3+6\cdot 2+7+8+9\cdot 2}{17}=4{,}06$$

Знайомство з новим матеріалом – це тільки перший етап засвоєння його учнями. Деякі із них в результаті пояснень вчителя запам’ятовують тільки частину матеріалу, не розуміючи основного. Інші розуміють виведення формули, але не знають, як і де її використати. Для подолання цих недоліків вчитель підбирає систему вправ, які допомагають глибшому засвоєнню нового матеріалу.

Наприклад, після введення понять мода і медіана, знайшовши їхні значення для впорядкованих статистичних рядів 2, 6, 6, 8, 9, 9, 9, 10, учням пропонувалось знайти ці величини для невпорядкованих рядів таких, як 2, 8, 4, 11, 21, 15, 5, 17, 6, 13, 11. Знаходження моди не викликає труднощів (*тільки 11 повторюється двічі*), але вказуючи значення медіани, учні дуже часто не впорядковують статистичну сукупність (*впорядкувати – означає розставити варіанти в порядку зростання*). Тому замість числа 11 (2, 4, 5, 6, 8, 11, 11, 13, 15, 17, 21) учні називають число 15.

Велику кількість вправ потрібно пропонувати учням з метою формування умінь і навиків. Такі вправи виконують тренувальну функцію.

Перші тренувальні вправи повинні бути легкими, щоб учні могли їх виконати. Після декількох свідомо виконаних простих завдань, їх потрібно поступово ускладнювати, щоб засвоїти ті особливості величин, які явно в означенні не виступають.

Наприклад, після розв’язування легких вправ на знаходження моди і медіани, у експериментальних класах учням пропонувалось знайти моду таких статистичних рядів:

1) 0,5; 0,5; 1,6; 1,6; 3,9; 3,9 – *немає моди*;

2) 0; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 4 – *мода дорівнює 2,5*;

3) 10; 11; 11; 11; 12; 13; 14; 14; 14; 17 – *дві моди 11 і 14, сукупність бімодальна*

4) Знайти значення медіани для ряду: 0, 0, 1, 1, 2, <u>2, 3</u>, 3, 3, 8, 9, 10.

(Якщо у середині неспадного статистичного ряду із парною кількістю варіант розміщені два різні числа, то медіаною вважається їхня півсума $\frac{2+3}{2}=2{,}5$*).*

<u>Розвивальні функції вправ</u>. Коли говорять про зміст шкільного курсу математики, то зазвичай мають на увазі засвоєння учнями певної системи математичних знань, умінь і навиків. Безумовно, це одна із найважливіших задач, яка стоїть перед шкільною математичною освітою. Але не можна зводити цю проблему до передачі учням певної кількості знань і навиків. Це би обмежило роль математики у загальній освіті. Тому перед сучасною школою стоїть і інше, не менш важливе завдання – розвитку учнів за допо-

могою математики.

Згідно концепції розвивального навчання, однією з основних задач загальноосвітньої школи є формування в учнів високого рівня розумового розвитку, навиків творчо розв'язувати задачі.

Обмеженість шкільного часу на вивчення математичної статистики і висока завантаженість фактичним матеріалом не дають можливості розв'язувати вправи беручи до уваги тільки одну конкретну їхню функцію. Та це і не доцільно, тому що завжди існує можливість підсилення однієї або декількох функцій задач, без послаблення інших. Це можна досягти різними шляхами – частковою зміною умови задачі, даючи додаткові запитання, пошуком раціональних розв'язків, використанням нестандартних завдань.

В експериментальних класах при вивченні елементів математичної статистики для розвитку логічного мислення, наукового світогляду ми використовували на різних етапах навчального процесу такі нестандартні завдання:

1. У статистичному ряді: к, р, і, б, а, в, а, к, і, и, б, а, р, р, і, к, а, к, и, а, р, к, і, и, р, б, а, к, і, в, к, р, б, а заховано слово. Відгадай його склавши варіаційний ряд та розставивши букви у порядку зростання їхніх частот. (*Вибірка*)

2. Відгадай загублені числа із невпорядкованого статистичного ряду, якщо відомо, що мода дорівнює 3, а медіана – 4. Статистичний ряд: 6, 2, ..., 7, 3, 5, 6, ..., 2, 6, 3, ..., 5 і т.п.

Але систематичне використання нестандартних задач на уроках математики неможливе через обмеженість навчального часу (на їх розв'язання потрібно більше часу ніж на прості завдання). Тому доцільно підсилювати розвивальні функції навчальних вправ за допомогою додаткових запитань.

1. Запитання на порівняння. *(В чому полягає відмінність між гістограмою і стовпчиковою діаграмою?)*

2. Запитання, які потребують підтверджень основних характеристик понять або предметів. *(Чи можна варіанту з найбільшою частотою називати модою статистичного ряду?)*

3. Запитання на встановлення причинно-наслідкових зв'язків. *(Як зміниться значення середнього арифметичного, якщо обсяг вибірки збільшити вдвоє?)*

4. Запитання, що потребують зведення індивідуальних ознак під загальні. *(Що спільного між модою, медіаною та середнім арифметичним)* і ін.

Відповіді на такі запитання потребують від учнів здійснення таких розумових операцій, як співставлення видових і родових понять, знаходження зв'язків між ними, відбір ознак для означення поняття, формулювання висновків, уміння узагальнювати. Такі запитання підсилять розвивальні функції завдань.

<u>Виховні функції</u>. Говорячи про виховну функцію вправ, мають на увазі виховання культури мови (усної і письмової), графічної культури, розвитку інтересу до навчання, потреби в самостійній пізнавальній діяльності і ін.

Велику увагу слід приділяти саме культурі математичної мови. У зв'язку з тим, що курс "Елементи математичної статистики" введено досить недавно і довгий час був відсутній у шкільних програмах, то використання термінології є недосконалим і в багатьох випадках потребує певних уточнень.

Так, наприклад, замість "отримали варіанти" або "отримали значення ознаки" говорять "отримали ознаки"; замість "генеральна сукупність" – "головна сукупність"; замість "середнє арифметичне" – "середнє алгебраїчне"; не розрізняють зміст понять "гістограма" і "стовпчикова діаграма" і ін.

Для усунення цих недоліків доцільно використовувати вправи, у яких потрібно доповнити пропущені місця із означень. Наприклад:

"Значення ознаки, частота появи якої у статистичній сукупності є найбільшою, називається ....".

<u>Вправи для контролю та корекції знань</u>. При вивченні математики контроль рівня засвоєння матеріалу, сформованості навиків, наявності прогалин в знаннях можна здійснювати на різних етапах навчального процесу. На початку уроку (контроль за наявністю опорних знань і умінь), в процесі вивчення нового матеріалу (контроль за сприймання і осмислення вивченого матеріалу, з метою попередження можливих помилок), на етапі закріплення (контроль за змістом дій, які формуються в учнів), після вивчення теми (тематичний контроль) і ін. Але проведення контролю без належного виправлення виявлених недоліків не дає досягнути високих успіхів у навчанні. Тому ще однією функцією вправ, яка тісно пов'язана з контролюючою є коректуюча.

Під коректуючими функціями вправ ми розуміємо такі, які спрямовані перш за все на попередження і своєчасне виправлення помилок, а також на ліквідацію прогалин у знаннях та вміннях окремих учнів.

Аналіз психолого-педагогічної літератури і наші спостереження показують, що багато вчителів та й методистів розуміють корекцію односторонньо і пов'язують її тільки з контрольно-оцінюючою діяльністю. Ми вважаємо, що таке розуміння цього поняття дуже вузьке. Навчальну діяльність учнів можна і необхідно коректувати ще до появи помилок. Передбачаючи, коли учні можуть припуститися помилок, досвідчений вчитель спеціальними вправами створює проблемні ситуації, а це дає змогу не просто уникнути помилки, а й акцентувати увагу учнів на можливості її появи. В експериментальних класах для попередження появи помилок ми використовували вправи у яких потрібно було заповнити пропущені місця в означенні понять. Наприклад:

"Модою називається таке значення ознаки, ... якого є найбільшою." *(частота)*.

"Медіаною називається така варіанта, яка ділить впорядковану статистичну сукупність ..." *(пополам)*.

" $\overline{x}_{ap} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\ldots.}$ " *(n)*.

У результаті досліджень ми виявили, що проводити систематичний контроль за рівнем засвоєння нових термінів та понять важко із-за великої насиченості теоретичного матеріалу і малої кількості часу. Проведення стандартних самостійних робіт або усного опитування не дає можливості в повній мірі проконтролювати рівень засвоєння нового матеріалу і виправити виявлені недоліки. А ґрунтовне вивчення математичної статистики потребує свідомого розуміння термінів та основних понять. Тому доцільним буде використання тесту для контролю та самокорекції знань учнів.

В ході виконання цих вправ учням давались запитання для контролю засвоєння нових понять і варіанти відповідей. Наприклад:

I. Вибірка складається із ...

1) усіх об'єктів сукупності, що досліджуються;

2) об'єктів генеральної сукупності, які відібрані у порядку зростання;

3) об'єктів, які довільно відібрані із генеральної сукупності.

Якщо учень вибирав правильну відповідь, то переходив до наступного завдання, а якщо він допустив помилку, програма вказувала на спеціально підібраний теоретичний матеріал, ознайомлення з яким повинно було ліквідувати прогалини в знаннях. Ці вправи учні виконували в класі інформатики на персональних комп'ютерах, де було спеціально завантажено тестову програму. Перехід до другого питання відбувався тільки тоді, коли учень вибере правильну відповідь на попереднє. Під час виконання таких вправ вчитель математики мав можливість індивідуально допомагати учням, які цього потребували, а за результатами тестування – зробити висновок, до якої частини теоретичного матеріалу школярі звертались найчастіше.

У результаті виконання таких вправ учні самостійно виправляли недоліки у своїх знаннях, а ці дії є важливою складовою вміння вчитися і в подальшому дають змогу школярам самостійно виконувати корекцію під час засвоєння будь-якого матеріалу. Це є одним із етапів навчання учнів самостійно здобувати знання.

ФОРМУВАННЯ У МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ УМІНЬ І НАВИЧОК ДОВЕДЕНЬ НЕРІВНОСТЕЙ

Г.В. Війчук, О.Я. Дукас
м. Дрогобич, Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка
serglad@ukr.net

У комплексі питань, які становлять логічну основу шкільного курсу математики, розвивають логічне мислення студентів, важливе місце належить доведенням і логічним узагальненням. Вони повинні сприяти виробленню у студентів уміння міркувати, самостійно знаходити способи розв'язування задач і доведення теорем, формувати в них уявлення про математику як дедуктивну науку.

Досвід засвідчує, що ця мета не завжди досягається. Недостатня увага приділяється, зокрема, доведенням нерівностей різними способами, недостатньо чітко розкривається суть методів доведення. У тісному зв'язку з навчанням методам доведень передує завдання формування у студентів умінь і навичок узагальнювати математичні твердження. Розкриття студентам цих узагальнень допомагає їм усвідомлювати логічну структуру доведень, а також відіграє важливу роль у розвитку їхнього логічного мислення.

Серед великої кількості математичних задач особливе місце належить нерівностям. За їх допомогою формулюється багато проблем наукового та практичного характеру, виражається значна частина результатів математичних досліджень.

З нерівностями, як правило, пов'язують задачі двох видів:

– знаходження умов, за яких дана нерівність перетворюється в істинне висловлення *(розв'язування нерівностей)*;

– доведення того, що за певних, наперед заданих, умов дана нерівність є істинним висловленням *(доведення нерівностей)*.

Розв'язуванню нерівностей у шкільному курсі математики приділено багато уваги, значно менше ознайомлюють студентів з їх доведеннями.

У більшості випадків під час вивчення теми «Нерівності» не роблять спеціальних акцентів, що стосуються формування вмінь будувати індуктивні та дедуктивні умовиводи. Проте саме вміння доводити твердження сприяє глибшому засвоєнню навчального матеріалу, підвищує рівень навченості студентів, привчає їх до логічного та послідовного розмірковування.

До задач на доведення нерівностей відносять такі, правильність яких потрібно довести на заданій множині значень змінних. Якщо така множина в умові задачі не вказана, то мають на увазі, що ці змінні можуть набувати будь-яких дійсних значень.

Слід сказати, що загального методу доведення нерівностей не існує.

Цим, мабуть, і пояснюються ті труднощі, які відчувають студенти, розв'язуючи відповідні вправи на доведення. Методи, які використовують при цьому, майже такі ж різноманітні, як і самі нерівності.

До основних методів доведення нерівностей, якими будуть у майбутньому користуватися сьогоднішні студенти в шкільному курсі під час вивчення алгебри, відносять:

1) *аналітичний метод, або метод доведення за означенням* понять «більше» або «менше»;

2) *синтетичний метод,* зокрема метод використання класичних нерівностей;

3) *метод посилення (послаблення)* нерівностей, або *мажорування*;

4) *метод доведення за властивістю квадратного тричлена*;

5) *метод доведення від супротивного*;

6) *метод математичної індукції.*

У курсі алгебри 9-го класу на доведення числових нерівностей відводиться мало часу. Розв'язування задач, що пропонуються в підручнику з алгебри, зводиться до оцінювання різниці лівої та правої частин нерівності, яка після перетворень є або повним квадратом, або числом. У процесі розв'язування значної кількості таких задач в учнів формуються міцні вміння та навички, але й виникає переконання, що доводити нерівності можна лише в такий спосіб. Якщо вчитель обмежиться розглядом лише таких задач, то учні не навчаться доводити нерівності іншими способами.

Тому доцільно на лекційних та практичних (додаткових або факультативних) заняттях з методики викладання математики розглянути зі студентами й інші способи доведення нерівностей.

Наприклад, використання класичних нерівностей:

1. *Нерівність Коші.*

Якщо a_1, a_2, ... a_n – довільні невід'ємні числа, то

$$(a_1+a_2+...+a_n)/n \geq \sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n}\ ,$$

причому знак рівності буде тоді і тільки тоді, коли $a_1=a_2=...=a_n$.

Ця нерівність називається нерівністю Коші. Її часто використовують при доведенні нерівностей.

Приклад. Довести нерівність $\sqrt{4a+7}+\sqrt{4b+7}+\sqrt{4c+7}<16$, де a, b, c – додатні числа, причому $a+b+c=2$.

Доведення. До нерівних додатних чисел $4a+7$ і 1 застосуємо нерівність Коші. Дістанемо:

$$\sqrt{4a+7}\cdot 1<((4a+7)+1)/2, \text{ тобто } \sqrt{4a+7}<2a+4, \text{ аналогічно}$$

$$\sqrt{4b+7}<2b+4, \text{ і } \sqrt{4c+7}<2c+4.$$

Відповідні частини трьох останніх нерівностей додамо. Дістанемо:

$$\sqrt{4a+7}+\sqrt{4b+7}+\sqrt{4c+7}<2(a+b+c)+12.$$

Але за умовою $a+b+c=2$, тому

$$\sqrt{4a+7}+\sqrt{4b+7}+\sqrt{4c+7}<2\cdot 2+12=16.$$

Що і треба було довести.

2. *Нерівність Буняковського.*

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2\le(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)\,(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2),$$

де a_i, b_i – будь-які дійсні числа.

Рівності ця нерівність досягає тільки тоді, коли числа a_k і b_k пропорційні, тобто тоді, коли існують такі числа λ і β, що

$$\lambda\, a_k+\beta\, b_k=0.$$

Приклад. Довести нерівність

$$(x_1+x_2)(1/x_1+1/x_2)\ge 4,\ \text{де } x_1>0,\ x_2>0.$$

Доведення. Скористаємося нерівністю Буняковського, поклавши $a_1=\sqrt{x_1}$, $a_2=\sqrt{x_2}$, $b_1=\sqrt{1/x_1}$, $b_2=\sqrt{1/x_2}$, тоді

$$(x_1+x_2)\,(1/x_1+1/x_2)\ge\left(\sqrt{x_1}\sqrt{1/x_1}+\sqrt{x_2}\sqrt{1/x_2}\right)^2=\left(\sqrt{x_1/x_1}+\sqrt{x_2/x_2}\right)^2=(1+1)^2=4.$$

Отже $(x_1+x_2)(1/x_1+1/x_2)\ge 4$. Що і треба було довести.

3. *Нерівність Бернуллі.*

Нерівністю Бернуллі називається нерівність виду: $(1+a)^n\ge 1+na$, де $n\in N$, $a+1>0$.

Приклад. Довести нерівність: $(1+1/n)^n<(1+1/(n-1))^n$.

Доведення. Поділимо $(1+1/(n-1))^n$ на $(1+1/n)^n$. Одержимо

$$(1+1/(n-1))^n/(1+1/n)^n=((1+1/(n-1))/(1+1/n))^n=(n/(n-1)/(1+1/n)^n=$$
$$=(n^2/((n+1)(n-1))^n=(n^2/(n^2-1))^n=(n^2-1+1)/(n^2-1))^n=(1+1/(n^2-1))^n$$

Згідно нерівності Бернуллі, $(1+1/(n^2-1))^n>1+n/(n^2-1)>1$.

Отже, $(1+1/n)^n<(1+1/(n-1))^n$. Що і треба було довести.

Варто звертати увагу студентів і на такі типи задач, які зв’язані за змістом з різними розділами шкільного курсу математики, для розв’язку яких методи математичного аналізу були б ефективним апаратом.

Задачі такого типу, звичайно, зустрічаються в методичній літературі. Наприклад, доведення тотожностей і тотожних нерівностей. Але ресурси методів математичного аналізу в цьому напрямку далеко не вичерпані, і тому нижче ми наведемо приклади задач, в яких ефективно застосовується похідна.

Зупинимося на задачах, які більш близькі до стандартних шкільних задач на дослідження функцій. Ці задачі відрізняються від стандартних тільки формулюванням і тому їх розв’язок відіграє подвійну роль: розширює для студентів коло застосування похідної і одночасно сприяє їх загальному розвитку, оскільки вміння перевести задачу з однієї мови на іншу, або просто сформулювати її в інших термінах є важливим показником математичного розвитку студентів і, насамперед, у прикладному аспекті.

Найбільш простими задачами такого плану є задачі на доведення функціональних нерівностей. Вони допускають переформулювання: відомо, що для доведення нерівностей $f(x)<g(x)$ достатньо показати, що на розглянутій множині значень змінної найбільше значення виразу $f(x)–g(x)$ від'ємне.

Таким чином, завдання доведення нерівностей зводяться до розв'язування стандартних задач на дослідження функцій.

Приклад 1. Довести, що при $x>0$ справджується нерівність

$$\ln(1+x)>2x/(x+2).$$

Доведення.

Розглянемо на проміжку (0; ∞) функцію $f : x \to \ln(1+x)–2x/(x+2)$.

Легко підрахувати, що у довільній внутрішній точці цього проміжку

$$f'(x)=x^2/((x–1)(x+2)^2)>0$$

і, відповідно, функція f зростає на відкритому проміжку (0; ∞).

З неперервності функції f випливає, що своє найменше значення вона приймає в лівому кінці даного проміжку, тобто при $x=0$. Іншими словами, для довільного $x>0$ виконується нерівність $f(x)\geq f(0)=0$, що і треба було довести.

Приклад 2. Довести, що при довільному $x>0$ виконується нерівність

$$e^x\geq 1+x+x^2/2.$$

Доведення. Нехай функція f задається формулою

$$f(x)=e^x–1–x–x^2/2,$$

тоді

$$f'(x)=e^x–1–x$$

і надалі необхідно дослідити функцію $g(x) \to e^x–1–x$.

Оскільки на проміжку (0; ∞) $g'(x)=e^x–1>0$, то функція g на цьому проміжку зростає, і так, що $f(x)>f(0)=0$, що і треба було довести.

Наші дослідження показують, що роботу з розкриття змісту методів доведення нерівностей слід проводити не на одному чи кількох заняттях, а систематично протягом тривалого часу у процесі вивчення всіх математичних дисциплін у вузі.

Наприклад, у курсі геометрії доцільно поряд із задачами, вміщеними у збірнику з аналітичної геометрії, пропонувати задачі на доведення нерівностей за допомогою скалярного добутку векторів. Цей спосіб досить простий, його варто показувати й учням, за його допомогою можна продемонструвати зв'язок алгебраїчного і геометричного матеріалу.

Векторний спосіб доведення нерівностей базується на означенні та властивостях скалярного добутку векторів.

Приклад. Довести нерівність $ab+bc+ac\leq a^2+b^2+c^2$.

Доведення. Розглянемо два вектори $\vec{x}\,(a, b, c)$ і $\vec{y}\,(b, c, a)$. Скалярний добуток цих векторів: $\vec{x}\cdot\vec{y}=ab+bc+ca=ab+bc+ac$.

Добуток модулів цих векторів:

$$|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2+a^2}=a^2+b^2+c^2.$$

Використовуючи нерівність $\vec{x}\cdot\vec{y}\le|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$, одержимо

$$ab+bc+ac\le a^2+b^2+c^2.$$

Доведення нерівностей, використовуючи різноманітні способи і підходи, має велике значення не лише для стимулювання інтересу до математики у студентів, але і для того, щоб показати якісно нову можливість застосування вивчених понять і також домогтися переосмислення студентами значення тієї чи іншої теми. Щоб досягти цього, викладач повинен доцільно вибирати тему, правильно дібрати систему вправ і запитань.

Література:

1. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. – М.: Мир, 1965.
2. Михайловский В.І., Тарасюк В.Е., Шунда Н.Н., Савич Е.Ф. Практикум розв’язування задач з математики. – К.: Вища школа, 1975.
3. Вишенський В.А., Карташов М.В., Михайловский В.І., Ядренко М.Й. Київські математичні олімпіади 1984–1993 рр. Збірник задач. – К.: Либідь, 1993.
4. Бикова Т.З. З досвіду роботи з числовими нерівностями // Математика. – 2002. – №36. – С. 2–4.

ДО ПИТАННЯ РОЗВИТКУ ЛОГІЧНОГО МИСЛЕННЯ СТУДЕНТІВ ПРИ РОЗВ’ЯЗУВАННІ ЛОГІЧНИХ ЗАДАЧ

О.В. Віхрова, К.В. Бабець
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Розвиток логічного мислення як учнів так і студентів – одне з важливих завдань сучасної освіти, і не лише математичної. Логічне мислення необхідне для сприйняття краси і витонченості суджень, чіткого, вичерпного, лаконічного висловлювання думок, упевненості в міркуваннях, формування вмінь абстрагуватися від конкретного змісту і зосереджуватися на структурі своєї думки, розвитку інтуїції тощо. Логічне мислення необхідне не лише математикам, а й працівникам інших сфер науки та техніки. Оволодівши навичками логічного мислення, майбутні фахівці зможуть краще висловлювати свої думки, виключаючи розпливчастість у діловій розмові, знаходити коротший і правильний шлях для розв’язування проблем і виправлення помилок.

Особливістю логічного мислення є те, що воно від істинних посилок завжди приводить до істинного висновку, не спираючись при цьому на досвід інтуїцію та інші зовнішні фактори. Але не лише вмінням використовувати строгу логіку обумовлена властивість мислення відкривати нові факти. Важливою умовою цього процесу виступає здатність мислення до інтуїтивних суджень.

Інтуїція представляє собою здатність досягнення істини шляхом прямого її розгляду без роз’яснення за допомогою логічно строгого доведення. Логіка та інтуїція, які є невід’ємними та нероздільними компонентами математичної творчості, займають своє місце і в математичній освіті.

Навчання математиці буде розвиваючим та більш ефективним, якщо воно забезпечить їх поєднання в учбовому процесі. На думку видатного французького математика А. Пуанкаре, інтуїція відіграє важливу роль не лише в науці, але й в освіті: “Нам потрібна властивість, яка б дозволяла бачити мету здалеку, а ця властивість є інтуїція. Вона необхідна досліднику у виборі шляху, вона не менш необхідна для того, хто йде за ним слідом, і бажає знати, чому він обрав цей шлях” [4, с. 166].

Розвитку логічного мислення та інтуїції сприяє розв’язування логічних задач. Логічними, як правило, називають нестандартні задачі, які дають змогу навчити учнів та студентів розмірковувати, критично мислити, знаходити правильне розв’язання проблеми, аналізувати задані умови, виділяючи з них зайві та суттєві, переносити відомі способи дій у нові ситуації. Атрибутом логічних задач є складність у пошуку засобів подання умов (у виборі адекватних математичних засобів), у пошуку основної ідеї та у складанні раціонального плану розв’язання задачі. Нестандартні задачі, до яких можна віднести і логічні, ініціюють пізнавальну активність студентів, але, спостереження свідчать, що в більшості складних випадків вони насамперед керуються інтуїцією, за допомогою якої намагаються доповнити нестачу потрібної інформації. При цьому у студентів стихійно формуються намагання вгадувати розв'язок там, де необхідно глибоко проаналізувати умову.

На наш погляд, важливіше, щоб студенти навчились охоплювати математично-логічну структуру задачі, її модель, ідею розв'язування.

Розв'язування будь-якої задачі, і логічної в тому числі, – це пошук шляхів подолання чи виходу із скрутної (проблемної) ситуації, штучно створеної у процесі навчання. Розв'язання задачі можна поділити на два етапи:

1) пошук ключової ідеї та плану розв'язування (процедури подолання перешкоди);

2) реалізація плану (виконання процедури);

Низька результативність у розв'язуванні логічних задач студентами, на нашу думку, свідчить про недоліки у постановці навчання. Основні з них такі:

– недостатня увага приділялась задачам нестандартного і творчого характеру у шкільному курсі математики;

– недостатня засвоюваність студентами основних пізнавальних процедур та розумових дій;

– слабка логічна підготовка випускників шкіл, які приходять навчатися до вищих закладів;

– занижена самооцінка своїх інтелектуальних можливостей у деяких студентів [3].

Логічні задачі, найчастіше, розв'язуються за допомогою специфічних логічних операцій і не вимагають трудомістких арифметичних, або алгебраїчних обчислень. Це означає, що, наприклад, у школі при розв'язанні однієї задачі можуть приймати участь учні різних класів, так як це не вимагає знань окремого програмного матеріалу; в вузі одну й ту саму логічну задачу можуть розв'язувати студенти різних факультетів.

На нашу думку, логічні задачі потрібно вивчати не лише у курсі математичної логіки на фізико-математичному факультеті, а також включати їх до програм з математики інших спеціальностей. Незалежно від того, на якому факультеті навчається студент – на фізико-математичному, природничому чи економічному, він повинен мислити логічно, а це вміння в більшій мірі формується в процесі розв'язування логічних задач.

Серед логічних задач можна виділити задачі двох класів. Перший клас – це задачі, розв'язування яких не потребує знань основних понять і законів математичної логіки, їх можна пропонувати студентам всіх спеціальностей, де вивчається математика. Другий клас включає логічні задачі, при розв'язуванні яких в значній мірі використовується апарат математичної логіки. Такі задачі слід пропонувати студентам фізико-математичного факультету, добре ознайомленим з основами математичної логіки.

Виходячи з цього пропонуємо наступну типізацію логічних задач, в основу якої покладено спосіб розв'язання.

Типи задач 1-го класу:

1. *Метод від супротивного*. Під час розв'язування задач методом від супротивного робимо припущення, протилежне тому, яке стверджує задача. Потім шляхом міркувань приходимо до твердження, що суперечить або умові задачі, або іншим відомим фактам. На цій основі робимо висновок, що наше припущення неправильне, а тому буде правильним твердження задачі. Цим самим реалізується закон виключеного третього [2].

2. *Парність*. Багато задач легко розв'язуються, якщо помітити, що деяка величина є числом парним (або непарним). З цього випливає, що ситуації, в яких вона непарна (або парна), неможливі. Іноді цю величину треба сконструювати. Для цього, наприклад, треба розглянути парність суми або добутку, розбити об'єкти на пари, помітити чергування ситуацій [2].

3. *Принцип Діріхле*. Цей принцип названо ім'ям німецького математика Петера Густава Лежена Діріхле (1805-1859), який успішно застосовував його для доведення арифметичних тверджень. Твердження, що називається принципом Діріхле, формулюється так: "Якщо $k \cdot n + 1$ об'єктів розмістити на k місцях, то знайдеться принаймні 1 місце, в якому лежить не менше, ніж $n + 1$ об'єкт". Головне при розв'язуванні задач на принцип Діріхле – зрозуміти, що в умові даної задачі є "об'єктами", а що – "місцями" [5].

4. *Пошук інваріанта*. Відмінною ознакою задач цього циклу являється опис в умові задачі певного способу дій і питання про те, чи може в результаті цих дій бути отриманий той чи інший ефект. Основним методом розв'язання є знаходження такої властивості вихідного об'єкта, яка не змінюється при виконанні дій, вказаних в умові задачі. Така властивість називається інваріантом. Якщо одержаний об'єкт, на відміну від вихідного, не володіє знайденою властивістю, то він, очевидно, не може бути результатом цих дій.

Типи задач 2-го класу:

1. *Сумісність та несуперечність множини висловлень*. При розв'язуванні задач цього типу даними відомими величинами є певні твердження, а їх логічний зв'язок виражається рівняннями алгебри висловлень або системами (логічним добутком) даних рівнянь. Маючи дані висловлення і знаючи їх логічний взаємозв'язок, у задачах даного класу відшукують нові висловлення, які відповідають на поставлене в логічній задачі питання (тобто шукають ті умови, при яких дана множина висловлювань буде несуперечливою).

2. *Матричний (табличний) спосіб*. При розв'язуванні логічних задач даного типу глибокому розумінню умови задачі сприятиме упорядкування заданих умов у вигляді таблиці. Ці записи дають змогу виключити з розгляду неможливі варіанти, тобто ті, які суперечать умові. Будь-який із напрямків по рядкам чи стовпцям називають входженням. Припускають, що в за-

дачі мова йде про дві множини і деякі пари, в кожній з яких один елемент належить одній множині, а другий – іншій. Якщо скласти таблицю, помістивши в першому входженні елементи однієї множини, а в другому – елементи іншої множини, то поле таблиці буде декартовим добутком цих множин. Якщо, у відповідності з умовою задачі, із таблиці викреслювати неможливі пари елементів, можна прийти до розв'язку задачі. Іноді потрібно складати таблиці з великою кількістю входжень або розглядати декілька таблиць.

3. *<u>Розв'язування задач за допомогою графів</u>*. Виділяючи із висловлень умови задачі головне – об'єкти і відношення між ними, графи представляють факти в наочній формі. Розв'язуючи задачі за допомогою графів, можна позбутися зайвих міркувань, зменшити навантаження на пам'ять. З одного боку, графи допомагають прослідкувати всі логічні можливості виучуваної ситуації, а з другого, (завдяки наочності) – допомагають аналізувати всі можливі варіанти та відкидати випадки, що не задовольняють умову. Розв'язування таких задач складається з двох етапів: встановлення базисної множини висловлень та представлення структури у вигляді графа. Такі задачі можна поділити на три підтипи:

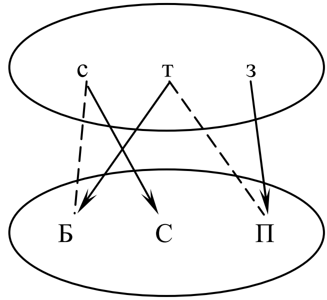
1) умова формулюється за допомогою імплікації;

2) в умові задачі розглядається множина, що містить разом з базисною множиною висловлень ще й заперечення цих висловлень;

3) задачі своєю основою мають структуру, що представляє собою скінчену множину висловлень, поєднаних імплікацією, які містять базисні висловлення a, e, ..., їх заперечення $\bar{a}$, $\bar{e}$, ..., та всі кон'юнкції $\bar{a} \wedge \bar{e}$, $\bar{a} \wedge e$, $a \wedge e$, $a \wedge \bar{e}$.

За допомогою графів можна знайти більше, ніж один розв'язок та наявність зайвих даних в умові задачі (якщо такі є). Іноді граф може відігравати допоміжну роль у поєднанні з іншими методами розв'язування. Розглянемо приклад розв'язування задачі за допомогою графа [1].

<u>Задача</u>. На одному заводі працюють три друга: столяр, токар і зварювальник. Їх прізвища Борисов, Семенов, Петров. У столяра немає ні братів, ні сестер, він наймолодший з товаришів. Петров, одружений на сестрі Борисова, старший за токаря. Назвіть прізвища столяра, токаря та зварювальника.



<u>Розв'язання</u>. Побудуємо граф відношення, заданого в умові задачі. Для цього виділимо множину прізвищ (Б – Борисов, С – Семенов, П – Петров) та множину професій (с – столяр, т – токар, з – зварювальник), елементи яких будемо позначати точками. Якщо точці із однієї множини відповідає точка з другої, ми їх з'єднаємо стрілкою, а якщо не відповідає – штриховою лінією.

Таким чином, на графі цього рисунка

автоматично читаємо відповідь:

столяр – Семенов, токар – Борисов, зварювальник – Петров.

4. *Пошук мінімальних нормальних форм та зведення до досконалих нормальних форм.* Стосується формул алгебри висловлень, які логічно моделюють умови конкретної задачі. При розв'язуванні даного класу задач необхідна алгебра логіки, яка дозволяє перетворювати і спрощувати складні висловлювання, записані в символічній формі. Тому цей клас задач можна розглядати після систематичного вивчення у курсі математичної логіки алгебри висловлень.

Розв'язуючи різноманітні логічні задачі, можна помітити, що одну й ту саму задачу можна розв'язати декількома способами. Тому, для розвитку логічного мислення студентів необхідно не тільки пропонувати їм певний спосіб розв'язування задачі, а й рекомендувати пошук інших, можливо, більш раціональних способів розв'язання задач.

Література

1. Березина Л.Ю. Графы помогают решать логические задачи // Математика в школе. – 1972. – №2. – С. 62–64.
2. Бернацька Т.В. Логічні задачі // Математика. – 2001. – №27–28. – С. 1, 4, 5, 6.
3. Петров В.В., Коновалова Л.В. Спостереження та математичний експеримент під час розв'язування нестандартних задач // Математика в школі. – 2000. – №5. – С. 21–24.
4. Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983. – 235 с.
5. Рожда Н. Решение логических задач // Математика. – 2002. – № 25–26. – С. 59–63.

ОКРЕМІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМИ В РАМКАХ КРЕДИТНО-МОДУЛЬНОЇ СИСТЕМИ НАВЧАННЯ

О.В. Віхрова, І.О. Копчук
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет
Kopchuk@yandex.ru

Процеси європейської інтеграції охоплюють дедалі більше сфер життєдіяльності, включаючи вищу освіту. Україна чітко визначила орієнтир на входження в освітній і науковий простір Європи, здійснює модернізацію освітньої діяльності в контексті європейських вимог, наполегливо працює над практичним приєднанням до Болонського процесу.

Основним завданням на цей період є запровадження передбаченої Болонською декларацією системи академічних кредитів, аналогічної ECTS (Європейській кредитно-трансферній системі). Саме її розглядають як засоби підвищення мобільності студентів щодо переходу з однієї навчальної програми на іншу, включаючи програми післядипломної освіти, а також реформування навчальних програм та передачі кредитів вищим навчальним закладам інших країн. Важливий момент запровадження акумулюючої кредитної системи – це можливість враховувати всі досягнення студента, а не тільки навчальне навантаження, наприклад, участь у наукових дослідженнях, конференціях, предметних олімпіадах тощо [1].

Визначення змістових модулів навчання з кожної дисципліни, узгодження кредитних систем оцінювання досягнень студента повинно стати основою для вирішення ще однієї задекларованої в Болоньї мети – створення умов для вільного переміщення студентів, викладачів, менеджерів освіти та дослідників на теренах Європи.

Визначальними критеріями освіти в рамках Болонського процесу є: якість підготовки фахівців; зміцнення довіри між суб’єктами освіти; відповідність європейському ринку праці, мобільність, сумісність кваліфікації на вузівському та післявузівському етапах підготовки, посилення конкурентоспроможності Європейської системи освіти.

У зв’язку з цим навчальна програма кожного навчального курсу має бути побудована за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу у вищих навчальних закладах та узгоджена з примірною структурою змісту навчального курсу, рекомендованою Європейською кредитно-трансферною системою (ECTS)

Отже, якщо Україна вступить у цей процес, то:

– ми маємо вийти на новий рівень інтеграції науки й освіти;

– в основу навчання буде покладена модульно-рейтингова система;

– відбуватиметься широке впровадження дистанційного навчання.

Це стосується всіх навчальних дисциплін, які вивчаються у вищій школі і зокрема, математики. Традиційний зміст навчання математики забезпечує досить високий рівень математичної підготовки студентів. Проте зміни в галузі політики, техніки, виробництва, освіти, комунікацій ставлять нові вимоги до математичної підготовки професійних кадрів.

Модульно-рейтингова технологія складається з двох частин: модульної і рейтингової. Практика розвинутих країн показує перспективність модульного навчання, яке характеризується: випереджуючим вивченням теоретичного матеріалу великими логічно і змістовно закінченими блоками – модулями, алгоритмізацією навчальної діяльності, завершеністю і узгодженістю циклів пізнання та інших циклів діяльності.

Оскільки модульне навчання ставить за мету формування в студентів навичок самоосвіти, то весь процес будується на основі свідомого цілепокладання з ієрархією близьких (знання, вміння, навички), середніх (загально навчальні вміння та навички) і перспективних (розвиток здібностей особистості) цілей. Такий підхід переводить викладача з режиму інформування в режим консультування і управління. Головна роль його зберігається, але в рамках суб'єкт-суб'єктних відносин в системі "викладач – студент".

Навчальний курс, як правило, включає не менше трьох модулів. В кожному модулі виокремлюються підмодульні (або навчальні) елементи. В свою чергу навчальний елемент складається з трьох частин: вступної, діалогічної і підсумкової [3].

Вступна → постановка мети.

Діалогічна → організація пізнавальної діяльності.

Підсумкова → контроль.

У нашому розумінні, навчальний модуль даного виду – це певна одиниця навчання, що характеризується відносною самостійністю і цілісністю в рамках навчального курсу, оскільки має:

– власний зміст у вигляді логічно завершеного блоку в рамках навчального курсу;

– власні цілі навчання для даного змісту;

– технологічне і методичне забезпечення дидактичного процесу відповідно до цілей навчання;

– організаційні форми навчання, необхідні для дидактичного процесу.

Навчальний модуль забезпечений також системою контролю та оцінювання результату навчання.

У пропонованому нами означенні виділені основні моменти, що характеризують навчальний модуль. Навчальний модуль у вищевикладеному розумінні, який обрано за основу організації навчального курсу, додасть створюваному навчально-методичному комплексу необхідної для нього цілісності, оскільки поєднує в собі зв'язані в одне ціле вищеназвані чотири елементи навчання.

Відповідно до принципу модульної системи курс предмету розділяється на певну кількість модулів. Кожний з них характеризується однотипно:

має зміст, цілі навчання, забезпечує дидактичний процес відповідно до цілей навчання, «облаштований» в технологічному відношенні, а також організаційно – «оснащений» необхідними формами навчання. І завершується вивчення кожного модуля проведенням підсумкового (вихідного) контролю і корекцією навчально-пізнавальної діяльності студентів.

Виходячи з вищевикладеної характеристики модуля, пропонуємо зразкову модель побудови навчального курсу.

Послідовність дій при побудові навчального курсу

1. Формування змісту навчального курсу з навчальних модулів.

Модуль – це укрупнена (в порівнянні з традиційною темою) одиниця змісту і процесу навчання, логічно завершений блок. Розчленовування змісту навчального курсу на такі блоки має відповідати загальній меті вивчення цього курсу і його логічній структурі.

Для виділення модулів і їх найменування можна використовувати (як варіант) угрупування одиниць змісту в концептуально-логічні блоки. Наприклад, навчальний курс «Вища математика» можна розділити на 9 таких блоків-модулів (замість 20-30 тем за програмою в умовах традиційної організації навчання), кожний з яких у свою чергу розділяється на навчальні елементи. Проілюструємо сказане схемою (умовне позначення: М – модуль).

Назви модулів:

М-0. Вступ до курсу. Загальна дидактична мета курсу.

М-1. Лінійна алгебра.

М-2. Аналітична геометрія.

М-3. Вступ до математичного аналізу.

М-4. Границя і неперервність.

М-5. Похідна.

М-6. Функції декількох змінних.

М-7 Інтегральне числення.

М-8 Диференціальні рівняння.

М-9 Ряди.

М-R. Резюме (узагальнення).

М-К. Контроль (іспит).

Отже, зміст курсу сформований з 12 модулів.

2. *Формування модуля.*

Формування кожного модуля в свою чергу включає наступні дії:

2.1. Визначення дидактичної мети модуля. Ця мета визначається як інтегруюча, яка об’єднує в собі вимоги до знань, умінь, навичок і якостей випускника стосовно модуля, взятого в цілому.

2.2. Виділення навчальних елементів (НЕ) у змісті модуля. Структура модуля визначається за допомогою виділення:

а) навчальних елементів в змісті теоретичного матеріалу модуля (не порушуючи цілісності останнього) відповідно до його інтегруючої мети і логічної структури. В даному випадку під навчальними елементами розуміємо основні поняття і положення змісту вивчаємого матеріалу. Вони йдуть під номерами: НЕ-1, НЕ-2, НЕ-3 і т. д.;

б) навчальних елементів власне дидактичного порядку – НЕ-0 (вступ до модуля, включаючи мету його вивчення), HE-R (резюме), НЕ-К (контроль по модулю) [2].

Названі дві групи НЕ і складають структуру модуля. Її схема на прикладі модуля М-6 курсу вищої математики виглядає так:

Назви навчальних елементів

НЕ-0. Вступ до модуля. Мета вивчення модуля

НЕ-1. Основні поняття

НЕ-2. Границя і неперервність

НЕ-3. Частинні похідні

НЕ-4 Диференціал функції

НЕ-5 Похідна за напрямком. Градієнт

НЕ-6 Екстремум функції декількох змінних

НЕ-7 Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа

HE-R Резюме, узагальнення по модулю

НЕ-К. Контроль (підсумковий) по модулю

3. *Визначення дидактичних цілей навчальних елементів.*

Це – конкретні дидактичні цілі на відміну від інтегруючої мети як загальної для модуля в цілому. Вони формулюються в кожному НЕ, визначаючи його зміст якомога точніше і конкретніше з тим, щоб можна було виявити ступінь їх досягнення в результатах навчання. У цілях визначається не тільки об'єм наочних знань, але й рівень їх засвоєння, уміння і навички, якими слід оволодіти. Тим самим долається розрив між змістом і цілями його засвоєння, властивий традиційному навчанню. В цілях навчання мають бути відображені вимоги до знань і умінь, що містяться в Освітньому стандарті.

Форма опису цілей може бути наступна.

Назва НЕ	
Цілі навчання	
Студент повинен знати:	Студент повинен уміти: ....

Проілюструємо викладене. Візьмемо для прикладу модуль М-1.

№ М	Н Е	Назва НЕ	Результати навчання: студент повинен	
			знати	уміти
1	0	Вступ до модуля. Мета вивчення модуля		
*	1	Матриці та	- означення матриці;	- упорядковувати двомірний

№ М	Н Е	Назва НЕ	Результати навчання: студент повинен	
			знати	уміти
		основні дії над ними	- основні типи матриць; - означення основних операцій та їх властивості; - види елементарних перетворень.	масив; - розрізняти типи матриць; - виконувати дії над матрицями із застосуванням їх властивостей; - виконувати перетворення над матрицями.
*	2	Визначники 2-го і 3-го порядків	- означення визначника 2-го порядку; - означення визначника 3-го порядку	- обчислювати визначники 2-го і 3-го порядків.
*	3	Визначники вищих порядків. Властивості визначників.	- означення визначника n-го порядку; - властивості визначників.	- визначати, чи входить певний елемент (добуток) у визначник даного порядку і з яким знаком; - застосовувати властивості визначників для їх обчислення.
*	4	Обчислення визначників вищих порядків. Теорема Лапласа	- теорему Лапласа; - методи обчислення визначників вищих порядків: метод нулів та метод зведення до трикутної форми.	- застосовувати теорему Лапласа для обчислення визначників вищих порядків; - обчислювати детермінанти порядку вище 3 іншими методами.
*	5	Обернена матриця	- поняття матриці, оберненої до заданої, умову оборотності матриці; - алгоритм обчислення A^{-1}	- обчислювати алгебраїчні доповнення до елементів матриці; - знаходити матрицю обернену до заданої, та перевіряти правильність результату.
*	6	Ранг матриці	- поняття рангу матриці; - поняття мінору к-го порядку, обвідного мінору, базового мінору.	- обчислювати мінори к-го порядку та обвідні до нього мінори к+1 порядку; - знаходити ранг матриці за допомогою елементарних перетворень матриці та способом обвідних мінорів.
*	7	Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні	- означення СЛР, розв'язку СЛР, сумісної та несумісної СЛР, визначеної та невизначеної СЛР; - означення рівносиль-	- будувати математичну модель певних економічних задач у вигляді СЛР.

№ М	НЕ	Назва НЕ	Результати навчання: студент повинен	
			знати	уміти
		поняття і означення	них СЛР та елементарні перетворення системи.	
	8	Способи розв'язування СЛР	- теорему Крамера для розв'язування СЛР; - означення матричного рівняння виду AX=B, та його розв'язку; - алгоритм методу Гауса для розв'язування довільної СЛР; - алгоритм методу Жордана-Гауса для розв'язування СЛР.	- застосовувати формули Крамера для знаходження розв'язку системи n лінійних рівнянь з n невідомими; - записувати систему лінійних рівнянь у вигляді матричної рівності; - знаходити розв'язок системи лінійних рівнянь, як одностовпцеву матрицю за формулою $X = A^{-1}\cdot B$; - застосовувати на практиці алгоритми Гауса і Жордана-Гауса для розв'язування СЛР.
*	9	Дослідження системи *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими. Теорема Кронекера-Капеллі.	- критерій сумісності лінійних рівнянь; - критерій визначеності системи лінійних рівнянь.	- досліджувати СЛР на сумісність та визначеність.
*	10	Однорідні системи лінійних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків.	- поняття однорідної СЛР, теорему про ненульові розв'язки однорідної СЛР. - означення фундаментального розв'язку однорідної СЛР.	- розв'язувати однорідну систему лінійних рівнянь (одним із методів); досліджувати однорідну систему на визначеність; - будувати фундаментальний розв'язок однорідної СЛР.
*	11	*n*-мірний вектор і векторний простір.	- означення n-мірного арифметичного вектора; - означення основних операцій над векторами та їх властивості; - означення векторного простору;	- виконувати основні операції над векторами; - подавати вектор у вигляді лінійної комбінації системи векторів; - визначати лінійну залежність (незалежність) заданої системи

№ М	Н Е	Назва НЕ	Результати навчання: студент повинен знати	Результати навчання: студент повинен уміти
			- означення лінійної комбінації системи векторів; лінійно залежної та лінійно незалежної системи векторів.	векторів.
∗	12	Розмірність і базис векторного простору. Перехід до нового базису.	- означення розмірності векторного простору, базису векторного простору, координат вектора у базисі; - означення матриці переходу та зв'язок між двома базисами векторного простору; - формули перетворення координат вектора при переході до нового базису.	- визначати, чи утворює певна система векторів базис векторного простору; - знаходити матрицю переходу від одного базису до іншого; - за координатним рядком вектора у одному базисі знаходити його координати в іншому базисі.
∗	13	Евклідів простір	- означення скалярного добутку векторів, норми вектора; - означення евклідового векторного простору; - поняття ортогонального і ортонормованого векторного простору.	- знаходити скалярний добуток двох векторів, кут між двома векторами, норму вектора; - будувати ортогональний і ортонормований базиси векторного простору.
∗	14	Лінійні оператори	- означення оператора, що діє у векторному просторі; образи і прообрази вектора; - поняття матриці лінійного оператора у фіксованому базисі; - означення власних значень і власних векторів лінійного оператора; - алгоритм знаходження власних значень: власних векторів лінійного оператора.	- визначати координати образа вектора у фіксованому базисі за координатним рядком прообразу; - розв'язувати обернену задачу; - знаходити власні вектори і власні значення лінійного оператора.

№ М	Н Е	Назва НЕ	Результати навчання: студент повинен	
			знати	уміти
*	15	Квадратичні форми. Зведення квадратичних форм до канонічного вигляду.	- означення квадратичної форми та її канонічного виду.	- зводити квадратичні форми до канонічного вигляду.

Література

1. Кремінь В.Г. Болонський процес: зближення, а не уніфікація. – http://www.studrada.org.ua/
2. Трофимова З.П. Технология обучения (Методические материалы для преподавателей). – Минск, 1995. – 43 с.
3. Чошанов М.А. Гибкая технология проблемно-модульного обучения. Методическое пособие. – М., 1996. – 96 с.

ВИКЛАДАННЯ ТЕМИ “ЛІНІЙНІ РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ” В ТЕХНІЧНИХ ВУЗАХ

О.Л. Вишневецький, І.Л. Разніцин
м. Харків, Харківський національний автомобільно-дорожній університет
alexwish@mail.ru

Наш час характеризується все більш зростаючим інформаційним потоком та бурхливим розвитком інформатизації. Впровадження у навчальний процес нових інформаційних технологій безумовно є фактом, що відбувся. Ці обставини зробили актуальною проблему перегляду методики викладання курсу вищої математики. В свою чергу, використання нових методик впливає на необхідність змін у змісті математичної освіти майбутніх інженерів, хоча це питання є дискусійним.

Автори вважають, що традиційна класична математика, безперечно, залишиться фундаментом базового рівня освіти. Проте це повинно не обмежувати, а навпаки, стимулювати включення в програму курсу вищої математики (або в програму спеціальних курсів) таких розділів та тем, які б забезпечували випускників технічних вузів математичним апаратом для професіональної діяльності.

На наш погляд, в зв’язку з широким застосуванням комп’ютерів у сучасній науці та техніці, зокрема у цифровій обробці інформації, є доцільним вивчення у технічних вузах теорії різницевих рівнянь. Зазначимо, що різницеві рівняння, як і диференціальні рівняння, застосовуються для математичного опису природних та технічних процесів і явищ. Різницеві рівняння описують дискретні явища, в той час як диференціальні рівняння – неперервні явища.

Спираючись на особистий досвід, ми можемо рекомендувати викладання теми “Різницеві рівняння” проводити безпосередньо після розділу “Звичайні диференціальні рівняння”, який вивчається у курсі вищої математики усіх технічних вузів. Найпростішими для викладання є лінійні різницеві рівняння. Наведемо скорочений зміст лекцій (теореми наведемо без доведення, приклади – без розв’язання) теми “Лінійні різницеві рівняння”.

1. Лінійне різницеве рівняння

Коли ми розв’язуємо диференціальне рівняння, ми знаходимо невідому функцію. При розв’язанні різницевих рівнянь ми знаходимо невідому послідовність $X=\{..., x(-1), x(0), x(1), ...\}$. Будемо позначати її k-ий член $x(k)$, де k належить множині Z цілих чисел: $k \in Z$.

Нехай F – відома функція $n+1$ змінного.

Означення. Рівняння виду

$$F(x(k+n), x(k+n-1), ..., x(k+1), x(k))=0 \tag{1.1}$$

називається різницевим рівнянням n-го порядку.

Приклади.

1. У послідовності $X=\left\{\ldots,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,4,\ldots\right\}$ кожний наступний член вдвічі більший від попереднього, тобто для довільного $k\in Z$ маємо

$$x(k+1)=2x(k) \tag{1.2}$$

Це різницеве рівняння першого порядку. Зауважимо, що послідовність X можна задати рівністю $x(k)=2^k$, $k\in Z$.

2. Рівняння

$$x(k+2)-3x(k+1)+2x(k)=0 \tag{1.3}$$

є різницевим рівнянням другого порядку, а

$$x(k+3)+5x(k+1)+7x(k)=2^k \tag{1.4}$$

є різницевим рівнянням третього порядку.

Означення. Послідовність $X=g(k)$ називається розв'язком різницевого рівняння (1.1), якщо підстановка $x(k)=g(k)$ перетворює рівняння (1.1) у тотожність.

Приклад. Послідовність $x(k)=2^k$ є розв'язком рівняння (1.2), оскільки після її підстановки в (1.2) одержуємо тотожність $2^{k+1}=2\cdot 2^k$.

Початкові умови для різницевого рівняння n-го порядку задають n послідовних членів його розв'язку. Як правило, цими членами є $x(0)$, $x(1)$, ..., $x(n-1)$.

Означення. Лінійне різницеве рівняння (ЛРР) n-го порядку з сталими коефіцієнтами має вид

$$a_0x(k+n)+a_1x(k+n-1)+\ldots+a_{n-1}x(k+1)+a_nx(k)=b(k) \tag{1.5}$$

Числа a_0, a_1, ..., a_n називаються коефіцієнтами, послідовність $b(k)$ – вільним членом рівняння.

Означення. Якщо $b(k)=0$ для довільного $k\in Z$, рівняння (1.5) називається однорідним, а у протилежному випадку – неоднорідним.

Приклади. Рівняння (1.3) є лінійним однорідним різницевим рівнянням з сталими коефіцієнтами, рівняння (1.4) – лінійним неоднорідним різницевим рівнянням з сталими коефіцієнтами, а рівняння

$$x(k+2)\cdot x(k+1)+x(k)=0$$

не є лінійним різницевим рівнянням.

В подальшому будемо розглядати тільки лінійні різницеві рівняння з сталими коефіцієнтами.

2. Розв'язання лінійного однорідного різницевого рівняння

За означенням лінійне однорідне різницеве рівняння має вид

$$a_0x(k+n)+a_1x(k+n-1)+\ldots+a_{n-1}x(k+1)+a_nx(k)=0 \tag{2.1}$$

Позначимо через $Lx(k)$ ліву частину рівняння (1.5):

$$Lx(k)=a_0x(k+n)+a_1x(k+n-1)+\ldots+a_{n-1}x(k+1)+a_nx(k) \tag{2.2}$$

Тепер однорідне рівняння (2.1) можна записати так:

$$Lx(k)=0 \tag{2.3}$$

а неоднорідне рівняння (1.5) – так:

$$Lx(k)=b(k). \tag{2.4}$$

Теорема 1. Для довільних послідовностей $x(k)$, $x_1(k)$, $x_2(k)$ та довільної сталої C маємо

$$L(Cx(k))=CLx(k), \tag{2.5}$$

$$L(x_1(k)+x_2(k))=Lx_1(k)+Lx_2(k). \tag{2.6}$$

Наслідок 2. Сума розв'язків однорідного рівняння (2.3) є розв'язком рівняння (2.3). Добуток довільної сталої C на розв'язок однорідного рівняння (2.3) знов є розв'язком рівняння (2.3).

Означення. Многочлен

$$M(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+...+a_{n-1}p+a_n$$

називається характеристичним многочленом рівняння (1.5), а рівняння

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}+...+a_{n-1}p+a_0=0 \tag{2.7}$$

називається характеристичним рівнянням для рівняння (1.5).

Розглянемо дію операції L на спеціальну послідовність $x(k)=\gamma^k$, де γ – деяке число.

Теорема 3. $L(\gamma^k)=M(\gamma)\gamma^k$.

Теорема 4. Якщо p_1, ..., p_n – корені характеристичного рівняння (2.7), то для довільних сталих C_1, ..., C_n послідовність

$$x_{з.о.}(k)=C_1p_1^{\ k}+...+C_np_n^{\ k} \tag{2.8}$$

є розв'язком лінійного однорідного різницевого рівняння (2.3).

Можна довести, що якщо корені p_1, ..., p_n характеристичного рівняння попарно різні, то довільний розв'язок однорідного рівняння (2.3) має вид (2.8). Тому формула (2.8) називається загальним розв'язком лінійного однорідного рівняння.

Розглянемо тепер випадок, коли деякі з коренів характеристичного рівняння рівні (такі корені називають кратними).

Означення. Число m називається кратністю кореня α многочлена $f(p)$, якщо рівно m коренів многочлена $f(p)$ дорівнюють α.

Корені кратності один називають простими, корені кратності два та більше – кратними.

Узагальнимо теорему 4 на випадок, коли характеристичне рівняння може мати кратні корені.

Теорема 5. Співставимо кореню α характеристичного рівняння кратності m вираз

$$\alpha^k(C_1+C_2k+...+C_mk^{m-1}) \tag{2.9}$$

Загальний розв'язок лінійного однорідного різницевого рівняння (2.3) є сумою виразів (2.9), узятою по усіх коренях α.

Якщо задані початкові умови, то за їх допомогою знаходять довільні сталі у формулі (2.8).

Приклад. Розв'язати різницеве рівняння

$$x(k+2)–3x(k+1)+2x(k)=0$$

з початковими умовами $x(0)=8$, $x(1)=11$.

<u>3. Розв'язання лінійного неоднорідного різницевого рівняння із спеціа-</u>

льною правою частиною

Якщо права частина рівняння (1.5) має вид $b(k)=A\gamma^k$ для довільного числа γ, то будемо називати (1.5) лінійним неоднорідним різницевим рівнянням (ЛНРР) із спеціальною правою частиною.

Теорема 5. Якщо $M(\gamma)\neq 0$, то ЛНРР із спеціальною правою частиною $b(k)=A\gamma^k$ має розв'язок

$$x_{чн}(k)=\frac{A\gamma^k}{M(\gamma)} \tag{3.1}$$

Теорема 6. Загальний розв'язок ЛНРР має вид

$$x(k)=x_{з.о.}(k)+x_{чн}(k) \tag{3.2}$$

де $x_{з.о.}(k)$ – загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (формула (2.8)), а $x_{чн}(k)$ – будь-який (частинний) розв'язок ЛНРР.

Приклад. Розв'язати ЛНРР:

$$x(k+2)-6x(k+1)+8x(k)=3\cdot 5^k$$

Приклад. Розв'язати ЛНРР:

$$2x(k+2)-5x(k+1)+2x(k)=5\cdot 3^k$$

з початковими умовами $x(0)=8$, $x(1)=11$.

Теорема 7. Рівняння $Lx(k)=b_1(k)+b_2(k)$ має розв'язок $x_1(k)+x_2(k)$, де $x_1(k)$ – розв'язок рівняння $Lx(k)=b_1(k)$, а $x_2(k)$ – розв'язок рівняння $Lx(k)=b_2(k)$.

Теорема 7 очевидним чином узагальнюється на випадок суми довільної кількості доданків.

Приклад. Розв'язати ЛНРР:

$$x(k+2)-3x(k+1)-4x(k)=6\cdot 2^k+4\cdot(-3)^k.$$

На кафедрі вищої математики ХНАДУ по темі "Різницеві рівняння" розроблено конспект лекцій і матеріали для самостійної роботи [1].

В цілому тема "Різницеві рівняння" є не більш складною для сприйняття студентами, ніж тема "Звичайні диференціальні рівняння".

Література:

1. Вишневецький О.Л., Разніцин І.Л. Лінійні різницеві рівняння. Конспект лекцій. – Харків: ХНАДУ, 2005.

РОЗВИТОК ІНФОРМАЦІЙНИХ І КОМУНІКАТИВНИХ УМІНЬ СТАРШОКЛАСНИКІВ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ

С.О. Войцеховська, В.В. Євтушенко
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Інформація в сучасних умовах розвитку – одна з найголовніших людських цінностей, важливий ресурс життєзабезпечення суспільства. Тому соціальним замовленням відповідає людина, яка навчатиметься і працюватиме в умовах постійного зростання інформативного потоку, людина з високим інтелектуальним потенціалом. Досягнення цієї мети багато в чому залежить від того, чи навчили старшокласника самостійно знаходити, осмислювати, обробляти та використовувати інформацію в процесі навчання. Щоб засвоїти великий обсяг науково-навчального матеріалу та розв'язати коло проблем, які висуває сучасна школа, учень передусім повинен досягти високого рівня інформаційної та комунікативної культури, в тому числі, вільно орієнтуватися в потоці усної та друкованої інформації, мати необхідний інтелектуальний та культурний багаж, вміти застосовувати його під час навчання, в роботі та в процесі спілкування.

Основою для формування інформаційної та комунікативної культури виступають загальнонавчальні вміння. В методичній літературі [3] виділяють чотири види відповідних умінь: навчально-організаційні, навчально-інтелектуальні, навчально-інформаційні та навчально-комунікативні.

Зазначимо, що сучасні програми навчально-виховного процесу, зокрема математичні програми, особливо для старших класів, дозволяють формувати не лише спеціальні математичні вміння, а й групи загальнонавчальних умінь. До того ж спеціальні вміння під дією різних факторів (досвіду практичного застосування окремих умінь, реалізації вимог міжпредметного переносу, соціальних умов та ін.) переходять до категорії загальнонавчальних. Тому будь-яка дисципліна навчально-виховного процесу, а отже і математика, формуючи спеціальні вміння дає основу для розвитку загальнонавчальних і навпаки.

В нашій статті зупинимося на останніх двох видах загальнонавчальних умінь (навчально-інформаційних та навчально-комунікативних), які на нашу думку відіграють найважливішу роль при формуванні загальної культури особистості.

Під навчально-інформаційними вміннями розуміють загальнонавчальні вміння, які забезпечують знаходження, обробку та використання інформації для розв'язання навчальних задач. В методичній літературі існує декілька класифікацій навчально-інформаційних умінь. Виходячи з інформатизованого розуміння навчально-виховного процесу розглянемо класифікацію навчально-інформаційних умінь, в основу якої покладено основні компоненти інформаційної культури [1]. Таким чином будемо виділяти наступні групи навчально-інформаційних умінь:

1) вміння слухати та сприймати пояснення вчителя;
2) вміння бібліотечно-бібліографічного пошуку;
3) вміння працювати з текстом підручника;
4) вміння працювати з комп'ютером.

Розкриємо зміст кожного поняття і зупинимося на деяких особливостях їх формування.

Під поняттям *активно слухати та сприймати пояснення вчителя* будемо розуміти складне навчально-інформаційне вміння, яке складається з більш елементарних, таких як:

– вміння уважно сприймати інформацію;

– вміння порівнювати та аналізувати;

– вміння виділяти й встановлювати зв'язок з раніше вивченим матеріалом;

– вміння конспектувати;

– вміння складати план розповіді та ін.

Для того, щоб учні могли оволодіти вмінням активно слухати та сприймати пояснення вчителя, необхідно створити відповідні психолого-педагогічні умови їх протікання: активізувати процес сприйняття монологічного пояснення; давати зразки суджень та підходів до проблеми; вчити мислити самостійно; ставити собі питання в процесі пояснення. Абстрактний математичний матеріал не можливо пояснювати монотонно, невиразно. Темп мови слід змінювати в залежності від важливості матеріалу. Нове, найбільш важливе слід пояснювати сповільнено, знайомий або вторинний матеріал вимагає більш швидкого темпу.

Розкриємо зміст наступної підгрупу навчально-інформаційних умінь. Під поняттям *вміння бібліотечно-бібліографічного пошуку* будемо розуміти складне навчально-інформаційне вміння, яке складається з більш елементарних:

– вміння користуватися абонементом та читальним залом;

– вміння користуватися довідниковою літературою, періодикою;

– вміння користуватися рекомендаційною бібліографією;

– вміння робити бібліографічний опис книжки;

– вміння знаходити необхідну книжку, користуючись алфавітними та систематичним каталогами.

Бібліотечно-бібліографічні вміння, як вже зазначено є комплексними. Кожне вміння формується, поповнюється та закріплюється на різних етапах навчально-виховного процесу. В старших класах учні повинні досконально володіти відповідним вмінням тобто: вміти, отримавши книгу, за короткий час скласти деяке уявлення про зміст цієї книги, ознайомившись зі змістом та анотацією, з'ясувати чи підходить вона йому для виконання деякого завдання.

Під поняттям *вміння працювати з текстом підручника* будемо розуміти складне навчально-інформаційне вміння, яке складається з більш елементарних:

– вміння працювати з основними компонентами тексту: змістом, навчальним текстом, питаннями та завданнями, схемами, таблицями тощо;

– вміння виділяти в тексті підручника означення, правила від пояснень та прикладів;

– вміння знаходити в тексті відповіді на контрольні питання (які містяться в підручнику або поставлені вчителем);

– вміння розбивати текст на окремі смислові одиниці;

– вміння складати простий план прочитаного.

Одним з найважливіших вмінь є диференційоване читання тексту підручника. В зв'язку зі збільшенням об'єму інформації, яка включається в навчальний посібник з математики, в них достатньо часто буває представлений матеріал, який має ознайомчий, другорядний характер. Тому учнів треба навчити виділяти (якщо це не зроблено в підручнику) матеріал для вивчення (означення, поняття, формулювання теорем та ін.), а також той текст, який пояснює основні факти, що не потребують відтворення.

Розкриємо зміст останньої групи навчально-інформаційних умінь "вміння працювати з комп'ютером", при цьому треба враховувати деякі його особливості.

По-перше, в даному випадку комп'ютер розглядається, як засіб навчання, тобто інструмент, що забезпечує учням вільний і зручний доступ до навчальної інформації як в процесі занять, так і в позаурочний час.

По-друге, "вміння працювати з комп'ютером" на відміну від інших груп навчально-інформаційних уміння вимагає від учнів певних знань про комп'ютер, програмне забезпечення та відповідний практичний досвід. Тому для того щоб розкрити зміст відповідного поняття треба враховувати спеціальні "елементарні" вміння, які учні набувають на уроках інформатики.

Таким чином, під поняттям *вміння працювати з комп'ютером* ми розуміємо складне навчально-інформаційне вміння, яке складається з більш елементарних:

1) інструментальні вміння: вміння працювати з основними операційними системами та прикладними програмами; вміння зберігати інформацію на диску, завантажувати її з диску, виводити на друк та ін.

2) вміння працювати з пошуковими системами: вміння працювати в режимі пошуку в ОС; вміння самостійно оволодівати пошуковими системами в Інтернеті; вміння користуватися специфічною символікою, яка використовується в різних пошукових системах та ін.

3) вміння працювати з навчаючими комп'ютерними системами: вміння створювати БД в середовищі СУБД, вміння вносити зміни, організовувати сортування, пошук інформації в БД; вміння створювати, редагувати вміст розрахункової таблиці в середовищі табличного процесора; вміння користу-

ватися додатками *help*; вміння самостійно оволодівати будь-якою навчаючою системою та вміння підбирати програмні засоби для виконання завдань; вміння працювати з навчаючими програмами *GRAN*1, 2, 3, *Maxima*, *Matlab*, *Mathematica* та ін.

Під навчально-комунікативними вміннями будемо розуміти комунікативні вміння, що формується і розвивається в процесі навчання. В свою чергу за комунікативні вміння будемо приймати таку рису особистості, що керується певними мотивами в реалізації цілей при здійсненні контактів, спілкування, обміну інформації з іншими людьми.

Проаналізувавши літературу з даної теми, пропонуємо розглядати таку класифікацію навчально-комунікативних умінь, в основу якої покладено форму спілкування (усну чи писемну).

До навчально-комунікативних умінь, пов'язаних з усною формою спілкування будемо відносити такі вміння:

– давати відповіді на питання та ставити запитання;

– зв'язно викладати вивчений матеріал (стисло, докладно, вибірково);

– використовувати різні типи мови – опис, розповідь, міркування;

– виступати з доповіддю чи коротким повідомленням ;

– брати участь у дискусіях;

– вести діалог, бесіду;

– переформульовувати теореми та інші математичні твердження.

До навчально-комунікативних умінь, пов'язаних з писемною формою спілкування будемо відносити такі вміння:

– переводити усну мову в писемну;

– виконувати різні види письмових робіт – переказ, відгук, рецензію, твір;

– робити короткі записи основного змісту інформації: простий і складений плани, тези, конспекти;

– графічно записувати інформацію (за допомогою схем, таблиць, графіків, діаграм);

– користуватися математичною символікою.

Перераховані навчально-комунікативні вміння є комплексними, вони тісно пов'язані з навчально-інформаційними та навчально-інтелектуальними, в основі яких лежать логічні.

Формування навчально-комунікативних умінь необхідно проводити на всіх етапах розвитку школяра, але саме в ранньому юнацтві провідною діяльністю поряд із спілкуванням постає і навчання, яке носить вже більш теоретизований характер.

При вивченні математики, педагог приділяє увагу розумінню теорії та вмінню розв'язувати задачі. Сам же процес розмірковувань старшокласника залишається недоступним для педагога. Дуже важливо навчити старшокласника проговорювати навчальний матеріал, що засвоюється: формулювати теореми, на які він спирається при розв'язанні задач на доведення, описувати алгоритми розв'язання стандартних задач, планувати пошук розв'язання нестандартних задач.

Шукаючи слова та словосполучення для пояснення своїх розв'язань, старшокласник закріплює у пам'яті термінологію, важливі теоретичні положення, навчається висловлювати математичні думки мовними засобами, привчається до логічного викладу. Розвивати таку мову на заняттях доцільно в умовах діалогу. Діалог на уроці математики має особливі риси, що зумовлюються специфікою математичної мови. Один із засобів реалізації діалогу учнів є пізнавальне спілкування підчас групової роботи, яка вимагає тимчасового розподілу на групи для спільного розв'язання завдань. Учням може бути запропоновано обміркувати завдання, визначити спосіб розв'язання, реалізувати його на практиці та показати знайдений результат. Моделювання таких ситуацій спілкування на уроках математики містить в собі дидактичні можливості для підвищення інтересу учнів, розвитку їх навчально-комунікативних умінь.

Теореми, що пропонуються авторами підручників з математичних дисциплін, як правило, не всі мають назву, а мають відповідну нумерацію, яку автор використовує у подальшому викладі матеріалу, посилаючись в доведеннях на ту чи іншу теорему. Зрозуміло, що запам'ятовуючи формулювання теореми, засвоюючи її доведення, старшокласник не повинен пам'ятати номер цієї теореми у відповідному підручнику. Саме тому необхідно визначити назви для теорем. Теореми за їх назвами легше запам'ятовуються старшокласниками, оскільки назва дозволяє створити певні асоціації. Уміння називати теорему передбачає формування у учнів деяких спеціальних логічних умінь.

Математичні знання та навички тільки тоді ефективні, коли за допомогою них вдається вдосконалювати процес формування та розвитку навчально-комунікативних та навчально-інформаційних умінь, не відокремлюючи цей розвиток від самого навчання математики.

Література:

1. Гендина Н.И., Колова Н.И., Скипа И.Л., Старобубова Г.А. Формирование информационной культуры в библиотеках и образовательных учреждениях: Учебно-метод. пособие 2-е изд., перераб. – М.: Школьная б-ка, 2003. – 296 с.

2. Ладыженская Т.А. Общеучебные умения и речевая деятельность школьника // Советская педагогика. – 1981. – №8. – С. 85-91.

3. Самостоятельная деятельность учащихся при обучении математике (формирование умений самостоятельной работы): Сб. статей / Сост. С.И. Демидов, Л.О. Денищев – М.: Просвещение, 1985. – 192 с.

ОБҐРУНТУВАННЯ ОСНОВНИХ ПОЛОЖЕНЬ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕХАНІКИ

В.В. Волчанський[1α], З.Ю. Філер[2β]
[1] м. Кіровоград, Державна льотна академія України
[2] м. Кіровоград, Кіровоградський державний педагогічний університет ім. Володимира Винниченка
[α] volya6@yandex.ru
[β] Filer@kw.ukrtel.net

Викладачі природничих дисциплін, зокрема теоретичної фізики та похідних від неї предметів (теоретичної механіки, опору матеріалів та ін.), часто зіштовхуються з проблемою недостатнього володіння студентами старших курсів спеціальними методами математики [8, с. 23]. Не є рідкістю також невміння використати навіть вже знайомі методи математики під час моделювання в інших дисциплінах [7, с. 24].

В основі проблеми невміння студентів використовувати при вивченні окремої дисципліни методи інших дисциплін, на думку дослідників, лежить ігнорування методиками предметів відмінностей між їх логіками [5, с. 238]. Чітким доказом цього є формалізм у реалізації зв'язків між предметами, що виявляється насамперед в "переоцінці ролі теорії" й ігноруванні прикладних зв'язків [12; 5, с. 238]. Більшість же дослідників [7–9, 12] підкреслює вирішальну роль правильної побудови та реалізації саме навчальних задач для ефективного здійснення міжпредметних зв'язків. Для математики це означає в першу чергу "створити запас математичних моделей, які описують явища і процеси, що вивчаються в різних предметах" [9, с. 27].

Разом з тим, помилковим була б спроба абстрагуватись від зворотного впливу: логіки інших дисциплін, скажімо фізики, на логіку математики. Наскільки нерозумним було б вивчення принципу дії та будови інструменту без уваги до того, для чого він призначений, настільки ж помилковим є освоєння математичних методів окремо від логіки задач, для вирішення яких вони були створені. "Те, що в наших підручниках не розкрито "кухню" наукової творчості, в багато разів применшує їх цінність, особливо для інженерів, котрим набагато корисніше знати як та чому це зроблено" [7, с. 33].

Проте, ми не можемо нестримно "роздувати" курс математики, вводячи до нього пояснення та логіки інших дисциплін. У 2004 р. студенти КДПУ, проводячи під керівництвом одного зі співавторів науково-педагогічне дослідження, навели серед підстав відмови викладачів кафедри математики від подібної практики "зниження темпу заняття, обтяження його стороннім матеріалом, розсіювання уваги слухачів". Таким чином, проблема прикладних умінь відкриває перед нами ще одну проблему: оптимального співвідношення заглиблення в логіку іншої дисципліни та компактності навчального матеріалу.

Постаємо перед необхідністю виробити чіткі правила для визначення того, які навчальні ситуації вимагають такого заглиблення, а які доцільніше звести до більш формального вигляду. Для цього скористаймося нагодою розглянути вирішення даної проблеми на конкретному прикладі: вивчення основних положень диференціальних рівнянь (ДР).

У своїх міркуваннях ми будемо спиратись головним чином на дві тези: про діяльнісний підхід в освіті [2, 9] та про фундаментальний характер політехнічної освіти [7, 12].

Перша теза у широкому формулюванні [10, с. 81] вже розглядалася нами вище. Але її вужче значення передбачає, що активність, яку виявляє людина під час навчальної діяльності [10, с. 81], має бути спрямована лише на "розв'язання життєво важливих завдань", тобто завдань, безпосередньо чи опосередковано пов'язаних з майбутньою трудовою діяльністю [2, с. 18]. Таким чином, під час побудови навчальних задач та при обґрунтуванні методів їх розв'язання особливу увагу слід приділяти тому, щоб ці задачі мали зв'язок з реальними задачами професійної діяльності, щоб ці методи були не "притягнуті за вуха", а відображали (нехай спрощено) дійсні підходи до розв'язання реальних задач.

Слід також пам'ятати, як зауважують психологи та дидактики, що уміння розв'язувати задачі "прямо не залежить від кількості розв'язаних задач", а визначається насамперед сформованістю "загального підходу до задачі" [9, с. 84]. Що дозволяє при вивченні фундаментальних дисциплін не розглядати абсолютно всі (чи більшість) специфічних задач, обмежившись зручними для подачі методу, а також розраховувати на те, що майбутній спеціаліст зможе розв'язати й невідомі сьогодні задачі [7, с. 4]. Швидкі зміни технологій, коли "конструювання та технології зливаються в єдину систему" з виробництвом вимагають їх врахування при вивченні "політехнічних дисциплін, фізики та математики як у школі, так і в педвузі" [12], а саме тенденції фундаменталізму [7, с. 4].

Одночасне врахування обох критеріїв дозволяє досягти балансу в методиці міжпредметних зв'язків, не переобтяжуючи їх "стороннім матеріалом", але приділяючи більше уваги практичному освоєнню тих методів математики, які стануть основою професійної освіти та трудової діяльності [2, 8, 12].

Визначити те, які методи математики й у якій мірі потребують розгляду задач інших дисциплін, можна за допомогою експертних оцінок. Нами було запропоновано [3, 4] метод, що поєднує експертні оцінки ефективності міжпредметних зв'язків з оцінками цієї ефективності на основі педагогічного експерименту. Він дозволяє оцінити глибину дифузії предметів на елементарному, операційному рівні. Вихідними даними є таблиці оцінок залучення окремих методів до розв'язання наступних задач, а також бажані їх значення, отримані за допомогою експертів.

Для педагогічної освіти експерти мають врахувати аналогічні оцінки замовника (в разі підготовки викладача для професійно орієнтованого навчального закладу), оцінки яскравості задачі (чи дозволить вона найкраще проілюструвати дію методу для формування загального підходу), історичний аспект [1, с. 23; 7, с. 34].

В питанні "яскравості" одним з найпотужніших методів математики є метод ДР [11, с. 28], який разом з тим досить чітко відображає всі етапи наукового дослідження, тому в нас є всі підстави приділити особливу увагу його ілюстрації та обґрунтуванню. В якості ілюстративного матеріалу значними перевагами володіють задачі механіки, хоч би з точки зору дидактики – вони підкріплені моторною пам'яттю людини, – або в історичному аспекті – саме через задачу про політ кинутого під кутом до горизонту тіла І. Ньютон прийшов до методу ДР [1, с. 23].

Другий закон Ньютона для матеріальної точки можна сформулювати у вигляді рівняння: $\boldsymbol{r}''_{tt}=\boldsymbol{F}/m$ або $\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\big/m$. Дана модель стала узагальненням багатьох дослідів, розпочатих ще Г. Галілеєм, в яких вивчалася динаміка падіння тіла. В цьому разі сила $\boldsymbol{F}$ була сумою ваги тіла та сили опору повітря. Для малих (дозвукових) швидкостей сила опору, на основі дослідів, приймається пропорційною швидкості руху [6, с. 332]. Зводячи рівняння до одного аргументу – швидкості – отримуємо ДР (1):

$$m\dot{\vec{v}} = -k\vec{v} - m\vec{g}\ . \tag{1}$$

Розв'язком такої задачі буде функція $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t,\ \boldsymbol{v}_0,\ t_0)$, параметри якої $\boldsymbol{v}_0$, t_0 дозволяють зафіксувати не лише характер зміни швидкості v, але й миттєві її значення. Це дозволяє максимально просто та наочно сформулювати Задачу Коші. Завдяки простоті постановки цієї задачі, для її формулювання та розв'язання ефективно використати проблемний метод навчання [2, с. 272; 7, с. 34]. Підкреслимо, що проблемний метод дуже важливо застосовувати на всіх ланках розв'язання задачі (в тому числі й під час створення математичної моделі! [7, с. 34]). Проходячи таким чином всі етапи наукового дослідження, доцільно шляхом введення нових компонентів (вітер, політ тіла під кутом до горизонту, коливання самого "горизонту" та ін.) чи іншої постановки задачі, добитись необхідності залучення інших видів ДР.

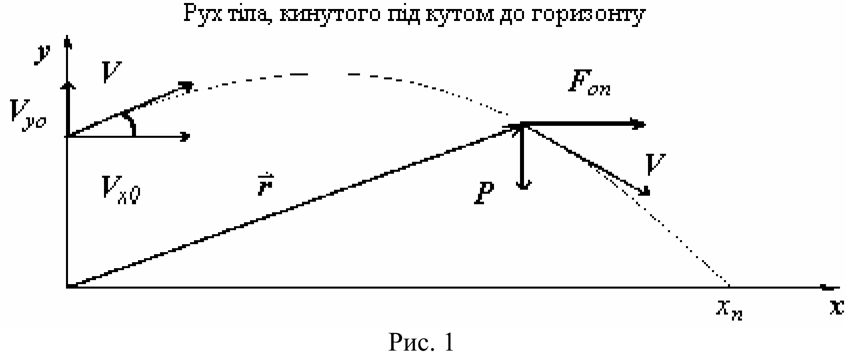


Рис. 1

Прослідкуємо рух тіла (матеріальної точки) маси m, кинутого під кутом α до горизонту (рис. 1).

Початкова швидкість – вектор $\boldsymbol{v}_0\{v_x;\ v_y\}$ має координати $v_x=v_0\cos\alpha$, $v_y=v_0\cos\alpha$. Побудуємо математичну модель, використовуючи другий закон Ньютона (добуток маси на прискорення = рівнодійній всіх сил). Якщо у векторній формі вона відповідатиме рівнянню (1), то в проекціях – ДР (2):

$$m\ddot{x}=-k\dot{x},\ m\ddot{y}=-k\dot{y}-mg\ , \tag{2}$$

де $\boldsymbol{r}=\{x,\ y\}$, $\boldsymbol{v}=\{x'_t;\ y'_t\}$. Рівняння (2) незалежні. Початковими для них приймемо умови $\boldsymbol{r}(0)=\{0;\ y_0\}$, $\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{v}_0$. Таким чином, для горизонтального переміщення маємо задачу Коші:

$$\ddot{x}+\gamma\cdot\dot{x}=0;\ \ x(0)=0;\ \ \dot{x}(0)=v_x=v_0\cos\alpha\ . \tag{2.1}$$

Для вертикального переміщення:

$$\ddot{y}+\gamma\cdot\dot{y}=-g,\ \ y(0)=y_0;\ \ \dot{y}_0=v_y=v_0\sin\alpha\ . \tag{2.2}$$

Однорідне диференціальне рівняння (2.1) розв’яжемо за допомогою характеристичного:

$$\lambda^2+\gamma\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=0,\ \lambda_2=-\gamma, \tag{3}$$

яке дає загальний розв’язок:

$$x(t)=C_1+C_2e^{-\gamma t}\ (\forall\ C_1,\ C_2-\text{const}). \tag{4.1}$$

Для неоднорідного рівняння (2.2) частковий розв’язок $y^*(t)$ шукатимемо у вигляді добутку сталої A на аргумент t, бо стала C_1 є одним з розв’язків однорідного рівняння: $y^*(t)=At$ (метод невизначених коефіцієнтів). Тоді $(y^*)'_t=A$, $(y^*)''_{tt}=0$, що дає з підстановки до рівняння (2.2) рівність $\gamma A=-g\Rightarrow A=-g/\gamma$. Тепер загальний розв’язок рівняння (2.2) набуває виду:

$$y(t)=C_3+C_4e^{-\gamma t}-gt/\gamma\ (\forall\ C_3,\ C_4-const). \tag{4.2}$$

З початкових умов знайдемо значення C_1–C_4. Для розв’язку (4.1) отримаємо рівняння, за допомогою яких відшукаємо C_1, C_2:

$$\begin{gathered}C_1+C_2=0,\ -C_2\gamma=v_0\cos\alpha\Rightarrow C_2=-v_0/\gamma\cos\alpha,\ C_1=v_0/\gamma\cos\alpha\Rightarrow\\ x(t,\gamma)=v_0/\gamma\cos\alpha-v_0/\gamma\cos\alpha e^{-\gamma t}\Rightarrow x(t,\gamma)=v_0/\gamma\cos\alpha(1-e^{-\gamma t}).\end{gathered} \tag{5.1}$$

Зрозуміло, що при $\gamma\to 0$, за правилом Лопіталя, маємо:

$$\lim_{\gamma\to 0}x(\gamma,t)=v_0\cos\alpha\cdot\lim_{\gamma\to 0}\frac{1-e^{-\gamma\cdot t}}{\gamma}=v_0\cos\alpha\lim_{\gamma\to 0}\frac{e^{-\gamma\cdot t}t}{1}=v_0\cos\alpha\cdot t.$$

Стає очевидним, що при відсутності тертя розв'язок описує рівномірний рух зі швидкістю $v_0\cos\alpha$. Для рівняння (4.2) маємо з початкових умов:

$$\begin{gathered}C_3+C_4=0\Rightarrow C_3=-C_4,\ \text{отже}\ -C_4\gamma-g/\alpha=v_0\sin\alpha\Rightarrow C_4=-(g/\gamma+v_0\sin\alpha)/\gamma\Rightarrow\\ y(t,\gamma)=(g/\gamma+v_0\sin\alpha-(g/\gamma+v_0\sin\alpha)\ e^{-\gamma t}-gt)/\gamma.\end{gathered} \tag{5.2}$$

За відсутності опору вертикальна складова швидкості також зводиться шляхом тих самих міркувань (правило Лопіталя) до загальновідомого вигляду: $y(t)=v_0\sin \alpha t - gt^2/2$.

Розв’язок (5.2) в свою чергу являє собою трансцендентне рівняння відносно t і може бути розв’язане чисельними методами. Першим кроком буде отримання розв’язку за допомогою графічного методу. При цьому вираз (5.2) заміняємо системою рівнянь $u=1-e^{-\gamma t}$; $u=ct$. Отримане значення $t_г$ уточнюємо методом Ньютона $t_n=t_г-(1-e^{-\gamma t}-c\ t_г)/(\gamma e^{-\gamma t}{}_г-C)$.

Джерелом цікавих задач з механіки може стати також ракетно-космічна тематика. Якщо, наприклад, виникає необхідність описати політ ракети, то систему рівнянь (2) слід сформулювати вже в іншому вигляді:

$$\frac{d^2}{dt^2}(mx)=-k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,\ \frac{d^2}{dt^2}(my)=-k\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-mg\ . \qquad (6)$$

Маса m у таких рівняннях є функцією часу, і залежить від швидкості окислення пального. Якщо цей процес нелінійний, то порядок рівняння може стати другим. До подібного результату можемо прийти також відмовившись нехтувати зміною потенціалу гравітаційного поля, тоді рівняння вже неможливо звести до першого порядку: $\ddot{\vec{r}}+\gamma\cdot\dot{\vec{r}}+\delta/r^{-3}\vec{r}=0$. Таке рівняння може описувати рух тіл на близькі до міжпланетних відстані (балістичні ракети).

Для хорошого засвоєння методу корисно також розглянути задачу про політ снаряду (або ракети), пущеного з літака. Тоді рівняння ускладняться початковим значенням швидкості, а задача Коші буде мати відповідні початкові умови: $\dot{\vec{r}}_0$ (швидкість руху літака в момент пострілу), $\vec{r}_0$ (висота польоту літака).

Таким чином, взявши задачу руху тіла, можемо досягти уміння використовувати в якості моделі цього процесу ДР різних видів.

Отже для ефективного вивчення методів математики (та інших фундаментальних дисциплін), зокрема, методу ДР, необхідно:

- орієнтуватись в першу чергу на методи, які будуть використовуватись в майбутньому;
- вивчати ці методи в термінах майбутніх реальних задач, а також з урахуванням того, наскільки повно й легко ці задачі розкривають метод;
- навчальний процес має якомога повніше відображати етапи реальної діяльності (зокрема дослідження).

Література:

1. Арнольд В.И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук: Первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. – М.: Наука, 1989. – 93 с.
2. Атанов Г.А., Пустынникова И.Н. Обучение и искусственный интеллект, или основы современной дидактики высшей школы. – Донецк: Изд-во ДОУ, 2002. – 503 с.
3. Волчанський В.В., Філер З.Ю. Оцінка ефективності методики викорис-

тання математики при вивченні фізики // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. Випуск 4: В 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2004. – Т. 2: Теорія та методика навчання фізики. – С. 100-106.

4. Волчанський В.В. Визначення ефективності здійснення методикою міжпредметних зв'язків фізики та математики за допомогою формалізації її структури // Научные труды академии: специальный выпуск VII / Под ред. Р.Н. Макарова. – Кировоград: Издательство ГЛАУ, 2004. – С. 13-22.
5. Кушнір В.А. Системний аналіз педагогічного процесу: методологічний аспект. – Кіровоград, 2001. – 347 с.
6. Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. – М.: Наука, 1965. – 384 с.
7. Методические указания по вопросам мировоззренческой и воспитательной направленности преподавания курса высшей математики в техническом вузе. / Составитель В.В. Пак. – Донецк: ДПИ, 1989. – 64 с.
8. Свідзинський А.В. Математичні методи теоретичної фізики. – К.: Вид. ім. Олени Теліги, 1998. – 442 с.
9. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
10. Слєпкань З.І. Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі: Курс для майбутніх студентів-магістрів. – К.: НПУ, 2000. – 210 с.
11. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Электричество и магнетизм. – М.: Мир, 1976. – 439 с.
12. Філер З.Ю. Як викладати математику майбутньому вчителю праці? // Молодь і ринок. – 2003. – № 3 (5). – С. 52-56.

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ОСОБИСТІСНО ОРІЄНТОВАНОЇ ПІДГОТОВКИ СТУДЕНТІВ ПЕДАГОГІЧНИХ ВНЗ

О.Р. Гарбич
м. Дрогобич, Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка
informatyka@drohobych.net

Інтелектуальний розвиток особистості – одне із найважливіших завдань сучасної загальноосвітньої та вищої освіти. Інтелектуальний розвиток, талант, творча обдарованість стають сьогодні запорукою інтенсивного розвитку країни і сприятливим фактором національного престижу. Виключно важливу роль у розв'язанні цієї задачі відіграє як шкільна, так і вузівська математика, одне з основних завдань якої полягає у розвитку здібностей учнів і студентів.

Це завдання вирішується шляхом підвищення ступеня залучення студентів у навчально-творчу діяльність з метою допомогти їм проявити свої здібності, розширити їхній кругозір, розвинути винахідливість, пробудити інтерес до різних областей науки, техніки, мистецтва.

Мета навчання полягає в тому, щоб не лише озброїти студентів математичними знаннями, а й навчити їх самостійно мислити. Активізація і розвиток мислення *є необхідною умовою* для успішного засвоєння математичної теорії, вироблення умінь та навичок у розв'язанні задач, іноді досить складних. Тенденція до розглядання більш складних задач викликана методичними принципами. Напружена робота над розв'язанням складної задачі приносить більшу користь, ніж розв'язання десятків однотипних задач за відомими алгоритмами. Навіть чисто технічні навички краще виробляти на розв'язанні змістовних задач.

Як зазначає З.І. Слєпкань, особистість є метою освіти, і математичної зокрема. Функції освіти полягають у тому, щоб засобами розвитку особистості забезпечити саморозвиток суспільства [2].

Побудова та впровадження на різних етапах освітнього процесу методичних систем, які б забезпечували умови для всебічного розвитку учнів виступає головним завданням реформування системи освіти в Україні, головним завданням теорії і практики навчання.

Від педагогів вищої школи сьогодні вимагається особливий підхід до організації навчання, який полягає у створенні умов для підготовки фахівців, що спроможності успішно виконувати професійні завдання на високому рівні майстерності, швидко, точно, оригінально вирішувати як ординарні, так і неординарні завдання. Викладач вищого навчального закладу щодня розв'язує велике коло питань, пов'язаних з підготовкою майбутніх спеціалістів, здійснює пошук шляхів поєднання у педагогічній діяльності вимог навчальних програм і творчого підходу. Наукові дослідження у царині організації мислетворчої діяльності здійснюються також і філософами у напрямку підвищення її продуктивності та спонукання до відкриття нових знань [1].

У процесі вивчення математичного аналізу у студентів вищих навчальних закладів остаточно формується логічне мислення та здійснюється розвиток інтелекту.

Відомо, що в умовах особистісно орієнтованої математичної освіти у підготовці вчителя зростає потреба актуалізації його особистісних властивостей і функцій як головного суб'єкта в організації навчально-виховного процесу. Тут необхідно розв'язувати двоєдине завдання: *здійснювати особистісно орієнтований підхід у навчанні студентів* (це завдання не лише педагогічних, але й загалом усіх вищих навчальних закладів) і підготовку майбутнього вчителя до *здіснення особистісного підходу* у навчанні математики [2].

Розглянемо ці аспекти на прикладі вивчення у курсі математичного аналізу розділу диференціального числення. У диференціальному численні розв'язується *основна задача*: за даною функцією знайти її похідну. Численні питання науки і техніки приводять до постановки *оберненої задачі*: за даною похідною або за заданим диференціалом знайти функцію.

Якщо $F(x)$ – одна з первісних для функції $f(x)$, то вираз $F(x)+C$, де C – довільна стала, називається невизначеним інтегралом. Вживається символіка

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

Відомо, що всі елементарні функції та функції, які виражаються через елементарні за допомогою скінченого числа арифметичних дій та суперпозицій, утворюють клас так званих диференційованих функцій, а їх похідні також відносяться до цього класу. Інша справа з інтегралами. Дуже часто виявляється, що інтеграл від функції, яка належить вище згаданому класу, сам цьому класу не належить. До таких інтегралів, які не виражаються в скінченому вигляді через елементарні функції, відносяться, наприклад,

$$\int e^{-x^2}dx, \int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx, \int \frac{\sin x}{x}dx, \int \frac{\cos x}{x}dx, \int \frac{dx}{\ln x} \quad .$$

Викладачеві варто зробити особливий наголос, що всі ці інтеграли реально існують, але вони *є зовсім інші функції*, які називаються неелементарними.

Відшукання первісної від заданої функції – *задача значно складніша*, ніж задача знаходження похідної. Відомі правила диференціювання дозволяють знаходити похідні будь-яких елементарних функцій. Для відшукання первісних від елементарних функцій таких простих і універсальних правил не існує. Відомі декілька прийомів, які в багатьох випадках дозволяють зводити задані інтеграли до табличних. *Такими прийомами є*: інтегрування методом розкладання, інтегрування методом заміни змінної та інтегрування частинами.

Перераховані методи інтегрування не вичерпують всі можливості знаходження первісних. Часто при знаходженні первісних користуються штучними прийомами, знаходження яких досягається практичною діяльністю. Приведемо декілька прикладів.

Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x}{4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x} dx$.

Представимо чисельник у вигляді лінійної комбінації знаменника і похідної знаменника, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів:

$$2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x = a(4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x) + b(4\operatorname{ch} x + 5\operatorname{sh} x).$$

Для знаходження a і b одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 4a + 5b = 2, \\ 5a + 4b = 3, \end{cases}$$

з якої знаходимо $a = \frac{7}{9},\ b = -\frac{2}{9}$.

Тоді

$$\int \frac{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x}{4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x} dx = \frac{7}{9}\int dx - \frac{2}{9}\int \frac{4\operatorname{ch} x + 5\operatorname{sh} x}{4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x} dx = \frac{7}{9}x - \frac{2}{9}\ln\left(4\operatorname{ch} x + 5\operatorname{sh} x\right) + C.$$

2) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$.

Виконаємо заміну $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = U$; розв'язуючи рівняння відносно x, одержимо

$$x = \left(\frac{U^2 - 1}{2U}\right)^2,\ dx = 2\frac{U^2 - 1}{2U} \cdot \frac{2U^2 + 2}{4U^2} du = \frac{\left(U^2 - 1\right)\left(U^2 + 1\right)}{2U^3} du.$$

Тоді $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{\left(U^2 + 1\right)\left(U + 1\right)\left(U - 1\right)}{U^3\left(1 + U\right)} du = \frac{1}{2}\int \frac{U^3 - U^2 + U - 1}{U^3} du =$

$$= \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}\ln U - \frac{1}{2U} + \frac{1}{4U^2} + C = \frac{U^2 - 1}{2U} - \frac{1}{2}\ln U + \frac{1}{4U^2} + C =$$

$$= \sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + x} + C, \left(x > 0\right).$$

3) $\int \frac{x\,dx}{\left(x-1\right)^2\sqrt{1 + 2x - x^2}}$

Скориставшись тотожністю $\frac{x}{\left(x-1\right)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{\left(x-1\right)^2}$, матимемо

$$J = \int \frac{x\,dx}{\left(x-1\right)^2\sqrt{1 + 2x - x^2}} = \int \frac{dx}{\left(x-1\right)\sqrt{2 - \left(x-1\right)^2}} + \int \frac{dx}{\left(x-1\right)^2\sqrt{2 - \left(x-1\right)^2}} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{\frac{2}{(1-x)^2} - 1}} + \int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{\frac{2}{(1-x)^2} - 1}}$$

Виконавши заміну $\frac{1}{x-1} = t$, $dx = \frac{1}{t^2} dt$, одержимо

$$J = -\int \frac{dt}{\sqrt{2t^2 - 1}} - \int \frac{tdt}{\sqrt{2t^2 - 1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}t + \sqrt{2t^2 - 1}\right| - \frac{1}{2}\sqrt{2t^2 - 1} + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + 2x - x^2}}{x-1}\right| - \frac{\sqrt{1 + 2x - x^2}}{2(x-1)} + C.$$

Для підсилення пізнавальної активності студентів варто запропонувати виведення рекурентної формули для обчислення інтеграла

$$J_n = \int \frac{x^{2n}}{x^2 + a^2} dx, x \in R; n \in N \cup \{0\}.$$

$$J_n = \int \frac{x^{2n-2}\left(x^2 + a^2\right) - a^2 x^{2n-2}}{x^2 + a^2} dx = \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - a^2 J_{n-1}.$$

$$J_0 = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C,\ C \in R.$$

Зауважимо, що до інтегралів, які не виражаються через елементарні функції, як показав французький математик Ліувіль, відносяться інтеграли, які Лежандр назвав еліптичними і звів їх до вигляду

$$F(k, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},\ E(k, \varphi) = \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\left(1 + h\sin^2 \varphi\right)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

де $0<k<1$, $h \neq 0$ [3].

З них особливо важливі і мають застосування перші два. Лежандром були складені таблиці значень цих функцій для різних k і φ. Еліптичні інтеграли F і E є прикладами таких функцій, які мають широке застосування, хоч і не можуть бути представлені через елементарні функції у скінченому вигляді.

Відсутність усталених традицій при розв'язанні нестандартних задач викликає завжди певні труднощі. Тому, чим більше студент буде знайомитися з такими нетрадиційними методами, тим більше буде розвивати кмітливість, розширюватися кругозір, потреба знаходження нових шляхів розв'язання задач, а, отже, і потреба знайомства і вивчення нової наукової та пізнавальної літератури.

Література:

1. Подмазин С.И. Личностно-ориентированное образование. Социально-философское исследование. – Запорожье: Просвіта, 2000. – 250 с.
2. Слєпкань З.І. Проблеми особистісно орієнтованої математичної освіти учнів середньої школи // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнар. збірник наук. робіт. – Донецьк: ТЕАН, 2004. – Вип. № 19.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматгиз, 1962. – Ч. 1. – 308 с. – Ч. 2. – 316 с.

ВИКОРИСТАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ ІСТОРІЇ МАТЕМАТИКИ В ПЕДАГОГІЧНИХ УНІВЕРСИТЕТАХ

Т.Л. Годованюк
м. Умань, Уманський державний педагогічний університет
імені Павла Тичини
usttu@um.ck.ua

Питання викладання історії математики у вищій школі обговорюється давно і вирішується по-різному. Кількість університетів, в яких читається курс історії математики, значно збільшується: розширюється географія і урізноманітнюється зміст. Про актуальність цієї проблеми у світі свідчить той факт, що питання викладання історії математики широко обговорюється на міжнародних конгресах з історії наук.

Велику увагу ефективній організації, виявленню і обґрунтуванню шляхів удосконалення викладання історії математики приділено в працях І.Г. Башмакова, В.Г. Бевз, Л.М. Вивальнюк, Б.В. Гнеденко, С.С. Демидова, М.Я. Ігнатенко, В.Ю. Назарова, Я.Г. Притули, Б.А. Розенфельда, А.О. Розуменко, А.П. Юшкевича.

Систематичний курс "Історія математики" вивчається в усіх класичних та педагогічних університетах. У переважній більшості навчальних закладів за навчальним планом цей предмет входить до варіативної частини циклу професійно-орієнтованої підготовки спеціалістів (дисциплін, які встановлює університет) і його вивчають на останніх курсах. Це пов'язано з тим, що вивчення історії математики можливе лише після опанування студентами основних математичних дисциплін: алгебри, геометрії, математичного аналізу, теорії чисел, теорії ймовірності тощо.

Специфіка і структура математичної освіти в педагогічних університетах відкривають широкі можливості для вивчення історії математики. Курс історії математики корисний кожному студентові, а для майбутнього педагога він просто необхідний як для вироблення цілісного світогляду, так і для роботи в середній школі. Знання шляхів і умов формування основних математичних наук не лише розширює світогляд майбутнього педагога, а й покращує його фахову майстерність. Історія математики покликана сприяти не тільки розкриттю методологічної сутності математики і правильному розумінню її ролі як соціального феномену, адже існує цілий ряд інших проблем, розв'язання яких спирається на історію науки [1].

Курс історії математики в педагогічних університетах різноманітний і великий, але, нажаль, на його вивчення відводиться мало годин за навчальним планом. Надзвичайна насиченість курсу історії математики фактичним матеріалом, різноманітність видів навчальної діяльності для засвоєння потребують використання індивідуальної форми навчання.

Індивідуальна форма навчання – найстаріша в історії педагогіки. В давнину вона полягала в індивідуальній реалізації певних дидактичних завдань учнів за безпосередньої чи опосередкованої допомоги вчителя. Таке навчання надавало можливість індивідуалізувати як зміст, так і темп навчання, що, своєю чергою, сприяло постійному й водночас докладному контролю за ходом і результатами пізнавальної діяльності [2, 3]. Незважаючи на еволюційний шлях розвитку форм організації навчання і певні недоліки, індивідуальна форма навчання і на сьогоднішній день залишається однією із найефективніших форм, яка дає високі результати навчання. Теорією і практикою показано, що знання, засвоєнні в процесі самостійної активної пізнавальної діяльності самих студентів, мають значну перевагу порівняно із знаннями із будь-якого джерела у готовому вигляді. Вони, розвиваючись, ширше і швидше переходять в переконання студентів і стають знаряддям їх мислення і практичної діяльності.

Індивідуальна форма навчання – одна із загальних форм навчання. Загальні форми навчання характеризують основні способи організації навчальної взаємодії учасників педагогічного процесу. Індивідуальна форма організації – самостійна робота (підготовка до семінарських занять, написання рефератів та інше), дипломні та курсові роботи, які суттєво відрізняються за ступенем самостійності пізнавальної діяльності студентів і ступенем керівництва навчальною діяльністю з боку викладача.

Використання індивідуальної форми навчання історії математики дає змогу студентам не просто запам'ятовувати те, про що говорить викладач під час лекцій, не просто завчати те, що пояснює викладач, а самостійно здобувати знання, важливо на скільки самостійний студент у засвоєнні знань. В даному випадку використання індивідуальної форми навчання полягає в тому, що весь процес навчання визначається індивідуальною роботою викладача зі студентом, або студент самостійно виконує навчальне завдання на основі рекомендацій і інструкцій отриманих від викладача.

Ефективна організація індивідуальної форми навчання історії математики стимулює науково-дослідну роботу студентів, підвищує результативність навчання, сприяє інтелектуальному розвитку та творчій активності студентів.

Література:

1. Педагогический процесс и история науки и техники // Вопросы истории естествознания и техники. – 1985. – №2.
2. Мойсеюк Н.Є. Педагогіка. – К., 2001.
3. Ягупов В.В. Педагогіка. – К.: Либідь, 2002.

ЗАСТОСУВАННЯ СУЧАСНИХ КОМП'ЮТЕРНИХ СЕРЕДОВИЩ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

М.М. Горонескуль
м. Харків, Харківській університет Повітряних Сил
mgoroneskul@rambler.ru

Постанова проблема та її аналіз. Пріоритетним напрямком реформування освіти є задоволення вимог сучасного суспільства до підготовки фахівця, спроможного ефективно розв'язувати професійно значущі задачі на основі застосування фундаментальних знань і новітніх технологій.

Сьогодні комп'ютерне моделювання розглядається як складова математичної освіти, яку необхідно засвоїти студентам у результаті навчання; як спосіб пізнання, який вони повинні опанувати і застосовувати на практиці; як засіб навчання, що дозволяє реалізувати цілісний підхід до формування компетентностей майбутнього спеціаліста [7].

Значущість комп'ютерного моделювання зумовлюється декількома факторами. Перш за все, воно передбачає активне використання знань, набутих студентами у процесі вивчення різних предметних дисциплін як з циклу фахово-орієнтованої, так і загальної природничонаукової підготовки. Вміння комплексно використовувати знання є важливим і для навчальної, і для подальшої професійної діяльності майбутніх спеціалістів.

По-друге, комп'ютерне моделювання сприяє формуванню у студентів системи узагальнених прийомів дослідницької роботи: конструювання моделі, її випробування, вироблення гіпотези, її експериментальна перевірка, аналіз границь адекватності моделі, виведення знань про властивості об'єкта з дослідження його моделі і т.п.

Нарешті, комп'ютерне моделювання дозволяє збагатити навчальний процес змістовними задачами, наближеними до реальних практичних задач, спрямувати самостійну роботу студентів на розв'язання таких задач, надати їй характеру творчого пошуку.

Відомо, що, працюючи з комп'ютерними моделями, студенти можуть встановлювати взаємозв'язки між явищами, які недоступні для безпосереднього спостереження; відтворювати об'єкти, які за своєю складністю не піддаються натурному дослідженню. Проте комп'ютерне моделювання є надзвичайно потужним засобом вивчення абстрактних об'єктів, які можна візуалізувати і досліджувати за його допомогою із залученням чуттєвого сприйняття, а не тільки на основі логічних виведень і математичних перетворень.

Отже, використання комп'ютерного моделювання у навчальному процесі дає можливість переглянути традиційні підходи до навчання дисциплін, посилити експериментальну та дослідницьку складову діяльності студентів, наблизити процес навчання до реального процесу пізнання.

Підставою для активного впровадження комп'ютерного моделювання у навчальний процес є наявні досягнення в галузі теорії і практики інформатизації освіти.

Психолого-педагогічні аспекти інформатизації навчання досліджено у роботах В.П. Безпалька, Л.І. Білоусової, Ю.В. Горошка, М.І. Жалдака, Ю.О. Жука, С.І. Кузнєцова, О.А. Кузнєцова, В.Я. Ляудіс, Ю.І. Машбіця, С.А. Ракова, О.В. Співаковського, Н.Ф. Тализіної та ін.

Методологія моделювання як складової навчального процесу висвітлена у працях С.І. Архангельського, А.Ф. Верланя, О.Б. Горстко, А.М. Лебедєва, А.Д. Мишкіса, К.Є. Морозова, І.Б. Новіка, М.І. Пака, Ю.П. Попова, О.А. Самарського, А.М. Тихонова, Л.М. Фридмана, Ю.О. Шафрина та інших, де розкриваються загальні підходи до визначення сутності поняття «модель» та «моделювання», наводиться аналіз функцій моделювання в навчанні, визначаються шляхи його впровадження у практику сучасної освіти.

Мета даної роботи полягає у висвітленні технології застосування сучасних комп'ютерних середовищ підтримки математичної діяльності для впровадження комп'ютерного моделювання у процес навчання математики у вищій школі.

Основні матеріали дослідження та обґрунтування отриманих наукових результатів. Вища технічна школа має значний досвід щодо постановки математичної освіти. Разом із цим, в галузі вищої математичної освіти є багато нерозв'язаних проблем. Досить часто знання з математики майбутніх інженерів носять формальний характер, який не відповідає потребам фахових дисциплін і загальному рівню підготовки сучасного фахівця. Однією з головних причин цих недоліків є недосконалість змісту та методичної системи навчання вищої математики. Так, наприклад, зміст спеціальних дисциплін разом з їхнім математичним апаратом за останні роки суттєво змінився, а зміст курсу вищої математики залишається майже незмінним [8]. Необхідно додати також, що ця проблема загострюється у зв'язку з впровадженням на спеціальних кафедрах інформаційних технологій навчання, використанням потужного комп'ютерного супроводу розв'язування математичних задач.

Недостатній рівень математичної підготовки інженерів вбачається у невідповідності методики навчання математики сучасним вимогам до фахової підготовки спеціалістів.

Один із напрямів розв'язання проблеми полягає у впровадженні сучасних комп'ютерних технологій у процес навчання математики. Способом такого впровадження є заміна частки практичних робіт з математики лабораторними роботами. Організаційно лабораторні роботи з комп'ютерного моделювання можуть бути реалізованими двома способами: їх можна сконцентрувати в межах відокремленого практикуму з моделювання і віднести його на закінчення семестру, або проводити їх систематично, чергуючи із звичайними практичними роботами на протязі семестру. Вибір того чи іншого варіанту залежить від мети постановки лабораторних робіт, їх змістового навантаження тощо.

Важливим акцентом у постановці лабораторних робіт з комп’ютерного моделювання є реалізація міжпредметних зв’язків з іншими фундаментальними та фахово-орієнтованими дисциплінами. Нами при постановці лабораторних робіт переслідувалися такі цілі:

– розкриття теоретичного і практичного значення матеріалу, який вивчається, ознайомлення з перспективою застосування здобутих знань;
– навчання студентів самостійному застосовуванню знань з математики для розв’язання задач з інших предметних дисциплін;
– формування у студентів системи знань, перетворення її у засіб опанування новими знаннями і розв’язання практичних задач, формування стилю наукового мислення;
– створення мотивації студентів до оволодіння математикою;
– активізація навчання та інші.

Формування позитивної мотивації є важливим моментом, тому що більшість студентів вважають нецікавими навчальні дисципліни, для яких вони не усвідомлюють їх місця у системі спеціальних знань, не бачать практичної значущості [9]. На молодших курсах студенти ще не в змозі уявити кінцеву мету навчання кожної дисципліни, її роль у формуванні знань за спеціальністю; не усвідомлюють взаємозв’язки фундаментальних і технічних дисциплін. Способом подолання зазначених негативних факторів може бути впровадження комп’ютерного моделювання у практику навчання вищої математики.

Виходячи з поставлених цілей, ми організували цикл лабораторних робіт з комп’ютерного моделювання як комп’ютерний практикум з вищої математики.

Практикум з комп’ютерного моделювання дає можливість розкрити сутність методів математичного моделювання та обчислювального експерименту на великій кількості виразних змістовних задач.

Тривалість лабораторного практикуму – 38 академічних годин, з яких 22 години – це роботи на поглиблення та систематизування знань з математики, 16 годин – лабораторні роботи, в яких здійснюється інтеграція міжпредметних дисциплін.

№	Найменування теми	Години аудиторних занять
1	Розв’язання задач лінійної алгебри	2
2	Дослідження функції на неперервність в точці	2
3	Дослідження функції однієї змінної	2
4	Розв’язання прикладних задач диференціального числення	2
5	Дослідження визначеного інтегралу як границю інтегральних	2

№	Найменування теми	Години аудитор-них занять
	сум	
6	Дослідження довжини дуги	2
7	Розв'язання прикладних задач інтегрального числення	2
8	Дослідження числових рядів на збіжність	2
9	Дослідження функції на умовний екстремум	2
10	Розв'язання прикладних задач векторного аналізу	2
11	Опрацювання експериментальних даних	2
12	Моделювання задач аеродинаміки	4
13	Моделювання перехідних процесів у коливальному контурі	4
14	Моделювання коливань одновимірних та двовимірних об'єктів	4
15	Моделювання електронних схем	2
16	Моделювання задач електродинаміки	2

Проведення математичних розрахунків та викладок вимагає великої кропіткої, часто рутинної й нецікавої праці. Перекласти таку роботу на комп'ютер дозволяють професійні середовища підтримки математичної діяльності. Серед найбільш відомих з них слід відмітити: Axiom, Derive, Reduce, Macsyma, Maple, Magma, MathCad, Mathematica, MathLab, MuPAD, які популярні як у викладанні математично орієнтованих дисциплін, так і в наукових дослідженнях та промисловості. Ці середовища є потужними інструментаріями для вчених, інженерів і викладачів. Дослідження на основі комп'ютерних середовищ поєднують алгебраїчні методи з сучасними обчислювальними методами. У цьому розумінні комп'ютерні середовища – міждисциплінарна галузь між математикою та інформатикою, у якій дослідження фокусуються як на розробці алгоритмів для символьних (алгебраїчних) обчислень і опрацювання на комп'ютері, так і на створенні мов програмування і програмних середовищ для реалізації алгоритмів розв'язання задач різного призначення. У ряді публікацій [1–6] розглянуті переваги та недоліки, ефективні прийоми та методи роботи з такими комп'ютерними середовищами, як Maple, MathCad, MathLab та Mathematica.

Наш досвід апробації та використання середовищ Maple, MathCad та Mathematica у різних математичних застосуваннях навчального характеру дозволяє нам віднести середовища Maple та Mathematica до лідерів серед відомих сучасних професійних предметно орієнтованих середовищ. Разом із цим, ми віддали перевагу саме середовищу Maple, враховуючи низку його позитивних рис, зокрема: розвинені графічні засоби, достатньо ефективні засоби розв'язання систем диференціальних рівнянь, можливість створення графічного інтерфейсу користувача, наявність потужної бібліотеки математичних функцій, великій набір пакетних модулів для різноманітних застосувань, зручність будованої мови програмування та інші. Середовище Maple втілює технології символьних обчислень, числових обчислень із заданою точністю, наявність інноваційних Web-компонентів, технологію інтерфейсу користувача (Maplets), яка розширюється. До останніх версій Maple були додані можливості перекладу обчислювальних результатів у коди VisualBasic (до вже існуючих для C, Fortran та Java).

Все це дозволяє віднести Maple не просто до перспективних професійних середовищ підтримки математичної діяльності, а до категорії інтелектуальних мультимедіа систем з практично необмеженими можливостями для розвитку.

Maple є професійним інструментом досліджень і розв’язання інженерних задач, який не тільки здатний замінити традиційні довідники, калькуляторів, крупноформатні таблиці тощо, але й дозволяє легко розв’язати широкий діапазон задач, подати результати обчислень (як чисельні, так і графічні) у вигляді якісно оформленого професійного звіту.

Середовище добре пристосоване для формулювання, розв’язання та дослідження різних математичних моделей. З позицій навчального застосування також важливо, що опанування Maple не є проблемою для непідготовленого користувача, якщо створено умови для його поетапного оволодіння інструментарієм середовища.

Впровадження практикуму дозволяє сконцентрувати діяльність студентів не на рутинних обчисленнях та перетвореннях, а на методологічних аспектах курсу вищої математики, залучити студентів до проведення елементів навчаючих досліджень. Це сприяє формуванню професійних умінь і навичок майбутніх фахівців, розвитку їх технологічного мислення і творчості, що важливо для інженера.

Разом із тим, досягаються й конкретні цілі навчання математики. Введення системи лабораторних робіт в навчальну діяльність сприяє наочній інтерпретації абстрактних математичних понять, полегшенню їх сприйняття та усвідомлення, поглибленню математичних уявлень студентів, стимулюванню їх логічного мислення. Як наслідок, підвищується якість оволодіння навчальним матеріалом, на більш високому рівні відбувається формування інформаційної культури студентів.

Реалізація лабораторних робіт у предметно-орієнтованому середовищі Maple дозволила модернізувати зміст навчання, надати змістовної основи для розвитку навчально-пізнавальних інтересів студентів.

Впровадження практикуму неможливе без внесення якісних змін у методику навчання математики, введення в навчальний процес нових типів задач, розробки циклів задач дослідницького характеру. Ці зміни виправдалися тим, що, як свідчить наш досвід, збільшилася кількість методів, які використовує студент при розв’язанні і дослідженні задачі, розширився обсяг фактично засвоєних знань і вмінь, підвищився рівень оволодіння навчальним матеріалом.

Практикум, проведений у курсі вищої математики; спричинив позитивний вплив на організацію самостійної роботи над курсовими проектами та індивідуальними дослідницькими завданнями з професійно орієнтованих дисциплін. Цей вплив позначився на впевненому застосуванні сучасних технологій до розв'язання теоретичних питань, пов'язаних із застосуванням математичного апарату, а також на якості кінцевого звітного документа про виконану роботу.

Висновки. Систематичне проведення навчально-дослідницьких робіт на базі пакета Maple є перспективним засобом підвищення якості навчального процесу з математики.

Впровадження лабораторних робіт у практику навчання сприяє не тільки більш глибокому сприйняттю математичних теорій та фактів, отриманню ґрунтовних знань з математики, але й позитивно відбивається на фаховій підготовці випускників вузу в цілому, бо надає їм ефективний інструментарій для розв'язання різноманітних задач, які зустрічаються при вивченні фахових дисциплін і в професійній діяльності.

Література:

1. Аладьев В.З., Шишаков М.Л. Введение в среду пакета Mathematica 2.2. – М.: Информационно-издательский дом Филинъ, 1997. – 362 с.
2. Аладьев В.З., Богдявичюс М.А. Специальные вопросы работы в среде математического пакета Maple. – Вильнюс: Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, 2001. – 215 с.
3. Aladjev V.Z., Vaganov V.A. Computer Algebra System Maple: A New Software Library. – Tallinn: International Academy of Noosphere, the Baltic Branch, 2002. – 420 p.
4. Aladjev V.Z., Vaganov V.A. Systems of Computer Algebra: A New Software Toolbox for Maple. – Tallinn: International Academy of Noosphere, the Baltic Branch, 2003. – 270 p.
5. Aladjev V.Z., Bogdevicius M.A., Vaganov V.A. Systems of Computer Algebra: A New Software Toolbox for Maple. 2nd edition. – Tallinn-Vilnius: International Academy of Noosphere, 2004. – 462 p.
6. Говорухин В.Н., Цибулин Б.Г. Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс. – СПб.: Питер, 2001. – 624 с.
7. Клочко В.І. Методика використання інформаційних технологій навчання під час вивчення вищої математики у технічному вузі. // Вісник ВПІ. – 1996. – №3. – С. 66-71.
8. Любчик В.А., Соловей А.С., Оглоблина Е.И. Некоторые проблемы компьютерного моделирования в автоматизированных учебных курсах и методы их решения. // Вісник СумДУ. – 1997. – №2(8). – С. 56-60.
9. Стешенко В.В. Теоретические основы реализации межпредметных связей в учебном процессе. – Славянск: СГПИ, 1995. – 119 с.

ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ІСТОРИЗМУ У ПОЗАКЛАСНІЙ РОБОТІ З МАТЕМАТИКИ

О.М. Гулевата
м. Умань, Уманський державний педагогічний університет
ім. Павла Тичини

Система освіти в будь-якій країні покликана сприяти реалізації основних завдань соціального і культурного розвитку суспільства, тому що саме школа і вуз готують людину до активної діяльності в різних сферах економічного, культурного та політичного життя суспільства.

Роль школи як базової ланки освіти надзвичайно важлива. Здатність освітнього закладу досить гнучко реагувати на запити суспільства, зберігаючи при цьому накопичений позитивний досвід, має дуже велике значення.

Дорога до життя підростаючого покоління прокладається в рамках загальноосвітньої школи різними виховними заходами та вивченням шкільних предметів, серед яких почесне місце займає курс математики.

Математика є унікальним засобом формування не тільки освітнього, а й розвиваючого та інтелектуального потенціалу особистості.

Проблему гармонізації і гуманізації процесу навчання математики, зацікавленості учнів вивченням математики, формування творчої особистості у процесі навчання математики вивчали такі дослідники, як З.І. Слєпкань, Ю.П. Мінаєв, В.Й. Якиляшек, О.В. Панішева, Л.В. Ліпчевський, В.Г. Бевз та інші.

Школа – це життєвий простір дитини; тут вона не просто готується до життя, а живе. Тому виховна робота планується так, щоб сприяти становленню як творця і проектувальника життя, гармонізації та гуманізації стосунків між учнями і педагогами, школою і родиною, керуючись ідеями самоцінності дитинства, демократичного діалогу між поколіннями.

Важливу роль у цьому відіграє позакласна робота – різноманітна діяльність учителів, спрямована на виховання учнів і здійснювана в позаурочний час. Її мета полягає у задоволені інтересів і запитів дітей, розвитку їх творчого потенціалу, нахилів і здібностей у різних сферах діяльності та спілкування.

До форм позакласної роботи можна віднести: 1) позакласну роботу в школі; 2) позашкільну роботу в дитячих будинках творчості, в літніх таборах тощо; 3) роботу з різних рівнів заочних математичних шкіл тощо.

В середині кожної з цих форм існують різноманітні підформи: математичний гурток, тиждень або місячник математики, шкільні олімпіади тощо.

Важливу роль у якості засвоєння навчального предмету відіграє зацікавленість учнів даним предметом.

“Зацікавити розум дитини – ось що є одним із основних положень нашої доктрини, і ми нічим не нехтуємо, щоб прищепити учневі смак, ми б сказали навіть пристрасть до навчання”, – писав видатний математик М.В. Остроградський.

Одним із засобів зацікавлення учнів математикою є добре продумана позакласна робота, яка виступає є однією з форм організації пізнавальної діяльності учнів різного віку.

Історизм у позакласній роботі з математики – один із важливих засобів розвитку у школярів зацікавленості до науки. Використання елементів історизму у позакласній роботі з математики значно підвищує загальнокультурний рівень учнів, спонукає їх до пізнання не тільки того, що стало об’єктом історичних трактатів, а й того, що характеризує сучасний стан науки.

Розповіді про досягнення в науці останніх століть, ознайомлення з проблемами сучасної математики, вкладом вітчизняних математиків у розвиток “цариці наук” здатні оживити курс математики, змінити ставлення учнів до предмета, показати, що математика не є “сухою наукою”, адже значна частина випускників школи має такі погляди. Педагог повинен показати учням, що математика не менш жива, ніж фізика та хімія, що вона постійно розвивається. Екскурси в історію науки сприяють вихованню національної самосвідомості, поваги до національної культури, патріотизму; формуванню позитивних рис особистості. Можна стверджувати, що історизм є одним із засобів формування наукового світогляду; морального і громадсько-політичного виховання учнів.

Історія математики є не тільки складовою частиною змісту шкільного курсу математики, що допомагає розв’язати багато задач навчання і виховання, але і важливим джерелом педагогічних ідей, які створюють можливість удосконалювати методику викладання і збагачувати її новими підходами та розв’язками.

Враховуючи напрямки сучасної загальноосвітньої школи, важливість впливів матеріалів історії математики на оновлення змісту математичної освіти, пропонуються такі принципи добору історичних матеріалів: 1) відповідність сучасним дидактичним принципам; 2) відповідність програмному матеріалу; 3) гуманізація процесу навчання математики; 4) виховання позитивних якостей особистості; 5) формування інтересу до математики.

Література:

1. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. – К.: Зодіак-Еко, 2000. – С. 135-139.

2. Крамаренко А.В. Проблеми творчого розвитку учня // Математика. – 2004. – №27-28. – С. 1-5.

3. Мінаєв Ю.П. Гуманізація освіти і розвиток критичного мислення // Математика. – 2002. – 40. – С. 1-3.

4. Якіляшек В.Й. Реалізація принципів гуманітаризації в освітньому стандарті з математики // Математика. – 1999. – №3. – С. 2.

ФОРМУВАННЯ УЯВЛЕНЬ СТУДЕНТІВ ПРО ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

Л.П. Гусак
м. Вінниця, Вінницький торговельно-економічний інститут
Київського національного торговельно-економічного університету
e-mail: KFZN@ukr.net

Розвиток сучасного суспільства досяг того рівня, що діяльність економіста неможлива без використання математичних методів, використання математичних моделей економічних явищ і процесів. Це дозволяє більш повно зрозуміти суть економічної динаміки, аналізувати та прогнозувати її.

"… робота з економіко-математичними моделями дуже дисциплінує дослідника, вимагає від нього чіткої постановки економічних завдань, уміння виділити істотні ознаки того чи іншого економічного процесу й записати їх у вигляді рівнянь і нерівностей, упорядковано зібрати й оцінити необхідну інформацію і т.д. І це органічне злиття змістовного економічного аналізу з логічним математичним мисленням дасть можливість, очевидно, розв'язати найважчі проблеми економічної науки". (А.Г. Аганбегян)

В сучасних економічних вищих навчальних закладах вивчення математичних дисциплін має, очевидно, прикладну спрямованість. Саме при вивченні таких курсів, як "Вища математика", "Теорія ймовірностей та математична статистика", "Математичне програмування" формується математична культура майбутнього економіста. Слід зазначити, що ці дисципліни вивчаються на першому та другому курсах навчання для того, щоб підготувати студента до вивчення професійно-орієнтованих дисциплін, озброїти його засобами розв'язування задач, пов'язаних з його майбутньою професійною діяльністю.

Зокрема, одним із напрямків досягнення прикладної спрямованості математики є розв'язування прикладних задач з економічним змістом. Адже саме вони є потужним засобом не лише мотивації навчання, а й розвитку раціонального, варіативного мислення студентів, їх економічного виховання.

Основні тенденції змісту та технологій вивчення вищої математики на економічних спеціальностях ВНЗ розглянемо, аналізуючи навчальні програми з математики у торговельно-економічному інституті. Курс "Вища математика" вивчається у першому, другому та третьому триместрах, навчальний матеріал скомпонований у вісім розділів, в яких можна виділити 27 тем. Розглянемо характеристику кожного розділу з точки зору розкриття студентам застосування отриманих знань з математики при розв'язуванні задач з економіки.

У розділі "Елементи лінійної алгебри" вивчаються системи лінійних рівнянь, метод Гауса, визначники та їх властивості, правило Крамера для розв'язування системи лінійних рівнянь, матриці, дії з матрицями, матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь та застосування методів лінійної алгебри у задачах економіки.

Ми аналізували різні навчальні посібники з точки зору висвітлення в них питання застосування отриманих знань цього розділу до конкретних економічних задач, завдань. Слід зазначити, що в багатьох з них до розділу "Елементи лінійної алгебри" є достатня кількість задач економічного змісту та, зокрема, прикладів розв'язування цих задач. У навчальному посібнику "Математика для економістів" Барковського В.В., Барковської Н.В. розглядаються матриця норм витрат, матриця продажу-пропозицій, матриця повних та неповних витрат, матриця прямих і непрямих витрат; у посібнику "Вища математика" Валєєва К.Г., Джалладової І.А. – матриця продажу товарів, матриця прямих витрат, матриця повних витрат; у збірнику задач з вищої математики (частина 1) Мартиненка В.С. подано та розв'язано задачі, які розкривають такі економічні поняття: матриця витрат сировини, матриця цін, матриця побічних витрат, продуктивна матриця, матриця валового випуску продукції; у практикумі "Вища математика" Кривуци В.Г. та ін. – матриця нормативних витрат, матриця виробничих витрат, матриця валового випуску продукції; у практикумі з математики для економістів Дутки Г.Я. – система норм матеріальних затрат, матриця вартості продукції, матриця кінцевої продукції, матриця прямих витрат. Це свідчить про те, що математичний апарат лінійної алгебри широко використовується при моделюванні економічних явищ.

У розділі "Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії" вивчаються вектори, лінійні операції над ними, декартові координати вектора та точки, скалярний, векторний та мішаний добутки векторів, пряма на площині, криві другого порядку, площина та пряма у просторі та застосування методів векторної алгебри та аналітичної геометрії у задачах економіки.

Проаналізувавши навчальні посібники, слід зазначити, що економічний аспект прикладної спрямованості математики на прикладі застосування методів векторної алгебри та аналітичної геометрії, певним чином, розкритий. Так у збірнику задач з вищої математики (частина 1) Мартиненка В.С. наведено приклади знаходження таких економічних показників, як витрати сировини, витрати робочого часу, вартість виробленої продукції, загальний (валовий) дохід, собівартість, транспортні витрати на перевезення; у навчальному посібнику "Вища математика" Валєєва К.Г., Джалладової І.А. – витрати на виготовлення продукції, повні витрати з перевезення; у навчальному посібнику Ярмоленка В.О. "Вища математика для економістів" наведено приклад знаходження розподілу ринку збуту від витрат споживачів. У практикумі з математики для економістів Дутки Г.Я. розкриті поняття залежності вартості перевезення від відстані, розподілу ринку збуту від витрат споживачів, транспортні витрати на перевезення. У посібнику “Математика для економістів” Барковського В.В., Барковської Н.В. розглядається рівновага доходу та збитків, дослідження впливу розширення транспортного парку на зростання врожаю зернових, транспортні витрати на перевезення.

У розділі “Вступ до математичного аналізу” вивчається функція однієї змінної та застосування її у задачах економіки, теорія границь, неперервність функції.

Нами проаналізовані посібники до розділу “Вступ до математичного аналізу” з точки зору висвітлення в них питання застосування отриманих знань до розв’язання конкретних економічних задач. Так у збірнику задач з вищої математики (частина 1) Мартиненка В.С., у навчальних посібниках “Математика для економістів” Барковського В.В., Барковської Н.В. та “Математичний аналіз для економістів” Міхайленка В.М., Федоренко Н.Д., у практикумі з математики для економістів Дутки Г.Я. розглянуті задачі, які розкривають такі економічні поняття, як функції витрат, доходу, прибутку, попиту, корисності, випуску, пропозиції, виробничої функції. Це свідчить про те, що поняття функції або функціональної залежності – одне із основних математичних понять, за допомогою яких моделюють взаємозв’язки між різними величинами, кількісними і якісними відношеннями між різними економічними характеристиками і показниками.

У розділі “Диференціальне числення функції однієї змінної” вивчаються похідна та диференціал функції однієї змінної, похідні і диференціали вищих порядків, основні теореми диференціального числення, дослідження функцій за допомогою похідних та застосування похідних у задачах економіки.

Переглянуті та проаналізовані нами навчальні посібники дають можливість зробити висновок, що диференціальне числення – це математичний апарат, який широко використовується для економічного аналізу. У збірнику задач з вищої математики (частина 1) Мартиненка В.С. подано та розв’язано задачі, які розкривають такі економічні поняття, як ліквідність ціни продукції, максимізація прибутку, еластичність попиту і пропозиції, граничні витрати, оптимізація оподаткування підприємств; у навчальному посібнику “Вища математика” Валєєва К.Г., Джалладової І.А. – граничний виторг, мінімальність транспортних витрат, граничні витрати виробництва, мультиплікатор; у практикумі “Вища математика” Кривуци В.Г. та ін. – маргінальні (граничні) вартість, доход, прибуток, еластичність попиту та у навчальних посібниках “Математика для економістів” Барковського В.В., Барковської Н.В., “Математичний аналіз для економістів” Міхайленка В.М., Федоренко Н.Д., “Вища математика для економістів” Ярмоленка В.О. наведено приклади знаходження еластичності попиту та пропозицій.

У розділі “Функції багатьох змінних” вивчаються похідні та диференціали функції декількох змінних, екстремум функції двох незалежних змінних та застосування функцій декількох змінних у задачах економіки.

Навчальні посібники, які ми аналізували з точки зору висвітлення в них означеної проблеми до розділу "Функції багатьох змінних", містять достатню кількість задач економічного змісту. У навчальному посібнику "Математика для економістів" Барковського В.В., Барковської Н.В. (частина 1) досліджується попит на конкурентні товари, маргінальна продуктивність виробництва; у збірнику задач з вищої математики (частина 2) Мартиненка В.С. та ін. є задачі на знаходження граничної корисності, граничної норми, оптимізації прибутку від виробництва товарів, цінової дискримінації, еластичності виробничої функції, оптимального розподілу ресурсів, оптимізації вибору споживача; у посібнику "Вища математика" Валєєва К.Г., Джалладової І.А. розкривається поняття взаємозмінюваності продуктів виробництва, гранична продуктивність виробництва, максимізації прибутку від випуску товарів. Вищесказане свідчить про те, що в економіці часто доводиться розв'язувати задачі на екстремум функцій багатьох змінних, оскільки економічні показники, звичайно, залежать від багатьох факторів і саме такі задачі добре досліджуються теорією функцій багатьох змінних.

У розділі "Інтегральне числення функції однієї змінної" вивчаються невизначений, визначений інтеграли та застосування їх у задачах економіки.

Переглянуті джерела дають можливість зробити висновок, що інтегральне числення є одним із основних методів математичного аналізу і широко використовується в різних галузях науки, техніки та в економічних дослідженнях. Задачі економічного змісту, при розв'язанні яких використовуються невизначений і визначений інтеграли подано у таких навчальних посібниках: "Математика для економістів" Барковського В.В., Барковської Н.В. (частина 1), де досліджуються такі економічні показники, як коефіцієнт нерівномірного розподілу прибуткового податку, максимізація прибутку за часом, загальні доход, витрати та прибуток, стратегія розвитку; "Збірник задач з вищої математики" (частина 2) Мартиненка В.С. та ін., де досліджується обсяг виробленої продукції, загальних та середніх витрат за відомими маргінальними витратами, приріст капіталу (основних фондів), надлишок (додатковий виграш) споживача; "Математичний аналіз для економістів" Міхайленка В.М., Федоренко Н.Д., де подано приклади знаходження дисконтного прибутку та середніх витрат; "Вища математика" Валєєва К.Г., Джалладової І.А., де є задачі на знаходження капіталу за відомими чистими інвестиціями, додаткової вартості, загальних та середніх витрат споживачів на товар; практикум "Вища математика" Кривуци В.Г. та ін., де обчислюється оптимальність часу прибутковості, зміни витрат, доходу та прибутку при зростанні реалізації виробленої продукції, коефіцієнт готовності виробу.

У розділі "Диференціальні рівняння" вивчаються диференціальні рівняння першого і другого порядку та застосування їх у задачах економіки.

У всіх навчальних посібниках, які ми аналізували, підтверджується те, що диференціальні рівняння використовують у економічних моделях, що відображають зміну і взаємозв'язок економічних показників у часі. Приклади дослідження математичних моделей деяких ситуацій та процесів викладено у навчальному посібнику "Математика для економістів" Барковського В.В., Барковської Н.В. (частина 1) та у практикумі "Вища математика" Кривуци В.Г. та ін. досліджується закон природного зростання, закон радіоактивного розпаду, зростання інвестицій; у навчальному посібнику "Математичний аналіз для економістів" Міхайленка В.М., Федоренко Н.Д. є задача на знаходження залежності ціни товару від часу, закон зміни в залежності від часу кількості покупців, диференціальні рівняння розширеного відтворення; у збірнику задач з вищої математики (частина 2) Мартиненка В.С. та ін. та у навчальному посібнику "Вища математика" Валєєва К.Г., Джалладової І.А. досліджуються моделі встановлення рівноважної ціни, зростання для постійного темпу росту, росту в умовах конкуренції, ринку з прогнозованими цінами, динамічна модель Кейнса, неокласична модель росту; у навчальному посібнику Ярмоленка В.О. "Вища математика для економістів" є приклади знаходження функції прибутку, вартості через певну кількість років, функцію ціни за умовою рівноваги попиту і пропозицій.

У розділі "Ряди" вивчаються числові та степеневі ряди.

Слід звернути увагу на те, що це єдиний розділ з курсу "Вища математика", який не містить в навчальних програмах окремої теми, присвяченої застосуванню рядів у задачах економіки.

Ми проаналізували вищевказані навчальні посібники з точки зору висвітлення в них застосування отриманих знань до розв'язування конкретних економічних задач. Виявилось, що лише в одному навчальному посібнику "Вища математика" Валєєва К.Г., Джалладової І.А. є економічний приклад застосування рядів для визначення загальної суми вкладень на n років. Автори ж інших посібників: Барковський В.В., Барковська Н.В. "Математика для економістів" розглядають загальні поняття, властивості, необхідні та достатні ознаки збіжності числових рядів, розклад функції у степеневий ряд, обчислення наближених значень функцій e^x, e^{-x}, які часто використовують при розв'язуванні задач економічного змісту; у збірнику задач з вищої математики Мартиненко В.С. та ін. крім того, розглядають ще застосування степеневих рядів для обчислень значень функцій, границь та наближеного обчислення інтегралів. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д. у посібнику "Математичний аналіз для економістів" лише зазначають, що "… при розв'язанні ряду економічних задач за допомогою математики інколи виникає необхідність розглядати суми, що складаються з нескінченої множини доданків. Задача знаходження таких сум розв'язується в теорії рядів…", а самих прикладів використання рядів для розв'язування економічних задач немає.

Цей розділ, на нашу думку, потребує більш глибокого дослідження щодо застосування знань для аналізу та прогнозування економічних процесів та явищ, для обчислення економічних показників та розв'язування економічних задач.

Таким чином, переважна більшість тем курсу “Вища математика”, крім теми “Ряди”, супроводжуються, на допомогу викладачам та студентам, важливою інформацією про застосування отриманих знань до розв’язування конкретних задач економічного змісту.

З метою підвищення мотивації вивчення розділу “Ряди” ми визначили завдання: відібрати, систематизувати і адаптувати для сприйняття студентами матеріал про застосування рядів при розв’язуванні задач економіки. Зокрема, по-перше, за допомогою рядів можна наближено обчислити різні постійні величини; по-друге, ряди застосовують для наближених обчислень визначених інтегралів; по-третє, за допомогою рядів можна інтегрувати деякі диференціальні рівняння та, по-четверте, ряди Фур’є дозволяють виділити періодичні (сезонні) коливання, властиві багатьом економічним явищам. Для вивчення періодичних коливань деякого економічного показника $f(t)$, який залежить від часу, функцію $f(t)$ розкладають в ряд Фур’є $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$ (на практиці достатньо розглядати лише декілька перших членів цього ряду).

Аналіз економічних явищ потребує наявності їх числових характеристик та можливості їх вимірювання. При вимірюванні кількісних ознак можуть бути отримані послідовності спостережень цих явищ. Одним із прикладів такої послідовності є ануїтет.

Ануїтет – це послідовність однакових внесків, зроблених через проміжки часу.

Платежі за закладними, преміальні внески по страхуванню, орендні платежі – це приклади ануїтетів. Взагалі, довільна послідовність рівних платежів, зроблених через рівні проміжки часу, є ануїтетом. Кожний внесок називається періодичним внеском, або періодичною рентою. Періодичний внесок позначається літерою R. Час, протягом якого здійснюються періодичні внески, називається терміном ануїтету.

Загальна сума ануїтету S дорівнює сумі нарахувань усіх внесків.

Основна формула для загальної суми (майбутньої вартості) звичайного ануїтету S має вигляд: $S=R\cdot s_{n\backslash i}$, де $s_{n\backslash i}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$.

Тут n – кількість періодів сплати або конверсійних періодів, i – це ставка процента за конверсійний період. Для розв’язання задач, що містять $s_{n\backslash i}$, можна користуватися таблицею для множника $(1+i)^n$ при обчисленні суми нарахувань.

Якщо внесок R зроблено на початку періоду сплати, то такий ануїтет називається ануїтетним зобов’язанням. Тоді формула загальної суми (майбутньої вартості) ануїтетного зобов’язання матиме вигляд: $S=R\cdot(s_{n+1\backslash i}-1)$, де

$$s_{n+1\backslash i} = \frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}.$$

Поточна вартість звичайного ануїтету – це сума поточних вартостей усіх періодичних внесків R, яка обчислюється за формулою:

$$A = R \cdot a_{n\backslash i},$$

де $a_{n\backslash i}$ – це величина, значення якої наведені у таблиці і використовуються при обчисленнях.

Розглянемо декілька прикладів застосування рядів для розв'язування економічних задач.

Приклад 1. Громадянин Амосов вносить по 80 грн. у кінці кожного місяця на свій рахунок банку "Аркада" із ставкою відсотка 3% при щомісячному нарахуванні. а) Знайти загальну суму накопичень через 8 років. б) Який прибуток буде накопичено через 8 років?

Розв'язання.

а) Якщо внесок робиться в кінці кожного місяця, то ануїтет є звичайним ануїтом, тому n=12·8=96; i=0,03/12=0,01; R=80 грн.

Загальна сума накопичень визначається формулою:

$$S = R \cdot s_{n\backslash i} = 80 \cdot s_{96\backslash 0,01} \approx 80 \cdot 159,93 \approx 12794,4 \text{ грн.}$$

б) Громадянин Амосов зробив 96 внесків по 80 грн. у банк "Аркада" або 96·80=7680 грн., його прибуток становить 12794,4 – 7680=12717,6 грн.

Приклад 2. Адміністрація залізничного вокзалу станції Вінниця планує вкласти гроші на придбання машин типу "Експрес" для продажу проїзних залізничних квитків, термін роботи яких до повного фізичного зносу – 12 років. Після 12 років ці машини вже не матимуть ліквідаційної вартості. Очікується, що обладнання після щорічної сплати податків приноситиме прибуток 9600000 грн. щорічно. Також очікується, що ця сума забезпечить приріст із ставкою 8%. Яка вартість машин такого типу?

Приклад 3. Керівництво фірми "Садолін" на початку кожного місяця на розрахунковий рахунок банку "Аваль" вносить по 5000 грн. , і має на цих внесках 15% прибутку при щомісячному компаунді. Знайти загальну суму заощаджень, накопичених керівництвом фірми "Садолін" за 7 років.

Приклад 4. Виробниче об'єднання "Укрросапатит" планує проект, який даватиме прибуток 8,5 млн грн. протягом семи років. Якщо ВО "Укрросапатит" бажає мати прибуток від інвестованого капіталу 8% з щорічним компаундом, то яку максимальну суму зараз має інвестувати ВО "Укрросапатит" в цей проект?

У навчальному процесі, дбаючи про його ефективність, важливо максимально використати усі можливі активізації пізнавальної діяльності студентів. Серед таких можливостей, вважаємо, викладач математики повинен усвідомлювати і розвиток мотивів вивчення нового, його прикладне значення.

Література:

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів. Вища математика. – К.: Національна академія управління, 1999. – Ч. 1. – 399 с.
2. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. – К.: КНЕУ, 2001. – Ч. 1. – 546 с.
3. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. – К.: КНЕУ, 2001. – Ч. 2. – 451 с.
4. Дутка Г.Я. Практикум з математики для економістів. – Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.
5. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика. Практикум. – К.: ЦУЛ, 2003. – 536 с.
6. Мартиненко В.С. та ін. Збірник задач з вищої математики: У 2-х ч. – К.: КНТЕ, 2000. – Ч. 1. – 210 с.
7. Мартиненко В.С. та ін. Збірник задач з вищої математики: У 2-х ч. – К.: КНТЕУ, 2002. – Ч. 2. – 220 с.
8. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д. Математичний аналіз для економістів: Навч. посібник. – К.: Видавництво Європейського університету, 2002. – 230 с.
9. Робоча програма курсу “Вища математика” для студентів з базової освіти за напрямом підготовки “Економіка і підприємництво”.
10. Стрельченко О.С., Стрельченко І.Г. Фінансова статистика: Навч. посібн. Для шк. (кл.) екон. профілю. – К.: Пед.преса, 1999. – 104 с.
11. Справочник по математике для экономистов/ В.Е. Барбаумов, В.И. Ермаков, Н.Н. Кривенцова и др.; Под ред. В.И. Ермакова. – М.: Высш. шк., 1987. – 336 с.

МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ СТОХАСТИЧНИХ УЯВЛЕНЬ СТУДЕНТІВ (НА ПРИКЛАДІ МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ УжНУ)

В.Й. Дзямко
м. Ужгород, Ужгородський національний університет

Сьогоднішнє становлення нової освітньої системи супроводжується суттєвими змінами в педагогічній теорії і практиці навчально-виховного процесу. Освітній сфері сьогодні належить одне із основних місць в інфраструктурі суспільства, оскільки “освіченість, інтелект, творчий потенціал особистості стають провідною продуктивною силою, визначальною передумовою і наріжним каменем прогресу цивілізації” [1].

Система університетської освіти в цілому повинна забезпечувати фундаментальну підготовку у певній сфері знань. І на цій основі необхідно розвивати у студентів творчі здібності, високу культуру мислення, уміння самостійно орієнтуватися у великому потоці інформації науково-технічного і суспільно-політичного життя.

Розбудова системи освіти потребує суттєвого оновлення змісту і технології навчання математики, а також зміни методологічної орієнтації освіти і спрямування її на особистість, ініціативну у будь-якій життєвій ситуації.

Процес демократизації суспільного життя в Україні вимагає перебудови освіти (як середньої, так і вищої), яка полягає в тому, щоб не тільки давати глибокі знання, а і активізувати пізнавальний інтерес, виробляти у вихованців здатність самостійно аналізувати випадкові фактори і приймати рішення в ситуаціях, які мають імовірнісну основу.

Усі вузівські курси математики, при їх правильній постановці, повинні забезпечувати високий рівень математичних знань, але всі вони одночасно повинні сприяти росту професійних вмінь – вмінь навчати математику в загальноосвітніх школах на високому рівні.

Більшість студентів стаціонарного і заочного відділення математичного факультету Ужгородського національного університету теорії ймовірності і математичної статистики в школах не вивчали. Лише незначна частина з них розглядала цей матеріал у 9-му та 11-му класах, так і не засвоївши його (про що свідчить анкетування студентів).

Це пояснюється такими причинами: 1) теоретична перевантаженість шкільного матеріалу; 2) абстрактний характер вивчення математики в школі, відсутність в шкільних підручниках логічних задач; 3) неузгодженість програми з математики для загальноосвітніх шкіл і програми вступних екзаменів у вузи; 4) відсутність такого матеріалу з математики, який би міг бути використаний при вивченні інших предметів.

Беручи до уваги те, що елементи стохастики не вивчались в загальноосвітніх школах протягом останніх тридцяти п’яти років, і лише в зв’язку з реформуванням освіти цей важливий розділ математики було включено в програму, очевидною стає проблема формування стохастичних уявлень.

У дидактиці та методиці математики недостатня увага приділяється елементам стохастики у навчальному процесі.

Досліджувана проблема – багатоаспектна. Розгляд психолого-педагогічної і методичної літератури з математики, вивчення досвіду роботи вчителів, наші експериментальні дослідження, проведення практичних і лабораторних занять в студентів, дають змогу не тільки виділити декілька аспектів розв'язання даної проблеми (методологічний, мотиваційний, методичний, математичний, процесуальний і результативний), а і переконатися в наступному. Людині, яка не зрозуміла імовірнісних ідей в дитинстві, в зрілому віці важко, а то і неможливо їх зрозуміти. Адже багато чого в теорії ймовірності суперечить життєвому досвіду, а з віком досвід набуває статус безумовності. Життя вимагає від нас прийняття рішень у ситуаціях, які мають імовірнісну основу.

Саме тому математична освіта не може вважатися повноцінною, якщо вона не включає елементи стохастики, адже саме елементи стохастики в найбільшій мірі формують науковий світогляд.

На нашу думку, студент – майбутній вчитель – повинен формувати стохастичні уявлення, починаючи з молодшої школи [2]. Для цього наші студенти повинні володіти відповідними знаннями, уміннями і навичками.

Головною метою в процесі практичних і лабораторних робіт є:

- більш глибоке ознайомлення студентів з стохастичними законами, що розкривають багатогранні зв'язки буття предметів і явищ;
- формування уміння аналізувати випадкові фактори і приймати рішення в ситуаціях, що мають імовірнісну основу;
- забезпечення деякого запасу імовірнісно-статистичних знань, які є невід'ємною умовою творчої роботи у багатьох галузях;
- подолання глибокого детермінізму у свідомості студентів на основі усвідомлення ними взаємовідносин між "необхідним" і "випадковим";
- формування стохастичної культури як необхідної складової підготовки організаторів і учасників виробництва, адекватного новим соціально-економічним відносинам;
- формування методологічно-правильних поглядів на природу і суспільство, які відповідають сучасній науковій картині світу;
- розширення умов розвитку особистості студента, можливості його спілкування з сучасними джерелами інформації, удосконалення комунікативних здібностей і умінь орієнтуватися у суспільних процесах, аналізувати ситуацію і приймати обґрунтовані рішення, збагачувати систему поглядів на світ усвідомленими уявленнями про закономірності у масі випадкових фактів.

Осмислення імовірнісних задач вчить студентів враховувати випадковість, свідомо йти на ризик при прийнятті окремих рішень, почувати себе впевненіше, не впадати у відчай за будь-яких обставин, не здаватися на шляху до мети, пояснюючи невдачі випадковістю.

Як же сформувати в свідомості студентів стохастичні уявлення?

Стара методика пропонувала розв'язати це завдання шляхом словесного описання певної дії чи предмета. Але уявлення – це відтворений образ предмета (чи дій), базується на досвіді. Роль уявлення в навчанні дуже велика: наявність у студентів запасу конкретних уявлень про предмети чи явища є необхідною передумовою для розуміння значення слів викладача і підручника.

Щоб сформувати в свідомості студентів певне уявлення (в нашому випадку стохастичне), треба показати його наглядно. Цю думку прекрасно виразив Я.А. Коменський у формі "золотого правила". "Все, що тільки можна, передавати для сприйняття органами чуття, а саме: видиме – для сприймання зором, почуте – слухом, запахи – нюхом, що можна попробувати на смак – органами смаку, до чого можна доторкнутися – шляхом дотику. Якщо які-небудь предмети зразу можна відчути декількома органами чуттів, нехай вони зразу відчувають ними …" [3].

Це правило можна використати і під час формування стохастичних уявлень у студентів. Наочність – основне для формування стохастичних уявлень. Якщо наглядно показати і провести дослід з підкиданням монети чи грального кубика, то студенти наочно побачать випадання герба чи монети, тієї чи іншої грані кубика. А отже, очевидною стає ймовірність появи герба чи появи числа очок, що випадає на кубику.

Крім наочності, у основі методики, яку ми використовуємо під час проведення практичних і лабораторних занять, лежить використання завдань, спрямованих на формування стохастичних уявлень. Ці завдання передбачають послідовне зростання складності з поступовим посиленням самостійності і творчості учнів. Доцільно уникати надмірної кількості задач і вправ "за зразком", кожне завдання повинно вчити мислити студента.

Охарактеризуємо цю систему вправ.

1. Діагностичні вправи – допомагають з'ясувати рівень сформованості в студентів уявлень про об'єкт, що розглядається.
2. Пропедевтичні вправи – підготовлюють студентів до сприймання нових стохастичних об'єктів і усувають ті помилкові уявлення, про які засвідчують результати виконання діагностичних вправ.
3. Вступні вправи – спрямовують студентів на самостійне дослідження і осмислення нового матеріалу, створюють передумови для самостійного відкриття ними фактів, що вивчаються, до створення нових уявлень і понять на основі вже сформованих.
4. Пробні вправи – використовують для перевірки того, чи сформувалися в студентів потрібні стохастичні уявлення і поняття в процесі сприймання нового матеріалу.
5. Тренувальні вправи – закріплюють щойно сформовані уявлення і

поняття, виробляють необхідні уміння і навички.

6. Творчі вправи – призначені для розвитку уяви та мислення, вмінні практично застосовувати здобуті знання в нестандартних ситуаціях, відкривати нові властивості стохастичних об'єктів.

7. Інтегруючі вправи – вправи на виявлення якості сформованих стохастичних уявлень.

Формування пізнавального інтересу студентів засобами стохастичних задач передбачає, як зміст психологічних процесів, які є визначальними при цьому, так і аналіз інформативної задачі, а також визначення умов (що відноситься до організації процесу навчання) форм і методів навчальної діяльності в цьому випадку (ілюстрації, демонстрації, інноваційні технології).

Проводячи заняття з теорії ймовірностей і математичної статистики, ми, насамперед, переслідуємо мету – пояснити студентам ті методологічні проблеми, які виникають при математичному аналізі реальних масових випадкових явищ, а також викласти основні ідеї, методи, поняття математичного апарату даної науки, виробити на відміну від звичного, детермінованого, так званого, імовірнісного способу міркування.

В результаті вивчення курсу теорії ймовірностей і математичної статистики, студент повинен [4]:

- набути певних навичок у побудові математичних моделей випадкових явищ;
- оволодіти методами математичного дослідження стохастичних явищ (переклад реальної задачі на математичну мову, вибір оптимального методу її дослідження і розв'язання, інтерпретація одержаних результатів і т.п.) та розвивати на цій основі логічне і алгоритмічне мислення;
- вміти вибрати і використати необхідні обчислювальні методи.

Осмислення понять імовірності студентами ускладнюється тим, що перші уявлення про навколишній світ формуються під впливом гармонії, узгодженості всіх явищ, що відбуваються. Все навколо здається упорядкованим, логічно закономірним, випадкові події сприймаються лише як невдачі, викликаючи негативні емоції, а тому все це впливає на психологію сприймання і пізнання світу, на розумову діяльність, на становлення особистості, її інтелектуальний розвиток, світогляд.

Література:

1. Матеріали II Всеукраїнського з'їзду працівників освіти // Освіта. – 2001. – № 57-58.
2. Орос В.Й. Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики в загальноосвітній школі // Математика в школі. – 2001. – №6. – С. 10-11.
3. Коменский Я.А. Избр. пед. соч., т.1. – М.: Учпедгиз, 1939.
4. Ігнат Ю.І. Методична розробка до практичних занять та самостійної роботи з теорії ймовірностей для студентів математичного факультету. – Ужгород: Ужгор. держ. ун-т, 1988. – 79 с.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ “ДИФФЕРЕНЦИАЛ”

В.М. Дрибан, Г.Г. Пенина
г. Донецк, Донецкий государственный университет экономики и торговли им. М. Туган-Барановского
janab@bk.ru

Если сейчас дифференциал функции определяется после того, как введено понятие производной, то в эпоху Лейбница первичным было введенное им понятие дифференциала. По выражению историка математики Цейтена, великая заслуга Лейбница заключалась в том, что в своих формулах дифференцирования (записанных в дифференциалах) он давал общий способ для всех исследований, связанных с бесконечно малыми, а его символика обеспечивала значительную простоту пользования этим способом.

Основной постулат, полагаемый Лейбницем в основу его метода, состоял в том, что какая-либо величина, увеличенная или уменьшенная на бесконечно малую, остается равной самой себе. Если принять этот постулат, то понятие дифференциала функции немедленно отождествляется с понятием ее приращения и тем самым открывается возможность обращаться с ним как с обычной конечной величиной.

Фактически дело и обстояло именно таким образом. Законность отождествления Δy и dy для математиков XVII-XVIII веков подтверждалась интуитивно усматриваемой возможностью отождествить кривую со вписанной ломаной, имеющей бесконечное множество звеньев, отождествить касательную с секущей, бесконечно тонкую криволинейную трапецию – с прямоугольником и т.п.

Однако, как только математики пытались представить себе логическую правомочность такой замены, как тотчас начиналось «колебание умов», связанное с самим пониманием бесконечно малых. Что касается попыток, предпринятых учениками Лейбница для доказательства законности операций с отбрасыванием бесконечно малых, то все они, в сущности, сводились к ссылкам на то, что получаемые при этом результаты согласуются с действительностью. Однако математической логики в этих «доказательствах» не было и не могло в то время быть.

Таким образом, в учении о дифференциале функции отсутствовало логическое определение этого понятия, дифференциал понимался как актуальная бесконечно малая, и лишь большое число результатов, подтверждаемых практикой, вдохновляли математиков, которые поддерживали идеи Лейбница.

Однако внутренне противоречивый характер бесконечно малой все чаще и чаще приводит к противоречивым результатам, что заставляет математиков всерьез заняться логическим обоснованием нового исчисления, в частности, логическим определением понятия дифференциала. «Идите вперед и вы приобретете уверенность» – известная фраза Даламбера вселяла надежду, что противоречия, связанные с понятием дифференциала, будут со временем устранены.

В XIX в., после широкого использования в обосновании анализа бесконечно малых теории пределов (Коши, Вейерштрасс), не только меняется взгляд на природу бесконечно малых, но и понятие дифференциала отодвигается на второй план, уступая первое место понятию производной. Все исчисление бесконечно малых представляет теперь, по сути, только приложения общего понятия предела, а производная рассматривается не как отношение двух бесконечно малых, а как предел их отношения. После такого определения понятия производной понятие дифференциала функции определяется уже как произведение производной на приращение аргумента.

Таков тернистый путь эволюции учения об одном из важнейших понятий математического анализа – понятии дифференциала. Весьма поучительно после изложения понятия дифференциала познакомить студентов в том или ином объеме с историей развития этого понятия, подчеркнув, что процесс познания – это процесс возникновения и разрешения противоречий. Это не только усилит интерес к изучаемому материалу, но и будет способствовать формированию научного мировоззрения студентов.

При существующих методиках изложения темы «Дифференциал» он воспринимается как некое второстепенное понятие, которое может применяться лишь в приближенных вычислениях. Основная идея, лежащая в основе понятия дифференциала, как правило, не раскрывается явным образом.

На наш взгляд, дифференциал сразу же должен войти в сознание студентов как одно из важнейших понятий математического анализа, а идея, которая лежит в основе понятия дифференциала, сразу же должна быть воспринята как одна из фундаментальных идей, так как именно эта идея лежит в основе практического применения определенного интеграла и дифференциальных уравнений. Поэтому, определяя исходную позицию в методике изложения вопроса о дифференциале функции, следует, на наш взгляд, иметь в виду то *назначение, которое имеет дифференциал в курсах интегрального исчисления и дифференциальных уравнений*.

Идея, полагаемая в основу решения задач интегрального характера, заключается, как известно, в замене истинных элементов определяемой величины условными элементами. Во всех таких задачах определяемая величина является аддитивной функцией отрезка. При разбиении отрезка на частичные отрезки искомая величина разбивается на элементы, которые являются ее фактическими долями. Так как непосредственно найти эти доли невозможно, то каждая из них заменяется условным элементом, *построенным в предположении, что скорость изменения аддитивной функции, выражающей искомую величину, остается на каждом частичном отрезке постоянной*, сохраняющей то значение, которое она имела в произвольной точке этого отрезка. Суммирование таких условных элементов с последующим предельным переходом и приводит к решению рассматриваемой задачи. При этом каждый истинный элемент представляет собой приращение функции на частичном отрезке, а заменяющий его условный элемент является ни чем иным, как *дифференциалом* этой функции.

Идея замены сложного простым, того, что не поддается непосредственному исследованию и определению, тем, что уже известно или определено ранее, является одним из общих способов движения человеческой мысли. То, что эта идея соответствует своеобразию человеческого мышления при постижении нового, определяет ее педагогическое значение. То, что она дает общее направление в решении целого ряда трудных задач, определяет ее практическое значение.

В плане подготовки студентов к сознательному усвоению этой идеи в курсах интегрального исчисления и дифференциальных уравнений и должен быть, на наш взгляд, освещен вопрос о дифференциале функции.

Перейдем к изложению предлагаемой методики. Перед введением понятия дифференциала надо обратить внимание студентов на основном свойстве линейной функции – постоянстве ее скорости (из $y=kx+b$ следует, что $y'=k$–*const*). Далее можно рассуждать по следующей схеме.

1. Рассматривается дифференцируемая функция $y=f(x)$ и некоторое значение x ее аргумента. Даем приращение Δx аргументу и получаем приращение Δy функции (рис. 1).

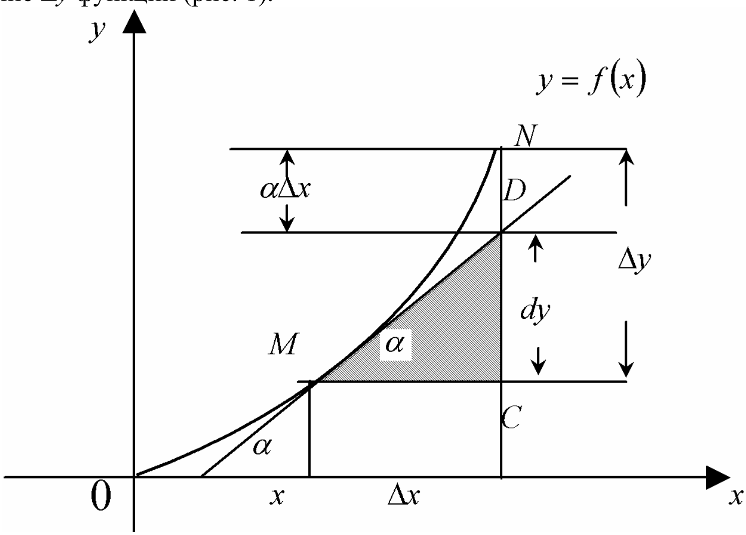


Рис. 1

2. Ставится вопрос о нахождении такого приращения функции, которое она получила бы при условии, что *скорость изменения функции на участке*

Δx *постоянна* и равна ее значению в точке x.

3. Отмечаем, что при этом условии функция $y=f(x)$ вела бы себя как *линейная* функция, а ее графиком на участке Δx была бы не кривая, а касательная MD к этой кривой в точке M, так как скорость изменения функции в точке x равна $y'=\mathrm{tg}\,\alpha$.

4. При условии постоянства скорости приращения функции выразилось бы не отрезком CN, а отрезком CD, представляющим собой приращение ординаты касательной MD (заметим, что элементы рисунка должны появляться по мере их введения; готовый плакат существенно затруднит восприятие материала).

После этого дается определение: *дифференциалом функции* в точке x называется ее *условное приращение,* которое функция получила бы на участке Δx при условии, что в *интервале* Δx *скорость изменения функции постоянна* и равна значению скорости в начале интервала.

Такое определение соответствует смысловой сути дифференциала, а его аналитическое выражение $dy=f'(x)\Delta x$ сразу следует из рассмотрения треугольника MCD (рис. 1). Следует подчеркнуть, что дифференциал пропорционален приращению аргумента, а коэффициентом пропорциональности является производная $f'(x)$.

Далее рассматривается понятие дифференциала аргумента. Его естественно, на наш взгляд, ввести не по определению, а рассматривая дифференциал функции $y=x$, хотя и в этом случае есть своего рода соглашение. Так получается одна из важнейших формул математического анализа $dy=f'(x)\Delta x$. После этого раскрывается смысл символа $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ как отношение дифференциалов функции и аргумента.

Далее естественно исследовать соотношение между Δy и dy. На рис. 1 наглядно ощутимо, что чем меньше Δx, тем меньше кривая MN отличается от касательной MD, т.е. тем меньше отличаются друг от друга Δy и dy. В связи с этим исследуется соотношение между Δy и dy при $\Delta x \to 0$.

Обычным образом получаем равенство

$$\Delta y=y'\Delta x+\alpha\Delta x \tag{1}$$

или, что то же,

$$\Delta y=dy+\alpha\Delta x,$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Отсюда делаем вывод, что при $\Delta x \to 0$ приращение функции отличается от дифференциала функции на бесконечно малую высшего порядка относительно Δx. Важно подчеркнуть, что при $\Delta x \to 0$ и $y' \neq 0$ Δy отличается от dy на бесконечно малую высшего порядка относительно не только Δx, но и относительно dy. В связи с этим дифференциал функции называют главной частью приращения функции. Выражение “главная часть” надо понимать не в смысле “больше” или “меньше” ($\alpha\Delta x$ может быть и больше dy), а в том смысле, что вблизи значений Δx, близких к нулю, убывание слагаемого $\alpha\Delta x$

протекает значительно интенсивнее по сравнению с убыванием dy.

Прямым следствием формулы (1) является соотношение

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1, \qquad (2)$$

если $y' \neq 0$, т.е. при $\Delta x \to 0$ и $y' \neq 0$ *дифференциал функции и ее приращение являются эквивалентными бесконечно малыми*. Это, как известно, означает, что при значениях Δx, близких к нулю,

$$\Delta y \approx dy. \qquad (3)$$

Ранее такое предположение было высказано из наглядных соображений.

Следует отметить, что равенство (3) будет выполняться в зависимости от $|\Delta x|$ с любой точностью. Поскольку dyесть линейная функция относительно Δx, то равенство (3) означает, что *при достаточно малых* $|\Delta x|$ *любую дифференцируемую функцию на участке* Δx *можно приближенно* (причем с любой точностью) *считать линейной*, т.е. простейшей из всей функций. Такая замена называется линеаризацией. В соответствии с этим на *малом промежутке времени* Δt *движение с переменной скоростью можно с любой точностью считать происходящим с постоянной скоростью*. Условно говоря, на бесконечно малом кривое есть прямое, переменное есть постоянное.

Именно эти положения делают дифференциал функции одним из важнейших понятий математического анализа, широко применяемым в теории и на практике. При этом студенты должны понимать, что суть понятия дифференциала заключается не в количественном, а в *качественном* отличии его от приращения функции.

Принципиальные моменты в содержании понятия дифференциала на этом заканчивается. Все изложение, как видно, было подчинено тому назначению, которое имеет дифференциал при практическом применении определенного интеграла и дифференциальных уравнений, где он выступает в качестве условного элемента определяемой величины (в виде прямоугольника, цилиндра, отрезка касательной и т.п.).

На практических занятиях можно закрепить в сознании студентов истинный смысл дифференциала, рассмотрев, например, следующие вопросы.

1. Расстояние S, пройденное точкой, есть функция времени. Какой конкретный смысл имеет dS? Что означает равенство $\Delta S \approx dS$ при малых Δt?
2. Площадь S прямоугольника с постоянной высотой H есть функция его основания. Какой смысл имеет dS? Чему равняется ΔS? Почему $\Delta S = dS$?
3. При любом значении аргумента на отрезке $[a, b]$ $dy = \Delta y$. Что можно сказать о поведении функции на $[a, b]$?
4. Как можно истолковать дифференциал площади круга с меняющимся радиусом? Что означает равенство $\Delta S \approx dS$ при малых ΔR?
5. Как можно истолковать дифференциал объема цилиндра с постоян-

ной высоты? Что означает равенство $\Delta V \approx dV$ при малых ΔR?

При ответе на вопросы типа 4, 5 полезно применять образные сравнения. Так, в вопросе 4, получив результат $dS=2\pi R\cdot\Delta R$, т.е. площадь прямоугольника с основанием $2\pi R$ и высотой ΔR, преподаватель обращает внимание на то, что равенство $\Delta S\approx dS$ при малых ΔR, условно говоря, можно трактовать следующим образом: при бесконечно малой ширине кольцо с площадью ΔS как бы выпрямляется и “превращается” в прямоугольник с площадью dS. При всей условности подобных образов они привлекают внимание студентов, развивают их интуицию и способствуют лучшему пониманию сути дифференциала функции.

Отметим, что предлагаемая методика практически не требует больше времени, чем традиционные, так как и при традиционных методиках приходится доказывать соотношения (1) и (2), а также рассматривать геометрический смысл дифференциала.

При изложении свойства инвариантности формы дифференциала во многих учебниках даже не упоминается тот факт, что форма $dy=y'\Delta x$ этим свойством, вообще говоря, не обладает. В результате у студентов создается впечатление, что инвариантна любая форма дифференциала. На наш взгляд, само название темы должно выглядеть так: «Инвариантность формы $dy=y'\Delta x$ дифференциала». Студенты должны четко усвоить, что в случае $y=f(x)$, $x=x(t)$ выражение $f'(x)\Delta x$, как правило, не является дифференциалом (исключением является случай линейной зависимости $x=at+b$).

Следует подчеркнуть, что если x – независимая переменная, то $dx=\Delta x$ есть произвольное приращение аргумента, а если, например, $x=x(t)$, то dx является дифференциалов функции $x(t)$, т.е. величиной, вообще говоря, не совпадающей с приращением Δx.

Преподаватель может продемонстрировать применение свойства инвариантности, например, следующим образом. Как известно, производную можно рассматривать как отношение дифференциалов: $y'_x=\dfrac{dy}{dx}$. Слева производная берется по аргументу x, тогда как справа (на основании свойства инвариантности) дифференциалы dy и dx можно брать по любому аргументу (конечно, одному и тому же в каждом случае). Это позволяет, например, очень просто найти производную параметрически заданной функции. Действительно, если $x=x(t)$, $y=y(t)$, то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t dt}{x'_t dt}=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Студенты сразу должны знать, что свойство инвариантности будет широко использоваться в дальнейшем. Так, если бы дифференциал $dy=y'dx$ не обладал этим свойством, то из равенства $f(x)=\varphi(z)$ нельзя было бы получить равенство $f'(x)dx=\varphi'(z)dz$, т.е. была бы неприменима замена переменной в интеграле. На подобные моменты преподаватель может обратить внимание студентов в соответствующих местах курса.

Заметим еще, что, на наш взгляд, следует сэкономить время и не изучать применения дифференциала для вычисления значений функции и для получения приближенных формул. Здесь у дифференциала весьма ограниченные возможности, нельзя оценить погрешности приближенных результатов. К тому же эти вопросы рассматриваются при изучении формулы Тейлора и ряда Тейлора.

ЕФЕКТИВНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ЕКСТРЕМУМ

О.В. Захарченко
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Сотні років екстремальні задачі геометрії досліджувались визначними математиками, такими як Евклід, Архімед, Кеплер, Ферма, Бернуллі, Лейбніц, Ньютон… Усі вони шукали універсальний метод розв'язування екстремальних задач. Даламбер навіть висунув ідею: «Слід поставити перед собою ціль знайти такий метод розв'язування всіх задач… одним і втім простим способом». Але й досі не знайдено такого універсального методу.

У даній статті розглядаються декілька найпоширеніших методів розв'язування геометричних екстремальних задач і приклади їх використання.

Що ж ми розуміємо під поняттям екстремальна задача?

Екстремальними задачами прийнято називати задачі, в яких необхідно визначити, яке найбільше чи найменше значення може приймати яка-небудь величина, а також задачі на знаходження максимуму і мінімуму (нагадаємо: слова maximum і minimum – латинські і означають «найбільше» і «найменше»; термін же «екстремум» – від латинського extremum, що значить «крайній» і об'єднує поняття максимуму і мінімуму).

Екстремальні задачі виникають у всіх природничих науках, тому спочатку ці задачі формулюються без формул, у термінах сфери їх виникнення. Для того, щоб можна було користуватись послугами математики, необхідно зробити перш за все формалізацію умови задачі, тобто зробити переклад умови задачі на мову математики.

При формалізації треба точно описати деяку функцію $f(x)$, найбільше (найменше) значення якої необхідно знайти, де x – змінна величина, яка може бути як обмеженою, так і необмеженою, тобто x належить якомусь проміжку допустимих значень.

Після формалізації знаходимо деяке x_0, яке повинне належати проміжку допустимих значень і яке називається мінімумом (максимумом), якщо

$$f(x_0) \geq f(x_0) \cdot f(x) \geq f(x)$$

для довільного x із множини значень. $f(x_0)$ є розв'язком задачі.

Даний спосіб пошуку екстремуму є основним і має три етапи:

1. Формалізація задачі.
2. Засобами математичного аналізу знаходять найбільше (найменше) значення отриманої функції:

2.1) знайти всі критичні точки функції на заданому відрізку (проміжку), тобто такі точки, в яких похідна досліджуваної функції дорівнює нулеві або не існує;

2.2) обчислити значення заданої функції в усіх критичних точках і на кінцях відрізка;

2.3) з одержаних значень вибрати найбільше чи найменше (відповідно до умови задачі)

3. Інтерпретація знайденого розв’язку з урахуванням умови задачі.

Розглянемо *приклад*. Визначити розмір відкритого басейну з квадратним дном і об’ємом 32 м^3 так, щоб на покриття його стін і дна пішла найменша кількість матеріалу.

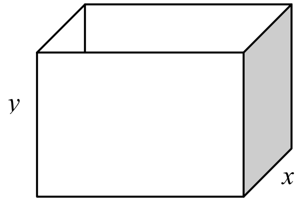


Рис. 1

Розв’язання.

Позначимо сторону основи через x, а висоту – через y (рис. 1). Тоді об’єм басейну буде дорівнювати $V = x^2 \cdot y = 32$, а поверхня, яку треба вкрити дорівнює $S = x^2 + 4xy$.

Виразимо y через x із формули об’єму, отримаємо

$$S = x^2 + 4x\frac{V}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x};$$

$$S'(x) = 2x - \frac{128}{x^2}; \qquad 2x - \frac{128}{x^2} = 0.$$

Звідси $x = 4$.

Знайдена єдина точка дає найменше значення функції S, так як найбільшого значення у неї немає (необмежено зростає при $x \to 0$ і $x \to \infty$).

Отже, шукані розміри басейну: $x = 4$ м, $y = 4$ м.

$S = 4^2 + 4 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ (м^2).

Відповідь. Розміри басейну: сторона квадратного дна 4 м, висота 2 м.

Цим способом можна користуватись в школі тільки в 10–11 класах, коли учні знайомляться з поняттям похідної і дослідженням функцій з її допомогою.

Проте в багатьох практичних задачах обчислення похідної становить великі труднощі і часто навіть невідомо, чи існує похідна, або буває важко подати задачу в аналітичному вигляді.

Є ще декілька методів розв’язування задач на екстремум, які не вимагають обчислення похідної і можуть бути використані в 5-9 класах.

Це такі методи: метод оцінювання, метод перетворення площини і метод перебору.

Основою методу оцінювання є геометричні нерівності. Суть цього методу полягає в тому, що розглядається конкретна геометрична фігура F;

одна або декілька величин, що характеризують цю фігуру F точно відомі або (рідше) відомі границі, в яких замкнені ці величини. Завдання полягає в тому, щоб оцінити деяку іншу величину a, пов'язану з фігурою F, тобто довести, що ця величина задовольняє нерівності виду $u \le a \le U$, де значення u і U, взагалі кажучи, залежать від умови задачі. При цьому знайдена подвійна нерівність повинна бути точною; це означає, що для кожного числа x, де $u \le a \le U$, повинна існувати геометрична фігура F, яка задовольняє умові задачі і для якої $x = a$, для кожного ж числа x поза вказаних границь такої фігури F існувати не повинно.

Об'єктами оцінювання можуть бути граничні значення площі, відстані, величини кута.

<u>*Приклад*</u>. У трикутника всі сторони менші або рівні одиниці. Яку найбільшу площу може мати такий трикутник.

Розв'язання.

Нехай α – найменший кут трикутника. Тоді $\alpha \le 60^\circ$ (рівність досягається коли трикутник рівносторонній). Тому

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \le \frac{1}{2}\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ де } b \le 1,\ c \le 1.$$

Отже $S \le \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Звідси маємо, що найбільша площа трикутників, у яких всі сторони менші або рівні одиниці, дорівнює $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Цей метод допомагає розв'язати задачі на екстремум у неявному вигляді, або ті задачі на екстремум, які виникають при дослідженні розв'язання задач на побудову, коли необхідно оцінити дані в умові величини для з'ясування умов існування розв'язку.

Суть методу перетворення площини полягає в наступному: нехай треба знайти екстремум елемента х фігури F, однозначно визначеного елементами x та a_i ($i = 1, 2, ..., n$). Тоді надаємо елементу x певне значення $x = c$ і розв'язуємо задачу на побудову фігури F' за елементами x та a_i, при цьому вважаємо c – змінною величиною. Виконуємо необхідні перетворення площини, зазначивши ті особливості, які виникають при досягненні елементом x максимального чи мінімального значення. Дана особливість дає змогу зробити висновок про екстремум елемента x фігури F.

Під час розв'язування геометричних задач на екстремум найчастіше використовується *осьова симетрія*.

<u>*Приклад*</u> (задача Герона). Дано пряма l і дві точки A, B по один бік від неї. Знайдіть на прямій l точку X так, щоб довжина ламаної AXB була найменшою.

Розв'язання.

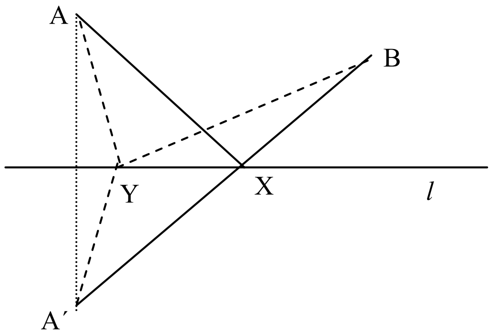


Рис. 2

Нехай точка A′ симетрична точці A відносно прямої l. Нехай X – точка на прямій l.

Тоді AX+XB = A′X+XB ≥ A′B, причому рівність досягається тільки тоді, коли точка X лежить на відрізку A′B, (рис. 2). Тому шукана точка є: $X = l \cap A'B$.

Паралельне перенесення частіше використовують при розв'язуванні задач на знаходження найменшої відстані між даними та шуканими точками, яка залежить від розташування відповідного відрізку.

Суть *методу перебору* полягає в тому, що спочатку виділяють послідовність точок $\{x_i\}^n$ і знаходять $f(x_i)$ послідовно, поки не знайдеться таке k, що $f(x_k) \le f(x_i)$ (i=1, 2, ..., n).

Цей метод ефективний лише для скінченої множини допустимих значень змінної.

Якщо при формалізації умови задачі можна записати функцію в аналітичному вигляді і обчислення похідної не викликає труднощів, то є доцільним використання методу розв'язування екстремальних задач *за допомогою похідної*.

Коли в умові задачі треба щось довести чи дослідити, то використовують *метод оцінювання*.

Метод перетворення площини частіше використовується в задачах, в яких постає завдання знайти найбільшу чи найменшу відстань між даними елементами.

Якщо ж розглядається дискретна і скінчена множина допустимих значень змінної, то можна використати *метод перебору*.

Література:

1. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. – М.: Наука, 1986.
2. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука,

1986. – 188 с.
3. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970 – 335 с.
4. Мельник Г.Н. Геометричні задачі на екстремуми // Математика в школі. – 2000. – №4 – С. 45-49.

НОВИЙ ПОГЛЯД НА АКСІОМАТИКУ

Л.О. Іваненко
м. Суми, Сумська спеціалізована школа I–III ступенів №7
Luda_Iv@mail.ru

Відносно змісту викладання математики іноді висловлюють ідеї про необхідність повної відмови від аксіоматичної побудови геометрії в основній школі за рахунок збільшення питомої ваги експериментальної діяльності учнів [1].

Але чи є ці пропозиції доречними? Адже все абсолютно означити неможливо. Тоді постає питання, як же заставити сьогоднішніх школярів працювати, щоб їм було цікаво і зрозуміло. На нашу думку, потрібно заохочувати дітей різнобарвністю задач, більшість яких би була пов’язана з навколишнім світом, щоб зміст їх був цікавим.

Але для того, щоб складати такі задачі, потрібно перш за все потурбуватися про їх розв’язок, зрозумілий і наочний.

Для цього пропонуємо поряд із вже існуючими системами аксіом використовувати і таку систему аксіом, яка б допомагала нам розширити нашу просторову уяву. У сучасному шкільному курсі геометрії було б доречним використовувати наведену методику на факультативних заняттях з математики після вивчення учнями теми “Геометричні побудови” за підручником А.В. Погорєлова [2], тому що саме в цій темі вони вперше знайомляться з такою фігурою, як коло. Ця тема вивчається на перших етапах вивчення геометрії, тому можна сподіватись, що пропонована методика дасть змогу краще сприймати наступні теми.

У запропонованій мною системі аксіом неозначуваними поняттями є: точка, коло, площина.

Аксіоми планіметрії.

I Аксіома належності точок і кіл.

I_1 Яке б не було коло, існують точки, що належать цьому колу і точки, що не належать йому.

I_2 Через будь-які дві точки можна провести не більш як два кола.

II Аксіоми розміщення точок на колі і на площині.

II_1 Якщо точка **B** лежить між точкою **A** і точкою **C**, то **A**, **B**, **C** – три різні точки кола, і **B** лежить також між **C** і **A**.

II_2 Для будь-яких двох точок **A** і **C**, що належать колові, існує хоча б одна точка **B**, така, що точка **C** лежить між **A** і **B**.

III Аксіоми вимірювання кіл і дуг.

III_1 Кожна дуга має певну градусну міру більшу від нуля. Довжина кола дорівнює сумі довжин частин на які він розбивається будь-якою його точкою.

III_2 Кожна дуга має певну градусну міру більшу від нуля. Градусна міра кола 360^0. Градусна міра дуги дорівнює сумі градусних мір дуг на які він розбивається будь-якою його точкою.

Означення. Дугою кола називається частина кола, яка складається з усіх точок цього кола, що лежать між двома даними його точками.

IV Аксіоми відкладання дуг.

IV_1 На будь-якому колі з будь-якої його точки в даному напрямку можна відкласти дугу даної довжини, меншої за довжину кола і тільки одну.

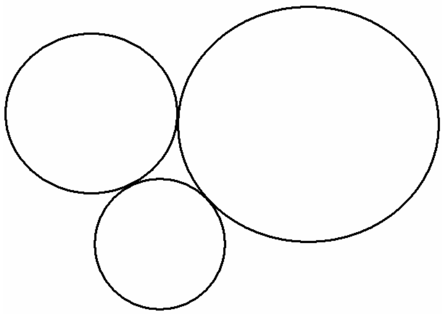
IV_2 На будь-якому крузі з будь-якої його точки в даному напрямку можна відкласти дугу з даною градусною мірою, меншою 360^0, і тільки одну.

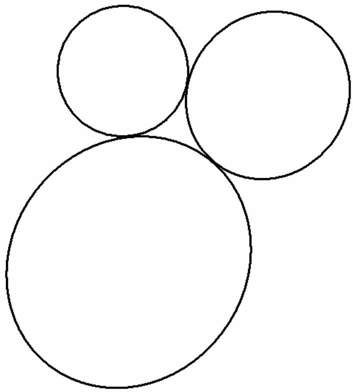
IV_3 Яке б не було триколо, існує триколо, що дорівнює йому у заданому розміщенні.

Пояснення. Низка кіл, що по черзі дотикаються один до одного, і перше коло дотикається до останнього, називається многокілником. Многокілники з 3, 4, …, *n* колами називаються відповідно трикілниками, чотирикілниками, …, *n*-кілниками.

V Аксіома перпендикулярності.

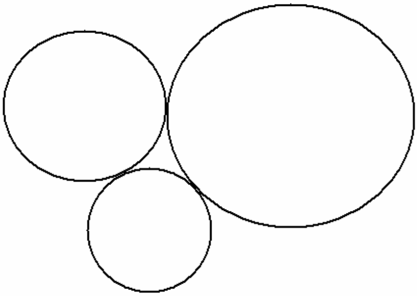
V У триколові хоча б одне з його кіл перпендикулярне двом іншими.



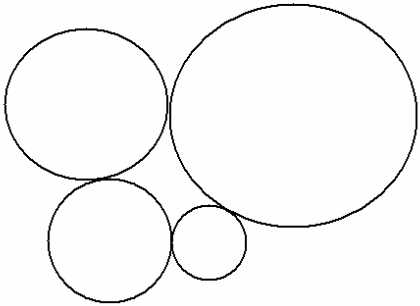


Приклади многокілників, які можна побудувати за допомогою означеної системи аксіом:

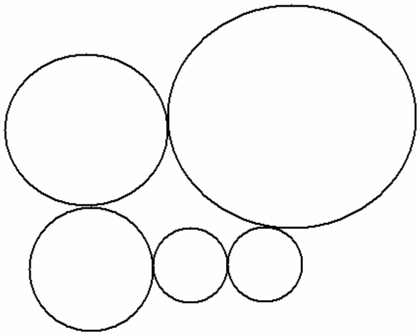
триколо



чотириколо

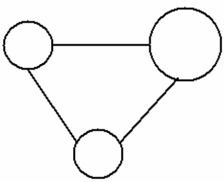


п'ятиколо

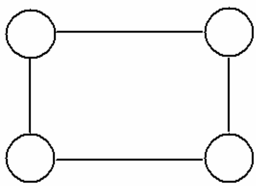


Приклади многоколокутників:

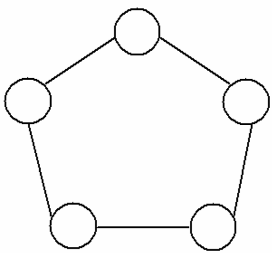
триколокут



чотириколоґкут



п'ятиколокут



Хорда – це найкоротша відстань між двома точками кола.

Центр кола – це точка рівновіддалена від усіх точок кола.

Хорда, що проходить через центр, називається діаметром.

Пряма – це сукупність нескінченної кількості хорд кожна частина з яких накладається на попередню(перша накладається тільки з наступною).

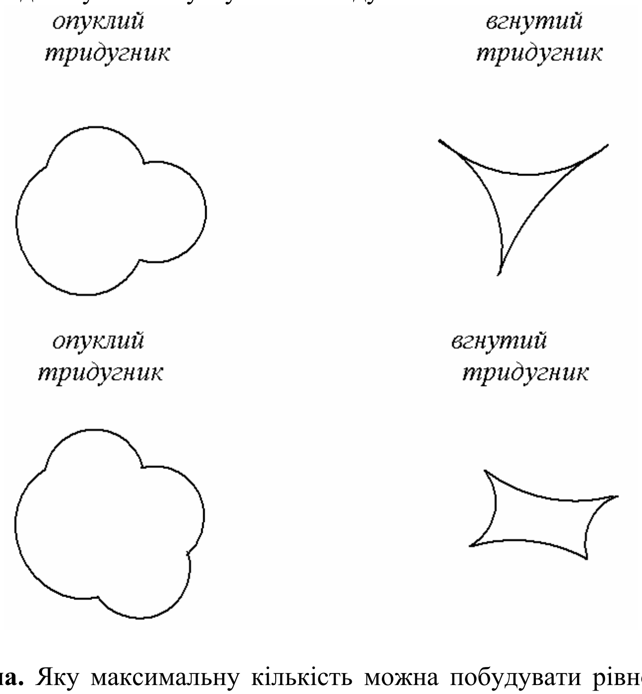
Відрізком називається частина прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома даними її точками. Ці точки називаються кінцями відрізка.

Низка кіл, що по черзі з’єднані відрізками, і перше коло з’єднане з останнім відрізком, називається многоколокутником, а відповідні відрізки – його сторонами. Многоколокутники з 3, 4,…, n колами називаються відповідно триколокутниками, чотириколокутниками, …, *n*-колокутниками.

Многоколокутник називається рівнобедреним, якщо в нього дві сторони рівні. Ці рівні сторони називаються бічними сторонами, а третя сторона називається основою многоколокутника.

Кутом многоколокутника називається градусна міра дуги, на яку спираються відповідні його сторони і яка лежить всередині многоколокутника.

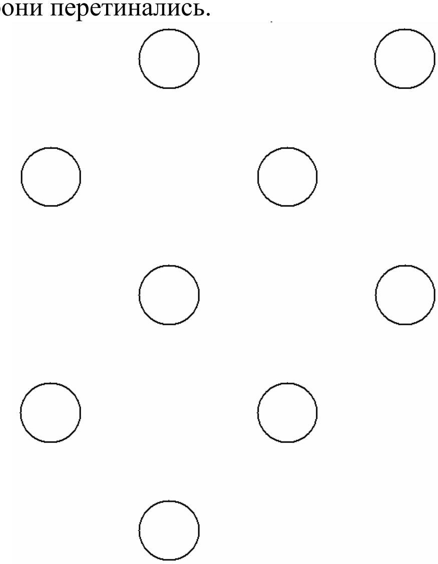
Приклади опуклих та угнутих многодугників:



Задача. Яку максимальну кількість можна побудувати рівнобедрених колокутників, якщо найкоротша відстань між 1 і 2, 3 і 4, 5 і 6, 7 і 8 рівні між собою, та найкоротші відстані між 3 і 7, 1 і 3 , 3 і 9, 4 і 8, 2 і 6 також рівні:

а) щоб їх сторони не перетинались і не співпадали;

б) щоб їх сторони перетинались.



Відповідь: а) 3; б) 17.

Отже, ми виявили можливість, як продемонструвати учням необхідність у аксіоматичному підході вивчення геометрії, що дасть змогу підвищити зацікавленість учнів у її вивченні, допоможе отримати ґрунтовні та міцні знання. Якщо ж ми відмовимося від аксіоматичного методу, то наші учні зможуть спостерігати тільки за красивими картинками, а всю динаміку процесу вивчення будь-якого об'єкту вони побачити не зможуть.

Література:

1. Бродський Я.С., Павлов О.Л. Про деякі напрямки удосконалення шкільної математичної освіти // Актуальні проблеми вивчення природничо-математичних дисциплін у загальноосвітніх закладах України. – К.: Київський державний університет ім. Т. Шевченка.
2. Погорєлов А.В. Геометрія: Підруч. для 7–11 кл. серед. шк. – К.: Рад. шк., 1991.

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК ШКІЛЬНОЇ ТА ВУЗІВСЬКОЇ МАТЕМАТИКИ ПРИ ФОРМУВАННІ ПРОФЕСІЙНИХ УМІНЬ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ

Л.В. Ізюмченко, Л.І. Лутченко, З.П. Халецька, Ю.В. Яременко
м. Кіровоград, Кіровоградський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка

В Україні сьогодні реалізується нова освітня реформа, в основу якої покладено нову філософію освіти, що передбачає перш за все становлення особистості з її неповторною індивідуальністю, духовністю, творчістю. Тому важливо формувати в студентів креативні здібності, уміння розмірковувати, критично мислити, підходити до розв'язання проблеми з різних боків, застосовувати знання з вищої математики в шкільній практиці, переносити відомі йому способи дій у нові для нього ситуації.

Наше завдання підготувати професійно компетентного вчителя математики, спроможного працювати на конкурсній основі в різних типах шкіл, здатного як самостійно розв'язувати творчі завдання дослідницького характеру, так і вміти навчати цього учнів. Тому на фізико-математичному факультеті нашого вузу створені проблемні групи та наукові гуртки, які формують у студентів евристичні прийоми розв'язання й дослідження математичних задач і проблем, старшокурсникам читаються спецкурси "Вибрані задачі математики", "Олімпіадні задачі" тощо. Поряд з цим на практичних заняттях дисциплін вищої математики ми систематично розв'язуємо задачі, які дозволяють показати застосування абстрактної теорії з вищої математики до задач шкільного курсу. Наприклад, при вивченні теми "Подільність у кільці цілих чисел" в курсі алгебри і теорії чисел, ми пропонуємо студентам такі задачі з шкільних підручників та посібників:

***Задача* 1**. Дано два натуральні числа m і n. Доведіть, що число $mn(m+n)$ – парне. [4]

Розв'язання. Якщо хоча б одне з чисел m чи n парне, то добуток $mn(m+n)$ є число парне. Якщо m і n – обоє непарні, то парним числом є їхня сума $m+n$, а тому добуток $mn(m+n)$ – парне число.

***Задача* 2**. Доведіть, що коли p – просте число, більше від 3, то число $(p–1)(p+1)$ ділиться на: а) 3; б) 8; в) 24. [4]

Розв'язання. Відомо, що добуток трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 6, а добуток двох послідовних парних чисел – на 8.

За умовою p – просте число, більше від 3, тому p – непарне. Отже, $(p–1)(p+1)$ – добуток двох послідовних парних чисел, який ділиться на 8. Добуток $(p–1)p(p+1)$ трьох послідовних чисел ділиться на 3, але $p\neq3$ і p – просте, тому p не може ділитися на 3, отже, на 3 ділиться одне з чисел $p–1$ чи $p+1$. Оскільки $(p–1)(p+1)$ ділиться на 3 і на 8, то й ділиться на 24.

Після цієї шкільної задачі корисно розв'язати з студентами *задачу* 3 з вузівського збірника, що дає змогу показати неперервний зв'язок між елементарною шкільною та вищою математикою.

***Задача* 3**. Доведіть, що коли p і q – прості числа, більші за 3, то число $p^2–q^2$ ділиться на 24. [2]

Розв'язання. $p^2–q^2=(p^2–1)–(q^2–1)$. Оскільки зменшуване та від'ємник діляться на 24 (див. *задачу* 2), то і різниця ділиться на 24.

***Задача* 4**. Чи існують два натуральні числа, добуток яких дорівнює 168, а найбільший спільний дільник – 14? [4]

Розв'язання. Нехай існують такі числа a і b, що $НСД(a, b)=14$. Тоді a ділиться на 14, b ділиться на 14, а їхній добуток – на 14^2. Оскільки число 168 не ділиться на 196, то наше припущення – хибне і таких натуральних чисел не існує.

***Задача* 5**. Знайдіть усі прості числа x і y, для яких є правильною рівність: а) $3x–y=12$; б) $x+y=31$; в) $x^2–y^2=21$. [4]

Вказівка.

а) Слід зауважити, що y – кратне 3, тому єдиний розв'язок (5; 3).

б) Числа x і y різної парності, тому $x=2$ або $y=2$. Відповідь: (2; 29), (29; 2).

в) Числа x і y різної парності, тому $y=2$. Відповідь: (5; 2)

***Задача* 6**. Доведіть, що число $\sqrt{14+6\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$ – натуральне. [1]

Розв'язання. $\sqrt{14+6\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}=\sqrt{9+2\cdot3\sqrt{5}+5}+\sqrt{9-2\cdot3\sqrt{5}+5}=$

$=\sqrt{(3+\sqrt{5})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}=\left|3+\sqrt{5}\right|+\left|3-\sqrt{5}\right|=6$, $6\in N$.

***Задача* 7**. Доведіть, що число $\sqrt{23-8\sqrt{7}}+\sqrt{23+8\sqrt{7}}$ – ціле. [3]

Відповідь. $\sqrt{23-8\sqrt{7}}+\sqrt{23+8\sqrt{7}}=8$, 8 – ціле число.

***Задача* 8**. Спростіть вираз: $\sqrt{21-4\sqrt{20}}-\sqrt{21+4\sqrt{20}}$. [3]

Відповідь. $\sqrt{21-4\sqrt{20}}-\sqrt{21+4\sqrt{20}}=-2\sqrt{5}$.

***Задача* 9**. Спростіть вираз: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$. [5]

Розв'язання. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=(\sqrt{2}+1)–(\sqrt{2}–1)=2$.

***Задача* 10**. Доведіть, що число $8^{17}–2^{45}$ кратне 18. [3]

Розв'язання. $8^{17}–2^{45}=2^{51}–2^{45}=2^{45}(2^6–1)=2^{45}\cdot63$. Отримали число, що ділиться на 2 та на 9, тому ділиться й на 18.

***Задача* 11**. При яких натуральних значеннях n значення виразу:

а) n^4+4, б) n^4+n^2+1 – просте число? [3]

Розв'язання.

а) $n^4+4=(n^4+4n^2+4)–4n^2=(n^2+2)^2–(2n)^2=(n^2–2n+2)(n^2+2n+2)$. Число n^4+4 просте тоді і тільки тоді, коли $n^2–2n+2=1$, звідки $n=1$ (так як другий множник $n^2+2n+2\geq5$). Відповідь: при $n=1$.

б) $n^4+n^2+1=(n^4+2n^2+1)–n^2=(n^2+1)^2–n^2=(n^2–n+1)(n^2+n+1)$. А тоді з рівності $n^2–n+1=1$ маємо $n=1$.

***Задача* 12**. Нехай A – множина цілих чисел, що діляться на 4, B – множина цілих чисел, що діляться на 3. Які з чисел 9, 0, –24, –53, 128, 1242048 входять у множину $A\cup B$? [6]

***Задача* 13**. Знайти об’єднання та перетин множин: а) A – {парні числа}, B – {натуральні степені числа 2}, б) M – {прості числа}, P – {непарні числа}. [6]

Відповідь. а) $A\cup B=A$; $A\cap B=B$. б) $M\cup P=P\cup\{2\}$; $M\cap P=M\backslash\{2\}$

Це дозволяє з одного боку більш ґрунтовно розглянути основні поняття та властивості елементів вищої математики, а з другого – формує у студентів уміння розв’язувати нестандартні, олімпіадні задачі, сприяє розвитку їхніх креативних здібностей тощо.

Література:

1. Возняк Г.М., Возняк О.Г. Алгебра. Різнорівневі тематичні контрольні роботи. 8 клас. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2001. – 72 с.
2. Грибанов В.У., Титов П.И. Сборник упражнений по теории чисел. – Москва: Просвещение, 1964. – 144 с.
3. Збірник завдань для державної атестації з алгебри. 9 клас / За ред. З.І. Слєпкань. – Харків: Гімназія, 2002. – 144 с.
4. Кравчук В., Янченко Г. Математика. 6 клас. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2001. – 288 с.
5. Михайловський В.І., Ядренко М.Й., Призва Г.Й., Вишенський В.А. Збірник задач республіканських математичних олімпіад. – К.: Вища школа, 1970. – 264 с.
6. Шкіль М.І. та ін. Алгебра і початки аналізу: Проб. підруч. для 10-11 кл. серед. шк. / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. – К.: Зодіак–ЕКО, 1995. – 608 с.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ О БРОСАНИИ МОНЕТЫ

К.И. Кабанов, Т.И. Лукащук
г. Харьков, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
kkabanov@ukr.net

Теория вероятностей как наука берет свои истоки в теории азартных игр. Несмотря на то, что современная теория вероятностей имеет мало общего с играми, для демонстрации основных понятий и теорем они прекрасно подходят. Игра в орлянку – одна из наиболее простых и интуитивно ясных игр. Примеры игр с монетами обладают двумя важными свойствами: они наглядны (желающие всегда могут в них сыграть) и среди них имеется большое число задач, имеющих неочевидные, а порой парадоксальные ответы, что во многом повышает интерес к изучаемому предмету. В статье рассматривается ряд примеров и задач, связанных с бросанием монет, которые могут использоваться в лекционном курсе теории вероятностей. Следует отметить, что единообразие примеров позволяет студентам лучше разобраться в особенностях различных вопросов, изучаемых в классическом курсе теории вероятностей. Кроме того, большая часть задач имеет достаточно интересную собственную историю, которая показывает пути развития теории вероятностей и науки в целом.

При демонстрации монеты, практически любой человек, даже не имеющий представления о теории вероятностей, без труда догадается, что при бросании монеты возможны два возможных исхода: орел и решка. Вероятность выпадения, например, орла равна ½ (или 50%). Этот пример приводит к общей формуле для вычисления вероятностей любого события в случае равновозможных исходов $P(A)=m/n$, где n – общее число исходов (в случае одной монеты $n=2$, орел и решка), m – число благоприятных исходов ($m=1$, на монете только один орел).

Достаточно показательно и поучительно непосредственное применение этой формулы в задаче, связанной с вероятностью выпадения двух орлов при двух бросаниях монеты. Все возможные исходы удобно представить в виде таблицы,

2-й брос.\1-й брос.	*О*	*Р*
О	ОО	РО
Р	ОР	РР

из которой сразу видно, что общее число исходов равно произведению числа возможных результатов первого и второго бросаний (2x2=4). Благоприятным является только один исход (клетка с двумя орлами). Таким образом, искомая вероятность равна ¼. Подобные рассуждения позволяют получить общие формулы для задач с упорядоченными выборками, как в случае выборок с повторениями, так и без повторений. Интересно отметить, что ошибочные решения этой задачи давались такими великими математиками, как Лейбниц и Даламбер. Решение Даламбера было даже опубликовано в энциклопедии.

Задача о трех бросаниях монеты имеет замечательную интерпретацию, известную как «Задача о справедливом разделе ставки». Это одна из самых легендарных задач, на решение которой потребовалось очень много времени, ее в свое время безуспешно пытались решить величайшие математики. Только в 1654 году после нескольких неудачных попыток Паскаль и Ферма независимо дуг от друга нашли ее правильное решение. Сама задача имеет следующее условие. Два игрока играют в орлянку. Первый игрок сделал ставку на орла, а второй на решку. Игра ведется до 6 побед. При счете 5:3 игру пришлось прервать. Как справедливо разделить ставку между игроками? Следуя идее Ферма, предполагаем, что игра продолжается до победы одного из игроков. Максимальная длина добавочной серии составляет три партии, которые делают все 2х2х2=8 возможных исхода равновероятными (даже если некоторые из них окажутся лишними). Поскольку только в одном из восьми случаев второй игрок получает весь приз, т.е. выпали все три раза решки, а в остальных семи случаях побеждает первый игрок, то справедливым является соотношение 7:1.

Основной раздел теории вероятностей посвящен случайным величинам. Хорошими иллюстрациями для некоторых классических распределений могут служить распределения, также связанные с бросанием монеты. В некоторых случаях интересно использовать и неправильные монеты (у которых вероятность выпадения орла и решки не обязательно равна ½, а может иметь и другие значения).

Так, в схеме однотипных испытаний, биномиальное распределение возникает при рассмотрении случайной величины X, равной числу появлений, например, орлов в серии из n бросаний. Если допустить ненулевую вероятность падения монеты на ребро, то можно рассмотреть и более сложное полиномиальное распределение. Примером случайной величины, принимающей бесконечное число значений, служит геометрическое распределение, если в качестве случайной величины X принять номер бросания, на котором монета впервые выпадает орлом.

Особый интерес представляет и задача, известная под названием «Санкт-Петербугский парадокс» (статья Даниила Бернулли была опубликована в начале XVII века Академией наук в Санкт-Петербуге), в которой приводится простой пример случайной величины, имеющей бесконечное математическое ожидание. Игра заключается в бросании правильной монеты до тех пор, пока впервые не появится орел. Если орел появился на k-ом шаге, игрок получает выигрыш, равный 2^k. Какой первоначальный взнос должен сделать игрок, чтобы игра стала безобидной, т.е. среднее значение выигрыша было равно нулю?

Достаточно сложной, но интересной и изобилующей парадоксальными ответами является задача о нахождении среднего числа бросаний монеты, до появления определенной комбинации орлов и решек. Например, очевидно, что вероятность получить комбинацию (орел, орел) раньше комбинации (орел, решка) равна вероятности получить комбинацию (орел, решка) раньше комбинации (орел, орел). В тоже время, среднее число бросаний для получения комбинации (орел, орел) равно 6, а для комбинации (орел, решка) равно 4. Это одна из немногих задач, в которых обосновано использование условного математического ожидания. Показательным является и рекурсивный метод вычислений. Для студентов, не изучавших теорию числовых рядов, эта схема является, по-видимому, единственным обоснованием возможности суммирования бесконечного числа слагаемых. Он является очень удобным при получении формул для математического ожидания и дисперсии биномиального, пуассоновского и т.п. распределений.

Для многих специальностей курсы теории вероятностей и математической статистики объединены в один, с относительно малым числом аудиторных часов. В таких курсах удобно параллельно рассматривать распределения случайных величин и их числовые характеристики

Значения с.в. x_k	x_1	x_2	…
Вероятность p_k	p_1	p_2	…

и выборку, полученную в результате наблюдений некоторой случайной величины.

Значения с.в. x_k	x_1	x_2	…
Частота n_k/n	n_1/n	n_2/n	…

Причем, для максимальной схожести, удобно в таблицу вносить именно частоту (как хорошую оценку вероятности). При таком подходе, формулы для вычисления математического ожидания и выборочного среднего, дисперсии и выборочной дисперсии будут полностью аналогичны.

Упражнениями по этой теме может служить исследование результатов бросания погнутой монеты с неизвестными вероятностями выпадения орла и решки, различные методы оценки параметров распределения, проверка гипотез, исследование последовательности на случайность и т.п. При очень большом числе бросаний интересно сравнить результаты с теоремами об аппроксимации биномиального распределения нормальным и пуассоновским распределениями (для монет «различной степени погнутости»).

ПРОБЛЕМИ ВИВЧЕННЯ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ: ІСТОРИЧНИЙ АСПЕКТ

В.М. Кліндухова
м. Київ, Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова
ribca@i.com.ua

Предмети математичного циклу – складова частиною комплексу фундаментальних дисциплін різних вищих навчальних закладів. Вони (елементарна математика, вища математика або спеціальні математичні курси, такі, наприклад, як чисельні методи, теорія ймовірностей та математична статистика, тощо) зазвичай містять у певному обсязі відомості з теорії наближених обчислень, широко використовують її провідні поняття та методи. Застосування останніх відбувається і поза межами математичних дисциплін, зокрема при проведенні студентами експериментальних робіт та лабораторних практикумів. При цьому виникає протиріччя, яке пов'язане з наявністю невідповідності між фактичним рівнем знань, умінь та навичок (ЗУН) студентів з наближених обчислень (НО) та вимогами, які висуваються до них програмами навчальних закладів.

Вищевказана невідповідність стає джерелом проблеми нерозуміння студентами певної частини навчального матеріалу, як з фундаментальних, так і зі спеціально-професійних дисциплін. Робити такі висновки нам дозволяє аналіз результатів констатуючого експерименту. Його проведення відбувалося в два етапи і охоплювало різні за рівнем та спеціалізацією навчальні заклади (див. схему 1). Метою експериментальних досліджень було, по-перше, виявлення рівня ЗУН з НО у вчорашніх школярів за допомогою виконання ними певних завдань. По-друге, з'ясування за допомогою аналізу відповідних навчальних програм, а також бесід з викладачами, рівня вимог до базової математичної підготовки студентів, зокрема тих, що стосуються відомостей з теорії НО. Вищезгадана невідповідність, на наш погляд, пов'язана з тим, що в ході планування лекційних, практичних та лабораторних занять, викладачі вищих та середніх навчальних закладів керуються, як правило, окрім відповідних нормативних документів, наступними двома факторами:

– чинною шкільною програмою з математики;
– досвідом своїх колег-попередників, який з часом узагальнюється у традиційно-уставлені концепції викладання.

Вплив як першого так і другого факторів приводить до хибних висновків щодо наявності у студентів ЗУН з НО, які повинні були сформуватись в процесі вивчення шкільної математики.

Так, згідно чинної шкільної програми з математики передбачається засвоєння учнями доволі змістовного обсягу матеріалу з НО (див. табл. 1) [3, с. 33-34].

Схема 1

<u>Перший етап</u>: проводився з абітурієнтами навчальних закладів, в яких вимагалося складання іспиту з математики

<u>Другий етап</u>: проводився зі студентами навчальних закладів, в програмах з математики яких передбачається володіння певним обсягом ЗУН з НО

- Фізико-математичні факультети педагогічних вузів
- Нематематичні спеціальності педагогічних вузів
- Фінансово-економічні спеціальності політехнічних вузів
- Технічні спеціальності політехнічних вузів
- Педагогічні училища
- Коледжі фінансово-економічного спрямування
- Коледжі кібернетичного спрямування
- Професійно-технічні училища

Таблиця 1

Фрагмент чинної програми з математики (алгебра, IX клас)

Тема та мета вивчення навчального матеріалу	Основні вимоги до математичної підготовки учнів
IV Елементи прикладної математики (10 годин). *Мета:...* Ввести поняття про наближене значення чисел та величин, абсолютну та відносну похибки, правильну цифру наближення, оцінку похибок. Сформулювати правила арифметичних дій з наближеними значеннями за способом підрахунку правильних цифр та навчити застосовувати їх при розв’язування задач.	Учні повинні: *Мати уявлення про:* ... – наближені значення чисел і величин; – абсолютну [і відносну] похибки, точність наближення; *Знати:* – правила округлення чисел, виконання арифметичних дій з наближеними значеннями; ... *Уміти:* ... – знаходити абсолютну [і відносну] похибки, точність наближення; – виконувати дії над наближеними значеннями, в тому числі за допомогою комп’ютера; – застосовувати набуті знання до розв’язування прикладних задач.

Але ж фактична кількість часу (2–4 години), який відводиться вчителями на його вивчення, а також розміщення матеріалу (остання тема 9-го класу) не дають реальних можливостей для практичної реалізації вимог програми.

Що ж стосується впливу другого фактору, то традиції викладання, будучи в певній мірі, своєрідним симбіозом авторських досліджень та вимог суспільства, щодо рівня та якості освіти, супроводжують і дуже часто спрямовують навчальний процес. Так, надзвичайна роль "сили традицій" у взаємозв'язку з вивченням НО підкреслювалась видатними дослідниками цієї проблеми В.М. Брадісом та О.М. Криловим [1, с. 8]. Дослідити, яким чином формувались традиції викладання НО, можна зробивши відповідний ретроспективний аналіз. Такий аналіз виявляється тісно пов'язаним з вищезгаданими вимогами суспільства до вищої, середньої спеціальної та шкільної освіти, які, в свою чергу, постійно змінювались. При цьому особливо рухливою ланкою виявляється саме шкільна освіта. Так, історичний огляд свідчить про те, що шкільний курс математики (ШКМ) набував свого реформування в післявоєнний період майже кожні десять років. Кожний виток реформування шкільної математики відображався і у висвітленні теми "Наближені обчислення". Принципові зміни при цьому стосувались, по-перше, місця НО (тобто в якому класі необхідно вивчати НО), і, по-друге, вибору для вивчення основних методів НО (див. табл. 2).

Таблиця 2

<table>
<tr><th>Програми з математики</th><th>Клас</th><th>Тема</th><th>К-сть годин на вивчення НО</th><th>Які методи наближених обчислень вивчались</th></tr>
<tr><td>1960 рік</td><td>6 кл.</td><td>Наближені обчислення</td><td>16</td><td>1. Правила підрахунку правильних цифр</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1968 рік з уточненнями 1972 року</td><td>7 кл.</td><td>Нерівності та їх застосування до наближених обчислень</td><td>9</td><td rowspan="2">1. Метод меж
2. Метод врахування границь похибок
3. Правила підрахунку правильних цифр</td></tr>
<tr><td>8 кл.</td><td>Організація обчислень та обчислювальна техніка</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Початок та середина 80-х років</td><td>7 кл.</td><td>Наближені обчислення</td><td>15-20</td><td>1. Метод меж
2. Правила підрахунку правильних цифр</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1989 рік</td><td>8 кл.</td><td>Нерівності</td><td>?</td><td rowspan="2">1. [Метод меж]
2. Правила підрахунку правильних цифр</td></tr>
<tr><td>9 кл.</td><td>Організація обчислень</td><td></td></tr>
<tr><td>1992 рік</td><td>8 кл.</td><td>Нерівності</td><td>?</td><td>1. [Метод меж]</td></tr>
</table>

Перше післявоєнне реформування математичної освіти відбулося у 1954 році, але воно не передбачало введення у ШКМ НО. Відсутність НО у ШКМ методисти того часу прокоментували, як порушення проголошених принципів політехнізації навчання та посилення взаємозв'язків теорії з практикою. Саме тому після остаточного переходу на ці програми майже одразу розпочинається перехід на програми з математики 1960 року, в які вже були включеними відомості з НО. Хоча в методичній літературі, публікація якої передувала та супроводжувала період реформ середини 50-х початку 60-х р.р., розглядалися різні підходи, щодо потенційної наявності методів НО в ШКМ, однак свій вибір укладачі програми зупинили саме на правилах підрахунку правильних цифр (ППІЦ).

Такий вибір, на наш погляд, пояснювався тим, що існуючий фрагментарний досвід введення НО в ШКМ (програми ГУСа 1927 року) стосувався саме ППІЦ, а також тим, що саме ППІЦ отримали найбільшої популярності завдяки дослідженням та роботам В.М. Брадіса. Вони публікувались, доповнювались та перевидавались протягом багатьох років великими тиражами. Загальновідомі роботи В.М. Брадіса адресувалися учням різних класів, студентам, а також вчителям-практикам. За словами самого автора, він був активним пропагандистом правил підрахунку правильних цифр на протязі понад 30-ти років, починаючи з 1923 року [1].

Одразу після отримання перших результатів роботи за новими програмами стало зрозуміло, що такий поспішний, необдуманий вибір методу НО дискредитував саму ідею введення НО в ШКМ. Небувале піднесення пріоритету природничо-технічних наук, пов'язане з початком "космічної ери", розвитком атомної енергетики та мілітаризації економіки, потребувало серйозного математичного апарату, основи якого повинні були закладатись, починаючи зі шкільної лави, і який не міг задовольнитись виключно методом НО, заснованим на принципі малої ймовірності великих похибок. Обговорення цієї проблеми розгорнулося у 1964 році до масштабів всесоюзної дискусії, основні висновки та пропозиції якої знайшли своє відображення у нових програмах з математики 1968 року. Виділивши із цілої низки критичних зауважень щодо вивчення НО згідно програми 1960 року лише ті з них, які стосувались обраного методу НО, можна сказати, що основна критика ППІЦ була пов'язана з їх науковою та методичною обґрунтованістю; частковою невизначеністю та імовірнісним характером; а також зі "штучною універсальністю", яка підтримувалась тим, що він залишався єдиним методом НО, який вивчався в школі.

У програмах з математики 1968 року знайшли своє місце усі три основні методи НО, але при цьому на передові позиції вийшли методи строгого врахування похибок (метод меж та метод врахування границь похибок). У 1972 році вищезгадані програми були певним чином скоректовані у зв'язку з публікацією нових навчальних посібників. Згідно цих змін, на думку авторів коректив та укладачів підручників, НО стають не ізольованим матеріалом, а вводяться як одне із можливих застосувань теорії нерівностей. У такому вигляді програма проіснувала недовго, саме тому, за свідченнями методистів та вчителів того часу, так і не вдалося практично перевірити її ефективність.

Черговому реформуванню математичної освіти було покладено початок у зв'язку з виходом у 1978 році постанови, в якій відмічалась перевантаженість чинної програми, а також мала увага до трудового навчання. У зв'язку з цим кількість годин на трудове навчання було збільшено вдвічі і з'явилося одразу три проекти програм з математики (перша у 1978 році, а дві наступні у 1979 році). Ще до появи цих проектів, але вже після оприлюднення вищезгаданої постанови у 1978-79 н.р., було рекомендоване спочатку часткове, а потім і остаточне виключення відомостей з НО із курсу алгебри VIII класу. Часткове скорочення планувалось за рахунок виключення із теми "Наближені обчислення" питання "Оцінка похибок результатів дій", а також розглядання дій з наближеними даними за ПППЦ без посилань на теореми про границі похибок. Проте вже через місяць було вирішено повністю сконцентрувати матеріал з НО у курсі алгебри VII класу. В ньому залишилися лише два методи НО (див. табл.2): метод меж та ПППЦ. Метод врахування границь похибок був виключений із програми, так як він вважався занадто складним для сприйняття школярами. Така сконцентрованість відомостей в одному класі йшла врозріз з численними дослідженнями фахівців, які в своїх роботах неодноразово вказували на те, що НО слід вивчати поступово та систематично. Методисти та вчителі-практики того часу критикували часті реформування математичної освіти, а також реформування за так званим "методом ножиць": "...Можливо є поганими не самі програми, а їх погане впровадження. Скорочення програм ще не забезпечує їх доступності, так як багато важливих речей викладаються неповно і не підкріплюються достатньої кількістю прикладів та задач".

Вищевказані проекти програм з математики набули широкого обговорення на сторінках періодичних видань. В результаті остаточна програма з математики так і не була опублікована, натомість кожного року публікувались скоректовані програми, які діяли лише один рік.

В середині 80-х років, після загальновідомих політичних подій спостерігається ситуація, коли в деяких програмах з математики НО продовжують своє існування у вигляді окремого розділу, причому вже із застосуванням мікрокалькулятор (МК). В інших же програмах НО розпорошені по багатьох розділах і навіть класах. При цьому виявляється непростою задачею виявити, які саме методи НО вивчались згідно з цими програмами, так як разом з розпорошеністю навчального матеріалу з НО в багатьох випадках зникають і більш-менш конкретні коментарі в програмах щодо використання методів НО. Прикладом таких програм є програми 1989 року. Відповідно з дослідженнями сучасних методистів [3, с. 16], за цими програмами школи України працювали до 1991-92 н.р. В них спостерігається чітка вказівка щодо вивчення ПППЦ, що ж стосується методу меж, то про його наявність в програмах, можна судити лише по непрямим вказівкам [4, с. 54, 65]. Але ж по ним неможливо судити, де саме і в якому обсязі вивчається метод меж. Саме тому ми і беремо пов'язані з цим питанням елементи таблиці 2 у квадратні дужки.

Аналогічна ситуація склалася і з програмами 1992 року. Їх сучасні методисти [6, с. 16] назвали перехідними скороченими програмами, розрахованими на найближчу перспективу. В цих програмах повторюється ситуація з методом меж (див. програми 1989 року), а про ПППЦ згадки та вказівки взагалі відсутні. При чому в той же час в коментарях до теми "Розв'язання трикутників" (Геометрія, IX кл.) [5, с. 53] ми знаходимо заклики до активного використання методів НО. Чи повинні були якимось чином методи НО бути відображеними у ШКМ (причому немаловажно, які і де!), чи це лише калька з програм минулих років [4, с. 65], залишається незрозумілим.

"Загадкове зникнення" або "таємне існування" методів НО в ШКМ пов'язане, на нашу думку, з двома наступними моментами. По-перше, у зв'язку з неодноразовим розвантаженням та скороченням навчального матеріалу з математики. Першими кандидатами на виключення з програми, як правило, стають ті теми, які в ній з'явились останніми. Тобто ті, які ще не закріпили свої фундаментальні позиції в шкільній математиці, в тому числі і із-за відсутності розробленості відповідних методик. Саме таку роль і довелося виконати основним методам НО. Другим чинником стало впровадження у шкільну практику мікропроцесорної техніки (МК). Вивчення роботи з МК спочатку, ще за часів існування цілісного курсу НО, почало розглядатись з одному розділі з НО. Із-за відсутності чітких коментарів та ґрунтовних досліджень залишалося без відповіді дуже важливе питання: "МК заперечує своїм існуванням у шкільних програмах вивчення методів НО, або, навпаки, дає їм якісно новий поштовх?". Частково ці питання підіймались З.І. Слєпкань, Н.Ф. Єлизаветиною [2], А.К. Цорієвою [7]. Але навіть за умови існування двох вищеназваних проблемних моментів, офіційно та науково обґрунтовано непотрібність НО в ШКМ ніхто так і не довів. Їх роль та місце в ШКМ почала просто замовчуватись і розпочався етап "інформаційного вакууму".

Як висновок, можна зауважити, що представлення основних методів НО в шкільних програмах з математики різних років певним чином нагадує так звані "коливання із крайності в крайність": то не вивчалося жодного з методів НО, то одразу усі три. Можливо дійсно не треба пропонувати *усі* основні методи НО для *усіх* учнів? Остаточна відповідь на це питання так і не була одержана із-за численних реформувань шкільної математики, згідно яких вивчення математики за новими програмами відбувалося дуже нетривалі терміни. В основному вивчення математики проходило за різноманітними перехідними програмами. Сьогодення, впровадження рівневої та профільної диференціації, дають унікальну можливість для створення нової концепції вивчення НО в ШКМ. Вона передбачає, по-перше, відбір фундаментально-базового матеріалу з НО, чітко пов'язаного з концентричним розвитком основних змістових ліній та віковими особливостями учнів. І, по-друге, відбір для вивчення тих провідних понять та методів НО в залежності від обраного профілю.

Ретроспективний аналіз відображення основних методів НО в шкільних програмах з математики є лише першою сходинкою при з'ясуванні та вирішенні проблеми взаємоузгодженості вивчення шкільної математики та навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі. Вищезгадана проблема набуває якісно нового звучання в умовах реформування вищої освіти і безперечно потребує свого науково обґрунтованого розв'язання.

Література:

1. Брадис В.М. Вычислительная работа в курсе математики средней школы. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962. – 252 с.
2. Литовченко З.М., Єлизаветина Н.В. Наближені обчислення: Посібник для вчителя. – К.: Радянська школа, 1988. – 121 с.
3. Математика. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Навчальна книга, 2003. – 302 с.
4. Программы по математике для 5-11 классов средней общеобразовательной школы. – К.: Радянська школа, 1989. – 89 с.
5. Програми з математики для 5-11 класів середньої загальноосвітньої школи. – К.: Освіта, 1992. – 89 с.
6. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
7. Цориева А.К. Формирование вычислительных навыков и умений учащихся 7-8 классов по алгебре: Дис. канд. пед. наук: 13.00.02. – К., 1993. – 175 с.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ З ВИКОРИСТАННЯМ КОМП'ЮТЕРА

Т.П. Кобильник
м. Дрогобич, Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка
taras2408@mail.ru

В останні десятиріччя сформувався та розвився інтегративний науковий напрям на межі математики та інформатики – комп'ютерна математика. Основним засобом комп'ютерної математики стали системи символьної (комп'ютерної) математики. До таких систем відносять Mathematica, Maple, MathCad, MatLab тощо.

Проте, на жаль, і сьогодні із системами комп'ютерної математики (СКМ) недостатньо знайомі не тільки учні та студенти, але й вчителі та викладачі вузів. Це перешкоджає розв'язанню ряду першочергових завдань освіти – підвищення її фундаментальності і входження нашої освітньої системи в загальносвітову, де СКМ в останні роки знайшли широке застосування. На це є декілька причин. Перша з них – неправильна оцінка принципового значення, користі і необхідності СКМ. Так, зустрічаються висновки мало не про шкоду таких систем в освіті: деякі педагоги вважають, що СКМ відучать учнів і студентів від аналізу математичної суті задач. Інша – більш вагома – слабка матеріально-технічна база шкіл, вузів. Класами із сучасними ПК багато наших навчальних закладів, в тому числі і школи, не забезпечені. Проте це суто технічна проблема, яка поступово розв'язується.

Як застосовувати СКМ (у методичному, науковому і практичному відношенні), залежить від користувача – перш за все педагога. Важливо, що СКМ знімають у тих, хто навчається, психологічний бар'єр в реальному застосуванні математики.

Застосування СКМ в освіті позбавляє учнів, студентів від рутинних обчислень і вивільняє час для обмірковування алгоритмів розв'язування задач, ґрунтовнішої їх постановки, подання результатів у найбільш наочній формі. При цьому відкриваються нові можливості щодо гуманізації та гуманітаризації освіти, диференціації навчання відповідно до запитів, нахилів і здібностей учнів. Таким чином, СКМ не тільки не позбавляють учнів, студентів математичних навиків, а навпаки, здатні їх поглибити.

Серед багатьох проблем удосконалення навчального процесу з математики особливої уваги потребує проблема методики розв'язування задач з параметрами. На таких задачах можна перевірити знання основних розділів шкільної математики, рівень математичного мислення, початкові навички дослідницької діяльності.

Слід зазначити, що формулювання задач з параметрами не виходять за межі шкільної програми і для їх розв'язання не потрібні якісь спеціальні знання. Основне при розв'язанні таких задач – це ідея. А для цього потрібні логічні міркування, добрі знання теоретичного матеріалу, вміння поєднувати в єдине ціле знання з кількох розділів математики.

Основна увага приділяється задачам, пов'язаним з дослідженням квадратичної функції і розміщенню коренів квадратного рівняння відносно заданих чисел. Це пояснюється тим, що значна частина раціональних, ірраціональних, тригонометричних рівнянь і нерівностей після перетворень зводяться до аналізу квадратичної функції.

Нехай дано рівність виду $f(x, a)=g(x, a)$, де x – невідоме, a – довільне стале число (параметр).

Розв'язати задачу з параметрами – це означає встановити, при яких значеннях параметрів задача має розв'язок, і знайти ці розв'язки (як правило, в залежності від параметра a). Складність такої задачі полягає в тому, що з однієї сторони параметр a вважається фіксованим, що дає можливість оперувати з ним як з числом, з іншої сторони параметр вважається фіксованим, але довільним, тобто, невідомим числом, що вимагає проведення відповідних досліджень.

В основу розв'язування задач з параметрами може бути покладений наступний принцип: значення параметра (або параметрів, якщо їх є декілька) вважається довільно фіксованим, а потім шукається розв'язок задачі так, як у рівняннях та нерівностях з одним невідомим. Відповіддю повинно бути перерахування розв'язків для кожного допустимого значення параметрів. Потрібно привчити учнів записувати відповідь, перераховуючи всі значення параметра в порядку зростання.

Розглянемо приклади.

При розв'язуванні квадратних рівнянь і нерівностей часто користуються теоремою Вієта та властивостями квадратичних функцій.

Приклад. При яких значеннях параметра a сума коренів квадратного рівняння $x^2+(a^2+2a–3)x+a=0$ дорівнює нулю?

Розв'язання. За теоремою Вієта $x_1+x_2=-(a^2+2a-3)=0$. З умови $x_1+x_2=0$ не випливає, що корені дійсні. Потрібно ще виконання умови

$$D\geq 0 \Leftrightarrow (a^2+2a-3)^2-4a\geq 0,$$

тобто треба розв'язати систему

$$\begin{cases} -(a^2+2a-3)=0, \\ (a^2+2a-3)^2-4a\geq 0. \end{cases}$$

У Mathematica 4.1 її можна розв'язати так

```
InequalitySolve[-(a^2+2a-3)==0&&(a^2+2a-3)^2-4*a≥0, {a, x}],
```

результатом виконання якої буде

```
a==-3.
```

Відповідь: $a=-3$.

Приклад. При яких значеннях параметра a обидва корені квадратного рівняння $(a-2)x^2-2ax-a+3=0$ додатні?

Розв'язання. Нехай x_1, x_2 – корені рівняння. Тоді

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2a}{a-2} > 0, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{3-a}{a-2} > 0, \\ \dfrac{D}{4} = a^2 - (a-2)(3-a) \geq 0. \end{cases}$$

За допомогою СКМ ця система розв'язується наступним чином

```
InequalitySolve[2a/(a-2)>0&&(3-a)/(a-2)>0&&a^2-(a-2)(3-a)≥0, {x, a}].
```

Результатом виконання даної функції буде

```
2<a<3.
```

З цього робимо висновок: при $a \in (2; 3)$ обидва корені рівняння додатні.

Відповідь: $a \in (2; 3)$.

Приклад. Вкажіть межі розміщення коренів рівняння $x^2 - 2ax + 1 = 0$, якщо $a \in (0; 4)$.

Розв'язання. З рівняння знайдемо $a = \dfrac{x^2+1}{2x}$ і розв'яжемо подвійну нерівність

$$0 < \frac{x^2+1}{2x} < 4\,.$$

Розв'язування проводимо у Mathematica 4.1:

```
InequalitySolve[0<(x^2+1)/(2*x)<4, x].
```

Отримаємо результат:

$$4 - \sqrt{15} < x < 4 + \sqrt{15}.$$

Відповідь: $x \in \left(4 - \sqrt{15}; 4 + \sqrt{15}\right)$.

Приклад. При яких значеннях параметра a будь-який розв'язок нерівності $x^2 - 4ax + 3 < 0$ задовольняє подвійну нерівність $1 \leq x \leq 2$?

Розв'язання. Позначимо квадратний тричлен $x^2 - 4ax + 3$ через $f(x)$. Для виконання умови задачі цей тричлен повинен мати два корені на проміжку $1 \leq x \leq 2$ (див. рис. 1).

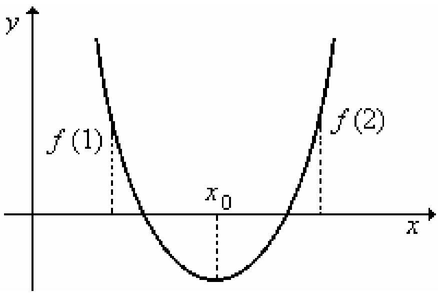


Рис. 1

Позначимо через D дискримінант тричлена. Нехай x_0 – абсциса вершини параболи. Тоді $x_0 = -\left(\dfrac{-4a}{2}\right) = 2a$. Згідно з рисунком складаємо систему нерівностей

$$\begin{cases} f(1) \geq 0, \\ f(2) \geq 0, \\ 1 < 2a < 2, \\ D > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-4a \geq 0, \\ 7-8a \geq 0, \\ \dfrac{1}{2} < a < 1, \\ 16a^2 - 12 > 0. \end{cases}$$

Цю систему розв’язуємо у Mathematica 4.1 за допомогою

```
InequalitySolve[4-4a≥0&&7-8a≥0&&1/2<a<1&&16*a^2-12>0, {a,x}],
```

розв’язком якої буде

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < a \leq \frac{7}{8}$$

Відповідь: $a \in \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{7}{8}\right]$.

Приклад. При яких значеннях параметра a система $\begin{cases} x^2 + x + a = 0, \\ x > 0 \end{cases}$ має хоча б один розв’язок?

Розв’язання. У площині $0xa$ побудуємо графіки функцій $a=-x^2-x$ і $a=x$. Побудову проводимо у Mathematica 4.1 за допомогою функції

```
Plot[{-x^2-x,x}, {x,-3,2}].
```

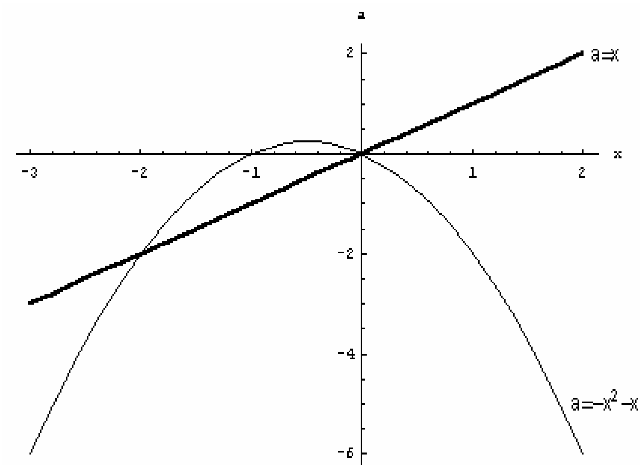


Рис. 2

Графічним розв'язком системи є множина всіх пар (x; a), що належать параболі $a=-x^2-x$ і знаходяться під прямою $a=x$. Як видно з рис. 2, параметр a задовольняє умову $a<0$.

Відповідь. $a\in(-\infty;0)$.

Впровадження в педагогічну практику СКМ забезпечує перехід від репродуктивного характеру діяльності і механічного засвоєння знань учнями до надання їхній навчально-пізнавальній діяльності дослідницького спрямування. Це підвищує самостійність учнів, стимулює їх до набуття і застосування нових знань. У загальному застосування Mathematica 4.1 є дидактично корисною системою для комп'ютеризованої підтримки на уроках математики.

САМОСТІЙНА РОБОТА СТУДЕНТІВ З ОСОБЛИВИМИ ПОТРЕБАМИ ПРИ ВИВЧЕННІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

А.Д. Комісарова
м. Рівне, Відкритий міжнародний університет розвитку людини "Україна"

В наш час бурхливих змін у всіх сферах життя кінцевою метою вищої освіти має стати не тільки підготовка висококваліфікованих спеціалістів для народного господарства України, але і підготовка їх до праці та життя у світі швидких змін. Необхідно реформувати як модель педагогічного процесу, так і принципово змінити цілі і завдання освіти, створити умови для всебічного розвитку студентів, їх особистості, щоб вони знайшли своє місце в нинішніх складних життєвих умовах, а особливо, коли це студенти з обмеженими фізичними можливостями.

Проблеми молодих інвалідів надзвичайно серйозні і недостатньо досліджені. Їх серйозність обумовлена не лише тим, що за останній час збільшилось число молодих людей з обмеженими фізичними можливостями, з надзвичайно низьким рівнем матеріального забезпечення, соціальною і моральною незахищеністю від негативного чи байдужого сприйняття їх проблем зі сторони суспільства.

Одним з найважливіших чинників прогресивного розвитку суспільства є гуманне, милосердне та дбайливе ставлення до молоді, яка позбавлена можливості вести повноцінне життя внаслідок вад фізичного та психологічного розвитку. На жаль, в Україні склалася ситуація, за якої ця категорія молоді протягом тривалого часу залишалась соціально незахищеною і в певній мірі ізольованою від соціуму. Відкрите обговорення проблеми інвалідів було непопулярним у суспільстві. Діти-інваліди, перебуваючи в умовах інтернатного закладу або виховані в сім'ї, позбавлені можливості вести повноцінне життя і виявляються непідготовленими до нового життя у відкритому середовищі. Більшість дітей-інвалідів позбавленні головного права, визначеного у Конвенції про права дитини, а саме можливості жити в умовах, "... в яких діти можуть брати активну, творчу участь у соціальному та політичному житті своєї країни".

Більшість сучасних дослідників вважають, що головним критерієм прогресу людства стає рівень гуманізації суспільства, тобто те, яке місце відводиться в ньому особистості. Основні ідеї парадигми особистісно орієнтованого навчання – діалогічність, діяльнісно-творчий характер, спрямованість на індивідуальний розвиток людей з особливими потребами.

С.І. Подмазін підкреслює, що особистість повинна бути розвиненим суб'єктом зовнішньої і внутрішньої діяльності, бути здатною до особистісного самовизначення і саморозвитку, вміти ставити перед собою визначені цілі, знаходити і вибирати необхідні способи досягнення цілей, відповідально приймати рішення, послідовно їх реалізовувати, критично оцінювати результати і закріпляти їх в індивідуальному досвіді.

Саме в процесі вивчення вищої математики як навчального предмету виявляється велика спроможність створення необхідних умов для розвитку таких якостей особистості для студентів з особливими потребами. Студенти з обмеженими фізичними можливостями потребують постійної уваги. Одна з найскладніших проблем – організація навчального процесу із врахуванням специфіки кожної групи інвалідності. Велику роль при цьому відіграє педагогічна підтримка, основними положеннями і принципами якої є:

1. Педагогічна підтримка – це безпосереднє вираження гуманістичної позиції педагога в його взаємодії і співпраці зі студентом. О. Газман вважав, що навчання і виховання більше пов'язані із соціалізацією, а педагогічна підтримка спрямована на процес індивідуалізації (коли зовнішні чинники поведінки перетворюються на усталені внутрішні якості).

2. Основна мета підтримки – вирішення проблеми молодої людини, що ставить викладача в позицію дорослого, а студента – в позицію людини, яка шукає засоби самовизначення, самореалізації і потребує допомоги.

3. Підтримка – опора на власні зусилля студента на етапі вирішення життєвих завдань, тому вона передбачає його саморозвиток. Основним завданням підтримки є допомога студенту у процесі його самовизначення.

4. Підтримка складається із систематичної індивідуальної допомоги кожній людині, тому вона має різні форми, прийоми і визначається індивідуальними потребами студента.

5. Підтримка повинна мати доброзичливий, довірливий та гуманний характер. Вона не може бути формальною чи поверховою, завжди має бути людяною.

Студенти з обмеженими фізичними можливостями мають різні види захворювання.

Якщо взяти незрячих студентів, то для них необхідні індивідуальні технічні засоби – диктофон, пристрої, оснащені шрифтами Брайля. Для аудиторій, в яких вони займаються, необхідні тифлоілюстрації чи пристрої для рельєфного креслення. Для самостійної роботи їм необхідні персональні комп'ютери, обладнані звуковими картами і програмою мовного доступу, акустичними колонками та пристроєм для прослуховування, брайлівський дисплей, рельєфний графічний принтер, планшетний сканер та магнітофон для відтворення аудіо записів.

Не менш фінансово місткий технічний супровід слабкозорих студентів. Це диктофон, зошити з яскравою розміткою, збільшувач візуального сприйняття, підручники із збільшеним шрифтом, максимально наближенні до студента наочні матеріали, копіювальний апарат для друкування навчальних матеріалів у збільшеному вигляді. Навчальний процес в аудиторіях має проводитись при яскравому освітленні.

Для студентів з вадами слуху необхідно обладнати аудиторії системами "Micro Link", звукопідсилюючою FM системою чи слуховою радіосистемою. Їх індивідуальний технічний засіб – слуховий апарат. Студенти, які мають тяжке ураження слуху, не можуть обійтися без послуг сурдоперекладача та тьютора-записувача. Тьютор (від латин. спостерігаю, піклуюсь) педагог-наставник, під керівництвом якого студенти самостійно працюють над навчальним матеріалом. Для самостійної роботи такі студенти потребують копіювальну апаратуру для копіювання конспектів, навчальних матеріалів на електронних носіях та персональний комп'ютер для візуального їх відтворення.

Для студентів із вадами мовного апарату потрібно використовувати опорні схеми, таблиці, логічні ланцюги, що нададуть можливість краще зорієнтуватись у навчальному матеріалі. Можна застосовувати написання такими студентами рефератів, які б висвітлювали певну тему (чи розділ).

Таким чином, навчання студентів з особливими потребами вимагає від викладача здійснення індивідуального підходу, розробки для кожного, залежно від потреби, програми самостійних робіт, особливо ретельної підготовки до занять (складання схем, таблиць) – і все це для підвищення ефективності навчання.

Вища математика, як і будь-яка фундаментальна дисципліна, являючи собою систему понять та їх відношень, має свою специфіку. Саме в математиці необхідною є систематичність: якщо випадає бодай одна ланка із ланцюга знань, то все решта може стати незрозумілим. Надзвичайно важливою у цьому ланцюгу вивчення вищої математики постає проблема її зв'язку зі шкільним курсом математики, систематичного й ефективного повторення, поглиблення, узагальнення програмного матеріалу, зокрема в системі самостійної роботи студентів.

Завдяки урізноманітненню організаційних форм і методів навчання у вищих навчальних закладах з математичної підготовки має здійснюватись ефективна самостійна робота студентів, яка вимагає наполегливих зусиль, усвідомлення поставленої навчальної мети, здійсненню розумових дій та прояву вольових якостей.

Відомо, що для сучасної школи, як для загальноосвітньої, так і для вищої, важливим є не запам'ятовування усіх тонкощів предмету, а засвоєння головних ідей, принципів і методів, на яких базується наука. Тому актуальним є вивчення теорії за схемою: *ознайомлення з конкретними фактами → формально-логічне викладання → необхідність узагальнення → обґрунтування теорії*, що має сприяти формуванню систематичних знань у студентів.

Головною метою самостійної роботи зі студентами з особливими потребами є створення викладачем умов для розвитку кожної особистості в навчальній групі. При цьому потрібно, так би мовити "дійти" персоналізовано до кожного студента, відповідно до його вади, нахилів, потреб та можливостей. Це є складним завданням. Для його вирішення потрібно знайти певні дидактичні засоби, які б надавали можливість максимально наближати викладача до студента.

Підготовка творчо мислячого спеціаліста, спроможного своєчасно сприймати і впроваджувати у практику новітні інформаційні та промислові технології, не можлива без організації вже у роки навчання студентів їх ефективної самостійної роботи. Тільки в процесі самостійного осмислення теоретичного і практичного матеріалу, самостійного виконання навчальних завдань у студентів формуються глибокі знання, стійкі навички, вміння творчо підходити до розв'язання будь-якої задачі. Із самого початку навчання у вищому навчальному закладі студентам з особливими потребами слід надавати постійну допомогу в організації усіх сторін їх пізнавальної діяльності, приділяючи відповідну увагу і контролю самостійної діяльності. Мета самостійної діяльності під час вивчення математичних дисциплін має дві складові:

1) засвоєння системи математичних знань, надбання навичок та вмінь застосовувати їх у практиці, розвиток логічного мислення та інтуїції;

2) формування самостійності як якості майбутнього фахівця.

Для досягнення мети студент з особливими потребами має обрати індивідуальний спосіб діяльності, пов'язаний з його особистим досвідом та особливостями. Результатом самостійної діяльності є набутий досвід роботи, розвиток особистості, а також продукт діяльності, тобто розв'язане завдання. Треба так скласти навчальний план роботи студентів, щоб була обов'язковою їх систематична робота впродовж усього семестру, а контроль передбачав би відомості про ефективність самостійної роботи і ступінь засвоєння навчального матеріалу.

Важливе значення в організації самостійної роботи студентів з особливими потребами приділяємо лекціям. В основу кожної лекції покладаємо проблемність і зв'язок з практичною діяльністю майбутніх спеціалістів. Лектор намагається привернути увагу студентів до активної самостійної роботи під час лекції. Для активізації самостійної роботи студентів великого значення надаємо удосконаленню форм і методів навчання, що дозволяє повніше використовувати емоційні і психологічні особливості студентів. У цьому зв'язку поєднуємо традиційну роботу в аудиторії із участю студентів в олімпіадах, конференціях, науково-дослідній роботі кафедр.

Підготовка рефератів і виступи на конференціях характеризують не тільки глибину набутих студентом знань, а й вміння і навички працювати з літературними джерелами. Ці організаційно-педагогічні заходи стимулюють систематичну самостійну роботу студентів впродовж семестру, сприяють набуттю глибоких знань, покращують якість підготовки молодих спеціалістів.

Курс вищої математики для студентів з особливими потребами має бути професійно спрямованим. Важливу роль тут відіграють математичні задачі, розв'язуючи які студенти більш глибоко та свідомо засвоюють математичні терміни, оволодівають певними методами досліджень.

Гуманістично й особистісно спрямована професійна підготовка студентів з особливими потребами буде забезпечена за таких умов:

– створення соціально інтегрованого середовища, яке позитивно впливає на психологічний стан студентів з особливими потребами, допомагає їм пристосуватись до вимог суспільства, сприяє особистісному розвитку;

– розроблення психологічного супроводу – комплексу заходів, що забезпечують успішну адаптацію студентів-інвалідів, подолання соціальної ізоляції, формування у студентів установки на ліквідацію всіх можливих негативних наслідків своєї хвороби.

Література:

1. Слєпкань З.І. Формування творчої особистості учня в процесі навчання математики. – Математика в школі. – 2003. – №1. – С. 6-9.
2. Технологія соціально-педагогічної роботи: Навчальний посібник / За заг. ред. проф. А.Й. Капської. –К., 2000, – 372 с.
3. О.В. Соколовська. Прикладні задачі з вищої математики. Збірник задач. – Рівне: РДГУ. 2000.
4. Іванова І.Б. Професійна підготовка студентів з особливими потребами в адаптації // Вісник Університету “Україна”, 2001, №1 – С. 86-90.
5. Актуальні проблеми навчання та виховання людей з особливими потребами. Збірник наукових праць. – К.: Університет “Україна”. – 2002. – № 2. – 340с.
6. Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції, м. Полтава, 9-10 грудня 2003 року. – ПДПУ, 2003. – 204 с.

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

Л.Р. Корольська, О.В. Феденко
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

В умовах сучасного розвитку суспільства у більшості сфер практичної діяльності людини значно зросла питома вага мисленнєвих операцій, пов'язаних із сприйняттям різноманітної інформації, вмінням її обробляти й аналізувати, якщо вона представлена у вигляді статистичних таблиць, графіків або числових статистичних характеристик. Тому досягнення кожним випускником середньої школи розуміння статистичного характеру масових процесів і їх законів у навколишньому світі – головна мета, яку переслідує одна із сучасних змістових ліній шкільного курсу математики, пов'язана з вивченням елементів стохастики. Саме ці знання є основою для усвідомлення необхідності та важливості методів статистики у будь-якій сфері діяльності.

У контексті сказаного стає зрозуміло, що сьогодні надзвичайно важливим і актуальним є активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів при вивченні основ математичної статистики. Особливої уваги заслуговує вирішення проблеми інтенсифікації вивчення даного курсу, що у процесі реалізації змісту програми для загальноосвітніх шкіл може бути здійснена різними способами. Розглянемо один із можливих способів інтенсифікації – використання нестандартних завдань на уроках математичної статистики. Такі завдання мають місце при розв'язанні статистичних задач.

Взагалі, в житті кожної людини подібні задачі відіграють важливу роль. Все її життя, кожен вид діяльності: професійний чи побутовий, особистий чи громадський, пов'язані з розв'язуванням задач, що мають статистичну основу.

Шкільний курс математики побудований на використанні стандартних задач, для більшості з яких існують стійкі алгоритми розв'язування. Тому використання лише таких задач гальмує розвиток творчого мислення учня, його пізнавальної активності.

Специфіка нестандартних задач полягає в тому, що майже кожна з них пов'язана з аналізом проблемних ситуацій.

Розглянемо два способи розв'язання таких задач: 1) аналітичний і 2) за допомогою педагогічних програмних засобів, наприклад, GRAN 1.

Стосовно аналітичного способу розв'язання, необхідно навчити учнів деяких типових прийомів розв'язування нестандартних задач з метою накопичення таких прийомів і подальшого їх використання в практичній діяльності.

Для стимулювання учнів до розв'язування нестандартних задач вчителеві слід опиратися на такі умови:

– в учнів треба викликати пізнавальний інтерес до певної задачі, за допомогою актуалізації проблеми;

– за допомогою різних способів знайти раціональне розв'язання задачі.

Розглянемо приклад такої задачі. Ціни на сільськогосподарську продукцію зафіксовані і подані в таблиці.

Таблиця 1

Продукт	Ціна, грн				
	Ринок А	Ринок В	Ринок С	Ринок Д	Ринок Е
М'ясо (за 1 кг)	15,0	14,5	14,0	15,0	15,5
Масло (за 1 кг)	7,5	8,0	8,5	8,0	9,0
Молоко (за 1 л)	1,0	1,2	1,1	0,9	0,8
Яйця (10 шт)	2,5	2,6	2,4	2,3	2,7

Знайти максимальну, мінімальну і середню ціну кожного з продуктів. На якому з ринків краще купувати весь набір продуктів?

Важливо, щоб задачі, які учні розв'язують у класі та вдома, були різноманітними за змістом та рівнем складності. Необхідно кожен тип статистичних задач розподілити окремо, також слід використовувати міжпредметні зв'язки з такими дисциплінами як хімія, біологія, психологія, тощо. Наприклад, у класах фізико-математичного профілю доцільно використовувати статистичний матеріал, отриманий учнями на лабораторних роботах і практикумах. Зв'язок математичної статистики з іншими предметами можна також реалізувати у формі інтегрованих уроків. Прикладом може бути заняття з фізики і математики на теми: "Розподіл молекул за швидкостями та побудова гістограм", "Випадкові похибки вимірювань", "Дисперсія випадкових величин".

Невід'ємну частину обробки даних в математичні статистиці відіграють наочні зображення статистичного розподілу – графічне зображення варіаційних рядів за допомогою діаграм (рис. 1), гістограм (рис. 2), полігонів (рис. 3). Велика кількість понять і зображень вимагає попередньої підготовки відповідних таблиць для конкретних прикладів, високої графічної культури для зображення гістограми й полігону.

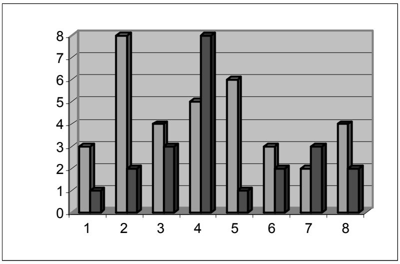


Рис. 1

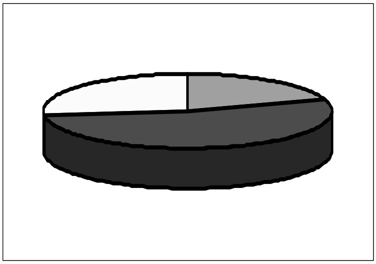


Рис. 2

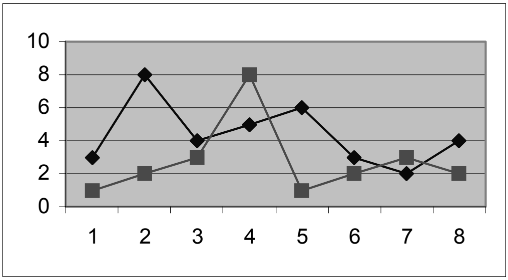


Рис. 3

Формування вмінь виконувати відповідні побудови для конкретних рядів розподілу забезпечується на уроці і вдома вдало підібраною системою задач.

Наприклад, формування вмінь і навичок будувати ряд розподілу та його наочне зображення здійснюється під час розв'язування таких задач.

Задача 1. Визначити числові характеристики вибірки.

Кількість продажів, здійснених компанією А за 30 робочих днів, представлена вибіркою:

Таблиця 2

63	47	41	72	65	61	27	33	49	21
45	26	31	48	18	74	20	29	49	44
26	19	78	64	36	47	52	50	24	35

1. Впорядкуйте вибірку.
2. Побудуйте дискретний варіаційний ряд, до якого включені колонки відносних частот та кумулятивних частот.
3. Побудуйте полігон.

Задача 2. Знайти числові характеристики вибірки.

Для вивчення попиту на закупівлю газет власник кіоску спостерігає щоденну кількість проданих газет протягом ста днів:

Таблиця 3

2	10	15	18	21	23	26	29	32	37
3	10	15	18	21	23	26	29	32	38
4	11	15	18	21	23	26	29	33	38
5	12	16	19	21	24	26	29	33	39
5	12	16	19	22	24	27	30	34	40
6	12	16	19	22	24	27	30	34	40
7	13	17	19	22	24	27	31	35	42
8	14	17	20	22	25	28	31	35	43
9	14	17	20	22	25	28	31	36	46
9	14	17	20	23	25	28	32	37	49

1. Проранжувати вибірку
2. Знайти статистичний розподіл цієї вибірки з кроками $h = 10$ і $h = 5$.
3. Побудувати гістограму частот.

<u>*Задача* 3</u>. Знайти числові характеристики вибірки.

Група банків України, загальною кількістю 50, розташованих у Київській області, досліджувались за кількістю засновників (юридичні та фізичні особи). Результати розподілились у такий спосіб:

Таблиця 4

Число засновників	8	9	10	11	12	13	14	15
Число банків	3	5	12	10	9	6	3	2

Побудуйте полігон частот та полігон кумулятивних частот.

При виконанні простих економічних розрахунків, дослідженні та унаочнені різноманітних функціональних залежностей, вивченні математичної статистики доцільно застосувати програмний засіб GRAN 1. Використання комп'ютера в навчанні, крім виконання дидактичних завдань, активізує дослідницьку діяльність учнів, надає можливості розкрити творчий потенціал, максимально задовольнити пізнавальні потреби дітей відповідно до їх нахилів і здібностей.

Ефективність засвоєння знань учнями за умови широкого впровадження засобів сучасних інформаційних технологій значною мірою залежить від педагогічних програмних засобів. Придатними для підтримки вивчення курсу математичної статистики в середніх навчальних закладах ми вважаємо програми GRAN 1, Excel.

Використання подібних програм дає можливість учневі розв'язувати окремі задачі, не володіючи відповідним аналітичним апаратом, методами і формулами, тощо. Відповідні програми перетворюють окремі розділи і методи математики в "математику для всіх", і це може стати сильним мотивуючим фактором поглибленого вивчення методів математичної статистики.

Література:

1. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. – К.: Техніка, 1997.
2. Волощенко А.Б., Джалладова І.А. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2003.

ІНТЕНСИФІКАЦІЯ ТЕОРЕТИЧНОЇ ТА ПРАКТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ СТУДЕНТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

В.В. Корольський, М.В. Бабкіна
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Інтенсифікація навчального процесу може здійснюватися за різними напрямками. Розглянемо один з них, пов'язаний з використанням загальної схеми для одержання методів щодо застосування визначених інтегралів до розв'язку практичних задач.

Існують дві схеми застосування визначених інтегралів, які базуються на наступних теоретичних засадах.

Схема 1. Якщо функція $y = f(x)$ описує деяку геометричну або фізичну величину $\forall x \in [a,b]$, то цю величину, яку умовно позначимо через u можна одержати шляхом використанню її складових Δu_i, $i = \overline{1,n}$ за алгоритмом:

1. Розбиваємо величину u (площа фігури, об'єм, робота і т.п.) на велику кількість малих доданків Δu_i:

$$u = \Delta u_1 + \Delta u_2 + ...+ \Delta u_n \quad (1)$$

або

$$u = \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i \qquad (2)$$

2. Пов'язуємо обчислення кожного доданка Δu_i зі значенням функції $f(x_i)$ ($x_\text{i} \in [x_i, x_{i+1}]) \subset [a,b]$) і величиною $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$:

$$\Delta u_\text{i}=f'(x_i)(x_{i+1}–x_i) \qquad (3)$$

3. Представляємо наближене значення величин u у вигляді інтегральної суми:

$$\Delta u_i \cong \sum_{i=1}^{n} f'(\overline{x_i})(x_{i+1} - x_i) \quad (4)$$

4. Обчислюємо точне значення u за формулою

$$u = \lim_{\substack{\max\limits_{i} \Delta x_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{1}^{n} f'(\overline{x_i})(x_{i+1} - x_i) \qquad (5)$$

5. Якщо границя (5) існує і її похибка прямує до 0 коли $n\to\infty$, то одержуємо величину u у вигляді визначеного інтеграла

$$u \overset{df}{=} \int_a^b f(x)dx\,. \qquad (6)$$

Схема 1 показує, що розв'язок задачі пов'язаний з побудовою інтегральної суми, яка відображає умови поставленої задачі з наступним переходом до визначеного інтеграла. В теоретичних викладках такий шлях потребує побудови відповідних геометричних схем та доволі громіздких записів, що потребує інколи значного часу. Коротко розглянуту схему можливо охарактеризувати так: від загального до частинного, потім від частинного до загального.

Схема 2. Схема два будується на наступних засадах:

1. Припускаємо, що в будь-якій точці $x_i \in [a, b]$ величина u набуває приросту:

$$\Delta u \approx f(x)\,\Delta x, \qquad (7)$$

де Δu – приріст величини u;

Δx – приріст незалежної змінної.

Зрозуміло, що на $\forall[\Delta x] \in [a, b]$ функція $f(x)$ існує, також як і величина u.

2. Далі використовуємо те, що для будь-якої диференційованої функції $f(x)$ та досить малих приростів Δx має місце наближена рівність

$$du \approx \Delta u, \qquad (8)$$

тобто

$$du = f(x)dx. \qquad (9)$$

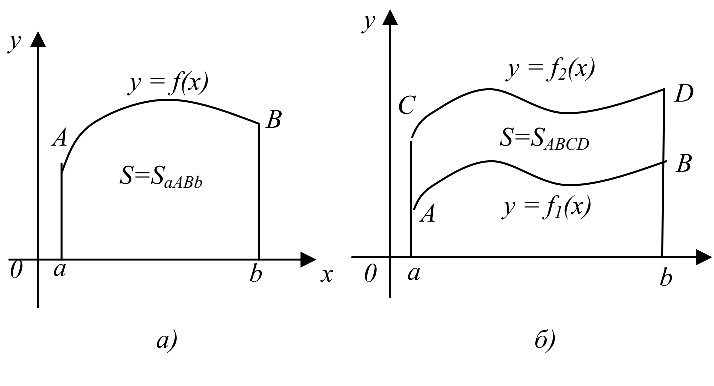
3. Врешті-решт u знаходять за допомогою однієї з основних властивостей інтегралів (як невизначених, так і визначених)

$$u = \int_a^b f(x)dx \qquad (10)$$

Примітка. Схему 1 називають схемою інтегральних сум, а схему 2 – схемою диференціала.

З нашого досвіду схема диференціала дозволяє значно інтенсифікувати викладання математичного аналізу. Покажемо це на прикладі вивчення розділу “Застосування визначених інтегралів”.

Розглянемо конспект лекцій на тему: “Застосування визначеного інтегралу в геометрії”. Структура лекції: обчислення площ криволінійних фігур → обчислення площ поверхонь тіл обертання → обчислення об’ємів тіл обертання та тіл із заданою площею перерізу.



а) б)

Обчислення площ криволінійних фігур, показаних на малюнках a), $б$)

здійснюється за формулою

$$S = \int_a^b dS(x) \tag{11}$$

Таким чином, подальше завдання зводиться до визначення виразу $dS(x)$ для вказаних випадків площ а), б).

Розглядаємо випадок а). Спочатку візьмемо $f(x) = 1$, що приводить до площі $S = S_{aABb}$, яка є площею прямокутника з основою $(b - a)$ і висотою 1. Значення диференціалу цієї площі дорівнює: $dS = 1 \cdot dx$. За формулою (11) одержуємо

$$S = \int_a^b dS(x) = \int_a^b dx = (b-a) \text{ (кв.од.)} \tag{12}$$

Якщо взяти будь-яку функцію $y = f(x)$, то маємо: $dS = f(x)dx$. За формулою (11) одержуємо

$$S = \int_a^b dS(x) = \int_a^b f(x)dx\,. \tag{13}$$

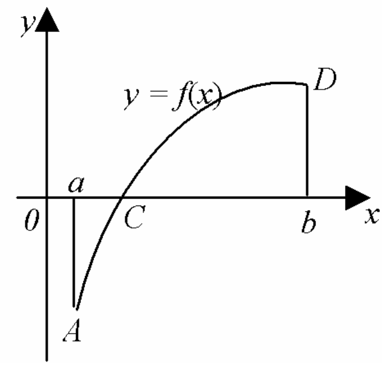
Розглянемо випадок б). Якщо взяти $f_1(x) = 0$ $\forall x \in [a, b]$, то маємо випадок а). Тобто

$$S = \int_a^b dS(x) = \int_a^b [f_2(x) - 0]dx = \int_a^b f_2(x)dx \tag{14}$$

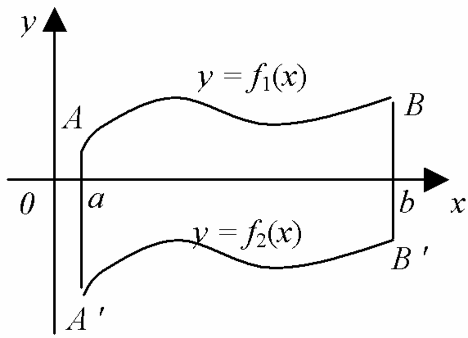
Для будь-якої $f_1(x)$ $(x \in [a,b])$ з формули (14) одержуємо

$$S = \int_a^b dS(x) = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx \tag{15}$$

<u>*Самостійна робота*</u>. Знайти формули обчислення площ фігур *в*), *г*).

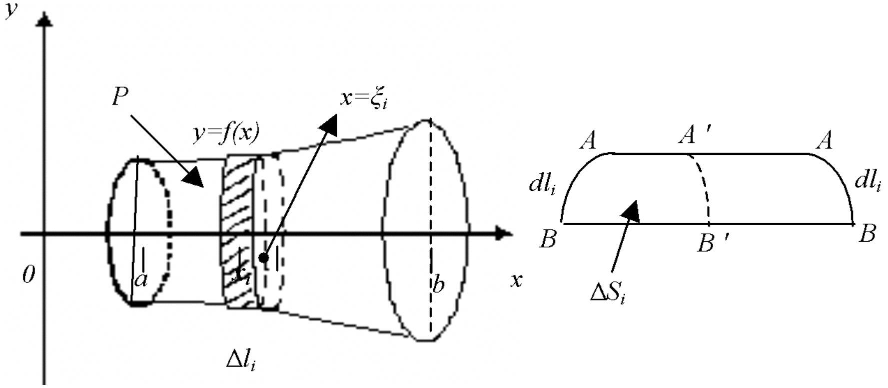


в)



г)

Обчислення площ поверхонь тіл обертання (мал. *д*) здійснюється також за формулою (11). Але для цього потрібно визначити вираз $dS(x)$. Для визначення виразу $dS(x)$ вичленимо з мал. *д*) частину поверхні P_i, які відповідає проміжок $[x_i, x_{i+1}]$ і яка показана на мал. *е*).



д) *е)*

На мал. *е*): $AA'=A'A=\pi f(x_i)$; $BB'=B'B=\pi f(x_{i+1})$.

Нехай площа поверхні P_i дорівнює ΔS_i, тоді можемо записати:

$$\Delta S_i = 2\pi \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} dl_i . \qquad (16)$$

Зрозуміло, що для будь-яких малих Δx_i буде виконуватися наближена рівність

$$\Delta S \cong \pi f(x) dl \qquad (17)$$

Якщо згадати, що диференціал дуги кривої $y = f(x)$ дорівнює

$$dl = \sqrt{1+(y'_x)^2}\, dx ,$$

то рівність (17) буде такою:

$$dS = 2\pi f(x_i)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx . \qquad (18)$$

Далі за формулою (11) одержуємо формулу для обчислення площі поверхні тіла обертання графіка функції $y = f(x)$ навколо вісі Ox:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx . \qquad (19)$$

<u>Самостійна робота</u>. Записати формулу обчислення площі поверхні обертання, коли графік функції обертається навколо осі Oy.

Об'єм обертання будемо шукати у вигляді

$$V = \int_a^b dV(x) . \qquad (20)$$

Для визначення виразу $dV(x)$ розглянемо окремо частину об'єму тіла обертання, який відповідає проміжку $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ і який можна вважати прямим круговим циліндром з висотою Δx_i і радіусом основи $f(x_i)$. Величина об'єму циліндра дорівнює:

$$\Delta V_i = \pi f^2(x_i)\Delta x_i \qquad (21)$$

Для будь-яких досить малих величин Δx останній результат можна записати у вигляді:

$$\Delta dV_i = \pi f^2(x)dx \tag{22}$$

Далі за формулою (20) одержуємо потрібну формулу обчислення об'єму тіла обертання:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx \,. \tag{23}$$

Самостійна робота: 1) Знайти формулу тіла обертання, коли графік функції обертається навколо осі Oy. 2) Одержати формулу обчислення об'єму тіла, в якому задана площа перерізу $S(x)$.

Наш досвід показує, що викладання лекції на дану тему потребу 50-55 хвилин часу, решту частину часу 30-25 хвилин можна присвятити розгляду практичних прикладів, що дає можливість на практичних заняттях розв'язувати безпосередньо різноманітні приклади на обчислення площ і об'ємів. Так як у студентів є певний досвід, то економія часу на проведення лекції і практичних занять значним чином інтенсифікує процес навчання. При цьому не втрачається фундаментальність теоретичної підготовки. Навпаки з'являється можливість вчити студентів мислити системно. В аналогічному дидактичному напрямку будується навчання з інших розділів та тем математичного аналізу для спеціальності “Фізика та основи інформатики”.

Література:

1. Корольский В.В. Транзитивная роль теоремы Лагранжа в дифференциальном и интегральном исчислении // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. Вип. 4. – Т. 1. – Кр. Ріг: НМетАУ, 2004. – С. 98-99.

АКТИВІЗАЦІЯ ДОСЛІДНИЦЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТАРШОКЛАСНИКІВ З МАТЕМАТИКИ ЗАСОБАМИ ІКТ

Т.Г. Крамаренко
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Освіта – основа розвитку особистості, суспільства, нації, держави – стверджується в Національній доктрині розвитку освіти. Цим документом пріоритетним напрямком освіти визначається впровадження сучасних інформаційно-комунікативних технологій. Мова йде, насамперед, про поступову інформатизацію системи освіти, створення індустрії сучасних засобів навчання, що відповідають світовому науково-технічному рівню. Питання комп’ютеризації математичної освіти, розробка відповідних педагогічних засобів є предметом уваги багатьох дослідників. Зокрема, в Україні над цими питаннями працюють М.І. Жалдак, О.В. Вітюк, Ю.В. Горошко, Т.В. Зайцева та ін. Схвальні відгуки з боку педагогів дістали принципово нові підручники [2, 4], які демонструють шляхи практичного впровадження в навчальний процес НІТН математики, інтеграцію навчальних дисциплін та посилення міжпредметних зв’язків.

Поки що в шкільній практиці прикладні програми з математики ще не займають належного їм місця з багатьох причин. Тут і слабка матеріально-технічна база шкіл – обмаль комп’ютерів і відсутність коштів на придбання та оновлення ліцензійних програм, недостатня кількість методичної літератури. Не секрет, що у багатьох вчителів математики не сформовані навички роботи з прикладними програмами, і сприймають вони комп’ютер в першу чергу як калькулятор для складних обчислень та інструмент для виконання побудов, а не для досліджень.

Не викликає сумніву, що інтелектуальний і творчий потенціал України значною мірою залежить від того, чи зможе сучасна школа виховати творчо розвинену особистість, здатну до самоствердження, самореалізації, самовдосконалення. Вчитель – не лише професія, сутність якої передати знання, це велична місія, призначення якої – формувати особистість, утверджувати людину в людині. Акцентується увага саме на особистісно-орієнтованому характері застосування НІТ в курсі вивчення математики [6, с. 163]. Впровадження комп’ютерної підтримки викладання основ наук робить обчислювальну машину не тільки ефективним інструментом, а в деякій мірі третім партнером у педагогічній взаємодії, який надає іншим її учасникам великі можливості у переробці інформації. Використання комп’ютера в процесі вивчення математики посилює в учнів дію мотиваційних чинників у створенні позитивного ставлення до навчання, допомагає вчителю вирішувати дидактичні завдання. Через активізацію пізнавальної діяльності створюються умови для повного розкриття творчого потенціалу дітей з урахуванням їхніх вікових особливостей і життєвого досвіду, індивідуальних нахилів, запитів і здібностей.

Важливим аспектом активізації пізнання є залучення учнів до дослідницької діяльності. Реалізувати її можна як на уроках математики і через завдання для домашніх роздумів, так і шляхом підготовки і написання учнівських науково-дослідницьких робіт. Пояснюється це тим, що з впровадженням НІТН математики надзвичайно зростає роль обчислювального експерименту. Сфера застосування експерименту в шкільному курсі математики широка – від формулювання понять (графік функції, границі, похідна функції в точці і т.д.) до перевірки відомих тверджень та більш глибоких досліджень. Користуючись прикладними програмами, за наявності відповідних умов учитель може поєднувати при викладанні нового матеріалу метод доцільних задач з дослідницьким методом як в класах з поглибленим вивченням математики, так і в класах загальноосвітнього профілю. Знання, отримані через відкриття, найміцніші і мають значний вплив на розвиток розумових здібностей особистості.

При вивченні математики мова йде про гармонічне вбудовування комп'ютерних технологій в діючу дидактичну систему, удосконалення і посилення її. Використовуючи дослідницький метод у навчанні математики, вчитель поставить школяра в позицію дослідника, яка дозволить йому відкривати наукові факти, збуджувати сумніви, творчі припущення. Запропонувавши питання, які стимулюють самостійність роздумів, суджень, він допоможе старшокласникам самостійно просуватися до розв'язування нетрадиційного завдання, що виникло в результаті їхніх спостережень та експериментів. У відповідності з технологію формування творчої особистості тут діє алгоритм впровадження моделі продуктивного пізнання: ознайомлення з проблемою, сприйняття (зіставлення нового зі своїм досвідом), перетворення інформації, засвоєння, вибір засобів і методів нової дії, реалізація їх, порівняння результатів особистісного впливу [6, с. 109].

В учбовій діяльності школяра комп'ютер має стати інструментом для досліджень. Він допоможе вчителеві створити на уроці ситуацію успіху. На основі обчислювального експерименту учень зможе прийти до формулювання гіпотез стосовно досліджуваних закономірностей, отримає можливість швидко перевірити їх правильність чи спростувати їх, навівши контраргументи. Застосування комп'ютера, дозволить швидко знаходити кінцевий результат, якщо змінюються умови. Завдяки дослідницькому методу досягається найбільш високий рівень навчання та проблемності, пізнавальної активності. На цій основі в учнів створюється стійкий інтерес до учіння та впевненість у власних силах та можливостях, потреба у самовдосконаленні.

Науковий аналіз творчого продуктивного мислення показує, що головним у цьому процесі є побудова зразка проблемної ситуації, здогад, висунення гіпотези. Отримуючи в школі досвід науково-дослідницької діяльності, учень вдосконалюватиме себе, розвиватиме творче мислення, творчі здібності. Навички такої роботи потрібні будуть йому також у подальшому навчанні у ВНЗ, зокрема, при написанні та захисті курсових робіт.

Надзвичайно важливими для розвитку творчого потенціалу школяра є дидактичні ігри з комп'ютерною підтримкою [5, с. 110]. До завдань дидактичної гри на уроках геометрії в дев'ятому класі можна віднести такі завдання (до кожної із запропонованих умов входить коло) [1, 7]:

– сформулювати та довести гіпотезу про градусну міру кута, вписаного в коло;

– про градусну міру вписаного кута і гострого кута між хордою кола і дотичною до кола в кінці хорди;

– про суму протилежних кутів вписаного чотирикутника і суму протилежних сторін описаного чотирикутника.

Можна сформулювати та довести гіпотези про метричні співвідношення в колі, а саме:

– про добутки відрізків хорд, проведених в колі через одну точку

– про добутки відрізків січної та її зовнішньої частини і порівняння цього добутку з квадратом дотичної.

Створивши відповідні моделі, школярі зможуть експериментально перевірити теорему Птолемея (сума добутків протилежних сторін вписаного чотирикутника дорівнює добутку його діагоналей), формули для радіуса описаного навколо трикутника кола $R = abc / 4S$, $R = a / \sin \alpha$, для радіуса вписаного в n-кутник кола $r = S / p$, формулу для площі вписаного чотирикутника $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, де S – площа, a, b, c, d – сторони, p – півпериметр та інші гіпотези.

Під час розв'язування таких задач головне завдання вчителя полягає в тому, щоб навчити учнів створювати динамічні моделі, за допомогою системи навідних питань підводити школярів до відкриття ними істини, інтерпретації отриманих результатів, до потрібних висновків і узагальнень. Модель навчання через відкриття в дидактичних іграх така ж як і модель дослідницької діяльності взагалі: формулювання проблеми, план діяльності, установчі експерименти, формулювання гіпотези, збирання та оцінювання даних, перевірка гіпотези, висновок, теоретичне доведення гіпотези.

Розглянемо, як можна реалізувати поставлені завдання через застосування на уроці геометрії сучасного вітчизняного моделюючого програмно-педагогічного засобу GRAN-2D. Зазначена програма полегшує розв'язування задач на знаходження геометричних місць точок, задач на доведення чи відшукання екстремальних значень величин, але найголовніше – шляхом створення та аналізу динамічних моделей сприяє оволодінню учнями методами самостійного добування та представлення знань, формуванню вмінь та навичок здійснення пошукової, творчої, дослідницької діяльності.

Ось як можна розпочати викладання теореми про вписаний кут. Вводимо поняття вписаного та відповідного йому центрального кута і пропонуємо школярам створити модель до теореми. Спочатку побудуємо коло з центром у точці A та радіусом AB. Далі на колі розмістимо дві точки C і D (створюємо їх з екрану та прикріплюємо до кола) та будуємо дві ламані CBD та CAD – вписаний та центральний кути, дотримуючись правил побудови в GRAN-2D [4]. Активізувавши послугу Обчислення \ Кут, знаходимо величини вказаних кутів. Модель для дослідження готова (рис. 1). Рухаємо точку D по колу, розглядаючи різні положення центра кола по відношенню до сторін вписаного кута. При цьому автоматично перераховуються величини кутів і учні вже можуть самостійно сформулювати теорему.

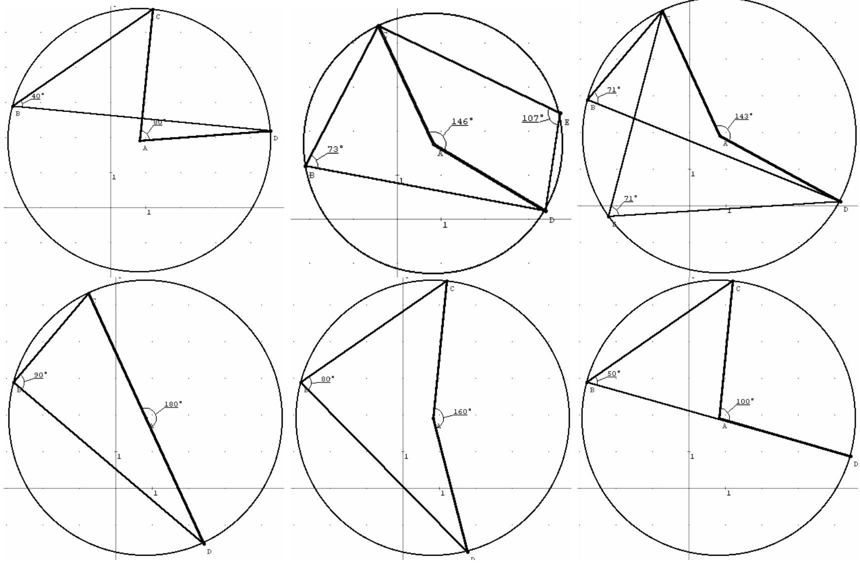


Рис. 1.

Далі підводимо школярів до формулювання наслідку про те, що кут, який спирається на діаметр – прямий. Отримані результати намагаємося узагальнити. Для цього пропонуємо побудувати ще один вписаний кут, сторони якого проходять через точки C і D (створюємо точку E на колі, будуємо ламану CED, обчислюємо кут). Змінюємо положення точки E і формулюємо ще два твердження. Коли B і E знаходяться в одній півплощині по відношенню до прямої CD, то маємо, що вписані кути, які спираються на одну й ту саму дугу, рівні. Якщо B і E розташовані по обидва боки від CD, то отримаємо властивість кутів вписаного чотирикутника – сума протилежних кутів дорівнює 180°. Дослідження проводимо, змінюючи весь час радіус кола.

Виходячи з важливості здогадки, відкриття для формування мислення старшокласника, доцільно переформулювати частину задач на відшукання геометричного місця точок і задач на доведення з курсу геометрії, додавши до них завдання на дослідження. Наприклад, замість “доведіть, що медіани ділять трикутник на шість рівновеликих частин” [1, с. 173] поставити школярам завдання “Медіани ділять трикутник на шість частин. Дослідіть, чи залежить значення площі вказаних частин від виду трикутника? Порівняйте ці значення з площею трикутника. Відповідь обґрунтуйте”.

Вивчаючи тему “Площі фігур”, можна розглянути прикладні задачі на відшукання екстремальних значень площі чи інших величин шляхом створення динамічних виразів. Це, зокрема, можуть бути і задачі на економію матеріалів. Наприклад, з прямокутної жерстяної пластини виготовити відкриту зверху коробку з прямокутною основою найбільшого об’єму. Якими мають бути розміри коробки?

Учні створюють розгортку коробки в GRAN-2D (рис. 2), змінюють розміри квадратиків, що відрізаються, і відслідковують створені динамічні вирази. Оскільки дев’ятикласники ще не володіють математичним апаратом дослідження з використанням похідної, то не до кожної з таких задач вони знайдуть обґрунтування через властивості нерівностей чи властивості тригонометричних функцій. Життєвою необхідністю розв’язання таких задач найбільш природно обґрунтувати введення і застосування похідної.

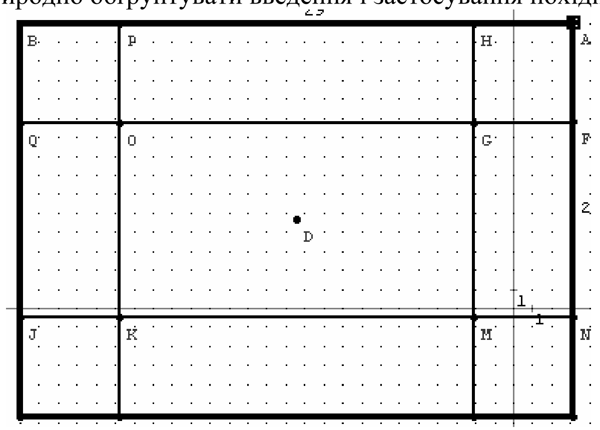


Рис. 2

Не менш благодатним ґрунтом для використання НІТН математики з метою активізації дослідницької діяльності старшокласників є курс алгебри дев’ятого класу, зокрема, при поглибленому вивченні [3]. Запропонуємо учням систему вправ на дослідження, на основі яких вони вдосконалять такі основні види розумових дій, як аналіз і синтез, індукція й дедукція, гіпотеза, припущення, узагальнення. Наприклад, при вивченні теми “Квадратний тричлен” учням потрібно з’ясувати і зробити висновок про те, як будувати параболи з використанням найпростіших перетворень графіків. Для цього пропонуємо школярам побудувати по кілька парабол на кожне з перетворень типу $y = ax^2$, $y = (x + m)^2$, $y = x^2 + n$, $y = a(x + m)^2 + n$, і скласти алгоритми побудови. Для школярів з високим творчим потенціалом можна запропонувати теми науково-дослідницьких робіт: “Властивості функцій з модулями та їх графіки”, “Функції, що містять цілу та дробову частину числа та їх графіки”, “Дослідження квадратного тричлена”, “Квадратний тричлен в задачах з параметрами” та інші. Поставимо перед старшокласниками завдання: дослідити, яку криву опише вершина параболи, заданої функцією

$$y = ax^2 + bx + c,$$

якщо зафіксувати значення двох коефіцієнтів, а третій змінювати. Аналізуючи серію побудованих парабол, учні зрештою прийдуть до висновку, що необхідно скласти рівняння відповідно квадратичної функції $y = - ax^2 + c$, лінійної $y = - bx/2 + c$, рівняння прямої $x = - b / 2a$, і побудують траєкторії руху вершини (рис. 3). Вся рутинна робота буде виконана з використанням ППЗ GRAN1 або Advanced Grapher, а школяр отримає задоволення від своїх досліджень. Не менш цікаво буде йому досліджувати і траєкторії польоту тіла, кинутого під кутом до горизонту:

1) знаходити максимальну висоту підйому і далекість польоту;

2) кут, під яким треба кинути тіло, щоб влучити в ціль;

3) кут для максимальної далекості польоту.

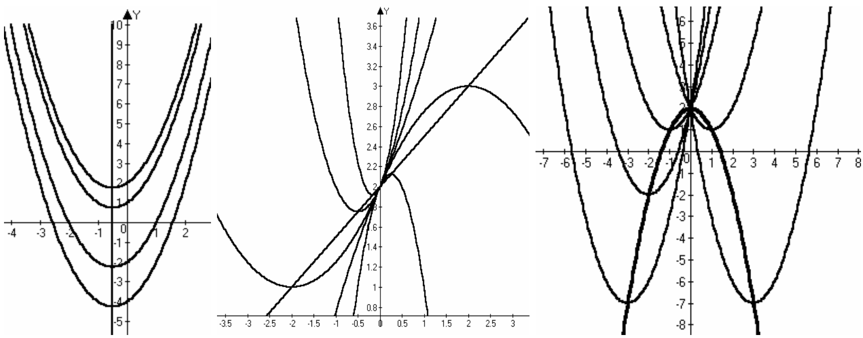


Рис. 3

Це дослідження знов проводимо, користуючись ППЗ GRAN1. Задаємо функцію параметрично $x = (V_0 \cos \alpha)t$, $y = (V_0 \sin \alpha)t - gt^2 / 2$, будуємо її графік, досліджуємо, змінюючи кут чи початкову швидкість. Результати досліджень обґрунтовуються властивостями квадратичної функції.

Через систему завдань проходять задачі з параметрами – дослідницькі мініатюри, які сприяють розвитку інтелектуально-логічних здібностей школяра. Процес їх розв’язування творчий і в більшості випадків складний, оскільки вимагає дослідження. Учні з невисоким творчим потенціалом часто пасують перед такими задачами. Для визначення ефективності використання комп’ютерних технологій нами був проведений педагогічний експеримент, за умовами якого одна група учнів розв’язувала задачі тільки традиційно, а інша – з комп'ютерною підтримкою. У другій групі якість знань виявилась помітно вищою.

Метод прогнозування розв'язків ґрунтується на тому, що багато задач з параметрами можна розв'язувати графічно з побудовою образу в координатній площині (x, a) чи (x, y). Проводячи прямі, перпендикулярні осі параметрів, часто знаходимо число розгалужень, кількість розв'язків, їх вигляд тощо [8, с. 181]. Дев'ятикласникам дуже корисно дослідити розташування коренів квадратного тричлена в залежності від параметрів, оскільки багато задач шкільного курсу алгебри зводяться до дослідження властивостей квадратичної функції. Завдяки застосуванню комп'ютера задачі з параметрами також стають доступнішими.

Отже, впровадження НІТН підвищує ефективність процесу навчання математики; сприяє активізації творчо-пошукової, дослідницької діяльності учнів. Про ефективність впливу ІКТ на активізацію навчально-пізнавальної діяльності школярів свідчить їхня ініціативність, інтерес, позитивне і усвідомлене ставлення до навчання, інтенсивність діяльності, самостійність, зацікавленість у досягненні мети і бажання виконати завдання, вибір складного завдання, посилення самоконтролю, використання під час відповіді додаткового матеріалу.

Література:

1. Бурда М.І., Савченко Л.М. Геометрія: Навч. посібник для 8-9 кл. шк. з поглибленим вивченням математики. – К.: Освіта, 1996. – 240 с.
2. Жалдак М.І Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. – К.: Техніка, 1997.
3. Коваленко В.Г. та ін. Алгебра: Експерим. навч. посібник для 9 кл. шк. з поглибл. вивченням математики і спеціалізов. шк. фізико-мат. профілю. – 3-тє вид. – К.: Освіта, 1998. – 228 с.
4. Комп'ютер на уроках геометрії: Посібник для вчителів / М.І. Жалдак, О.В. Вітюк. – К: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2003. – 168 с.
5. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Зб. наук праць / Редкол. – К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова. – Випуск 5. – 2002. –334 с.
6. Освітні технології: Навч.-метод. посіб. / О.М. Пєхота, А.З. Кіктенко, О.М. Любарська та ін. За загальн. ред. О.М. Пєхоти. – К.: А.С.К., 2001. – 256 с.
7. Погорєлов О.В. Геометрія: Планіметрія: Підручн. для 7–9 кл. серед. шк. – К.: Освіта, 1994. – 224 с.
8. Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць: В 3-х томах. – Кривий Ріг. Видавничий відділ НМетАУ, 2002. – Т.1: Теорія та методика навчання математики. – 444 с.

ПРАВИЛО ПРЯМОКУТНИКА ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ, ДОСЛІДЖЕННІ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА ОБЧИСЛЕННІ ВИЗНАЧНИКІВ

В.В. Липовик, О.В. Максимов
м. Кривий Ріг, Криворізький технічний університет

Відоме так зване правило прямокутника, що використовується у лінійному програмуванні, пропонується в дещо зміненому вигляді (без ділення на провідний елемент) застосовувати при розв'язуванні і дослідженні систем лінійних рівнянь (СЛР) та обчисленні визначників вищих порядків.

Пропонована методика є ефективнішою на практичних заняттях при розв'язуванні СЛР методом Гауса, коли елементи, тобто коефіцієнти і вільні члени, є цілими.

Розглянемо на прикладі системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Почнемо розв'язання СЛР (1) з виключення, наприклад, невідомого x у другому, а тоді і в третьому рівняннях (скорочено будемо писати Р1, Р2, Р3). Для цього домножимо Р1 системи (1) на ($-a_2$), а Р2 – на a_1, після чого додамо відповідні частини цих рівнянь:

$$\begin{array}{l} \quad -a_1a_2x - b_1a_2y - c_1a_2z = -a_2d_1, \\ + \\ \quad a_1a_2x + b_2a_1y + c_2a_1z = a_1d_2 \\ \hline 0 \cdot x + (a_1b_2 - a_2b_1)y + (a_1c_2 - a_2c_1)z = a_1d_2 - a_2d_1, \end{array}$$

або, позначивши

$$\begin{aligned} b_2' &= a_1b_2 - a_2b_1, \\ c_2' &= a_1c_2 - a_2c_1, \\ d_2' &= a_1d_2 - a_2d_1, \end{aligned} \tag{2}$$

запишемо замість Р2 нове з перетвореними коефіцієнтами

$$0 \cdot x_1 + b_2'y + c_2'z = d_2'. \tag{3}$$

Здійснене перетворення, за яким отримані нові значення елементів b_2', c_2', d_2' в (3), можна виразити за допомогою так званого правила прямокутника. Щоб його сформулювати, запишемо матрицю

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Умовно розглянемо прямокутник, у вершинах якого розташовані елементи a_1, b_1, a_2, b_2. Назвемо a_1 ($a_1 \neq 0$) ***провідним***, a_2, b_1 – ***супутніми*** елементами, b_2 – ***старим перетворюваним*** елементом, а значення $b_2' = a_1b_2 - a_2b_1$

назвемо ***новим перетвореним*** елементом (це коефіцієнт при y в (3)).

Правило прямокутника. Новий перетворений елемент дорівнює різниці між добутком провідного елемента на старший перетворюваний елемент та добутком супутних елементів.

Отже, нові елементи b_2', c_2', d_2', що виражені формулами (2), можна отримати за правилом прямокутника, виходячи з матриці (4), де ліва сторона прямокутника (перший стовпець матриці) одна й та ж, а права сторона по черзі займає положення другого, третього та четвертого стовпців.

Аналогічно можна виключити за правилом прямокутника невідоме x із Р3, виходячи з матриці (5), складеної з елементів першого і третього рівнянь

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

де провідним елементом знову є a_1.

Початкова система (1) заміниться еквівалентною системою

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ \qquad b_2'y + c_2'z = d_2', \\ \qquad b_3'y + c_3'z = d_3'. \end{cases} \tag{6}$$

Вважаючи, що $b_2'\neq0$, вибираємо його провідним елементом і виключаємо y із Р3 системи (6). Запишемо матрицю

$$\begin{pmatrix} b_2' & c_2' & d_2' \\ b_3' & c_3' & d_3' \end{pmatrix}, \tag{7}$$

в якій за правилом прямокутника знаходимо нові елементи третього рівняння системи (6).

Початкова система (1) зведеться до трикутної форми

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ \qquad b_2'y + c_2'z = d_2', \\ \qquad\qquad c_2''z = d_2''. \end{cases} \tag{8}$$

Із системи (8) зворотним ходом знаходимо $z = \dfrac{d_2''}{c_2''}$, де припускається, що $c_2''\neq0$.

Тоді з Р2 системи (8) знаходимо y і, нарешті, з Р1 знаходимо x.

Якщо $c_2''=0$, а $d_2''\neq0$ у (8), то система несумісна.

Якщо ж $c_2''=d_2''=0$, то система має безліч розв'язків. Ранг системи дорівнює 2, якщо при цьому b_2', c_2', $d_2'\neq0$. Якщо ж і $b_2'=c_2'=d_2'=0$, то ранг системи (8) дорівнює 1, і система теж має безліч розв'язків.

На практиці розв'язання СЛР зручно вести за допомогою обчислювальної таблиці.

№	Коефіцієнти при			Вільні члени	Суми	Контроль
	x	y	z			
	1	2	3	4	5	6
$\boxed{1}$	a_1	b_1	c_1	d_1	S_1	
2	a_2	b_2	c_2	d_2	S_2	
3	a_3	b_3	c_3	d_3	S_3	
$\boxed{4}$	0	b_2'	c_2'	d_2'	S_2'	$\sum_2'$
5	0	b_3'	c_3'	d_3'	S_3'	$\sum_3'$
$\boxed{6}$	0	0	c_3''	d_3''	S_3''	$\sum_3''$

В таблиці $S_i=a_i+b_i+c_i+d_i$ $(i=\overline{1,3})$ – це суми елементів відповідних рівнянь.

В рядках 4 і 5 – елементи перетворених за правилом прямокутника другого і третього рівнянь системи (1) з провідним елементом a_1, $S_i'=b_i'+c_i'+d_i'$ $(i=\overline{2,3})$.

В шостому рядку елементи перетвореного за правилом прямокутника 5-го рядка з провідним елементом b_2', $S_3''=c_3''+d_3''$.

У стовпчику «контроль» записані результати перетворень за правилом прямокутника сум S_2 і S_3, тобто $\sum_2^I=a_1S_2-a_2S_1$.

Після перетворень останнього виразу отримаємо $\sum_2^I=S_2'$, аналогічно $\sum_3^I=S_3'$, $\sum_3^{II}=S_3''$. Якщо хоча б одна з рівностей не виконується, то це означає, що в процесі обчислень допущена помилка, і її необхідно виправити перш ніж, продовжувати подальші обчислення.

При обчисленні рангу матриці ми, комбінуючи за допомогою елементарних перетворень, перетворюємо в нулі окремі елементи рядків (або стовпців). Користуючись правилом прямокутника, ми так само перетворюємо в нулі всі елементи, які розташовані нижче провідних елементів, що відповідає поступовому застосуванню елементарних перетворень.

Ідею обчислення визначників за допомогою правила прямокутника покажемо на прикладі визначника другого порядку.

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22}-\dfrac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & \dfrac{a_{22}'}{a_{11}} \end{vmatrix}=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}\cdot a_{22}'),$$

де $a_{22}'=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ – новий перетворений за правилом прямокутника елемент, що став на місці a_{22}. Тобто,

$$\Delta_2 = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}a'_{22}) = a'_{22}\,, \tag{9}$$

де $\dfrac{1}{a_{11}}$ – поправочний множник (коефіцієнт), а $a_{11}a_{22}'$ – добуток діагональних елементів.

Використовуючи формулу (9), для визначника III-го порядку маємо

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{a_{11}}{a_{11}^2}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \dfrac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_{11}^2}\cdot a_{11}\cdot \Delta'_2 = \frac{1}{a_{11}}\left(\frac{1}{a'_{22}}\left(a'_{22}a''_{33}\right)\right) = \frac{a''_{33}}{a_{11}}.$$

Аналогічно

$$\Delta_4 = \frac{1}{a_{11}^2}\cdot\frac{a'''_{44}}{a'_{22}}\,,\ \Delta_5 = \frac{a''''_{55}}{a_{11}^3\cdot(a'_{22})^2\cdot a''_{33}}\,.$$

Вище позначено a'''_{44} – значення елемента головної діагоналі після трикратного застосування правила прямокутника у визначнику 4-го порядку. Так само a''''_{55} – це значення елемента головної діагоналі визначника 5-го порядку при застосуванні 4-х раз правила прямокутника.

Якщо позначити $a_{nn}^{(n-1)}$ – значення n-го елемента головної діагоналі визначника n-го порядку після (n–1)-го застосування правила прямокутника, то значення Δ_n визначника n-го порядку в загальному вигляді запишеться:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{a_{nn}^{(n-1)}}{a_{11}^{n-2}\cdot(a'_{22})^{n-3}\cdot(a''_{33})^{n-4}\cdot\ldots\cdot a_{(n-2)(n-2)}^{(n-3)}}\,. \tag{10}$$

НАВЧАННЯ СТУДЕНТІВ У МАЛИХ ІНТЕРАКТИВНИХ ГРУПАХ ЯК ОДИН ІЗ ШЛЯХІВ ЇХ МЕТОДИЧНОЇ ОЗБРОЄНОСТІ

І.В. Лов’янова
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Ефективність формування знань, умінь та навичок учнів залежить від багатьох чинників, певне місце серед них займають і види навчання такі, як індивідуальне спілкування з учителем, робота в групі, колективна робота всього класу. На сучасному етапі переходу до особистісно-орієнтованих технологій навчання виникає необхідність з’ясування переваг кожного із зазначених видів навчання і вибір найбільш оптимального виду, через який може здійснюватися особистісно-орієнтований підхід. З цією метою серед учнів старших класів шкіл, ліцеї та гімназій м. Кривого Рогу було проведено опитування, в якому з’ясовувалися ті види навчання, в яких учні відчувають себе найбільш комфортно. У результаті опитування з’ясувалося, що серед таких видів навчання, як індивідуальне спілкування з учителем, робота в групі, колективна робота всього класу учні не віддали переваги жодному виду. Так, індивідуальне спілкування обрали 34,2% опитуваних, роботу в групі та колективну роботу класу – відповідно 34,2% і 31,6%. Це, у свою чергу, означає, що учні мають приблизно однакову готовність до навчання в будь-якому із зазначених видів і грамотна комбінація цих видів у спеціально-організованому навчанні сприятиме розвитку особистості учнів, зокрема, таких їх якостей, як уміння працювати в групі, приймати рішення, відстоювати свої власні думки, вступати в діалог тощо.

Грамотна комбінація видів навчання в організації процесу навчання потребує від студентів, майбутніх учителів математики, спеціальної підготовки. Тому озброєння студентів необхідними знаннями з методики навчання математики, які продиктовані сучасними навчальними технологіями, ми вважаємо за потрібне розглядати на практичних та лабораторних заняттях із МВМ. При цьому найбільш ефективними, із нашої точки зору, є ділові й рольові ігри, під час яких студенти, виконують роль учнів, засвоюють разом із змістом занять методичні особливості організації подібних занять із школярами. До організаційних форм навчання, якими мають володіти студенти-випускники, ми відносимо: навчальний діалог, гру, співробітництво, групову роботу учнів у малих інтерактивних групах.

Зміст дисциплін математичного циклу сприяє створенню малих груп як на етапі ознайомлення і засвоєння нового навчального матеріалу, так і на інших етапах: закріплення, узагальнення, систематизації, контролю[3].

Запроваджуючи на заняттях із студентами роботу малих інтерактивних груп, ми спиралися на дослідження, зроблені Є.В. Коротаєвою [1].

Опишемо як відбувалося робота в зазначених малих інтерактивних групах у ході експериментального навчання.

Створення й організація роботи групи складається з таких етапів: розподіл учнів на групи, з'ясування функцій учасників і змісту діяльності груп, робота в групах.

На першому етапі студенти знайомляться з найпоширенішими способами формування малих груп: з ініціативи вчителя (найпростіший спосіб, який дає змогу зрівняти групи за рівнем підготовки учнів, але може призвести до психологічної несумісності в малих групах); за бажанням учнів (теж один із поширених способів, при цьому немає проблем із сумісністю, але до таких груп, як правило, входять різні за рівнем навченості учні); за стилем інтелектуальної діяльності (ерудит, критик, генератор ідей – такий спосіб формування малих груп придатний у позакласній або факультативній роботі); за бажанням лідерів (учитель надає першим за рейтингом "найсильнішим" учням право набрати власні групи. Наслідками такого способу формування груп є досить висока сумісність у групах. Головний недолік – це психологічний прес на тих, кого вибрали останніми, а також різний внесок учнів у вирішення проблеми).

На цьому ж етапі, обравши один із способів, студенти розподіляються на групи. У ході експерименту найчастіше створювалися й працювали: гетерогенна мала група із 4-5 осіб; навчальна четвірка "Міжсобійчик"; п'ятірка учнів "Зірка-Мозаїка"; група учнів у складі семи чоловік "Велика сімка".

Опишемо склад, функції учасників, зміст діяльності групи.

Так, у гетерогенній малій групі з 4-5 осіб ролі розподіляються так: один член групи – лідер (консультант), а всі інші – співвиконавці групової діяльності. Дієвість такої групи забезпечується наявністю в її складі не менше як 50% учнів із високим та середнім рівнем навчальних можливостей. Форма навчальних занять для роботи такої групи – робочий семінар із трьохелементною структурою, що передбачає наявність трьох взаємопов'язаних частин: коригуючої (консультанти усно перевіряють знання учнів), навчальної (формування конкретних понять, робота в складі малої групи) та контролюючої (індивідуальна письмова робота).

Організація групової роботи у четвірках ("Міжсобійчик") складається з двох етапів: перший – індивідуальна робота, другий – прийняття групового рішення. Позиції учасників групи представлені на рис. 1.

Рис. 1. Позиції учасників "Міжсобійчика"

На першому етапі педагог пропонує достатньо велике за обсягом завдання: вивчити й скласти конспект 3–4-х параграфів підручника; продумати питання до дискусії на актуальну тему і т.п. На підготовку й виконання цього завдання дається 15–20 хвилин. Важливо, щоб до кінця контрольного часу кожен член групи мав свій варіант завдання, що виконується.

На другому етапі члени групи збираються разом. Оскільки кожен учасник має свій варіант рішення, мета цього етапу полягає у продукуванні загальних положень. При цьому велику увагу звертають не лише на зміст, але й на форму вирішення задачі (групи можуть пропонувати рішення у вигляді конспекту, малюнку, схеми, віршів тощо). Час – 10 хвилин.

Як альтернативний варіант роботи навчальних четвірок можливий розподіл ролей: *Доповідач*, *Тямущий*, *Конструктивний критик*, *Організатор*. Кожна роль має свою навчальну задачу:

1. *Доповідач*, розвиваючи у своєму виступі основний тезис, повинен відрізнятися глибоким розумінням теми, культурою викладу, що забезпечує змістовий аспект роботи групи.
2. *Тямущий* завдяки своїм емпатичним здібностям створює сприятливий емоційний фон для роботи групи.
3. *Конструктивний критик* оцінює роботу групи, внесок кожного у відповідності з роллю, а також сам процес взаємодії.
4. *Організатор* забезпечує створення ситуації навчального діалогу та взаємодії.

Така рольова організація роботи потребує постійного нагляду з боку вчителя. Учитель тут вирішує і тактичну, і стратегічну задачі: показати можливості роботи за ролями та умотивувати учнів на поступове включення в роботу навчальних четвірок. Продуктивність подібної технології визначається ступенем активності й відповідальності за виконання певної позиції – ролі, а також здатністю гнучко змінювати ці позиції.

З точки зору формування інтелектуальних умінь робота в малих групах, які складаються з 4-х чоловік, дозволяє, використовуючи вміння логічно оперувати навчальним матеріалом у ході виконання основного завдання, яке було запропоновано групі, набувати й розвивати вміння самостійно виконувати розумові дії планування, реалізації, контролю, корекції.

Взаємодія між групами, спільний пошук рішення, навчання співпраці стає можливим у режимі інтерактивного навчання, коли педагоги віддають перевагу групам учнів із п’яти чоловік. Клас достатньо легко розбивається на “зірочки”. Для організації діяльності навчальних п’ятірок використовуються в спрощеному варіанті технологія “мозаїки” (рис. 2).

Спершу проблема обговорюється всередині групи з п’яти чоловік. Кожен учасник до кінця обговорення повинен мати спільний для даної групи план рішення (час 10–15 хвилин). Потім початкові групи тимчасово розпадаються; організовуються нові, сформовані за принципом “буквеної спільноти”: А-А-А-А-А і т.п. Кожен учасник нової групи пропонує свій шлях вирішення проблеми й знайомиться з варіантами інших груп. Обирається краще або продукується загальне рішення (час 10–15 хвилин). На заключному етапі відновлюються початкові групи. Учасники повертаються зі збагаченим баченням проблеми й розумінням багатозначності її вирішення. Спільним пошуком знаходиться більш об'єктивне рішення порівняно з роботою ізольованої групи (час 10–15 хвилин).

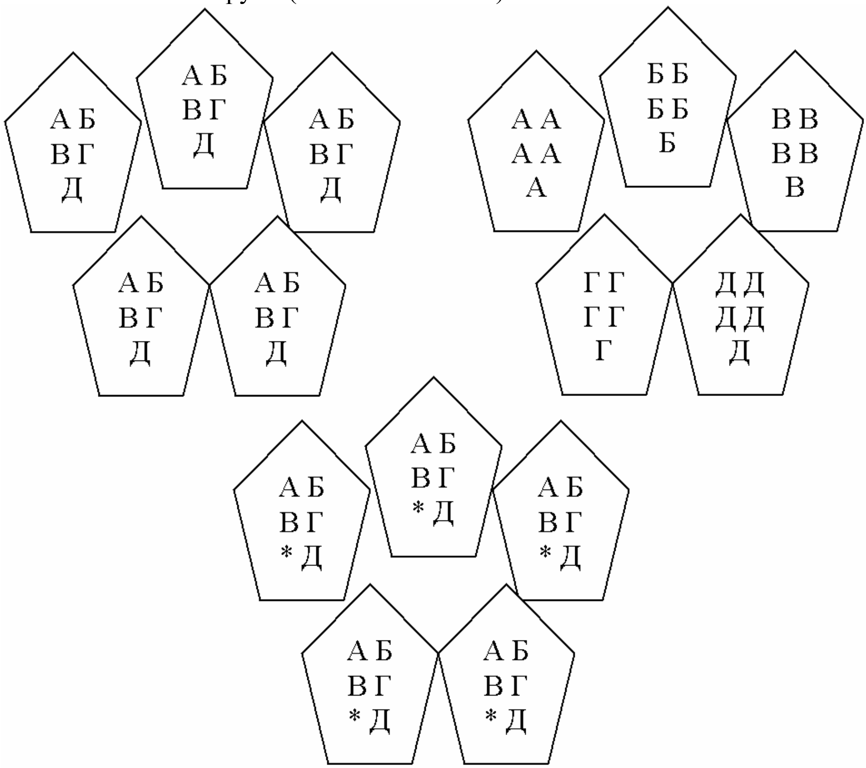


Рис. 2. Технологія організації навчальної роботи в п'ятірках "Мозаїка"

Організація групової роботи в сімках допустима й найбільш ефективна в умовах ведення дискусії, тому що дозволяє включити в процес організації й ведення дискусії самих учнів. Включаючи таку організаційну форму навчання у ході формуючого експерименту, ми спиралися на методику, запропоновану Л.Д. Столяренком [2], котрий пропонує сім ролей: *Ведучий*, *Ініціатор*, *Сперечальник*, *Погоджувальник*, *Оригінал*, *Деструктор*, *Мовчун*.

Ініціатор захоплює ініціативу з самого початку, відстоює свою позицію з допомогою аргументів та емоційного натиску.

Сперечальник зустрічає багнетами будь-які висунуті пропозиції і захищає протилежні точки зору.

Погоджувальник дає згоду на будь-яку точку зору й підтримує все що не висловить виступаючий.

Оригінал, зазвичай, не вступає в суперечку, та час від часу висуває які-небудь неочікувані пропозиції.

<u>*Ведучий*</u> намагається, щоб висловилися всі учасники, спонукає їх висловлюватися, ставить уточнюючи питання.

<u>*Мовчун*</u> усіляко уникає прямої відповіді на питання, ніхто не повинен зрозуміти, якої точки зору він дотримується.

<u>*Деструктор*</u> увесь час порушує плавний плин дискусії (щось роняє, невчасно хихоче, гучним шепотом просить сусіду посунутися).

Дискусія ведеться учасниками “Великої сімки”; решта учнів на час дискусії стають незалежними спостерігачами, помічають плюси та мінуси кожної позиції і вирішують для себе, яка роль є оптимальною для спільного обговорення. Одночасно школярам пропонуються питання: яким чином та чи інша роль впливає на хід дискусії та її рішення? чи відбудеться урок, коли всі учні оберуть роль Мовчуна? Сперечальника? Деструктора?

Хоча організація навчального діалогу й пов’язана з певними труднощами (учні повинні мати знання по проблемі, яка обговорюється; поводити себе у відповідності з отриманою роллю; характер ролі відрізняється лише в поведінці, її не розкривають до кінця дискусії; учитель повинен володіти навичками ведення дискусії), тем не менше регулярне його використання в навчальному процесі формує продуктивні підходи до оволодіння інформацією, щезає страх висловити "неправильну" пропозицію, встановлюються довірчі відносини з учителем, що разом сприяє формуванню вмінь творчого характеру.

Організована таким чином робота студентів на практичних та лабораторних заняттях із МВМ, по-перше, сприяє формуванню власних особистісних якостей студента, по-друге, озброює знаннями з методики організації і проведення різних форм навчання через активні форми їх засвоєння.

Література:

1. Коротаева Е.В. Директор-учитель-ученик: пути взаимодействия / М.: Сентябрь, 2000. – 144 с.
2. Столяренко Л.Д. Основы психологии. –Ростов-на-Дону, 1997. – С.700–707.
3. Лов’янова І.В. Інтерактивне навчання як форма педагогічної взаємодії в системі “учитель-учень” // Вісник Житомирського держ. пед. університету. – Вип. 12. – Житомир: РВВ ЖДПУ ім. І. Франка. – 2003. – С. 111–113.

ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ АСПЕКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ НОВИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ НАВЧАННЯ

І.В. Лов'янова, А.В. Шамне
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

На сучасному етапі комп'ютеризації освіти впровадження комп'ютерної техніки в процес навчання відбувається як предмет вивчення на уроках інформатики; як нові методи й засоби навчання; як методи й засоби керування навчально-виховним процесом. Витоками сучасних нових інформаційних технологій навчання (НІТН) є програмоване навчання, яке виникло на початку 50-х років 20 століття. Центральним поняттям його побудови виступала категорія управління (Б.Ф. Скіф, 1954). У 60-70-ті роки програмоване навчання набуло нового розвитку в роботах Л.Н. Ланди, який запропонував алгоритмізацію процесу.

За останні роки проведено багато наукових досліджень по використанню НІТ до управління навчально-пізнавальною діяльністю учнів, розкриття їх творчого потенціалу (Г.О. Балл, В.Г. Болтянський, П.Я. Гальперін, Ю.В. Горошко, М.І. Жалдак, Г.С. Костюк, С.М. Маланюк, Ю.І. Машбиць, Н.Д. Наумов, С.А. Раков, В.В. Рубців). Спостереження дослідників указують на те, що впровадження НІТН пов'язане з рядом проблем, які умовно можна поділити на такі групи: організаційні, дидактичні та психологічні. Розглянемо, як сучасна психолого-педагогічна наука підходить до розв'язання окреслених проблем.

Організаційні проблеми, пов'язані з технічним та програмним оснащенням шкіл на сьогодні успішно вирішується. Розроблено значну кількість програмних засобів, що дають змогу розв'язувати за допомогою комп'ютера досить широке коло математичних задач різних рівнів складності, зокрема, програми DERIVE, EUREKA, GRAN 1, GRAN-2D, GRAN-3D, MATHCAD, MAXIMA тощо.

У посібнику для вчителів "Комп'ютер на уроках математики" М.І. Жалдак (1997) показав можливість використання засобів сучасних інформаційних технологій під час вивчення алгебри й початків аналізу та геометрії у середніх навчальних закладах із різними ухилами для аналізу функціональних залежностей та статистичних закономірностей.

Програмно-педагогічні засоби (ППЗ), як сукупність комп'ютерних програм навчального призначення, можуть бути використані практично на усіх уроках математики, починаючи вже з 5-6 класів. Так, пакет GRAN на даний момент є чи не єдиним україномовним програмним продуктом високого рівня, який відповідає таким вимогам: вибір психолого-педагогічного підходу до навчання; проектування діяльності учня; реалізацію ППЗ; перевірку відповідності реалізованої програми закладеним при її побудові психолого-педагогічним принципам.

Дидактична проблема використання ППЗ пов'язана з питанням індивідуалізації процесу навчання, яка обумовлюється індивідуально-психологічними особливостями учнів. Розв'язання цієї проблеми ми вбачаємо у здійсненні з боку вчителя педагогічної підтримки кожного учня, степінь і характер якої визначається в залежності від готовності учня до діалогу, його вміння самостійно працювати з ППЗ, індивідуального темпу просування вперед. Що, у свою чергу, підкреслює той факт, що запровадження ППЗ у процес навчання не зменшує, а навпаки збільшує роль учителя як наставника й помічника в засвоєнні змісту навчального предмету.

Психологічна проблема пов'язана з розв'язанням таких питань: на скільки учні готові користуватися ППЗ у процесі пізнання; як на характер засвоєння знань за допомогою ППЗ впливають інтереси та нахили учнів; яка роль учителя у вирішенні поставлених питань?

Аналіз запровадження ППЗ GRAN 1, GRAN-2D, GRAN-3D для комп'ютерного супроводу вивчення тем шкільного курсу математики в 10-11 класах свідчить про помітне поліпшення результатів навчальної діяльності.

З одного боку, ці поліпшення обумовлені тим, що програми, зорієнтовані на візуалізацію абстракцій (границя, неперервність, похідна, інтеграл) і проведення експерименту, сприяють формуванню провідних абстрактних понять математичного аналізу на наочно-інтуїтивному рівні, а також встановленню зв'язків між абстрактно-логічним та образним мисленням. З іншого боку, за допомогою ППЗ зміст навчальних дисциплін засвоюється на основі пошукової і конструкторської діяльності, яка передбачає осмисленість дій учнів і їх самостійне виконання. Слід відзначити також значущі відмінності у виявленні мотивації засвоєння математичних знань за допомогою ППЗ. Так, для переважної більшості старшокласників (80%), орієнтованих на точні та інженерні науки, визначаючою є робота з ППЗ у режимі самозасвоєння й взаємного консультування, коли вчитель виступає в ролі старшого товариша, консультанта. Для старшокласників, що орієнтовані на професії "людина–природа", "людина–людина", "людина–художній образ" більш суттєвим є вплив учителя, внутрішня мотивація роботи з ППЗ знижується або відсутня у 31–61% із них.

Підсумовуючи, слід відмітити, що технологія використання ППЗ із математики стає ефективною за таких умов організації активних дій старшокласників, як: забезпечення внутрішньої мотивації юнаків у ході засвоєння нового матеріалу; наявність стратегічного, тактичного й операціонального орієнтування учнів у ході навчання їх новим розумовим діям; забезпечення умов поетапного відпрацювання розумових дій; організація адекватного й коректного контролю за діями учнів у процесі засвоєння знань.

Критеріями ефективності запровадження НІТН є: навчальна діяльність (підвищення мотивації, зацікавленості, більш глибоке усвідомлення матеріалу); зміни в психофізіологічному стані юнаків (підвищення працездатності, оптимізація психічного стану); зменшення часу, необхідного для засвоєння матеріалу.

Таким чином, НІТН предметам математичного циклу можуть стати в руках учителя дійовим засобом керівництва пізнавальною діяльністю учнів лише за умови врахування їх вікових та індивідуальних особливостей. При цьому завдання, що пропонуються учням, мають бути розраховані, по-перше, на розв'язання тих задач, які носять для старшокласників значущий характер, а, по-друге, має відбуватися поступовий перехід від завдань формування активної позиції учня як суб'єкта власної діяльності, заснованої на широкому залученні модельно-образних і знаково-символьних засобів аналізу об'єктів до завдань, пов'язаних із професійним та особистісним самовизначенням учнів. Крім того, поєднання НІТН з іншими технологіями навчання підвищує ефективність процесу пізнання, що, у свою чергу, потребує додаткових досліджень.

Література:

1. Вопросы алгоритмизации и программированного обучения / Под ред. Л.Н. Ланды. – М., 1973. – Вып. 2.
2. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. – К.: Техніка, 1997. – 304 с.
3. Машбиц Е. И. Компьютеризация обучения: проблемы и перспективы. – М.: Знания, 1986.
4. Психологія програмованого навчання / За ред. Г.С. Костюка, Г.О. Балла. – К.: Рад. шк., 1973.
5. Раков С.А., Олейник Т.А., Скляр Е.В. Использование пакета DERIVE в курсе математики. – Харьков: РЦНИТ, 1996. – 158 с.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ЛОГИКИ И ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ В КУРСЕ ОСНОВАНИЙ ГЕОМЕТРИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК

Т.В. Ломаева, Н.В. Шаповалова
г. Киев, Национальный педагогический университет
имени М.П. Драгоманова

При чтении курса лекций по основаниям геометрии в педагогических университетах часто аксиомы анализируются достаточно подробно, что же касается тех правил логики, с помощью которых теоремы выводятся из постулатов, то они обычно остаются вне внимания слушателей. В то же время при фактическом отсутствии курса логики, в частности, символической, восполнения этого пробела было бы крайне желательным.

Наш обычный язык почти непригоден для обсуждения проблем, связанных с современной логикой. Необходимость в научных, безупречно точных формулировках потребовала создания специального символического языка. Отсюда, кстати, происходит и название науки – символическая или математическая логика. В символической логике различные взаимоотношения между высказываниями, множествами и т.д. выражают на языке формул, который свободен от неясностей и двусмысленности, столь свойственных нашему обычному языку. Благодаря этому оказывается возможным построить логику на основе некоторых исходных понятий и формул с помощью четко сформулированных правил действий. Кроме того, преимущества символического языка трудно переоценить, когда речь идет о компактности изложений и ясности для его понимания, что так необходимо именно в преподавательской деятельности.

Считается, что Лейбниц первым серьезно рассматривал вопрос о необходимости создания символической логики. В одной из своих ранних работ «Искусство комбинаторики», опубликованной в 1666 г., он говорит о желательности введения универсального научного языка, созданного на основе целесообразно подобранной символики и служащего для проведения всевозможных рассуждений. Возвращаясь к этой идее в период с 1679 по 1690 г., Лейбниц формулирует ряд чрезвычайно важных понятий и уже значительно ближе подходит к созданию символической логики.

Идея создания символической логики вновь привлекает внимание ученых в связи с появлением в 1847 году работы Джорджа Буля «Математический анализ логики или опыт исчисления дедуктивных умозаключений». Следующая его работа была опубликована в 1848 году и наконец в 1854 году Буль излагает свои идеи в трактате «Исследование законов мышления, на которых основаны математические теории логики и вероятностей». В 1847 году современником Буля – Августом де Морганом был опубликован трактат по формальной логике «Формальная логика или исчисление выводов, необходимых и возможных», в котором автор в некоторых отношениях идет значительно дальше Буля. Позднее Морган успешно изучает логику отношений – область, не охваченную его предшественниками.

Наиболее полным образом теория Буля была развита в обширном трактате Э. Шредера «Лекции по алгебре логики», опубликованном в период с 1890 по 1895 гг. С тех пор направление в логике, идущее от Буля, специалисты называют обычно алгеброй Буля–Шредера. Алгебра Буля продолжает развиваться. Опубликованные в 1879–1903 гг. труды Г. Фреге и исследования итальянского математика Пеано дают начало новым направлениям в математической логике. Пеано считал желательным построить всю математику на базе логического исчисления, а Фреге исходил из необходимости более надежного обоснования математической науки. Работа Фреге «Исчисление понятий» появилась в 1879 г., а его «Основания арифметики», имеющие важное историческое значение, – в 1893 г. «Математический формуляр» Дж. Пеано начал выходить в 1894 г.

Используя достижения Фреге и Пеано, Уайтлед и Рассел создают в 1910–1913 гг. свои «Принципы математики» – фундаментальный труд, оказавший исключительное влияние на все последующее развитие математической логики. В этой работе математика отождествляется с логикой, поскольку система натуральных чисел, а стало быть и почти вся математика, строится дедуктивным образом на основе некоторого множества постулатов логики. Период с 1934 по 1939 г. ознаменовался выходом в свет «Оснований математики» – всеобъемлющего трактата Давида Гильберта и Поля Бернайса, созданного на основе некоторых работ Гильберта и его университетских лекций. Авторы пытаются построить математику с помощью символической логики таким образом, чтобы могла быть решена задача о непротиворечивости гильбертовой системы аксиом.

Появление «Принципов математики» дало мощный толчок развитию символической логики, и в настоящее время значительная группа математиков сосредоточила свои усилия в этой области.

При построении математической теории теоремы выводятся из аксиом или уже выведенных теорем. В выводах мы идем от посылок к заключениям, а потом рассуждения носят импликативный характер: «если то-то и то-то, то то-то и то-то». При этом мы заботимся не об истинности или ложности наших посылок и заключений, а лишь о правильности тех рассуждений, с помощью которых осуществляется переход от первых к последним. Рассуждения должны быть формально правильными, т.е. соответствующие импликации должны быть истинными вне зависимости от истинности или ложности посылок и заключений. Следовательно, импликации должны быть тавтологичными. Наоборот, в случае тавтологичности импликаций мы считаем наши рассуждения правильными. Таким образом, для проверки правильности рассуждений необходимо только убедиться в том, что все использованные импликации являются тавтологиями.

С этой точки зрения важнейшей задачей логики считается исследование тавтологий, т.е. отыскание всех тех сложных высказываний, которые являются истинными независимо от ложности или истинности составляющих высказываний. Такие высказывания являются законами логики и лежат в основе всякого правильного формального рассуждения.

Между законом сложения сил по правилу параллелограмма и математическим методом существует некоторая любопытная, хотя и не слишком далеко идущая аналогия. Согласно правилу параллелограмма, сложение двух сил дает единственную результирующую силу. Эта последняя изменяется при изменении одной или обеих составляющих и в то же время различные пары составляющих сил могут иметь одинаковые результирующие. И подобно тому, как результирующая определяется двумя составляющими, математическая теория полностью определяется системой аксиом и логикой. Иначе говоря, совокупность утверждений, составляющих математическую теорию, есть результат взаимодействия двух множеств – множества первоначальных утверждений, называемых аксиомами, и множества первоначальных утверждений, образующих логику или правила вывода.

Достаточно давно математики обнаружили, что первое из этих множеств, т.е. множество аксиом, можно менять сообразно поставленными целям, однако до самого последнего времени второе множество – множество утверждений, образующих логику теории, – считались всеми учеными неизменным, абсолютным и непреложным.

Законы логики, открытые Аристотелем в IV веке до н.э., представляются чем-то вечным, чем-то не допускающим альтернативы. По общему убеждению, аристотелевы законы являются как бы частью мироздания и присущи самой природе человеческого мышления. Лишь в 1921 году с этим заблуждением покончил американский математик А. Черч, который писал: «Ни одной из логических систем мы не приписываем характера единственности или абсолютной истинности. Понятия формальной логики были введены в науку в качестве абстракций, используемых для описания и систематизации опытных фактов, однако сами эти понятия не определяются вполне соответствующими практическими потребностями, и при окончательном их оформлении многое зависит от произвола ученого».

Возьмем для примера трехмерную геометрию, используемую для описания физического пространства – здесь, как нам кажется, наличие такого положения вещей признается наиболее широко. Понятия геометрии (точка, прямая, плоскость) носят абстрактный характер, ведь речь идет о плоскостях, не имеющих толщины, о точках, не имеющих площади, о прямых, не имеющих длины и т.д., о бесконечных точечных множествах, о линиях бесконечной длины и о других понятиях, которые не могут быть воспроизведенными ни в одном физическом эксперименте. Тем не менее, в приложениях геометрии к изучению физического пространства удалось установить достаточно четкое соответствие между теоремами геометрии и наблюдаемыми свойствами реальных физических тел. Поскольку геометрия строится с целью описания физического пространства, то тем самым, в известной мере вырисовывается и характер абстрактных понятий геометрии, однако предполагаемые приложения не определят этих понятий полностью. Следовательно, может существовать – и действительно существует – несколько геометрий, служащих для описания физического пространства. Так, геометрией микромира является геометрия Римана, а геометрией космоса – геометрия Лобачевского и т.д. При этом каждая из упомянутых геометрий характеризуется своей системой аксиом, связывающих основные понятия соответствующих геометрий.

Точно так же существует несколько формальных систем, которые можно использовать в качестве логики, причем некоторые из них могут быть более удобными, но нельзя сказать, что одна из них правильная, а другая нет.

Мы говорим, что новые геометрии появились впервые в связи с невозможностью доказательства пятого постулата Эвклида и отрицанием его путем введения постулатов, противоречащих последнему. Аналогично новые, так называемые «многозначные логики», появились впервые в связи с отрицанием аристотелева закона исключенного третьего.

В 1921 г. Т. Лукасевич в маленькой двухстраничной статье рассматривает трехзначную логику, т.е. такую, в которой всякое высказывание p может принимать одно из трех возможных значений истинности. Вскоре после этого и независимо от Лукасевича, Пост анализирует m-значной логики, в которой высказывание p может принимать одно из m возможных значений истинности, причем m – любое целое число, больше 1. В случае, когда m больше 2, логику называют многозначной. В 1930 г. Лукасевич и Тарский предпринимают дальнейшее изучение m-значной логики. В 1982 г. понятие m-значной логики обобщается Рейхенбахом, рассматривающим бесконечнозначную логику, в которой для высказывания p существует бесконечное множество значений истинности.

Рассмотренные логики не исчерпывают всех новых логик. Так, например, Гейтинг построил двузначную символическую логику, исходя из потребностей интуиционистской математической школы, эта логика, в отличие от аристотелевой, не принимает бездоказательно законов исключенного третьего и двойного отрицания. Вследствие этого законы созданной со специальными целями логики Гейтинга, так же как и законы многозначных логик, отличаются от законов Аристотеля. Все такие логики называют неаристотелевыми.

Подобно неэвклидовым геометриям, неаристотелевы логики также нашли себе приложения. Бесконечнозначная логика была задумана Рейхенбахом в качестве фундамента математической теории вероятностей. А в

1933 г. Тадеуш Звицкий обнаружил, что многозначные логики могут быть использованы современной квантовой физикой. Многие аспекты такого использования были исследованы Г. Биркгофом, фон Нейманом и Рейхенбахом. Можно с уверенностью сказать, что неаристотелевы логики сыграют немалую роль в будущем развитии математики.

Достаточно большое внимание при преподавании оснований геометрии, уделяется гильбертовой системе аксиом построения математической теории. Д. Гильберт был основоположником формалистской школы. Согласно формалистскому тезису математика имеет дело с формальными логическими системами и представляет собой совокупность абстрактных построений. Поскольку формалисты лишают математику какого бы то ни было конкретного содержания, они оказываются перед необходимостью доказывать непротиворечивость каждой построенной ими на основе формальной системы аксиом математической теории. Без соответствующих доказательств непротиворечивости вся формалистская программа становится бессмысленной.

В своих «Основаниях геометрии» Гильберт переходит от материальной аксиоматики Эвклида к современной формальной аксиоматике. Спасение классической математики на пути, указанном Гильбертом, зависит от решения проблемы непротиворечивости. Именно доказательство непротиворечивости гарантирует нас от возможности возникновения противоречий, однако до Гильберта такие доказательства базировались на отыскании содержательной интерпретации, и тем самым доказательство какой-либо области математики, упиралось в доказательство непротиворечивости какой-либо другой ее области. Таким образом доказательства методом интерпретаций имели лишь относительную ценность. Гильберт предложил новый, прямой путь: соответствующим образом подобранные правила вывода формул позволяют доказать невозможность возникновения противоречивой формулы. В обозначениях логики доказательство непротиворечивости системы аксиом соответствующей математической теории сводится к доказательству невыводимости противоречивой формулы.

Развивая свою концепцию непосредственного доказательства непротиворечивости, Гильберт приходит к теории, названной им «теорией доказательств». Гильберт приступает к подробному изложению этой теории и на основе ее пытается построить доказательство непротиворечивости всей классической математики–- так возникают «Основания математики», явившиеся как бы своего рода «Принципами математики» формалистской школы. План Гильберта, по крайней мере в той форме, в какой первоначально представлял себе его Гильберт оказался обреченным на неудачу. Это было обнаружено К. Гёделем в 1931 г. Пользуясь безукоризненно строгими методами, Гёдель доказал, что в случае такой широкой формализованной дедуктивной системы, какой является гильбертова система, охватывающая всю классическую математику, доказательство непротиворечивости невозможно провести средствами одной лишь этой системы. Гёдель доказал неполноту гильбертовой системы, т.е. обнаружил внутри ее ряд «неразрешимых» проблем – одной из них как раз и оказалась проблема непротиворечивости. Результаты Гёделя принадлежат к числу наиболее выдающихся достижений современной математики.

Литература:

1. Носаль Т.В. Философская концепция понятия «класса» в математике у Б. Рассела. // Тезисы научной студ. конференции. – Тбилиси, 1965. – С. 37-43.
2. H. Eves, C.V. Newsom. An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics, N.Y. Holl, Rinehart and Winston, 1961.

ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ МОДУЛЯ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМИ "ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ"

С.Ф. Максименко, М.А. Кислова, Г.А. Горшкова
м. Кривий Ріг, Криворізький металургійний факультет
Національної металургійної академії України

Криворізький металургійний факультет відповідно до рішення вченої ради Академії, в наступному навчальному році буде приймати участь в експерименті із впровадження кредитно-модульної системи.

Метою нашого дослідження була спроба проаналізувати суть модульного навчання та його застосування при вивченні вищої математики. На думку вчених (В.А. Халюткіна, П.С. Пешкова, П.А. Юуявичене та інших) модульно-блочна система навчання інженерних спеціальностей націлена на більш стійке засвоєння знань студентами, формування та розвитку їх професійного мислення, уміння поставити практичні задачі і приймати вірні рішення.

Кредитно-модульна система дозволяє вести постійний контроль за засвоєнням матеріалу, що вивчається студентами, і своєчасно вносити корективи в навчальний процес. Якість підготовки майбутніх спеціалістів підвищується в умовах модульного навчання, тому що стимулюється систематична робота студентів над навчальним матеріалом. Побудова модульного процесу на основі модульного навчання пов'язана з реалізацією головної мети навчання – створення мотивації для постійної продуктивної самостійної роботи студентів.

В основу модульного навчання покладено поняття „модуль", який являє собою логічно завершену частину учбового матеріалу.

Курс вищої математики орієнтовно можна розбити на такі основні модулі:

– векторна алгебра;
– аналітична геометрія;
– диференціальне числення;
– інтегральне числення;
– функції декількох змінних;
– диференціальні рівняння;
– ряди.

Технологія модульного навчання передбачає:

а) вивчення рівня готовності студентів до сприйняття нового матеріалу (з цією метою проводиться вхідний контроль);

б) видача кожному студенту індивідуального завдання з методичними вказівками для їх виконання;

в) проведення проміжних та залікових контрольних заходів (математичні диктанти, тестування, контрольні роботи, колоквіуми і т.п.).

Розглянемо, як вищеназвані положення можна реалізувати при вивченні модуля “Звичайні диференціальні рівняння”.

Перехід до освоєння цього модуля буде, на наш погляд, більш якісним, якщо студент уміє досліджувати властивості заданої функції, виявляти швидкість росту функції і т.п. за допомогою диференціювання та володіє технікою знаходження первісної. Отже, вхідний контроль потрібно провести саме з цих питань.

Формулюючи обернену задачу – знайти невідому функцію за деякими заданими її властивостями, викладач ставить перед студентами проблему: чи буде така задача мати єдиний розв’язок і якщо так, то за яких умов?

Далі йде пояснення, що для вирішення поставлених питань в математичному аналізі складають співвідношення, що зв’язують невідому функцію і величини, що задають її властивості. Одержані співвідношення називають диференціальними рівняннями, за допомогою яких з’являється можливість дослідження не тільки фіксованих (кінцевих) станів, але й таких, що змінюючись, протікають в навколишньому світі (природі, техніці, суспільстві).

Важливо зосередити увагу студентів на тому, що конкретні технічні, фізичні, геометричні і т.п. задачі часто зводяться до розв’язання однакових за формою диференціальних рівнянь. Наприклад, такі задачі як:

– визначення закону радіоактивного розпаду;

– закон зміни швидкості ракети при розгоні;

– закон руху ротора і т.п.

приводять до ідентичних диференціальних рівнянь зі змінними, що розділяються. Розв’язком таких рівнянь є експоненціальна функція. Це один із проявів єдності оточуючого нас матеріального світу.

Такий підхід дозволяє студентам не тільки освоїти формальні основи, необхідні для користування відповідним математичним апаратом, але і творчо застосовувати одержані знання для самостійного розв’язування професійних задач.

Література

1. Тимофеева Ю.Ф. Роль модульной системы высшего образования в формировании педагога-инженера // Высшее образование в России. – 1999. – № 4.

2. Гараев В.М., Куликов С.И., Дурко Е.М. Принципы модульного обучения // Вестник высшей школы, 1997. – № 8.

3. Юуявичене П.А. Теория и практика модульного обучения // Советская педагогика. – 1990. – № 1.

4. Долгов Н.М., Дума А.С., Ковтун И.И. Дифференциальные уравнения. Приложение к решению некоторых инженерных задач. – К., 1987.

5. Пономарёв К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. – М., 1962.

ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМ ВПРАВ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ ПРИ ФОРМУВАННІ ЕВРИСТИЧНИХ УМІНЬ МАЙБУТНІХ ІНЖЕНЕРІВ

Т.С. Максимова
м. Горлівка, Автомобільно-дорожній інститут Донецького національного технічного університету

Дослідження А.Ф. Есаулова, В.А. Моляко, Т.В. Кудрявцева, Д.О. Чернишова та ін. показують, що формування інженерного мислення пов'язане з формуванням евристичних прийомів та відповідних їм евристичних умінь, які стимулюють пошук розв'язання нових проблем, відкриття нових знань, спрямовують думку на проникнення в суть змісту.

Формування евристичних умінь студентів вищих технічних навчальних закладів на практичних заняттях з вищої математики природно пов'язане з виконанням студентами спеціальних систем вправ на малюнках. Це пояснюється тим, що серед вимог до професій "людина–техніка" виділяють точне зорове сприйняття, розвинену технічну уяву, уміння переключати та концентрувати увагу, спостережливість. Система таких вправ при цьому повинна містити в собі вправи на виконання дій розпізнавання, одержання висновків з умов задачі, формування умінь здійснювати різні види "вичленовувань", інтерпретувати геометричну інформацію, формулювати проблеми.

Розв'язання вправ за готовими малюнками створює сприятливі умови для застосування методу евристичного спостереження, що важливо для формування евристичного прийому "бачити та спостерігати". Під час застосування визначеного інтеграла студентам може бути запропоноване завдання:

Для кожної із ситуацій на рис. 1 оберіть відповідний варіант відповіді: об'єм фігури, утворений обертанням заштрихованої фігури дорівнює (функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ на відповідних проміжках мають обернені $x_1(y)$, $x_2(y)$, $x_3(y)$)

A. $\int_a^l y_1^2 dx + \int_l^b y_2^2 dx$ B. $\int_c^d (x_2^2 - x_1^2) dy$ C. $2\int_a^d (x_2^2 - x_1^2) dy$

D. $\int_c^l x_1^2 dy + \int_l^d x_2^2 dy$ E. $\int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$ F. $\int_a^d (x_1^2 - x_2^2) dy$

G. $\int_c^d x_2^2 dy$ H. $\int_a^d y_2^2 dx$ I. $\int_a^c x_1^2 dy - \int_c^d x_2^2 dy$ J. $\int_c^d (x_1^2 - x_2^2) dy$

У процесі виконання завдання студентам необхідно побачити особливості зображених фігур – фігура уявляє собою криволінійну трапецію відносно вісі ОХ або ОУ, фігура складається з декількох криволінійних трапецій, фігура симетрична – спостерігають за властивостями функцій, що обмежують зображені фігури, і на цій основі роблять висновки про застосовність тієї чи іншої формули у кожному випадку. Аналогічні завдання можна використовувати також при знаходженні площ фігур, у різних системах координат тощо.

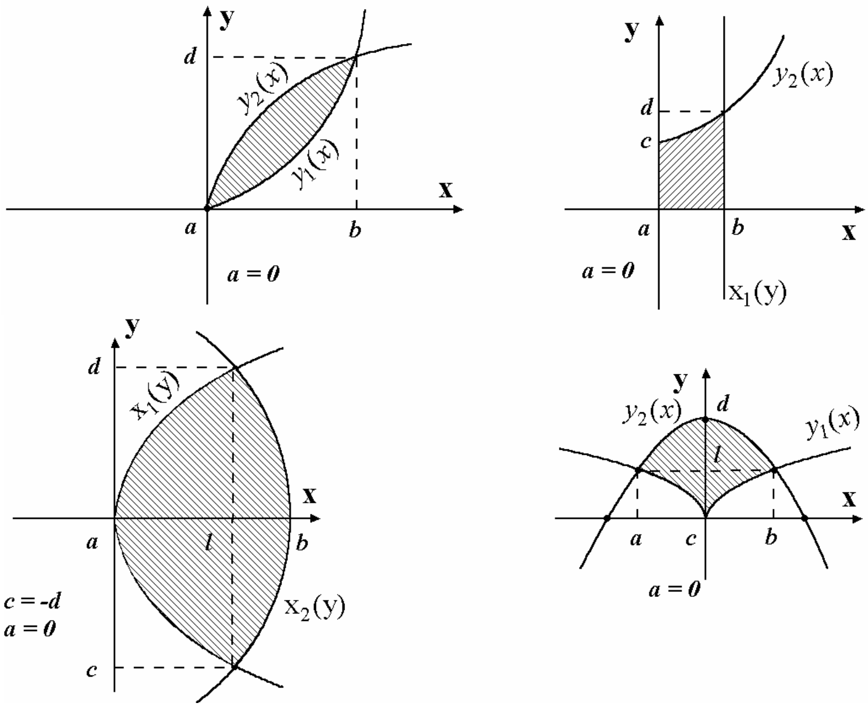


Рис. 1

Такі вправи створюють умови для успішного розв’язання студентами задач із професійним змістом, які стосуються знаходження площ, об’ємів об’єктів, зосереджуючи увагу на побудові математичної моделі задачі, а не на обчисленні інтегралів.

Уміння розв’язувати задачі та вміння складати задачі різняться і з першого не випливає друге. Складання задач з наперед заданим прийомом розв’язання або вимогою використати теоретичні факти і т.ін. потребує використання знань в інших зв’язках, ніж під час розв’язання готової задачі.

Складання студентами задач за готовими малюнками вимагає від студентів не тільки бачити та спостерігати за властивостями зображених об’єктів, але і аналізувати, порівнювати, систематизувати, узагальнювати отриману інформацію.

Під час вивчення векторного добутку студентам може бути запропоноване завдання:

Для кожної з ситуацій на рис. 2:

а) поставте у відповідність:

A. $\vec{M} = \left|\vec{F}\right| \times \left|\overrightarrow{OA}\right|$ B. $\vec{M} = \vec{F} \times \overrightarrow{ON}$ C. $\vec{M} = 0$ D. $\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OA}\right|$

E. $\vec{M} = \vec{F} \times \overrightarrow{OA}$ F. $\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot ON$ G. $\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$;

б) покажіть напрямок моменту сили $\vec{F}$;
в) складіть задачі.

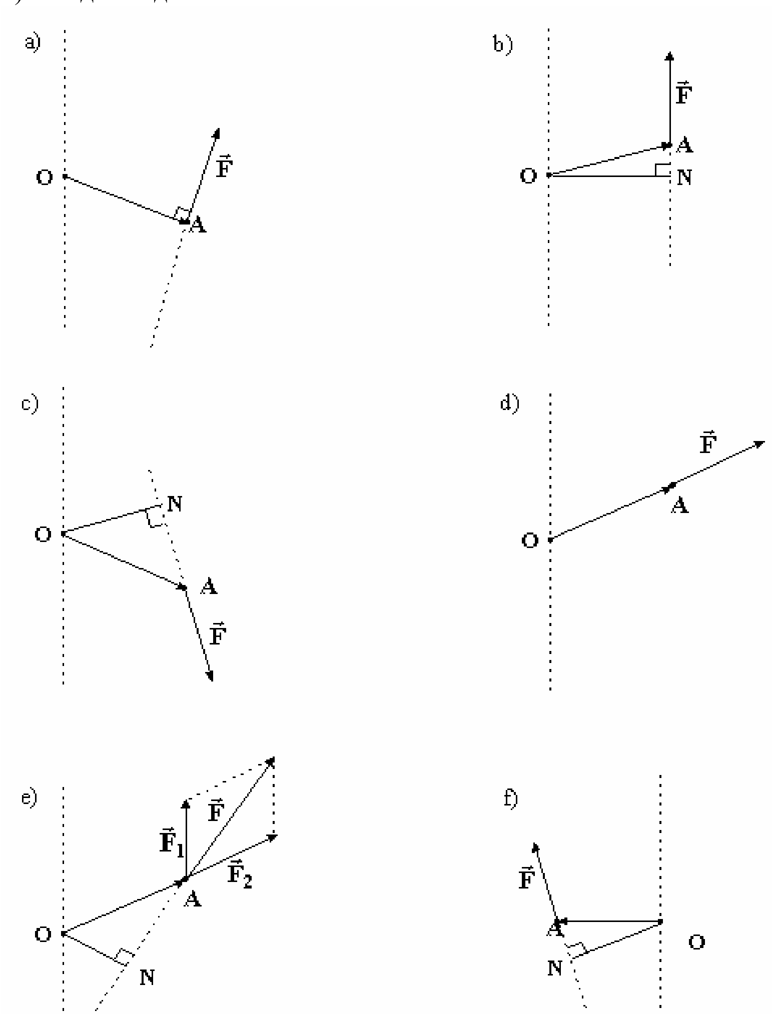


Рис. 2

Для виконання такого завдання необхідним є постановка задачі в загальному вигляді. Визначення особливостей розташування плеча та сили (колінеарні, перпендикулярні) надасть можливість конкретизувати постановку задачі для кожного з малюнків та підібрати відповідні числові дані.

Евристичному пошуку сприяє використання системи задач за готовими малюнками з напіввизначеною умовою, як, наприклад, “Що можна знайти за даними зображеними на малюнку?”, які сприяють формуванню уміння виявляти приховану інформацію, формулювати проблему різними мовами, формулювати обернену задачу, розв’язувати з кінця. Формування уміння коректно формулювати проблему відбувається при роботі студентів із задачами, у яких є невідповідність між графічними даними та наведеними числовими даними, недостатність даних, надмірність даних.

Під час вивчення скалярного добутку студентам може бути запропоноване завдання:

Під дією сили $\vec{F}$ (або декількох сил) точка її прикладання C, рухаючись прямолінійно, переміщується в точку B. Що можна знайти за даними, зображеними на рис. 3?

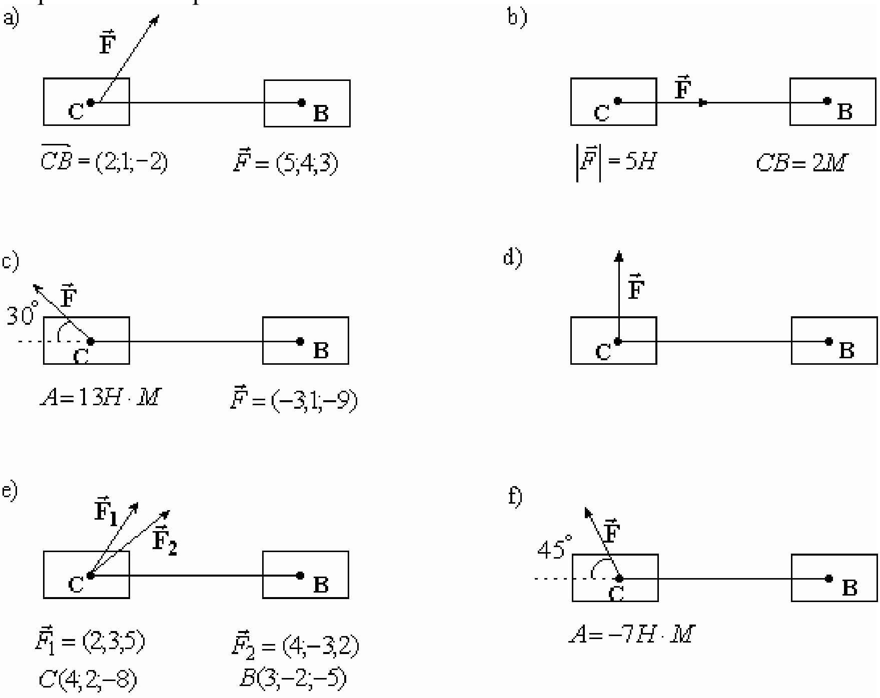


Рис. 3

В процесі роботи з системами доцільно надавати студентам евристичні підказки, задавати евристичні питання, що стимулюють активність студентів.

Розроблені таким чином системи вправ сприяють процесу управління формуванням евристичною діяльністю майбутніх інженерів в процесі навчання вищої математики; в основі їх побудови знаходяться набори загальних та спеціальних евристик. Тобто такі системи вправ на малюнках можна розглядати як системи евристично орієнтованих задач із класу евристико-дидактичних конструкцій [1], метою яких е формування евристичних прийомів та відповідних евристичних умінь.

Література:

1. Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. Монография. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004. – 439 с.

ПРОПЕДЕВТИКА КУРСУ "ТЕОРІЯ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ" ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

О.В. Максимов, Т.М. Ковальчук, Н.В. Рашевська
м. Кривий Ріг, Криворізький технічний університет

Однією із задач сучасної методики викладання математичних дисциплін як у середній, так і у вищій школах є формування в учнів мислення на рівні прийняття рішень [1]. Найбільш ефективно сприяють формуванню вмінь приймати рішення задачі, для розв'язання яких недостатньо лише отримати те чи інше числове значення. Саме такими є задачі із курсу теорії ймовірностей (ТЙ), а особливо її прикладних розділів, зокрема теорії масового обслуговування (ТМО). ТМО як навчальний предмет має досить важливе значення у підготовці спеціалістів економічного напрямку, і вивчається у вигляді окремого курсу, або як розділ курсу "Дослідження операцій" [4]. Необхідними для засвоєння ТМО є такі розділи математики як ТЙ, теорія матриць, диференціальні рівняння, теорія графів, методи оптимізації.

Не зважаючи на те, що ТЙ входить до програми середніх закладів освіти, опанування його студентами зустрічає певні труднощі і у вищій школі. Процитуємо роботу [2], де говориться, що "Опыт преподавания в вузах показывает, теория вероятностей с ее прикладными разделами – математической статистикой, теорией информации, теорией массового обслуживания и т. д. – представляют серьезные трудности для студентов… Наибольшую трудность для студентов представляет не математический аппарат (он-то как раз в большинстве случаев не сложен), а постановка вероятностных задач на жизненном материале". Думка про необхідність надання практичного змісту задачам курсу ТЙ саме для економічних спеціальностей, про насичення курсу прикладами використання ТЙ у фінансовій практиці, при прийнятті рішень в умовах економічного ризику в ситуаціях економічної та фінансової невизначеності висловлювалась неодноразово (див., напр., [3]).

На думку авторів, насичення ймовірнісних задач економічним змістом може по-перше, відіграти пропедевтичну роль для прикладних дисциплін, зокрема і ТМО, підводячи студента за Дж. Пойа "від задачі – до теорії", а по-друге, зекономити час на вивчення основної частини матеріалу. Деякі поняття ТМО можна формувати при вивченні ТЙ, не перешкоджаючи успішному засвоєнню основних понять названого курсу зайвими деталями, оскільки у спеціально сформульованих задачах йдеться про характеристики систем масового обслуговування (СМО) як об'єктів, що не потребують додаткових пояснень (обслуговування клієнтів у перукарнях, магазинах, медичних закладах тощо).

Відзначимо деякі положення, що дозволять без відхилень від вивчення програмної частини курсу ТЙ забезпечити пропедевтику ряду понять ТМО:

– при вивченні випадкових величин корисно розглянути приклади на предмет з’ясування того, які величини є випадковими у тій чи іншій системі обслуговування: тривалість обслуговування, довжина черги, тривалість перебування у черзі та у системі, середня кількість клієнтів у системі;
– при вивченні числових характеристик випадкових величин розв’язування задач на обчислення середньої тривалості обслуговування, середньої кількості зайнятих приладів надасть теоретичному матеріалу конкретного змісту без затрат часу на вивчення тієї чи іншої практичної ситуації;
– при вивченні випадкових процесів одним із завдань може стати імітаційне моделювання процесу обслуговування, наприклад, у середовищі Excel.

Узагальнену модель СМО можна також віднести до курсу ТЙ. Пропедевтичні задачі мають сформувати у студентів уявлення про ймовірнісний характер роботи системи масового обслуговування (СМО), потоку заявок на обслуговування тощо, оскільки під час вивчення ТМО необхідне вільне оперування такими числовими характеристиками як інтенсивність вхідного потоку заявок, середня тривалість очікування заявки у черзі на обслуговування, середня кількість зайнятих обслуговуванням та незадіяних приладів, а також правильне їх ймовірнісне тлумачення та застосування в економічних розрахунках.

Сформулюємо дві задачі, які націлюють ймовірнісний матеріал розділу “Випадкові величини” на ознайомлення з поняттями ТМО.

Задача 1. До перукарні впродовж певного часу надійшло 10 клієнтів у моменти часу 7, 21, 22, 28, 39, 40, 42, 50, 68, 73. Тривалості обслуговування відповідно складають 12, 25, 7, 1, 40, 20, 4, 4, 1, 1 одиниць часу. Побудувати графік функції $\nu(t)$ - кількості клієнтів у перукарні в момент часу t до того часу, поки всі клієнти будуть обслуженими. Обчислити середню тривалість очікування обслуговування для даних 10 заявок, якщо відвідувачів перукарні обслуговують: 1) двоє майстрів; 2) один майстер.

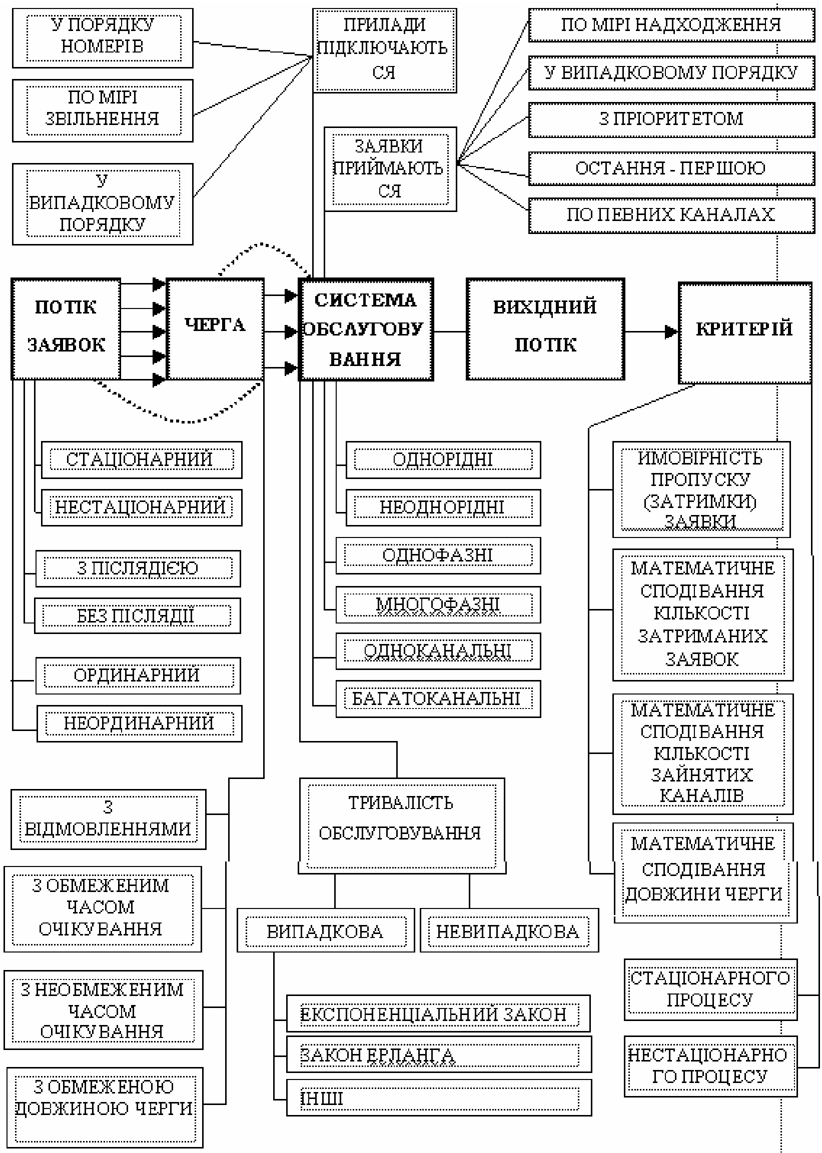
Задача 2. Проміжок часу між послідовними відмовами у роботі холодильника є експоненціально розподіленою випадковою величиною із середнім значенням, що складає 9000 годин. Завод, що випускає холодильники дає річну гарантію на свою продукцію. Яка ймовірність того, що холодильник не буде потребувати гарантійного ремонту?

У [4] пропонується набір задач, подібні до яких можуть скласти основу для вивчення ТЙ, орієнтуючи останню саме на даний прикладний її розділ.

Моделювання ланцюгів Маркова може стати наступним кроком у вивченні СМО в межах курсу ТЙ та математичної статистики.

Що стосується безпосереднього вивчення курсу ТМО, то на думку авторів необхідно обмежитись рівнем “користувача”, тобто основну увагу звернути на формування вмінь і навичок застосувати ту чи іншу модель до практичної задачі та зробити висновки на основі отриманих обчислень.

На описаному підході побудовано курс, викладений у навчальному посібнику [3], де першим із авторів розроблено досить повну класифікацію систем масового обслуговування, яка використовується у навчальному процесі.



Література:

1. Слєпкань З.І. Проблеми особистісно орієнтованої математичної освіти учнів середньої школи // Матем. в шк. – 2003. – № 9. – С. 3-4.
2. Вентцель Е.С. Школьникам о теории вероятностей // Матем. в шк. – 1976. – № 5. – С. 94-96.
3. Сторожук Є.А., Коляда Ю.В., Муніца А.І. та ін. Професіонально орієнтоване викладання математичних дисциплін при підготовці сучасного податківця. // Матеріали VIII–ої міжнародної конференції ім. акад. М.П. Кравчука (11-14 травня 2000 р., Київ). – К.: НТТУ “КПІ”, 2000. – С. 547.
4. Таха Х.А. Введение в исследование операций, 6-е изд.: Пер. с англ. – М.: Изд. дом “Вильямс”, 2001. – 912 с.: ил.
5. Максимов О.В., Рашевський М.О. Елементи теорії масового обслуговування. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2004. – 145 с.

ШЛЯХИ АКТИВІЗАЦІЇ ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТУДЕНТІВ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ У ВИЩИХ ТЕХНІЧНИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ

В.Д. Мальцева, С.В. Волков
м. Красноармійськ, Красноармійський індустріальний інститут Донецького національного технічного університету
lena_vinnik@ukr.net
nikolay_work@rambler.ru

Промисловість України за останні роки ожила, і розвиток її набув поступального характеру. Зрозуміло, це викликало підвищений попит на кваліфікованих технічних спеціалістів, кількість яких, з багатьох причин, катастрофічно знизилась за перше десятиріччя після розпаду СРСР.

Отже, перед вищими технічними навчальними закладами сьогодні стоїть задача підготовки висококваліфікованих спеціалістів, здатних грамотно і успішно розв’язувати задачі промисловості, сприяючи цим високим темпам її розвитку. Оскільки успішне освоєння інженерних дисциплін неможливе без ґрунтовних знань з математики, а середня школа, на жаль, не забезпечує високого рівня математичних знань випускників, то викладачі математичних дисциплін у вищих навчальних закладах за два-три семестри повинні:

- ліквідувати прогалини в знаннях студентів з елементарної математики,
- подати великий об’єм нового матеріалу,
- вчити вчитися.

Розглянемо кілька шляхів розв’язання цих задач.

По-перше: необхідно забезпечити першокурсників короткими довідниками з елементарної математики.

В продажу маються довідники-“шпаргалки”, але їх якість і зміст не завжди витримують критики. Тому довідники необхідно створити, враховуючи запити вищої математики. При цьому буде добре, коли всі студенти матимуть однакові довідники, що дозволить легше й швидше адресувати студентів до тої чи іншої інформації.

Використовуючи ці довідники, на початку вивчення теми певний час аудиторних занять необхідно використати для повторення, систематизації та узагальнення матеріалу шкільного курсу, який буде необхідним для подальшого освоєння вищої математики. При цьому важливо добиватися смислового, а не буквального, сприйняття та засвоєння інформації.

Так, наприклад, формулу $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ необхідно читати: “квадрат суми двох чисел дорівнює сумі квадрата першого числа, подвоєного добутку першого числа на друге та квадрата другого числа”, а не: “a плюс b в квадраті дорівнює a в квадраті плюс два ab, плюс b в квадраті”, що робить основна маса випускників шкіл.

Необхідно робити акцент на порядок дій у виразі, бо назва будь-якого виразу визначається назвою останньої дії, яку необхідно виконати, знаходячи значення виразу за даними значеннями змінних, що містяться в ньому. Це підготує студентів до успішного освоєння розділів “Диференційне числення” та “Інтегральне числення”. Адже основною причиною неуспіху студентів при вивченні матеріалу цих розділів є безпорадність в користуванні таблицями похідних та інтегралів: вони не можуть визначитися з назвою функції, яку треба диференціювати чи інтегрувати.

По-друге: необхідно відмовитися від формального викладу програмного матеріалу на лекціях, при якому студентам подається велика кількість нових понять і вони встигають почути, побачити на дошці та записати в зошит матеріал, що викладається, і зовсім не встигають його осмислювати.

Так, при дослідженні функції однієї змінної за допомогою похідної можна роздати студентам фрагмент лекції з означеннями властивостей та графічним зображенням довільної функції, на якому можна було б бачити, виходячи з геометричного змісту похідної, зв’язок між похідною і деякими властивостями функції. Викладач по такому ж зображенню на дошці за допомогою евристичної бесіди разом з студентами формулюють теореми про монотонність, екстремуми функції, опуклість та точки перегину графіка. Зв’язок останніх понять з другою похідною студентами сприймаються з інтересом, якщо використати мнемонічне “правило дощу”.

На першій лекції з теорії ймовірностей доцільно дати студентам фрагменти з означеннями подій в готовому вигляді, який вони вклеюють в свій зошит-конспект. При цьому звільниться лекційний час для осмислення матеріалу.

Вивчаючи тему “Подвійний інтеграл”, дати студентам на лекції малюнки, які вони вклеють в свої конспекти, а за допомогою кодоскопа по таких же малюнках пояснити матеріал. Достатньо викладачеві на дошці, а студенту в зошиті виконати лише один малюнок. З деяких тем, лекції можна роздати в повному об’ємі, щоб дати більше часу на осмислення матеріалу, який викладається.

Така форма роботи дозволить заощадити час і дасть можливість досягнення більш активної пізнавальної діяльності студентів, співтворчості викладача і студента, більшого осмислення матеріалу студентом. Форми, методи і засоби досягнення цього обумовлені, безумовно, майстерністю викладача.

По-третє: лекційний матеріал доцільно викладати компактно, адаптовано, з обов’язковим виявленням міжпредметних зв’язків та зв’язків з життям, що повинно сформувати у студентів принципи: “Це мені необхідно”, “Це мені цікаво”.

Так, наприклад, використання художньої літератури підсилює інтерес студентів до вивчення матеріалу. Вивчаючи тему “Вектори”, можна зачитати уривок з байки М.А. Крилова “Лебідь, Рак і Щука” і задати студентам запитання: “Чому віз і нині там?”, “Чи знаходяться вектори-сили в одній площині, якщо всі їх віднести до спільного початку?”.

Наприклад, компактності викладу теми “Рівняння прямої на площині” можна досягти наступним чином: опираючись на відоме з шкільного курсу рівняння $y=kx+b$, визначаємо геометричний зміст коефіцієнта k; виводимо формулу кута між прямими, записуємо умови паралельності та перпендикулярності прямих; одержуємо формулу кутового коефіцієнта за двома даними точками прямої; зводимо результати в таблицю: “Як знайти кутовий коефіцієнт прямої?” Після цього виводимо рівняння пучка прямих і надалі вважаємо його універсальним інструментом для отримання рівняння прямої за довільних достатніх умов. Інші рівняння прямої розглянути як задачі, що розв’язуються за допомогою рівняння пучка прямих або його перетворень:

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

$$y=kx+b \quad \leftrightarrow \quad Ax+By+C=0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

При цьому встановлюємо, що $k=-\dfrac{A}{B}$. Доповнюємо цією інформацією вище згадану таблицю, яку потім використовуємо для знаходження кутового коефіцієнта прямої за різних умов.

Вивчення теми “Визначники” доцільно почати не з формального введення поняття визначника, а показати цей математичний об’єкт як необхідне і доцільне породження процесу розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Виклад теми “Визначений інтеграл” можна почати з розв’язання задачі фізичного, геометричного чи економічного змісту, побудови інтегральної суми та визначення інтегралу як її границі. В подальшому при застосуванні визначеного інтегралу для розв’язання задач використовуємо інженерний підхід, тобто складаємо диференціал шуканої величини і знаходимо її інтегруванням цього диференціалу.

Вивчення розділу “Звичайні диференціальні рівняння” необхідно починати з розгляду задач теоретичної механіки, фізики, біології і ін. та побудови математичних моделей процесів у вигляді диференціальних рівнянь. Компактність викладу матеріалу можна забезпечити використовуючи таблиці та схеми різної структури.

Вивчення теми “Диференціальні рівняння І порядку” пропонуємо здійснити наступним чином. Після повідомлення лектором основних понять, формулювання та доведення необхідних теорем роздати всім студентам таблиці (див. табл. 1).

Зауважимо, що такі таблиці можна роздати з незаповненими другим, третім та четвертим стовпчиками. Вдало заданими запитаннями лектор повинен сприяти самостійному заповненню другого та третього стовпців таблиці студентами. І тільки потім навести приклади розв'язання, не називаючи попередньо типу рівнянь, а спонукаючи студентів самим визначати його тип, використовуючи таблицю. Четвертий стовпчик таблиці студенти повинні заповнити вдома, використовуючи розв'язання наведених прикладів.

Таблиця 1.Диференціальні рівняння І порядку: класифікація та способи розв'язання

№ п/п	1	2	3	4
	Вид рівняння	Характерна ознака	Назва рівняння	Спосіб розв'язання
1				
2				
3				
4				

Це все дозволить запобіганню формального підходу до вивчення даної теми студентами, які обов'язково повинні розуміти, чому саме диференціальне рівняння називається рівнянням із змінними, що розділяються, лінійним і т.д. Одночасно табл. 1. студенти можуть користуватися як алгоритмом розв'язання диференціальних рівнянь.

Таким чином ми, викладачі, стоячи на принципах співтворчості з студентами та осмисленого сприйняття ними матеріалу, вчимо їх застосовувати аналогію та порівняння, аналітично мислити, виховуємо вміння пошуку, систематизуємо і узагальнюємо знання з даної теми, підсилюємо мотивацію та активізуємо пізнавальну діяльність студентів і т.д., що і повинно забезпечити ґрунтовні знання з математики.

ЦІКАВІ ЛІНІЇ В ТРИКУТНИКУ ТА ВИКОРИСТАННЯ ЇХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

К.М. Матвієнко
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Роль трикутника в систематичному курсі геометрії є цілком очевидною: він просторово локальний, наочний, замкнутий і конструктивно простий. Тому він зручний як у використанні для вивчення властивостей реального простору, так і для відтворення та моделювання. Не випадково вивченням властивостей трикутника займались майже всі відомі математики від Фалеса до Лобачевского і навіть робились спроби виділити ці властивості в самостійну галузь знань під назвою "Геометрія трикутника". Зусиллями математиків були знайдені і метрично досліджені не тільки основні елементи трикутника (сторони і кути), але й усі допоміжні (висоти, медіани, бісектриси внутрішніх і зовнішніх кутів, радіуси вписаних, описаних і невписаних кіл та ін.), а також розроблені тригонометричні залежності між ними і створені на їх основі численні прилади і апарати.

Оскільки властивості цікавих ліній трикутника досить широко використовуються при розв'язуванні як планіметричних, так і стереометричних задач, то в даній статті приведено ряд властивостей висот і медіан трикутника та точок їх перетину, що можуть виступати на уроках у ролі базових задач, або розглядатися на факультативних чи гурткових заняттях.

Властивості трикутника були добре вивчені ще стародавніми греками.

У відомих «Началах» Евкліда доводиться, що центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін.

Архімед, визначаючи положення центра ваги однорідної трикутної пластинки, установив, що він лежить на кожній із трьох медіан. Точку перетину медіан трикутника називають *центром ваги* або *центроїдом* трикутника.

Пізніше було доведено, що три висоти трикутника також перетинаються в одній точці, що називається його *ортоцентром*.

Закономірність у розташуванні цих трьох чудових точок трикутника – центра O описаного кола, центроїда G, ортоцентра H – уперше виявив відомий математик Леонард Ейлер [1].

Розглянемо спочатку один окремий випадок – прямокутний трикутник ABC (рис. 1).

Середина O гіпотенузи AB є центром описаного навколо нього кола. Центроїд G ділить медіану CO у відношенні 1:2, рахуючи від вершини C. Катети AC і BC є висотами трикутника, тому вершина C прямого кута збігається з ортоцентром H трикутника. Таким чином, точки O, G, H лежать на одній прямій, причому OH=3OG. Користуючись методом координат, Ейлер довів, що такий самий зв'язок існує між трьома зазначеними точками будь-якого трикутника: медіани трикутника ABC перетинаються в одній точці G і діляться нею у відношенні 2:1, рахуючи від вершини.

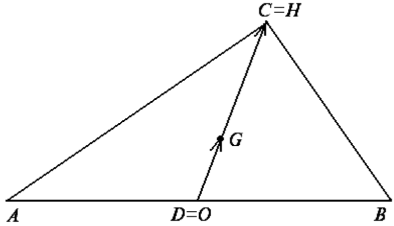


Рис. 1

Із даного твердження слідує така векторна рівність:

$$\mathbf{3PG = PA + PB + PC,} \qquad (1)$$

де P – будь-яка точка площини або простору (рис. 2).

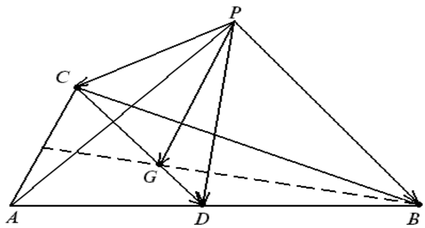


Рис. 2

Із одержаних трикутників можна записати такі рівності:

$$\mathbf{PA = PG + GA,}$$

$$\mathbf{PB = PG + GB,}$$

$$\mathbf{PC = PG + GC.}$$

Додавши почленно, одержимо:

$$\mathbf{PA + PB + PC = 3PG + (GA + GB + GC)}$$

Виконавши ряд нескладних перетворень, отримаємо:

$$\mathbf{3PG = (PA + PB + PC) – (GA + GB + GC)}$$

Оскільки точка G є центром ваги трикутника, то вектори в останніх дужках в сумі дорівнюють 0:

$$\mathbf{3PG=PA+PB+PC,}$$

що й треба було довести.

Щодо перетину висот має місце таке твердження: висоти трикутника ABC перетинаються в одній точці H.

На основі такої властивості висот трикутника можна записати таке рівняння:

$$\mathbf{OH = OA + OB + OC,} \qquad (2)$$

де O – центр кола, описаного навколо трикутника.

Нехай ABC – трикутник, відмінний від прямокутного (рис. 3).

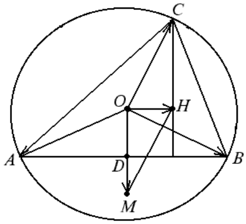


Рис. 3

Знайдемо суму векторів **OA** і **OB**. Для цього побудуємо точку M, симетричну O відносно сторони AB, тоді **OM = OA + OB.** Потім побудуємо точку H, для якої

OH = OM + OC = OA + OB +OC,

і доведемо, що точка H і є ортоцентром трикутника ABC.

Дійсно, за побудовою прямі CH і OM паралельні, OM – серединний перпендикуляр до відрізка AB, отже, пряма CH також перпендикулярна до прямої AB, і точка H лежить на висоті трикутника ABC, проведеної з вершини C.

Якщо повторити побудову, починаючи з векторів **OA** і **OC**, то вийде та ж точка H, але ті ж міркування показують, що тепер точка H лежить на висоті трикутника, що проведена з вершини B. Аналогічно одержимо, що точка H лежить на висоті, яка проведена з вершини A. Отже, висоти трикутника ABC перетинаються в точці H, обумовленої співвідношенням (2).

Легко перевірити, що рівняння 2 виконується й для прямокутного трикутника.

З доведених тверджень випливає властивість цікавих точок трикутника: центр описаного кола, центроїд G і ортоцентр H будь-якого трикутника лежать на одній прямій, причому точка G лежить між точками O і H; при цьому OG:GH = 1:2. Покажемо це.

Із рівняння (1) слідує:

3OG = OA + OB + OC.

Порівнюючи одержане співвідношення з рівнянням (2), одержимо

OH = 3OG.

Отже, вектори **OH** і **OG**, які мають спільний початок в точці O, розташовані на одній прямій і |OG| : |GH| = 1:2.

Пряма, на якій лежать точки O, G і H, називається *прямою Ейлера*.

У стереометрії найпростіший многогранник – тетраедр – відіграє ту ж саму роль, що й трикутник у планіметрії. Властивості трикутника й тетраедра багато в чому схожі. Отож, властивості цікавих точок трикутника можна поширити і на тетраедр. Так відомо, що навколо будь-якого тетраедра можна описати сферу, її центр O лежить на перпендикулярах до граней тетраедра, проведених через центри кіл, описаних навколо граней.

Відрізок, що з'єднує вершину тетраедра із центроїдом протилежної грані, називається *медіаною тетраедра*. Властивості медіан тетраедра аналогічні властивостям медіан трикутника.

Розглянемо таку властивість: чотири медіани тетраедра ABCD перетинаються в одній точці G, що ділить кожну з них у відношенні 3:1, рахуючи від вершини тетраедра.

Згідно даної властивості має місце векторна рівність:

$$\mathbf{4PG = PA + PB + PC + PD,} \qquad (3)$$

де P – будь-яка точка простору (рис. 4).

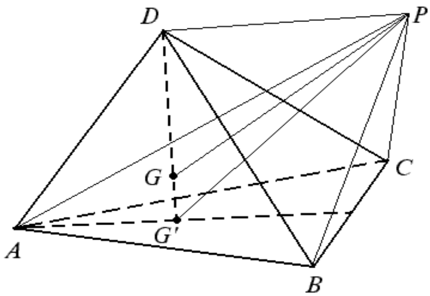


Рис. 4

Але не для кожної властивості трикутника має місце відповідна властивість у тетраедра.

Наприклад, у трикутнику завжди висоти перетинаються в одній точці. Для тетраедра такої властивості не існує. Покажемо це.

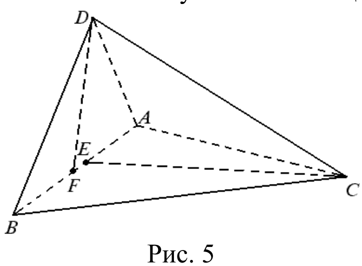


Рис. 5

Розглянемо тетраедр ABCD із прямим двогранним кутом при ребрі AB, у якому AC = BC, але AD ≠ BD (рис. 5). Висоти **CE** і **DF** тетраедра лежать відповідно в гранях ABC і ABD, але точка E – середина AB, а F – не є серединою AB. Якби довжини ребер DA і DB були рівні, то основи E і F збігалися б. Але дві інші висоти тетраедра не можуть проходити через точку E.

Таким чином, навіть дві висоти тетраедра можуть не мати загальної точки.

Проте існують тетраедри, всі чотири висоти яких перетинаються в одній точці. Таким буде, наприклад, тетраедр ABCD із прямими плоскими кутами при вершині D (рис.6). Ребра DA, DB і DC є його висотами, а вершина D – *ортоцентром* (точкою перетину всіх чотирьох висот).

Спробуємо знайти всі тетраедри, у яких висоти перетинаються в одній точці.

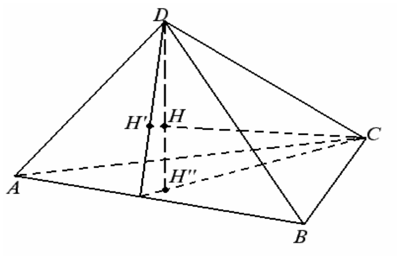


Рис. 6

Нехай висоти тетраедра ABCD, проведені з вершин C і D, перетинаються в точці H (рис. 6). Тоді CH’⊥AB і DH’’⊥AB, тобто пряма AB перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, і лежать у площині CDH, отже, AB⊥BC. Аналогічно можна довести, що якщо дві інші висоти тетраедра ABCD проходять через ту ж точку H, то AC⊥BD і AD⊥BC. Отже, якщо всі висоти тетраедра перетинаються в одній точці, то протилежні ребра тетраедра взаємно перпендикулярні. Такий тетраедр називається *ортоцентричним* [2].

Для такого тетраедра теж (по аналогії з трикутником) існує пряма Ейлера: центр описаної сфери, центроїд G і ортоцентр H ортоцентричного тетраедра ABCD лежать на одній прямій, причому точки O і H симетричні відносно точки G.

Література:

1. Глейзер Г.И. История математики в школе: Пособие для учителей / Под ред. В.Н. Молодшего. – М.: Просвещение, 1964. – 374 с.
2. Кудін А. Деякі маловідомі факти з геометрії трикутника // Математика. 1999. – №6. – С. 6-10.

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ АСПЕКТ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ СОВРЕМЕННЫХ ЭКОНОМИСТОВ

Т.П. Монако, Л.Н. Белогурова
Россия, г. Владикавказ, Северо-Осетинский государственный университет

Социально-экономические изменения, происходящие как во всем мире, так и в России, процессы глобализации требуют качественно иных подходов к экономическому образованию. Для любого государства подготовка экономистов нового качества является стратегической задачей, от решения которой зависит устойчивый экономический рост и повышение благосостояния населения.

Роль и значимость качества экономического образования в современных условиях, например, наглядно демонстрирует интервью Арнольда Шварценеггера, губернатора штата Калифорния, данное корреспонденту газеты «Аргументы и факты»: «С самого начала ***я окружил себя умнейшими экономистами*** и специалистами, и мне есть чем похвастаться – всего за год моей команде удалось достичь определенных успехов, даже мои противники это признают… У нас есть русские, которые помогают моей администрации не деньгами, а умом, что очень важно».

Система экономического образования в России не отвечает требованиям современного рынка труда. Имеются несоответствия между требованиями работодателей к качественным характеристикам специалистов и уровнем их профессиональной подготовки.

Проведенный анализ учебных планов подготовки студентов экономических специальностей показал, что в среднем третья часть всего времени обучения отводится на изучение дисциплин общеобразовательного цикла. Эти дисциплины дают фундаментальную подготовку, формируют базовые знания, умения и навыки. Полное отсутствие или слабая профессиональная направленность дисциплин общеобразовательного цикла приводит к снижению интереса студентов к изучению этих дисциплин и, как следствие, к обучению вообще.

Около 20% учебного времени, отводимого на первом курсе на изучение предметов общеобразовательного цикла, приходится на математику. Это составляет 15% от общего объема учебного времени на первом курсе. Содержание программ математических дисциплин на первых двух курсах любого университета одинаково и направлено на фундаментальную подготовку. Если учесть, что эти дисциплины фактически не имеют профессиональной направленности, а дают студентам лишь определенный набор знаний и фактов, то происходит резкое снижение и без того низкого мотивационного фактора обучения. Получаемые на таких занятиях знания не являются для студентов-экономистов актуальными, теряют свою значимость в профессиональном становлении, не используются в дальнейшем и, как правило, быстро забываются.

Анализ учебных программ по математике и экономическим дисциплинам позволил выявить тот факт, что потенциал математики в формировании у студентов профессиональных знаний, умений и навыков и развитие творческих способностей, необходимых в будущей профессиональной деятельности, практически не используется. А ведь именно союз математики и экономических дисциплин должен стать базой для формирования у студентов-первокурсников творческой установки на будущую специальность. Это обстоятельство возможно в связи с междисциплинарным характером математики, которая дает как количественные, так и качественные методы исследования явлений, происходящих в обществе и экономике.

Остановимся на изучении математики в школе. Абстрактность школьного курса математики, отсутствие достаточного числа задач с практическим приложением вызывает трудности ее применения в различных реальных ситуациях как в период обучения в школе, как и в период перехода к вузовскому обучению, что существенным образом влияет на качество подготовки экономистов. Все это происходит в тот период, когда математика становится важнейшим инструментарием для экономических исследований. По словам Н.И. Лобаческого, «нет ни одной области математики, как бы абстрактна она не была, которая когда-нибудь не окажется применимой к явлениям действительного мира».

В этой связи, на наш взгляд, очень удачным является пример, приведенный в работе [1]. Он отражает оценку преподавания курса математики в школе и показывает, что учащиеся чаще всего механически заучивают материал и лишь некоторые используют свои приемы, обеспечивающие продуктивное усвоение материала. Так, в экспериментальных группах при решении задачи, которая относилась к группе понятийных, требовалось применить знания по геометрии, а именно: теорему Пифагора. Учащимся была предложена задача следующего содержания: «Как определить расстояние между противоположными углами комнаты, пользуясь линейкой в один метр длиной?».

Именно эта задача была решена наименее успешно из всей группы понятийных задач, предложенных учащимися. Только 16% из всех учащихся применили теорему Пифагора. Остальные 84% не справились с заданием. Они предлагали решения вида: протянуть веревку и измерить ее, начертить на полу линию мелом и тоже измерить ее. Учащиеся не обратили внимание на тот факт, что в условии задачи не было дополнительных орудий труда – мела, веревки. Одни учащиеся забыли эту теорему, другие просто не додумались применить знания по геометрии. Этот факт закономерен, поскольку учащихся и не учили применять полученные знания к исследованию явлений окружающей действительности.

Проблемы математического образования как школьного, так и вузовского связаны с отсутствием применения получаемых знаний к изучению явлений окружающего реального мира. Приведенный пример показывает, что такая любимая всеми теорема Пифагора остается в сознании учащихся только как один из фактов «игры ума». Выдающийся педагог Ян Амос Каменский в своей «Великой дидактике» писал: «Все, что находится во взаимной связи, должно преподаваться в той же связи».

Другим, не менее замечательным, примером использования математики в реальной жизни является понятие процента, с которым школьники знакомятся на уроках математики в шестом классе. На протяжении последующих лет обучения в учебниках встречаются задания типа: «Найти 60% от числа 506» или «45% от числа составляют 110,7. Найти само число». Кроме того, в учебниках встречается совершенно незначительное количество текстовых задач с упоминанием слова процент. Изучая степень владения этим понятием учащимися средней школы и студентами первого курса экономического факультета различных вузов, мы получили следующие данные. Механическим владением этого понятия обладают в среднем только 12% из опрошенных. Нами была предложена респондентам практическая задача следующего содержания: «Как известно сахар обладает высокой гигроскопичностью. В магазине мешок сахара подмочили на 10%, а затем высушили на 10%. Изменился ли вес мешка с сахаром?». Задача предлагалась учащимся разных классов – от девятого до одиннадцатого. Ответ был удивительно одинаков для всех уровней обучения: «Нет, не изменился». В среднем только 6% опрошенных учащихся продемонстрировали осознанное практическое применение понятия процента. Фактически такой же результат показали и студенты экономических факультетов вузов.

Этот факт еще раз подчеркивает важность умения обучаемых применять математический аппарат к решению задач реального содержания и, самое главное, необходимость наполнения вузовского курса математики конкретными задачами, отражающими экономическую деятельность человека. Для современной экономической науки математика является важнейшим инструментарием как на микро-, так и на макроуровне.

Выпускники школ, становясь студентами экономических факультетов высших учебных заведений, испытывают трудности, связанные как с наличием существенной разницы между системой школьного и вузовского образования, так и с содержанием, в частности, вузовской программы по математике. Высокий уровень абстракции, отсутствие связи излагаемого материала на лекциях по математике с будущей профессиональной деятельностью приводит к резкому снижению мотивационного фактора обучения. Уже после первых лекций по математике фактически только небольшая часть студентов следят за красотой математических доказательств, а остальные просто скучают.

В связи с этим возникает необходимость разработки современных методов подготовки экономистов нового поколения, чьи профессиональные, ценностные и личностные качества обеспечат им на рынке труда устойчивую конкурентоспособность. Формирование такого специалиста должно начинаться задолго до того, как студент получит какой-нибудь профессиональный опыт при изучении дисциплин специальности. Поэтому, являясь единицей жизнедеятельности, учебный процесс в вузе самым непосредственным образом, особенно на первых двух курсах, должен определять процесс становления профессиональных качеств студентов – будущих экономистов. Вместе с тем учебный процесс должен выступать в роли скорее динамической, чем статической, а учебные программы, особенно по дисциплинам общеобразовательного цикла, должны иметь тенденции не только изменяться, но и заменяться другими под влиянием новых экономических условий.

Отсутствие преломления получаемых в школе знаний по математике в реальной действительности, а затем аналогичный подход в вузовском курсе математике являются причинами низкого уровня успеваемости обучаемых. Здесь уместно привести высказывание К.Д. Ушинского, который отмечал, что из обычного учебного плана «где одна наука идет вслед за другою, нигде не сталкиваясь, выходит хаос в голове ученика, или еще хуже: то мертвое состояние идей, когда они лежат в голове, как на кладбище, не зная о существовании друг друга».

Анализ учебников по математике для студентов вузов показал, что с качественной стороны содержание задач выражается словами: «найти», «построить», «вычислить», «доказать». Такие задачи формируют умения применять получаемые на занятиях знания, а именно запоминать факты и воспроизводить их. Применение изучаемого математического аппарата демонстрируется в основном задачами из физики и механики, что является результатом исторического становления и развития математики. В современных социально-экономических условиях подготовки экономистов нового поколения математические задачи должны превратиться из средства формирования умений в многоаспектное явление обучения.

Для улучшения качественной стороны подготовки экономистов нового поколения нами предложена программа обучения математике студентов первого курса экономического факультета, в которой наполнение абстрактных математических понятий задачами с профессионально-ориентированным содержанием является главной составляющей. В процессе обучения студенты оперируют не только математическими, но и экономическими понятиями, необходимым им в будущей профессиональной деятельности. Это способствует формированию и базового, и профессионального, и высшего логического уровня знаний, умений и навыков у студентов-экономистов на младших курсах.

Взаимосвязь общеобразовательных и профессиональных знаний усиливается благодаря применению двух дидактических принципов: проблемности и познавательного интереса, выступающего в качестве главного мотивационного фактора. Мотивация активизирует познавательные функции, включает их в контекст значимой для студента учебной деятельности и придает ей цель и смысл.

В разработанной программе изучение каждого раздела математики начинается с постановки соответствующих экономических задач, которые затем предстоит решать средствами полученного математического аппарата. В сознании студентов возникают устойчивые связи различных отраслей знаний. При решении экономических задач средствами математики у студентов младших курсов формируется творческая установка на будущую профессию, вырабатывается устойчивый интерес и к математике, и к экономике. Мы учим их переводить задачи будущей профессиональной деятельности на язык математики, решать их имеющимися математическими средствами, комментировать получившийся результат на языке реальной экономической ситуации, проверять соответствие полученных и опытных данных.

Обучение по предложенной методике дает качественные изменения в личностных оценках обучаемых, позволяет сокращать период адаптационного периода в вузе, а также демонстрирует студентам связь математики с областью будущей профессиональной деятельности.

Решение профессионально ориентированных задач позволяет научить студентов видеть в профессиональных ситуациях возможность применения известного им математического аппарата. Предложенная методика способствует переносу разобщенных знаний, умений и навыков по различным дисциплинам в сферу профессиональной деятельности.

Студенты начинают понимать тот факт, что не всегда решение экономической задачи, которое подсказано собственной интуицией или лежит на поверхности, бывает правильным. В современной экономической деятельности нельзя работать на основе испытанного историей метода «проб и ошибок». И здесь в качестве способа анализа экономической деятельности наиболее эффективными является математический аппарат.

В результате формирующего эксперимента уровень познавательно-профессиональной активности студентов первого курса значительно повысился. Эффективность предложенной методики обучения математике студентов экономических специальностей состоит в том, что она способствует развитию творческого менеджерского мышления и позволяет студентам в дальнейшем принимать оптимальные решения в любой экономической, управленческой или жизненной ситуации. Методы математики не дают унифицированных рецептов. Они учат тому, как, зная приемы, способы и пути разрешения тех или иных экономических задач, добиваться успеха в деятельности конкретного хозяйствующего субъекта.

Литература:

1. Психологическое сопровождение выбора профессии. – М., 2003, 180 с.
2. Ушинский К.Д. Избранные педагогические сочинения. – М., 1974.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

О.П. Назарова
г. Мелитополь, Таврическая государственная агротехническая академия
olga@artsv.net

При проведении эксперимента, а также при анализе статистических данных хозяйств АПК студенты и аспиранты сталкивается с проблемой программной реализации и математических расчетов для заданных экспериментальных данных.

В настоящее время существует множество пакетов программ, а также программных приложений, в частности Microsoft Excel, которые дают возможность осуществить математические расчеты, строить графики функций.

Однако остается большой проблемой вычисление числовых характеристик, определение параметров для нелинейных и линейных моделей двух и более факторов при анализе данных эксперимента.

Предлагается при изучении разделов математической статистики и моделировании процессов использовать готовые блоки программ для обработки данных в различных задачах статистики [1] и прикладной математики.

Целью лабораторных работ должна являться не разработка программных блоков, а умение использовать различные программные приложения и пакеты, такие как Microsoft Excel, MathCad, MatLab, Maple, Statistica, Mathematica. Для студентов младших курсов, независимо от специальности, предлагается проводить цикл лабораторных работ по изучению MathCad при рассмотрении разделов высшей математики (дифференциальное и интегральное исчисление, функции нескольких переменных, ряды, операции с матрицами, решение систем уравнений различными методами).

Для студентов старших курсов при изучении математической статистики необходимо рассмотреть основные методы выборочного, корреляционного и дисперсионного анализа, метода наименьших квадратов в приложении Microsoft Excel, используя встроенный *Пакет анализа*, а также с помощью встроенных функций (вручную), чтобы показать возможности приложения. При этом можно для сравнения числовых характеристик произвести вычисления и в MathCad [2], чтобы дать возможность оценить достоинства и недостатки различных пакетов.

Для аспирантов и студентов старшего курса в дипломном проектировании ставятся более серьезные задачи, в которых необходимо решать системы нелинейных уравнений, вычислять параметры множественной линейной и нелинейной регрессии, что возможно с помощью различных численных методов.

В связи с этим в учебном учреждении должна быть в наличии библиотека готовых программных блоков в различных пакетах с подробными инструкциями ввода данных и параметров для осуществления расчетов. Подобные библиотеки должны быть представлены на сайтах соответствующих кафедр с возможностью предоставления услуг в расчетах, если по какой-либо причине заказчик не имеет возможности доступа к компьютеру или наличия пакетов для реализации программных блоков.

Пакет Statistica представляет интерес для людей, владеющих теоретическими сведениями из области математической статистики и теории вероятностей, но недостаточно удобен для обыкновенного пользователя. Поэтому предлагаются готовые программные блоки в пакете MathCad.

В качестве примера представлены блоки программ линейной и нелинейной множественной регрессии с последующим построение графиков.

Программный блок – *линейная, нелинейная регрессия*

Ввод данных (внести матрицу *data* значений факторов, причем первый столбец матрицы – результат эксперимента)

$$\mathrm{data} := \begin{pmatrix} 15 & 20 & 1 \\ 12.3 & 30 & 2 \\ 16.3 & 40 & 3.5 \\ 20.9 & 50 & 4.8 \\ 24.6 & 60 & 2.6 \\ 28.9 & 70 & 5.6 \\ 18.9 & 80 & 8.2 \\ 29.3 & 90 & 12 \\ 24.8 & 100 & 11.5 \end{pmatrix}$$

Далее следует готовый программный блок для определения параметров линейной модели:

$N := \mathrm{rows(data)}$

$n := \mathrm{cols(data)}$

$Y := \mathrm{data}^{\langle 0 \rangle}$

$X := \mathrm{submatrix(data, 0, N - 1, 1, n - 1)}$

$i := 0..N - 1$

$E_i := 1$

$W := \mathrm{augment}(E, X)$

$a := (W^T \cdot W)^{-1} \cdot W^T \cdot Y$

$Yt := W \cdot a \qquad prY_i := Yt_i - Y_i$

Матрица *a* – вывод значений коэффициентов линейной модели:

$$a = \begin{pmatrix} 8.959 \\ 0.276 \\ -0.76 \end{pmatrix}$$

Уравнение модели имеет вид:

$$y_i=8.939+0.276x_1-0.76x_2$$

Программный блок для определения параметров нелинейной модели:

Для определения нелинейной зависимости порядка к необходимо внести значение максимальной степени полинома (k := 2):

N := rows(X) N = 9

i := 0..N – 1

k := 2

Rg := regress(X, Y, k)

coeffs := submatrix(Rg, 3, length(Rg) – 1, 0, 0)

fit(x) := iterp(Rg, X, Y, x)

$predY_i := fit[(X^T)^{\langle i \rangle}]$

$Yt_i := Y_i - predY_i$

Таким образом, полученные коэффициенты и прогнозируемые значения:

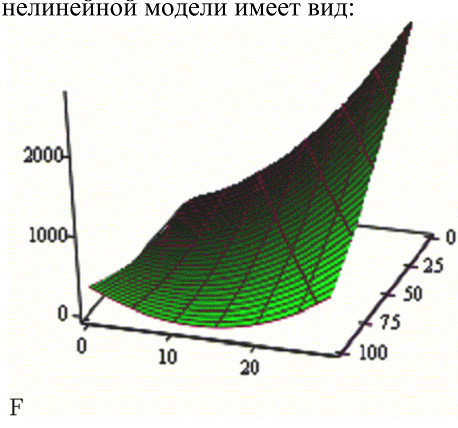
$$Rg=\begin{pmatrix}3\\2\\2\\-0.839\\2.147\\30.261\\52.224\\-4.089\\0.071\end{pmatrix} \qquad coeffs=\begin{pmatrix}-0.839\\2.147\\30.261\\52.224\\-4.089\\0.071\end{pmatrix}$$

$predY_i =$	$Yt_i =$
14.622	0.378
12.562	–0.262
17.622	–1.322
19.579	1.321
26.117	–1.517
23.631	5.269
24.045	–5.145
28.603	0.697
24.217	0.583

Уравнение нелинейной регрессии имеет вид:

$$y_i = 0.839 + 2.147x_1 + 30.261x_2 + 52,224x_1x_2 - 4.089x_1^2 + 0.071x_2^2$$

Поверхность нелинейной модели имеет вид:



Литература:

1. Джонсон Дж. Эконометрические методы. – М.: Статистика, 1980.
2. Гурский Д.А. Вычисления в MathCad. – Минск: ООО “Новое знание”, 2003.

К ВОПРОСУ ОБ ИЗЛОЖЕНИИ СВОЙСТВ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

О.В. Небратенко
г. Харьков, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
jneb1970@hotmail.ru

В курсе высшей математики и приложениях особое место занимает определенный интеграл. Четкое понимание определения и свойств интеграла способствуют в дальнейшем умению применять полученные навыки при изучении других разделов высшей математики и дисциплин выпускающих кафедр.

При традиционном изложении темы «Определенный интеграл» в технических вузах, как правило, начинают с рассмотрения задач геометрии, механики, физики, которые приводят к необходимости нахождения предела однотипных, так называемых, интегральных сумм:

$$\lim_{d\to 0}\sum_{\kappa=1}^{n} f\left(d_{\kappa}\right)\Delta x_{\kappa} \ ,$$

где $d \to \max|\Delta x_\kappa|$ – диаметр разбиения.

Обращая внимание на то, что функция $f(x)$ может иметь различный смысл, вводят понятие определенного интеграла. Затем формулируют и доказывают свойства определенного интеграла, используя определение интеграла (т.е. предел интегральных сумм). Формула Ньютона-Лейбница появляется в изложении позже доказательств свойств определенного интеграла (после введения в рассмотрение интеграла с переменным верхним пределом). Предлагается другая последовательность изложения материала. А именно: после определения определенного интеграла сразу же получить формулы Ньютона-Лейбница, а затем, используя ее, провести доказательство свойств определенного интеграла.

Формула Ньютона-Лейбница: если $F(x)$ какая либо первообразная непрерывной функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = F\left(b\right) - F\left(a\right).$$

Разобьем промежуток $[a, b]$ точками $x_1, x_2, ..., x_\kappa, ..., x_{n-1}$ на n частных промежутка

$$a < x_1 < x_2 < ... < x_\kappa < ... < x_{n-1} < b,$$

тогда

$$F(b) - F(a) = F(x_1) - F(a) + F(x_2) - F(x_1) + ... + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(b) - F(x_{n-1}).$$

Для симметрии затем обозначим $a = x_0$, $b = x_n$.

По формуле Лагранжа имеем

$$F(x_\kappa) - F(x_{\kappa-1}) = F'(\alpha_\kappa)(x_\kappa - x_{\kappa-1}) = f(\alpha_\kappa)\Delta x_\kappa,$$

где $\alpha_\kappa \in (x_{\kappa-1}, x_\kappa)$ и $\Delta x_\kappa = x_\kappa - x_{\kappa-1}$.

Тогда $F(b)–F(a)=f(x_1)\Delta x_1+...+f(x_n)\Delta x_n=\sum_{\kappa=1}^{n} f(\alpha_\kappa)\Delta x_\kappa$.

Последнее равенство имеет место при любом n и любом выборе точек деления $x_к$ и $\alpha_к$. Перейдем к пределу при $d\to 0$ в обеих частях последнего равенства.

$\lim\limits_{d\to 0}(F(b)-F(a))=F(b)–F(a)$, т.к. $F(b)–F(a)$ – const.

$F(b)–F(a)=\lim\limits_{d\to 0}\sum_{\kappa=1}^{n} f(\alpha_\kappa)\Delta x_\kappa=\int_a^b f(x)dx$, что и требовалось доказать.

Докажем несколько свойств с использованием формулы Ньютона-Лейбница.

1. $\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$ – свойства линейности, а c – const.

Пусть $f(x)=F'(x)$, тогда $(cF(x))'=cF'(x)=cf(x)$.

$$\int_a^b cf(x)dx=cF(b)-cF(a)=c(F(b)-F(a))=c\int_a^b f(x)dx.$$

2. Пусть $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a, b]$, $[a, c]$, и $F'(x)=f(x)$, то справедливо равенство $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ (аддитивность).

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=F(c)-F(a)-F(b)-F(c)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$$

3. Если всюду на отрезке $[a, b]$ $f(x)\geq 0$ (функция $f(x)$ интегрируема), то $\int_a^b f(x)dx\geq 0$ (сохранение знака функции определенным интегралом).

Пусть $F'(x)=f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F'(\alpha)(b-a)=f(\alpha)(b-a)\geq 0,\ \alpha\in[a, b],$$

т.к. $f(\alpha)\geq 0$ и $b–a>0$.

4. Пусть $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a, x]$ и $F'(x)=f(x)$, тогда $\left(\int_a^x f(x)dx\right)'_x=f(x)$.

$$\left(\int_a^x f(x)dx\right)'_x=(F(x)-F(a))'=F'(x)=f(x),\ \text{т.к. } F'(a)=0.$$

Аналогично доказываются и другие свойства.

Предложенный метод изложения материала требует меньших затрат времени.

ВПРОВАДЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВАНОГО НАВЧАННЯ ПРИ ВИКЛАДАННІ МАТЕМАТИКИ У ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ АГРАРНОГО ПРОФІЛЮ

Ю.І. Овсієнко
м. Полтава, Полтавська державна аграрна академія
Ovsienko1977@rambler.ru

Україна поступово входить у світовий освітній простір. Цей процес тривалий і супроводжується суттєвими змінами у традиційній теорії і світовій практиці. Вища освіта завжди була і залишається фундаментом розвитку цивілізації суспільного та соціального прогресу.

Одним із стратегічних завдань реформування змісту освіти є вибір і структурування навчально-виховного матеріалу на засадах диференціації та інтеграції, забезпечення альтернативних можливостей для одержання освіти відповідно до індивідуальних потреб та здібностей [1]. Тому надзвичайна увага приділяється виявленню і розвитку здібностей та інтелектуального потенціалу особистості, визначаючи людину як найвищу суспільну цінність.

Перехід школи до дванадцятибальної системи оцінювання знань дав змогу більш об’єктивно і творчо підійти до питання оцінки рівня теоретичних знань та практичних вмінь і навичок учнів. Це дає змогу умовного розмежування класу на “групи змінного складу” із низьким рівнем знань (1–4 бали), середнім (5–7 балів), достатнім (8–10 балів) і високим (11–12 балів). Відповідно до диференціації класу за рівнем знань, вчитель працює, враховуючи індивідуальний темп, фізіологічні особливості, особистісні інтереси і т.п., комплектуючи таким чином матеріал уроку, щоб максимально забезпечити кожну групу найдоцільнішим типом завдань.

Спроби переходу до диференційованого підходу у навчанні й оцінюванні у загальноосвітніх школах вже розпочалися, тому логічно продовжувати роботу в напрямку підвищення загального рівня знань молоді у вищих навчальних закладах освіти. Проте питання послідовного комплексного впровадження диференційованого підходу в системі “школа–ВНЗ” при викладанні основ вищої математики у вищих навчальних закладах освіти аграрного профілю в науково-методичній літературі є малодослідженим.

Засобами математики можливий розвиток особистості відповідно до потреб, можливостей та індивідуальних якостей із урахуванням соціально-економічних умов суспільства. Фундаментальність математики у вищій школі полягає, з одного боку, у надійній основі засвоєння базових теоретичних знань, а з іншого – у професійній спрямованості, яка виступає засобом ефективної підготовки до майбутньої професійної діяльності.

Вища математична освіта сучасного спеціаліста аграрного профілю включає: вивчення загального курсу – основ вищої математики, спеціальних математичних курсів: методів оптимізації, статистичного аналізу, економіко-математичних методів, математичного програмування тощо. Актуальним є питання підвищення ефективності викладання вищої математики в аграрних ВНЗ, яке потребує творчого та компетентного вирішення, оскільки ця дисципліна не входить до переліку спеціальних і, на перший погляд, не має професійної спрямованості, що в свою чергу, веде до відсутності мотивації у студентів нематематичного профілю до вивчення цієї дисципліни і втрати кваліфікації. Відсутність інтересу і, як наслідок, формальне засвоєння знань знижує рівень і ефективність вивчення не лише курсу вищої математики, а й спеціальних дисциплін.

Сама назва дисципліни "Вища математика" передбачає надбудову над шкільним курсом математики. Скорочення кількості годин у середніх навчальних закладах, відсутність обов'язкового вступного та випускного іспиту на деякі факультети знижує рівень знань майбутніх спеціалістів із математики, втрачається інтерес до самої дисципліни і суміжних з нею спеціальних предметів.

Перехід до диференційованого вивчення математики змінює роль викладача у навчально-виховному процесі. Широкого впровадження набувають такі види робіт, розробка диференційованих завдань – карток з різним рівнем складності задач, з поясненнями та інструкціями щодо розв'язання, складання тестів і т.д. Консультативна форма роботи за змістом та суттю нагадує координацію дій студентів, спрямовану на самостійне поглиблене вивчення матеріалу. Самостійна робота студентів теж носить диференційований характер, включаючи різнорівневі за складністю та змістом завдання.

Перед викладачем математики у ВНЗ аграрного профілю постає проблема підбору методів, спрямованих на підвищення рівня знань майбутніх спеціалістів, зокрема їх "вирівнювання" на початковому етапі вивчення дисципліни. Необхідність врахування інтересів, мотивів, потреб, психологічних та фізіологічних особливостей студентів вимагає розвитку особистісних механізмів. Одночасного вирішення вимагають два питання: з одного боку, для викладача-предметника знання з певної дисципліни – один із критеріїв ефективності його педагогічної діяльності. З іншого – молодь перебуває у ролі студента, традиційно, п'ять років, а людиною зобов'язана бути все життя. Тому диференційований підхід при викладанні всіх дисциплін у вищих навчальних закладах вирішить проблему гармонійного поєднання методів, що сприяють засвоєнню знань, і методів, які допомагають молоді знайти місце для себе і своїх знань у суспільстві. Таким чином, перед викладачем вищої школи постають нові завдання, які ведуть до збагачення і поповнення математики новими знаннями, що стають інструментом у розв'язанні практичних задач, які постають перед спеціалістами-аграріями.

Література:

1. Державна національна програма "Освіта" ("Україна XXI століття"). – К., 1994.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ЛИЧНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ КУРСАНТАМИ ФАКУЛЬТЕТА АВТОМАТИКИ

Н.Д. Орлова[1], Е.Ю. Орлова[2]
[1] г. Одесса, Одесская национальная морская академия
[2] г. Одесса, Одесская национальная академия пищевых технологий
renar@tm.odessa.ua

Современный инженер, получающий диплом специалиста или магистра, после окончания высшего учебного заведения должен владеть не только различными методами высшей математики, но и умением использовать полученные знания в реальных ситуация. В основе создания рабочих и учебных программ по дисциплинам «Высшая математика», «Теория вероятности и случайные процессы», «Численные методы и моделирование на ЭВМ», разрабатываемых кафедрой высшей математики Одесской национальной морской академии для факультета автоматики, лежит концепция личностно ориентированного образования [1, 2, 3, 5].

Курсант с первого курса должен не только знать учебный план на все семестры обучения, но и иметь программы по изучаемым учебным дисциплинам для того, чтобы вносить коррективы в индивидуальный план своей работы в период обучения высшей математике. Последнее становится актуальным при изучении таких специальных разделов высшей математики, как «Вариационное исчисление» и «Оптимальное управление» курсантами, магистрами и специалистами факультета автоматики.

Классические разделы высшей математики относятся к предметам, освоение которых строится на структурно-ориентированной основе (под этим подразумевается возможность жестко и однозначно задать схематизм предмета и его организации) [3, 6]; последнее связано с аксиоматическим построением большинства изучаемых разделов высшей математики.

Изложение специальных разделов курса высшей математики, особенно практическое использование математических методов в теории автоматического регулирования не следует строго относить к предметам, освоение которых строится на структурно-ориентированной основе. В этом случае более приемлемо отнести изучаемые разделы к предметам группы «позиционно-ориентированных» [3], так как в этом случае допускается многозначность позиций, неоднозначность трактовок полученных результатов. Имеется в виду возможность описания одного и того же процесса принципиально разными типами уравнений. Например, в теории автоматического регулирования импульсные системы можно представить как соединение импульсных элементов с элементами непрерывного действия. Непрерывные системы автоматического регулирования обычно описываются линейными дифференциальными уравнениям, для описания систем автоматического регулирования с импульсным элементом используются разностные уравнения. В общем случае описание систем автоматического регулирования можно представит как соединение импульсных элементов (дискретных величин) с элементами непрерывного действия. В этом случае появляются два варианта решения общей задачи автоматического регулирования:

1) отдельно решаются задачи с непрерывным и дискретными элементами, затем проводится анализ и стыковка полученных результатов;

2) совместное решение разомкнутой импульсной системы с одним импульсным элементом приводит к решению, которому можно придать определенный физический смысл, но которое не может быть точно воспроизведено никаким реальным устройством [4].

К особенностям методики обучения курсантов первых и вторых курсов следует отнести способ реализации образовательного процесса. Исходя из реальных ситуаций, процесс образования строится на учебном диалоге ассистента и курсанта, который направлен на совместное конструирование программной деятельности.

Для учета индивидуальной подготовки каждого курсанта на первом практическом занятии проводится «нулевая» контрольная работа по типовым примерам школьного курса. Контрольная работа содержит десять примеров, сложность которых возрастает с номером примера, после оценки «нулевой» контрольной работы становится ясным уровень математической подготовки каждого курсанта. В дальнейшей работе с курсантами ассистент и лектор учитывают уровень подготовки и желание курсанта к самостоятельному углублению математических знаний и стремление использовать полученные знания по высшей математике в практических ситуациях, не заданных обучением.

При этом обязательно учитывается индивидуальная избирательность курсанта к содержанию, виду и форме учебного материала. Предусмотренные учебной и рабочей программами контрольные и расчетно-графические работы проводятся для всех курсантов, изучающих курс высшей математики. Однако составлены они таким образом:

– решение первой группы задач (шести-десяти заданий) показывает усвоение материала на уровне решения типовых задач;

– решение второй группы задач (пяти-шести заданий) показывает усвоение материала на аналитическом уровне, позволяющем решать задачи различными способами;

– решение третьей группы задач (два-три задания) показывает усвоение материала на творческом уровне.

Аналогичным образом составляются и билеты модульного контроля, которые представляют собой критериально-ориентированный тест [3]. Билет модульного контроля составлен таким образом, чтобы ответ на каждый вопрос билета показывал определенный уровень знаний курсантов:

1 – материал освоен на уровне узнавания;

2 – материал освоен на уровне припоминания;

3 – материал освоен на уровне, позволяющем решать задачи различными способами;

4 – материал освоен на аналитическом уровне;

5 – материал освоен на творческом уровне.

Такие критериально-ориентированные тесты призваны дать интегрированную оценку усвоения курса высшей математики курсантами.

Усвоение теоретического материала на уровнях 1–2 и решение задач первой группы позволяет получить курсанту оценку «удовлетворительно». Усвоение теоретического материала на уровнях 1–2–3–4 и решение задач второй группы позволяет получить курсанту оценки «хорошо» и «отлично»; усвоение теоретического и практического материала последнего уровня дает возможность привлечения курсанта к научно-исследовательской работе.

В рабочих и учебных программ по дисциплинам «Высшая математика», «Теория вероятности и случайные процессы», «Численные методы и моделирование на ЭВМ» для аудиторных занятий предусмотрено 51% от общего объёма часов, таким образом, на самостоятельную работу курсантов по изучению курса высшей математики выносится практически половина общего курса. В связи с этим организация самостоятельной работы курсанта и контроль за выполнением этой работы приобретают особое значение [1, 3, 6, 7].

Существенными компонентами организации самостоятельной познавательной деятельности являются внутренняя мотивация и наличие творческих умений. Умение самостоятельно мыслить, способность ориентироваться в новом материале, самому видеть нерешенные проблемы, умение искать пути их решения, используя различные литературные источники, критичность ума и возможность использования полученных знаний в других изучаемых предметах.

Система критериально-ориентированного тестирования знаний одновременно существенно изменяет традиционную систему контроля. В личностно-ориентированном обучении нет четкого норматива, относительно которого оценивается характер развития личности [3], однако ориентиры его организации имеются. Эти ориентиры, несколько видоизменив, можно принять за систему контроля знаний: следует установить минимум, который необходимо освоить для обеспечения адекватного восприятия высшей математики, разработать адекватную систему тестирования курсантов и осуществлять технологии обучения «по результатам».

Создавая такое обучение, необходимо сменить и позицию преподавателя по таким пунктам:

– оценка преподавателем курсантов,
– курсант не должен делать ошибок;

– преподаватель знает, как и что должен отвечать курсант;
– преподаватель учит, а курсант учится;
– преподаватель должен знать ответы на все вопросы, которые возникают на занятии;
– на вопрос преподавателя всегда должен быть ответ.

Позиция преподавателя – это позиция консультанта, создающего атмосферу «свободы выбора в обучении» предмета высшей математики. При изложении и изучении курса преподаватель должен:
– использовать методы, стимулирующие активность обучаемого;
– соотносить содержание учебного материала с конкретными задачами теории автоматического регулирования;
– стимулировать интерес к познанию новых разделов через выяснение появившихся вопросов, ибо возникшие вопросы вызывают потребность в новых знаниях;
– подготавливать и настраивать курсантов на ту информацию и на тот процесс, которые будут предлагаться на следующих этапах работы;
– предлагать для углубленного изучения специальные разделы курса высшей математики и указывать возможность их использования в будущей специальности.

Литература:

1. Якиманская И.С. Разработка технологии личностно-ориентированного обучения. // Вопросы психологии. – 1995. – №2. – С. 31-42.
2. Ertmer, P.A. and Newby, T.J. (1993). Behaviorism, cognitivism, constructivism: Comparing critical features from an instructional design perspective. Performance Improvement Quarterly, 6(4), 50-72.
3. Алексеев Н.А. Психолого-педагогические основы организации личностно-ориентированного обучения // Инновационные процессы в образовании и новые педагогические технологии. – Тюмень-Тобольск: Изд-во ТюмГУ, 1997.
4. Иванов В.А., Медведев В.С., Чемоданов В.К., Ющенко А.С. Математические основы теории автоматического регулирования. – М.: Высшая школа, 1977. – Том 2. – 517 с.
5. Бондаревская Е.В. Личностно-ориентированное образование: опыт разработки парадигмы. – Ростов-на-Дону: ЮО РАО, 1997. – 28 с.
6. Левитас Г.Г. О процедурах освоения образовательных технологий педагогическими коллективами // Школьные технологии. – 2002. – №6. – С. 27-31.
7. Savery, J.R. and Duffy, T.M. (1995). Problem based learning: an instructional model and its constructivist framework. Educational Technology, 35, 31-38.

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Б.И. Пелешенко
г. Днепропетровск, Днепропетровский государственный аграрный университет
dsaupelesh@mail.ru

Пусть B – замкнутый шар с центром x_0 и радиусом r полного метрического пространства X с метрикой $\rho(x, y)$ $(x, y \in X)$, $\varpi(t)$ – модуль непрерывности на $[0, 2r]$. Через $H^{\varpi}(B)$ обозначим класс Липшица отображений f: $B \to X$, для которых выполняется неравенство $\rho(f(x), f(y)) \le \varpi(\rho(x, y))$.

Доказательство сходимости одношагового итерационного процесса $x_{n+1}=f(x_n)$ хорошо известно [1] в случае, когда $\varpi(t) = Kt$ $(0 < K < 1)$. Если $K=1$, то итерационный процесс может расходиться.

Возникает вопрос о возможности сходимости итерационного процесса для отображений из класса Липшица $H^{\varpi}(B)$, определяемого модулем непрерывности $\varpi(t)$, удовлетворяющего условию $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\varpi(t)}{t}=1$.

Нами получены достаточные условия, накладываемые на модуль непрерывности $\varpi(t)$, для сходимости одношагового итерационного процесса $x_{n+1} = f(x_n)$ в случае $f(x) \in H^{\varpi}(B)$.

Так как $\rho(x_{n+1}, x_n) \le \varpi\,(\rho(x_n, x_{n-1}))$ $\left(n=\overline{1,\infty}\right)$, то доказательство сходимости сводится к установлению условия правильного выбора начального приближения $\rho(f(x_0), x_0) \le \delta$, установлению монотонной сходимости последовательности $\varpi_1(t)$, ..., $\varpi_n(t)=\varpi(\varpi_{n-1}(t))$ к нулю для $0 < t \le \delta$ и суммируемости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varpi_n\,(\delta)$.

<u>*Теорема*</u> 1. Пусть отображение $f(x)$ определено в замкнутом шаре B радиуса r с центром в x_0 и принадлежит классу $H^{\varpi}(B)$, где функция $\varpi(t)$ такова, что числовая последовательность $\varpi_n(\delta)$ для заданного $\delta < 0$ монотонно убывает к нулю и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varpi_n\,(\delta)$ сходится. Если начальный элемент выбран из условия $\rho(x_0, f(x_0)) \le \delta$ и выполнено условие $\delta + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\varpi_k\,(\delta) \le r$, то верны следующие утверждения:

1) все приближения $x_n \in B$;

2) последовательность $\{x_n\}$ сходиться к некоторому элементу X из B, который есть решением уравнения $f(x) = x$;

3) для приближения x_n элемента X верна оценка $\rho(x_n, x) \le \sum_{k=1}^{\infty} \varpi_k\ (\delta)$. Возникает вопрос о возможности сходимости итерационного процесса для отображений из класса Липшица $H^{\varpi}(B)$, определяемого модулем непрерывности $\varpi(t)$, удовлетворяющего условию $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\varpi(t)}{t} = 1$.

<u>*Доказательство.*</u> Сначала докажем по индукции, что при выбранном начальном приближении x_0, все построенные с помощью итерационного процесса $x_{n+1} = f(x_n)$, $(n = 0, 1,...)$ приближения принадлежат шару B. Для $n = 0$ это выполняется, так как по условию x_0 – центр шара B и

$$\rho(x_0, x_1) = \rho(x_0, f(x_0)) \le \delta < r.$$

Предположим, что x_1, x_2, x_n вычислены и принадлежат шару B. Тогда может быть вычислено значение $x_{n+1} = f(x_n)$. По условию теоремы

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(f(x_{n-1}, f(x_n)) \le \varpi\,(\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \le \varpi\,(\,\varpi_{n-1}(x_0, f(x_0))) = \varpi_n\,(\delta)$$

Проверим, что $x_{n+1} \in B$. Применив несколько раз неравенство треугольника к метрике $\rho(x, y)$, имеем

$$\rho(x_0, x_{n+1}) \le \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots \rho(x_n, x_{n+1}) \le \delta + \sum_{k=1}^{n} \varpi_k\ (\delta) \le r(\delta).$$

Отсюда получаем, что $x_n \in B$. Далее установим, что последовательность приближений $\{x_n\}$ сходится. Проверим, что она удовлетворяет признаку Больцано-Коши:

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+r}) + \ldots + \rho(x^{n+p-1}, x^{n+p}) \le$$

$$\le \sum_{k=n}^{n+p-1} \varpi_k\,(\delta) \le \sum_{k=n}^{\infty} \varpi_k\ (\delta).$$

Из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \varpi_k\ (\delta)$ следует выполнение признака. Так как пространство X полное, то $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ принадлежит X. Кроме того, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\rho(x_0, x) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_0, x_n) \le r$, т.е. $x \in B$. Теорема доказана.

<u>*Следствие*</u>. Пусть $a>1$, $\delta>0$, $r>0$, модуль непрерывности $\varpi(t)^a = t/(1+t^{1/a})^a$ определен на отрезке $[0, 2r]$ и отображение $f(x) \in H^{\varpi}(B)$. Если начальный элемент удовлетворяет условию $\rho(x_0, f(x_0)) \le \delta$ и выполнено неравенство $\delta + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^a} \le r$, то последовательность $\{x_n\}$сходится к некоторому элементу X из B, являющегося решением уравнения $f(x) = x$. Для приближения x_n элемента X верна оценка $\rho(x_n, x) \le \sum_{k=n}^{\infty} \dfrac{1}{k^a}$.

<u>*Доказательство*</u>. Для заданного в условиях следствия модуля непрерывности члены монотонной последовательности $\{\,\varpi_n\,(\delta)\}$ ограничены соот-

ветствующими членами последовательности $\left\{\frac{1}{n^a}\right\}$, т.е. $\varpi_n(\delta) < \frac{1}{n^a}$ для $\forall n \in N$. Тогда условие теоремы $\delta + \sum_{k=1}^{\infty} \varpi_k\ (\delta) \le r$ запишется в виде

$$\delta + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \le r.$$

Применяя доказанную теорему, получаем утверждение леммы.

Замечание. Изложенный в работе подход можно применять для доказательства теорем существования и единственности решений различных алгебраических, дифференциальных, интегральных уравнений, где применяется принцип сжатых отображений [2], [3], [4].

Литература

1. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы, Т.2. – М.: Наука, 1977. – 399 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 542с.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. – М.: Физ.-мат. лит., 1959. – 684 с.
4. Дьедоне Ж. Основы современного анализа. – М.: Мир, 1964. – 430 с.

ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ В СИСТЕМІ ПРОФІЛЬНОЇ ІНТЕГРОВАНОЇ ОСВІТИ

С.В. Петренко, І.В. Шишенко
м. Суми, Сумський державний педагогічний університет
імені А.С. Макаренка
sv_petrenko@iatp.org.ua

Сучасний етап розвитку нашого суспільства характеризується інноваційними освітньо-педагогічними змінами в системі реформування національної освіти. Ці зміни зумовлені типовими тенденціями розвитку Європейських країн. Але здійснення новітніх перетворень можливе за умови вирішення питань щодо впровадження нових форм та методів навчання.

Головною метою і змістом національної системи освіти має бути гармонійно розвинута особистість. Вже традиційними стали співпраця навчальних закладів для здібних учнів та ВНЗ, які мають можливість у системі безперервної освіти забезпечити профорієнтацію, профільну освіту та довузівську підготовку молоді.

Функціонування середнього навчального закладу в структурі університету створює передумови становлення сучасної навчально-виховної системи у спільній діяльності вищого та середнього навчальних закладів. Модель «Ліцей–університет» дає можливість вирішити головні завдання щодо підготовки здібної талановитої молоді в контексті інтегрованої системи освіти на рівні освітніх систем, що випливає з визначення інтеграції як процесу взаємодії елементів, який супроводжується встановленням, удосконаленням і зміцненням істотних зв'язків між цими елементами на основі достатньої підстави, у структурі якого зберігаються індивідуальні властивості вихідних елементів [1].

Інтеграція – це основний інструментарій формування цілісної системи знань, спрямованих на розвиток загальної та професійної культури учнів.

Інтеграція важлива на етапі складання навчально-тематичних планів та програм курсів, що пропонуються для ліцеїстів в системі профільної освіти, оскільки інтегративний підхід передбачає координацію загальної підготовки у процесі формування особистості. Така інтеграція сприяє формуванню високорозвиненої особистості з особливим стилем мислення, вчить бачити світ у взаємозв'язку взаємообумовленості.

Інтегрований підхід передбачає координацію завдань, що сприяє ефективному використанню здобутків психолого-педагогічної науки, розвитку розумових здібностей, індивідуальних характеристик та формуванню творчо мислячої особистості.

Інтегрований підхід передбачає переорієнтацію освіти з предметно-змістового принципу вивчення основ наук на вивчення цілісної картини світу.

У сучасних психолого-педагогічних і методичних дослідженнях проблеми інтеграції розкрито її комплексний багатоаспектовий характер. Він визначається спільними завданнями навчання, структурою змісту освіти, методами, формами і засобами навчання, виконує методологічну, конструктивну і формуючу функцію.

Ліцей як структурний підрозділ університету разом з усіма існуючими структурами університету створює загальний освітній простір, який визначає структурну модель об'єднаної спільної діяльності, комплексної конструкції, системи освіти.

Результатом створення такої системи є підготовка конкурентоспроможного випускника ліцею, а потім студента ВНЗ, який стає якісним виміром ефективності функціонування інтегрованої системи освіти.

До головних особливостей безперервної інтегрованої системи освіти відносяться:

1. Інтегрована система освіти функціонує як система цілісності, єдності та взаємодії навчальної, трудової, фізично-оздоровчої, технічної і художньо-творчої діяльності учнів і студентів.
2. Ядром системи є виховання особистості на основі її самовизначення і самореалізації.
3. Всі елементи системи знаходяться у процесі взаємодії.

Створення системи безперервної багаторівневої освіти із визначеним змістом, функціями та умовами спільної діяльності ліцею і ВНЗ сприяє:

– розробці та застосуванню нових освітніх технологій із широким залученням викладацького потенціалу;
– розробці інтегрованих навчальних програм та розробці навчально-методичних комплексів за різними освітніми профілями;
– проведенню комплексного моніторингу для виявлення професійних інтересів випускників і їх вибору подальших шляхів освіти;
– удосконаленню діяльності викладача як викладача-методиста, його зростанню як творчої індивідуальності;
– впровадженню науково-практичного підходу до навчання учня з використанням новітніх педагогічних технологій;
– вдосконаленню єдності теорії і практики;
– забезпеченню системної освіти;
– підготовці молоді до подальшого навчання у ВНЗ.

Широкі можливості для реалізації інтегрованої освіти відкриває профілізація освіти, оскільки здійснюється цілеспрямована підготовка учнів до навчанню у ВНЗ за обраною спеціальністю. Але профільне навчання породжує на сучасному етапі проблеми викладання загальноосвітніх предметів відповідно до профілю, зокрема, математики.

Навчання математики повинно:

– забезпечити необхідний загальнокультурний рівень математичної підготовки молоді, який визначається замовленням суспільства й можливостями учнів даного віку;

- задовольнити потреби профільної підготовки в розвитку пізнавальних і математичних видів діяльності учнів, що характерні для даного профілю;
- формувати засобами математики професійні нахили учнів.

Навчання математики повинно здійснюватися відповідно до основних положень і принципів концепції математичної освіти в Україні [3]:

1. Система математичної освіти є цілісною системою формування особистості на основі досягнень математики, психолого-педагогічної науки, педагогічного досвіду вітчизняних і закордонних закладів освіти різних типів.
2. Система математичної освіти повинна бути безупинною і забезпечувати наступність в освіті між різними ланками системи освіти.
3. Ця система базується на основах гуманізації навчально-виховного процесу і гуманітаризації змісту освіти.
4. Система математичної освіти повинна реалізувати рівневу і профільну диференціацію на основі базового змісту.
5. Навчання математики повинно мати розвиваючий характер і прикладну спрямованість.
6. У змісті навчання математики має бути виділена інваріантна базисна частина і варіативна.
7. Пріоритетними в організації навчання математики повинні бути активні методи навчання і сучасні технології.
8. Необхідним є застосування інформаційних технологій навчання.

Профільна диференціація навчання математики в системі інтегрованої освіти передбачає:

- створення умов для свідомого вибору учнями профілю;
- наступність з допрофільним навчанням математики і навчанням математики у звичайних класах загальноосвітньої школи;
- досягнення всіма учнями базового рівня навчання математики;
- розробку державних стандартів з математики для різних профілів навчання;
- реалізацію прикладної спрямованості навчання математики, орієнтованої на профіль навчання як одного з головних засобів формування профільних інтересів засобами математики;
- відмінність змісту навчання математики в профільних класах і звичайних класах;
- реалізацію рівневої диференціації, що підсилює диференціацію навчання математики для кожного профілю;
- розмаїтість форм і видів класної та позакласної роботи;
- поглиблене вивчення математики як одного з видів профільного навчання.

Повноцінна реалізація профільного навчання математики в системі інтегрованої освіти, що передбачає істотні зміни в змісті навчання і формах роботи з ліцеїстами і доцільна тільки в старшій школі, особливо в 11 класі.

Профільне навчання математики в старшій школі може бути забезпечене:

1. Основним курсом математики (базова математична підготовка), який закінчується в 10-му класі.
2. Системою курсів за вибором, що враховує інтереси і можливості даного профілю, систематизує, поглиблює і розширює основний курс відповідно до профілю навчання (додаткова математична підготовка).
3. Системою модульних завдань, спрямованих на розвиток професійних нахилів ліцеїстів, їхнього інтересу до застосування математики (індивідуальна робота з математики).

Такий підхід до вивчення математики у старшій школі дозволяє найповніше врахувати розходження в можливостях і потребах ліцеїстів, забезпечує єдність рівневої і профільної диференціації навчання математики.

Основний зміст математики для всіх профілів повинен реалізуватися основним курсом в 10 класі, а додатковий – курсами за вибором та індивідуальною роботою, яка проводиться в 11 класі.

Системність курсу математики передбачає створення інтегрованого курсу математики (10 клас) без поділу його на розділи «Алгебра і початки аналізу» і «Стереометрія», що сприяє тісним зв’язкам між поняттями й фактами та раціональному використанню часу, виділеного на вивчення предмета.

Навчально-методичне забезпечення повинно розроблятися для кожного напрямку профільного навчання математики.

Розв’язати проблеми навчально-методичного забезпечення сьогодні можливо лише за умови тісної співпраці середніх закладів освіти з методичними центрами педагогічних університетів або безпосередньо працюючи в системі інтегрованої освіти, що надасть реальну можливість використання спільної діяльності середнього навчального закладу й університету в системі становлення сучасного вчителя його підготовки, вдосконалення єдності теорій і практики.

Однією з найважливіших і характерних ознак інтегрованого знання в системі профільної освіти є виникнення нової якості.

Література:

1. Козловська І. Теоретико-методологічні аспекти інтеграції знань учнів професійно-технічної школи (дидактичні основи): Монографія. За редакцією С.У. Гончаренко. – Львів: Світ, 1999. – 302 с.
2. Концепція профільного навчання в старшій школі // Освіта України. – 2003. – №88.
3. Концепція профільної диференціації навчання математики // Математика в школі. – 1990. – №4. – С. 21–27.

«МАТЕМАТИКА–0» НА МЛАДШИХ КУРСАХ ПЕДВУЗОВ

В.В. Петров, Н.А. Василенко
г. Кривой Рог, Криворожский государственный педагогический университет

<u>Введение.</u> Имеются публикации о снижении эффективности обучения математике в Украине, однако достоверных данных (в числовой форме) по этому вопросу мы не имеем из-за отсутствия их в открытой печати. Поэтому можно ли правильно ответить на вопрос, имеется или нет снижение уровня математической подготовки выпускников школы? Отвечать на такие вопросы всегда было трудно из-за цифромании. Но дело усугубляется и тем, что пока еще нет эффективных критериев, надежных процедур и средств, которые бы позволяли измерять результаты обучения, выполнять его независимо от ориентировок администрации учебного заведения. «Ручной» мониторинг и контроль в образовании неточен и вполне может привести к искаженным данным. Напомним, как в начале 1988 года профессионалы-педагоги, методисты и учителя средних школ СССР при оценке опыта работы В.Ф. Шаталова разделились на 2 лагеря. Одни дали высокую позитивную оценку (Буловацкий М.П.) [1], другие – резко негативную (Столяр А.А.) [3]. Телевизионные уроки, данные новатором в мае 1988 года, не сильно изменили ситуацию. «Ножницы» в оценках оставались значительными. Поэтому ясно, что оценки, выставленные в аттестатах зрелости (и, видимо, в дипломах о высшем образовании), могут обладать аналогичной «точностью измерения».

Уровень математической культуры большей части выпускников школ и абитуриентов никогда не удовлетворял общественность, а преподавателей высшей школы особенно. Поэтому истинной причиной недовольства уровнем подготовки абитуриентов и первокурсников высших учебных заведений могло быть 1) *неадекватное восприятие практикующими преподавателями вузов истинного положения дел*, или 2) *фактическое снижение уровня математической культуры на выходе школы*.

В связи с этим мы в 2000–2004 гг. провели исследования по изучению наличного уровня умений студентов физико-математического факультета КГПУ применять математические знания к решению несложных нетиповых задач. В рамках курса «Математическая логика и теория алгоритмов» (первый курс, второй семестр) нами проводились замеры остаточных знаний и умений решать несложные, нестандартные задачи и задачи с *логическими мини-трудностями* по школьному курсу математики.

Опишем наш эксперимент.

<u>Констатирующий эксперимент.</u> Замер проводился в виде контрольной работы на втором или третьем занятии. Задание составлялось из несложных, но нестандартных, задач, доступных (по знаниевому компоненту) учащимся средних классов общеобразовательных школ, и требующих для своего решения определенной самостоятельности и культуры мышления. Наши испытуемые в первом семестре прослушали начальные разделы вузовских курсов математического анализа, алгебры, геометрии и школьный курс математики. Успешно сдали экзамены за первый семестр. Отдохнули от них и готовились контрольной работе по проверке остаточных знаний за курс математики.

<u>Пример контрольной работы.</u>

1. *Задача на проценты (5-6 классы)* Цех выпустил продукции в феврале на 20% больше, чем в январе и на 20% меньше, чем в марте. На сколько процентов цех выпустил продукции больше в марте, чем в январе?

2. *Задача о дне рождения (3-4 классы)* Мальчик Митя всегда говорит правду за исключением единственного случая, когда в день своего рождения приходится отвечать на вопрос: «Когда же твой день рождения?». Я встретил Митю 1 апреля и на указанный вопрос он ответил: «Завтра». 2 апреля он снова ответил мне на этот вопрос: «Завтра». Выясните, когда же на самом деле у Мити день рождения.

3. *Задача на «угадывание» задуманных множеств* (*7-9 классы*) Саша, Паша и Маша загадали числа от 1 до 9. Учитель на доске выписал все общие числа, которые загадали Саша и Паша – $\{1, 2\}$; Паша и Маша – $\{3, 7\}$. Затем учитель выписал все числа, которые загадали Саша или Паша: $\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$; Саша или Маша $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$. Остальным ученикам класса он предложил найти, какие множества чисел задумал каждый из учеников.

4. *Задача о катке* (*7–9 классы*) Отец и сын катаются на коньках по кругу. Время от времени отец обгоняет сына. После того, как сын переменил направление своего движения на противоположное, они стали встречаться в 5 раз чаще.

Во сколько раз отец бегает быстрее сына?

5. *Задача о хамелеонах* (*7-9 классы*). На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.).

Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

6. *Задача с параметрами* Решите уравнение: $x^2+a|x|+b=0$ при вещественных значениях a и b.

7. Выведите формулу корней квадратного уравнения $x^2+px+q=0$.

8. Выведите формулу Герона (формула вычисления площади S треугольника по длинам его сторон).

<u>Условия проведения контрольной работы.</u>

1. На первом (вводном) занятии по новому для студентов курсу предлагается подготовиться к контрольной работе по проверке остаточных знаний по школьной математике, оговариваются условия проведения и оценки ра-

боты.

2. Положительную оценку за решение задачи получают только в том случае, если а) задача решена верно и б) аккуратно объяснено решение, то есть каждый шаг его обоснован.

3. Для получения положительной оценки за работу не обязательно решать все задачи. Для этого достаточно решение трех-четырех задач из числа предложенных.

4. Для повышения успешности выполнения задания, студентам предлагалось ознакомиться с условиями всех задач и выбрать, в первую очередь, те из них, которые покажутся наиболее легкими, понятными и доступными.

5. По условиям проведения контрольной работы требовалось выполнять ее исключительно самостоятельно, но попытки совместного обсуждения с партнером по парте не пресекались.

6. Работа длилась около 1 часа 20 минут (стандартная пара).

7. Задание предлагалось выполнить в качестве домашней контрольной работы и указать в списке предложенных задач три наиболее интересных (расположив их в порядке убывания интересности) и три менее интересные, а также высказать свои пожелания о целесообразности включения подобных задач в качестве конкурсных или/и необязательных в домашние задания по курсу «Математическая логика и теория алгоритмов».

8. После открытой защиты одного из решений домашней контрольной работы студенту выставлялась положительная оценка, перекрывающая первую негативную (не выставляемую в журнал учета успеваемости).

Результаты эксперимента

№	2001 г.		2002 г.		2003 г.	
1.	3/46	6,5%	2/48	4,2%	1/28	3,6%
2.	19/46	41,3%	21/48	43,8%	12/28	42,9%
3.	1/18	0,0%	0/16	0,0%	0/12	0,0%
4.	5/36	13,9%	3/32	9,4%	2/17	11,8%
5.	0/10	0,0%	0/13	0,0%	1/23	4,3%
6.	0/18	0,0%	0/15	0,0%	0/18	0,0%
7.	5/43	9,3%	2/37	5,4%	5/26	19,2%
8.	2/17	11,8%	1/17	5,9%	2/19	10,5%
Всего	46 студ.		48 студ.		28 студ.	

Задачу 1 брались решать все. В *задаче* 2 около 40 % правильных ответов, но объяснений к решению не дано. Вероятнее всего, ответ угадывался.

Наибольший интерес вызвали задачи: № 5, 2, 3.

Наименее интересными указаны задачи: № 7, 8, 6.

Из бесед со студентами выяснились следующие обстоятельства, которые лишь подтвердили известные факты из практики школьного обучения математике: «*Нас в школе не учили думать, работать с учебником, не требовали выводов и доказательств теорем, формул и правил, логического обоснования решений*» (60–80 %). Многие не забывали оговаривать, что исключение составили последние 2 месяца занятий в школе, когда старшеклассники готовились к выпускным экзаменам. Некоторые из студентов высказывали мнения об отсутствии эффективных форм работы с отстающими учащимися в старших классах. Из-за этого велико число педагогически запущенных учеников. Часть из них объясняли это недостаточной подготовкой учителей.

В связи с этим обратим внимание на проблему квалификации школьных учителей физико-математических специальностей. Из-за отсутствия достоверных данных о квалификации среднего учителя мы можем судить лишь косвенно по уровню учебно-методических материалов для учителей, помещаемых в периодических изданиях. Из них видно, что методическая помощь учителям носит исключительно рецептурный характер. Со стороны школьной администрации, инспекторов и методистов разного уровня методическая помощь учителям сводится к надзору и поучениям. Это косвенно свидетельствует о недоверии, а значит, и невысокой оценке уровня профессиональной подготовки учителей.

Из открытой печати обратим внимание лишь на одну констатацию. Известный специалист по дидактике Л.Н. Ланда в свое время написал: «Многие из учителей, прошедших через эксперимент, не знают операций, из которых складывается процесс доказывания, хотя учат доказывать учеников. ... И если ученики все же научаются правильно доказывать, то это нередко происходит не благодаря, а вопреки тому, как их учат» [2, с. 16].

Итак, оценки авторов публикаций о снижении математической культуры выпускников не могут быть проигнорированы. С недостаточным уровнем математической культуры студентов следует считаться.

В связи с этим вновь выдвинулась на передний план проблема: как готовить учителей математики в стенах высших педагогических учебных заведений в условиях значительного снижения интереса к профессии учителя (физико-математических дисциплин в том числе).

Обучение математике на младших курсах педагогических вузов

Мы считаем, что целесообразно поставить на первом курсе в первом-втором семестрах интегрированный курс «Математика–0».

Целью курса является 1) выяснение уровня обучаемости студентов физико-математических специальностей; 2) обеспечение всех студентов в минимальном, но достаточном для дальнейшего обучения, объеме математических знаний.

Экономическая целесообразность курса состоит в том, что он может читаться большим потокам студентов для факультетов начальных классов, индустриально-педагогического, естественнонаучного и физико-математического факультетов. Одни студенты слушают его как подготовительный курс, другие как основной.

Научно-методическая целесообразность данного курса состоит в следующем:

1. В связи с подготовкой школы к реформированию содержания обучения «Математика–0» в педагогических вузах должна быть ориентирована на постановку в недалеком будущем в выпускных классах школы *интегрированного курса математики. Последний должен быть ориентирован на приложения и на внедрение идеи математического моделирования в школьную практику*.

2. Курс следует апробировать в институтах доуниверситетской подготовки и профессиональной ориентации при университетах. Эти организации не должны ограничиваться традиционным материалом вступительных экзаменов. Более важной является задача подготовки к обучению в вузе.

3. Курс должен быть одновременно поставлен на факультетах повышения квалификации учителей.

Заметим, что большинство реформ образования давали чрезвычайно малый эффект из-за неготовности к изменениям учительского корпуса. Поэтому работать нужно на будущее средней школы и колледжей при университетах.

Программа курса «Математика–0»: *Вводный курс математики для всех специальностей*

1. Избранные темы ШКМ
2. Множества и операции над ними
3. Дискретная вероятность
4. Векторы и матрицы
5. Линейное программирование
6. Марковские цепи и теория игр
7. Разностные уравнения
8. Дифференциальные уравнения (ДУ)
9. Непрерывная вероятность
10. Математическое моделирование

Особенность курса состоит в том, что прикладные и нестандартные занимательные задачи должны быть представлены в нем гораздо шире, чем это имеет место сегодня. Уточнение каждого из разделов (модулей) курса без широкого обсуждения с заинтересованными лицами не целесообразно, поэтому здесь не приводится.

Выводы.

1. Математика 21 века – это прикладная наука, наука о математических моделях. В современных условиях (когда студенты обеспечены вычислительной техникой и мощными математическими пакетами) содержание и методика преподавания математики должны быть скорректированы.

2. Наши курсы математики для высшей школы хороши были в конце 19 и до середины 20 вв. Сегодня они воспринимаются как анахронизм.

3. Современный курс математики для старших классов школы и младших курсов вузов видится интегрированным и ориентированным на приложения.

4. Психология восприятия нового поколения, выросшего на массовом внедрении в быт видео-средств, иная. Компьютеры лишь усиливают эту тенденцию. Схоластические стиль и упражнения сильно снижают мотивацию занятий математикой. Поэтому в новых учебниках им должно остаться мало места.

5. Научить думать может тот, кто научился думать сам. Поэтому развивающим целям обучения математике на разных уровнях следует уделять больше внимания, чем принято сегодня.

Литература:

1. Буловацкий М.П. Где искать время? // Математика в школе. – 1988. – № 1. – С. 59–61.

2. Ланда Л.Н. Умение думать. Как ему учить? – М.: Знание, 1975. – 64 с.

3. Столяр А.А. Тревожные сигналы // Математика в школе. – 1988. – № 1. – С. 61–63.

ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ІСТОРИЗМУ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

І.С. Понура
м. Умань, Уманський державний педагогічний університет
імені Павла Тичини
usttu@um.ck.ua

Питання про доцільність використання елементів історії у викладанні математики та інших наук порушувалося ще в XIX столітті. Так, М. Остроградський підкреслював: "... Було б злочином для людей, вивчаючи матеріали, не шанувати не тільки імен дослідників, але й їх методів, їх експериментів, яких вони досягли. Біографії людей, корисних для науки і мистецтва, є одним із методів, якого ми вживаємо для привернення уваги учнів. Зацікавити дитину – саме в цьому один із найважливіших принципів нашої теорії". Згодом це питання обговорювалося на з'їздах учителів, висвітлювалося в методичній літературі. При цьому основною метою уведення елементів історії у викладання було і залишається зараз – підвищити інтерес учнів до вивчення математики та сформувати у них правильне розуміння математики в цілому [3].

Для математики нового століття стало характерним звернення до коріння математичних теорій і методів. Тому на сьогодні важливим стає ознайомлення учнів відповідно до розділів шкільної програми з елементами історії математики, етимологією понять, метрологією, з "народною математикою" (стародавні задачі прикладного характеру, народні міри і обчислення, раціональні способи усних обчислень, старовинне математичне письмо тощо). На необхідність такої перебудови вказує висловлювання відомого вченого Г. Ващенка: «... Ніщо так не допомагає утримувати у пам'яті відомі істини, як історія їх походження. Математика, висвітлена історичними даними, стає більш живою і цікавою».

Народна математика – це пройдений етап, який носить історичну цінність. Вибір змісту і форми повідомлення народознавчого матеріалу вчитель повинен зробити відповідно до теми уроку чи позакласного заняття, ступеня зацікавленості і підготовки учнів. Використовувати елементи народної математики для правильної постановки навчання математики у школі рекомендували такі відомі математики, як М. Кравчук, Л. Граціанська, М. Чайковський, В. Левицький, Н. Вірченко, О. Астряб, О. Дубинчук та інші [4].

Важливу роль при вивченні геометрії відіграють історичні задачі. В шкільному курсі геометрії учням пропонуються для розв'язування різні види задач: на обчислення, доведення, побудову та дослідження. Визначні математичні задачі – це задачі з давніх історичних пам'яток, задачі, створені відомими математиками або іншими історичними постатями, задачі з давніх підручників і трактатів, журналів та інших друкованих джерел, а також задачі з математичних фольклорів різних народів.

Багато історичних задач цікаві не стільки в математичному, скільки в історичному розумінні: вони дають змогу сучасникам оцінити рівень розвитку математики в різні часи.

Визначні математичні задачі дають змогу учням одержати додаткову теоретичну інформацію, допомагають з’ясувати роль і місце математики в практичній діяльності людей, збуджують інтерес та любов до предмета, потяг до самостійної творчості, прояву ініціативи і кмітливості, критичного ставлення до нових фактів. Ряд задач сприятимуть естетичному вихованню учнів, допоможуть учителю врахувати інтереси і можливості окремих учнів, здійснюючи диференційований підхід до навчання. Розв’язування таких задач дає вчителю природний привід для невеликих історичних екскурсів.

Дані задачі доцільно також використати на уроках повторення та узагальнення знань. Перед розв’язуванням задачі (або після) корисно дати історичну довідку. Це вчитель може зробити сам або доручити учневі, порекомендувавши літературу [2].

На наш погляд, думка, що історичний матеріал забирає багато часу і перевантажує учнів, є хибною. Відомості з історії математики урізноманітнюють уроки, дають можливість більш ґрунтовно і свідомо засвоювати математичні поняття, створюють уявлення про математику як науку, що постійно розвивається.

Діюча програма з математики не містить конкретних вказівок щодо того, який історичний матеріал і при вивченні яких тем необхідно пропонувати учням. Нові підручники і навчальні посібники з алгебри вже передбачають необхідні історичні відомості, однак у підручниках і навчальних посібниках з геометрії їх мало, а в деяких немає взагалі. Тому потрібно робити акцент саме на історичних задачах геометричного характеру.

Розв’язування цікавих задач на уроках математики пов’язано з формуванням певної гнучкості мислення, умінням і готовністю розглядати нестандартні й проблемні математичні ситуації. Воно вимагає також досить високої культури колективної розумової праці.

На жаль, навчання розв’язуванню математичних задач найчастіше розглядається лише як засіб свідомого засвоєння школярами програмного матеріалу. І навіть задачі підвищеної складності спеціальних збірників, призначених для позакласної роботи, в основному мають на меті закріплення умінь і навичок учнів у розв’язуванні стандартних задач.

А тим часом функції історичних задач дуже різноманітні: навчальні, розвиваючі, виховні, контролюючі. Кожна пропонована для розв’язування учням історична задача може служити багатьом конкретним цілям навчання. І все-таки головна мета задач – розвити творче мислення учнів, зацікавити їх математикою, підвести до «відкриття» математичних фактів.

Отже, необхідно на уроках систематично використовувати історичні задачі, що сприяють цілеспрямованому розвитку творчого мислення учнів, їхньому математичному розвитку, формуванню в них пізнавального інтересу й самостійності.

Таким чином, історична задача – це задача, алгоритм розв'язування якої учням невідомий, тобто учні не знають заздалегідь ні способу її розв'язування, ні того, на який навчальний матеріал опирається розв'язування.

Розв'язування історичної задачі – дуже складний процес, для успішного здійснення якого учень повинен уміти думати, догадуватися. Необхідно також хороше знання фактичного матеріалу, володіння загальними підходами до розв'язування задач, досвід у розв'язуванні нестандартних задач.

Взагалі, історія математики має велике значення у вивченні математики в школі. А саме:

а) **освітнє** – допомагає з'ясувати роль і місце математики в практичній діяльності людей;

б) **виховне** – збуджує інтерес та любов до предмету, потяг до наукової творчості, критичне відношення до нових фактів;

в) **розвиваюче** – є ключем для розуміння логіки побудови наукових теорій.

Крім того, використання елементів історизму в шкільному курсі математики є важливим підґрунтям для вивчення історії математики у вищих навчальних закладах.

Виклад історичних відомостей не може бути відірваним від самої математики. Історичні екскурси можна пропонувати учням на різних етапах уроку і з різною метою. Перед викладенням нової теми – з метою мотивації чи підвищення інтересу до її вивчення, в процесі вивчення теми – як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів, після вивчення і закріплення теми – з метою систематизації та узагальнення вивченого матеріалу.

Література:

1. Бевз В., Сверчевська І. Геометрія тіла у визначних математичних задачах // Математика в школі. – 2002. – №5–6.
2. Глейзер Г.И. История математики в школе – М.: Просвещение, 1983. – 352 с.
3. Дутко Л., Бад'як-Білецька Л. Елементи народної математики // Математика в школі. – 2002. – №4.
4. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 509 с.
5. Ткаченко І.В., Туріщева Л.В. Особливості математичних задач // Математика в школах України. – 2004. – №6.

МІЖНАРОДНИЙ КОНГРЕС ICME-10 З ПИТАНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ: ДОСЛІДНИЦЬКІ ПІДХОДИ У НАВЧАННІ ТА ІКТ

С.А. Раков
м. Харків, Харківський національний педагогічний університет
ім. Г.С. Сковороди
Rakov_S@ukr.net

4–11 липня у столиці Данії Копенгагені на базі датського національного технічного університету (DTU) відбувся міжнародний конгрес з питань математичної освіти ICME–10 (International Congress in Math Education). Мета статті: ознайомити широке коло освітян України із враженнями автора від участі у роботі конгресу під кутом зору впровадження дослідницьких підходів у математичній освіті, та ролі у цьому засобів ІКТ, зокрема пакетів динамічної геометрії та комп'ютерної алгебри.

Вступ: загальна характеристика конгресу

У роботі конгресу ICME–10 взяли участь більше 2500 науковців та освітян із 178 країн світу. Найбільша делегація (США) налічувала 723 учасники, Великобританія була представлена 411 учасниками, Росія – 103 учасниками, Україна – 6 учасниками (4 – Харківський НПУ ім. Г.С. Сковороди, 1 – Харківський НУ ім. В. Каразіна, 1 – Харківський НТУРЕ). Конгрес передбачав різноманітні форми роботи (пленарні та регулярні доповіді, тематичні групи, цільові групи, групи поширення досвіду, майстерні, стендові доповіді, асамблеї, національні презентації, тематичні вечори і навіть математичний цирк).

Лейтмотивом конгресу, у явній або неявній формі, були ідеї гуманізації та гуманітаризації, компетентнісних підходів у математичній освіті, використання дослідницьких форм навчання математиці з використанням ІКТ. Не вдаючись у подробиці, автору статті – учаснику конгресу здається, що саме останнє: дослідницькі підходи у навчанні математиці є ключем для вдосконалення математичної освіти з урахуванням усіх перелічених вище підходів. Саме цьому питанню була присвячена доповідь автора на конгресі: "ІКТ-підтримка дослідницького підходу у математичній освіті". У своїй доповіді автор презентував результати робіт, які було виконано під його керівництвом творчим колективом викладачів і студентів і який стосується розробки та впровадження в освітню практику програмно-методичного комплексу DG комп'ютерної підтримки комп'ютерного математичного моделювання з математичних курсів середньої школи та ВНЗ (див. [2–5]). І саме під таким кутом зору обговорюються у статті основні форми роботи конгресу, після чого висловлюються пропозиції щодо удосконалення системи математичної освіти в Україні та участі освітян України у наступному конгресі ICME–11 у 2008 році, який планується провести у Мексиці.

Детально ознайомитись із програмою та матеріалами роботи конгресу можна на сайті конгресу [1].

Пленарні лекції

Наведемо теми трьох з шести пленарних лекцій з короткими цитатами та коментарями до них.

1. **Математика, математики та математична освіта** *(Hyman Bass, США)*

Обговорюються два питання:

Що особливого можуть привнести математики-вчені у розв'язування проблем математичної освіти?

Що слід зробити для стимулювання активної участі математиків у математичній освіті?

Відповідь на перше запитання дається у формі аналізу внеску видатних математиків Фелікса Клейна та Ганса Фройденталя у математичну освіту (під час конгресу було започатковано присвоєння двох іменних медалей: *Фелікса Клейна* та *Ганса Фройденталя* для вручення під час конгресу за видатні заслуги у справі вдосконалення математичної освіти) – вони змінили традиційні з часів Евкліда погляди на викладання геометрії на сучасні (з позицій груп геометричних перетворень), що дозволило поглибити та структурувати предметну область, а також зробити навчання більш змістовним і продуктивним. Залучення математиків до питань математичної освіти мусить супроводжуватись із глибоким усвідомленням ними контексту, у якому предмет мусить розглядатись (цей контекст можна визначити поняттям *компетентнісних підходів в освіті*).

Відповідь на друге запитання дається у формі власної рефлексії доповідача на спільну роботу із освітянами-практиками над питанням, які математичні знання потрібні вчителям математики для їх професійної успішності.

На погляд автора, в Україні питання залучення провідних вчених-математиків до проблем математичної освіти виключно актуальне. Слід на самому високому рівні (Національна академія наук, Академія педагогічних наук, Міністерство освіти і науки України, Кабінет Міністрів України) розробити систему заходів для стимулювання цієї роботи, зокрема у цьому можна скористатися плідним досвідом Польщі, Росії, США та інших країн.

2. **Математична освіта – для кого і чому? Баланс між математичною освітою для всіх і для математично обдарованих** *(Stephen Lerman (Велика Британія), Richard Askey (США), Susana Carreira, (Португалія), Yukihiko Namikava (Японія), Renuka Vithal (Піденна Африка))*

Освітні спільноти у всьому світі і математичні освітні спільноти зокрема, мають потужний тиск до змін у наш час, коли у багатьох країнах все менше є бажаючих вивчати математику в університетах і з кожним роком все менше бажаючих навчатися на учителя математики. Як можна збалансувати загальні потреби у математиці "для всіх", які можна назвати *критичною математичною компетентністю* із особливими потребами у математичних знаннях для тих, хто здатен вивчати математику поглиблено після школи? Як можна зробити математику цікавою та захоплюючою для всього спектру потреб та інтересів до математики у учнів та у суспільстві? Чи можна обмежені освітні ресурси спрямовувати у таких багатьох напрямках? Може, слід зробити математику опціональною після деякого базового рівня? Як слід побудувати математичну програму (або математичні програми, якщо планується спиратися на диференціацію)? Як можна зацікавлювати у математиці учнів, які належать до різних категорій диференціації? Хто мусить приймати рішення, які учні яку категорію математичної освіти мусять отримувати?

Пленарна доповідь відбувалася у формі пленарних дебатів: кожен учасник мав 5 хвилин для озвучування своїх поглядів на запропоновані питання, після чого відбулися дебати за питаннями аудиторії, взаємними питаннями та питаннями модератора.

Головне враження від дебатів: кожна країна мусить дуже виважено відноситись до свого власного шляху в освіті з урахуванням своїх здобутків, проблем, історичного досвіду та пріоритетів. Для України, на погляд автора, це є вдосконалення математичної освіти на засадах гуманізму, демократичності, але без втрати рівня фундаментальності. Як говорить український освітянський математичний фольклор: "Не слід знижувати стандарти математичної освіти України до рівня світових". Фундаментальність математичної освіти залишається національним стратегічним ресурсом України, незважаючи на багато упущень та втрат, які відбулися протягом останніх років.

3. **Математичний пейзаж та його мешканці: почуття, мови, теорії** *(Ferdinando Arzarello, Італія)*

Дійсна проблема, яка стоїть перед математичною освітою, є не забезпечення строгості викладання програмного матеріалу, а проблема розвитку у учнів "відчуття", "способу існування" математичних об'єктів. Більш конкретно можна сказати, що дійсною проблемою сучасної математичної освіти, на якій слід зараз сконцентруватися, є генезис математичних об'єктів у процесі навчання і для цього потрібні різні інструменти, які формально з'явилися далеко від математичного контексту: від епістемології до неврології, через історію, психологію, ергономіку та інші галузі знань.

Як приклад можна навести формування поняття функції. Існує велика різниця між тим, як поняття функції розглядалося у часи Ньютона та Ейлера і сучасним абстрактним визначенням цього поняття на основі теорії множин. Раніше поняття функції ґрунтувалися на взаємовідносинах між конкретними динамічними та безперервними величинами, у яких рух та ідея зміни давали поштовх для формування та розвитку цього та споріднених понять. У протилежність цьому, у наш час, часто використовуються чисто математичні конструкції цих понять, які дистилювалися упродовж століть, в яких був загублений живий, творчий процес їх побудови, і це приводять до того, що більшість учнів і самі розгублюються у цих логічно бездоганних, але холодних і далеких від життя абстрактних побудовах, розглядаючи їх як деякі забави для духовно обділених людей – свого роду "ігри у бісер".

У наш час сучасні потужні комп'ютерні технічні засоби забезпечують можливість відродження вихідних когнітивних та культурних коренів поняття функції як математичного об'єкту (абстрактного об'єкту, що відбиває співвідношення між реальними об'єктами світу). Це перш за все відноситься до пакетів динамічної геометрії, а також інтегрованих комп'ютерних систем, які дозволяють автоматично збирати дані про об'єкти у реальному часі, представляти їх на екрані комп'ютера та досліджувати.

На думку автора, у останньому параграфі наведено провідну ідею використання ІКТ в освіті, причому не тільки у математичній освіті, а в інших освітніх галузях: природничій, суспільствознавчій і інших.

Регулярні лекції

Регулярні лекції проводилися у паралельних секціях для споріднених тематичних груп, немає можливості навіть оглянути у тій формі, що було використано для пленарних доповідей, оскільки їх було 88. Тези всіх лекцій можна знайти на сайті конгресу. Можливо, було б за доцільне виконати переклад на українську мову цих тез, їх видання та розповсюдження серед освітніх установ України.

Майстерні

На майстерні було винесено живий педагогічний досвід у математичній освіті з усього світу, майстерні мали дві сесії (тобто кожна майстерня відбувалася двічі), впродовж яких робота у них здійснювалась паралельно протягом 2 академічних годин. Оскільки близькі за змістом майстерні проводились у близьких аудиторіях, була практична можливість прийняти участь у роботі декількох із них, принаймні сформувати власне враження від них і "розжитися" методичними роздатковими матеріалами. Всього майстерень працювало 45. За браком місця наведемо теми і короткі анотації до 19 з них, які безпосередньо стосуються куту зору статті – дослідницькі підходи у математичній освіті з використанням ІКТ.

1. **Як досягти якомога більшого з малими витратами: Використання графічних калькуляторів** *(Barry Kissan, Австралія)* Презентуються нові педагогічні підходи у математичній освіті старшої школи, які забезпечуються можливостями графічних калькуляторів модельного ряду TI (які мають "зашиті" пакет динамічної геометрії Cabri та пакет комп'ютерної алгебри Derive, і оздоблені графічним дисплеєм).

2. **Педагогічний потенціал електронних таблиць у математичній освіті** *(Steve Sugden, Австралія)* Інтерактивне навчання у старшій школі на основі розв'язування різноманітних задач з алгебри, теорії чисел, модулярної арифметики та фінансів.

3. **Творчі проекти** *(Gail Kaplan, США)* Учні "творять" математику формулюючи гіпотези, експериментально їх перевіряючи та модифікуючи.

4. **Комп'ютерно-орієнтоване навчання: подолання обмеженостей MCQ** *(Chris Sangwin, Великобританія)* Пропонується деякий free-ware пакет, який використовує можливості комп'ютерної алгебри для оцінювання відповідей учнів, що забезпечує можливість інтелектуального діалогу у процесі навчання, долаючи обмеженості традиційних підходів забезпечення зворотного зв'язку на основі питань вибіркового типу (типу MCQ).

5. **Актуарні дослідження та оновлення навчального процесу** *(Bill Atweh, Австралія)* Актуарні дослідження (цей термін пропонується ввести для позначення наукових досліджень, основою яких є безпосередні дослідження реальних освітніх процесів.) ефективні для:

– дослідження практики математичної освіти з точки зору "класної кімнати";
– залучення діючих вчителів до процесу вдосконалення математичної освіти;
– забезпечення щільного зв'язку між науковими дослідженнями у галузі методики математики та освітньою практикою.

Майстерня призначена для відпрацювання технології проведення актуарних досліджень.

6. **Взаємозв'язки у математиці: парабола та перетворення подібності** *(Hamutal David, Ізраїль)* Демонструється геометрична природа параболи на прикладі задачі про згортання паперу. За допомогою пакета динамічної геометрії досліджується дивний факт про подібність всіх парабол.

7. **Розробка та використання педагогічних діагностичних систем** *(Alexandr Kolgatin, Україна)* Презентується технологія педагогічної діагностики та оригінальне freeware програмне забезпечення для цього "Expert 2.03".

8. **Мультиваріантні підходи до класичних задач шкільної математики через створення мультизасобних навчальних середовищ** *(Bertram Burgner, Michael Meyer, Німеччина)* Різноманітні підходи до одних і тих же задач можуть бути розкриті за допомогою пакетів динамічної геометрії, систем комп'ютерної алгебри, електронних таблиць, у тому числі для знаходження наближених розв'язків задач методом спроб та помилок, вимірювань, знаходження загальних розв'язків за допомогою символьних обчислень.

9. **CAS–технології у курсі математичного аналізу** *(Judith Hector, США)* Майстерня призначена для викладачів, щоб допомоги у інтеграції програмування у системах комп'ютерної алгебри (CAS) з метою поліпшення навичок розв'язування задач, а також для поглиблення розуміння студентами понять математичного аналізу. Для простоти використовується програмування у середовищі пакета Derive (графічного калькулятора TI–92).

10. **Використання деяких парадоксальних відповідей графічних та символьних калькуляторів для поглибленого дослідження математичних понять: приклади числових послідовностей та дійсних чисел** *(Ruhal*

Floris, Швейцарія) Презентуються підходи до вивчення числових послідовностей за допомогою графічних калькуляторів (GSC): як можна скористатися деякими парадоксальними відповідями GSC для поглиблення розуміння студентами деяких числових послідовностей та поняття дійсного числа.

11. **Програмування у пакетах комп'ютерної алгебри та його застосування при навчанні математиці** *(De Ting Wu, США)* Презентуються педагогічні можливості програмування у середовищі пакета MathCAD у навчальному процесі з курсів диференційних рівнянь та чисельних методів аналізу.

12. **Навчання та вивчення математичного аналізу** *(Dario Succetti, Італія)* Візуалізація теоретичних понять, теорем, визначень через моделювання засобами інтерактивної комп'ютерної графіки сприятиме усвідомленню математичних теорій.

13. **CD-ROM з використання графічних калькуляторів у навчанні математиці** *(Allan Duncan, Великобританія)* CD-ROM створено як методичний та дидактичний засіб у допомогу учителю математики і може використовуватись у різні способи: як посібник з використання графічних калькуляторів, як бібліотека навчальних матеріалів з метою планування уроків, лабораторних занять, і т.п.

14. **Проект МЕТЕ** *(Paul Andrews, Великобританія)* У рамках проекту **МЕТЕ** (Mathematical Educational Traditions of Europe) вивчаються математичні освітні традиції Європи. Проект фінансується європейським співтовариством, у рамках його створюється база даних відеозаписів уроків, які присвячені спільним темам математичних курсів у Бельгії, Великобританії, Фінляндії, Угорщині та Іспанії.

15. **Математика хаосу** *(David Miller, Великобританія)* Демонстрація того, як досягнення у світі математики можна адаптувати для того, щоб допомогти вчителям та учням зрозуміти чарівний світ математики і тим самим сприяти формуванню нового покоління математиків.

16. **Введення до геометрії Мінковського з використанням динамічної геометрії** *(Bjorn Felsager, королевство Данія)* Використання пакета динамічної геометрії Geometers Sketchpad дає унікальні можливості експериментально досліджувати паралельно властивості геометрії Евкліда та геометрії Мінковського.

17. **Нетрадиційні підходи до вивчення факторизації (розкладання многочленів на множники)** *(Peter Ransom, Великобританія)* Використання різних представлень квадратичного виразу за допомогою пакетів комп'ютерної алгебри, що забезпечує учням більш глибоке розуміння задачі розкладання його на множники.

18. **Розвиток креативності молодших школярів** *(Linde K. Sheffield, США)* Презентуються підходи, які дозволяють перетворити традиційну закриту задачу, яка передбачає одну відповідь та один метод розв'язування, у багату відкриту область, яка включає багато задач і тим самим залучає учнів

до дослідницьких підходів, до більш глибокого розуміння математики та її методів. При цьому широко використовуються технології, зокрема пакети динамічної геометрії.

19. **Роль технологій у навчальному процесі при вивченні алгебраїчних понять** *(Linda K. Griffith)* Пропонується обговорення чотирьох задач (нахил дотичної як швидкість зміни величини, геометричні перетворення при побудові графіків функцій, розв'язування систем рівнянь, відшукання екстремумів функцій) з точки зору проведення навчальних досліджень у середовищі пакетів комп'ютерної алгебри з метою концептуалізації відповідних понять та знаходження алгоритмів розв'язування типових задач.

Національні презентації конгресу ICME-11

Під час конгресу постійно працювали експозиції національних освітніх математичних систем 5 країн: Кореї, Мексики, Нордичних країн (спільна презентація Данії, Фінляндії, Ісландії, Норвегії та Швеції), Росії та Румунії. Виставки працювали постійно, але в один із днів протягом 4 годин відбувалася презентація з лекціями, доповідями, демонстраціями провідних математиків та освітян цих країн. Кожна з презентацій була цікавою і продемонструвала високий рівень математичної освіти, але кожна мала свою специфіку. Спробуємо виразити одним реченням головне враження від презентацій:

1. **Корея – real life math** (математика навкруги: різноманітні прилади, які демонструють математичні ефекти);
2. **Мексика – етноматематика**: побудова математичних курсів на основі широкого використання історичних артефактів;
3. **Нордичні країни – компетентнісні підходи**: математика для використання на практиці, для полегшення соціальної адаптації випускника ЗНЗ;
4. **Росія – фундаментальність**: глибоке і послідовне використання дедуктивного методу у побудові математичних курсів;
5. **Румунія – послідовна інтеграція фундаментальності із гуманізацією** та демократизацією математичної освіти: спроби побудувати фундаментальні математичні курси, але із "людським обличчям".

Кожен учасник конгресу отримав достатньо матеріалів, щоб сформувати уявлення про стан і напрямки модернізації математичної освіти у цих країнах. Вірогідно, ці матеріали заслуговують на більш глибоке опрацювання фахівцями у галузі математичної освіти і публікації у широкій пресі.

Тематичні групи

Окреслити роботу 29 тематичних груп конгресу у рамках короткої статті просто неможливо, тому наведемо тільки назви цих груп, – це дає можливість сформувати коло проблем, які вважаються програмним комітетом конгресу найбільш актуальними для сучасної математичної освіти.

1. Нові набутки та тенденції у математичній освіті дошкільного та початкового рівнів.
2. Нові набутки та тенденції у математичній освіті базової (середньої)

школи.

3. Нові набутки та тенденції у математичній освіті на територіальному рівні (специфіка змісту та методів освіти).

4. Програми та методи навчання математично обдарованих учнів.

5. Програми та методи навчання математиці учнів із спеціальними потребами (у самій назві *із спеціальними потребами (with special needs)* значно більше гуманізму, ніж у загальновживаному терміні *із вадами слуху (зору) і т.п.*).

6. Навчання математиці дорослих та навчання протягом життя.

7. Математична освіта у процесі роботи та для роботи.

8. Дослідження та вдосконалення навчання та вивчення арифметики.

9. Дослідження та вдосконалення навчання та вивчення алгебри.

10. Дослідження та вдосконалення навчання та вивчення геометрії.

11. Дослідження та вдосконалення навчання та вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики.

12. Дослідження та вдосконалення навчання та вивчення математичного аналізу.

13. Дослідження та вдосконалення навчання та вивчення спеціальних математичних розділів.

14. Інноваційні підходи у математичній освіті.

15. Теорія та практика використання технологій у навчанні та вивченні математики.

16. Візуалізація у процесах навчання та вивчення математики.

17. Роль і місце історії математики у математичній освіті.

18. Проблемний підхід у математичній освіті.

19. Математичне мислення, доведення, методи та пошук доведень у математичній освіті.

20. Застосування математики та моделювання у процесах навчання та вивчення математики.

21. Взаємовідносини між математикою та іншими освітніми галузями: мистецтвом та природничими дисциплінами.

22. Навчання та уявлення у математиці: процеси утворення студентами понять, означень, стратегій та уявлень.

23. Підготовка, професійна самореалізація та професійне вдосконалення учителів математики.

24. Мотивація та відношення майбутніх вчителів на математику та математичну освіту.

25. Роль і місце мови та спілкувань у математичній освіті.

26. Гендерні аспекти математичної освіти.

27. Дослідження та розвиток систем оцінювання та тестування у математичній освіті.

28. Нові тенденції у математичній освіті як області досліджень.

29. Історія навчання та вивчення математики.

Математична освіта в Україні: підготовка до конгресу ICME-11

На погляд автора, Україна обов'язково мусить взяти активну участь у наступному конгресі з питань математичної освіти ICME-11 з багатьох причин:

- Україні є чим пишатися у галузі математики та математичної освіти: рівень фундаментальної математичної підготовки випускників ЗОШ та ВНЗ залишається одним із найвищих у світі (за свідченнями деяких авторитетних вчених, математичну освіту СРСР слід віднести до 8 чуду світу і задача сучасної цивілізації полягає у тому, щоб це чудо світу не поділило долю попередніх семи);
- Підготовка до конгресу, тим більше до національної презентації математичної освіти на конгресі, дає потужний поштовх для аналізу світового досвіду математичної освіти (тільки матеріали конгресів ICME дають невичерпний матеріал для системного аналізу стану та напрямів вдосконалення національних математичних освітніх систем), самоаналізу та пошуку ефективних шляхів вдосконалення національної системи математичної освіти в Україні (для цього було б слід створити національний комітет ICME, до складу якого мусять ввійти найбільш авторитетні вчені-математики та освітяни математики для всіх рівнів, від дошкільного до університетського);
- Підготовка до конгресу приверне інтерес математичної спільноти України до проблем математичної освіти (слід зберігати традиції безпосередньої участі вчених-математиків у становленні та удосконаленні освіти; так, неможливо переоцінити вклад у становлення традицій фундаментальності математичної освіти видатних радянських вчених: А.М. Колмогорова, О.В. Погорєлова, А.П. Єршова, І.М. Гельфанда, В.Г.Болтянського і багатьох інших), шляхів збереження його рівня фундаментальності, вдосконалення на основі сучасних математичних досягнень, збагачення ідеями компетентнісних підходів в освіті;
- Підготовка до конгресу приверне широке коло громадськості до проблем математичної освіти, вдосконалення її на принципах гуманізації, профілізації;
- Підготовка до конгресу та її широке висвітлення у ЗМІ сприятиме росту інтересу молоді до математики та споріднених галузей науки, зокрема, інформатики, що сприятиме становленню України як потужної постіндустріальної, інформаційної держави.

З підготовкою до конгресу не слід зволікати. Перш за все, слід створити національний комітет. Після цього слід провести національний конкурс експонентів на конгрес, конкурс можна провести на демократичних засадах через Інтернет.

Зрозуміло, участь у конгресі буде коштувати не абияких затрат: підготовка національної експозиції Росії та участь у конгресі делегації із 100 осіб обійшлася у 200 000 доларів США. Але ці кошти вернуться сторицею за рахунок зростання головного стратегічного ресурсу України – інтелектуального та духовного.

Підсумки

Доцільно, щоб за стратегічний напрямок вдосконалення математичної освіти в Україні був обраний напрямок:

Формування математичних компетентностей на основі дослідницьких підходів у навчанні з використанням ІКТ.

Логіка розвитку світової системи математичної освіти веде саме у цьому напрямку. Україна має всі необхідні та достатні умови, що стати одним із лідерів у цьому.

Як підготовку до участі у конгресі ICME–11 можна розглядати проведення в Україні на базі Харківського національного педагогічного університету ім. Г.С.Сковороди міжнародної конференції PSME–6 (Problem Solving in Math Education) (є попередня домовленість з програмним комітетом PSME–6 про проведення конференції орієнтовно у липні 2005 року).

Література:

1. www.icme–10.dk
2. Раков С.А., Олейник Т.А., Скляр Е.В. Использование пакета Derive в курсе математики: учебное пособие. – Харьков: РЦНИТ, 1996. – 160 с.
3. Раков С.А., Горох В.П. Компьютерные эксперименты в геометрии. – Харьков: РЦНИТ, 1996. – 176 с.
4. Раков С.А., Горох В.П., Олійник Т.О., Гармашова Н.М., Якуба М.Р. Інформаційні технології в аналітичній геометрії. – Харьков: РЦНИТ, 2000. – 192 с.
5. Раков С.А. та ін. Відкриття геометрії через комп’ютерні експерименти в пакеті DG // під редакцією Ракова С.А., Бикова В.Ю. – Харків: Вікторія, 2002. – 136 с.

ФОРМИРОВАНИЕ НАВЫКОВ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ В СИСТЕМЕ ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

Ю.Ф. Рева, И.Н. Вдовиченко
г. Кривой Рог, Криворожский филиал Кременчугского института экономики и новых технологий

Как известно, лекция в вузе всегда была и остается основной формой учебного процесса. В ее задачу входит освещение принципиальных, основополагающих научных вопросов и перспектив их разработки в той или иной фундаментальной области знаний и деятельности. Лекция дает основополагающее начало всему процессу обучения, определяет путь проведения всех видов и форм обучения устанавливает их взаимосвязь. Однако на сегодняшний день авторитет вузовской лекции значительно упал. Это вызвано тем, что она не в полной мере обеспечивает решение основной задачи, стоящей перед высшей школой на современном этапе ее развития – формирования самостоятельности и творческого начала в личности студентов.

Этот упрек лекции в какой-то мере справедлив. Но анализ и наши наблюдения показывают, что устарела не лекция, а та форма, в которой она существует. Отжила та лекция, которая ограничивается информативно-объективной функцией.

В традиционной лекции находит отражение хотя и существенная, но односторонняя деятельность – деятельность преподавателя, и не отражено взаимодействие преподавателя и студентов. В настоящее время все более очевидным становится тот факт, что успех современной лекции и уровень усвоения знаний студентами определяются не только высоким научным качеством ее чтения, но и тем, в какой мере обеспечена обратная связь с аудиторией, то есть как организовано взаимодействия преподавателя и студента, какова доля самостоятельной работы студентов на лекции.

Обратная связь позволяет лектору получить сигналы о мыслительной (внутренне речевой) и практической (преобразующей объект познания) деятельности студентов, а главное – руководить, управлять мыслительной деятельностью студентов с целью формирования определенных качеств знания, умений и навыков их самостоятельной работы.

Отсутствие обратной связи в системе традиционных лекционных знаний с первых же шагов не удовлетворяет студентов, поскольку им отводится роль пассивных слушателей.

Поэтому от того, как будет организовано включение студентов в активные формы деятельности уже на лекции, будет зависеть эффективность их дальнейшего обучения. Мы считаем, что обучение студентов новым формам учебной деятельности первоначально осуществляется через организацию различных форм обратной связи на лекции.

Следовательно, успех современной лекции и уровень усвоения знаний обучающимися определяется тем, насколько высоко ее научное качество и тем, в какой мере обеспечена обратная связь со студентами, которая должна, прежде всего, показывать преподавателю меру овладения студентами опытом практической деятельности, а также меру сформированности всей системы необходимых качеств знаний и умений.

Успешная реализация основных задач преподавания и учения возможна лишь при условии, что центральным звеном вузовского обучения будет целенаправленная деятельность студента и что его участие в процессе обучения будет содержать элементы самостоятельности.

Самостоятельной может быть разная работа, если только сделать ее частью выполнения студентами какой-либо реальной задачи. В этом случае преподаватель становится не столько носителем информации, сколько организатором познавательной деятельности и научно-технического творчества студентов. Преподаватель определяет объем и содержание учебной работы студентов, регламентирует ее во времени, контролирует результаты. Планирование, организация и активизация самостоятельной работы студентов начинается непосредственно на лекции.

По нашему мнению, важным является не только творческое содержание лекции, но и практическая ее направленность. С этой целью учебный материал различных курсов высшей математики подразделяется нами на:

– теоретический (стержневые вопросы теории математики, на которых базируется изучение общенаучных, общетехнических и специальных дисциплин и знаний, необходимых в дальнейшей деятельности);

– фактологический (необходим для изложения стержневых, центральных вопросов математики);

– вспомогательный (служит фоном при раскрытии основного теоретического материала);

– справочный.

Затем строится структурно-логическая схема предмета, которая определяет структуру, взаимосвязь разделов, логическую последовательность их изучения. А в ходе самой лекции или в конце ее практикуются кратковременные упражнения, устанавливающие степень понимания студентами учебного материала и активность работы на лекции, что сами студенты фиксируют в своих индивидуальных картах выполнения заданий.

Индивидуальная контрольная карта студента составляется преподавателем по каждой теме изучаемого учебного материала. В нем отражены вопросы и упражнения для работы на лекциях, практических занятиях. После каждого модуля преподаватель по индивидуальной контрольной карте выясняет уровень знаний студента, а также умения и навыки самостоятельной работы. Индивидуальная контрольная карта содержит задания различных типов, требующие самостоятельной работы студентов, и составляется по принципу нарастания сложности выполняемых работ:

1. Воспроизводящие:

Например:

а) вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{x}$; $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$;

б) вычислить первые частные производные функции двух переменных: $z = \frac{y}{x}; z'_x = ...; z'_y = ...$.

2. Реконструктивно-вариативные:

Например:

а) вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x \cdot e^{-2x^2} dx$; $\int\limits_{-1}^2 \frac{xdx}{1+x^2}$;

б) вычислить первые частные производные функции двух переменных: $z = \ln(x^2 + y^2)$; $z'_x = ...$; $z'_y = ...$.

3. Частично-поисковые:

Вычислить интеграл: $\int\limits_0^2 f(x)dx$, где $f(x) = \begin{cases} x^3 \text{ при } 0 \le x \le -1 \\ \sqrt{x} \text{ при } 1 \le x \le 2 \end{cases}$.

4. Исследовательские:

Вычислить интеграл: $\int\limits_0^\pi \frac{dx}{1+2\sin^2 x.}$

Мы считаем, что такое сочетания лекционных занятий и самостоятельной работы студентов при изучении курса высшей математики побуждает студентов работать с учебником, читать обязательную и дополнительную литературу и пробовать свои силы в выполнении заданий повышенной трудности с элементами творчества.

О МОДУЛЬНОМ ПОСТРОЕНИИ КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Л.Ф. Ринейская
г. Кривой Рог, Криворожский металлургический факультет
Национальной металлургической академии Украины

Как известно, модульное обучение предполагает гибкое управление деятельностью студентов, трансформацию такого управления в самоуправлении. В модульном обучении интегрированы теоретико-практические наработки, оптимизация, индивидуализация и дифференциация обучения.

Сущность модульного обучения заключается в том, что относительно небольшую часть учебного материала целесообразно брать как автономную тему и свободно включать в программу изучаемого курса. Модульное обучение ставит своей целью то, что обучающийся самостоятельно (с направляющей помощью педагога) достигает конкретных целей учебно-познавательной деятельности в процессе индивидуальной работы с людьми.

Каждый модуль в высшей математике имеет свою цель и состоит, как правило, из четырех блоков: методического (рекомендации преподавателю и студенту), информационного (задачи, ситуации, практические работы), контролирующего (контрольные тесты).

На наш взгляд, соотношение практического и теоретического материала в модуле по высшей математике целесообразно взять 80:20. Практический материал ставит своей целью привитие студентам практических навыков, умений при помощи использования вопросов и ответов на них, тестов и ответов на них, задач и их решений.

Примерным содержанием модуля в высшей математике является:

– описание цели освоения данного модуля;

– методические указания по работе с модулем;

– опорный конспект учебного материала, либо информационная карта с указателем страниц учебника;

– тесты или задачи для самоконтроля обучаемого с приведением ответов или решений задач;

– комплекс итоговых контрольных заданий, тестов.

В методических указаниях по работе с модулем дается описание модуля и показывается, как надо с ним работать.

Для освоения каждого модуля предлагается опорный конспект, являющийся теоретическим ядром модуля. Он должен быть кратким, понятным, содержать основные определения, теоремы, которые целесообразно выделить шрифтом.

При разработке модулей для студентов дневной формы обучения и при наличии достаточного количества учебников в библиотеке составляем информационную карту с указанием изучаемых разделов модуля и страниц учебника, на которых этот модуль представлен.

После проработки опорного конспекта с целью проверки степени усвоения теоретического материала студентами проводятся тесты или задачи для самоконтроля.

Студент может самостоятельно проверить, как он освоил данный модуль, так как после каждого теста обязательно приводятся ответы.

Приведем пример тестов по теме «Определители»:

1. Как правильно записать определитель второго порядка?

   а) $\Delta=(a, b)$; б) $\Delta=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; в) $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$; г) $\Delta=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

2. Как вычислить определитель второго порядка?

   а) $\Delta=a+b$; б) $\Delta=a\cdot b$; в) $\Delta=ab-cd$; г) $\Delta=ad-bc$.

3. Что называется минором $\mathbf{M}_{mn}$ элемента a_{mn} определителя? (m и n – номера строки и столбца, в котором a_{mn} расположен).

   а) $m+n$; б) m^2+n^2;

   в) определитель, в котором вычеркнуто m строк и n столбцов;

   г) определитель, в котором вычеркнуты m-ая строка и n-ый столбец.

4. Как вычисляется алгебраическое дополнение $\mathbf{A}_{mn}$ элемента a_{mn}?

   а) $\mathbf{A}_{mn}=(-1)^{m+n}\mathbf{M}_{mn}$; б) $\mathbf{A}_{mn}=(-1)^{mn}\mathbf{M}_{mn}$;

   в) $\mathbf{A}_{mn}=1:\mathbf{M}_{mn}$; г) $\mathbf{A}_{mn}=(-1):\mathbf{M}_{mn}$.

5. Как вычисляется определитель m-го порядка?

   а) $\Delta=\sum_{i=1}^{m} a_{im}A_{mi}$; б) $\Delta=\sum_{i=1}^{m} a_{mi}A_{im}$; в) $\Delta=\sum_{i=1}^{m} a_{ik}A_{ik}$; г) $\Delta=\sum_{i=1}^{m} a_{ki}A_{ki}$.

Ответы:

1. $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$;
2. $\Delta=ad-bc$;
3. определитель, в котором вычеркнуты m-ая строка и n-ый столбец;
4. $\mathbf{A}_{mn}=(-1)^{m+n}\mathbf{M}_{mn}$;
5. $\Delta=\sum_{i=1}^{m} a_{ik}A_{ik}$; $\Delta=\sum_{i=1}^{m} a_{ki}A_{ki}$.

Завершаем модуль итоговым контрольным заданием в виде задач, тестов. Например:

Итоговые тесты.

1. Точка С, симметричная точке М(3; –2) относительно оси y, имеет координаты

   а) (3; 2); б) (–3; –2); в) (–3; 2); г) (2; –3)

2. Определитель $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \\ -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$, преобразованный с использованием свойств определителя, можно представить в виде:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 9 \\ 0 & 7 & 31 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 8 & 21 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 7 & 21 \end{vmatrix}$.

3. Решая систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 3x_1 - 4{,}5x_2 + 7{,}5x_3 = 6 \end{cases}$ методом Крамера, находим, что система:

а) несовместна;
б) совместна, но не определена;
в) совместна и определена.

4. $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\mathbf{A}^{-1}$=?

а) $\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$.

5. Ранг матрицы $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix}$ равен:

а) 3; б) 2; в) 0; г) 1.

6. Расширенная матрица системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными, решаемой методом Гаусса, приведена к виду: $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right|$.

Система:
а) совместна и определена;
б) совместна, но не определена;
в) несовместна.

В процессе внедрения модульного обучения разработана рейтинговая оценка каждого модуля и всей дисциплины в целом. Есть опыт оценки усвоения модулей и в зачетных единицах, и в балах.

По результатам работы можно сделать вывод, что модульное построение дисциплин действующих учебных планов на основе выявления монодисциплинарных блоков обеспечит системную организацию учебного процесса в вузе, направленную на повышение качества подготовки специалистов.

Литература:

1. Архангельский С.И. Лекции по теории обучения в высшей школе. – М.: Высшая школа, 1974. – 382 с.
2. Алексюк А.М. Педагогіка вищої школи. – К.: Вища школа, 1998. – С. 439-449.
3. Веркасов В.М. Активизация познавательной деятельности студентов в высшей школе. Книга для преподавателей вуза. – К.: Высшая школа, 1985. – 176 с.
4. Кремень В.Г. Освіта в Україні: стан і перспективи розвитку. Збірник наукових праць. – Ч.1. – Київ, 2001. – С. 5-14.
5. Машбиц Е.И. Психологические основы управления учебной деятельностью. – К.: Высшая школа, 1987. – 128 с.
6. Триус Ю.В. Технологія використання рейтингової системи оцінювання навчальної діяльності студентів. – Вісник Черкаського державного університету. – 2001. – Вип. 2. – С. 54–58.

ОРГАНІЗАЦІЯ КОМП'ЮТЕРНО-ОРІЄНТОВАНОГО НАВЧАННЯ ДОВЕДЕННЯМ МАТЕМАТИЧНИХ ТЕОРЕМ

О.І. Скафа
м. Донецьк, Донецький національній університет
skafa@skif.net

На сьогоднішній момент одним із сучасних методологічних підходів до розробки методики навчання доведенню виступає єдність логіки та евристики.

Навчати доведенню – навчати аналізу доведення, його відтворенню, самостійному відкриттю факту, пошуку і конструюванню доведення, а також запереченню запропонованих доведень. Формування такої концепції передбачає широке застосування евристик. На цій позиції знаходяться сучасні математики-методисти Г.П. Бевз, М.І. Бурда, Я.І. Груденов, Н.Х. Розов, Г.І. Саранцев, З.І. Слєпкань, Н.А. Тарасенкова, В.О. Швець та ін.

Питання розгляду процесу навчання доведенням теорем та впливу евристик на нього розглядалися нами у роботі [1], де одним з елементів організації такого процесу є залучення евристико-дидактичних конструкцій у вигляді розроблених нами навчальних та корекційних комп'ютерних програм [2]. Такі програми використовуємо як програми актуалізації знань і до їх складу відносимо: актуалізацію у вигляді "тест-корекція", програми "задача-метод" та "задача-софізм". Пояснимо нашу думку більш детально.

У формулюванні кожної теореми містяться *умова та висновок*. Щоб явно виділити умову та висновок, теорему доводиться формулювати у вигляді умовного речення. Не завжди це легко зробити. Для цього потрібно усвідомити, "що дано" і "що треба довести".

Потрібні спеціальні вправи на виділення умов і висновків у теоремах і на перевірки істотності кожної з умов. Виділення умов і висновків повинні супроводжувати формулювання зворотних і протилежних теорем, переформулювання даної теореми у іншому вигляді і ін. Витоки математичної творчості полягають у евристичному вмінні бачити разом з кожною теоремою якомога більшу кількість наслідків з неї та її зв'язків з вивченими раніше теоремами.

Поряд з кожною прямою теоремою важливо розглянути зворотне, протилежне, протилежне зворотному твердження. Найбільш відомими у практиці навчання шкільній математиці є пряма і зворотна теореми. Причина такого обмеження міститься у логічній природі усіх чотирьох теорем: зворотна протилежній теорема рівнозначна прямій теоремі, а протилежна – зворотній. З точки зору логіки достатньо обмежитися розглядом прямої та зворотної теорем. Проте, виходячи з інтересів розвитку мислення, тобто з точки зору евристичного навчання, яке не зводиться до однієї лише логіки, буває повчально побудувати всі можливі речення по відношенню до прямого, заданого як формулювання прямої теореми. Використовуючи програму актуалізації знань у вигляді актуалізації “тест-корекція”, можливо організувати таку роботу.

Наступним етапом під час вивчення теорем є аналіз своєї діяльності у процесі пошуку доведення. Необхідно скласти план пошуку, зробити висновки, розглянути інші способи доведення, довести необхідність кожної умови, побудувати контрприклади.

При цьому можливе використання програми “Задача-метод” з системи евристико-дидактичних конструкцій (ЕДК) як засобу усвідомлення і глибокого розуміння власне процесу доведення теореми (рис. 1).

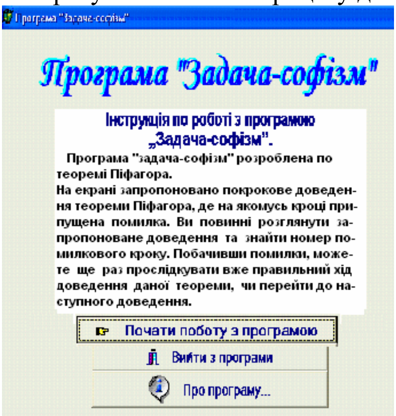


Рис. 1

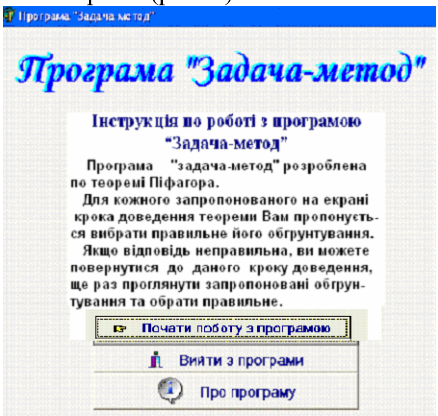


Рис. 2

Шкільна практика показує, що на етапі навчання школярів доведенню теореми деяким учням важко усвідомити такі розумові дії, як абстрагування, узагальнення, виділення загального істотного і відкидання неістотного у доведенні. У евристичному навчанні математики ми виділяємо вміння аналізувати різні підходи до доведення даної теореми, вміння знаходити між ними правильні та ні (в неправильних доведеннях визначати вид помилки). Таку роботу можливо організувати за допомогою програм “Задача-Софізм” (рис. 2).

Таким чином, комп’ютерне навчання доведенням теорем у поєднанні з традиційними формами дає змогу більш глибокого розуміння учнями процесу відкриття та усвідомлення математичних тверджень.

Література:

1. Скафа О.І. Навчання доведенням та евристики // Математика в школі. – 2004. – №5. – С. 14-19.
2. Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология: Монография. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004. – 439 с.

РОЗВИТОК ТВОРЧОГО МИСЛЕННЯ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕОРІЇ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

О.В. Стара, О.Р. Гарбич
м. Дрогобич, Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка
informatyka@drohobych.net

Курс теорії функцій комплексної змінної складає невід'ємну частину математичного аналізу і завершує його вивчення в педагогічних університетах. Без виходу в комплексну область не можна пояснити, чому функція $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ є нескінченно диференційованою на всій числовій осі, а її ряд Маклорена $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots$ стає розбіжним при $|x|\geq 1$. Перехід до аналізу в комплексній області дає можливість відповісти на це питання, глибше вивчити елементарні функції і встановити зв'язок між ними. Крім того, комплексний аналіз дає ефективні методи обчислень інтегралів, в тому числі невласних, способи дослідження розв'язків диференціальних рівнянь, сумування рядів і інше.

За допомогою цих методів зроблені великі досягнення в області чистої математики, зокрема, розв'язана проблема Варінга про зображення всякого натурального числа у вигляді суми скінченого числа довільних степенів. Методи теорії функцій комплексної змінної одержують все ширше застосування в різних областях фізики і техніки. Все це вказує на те, що вивчення основних питань цієї теорії є необхідним елементом математичної освіти.

Ідеї комплексного аналізу виникли в другій половині XVIII ст. і пов'язані з ім'ям Л. Ейлера. Подальший розвиток теорія одержала в роботах О. Коші, Б. Рімана, К. Вейєрштрасса. При читанні лекцій іноді варто звертати увагу на історію розвитку теорії, бо, як говорив відомий український математик, професор Київського університету Б.Я. Букреєв, історичні посилки пожвавлюють викладання, надають йому більшу виразність, сприяють кращому запам'ятовуванню, прищеплюють інтерес до математики.

Особливістю курсу теорії аналітичних функцій є узагальнення основних понять математичного аналізу на випадок функцій комплексного аргументу. Це дозволяє при викладанні реалізувати метод аналогій, а опора на одержані раніше знання дає змогу значно скоротити шлях до оволодіння теорії аналітичних функцій та її практичного застосування. Вивчення основних фактів, пов'язаних безпосередньо з математичним аналізом, можна давати на самостійне опрацювання, що дасть можливість більше витрачати часу на вивчення тих фактів, які є найбільш характерними для аналітичних функцій.

Вивчення теорії функцій, як і математики взагалі, потребує прискіпливої і напруженої праці з літературою, яка формує стійкий інтерес і любов до предмету, стимулює необхідність в самоосвіті і самовдосконаленні. Щоправда, зараз бракує навчальної і наукової літератури, а у студентів не має доступу до найновішої зарубіжної літератури.

Мета статті полягає у визначенні аспектів і методів забезпечення високої якості вивчення математичного аналізу. Зараз йдеться про перехід від фронтального викладання, коли викладач читає лекцію, а студенти сприймають знання, до активного і індивідуалізованого, тому, як ніколи, постала проблема виховати творчого вчителя, який повинен навчати здобувати знання, вказувати різні шляхи учіння, розвивати інтелектуальні здібності учнів, запроваджувати у школі науковий спосіб мислення. Тому заняття у вузі повинні давати не тільки теоретичні знання, а й виховувати в них творче мислення, сприяти розвитку їх особистості, готувати до подальшої професійної діяльності.

Вивчення ТФКЗ сприяє ефективності підготовки майбутнього вчителя, стимулює творчий підхід до навчального процесу у школі, розкриває механізм посилення пізнавальної активності студента, що дозволить розвинути і удосконалити його індивідуальність, створити умови переходу від розвитковості до творчості. Розвиток творчого мислення особистості може відбуватися в процесі читання лекцій шляхом створення проблемних ситуацій, при розв'язанні творчих задач, а організація навчальної діяльності повинна мати форму дослідницької роботи. При читанні лекцій та розв'язанні задач на практичних заняттях повинна проводитись ідея постійного включення студента у творчу діяльність шляхом заохочення його до розв'язання проблем, поставлених лектором під час занять. Це може досягатися створенням ситуації діалогу, тобто елементами інтерактивного методу, що допоможе слухачам зрозуміти складні теоретичні питання, а також включити їх у процес доведення теорем; тут вчаться задавати питання і слухати відповіді викладача або іншого студента.

При читанні лекцій можуть бути корисними для самоконтролю задачі (іноді у вигляді теорем). Так, наприклад, в кінці лекції можна подати задачі відповідно до теми [2].

1. Доведіть, що для неперервної функції $f(x)$, визначеної на компактній множині E, множина $f(E)$ – компактна.
2. Доведіть, що в будь-якій області, яка не містить точок $z_1=x_1+iy_1$ та $z_2=x_2+iy_2$, для яких $y_1=y_2 (\mathrm{mod}\ 2\pi)$, функція e^z – однолиста.
3. Знайдіть помилку у міркуванні $(-z)^2=z^2$, тому $2\mathrm{Ln}(-z)=2\mathrm{Ln}(z)$, $-z=z$.
4. В яких точках комплексної площини функція $w=z|z|^2$ має похідну?
5. Доведіть, що функція $f(z)=\cos x+i\sin y$ не є аналітичною в жодній точці комплексної площини.
6. Чи існує аналітична функція, у якої дійсна частина дорівнює x^3+y^3?
7. Чи має функція $w=\sin z$ хоч би один уявний корінь?
8. Чи справедлива формула $\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$?
9. Чи можна число 1 піднести до такого степеня, щоб одержати число 100?

10. Чи може рівняння $f(z)=0$ мати в замкненій області D нескінченне число коренів, якщо $f(z)$ – аналітична функція в D?

Після вивчення математичного аналізу заняття з ТФКЗ можуть носити більш сучасний і живий характер. Тепер студенти закріплюють раніше набуті знання, мають можливість проявити елементи творчості в доведенні теорем та розв’язанні задач. На початку курсу визначаються по аналогії з курсом математичного аналізу відомі поняття і операції в комплексній області. А основна мета курсу полягає у систематичному вивченні основних властивостей диференційованих (аналітичних) функцій та операцій над ними в комплексній області. Ці функції знаходять широке застосування, бо відображення, що здійснюються ними є конформними, а поняття конформного відображення є одним із важливих понять математики. Методами конформних відображень розв’язуються практичні задачі гідро– та аеродинаміки, теорії пружності – досить згадати, що Пуанкаре побудував модель геометрії Лобачевського, засновану на властивостях дробово-лінійного відображення [1]. Основна задача теорії конформних відображень – побудова аналітичної функції $f(x)$, яка відображає область на іншу. Один із методів побудови такої функцій полягає у підборі належним способом елементарних функцій, з геометрією яких студенти знайомі з попередніх лекцій. Підбір таких фукцій тісно пов’язаний з творчим мисленням студента.

Закінчується курс аналітичних функцій теорією лишків, яка знаходить широке застосування завдяки основній теоремі теорії лишків. Велику користь виявляє теорія лишків при обчисленні деяких невласних інтегралів, а також визначених інтегралів в дійсній області. У комплексному аналізі легко доводиться можливість розкладання раціональних дробів на елементарні. А процес розкладу значно простіший від методу невизначених коефіцієнтів в дійсній області. За допомогою теорії лишків доводиться ряд тверджень як практичного, так і теоретичного значення, зокрема, теорема Руше, яка дозволяє визначити число коренів рівняння в деякій області. Теорія лишків може бути використана і для визначення суми числових рядів, в той час як аналіз в дійсній області знайомить тільки з деякими штучними прийомами розв’язання цієї задачі.

Зроблені зауваження дають можливість оцінити студентами силу методів комплексного аналізу, що буде спонукати їх до подальшого глибокого і творчого вивчення математики.

Література:

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного. – М., 1965. – 716 с.
2. Павлова Л.В., Редькина О.І. Теорія аналітичних функцій. Збірник вправ. – К., 1980. – 213 с.
3. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М., 1960. – 444 с.

ПРО ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ КУРСУ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ НА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ ФАКУЛЬТЕТАХ

О.В. Стара, І.В. Корнейчук
м. Дрогобич, Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка
ira_korneczyk@mail.ru

Вищі навчальні заклади України на сучасному етапі йдуть по шляху модернізації навчального процесу, розв'язання проблем по піднесенню якості навчання та виховання, створення творчого потенціалу, пошуків нових систем освіти, більш демократичних і результативних.

Нова освітня парадигма, якою все більше користуються, направлена на розвиток творчої особистості, загальної культури, наукових форм мислення.

Так, в проекті Концепції розвитку загальної середньої освіти зазначено: "Освіта XXI століття – це освіта для людини. Її стрижень – розвивальна, культорологічна домінанта, виховання відповідальної особистості, яка здатна до самоосвіти і саморозвитку, вміє використовувати набуті знання і вміння для творчого розв'язання проблем, критично мислити, опрацьовувати різноманітну інформацію, прагне змінити на краще своє життя і життя всієї країни" [1].

Але, як зауважує М.І. Шкіль, перехід до нової освітньої парадигми не повинен зводитись до збільшення обсягів певних навчальних дисциплін або тривалості освіти. Мова йде про досягнення принципово інших цілей освіти, що полягають у досягненні нового рівня освіченості особистості і суспільства в цілому [4]. Зміна традиційної освітньої парадигми в напрямі виховання творчої особистості, професійного розвитку спеціаліста, особистості, яка здатна до самоосвіти і критично мислити, повинна піднести якість навчання.

Якість навчання учнів залежить в основному від якості підготовки вчителів (математики) – спеціалістів. Тому і в роботі вищої школи потрібно застосовувати нові освітні парадигми, враховуючи індивідуальні особливості кожного студента та контролюючи засвоєння ними навчального матеріалу.

"Навчання у вищому навчальному закладі повинно забезпечувати як професійний, так і особистісний розвиток спеціаліста, бути орієнтованим на формування його творчої індивідуальності" [4].

Ґрунтовне вивчення основних математичних предметів, особливо тих, що викладаються в школі – запорука підготовки висококваліфікованого спеціаліста. Визначальну роль тут відіграє організація і удосконалення форм і методів самостійної роботи студентів, яка привчає студента працювати в режимі самоосвіти і є ефективним способом підвищення наукового рівня студента. Тому з перших днів навчання у вузі потрібно привчати студента працювати в режимі самоосвіти. Самостійне набуття знань формує пізнавальний інтерес, виробляє у студента логічне мислення, яке в більшій мірі досягається шляхом доведення теорем та розв'язанням задач. В самостійній роботі студента велику роль відіграє регулярність заняттями математики і інтелектуальна витривалість. В системі засобів навчання підручник є основою, навколо якого ґрунтуються всі інші навчальні засоби.

Роботу над математичною літературою поряд з лекціями і практичними заняттями слід розглядати як один з дійових способів розвитку математичних здібностей і інтересу до математики взагалі.

На жаль, на сучасному етапі при опрацюванні теоретичного матеріалу студенти в кращому випадку використовують тільки посібник, складений викладачем, що читає лекції. Це приводить до того, що вони майже необізнані з класичною математичною літературою, праця над якою дає можливість одержати знання, які виходять за межі програми, оскільки неперервно зростає об'єм інформації, який значно перевищує можливості його передачі системою навчання. Тільки самостійна робота над літературою дасть можливість студенту, а потім і молодому спеціалісту, поповнювати свої знання. Забезпечення якісної освіти і творчого розвитку студента неможливе без навчально-книжкового комплексу.

Одним із основних курсів, що читаються на фізико-математичних факультетах, є математичний аналіз, який має невичерпні можливості для всебічного розвитку особистості, формування логічного мислення та творчого інтелекту студентів. При викладанні математичного аналізу повинна переважати прикладна спрямованість теорії, знайомство студентів з сучасними математичними методами розв'язання задач, зосереджувати увагу на роз'ясненні основних понять та фактів, а також прикладів їх застосування, розширювати діапазон задач від тренувальних до задач творчого характеру, розв'язання яких вимагає нешаблонного мислення.

Пошук ефективних форм навчання і усвідомлення необхідних якісних змін в освіті зумовило виникнення цілого ряду інноваційних парадигм в освіті. В Україні, як й в усьому світі, йде переорієнтація на методологію особистісно орієнтованого навчання. Нестандартний підхід до молодої людини ще більш важливий у вищій школі. Досить ефективні в цьому відношенні прямі контакти між викладачем і студентом, що може досягатися проведенням семінарських занять, на яких розглядаються теоретичні питання, ставляться проблемні ситуації, розглядаються пояснення і коментарі до нових понять, даючи їм по можливості фізичні інтерпретації та застосування. На семінарських заняттях можна розглядати задачі, які вимагають оригінальної думки, або можуть бути розв'язані різними прийомами і методами. При розв'язанні таких задач можна пропонувати студентам задавати один одному питання, а викладачу – спрямовувати думку в відповідному напрямі. Цим самим створюється процес індивідуального навчання, самореалізація особистості.

Так, наприклад, темою семінару може бути "Неявні функції та їх застосування", на якому розглядаються питання:

1) поняття неявної функції;
2) існування, неперервність і диференційованість неявної функції;
3) неявні функції, що визначаються системою рівнянь.

Контрольні питання і завдання:

1. Яка функція називається неявною? Наведіть приклад рівняння виду $F(x, y)=0$, що визначає неявну функцію і приклад рівняння, що не визначає неявну функцію.
2. Скільки неперервних неявних функцій виду $y=f(x)$ визначає рівняння $x^2-y^2=0$ в околі точки (0; 0)?
3. Сформулювати теорему про існування, єдність і неперервність неявної функції, що визначається рівнянням $F_y'(x, y)=0$.
4. Вивести формули диференціювання неявних функцій однієї і багатьох змінних.
5. Довести, що рівняння $x^2+y^2-5=0$ не визначає неявної функції у прямокутнику $\{(x, y): -1<x<1, 0\le y\le 2\}$.
6. Навести приклад, коли невиконання умови $F_y'(x, y)\neq 0$ не порушує існування і єдності неявної функції виду $y=f(x)$, що визначається рівнянням $F(x, y)=0$ в околі точки $(x_0; y_0)$.
7. Довести, що рівняння $x+y=0$ не визначає неявної функції в достатньо малому околі точки (0; 0). Яка умова не виконується в даному випадку?
8. Рівняння $|x|+y=0$ визначає в околі точки (0; 0) недиференційовану в точці $x=0$ функцію $y=-|x|$. Яка умова теореми не виконується?
9. Обчислити похідні $f'(0)$ і $f''(0)$ неявної функції $y=f(x)$, що визначається рівнянням $x^2+y^2-1=0$ і задовольняє умову $f(0)=1$, двома способами.
10. Довести, що рівняння $y+\frac{1}{2}\sin y-x=0$ визначає єдину неявну функцію виду $y=f(x)$, $x\in(-\infty; \infty)$, і знайти $f'(x), f''(x), f'(\pi), f''(\pi)$.
11. Знайти похідні першого і другого порядку неявної функції $y=f(x)$, заданої рівнянням $y-2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0$ двома способами.
12. Довести, що рівняння $z^3-xyz+y^2=16$ визначає в деякому околі точки (1; 4; 2) єдину неявну функцію виду $z=f(x, y)$ Знайти її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Впровадження модульно-рейтингової системи перевірки знань студентів також має певні можливості для вдосконалення математичної освіти.

Модульно-рейтингова система – це модель організації навчального процесу, яка ґрунтується на поєднанні модульних технологій та залікових освітніх одиниць. Ця система дає можливість перевірити знання студентів, розуміння теоретичного матеріалу, його застосування до розв'язування задач практичного характеру. Якщо в основу модульно-контрольної системи покласти принцип проблемної організації навчальної діяльності, то це може забезпечити розвиток розумових і творчих здібностей студентів.

Задачі, які пропонуються розв'язати в модулях, повинні супроводжуватись відповідями, щоб студент мав можливість проконтролювати себе.

Успішному виконанню завдань модуля будуть сприяти семінарські і практичні заняття з математики. Мета практичних занять полягає в удосконаленні методів розв'язання задач. Одним із шляхів формування вміння розв'язувати задачі є активізація пізнавальної діяльності студентів, систематизація знань теоретичного матеріалу, знаходження міжпредметних зв'язків.

Сьогодення вимагає розвитку творчої особистості. Тому при розв'язанні будь-якої проблеми на заняттях (розв'язування задачі, доведення теореми, дослідження одержаного розв'язку) важливо викликати у студента інтерес до дослідницьких навичок, логічного мислення, знаходження серед всіх можливих розв'язків задачі найкращого, виховувати в них здібність багато працювати. В процесі роботи можуть виникати труднощі, в подоланні яких допомагає викладач, підказуючи певні ідеї всій групі, або окремим студентам, які працюють самостійно. Мета розв'язання кожної задачі полягає у визначеності її особливостей, в пошуках оригінальних шляхів її розв'язку і в аналізі одержаного результату.

На практичних заняттях розв'язуються задачі, які роз'яснюють поняття, теореми і основні ідеї сучасного математичного аналізу, а також задачі, які вимагають здогадки, без якої задачу можна і не розв'язати. Систематичне розв'язування таких задач виробляє у студентів уявлення про глибокі і абстрактні поняття математичного аналізу.

Так, наприклад, при вивченні невласних інтегралів можна розглянути інтеграл $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{a+x}$. Наявність під знаком інтеграла функції $\frac{1}{a+x}$ наводить на думку скористатися тотожністю

$$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\cdots-\frac{x^{2n-1}}{a^{2n}}+\frac{x^{2n}}{a^{2n}(a+x)},$$

яку легко довести, якщо скористатися формулою суми членів геометричної прогресії. Підставивши під знак інтеграла замість $\frac{1}{a+x}$ його значення і скориставшись формулою $\int udv=uv-\int vdu$, одержимо формулу

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{1!}{a^2}+\frac{2!}{a^3}-\ldots-\frac{(2n-1)!}{a^{2n}}+\frac{\theta\cdot(2n)!}{a^{2n+1}},\ 0<\theta<1,$$

якою досить зручно користуватися для обчислення інтегралів в лівій частині, коли a додатне і велике.

При вивченні рядів, крім розвинень степеневих і тригонометричних, можна звернути увагу на розвинення в ряди раціональних дробів, наприклад,

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 - \pi^2} + \frac{2x}{x^2 - 4\pi^2} - \frac{2x}{x^2 - 9\pi^2} + ...,$$

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 4\pi n},$$

а пізніше показати, як вони застосовуються при обчисленні невласних інтегралів.

Література:

1. Національна доктрина розвитку освіти. Україна у XXI столітті // Педагогічна газета. – 2001. – Липень. – С. 4.
2. Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике. – т.2. – М., 1958. – 286 с.
3. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Справочное пособие. – К., 1985. – 527 с.
4. Шкіль М.І. Проблеми підготовки вчителів-предметників // Актуальні проблеми вивчення природничо-математичних дисциплін у загальноосвітніх навчальних закладах України. – Мат. Всеукр. конф. – Київ, 1999. – 75 с.

ПРО ОДИН СПОСІБ ВИКЛАДАННЯ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

І.М. Сулима, І.І. Ковтун, І.А. Нікітіна
м. Київ, Національний аграрний університет
ira@otblesk.com

Курс вищої математики на інженерних факультетах аграрного вузу включає як один із розділів аналітичну геометрію.

Цей розділ ми викладаємо після вивчення векторної алгебри, яка є також одним із розділів курсу вищої математики.

Відомо, що поняття векторної алгебри широко використовуються в курсах, пов'язаних з майбутньою спеціальністю студентів факультету механізації сільськогосподарського виробництва. Отже, поняття векторної алгебри доцільно вивчати не самі по собі, але маючи на увазі подальше його застосування.

Для того, щоб закріпити основні поняття векторної алгебри, з однієї сторони, і для того, щоб скоротити час на викладання основних понять аналітичної геометрії, з іншої сторони, ми викладаємо аналітичну геометрію на площині та в просторі, базуючись на векторах.

Спочатку розглядаємо векторно-параметричне рівняння прямої на площині.

Виводимо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Така постановка задачі є зрозумілою, відомою ще зі школи. Для виведення рівняння прямої використовуємо поняття колінеарності векторів – вектора, що з'єднує одну із заданих точок із довільною точкою на прямій та вектора, що проходить через дві задані точки, через які проходить шукана пряма, тобто точки, що лежать на цій прямій.

Поняття колінеарності векторів використовуємо і при виведенні рівняння прямої, що проходить через задану точку і має заданий напрямний вектор. Підкреслюємо, що координатами напрямного вектора можуть бути координати вектора, що з'єднує дві задані точки. Отримане рівняння називають канонічним рівнянням прямої.

Від канонічного рівняння прямої переходимо до параметричних рівнянь прямої. Нагадуємо, що параметричні рівняння ми отримували при розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

При виведенні рівняння прямої, що проходить через задану точку і має заданий нормальний вектор, використовуємо умову перпендикулярності векторів – нормального вектора прямої і вектора, що з'єднує задану точку і довільну точку прямої. Згадуємо, що умовою перпендикулярності векторів є умова рівності нулю їх скалярного добутку.

Із останнього рівняння переходимо до загального рівняння прямої і детально розглядаємо частинні випадки цього рівняння.

Рівняння прямої у відрізках на осях дістаємо, зробивши прості перетворення. Вказуємо, що рівняння прямої у такому вигляді є зручним для побудові прямої.

Рівняння прямої із заданим кутовим коефіцієнтом, що проходить через задану точку, отримуємо, зробивши прості перетворення у рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Перетворюючи це рівняння далі, дістаємо рівняння прямої із заданим кутовим коефіцієнтом, що відтинає на осі Oy заданий відрізок. Останнє рівняння прямої розглядали у школі. Зрозумілим і природнім стає означення кутового коефіцієнта прямої. Кутовий коефіцієнт визначаємо і із загального рівняння прямої.

Далі розглядаємо взаємне розташування прямих на площині. Із умови колінеарності векторів дістаємо умови паралельності прямих, заданих загальними рівняннями або рівняннями із заданим кутовим коефіцієнтом.

Із умов перпендикулярності векторів маємо умови перпендикулярності прямих. При цьому із умови перпендикулярності прямих, заданих загальними рівняннями, зробивши прості перетворення, дістаємо умову перпендикулярності прямих, заданих рівняннями із відомими кутовими коефіцієнтами, які розглядали у школі.

Точку перетину прямих знаходимо, розв'язуючи систему двох алгебраїчних рівнянь з двома невідомими, які визначають задані прямі. Кут між заданими прямими знаходимо, визначивши спочатку косинус кута між напрямними векторами заданих прямих як відношення скалярного добутку цих векторів до добутку модулів напрямних векторів.

Усі наведені означення застосовуємо при знаходженні елементів трикутника.

- Для знаходження рівнянь сторін трикутника використовуємо рівняння прямих із заданим напрямним вектором.
- Для знаходження рівняння висоти трикутника використовуємо рівняння прямої із заданим нормальним вектором, який пропорційний напрямному вектору сторони, на яку опущена висота.
- Для знаходження медіани трикутника використовуємо рівняння прямої, що проходить дві задані точки – вершину трикутника і середину протилежної сторони.
- Кут у трикутнику розглядаємо як кут між двома векторами, що мають спільний початок – вершину трикутника, і використовуємо відповідну формулу для знаходження косинуса кута між векторами.
- Для знаходження бісектриси кута трикутника використовуємо властивість бісектриси: бісектриса ділить кут навпіл. Знаходимо орти векторів, що мають початок у вершині кута. Напрямний вектор бісектриси напрямлений по діагоналі ромба, побудованого на цих ортах, тобто дорівнює сумі ортів. Далі використовуємо рівняння прямої, що має заданий напрямний вектор і проходить через задану точку – вершину трикутника.

Проаналізувавши, які елементи трикутника знаходимо, стає зрозумілим доцільність саме такого використання рівнянь прямої. Напрямний вектор відповідної сторони трикутника використовуємо: для знаходження рівняння цієї сторони, для знаходження висоти, опущеної на цю сторону, для знаходження рівняння бісектриси відповідного кута.

Отже, при вивченні теми: “Пряма на площині” використовуємо такі поняття векторної алгебри:

– знаходження координат вектора, якщо задано координати початку і кінця вектора;
– умову колінеарності векторів: відповідні координати пропорційні;
– умову перпендикулярності векторів: скалярний добуток перпендикулярних векторів дорівнює нулю;
– знаходження косинуса кута між векторами ;
– знаходження ортів векторів;
– знаходження суми векторів, заданих у координатній формі.

Таке використання понять векторної алгебри показує їх застосування безпосередньо у вищій математиці і закріплює знання основних понять, необхідних для вивчення студентами дисциплін, пов’язаних з їх майбутньою спеціальністю.

При такому викладенні аналітичної геометрії студенти добре засвоюють і аналітичну геометрію, і векторну алгебру.

Література:

1. Сулима І.М., Ковтун І.І., Радчик І.А Вища математика. Частина перша. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія. – К.: Видавництво НАУ, 2003. – 216 с.
2. Ковтун И.И., Ковтун С.С. Изложение раздела «Аналитическая геометрия» // IX Международная конференция «Математика. Образование. Экономика. Экология». –Чебоксары, 2001. – 139 с.

ТЕОРІЯ ПІЗНАННЯ ЯК МЕТОДОЛОГІЧНА ОСНОВА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Н.А. Тарасенкова
м. Черкаси, Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького
ntaras@list.ru

Сучасні світові тенденції щодо глобалізації суспільного розвитку, переходу людства від індустріальних до науково-інформаційних технологій, коли пріоритетними стають інтелектуальна власність, знання як субстанції виробництва, спроможність усіх членів суспільства до усвідомленої самозміни й реалізації себе в умовах стрімкого нарощування інформації, визначають необхідність змін й у сфері освіти.

Фундаментальне значення для побудови педагогічних теорій навчання і виховання та відповідних методичних систем мають основоположні тези теорії пізнання [1; 2; 3; 4 та ін]: про матеріальну обумовленість пізнання та його соціальний характер; про єдність діалектики, логіки й теорії пізнання; про єдність теорії і практики; про те, що пізнання світу окремою людиною опосередковано всесвітньо-історичним процесом розвитку знання (принцип історизму); про активність людського пізнання як специфічної форми відображення дійсності.

Відображення як атрибут матерії полягає в її спроможності розвивати певні внутрішні стани у відповідь на зовнішні впливи, а також відтворювати цими станами характеристики зовнішнього впливу. Процес відображення – це перебудова, перетворення внутрішніх характеристик об’єкта у напрямі протидії, компенсації зовнішніх впливів на основі відтворення копії цих впливів. Продукт відображення – це форма зв’язку даного об’єкта з його оточенням, що забезпечує йому відносно стійке існування у нових, відображених об’єктом умовах. Вищою формою відображення є людська психіка, свідомість, які виникають у ході розвитку особливого типу взаємодії, що пов’язує людину зі світом. Цей тип взаємодії (скоріше, впливу людини на світ), що називається діяльністю (О.М. Леонтьєв), з одного боку, є головною формою реалізації активного ставлення людини до дійсності, а з іншого – породжує нові, все більш високі рівні активності.

Активність виступає як одна з характеристик людської діяльності, що виражає її здатність до саморозвитку, саморуху через виконання суб’єктом цілеспрямованих творчих предметних дій, що перетворюють дійсність. При цьому цілі й засоби діяльності черпаються не із безпосередньо даної ситуації і не є абсолютно спонтанними. Вони, як правило, мають джерелом події, що далеко віддалені у часі й просторі від початку дії, тобто виростають із широкого життєвого контексту, основний зміст якого утворюють відношення з іншими людьми. У цьому полягає філософський принцип активності.

Як зазначається у філософії (М.С. Каган, О.П. Огурцов, Е.Г. Юдін та ін.), спираючись на принцип активності, можна подолати підхід до людини як такої істоти, що лише пристосовується до навколишнього середовища, а також правильно оцінювати перетворювальний, творчий характер людської діяльності.

Багатоплановість поняття людської діяльності визначається тим, що сама родова сутність людини знаходить у ньому своє вираження [5, с. 93]. Філософія дає такі характеристики діяльності, як соціальність, предметність, доцільність, свідомість, опосередкованість й продуктивність. Основними компонентами діяльності є суб'єкт, об'єкт і самий процес активності, що виражається у «тому чи іншому способі оволодіння об'єкта суб'єктом чи в установленні суб'єктом комунікативної взаємодії з іншими» [6, с. 46]. Суб'єктом діяльності може бути конкретний індивід, соціальна група чи суспільство в цілому. В ролі об'єкта може виступати природний предмет, предмет культури, соціальний інститут, ідеальний об'єкт, інша людина й самий суб'єкт діяльності. В останньому випадку суб'єкт і об'єкт діяльності збігаються, відбувається своєрідне роздвоєння суб'єкта діяльності, що характерно для діяльності самопізнання чи самозмінювання.

На основі фіксації одного з трьох основних компонентів діяльності у філософії виділяють такі базисні види людської діяльності, як перетворювальну, пізнавальну, ціннісно-орієнтаційну і комунікативну, а також художню діяльність в ролі органічного синтезу всіх чотирьох базисних видів [6].

Особливий інтерес для нас являє філософський аналіз пізнавальної діяльності.

Філософія розглядає пізнання як особливу діяльність відображення. У пізнавальній діяльності активність суб'єкта, що спрямована на об'єкт, не змінює його, а лише відображає, копіює, тобто пізнавальна діяльність спрямована на побудову адекватного образу реальності. Правильне послідовне розуміння пізнавальної (відображувальної) діяльності можливе лише на основі визнання в якості первинного не пізнавального ставлення людини до світу, а практичної перетворювальної діяльності. Вказана природа пізнання дозволяє виділити в ньому наступні аспекти активності.

1. Процес пізнання, навіть найабстрактнішого, ніколи не відривається повністю від практичного впливу на предмети зовнішнього світу та їх реальної зміни у ході пізнання.

2. Продукти пізнання (знання) спрямовують і регулюють практичну діяльність суб'єкта, забезпечуючи їй цілеспрямований характер, зокрема, за рахунок передбачення результатів й відбору серед них тих, що потрібні суб'єкту.

3. Саме пізнання набуває характеру діяльності з усіма специфічними рисами.

4. Пізнавальна діяльність може виступати й реально виступає в ролі «замінника» практичної діяльності не тільки окремого індивіда, але й суспі-

льства в цілому. Як зазначав О.М. Леонтьєв [7, с. 66], активність пізнання у такому її аспекті виражається у спроможності людини спиратися під час регулювання діяльності на широкий соціальний досвід, загальнолюдську практику, й долати вузькість власної практичної взаємодії зі світом, обмеженість свого досвіду. Саме через пізнання, через засвоєння суспільно вироблених засобів діяльності практика входить до індивідуальної діяльності. Активність пізнання, що спирається на засвоєння результатів суспільної практики, спроможна подолати неадекватність результатів індивідуальних практичних чи пізнавальних дій, поправити їх у відповідності з принципом правдоподібності.

5. Оскільки норми й засоби пізнавальної діяльності мають соціальну природу й засвоюються суб'єктом як деяке дане й об'єктивно існуюче, і сама потреба їх засвоєння має соціальну природу, то найвищим вираженням активності пізнавального відображення є його соціальна детермінація у протилежність до зовнішніх впливів й станів організму у тварин. Активний характер пізнавального відображення пов'язаний також із такими його особливостями, як вибірковість, спрямованість у майбутнє (випереджальне відображення), присутність моторних компонентів, наявність системи власних ресурсів енергії, підпорядкованість самої пізнавальної діяльності певному попередньому плану, незбігу пізнавального образу з його джерелом, чи навпаки адекватність образу. Результат у формі деякого передзнання може бути даний суб'єкту як неповне, імовірнісне й схематичне знання, що набуває свого уточнення в ході реалізації пізнавальної діяльності.

З позицій загальнофілософського розуміння сутності й структури пізнання [2, 4], вихідні знання відкриваються людині у чуттєвому пізнанні – відчуттях, сприйняттях, уявленнях. Раціональне пізнання (мислення) не зводиться до простого підсумовування чи механічного перетворення даних органів відчуттів. Результати розумової діяльності не тільки дають нове знання, яке безпосередньо не міститься у чуттєвих даних, але й безпосередньо впливають на структуру і зміст пізнання. Через це ті емпіричні дані, з якими має справу наукове пізнання, утворюються у результаті використання теоретичних положень для опису змісту чуттєвого досвіду й передбачають ряд теоретичних ідеалізацій. У ході теоретичного мислення відбувається сходження від абстрактного до конкретного. Поряд із цим чуттєвий досвід розуміється не як пасивне відбиття й закарбовування, а як момент активної практичної, чуттєво-предметної діяльності.

Формами відображення об'єктивної дійсності у пізнанні є категорії та закони діалектики. Як вчить діалектика, в об'єктивній дійсності все взаємопов'язане – якщо явища та їх сторони, перебуваючи в універсальній взаємодії, взаємно проникають й за певних умов переходять один в одного, то і поняття, через які людина пізнає навколишній світ, неминуче повинні знаходитися між собою у строго визначеному закономірному взаємозв'язку, їм має бути притаманна гнучкість, що доходить до переходу одних понять в інші, до тотожності протилежностей [8, с. 5].

У побудові системи категорій діалектика виходить з положення про категорії як щаблі розвитку пізнання (у цьому положенні виражається єдність історичного і логічного), а також з принципу тотожності діалектики, логіки й теорії пізнання. Вихідними категоріями визнаються категорії матерії, свідомості й практики. У діалектичній системі категорій їх доповнюють: категорії «окреме», «зв'язок» і «рух», перші дві з яких являють собою початкову стадію розвитку пізнання і практики, а усвідомлення взаємозв'язку і взаємодії між предметами неминуче спричинює усвідомлення їх змін, що є рухом; категорії одиничного, особливого і загального; категорії «якість», «кількість» і «міра»; категорія причинності; категорії «необхідність» та «випадковість», розрізнення яких у процесі пізнання спричинює формулювання законів як особливих форм вираження необхідних зв'язків та відношень; категорії «зміст» і «форма», в яких відображається взаємозв'язок і взаємозалежність внутрішньої структури змісту та його зовнішніх проявів, й у взаємодії яких відбувається розвиток матерії як рух через боротьбу змісту і форми, скидання старої форми й установлення нової; категорії сутності та явища, з якими безпосередньо пов'язані поняття діалектичної суперечності, аналізу і синтезу, діалектичного заперечення, у процесі якого відбувається сходження від абстрактного до конкретного – «рух не тільки від нижчого до вищого, але й від менш багатого, одностороннього й у цьому смислі абстрактного змісту, до все більш і більш багатого многогранного конкретного змісту» [8, с. 317]; категорії дійсного й можливого.

В організації навчання математичних дисциплін пізнавальну діяльність студентів потрібно будувати на засадах діалектики пізнання, враховувати усі її закони й закономірності.

Учіння є відображувально-перетворювальною діяльністю, оскільки спрямовано на перетворення особистого досвіду того, хто навчається, та його розвиток засобами пізнання, самопізнання. Пізнавальний та перетворювальний компоненти цієї діяльності невіддільні й взаємообумовлені. Перетворювальний характер учіння пов'язаний з активністю того, хто навчається, як суб'єкта діяльності. Активність виступає внутрішнім регулятором навчально-пізнавальної діяльності й розкривається в процесах саморуху, саморегуляції, самореалізації особистості того, хто навчається, тобто необхідно детермінується переважанням внутрішніх умов над зовнішніми.

Якісний аналіз активності у пізнавальній діяльності доцільно здійснювати, виходячи з діалектичної єдності «активність – пасивність» шляхом співвіднесення мотиву й мети діяльності. Так, Д.Б. Богоявленська виділяє [9] такі рівні активності: 1) «стимульно-продуктивний» («пасивний») – мотив діяльності є зовнішнім і не збігається з її метою; 2) «евристичний» – провідним мотивом діяльності є пізнавальна потреба, діяльності властива ініціативність; 3) «креативний» – найбільш високий рівень активності, який виражається у пізнавальному цілепокладанні.

Приймаючи за основу таку класифікацію, вважаємо за необхідне уточнити її у відповідності до особливостей діяльності учіння та специфіки навчального предмета «математика».

У зв'язку з тим, що в навчанні математики мета навчально-пізнавальної діяльності задається ззовні за допомогою змісту навчання, студент може прийняти або не прийняти цю мету, прийняти її як зовні необхідну (змушену) або як внутрішньо необхідну (особистісно значущу). Крім того, меті як образу продукту майбутньої діяльності студент може надавати як ситуативного, так і перспективного значення. Оскільки свідома мета як закон визначає спосіб і характер дій людини [10, с. 189], то ставлення студента до мети діяльності детермінує реалізацію кожного компонента активності (мотиваційного, змістово-операційного і вольового) та діяльності в цілому.

У процесі усвідомлення мети вивчення певного математичного змісту й оцінки можливостей її досягнення у студентів формуються мотиви майбутньої діяльності. Серед них доцільно виділити: 1) *мотиви обов'язку* – мета приймається вимушено, значення продукту діяльності для саморозвитку не оцінюється; 2) *мотиви особистого успіху* – мета приймається як внутрішньо необхідна, однак продукт навчання оцінюється лише як ситуативно-значущий для студента, тобто розглядається як необхідний засіб для задоволення потреб, пов'язаних скоріше із самоствердженням, аніж із самопізнанням і саморозвитком; 3) *пізнавальні мотиви* – мета навчання є особистісно значущою для студента, продукт майбутньої діяльності оцінюється як перспективно значущий, тобто як необхідний для самопізнання і саморозвитку та значущий настільки, що виникає потреба надійно його зберегти для активного використання в наступному.

Якщо ж у навчанні математики мета навчально-пізнавальної діяльності не усвідомлюється, а, отже, й не приймається, або усвідомлюється, але не приймається, то має місце не навчання, як цілеспрямований процес перетворення особистого досвіду студента, а його імпульсивна поведінка, спрямована на «зняття» дискомфорту, що створюється зовнішніми й неприйнятними для нього умовами. У такій ситуації студент також виявляє активність, яка може бути виражена в поведінці, що зовні імітує навчально-пізнавальну діяльність, або актах асоціальної поведінки. На відміну від навчально-пізнавальної, таку активність доцільно назвати *поведінковою*.

Прийняттю або неприйняттю мети студентом передує оцінка можливості її досягнення, що відбувається як би на двох рівнях: попередньому й детальному. Попередня оцінка (прикидка) досяжності мети відбувається неусвідомлювано. В її основі – миттєве зіставлення, з одного боку, уявлення студента про необхідні умови для досягнення мети (можливо, неповного або неправильного) та, з іншого боку, його уявлення про власні можливості (можливо, неадекватного). Результатом попередньої оцінки є установка (позитивна або негативна), що виявляється у ставленні до навчання. Негативна установка є одним із джерел виникнення поведінкової активності. Як показали опитування, які ми проводили на різних етапах дослідження, при вивченні конкретного матеріалу з математики студенти, що мають лише початковий рівень навчальних досягнень (так звані «слабкі студенти») найчастіше зарані впевнені у тому, що опанувати цей матеріал їм не під силу.

Детальна оцінка досяжності мети здійснюється в процесі виділення й усвідомлення необхідних умов і можливих шляхів досягнення мети, їх зіставлення з реальними або потенційними можливостями студента. Недооцінка потенційних можливостей веде до неприйняття мети та, як наслідок, до проявів поведінкової активності. Ще одне джерело такої активності студента може виникнути тоді, коли студент, який спочатку переоцінив свої потенційні можливості, у ході роботи над навчальним матеріалом з математики втрачає впевненість у досяжності мети навчання й відмовляється від неї. У зв'язку з цим, одна з перших вимог, якій повинна підкорятися організація процесу навчання математики, пов'язана з необхідністю створення об'єктивних умов, що запобігають появі поведінкової активності студентів.

Якщо при вивченні конкретного математичного матеріалу мета усвідомлюється й приймається студентом як досяжна, то його навчально-пізнавальна діяльність стимулюється комплексом мотивів, у якому наявні мотиви кожної із зазначених вище груп. Домінування мотивів тієї чи іншої групи породжує відповідний рівень пізнавальної активності.

Так, мотиви обов'язку, виступаючи зовнішніми відносно мети діяльності, породжують *стимульно-продуктивний рівень активності* студентів.

Мотиви особистого успіху також є зовнішніми стосовно мети діяльності й також породжують стимульно-продуктивний рівень активності. Однак для задоволення потреб, що відповідають цим мотивам, студент з необхідністю використовує засоби самопізнання і саморозвитку. Тим самим він свідомо змінює свій досвід, а значить керується пізнавальними мотивами, хоча і не піклується про довгострокове збереження новоутворень для їхнього подальшого використання. Іншими словами, діяльність студента, домінуючими стимулами якої виступають мотиви особистого успіху, в окремі моменти набуває характеру то евристичної, то стимульно-продуктивної активності. Для адекватного відображення зв'язку між терміном і сутністю активності, що стимулюється мотивами особистого успіху, такий рівень активності доцільно назвати *ситуативно-евристичним*.

Якщо діяльність студента при вивченні математики стимулюється пізнавальними мотивами, то його активність може проявлятися як на *евристичному*, так і на найвищому, *навчально-креативному* рівні. Істотна відмінність між ними виявляється у ставленні студента до змісту продукту діяльності. У першому випадку зміст та його обсяг оцінюється як необхідний і достатній, у другому – як необхідний, але не достатній. Сутність розходжень між стимульно-продуктивним і ситуативно-евристичним рівнями активності виражається у ставленні студента до якості продукту діяльності (міри його відповідності еталону). Таке ставлення може бути індиферентним або неіндиферентним. Різниця між ситуативно-евристичним й евристичним рівнями активності у навчанні математики виявляється у ставленні студента до необхідності провести корекцію продукту (довести його до відповідності еталону). Ставлення студента може бути негативним, як до змушеного акту, або позитивним, як до необхідного акту.

У загальному вигляді зведені дані подані в таблиці 1.

Таблиця 1.

Мотиви учіння, активність та її прояви.

Домінуючі мотиви	**Рівень активності**	**Зміст продукту оцінюється як**	**Ставлення до якості продукту**	**Ставлення до корекції**
обов'язку	*стимульно-продуктивний*	необхідний і достатній	індиферентне	негативне, як до вимушеного акту
особистого успіху	*ситуативно-евристичний*	необхідний і достатній	неіндиферентне	негативне, як до вимушеного акту
пізнавальні	*евристичний*	необхідний і достатній	неіндиферентне	позитивне, як до необхідного акту
навчально-пізнавальне цілепокладання	*навчально-креативний*	необхідний, але недостатній	неіндиферентне	позитивне, як до необхідного акту

Оскільки навчання є полімотивованим процесом, а домінування мотивів тієї чи іншої групи не абсолютне й не постійне, тобто в будь-який момент навчального процесу може відбутися переорієнтування в мотиваційній сфері студента у залежності від його ставлення до мети діяльності в даний момент, то і прояв активності на різних рівнях є динамічним процесом, тобто можливі переходи з більш низького рівня активності на більш високий її рівень і навпаки, аж до проявів поведінкової активності.

Отже, друга вимога до організації навчання математики відображає необхідність створення таких об'єктивних умов, що запобігають переходу активності студента з більш високого рівня на більш низький і сприяють послідовному переходу активності студента до найвищого її рівня.

Виконання цієї вимоги є не що інше, як забезпечення об'єктивних передумов для реалізації принципу активності у навчанні. Цей принцип припускає наявність не тільки зовнішніх (об'єктивних) умов, що створюються викладачем, але й внутрішніх (суб'єктивних) умов, властивих студентові, й вимагає превалювання внутрішніх умов над зовнішніми. У зв'язку з тим, що обмежені можливості викладача не дозволяють йому одними лише власними зусиллями забезпечити таку перевагу, виникає необхідність висунути ще одну вимогу до організації процесу навчання математики. Її сутність полягає в тому, що зовнішні умови повинні забезпечити можливість студентам здійснювати, попередньо навчившись того, самостійну постановку цілей, планування, самоорганізацію й самоконтроль власної навчально-пізнавальної діяльності.

Методологічною основою реалізації висунутих вимог до побудови навчального процесу, що забезпечує цілеспрямований позитивний вплив на характер активності в пізнавальній діяльності студентів та результативність навчання математичних дисциплін, виступає теорія пізнання. Психолого-педагогічну базу для організації такого навчання становлять психологічні принципи самодіяльності, самоорганізації, розвитку, колективізму, рольової участі, відповідальності, психологічного забезпечення, а також дидактичні принципи, серед яких особливого значення набувають принцип свідомості у навчанні та принцип доступності.

Література:

1. Гегель Г.В. Ф. Наука логики: В 3 т. / Отв. ред. и авт. вступ. статьи М.М. Розенталь. – М.: Мысль, 1970–1972. – Т. 1: Учение о бытии. – 501 с. – Т. 2: Учение о сущности. – 248 с. – Т. 3: Учение о понятии. – 374 с.
2. Копнин П. В. Диалектика как логика и теория познания. Опыт логико-гносеологического исследования. – М.: Наука, 1973. – 324 с.
3. Рассел. Б. Человеческое познание: Его сфера и границы: Пер. с англ. – К.: Ника-Центр, 1997. – 556 с.
4. Філософія: Підруч. для студ. вищ. закладів освіти / І.В. Бичко (кер.), І.В. Бойченко, М.І. Бойченко та ін. – К.: Либідь, 2001. – 408 с.
5. Маркс К. Экономическо-философские рукописи 1844 года // Маркс К., Энгельс Ф. Соч. – 2-е изд. – Т. 42. – С. 41-174.
6. Каган М.С. Человеческая деятельность: Опыт системного анализа. – М.: Политиздат, 1974. – 328 с.
7. Леонтьев А.Н. Деятельность. Сознание. Личность. – М.: Политиздат, 1975. – 304 с.
8. Шептулин А.П. Система категорий диалектики. – М.: Наука, 1967. – 376 с.
9. Богоявленская Д.Б. Интеллектуальная активность как проблема творчества. – Ростов: Изд-во Ростов. ун-та, 1983. – 173 с.
10. Маркс К. Капитал // Маркс К., Энгельс Ф. Соч. – 2-е изд. – Т. 23. – 807 с.

ГЕОМЕТРО-ГРАФИЧЕСКИЙ КРЕАТИВ

Д.И. Ткач
г. Днепропетровск, Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры

Постановка задачи. Показать плодотворность применения естественнонаучного принципа системности в понимании природы как реальных, так и воображаемых объектов в процессе их геометро-графического моделирования при изложении системной начертательной геометрии [1, с. 81-89], основной целью которого является формирование и развитие профессионального конструктивно-композиционного, т.е., творческого мышления.

Такая постановка задачи определена как уже полученными креативными результатами в хорошо изученных разделах школьного курса евклидовой и вузовского курса начертательной геометрий, так и уверенностью в том, что последовательное внедрение принципа системности в школьный учебный процесс повысит интерес учащихся к изучаемым дисциплинам и, тем самым, в большей мере подготовит их к творческому пониманию вузовских дисциплин.

Такая уверенность основана на многолетней констатации крайне низкого уровня геометро-графической грамотности большинства первокурсников, желающих стать инженерами-строителями, механиками, технологами и даже архитекторами. Ведь у всех этих специалистов – созидателей материальных и духовных ценностей, основным средством достижения их целей является, наряду с вербальным и аналитическим, – геометро-графическое или изобразительное моделирование того, чего нет, но что должно быть создано на благо человека. Естественно, что процедура такого моделирования не мыслима без ясного и однозначного представления о том, из каких элементов будет состоять проектируемый объект и какими связями и отношениями эти элементы будут интегрироваться в единое целое. Формирование способности к такому представлению должно начинаться в начальных классах средней школы, закрепляться в старших классах и, развиваясь дальше, уже творчески применяться в вузе. Ведь принцип системности универсален и может служить концептуальной основой всех естественных учебных дисциплин – физики, химии, биологии, ботаники, географии, недавно «реабилитированной» астрономии и других наук, изучающих устройство, конструкцию или структуру своих системных объектов исследования.

Парадоксальным является факт необязательного изучения в школе такого учебного предмета как черчение и, якобы, по этой причине, отсутствия вступительных экзаменов по черчению на инженерные и, в некоторых вузах, на архитектурные специальности. Ссылка на компьютерную графику как альтернативу ручному черчению несостоятельна в том плане, что компьютер, как очередное техническое средство повышения производительности интеллектуального труда, эффективен для использования только *образованным* сознанием. И одним из основных элементов этого образования является высокий уровень геометро-графической грамотности, оптимально сочетающий в себе рациональность её геометричности и эмоциональность её изобразительности. Ведь гармоничное развитие именно этих двух начал в воспитании молодого человека в процессе его обучения как в школе, так и в вузе является одной из основных целей педагогики средней и высшей школ [2].

При этом роль умения чертить, т.е., графически грамотно моделировать геометрическое представление о проектируемом объекте трудно переоценить, так как уровень проявленного исполнительского мастерства однозначно отражает уровень технической грамотности, художественного вкуса, обязательности, аккуратности, точности в работе исполнителя, что является предметом воспитательно-педагогического интереса преподавателя. Эти соображения актуализируют роль и важность геометрии и черчения в школе, начертательной геометрии и инженерной графики в вузе и обязывают искать и находить пути их методологической и методической преемственности. Одним из таких путей является практическая реализация принципа системности, эффективность которой проявляется в креативности некоторых геометрических результатов, получаемых в результате точных графических построений при помощи линейки и циркуля. Требование точности или экзактности графических построений является обязательным, ибо то, что построено неточно, построено неправильно [3].

Первым примером может служить графическая технология деления окружности на 5, 7, 9 частей (рис. 2 *б-г*) на основе использования графических конструкций её деления на 3 и 4 части в качестве ключевых (рис. 1 *а,б*).

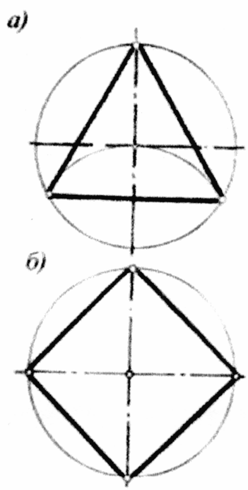


Рис. 1

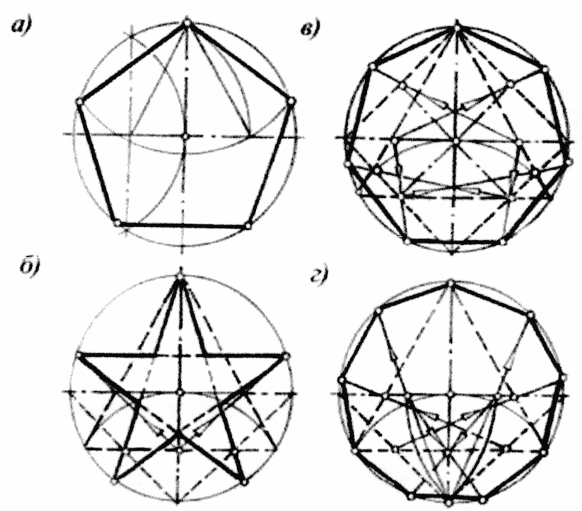


Рис. 2

На рис. 2*а* показана схема построения правильного пятиугольника Альбрехта Дюрера, содержащая операцию получения его стороны и её рутинного откладывания. На рис. 2*б* на основе использования ключевых фигур получен золотой треугольник с основанием в 2 и высотой в 3 единицы и, тем самым, получены сразу три вершины искомой пентаграммы, а две другие определились графически (рис.). Реализация мысли о том, что закономерная система имеет закономерную структуру, привела к схемам построения правильных 7- и 9-угольника без операции откладывания равных отрезков, одновременно расширив представление о природе их структур.

Если хорошо изученный произвольный разносторонний остро или тупоугольный треугольник ABC (рис. 3) представить как графическую систему трёх конкурентных и компланарных отрезков-сторон, то оказывается, что, несмотря на её «произвольность», часть ограниченного ею «картинного пространства» имеет соответственно строго закономерную и не до конца изученную структуру.

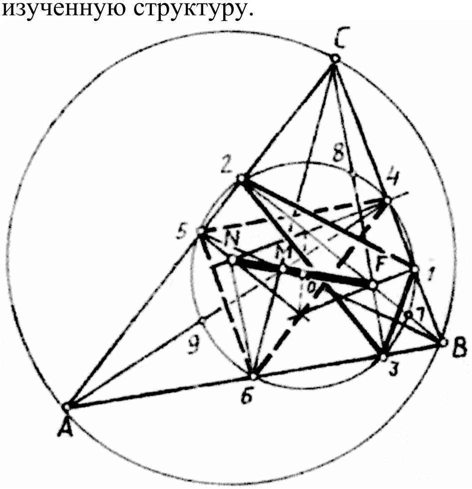


Рис. 3.

К числу хорошо изученных элементов этой структуры и связей между ними относятся её замечательные линии, точки и фигуры: высоты, медианы, медиатриссы, биссектрисы, ортоцентр F, центр тяжести M и центр описанной окружности N, расположенные на прямой Эйлера, середина *o* которой равноудалена от середин сторон треугольника ABC и оснований его высот и поэтому является центром окружности Фейербаха или окружности 9 точек, а также срединный 456 и ортотреугольник 123 (рис. 3).

Рассматривая особенности позиционного расположения перечисленных элементов (рис. 4), замечаем, что:

1. Точки 7, 8, 9 пересечения окружности Фейербаха с высотами треугольника ABC в серединах расстояний его вершин до ортоцентра F являются вершинами треугольника 789, подобного данному и конгруэнтного срединному, но повернутому относительно него на 180° и поэтому названным *антисрединным.*

2. Точки D, E, K пересечения продолжения сторон срединного и ортотреугольника, вершины которых лежат на смежных сторонах данного треугольника, являются вершинами *ортосрединного* треугольника DEK, стороны которого при продолжении проходят через вершины A, B, C данного треугольника.

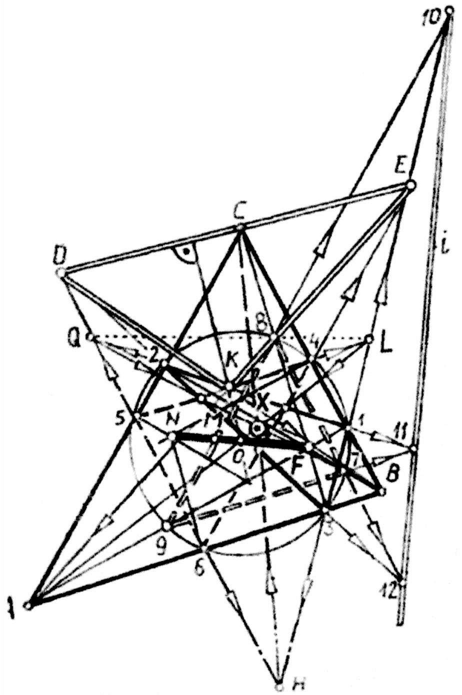


Рис. 4

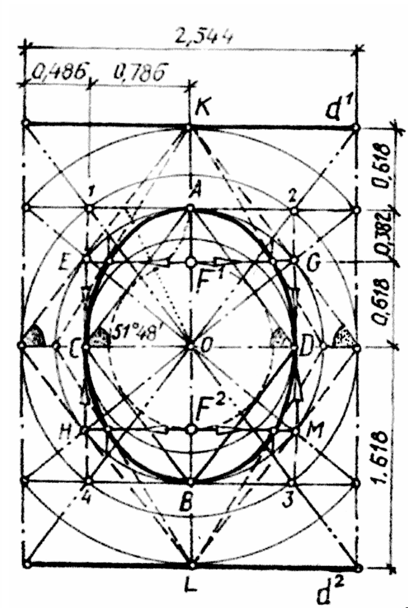


Рис. 5

3. Высота, опущенная из вершины K на сторону DE ортосрединного треугольника DEK, при продолжении проходит через центр *o* окружности Фейербаха.

4. Точки L, Q, H пересечения сторон срединного и ортотреугольниа, вершины которых лежат на несмежных сторонах данного треугольника, инцидентны прямым, проходящим через вершины A, B, C и соответственные вершины фигуры наложения срединного и ортотреугольника и пересекающимся в некоторой точке X, природа которой требует изучения.

5. Точки 10, 11 и 12 пересечения сторон антисрединного треугольника, соответственных сторонам срединного, со сторонами ортотреугольника, располагаются на одной прямой *i* как оси гомологии между этими треугольниками при центре гомологии в ортоцентре F треугольника ABC, и др.

В целом графическая конструкция, приведенная на рис. 4, содержит несколько конфигураций Дезарга. Если точки H, Q, L принять за вершины некоторого треугольника, то он будет гомологичен треугольнику ABC с центром гомологии в точке X. При этом ось гомологии определится точками пересечения сторон AB и QL, AC и HL далеко за пределами чертежа. Подобие антисрединного и исходного треугольников говорит об их гомологичности при несобственной оси и собственном центре F.

Известно, что конструктивно центр гомологии изображает вершину пирамиды, поверхность которой пересекается гранями двугранного угла по соответственным в этой гомологии фигурам, а ось гомологии является ребром этого двугранного угла. Это обстоятельство, наряду с другими, открывает возможность дальнейшего синтетического исследования структуры произвольных плоских фигур путем их пространственного истолкования, что представляется плодотворным, так как даёт креативные результаты.

Если объектом синтетического исследования принять графическую конструкцию получения эллипса по его заданной большой полуоси AO, разделенной фокусом F^1 в крайнем и среднем отношении (рис. 5), то получим гармонично упорядоченную геометро-графическую систему, расположение конструктивных элементов которой метрически подчиняется значениям рядов золотой пропорции и их производным. Так, отношение большой полуоси эллипса к малой составляет 1**:**0,786 или $1: \sqrt{0.618}$, расстояние от вершин A и B до оснований K и L директрис d^1 и d^2 равно расстоянию от фокусов эллипса до центра *о,* а габаритный прямоугольник, описанный вокруг полученного эллипса, состоит из 8 прямоугольных треугольников Прейса, длины сторон которых равны значениям чисел золотого ряда**:** 0,786, 1,000, 1,618. Отличительной особенностью этой конструкции является то, что 4 треугольника Прейса, вписанные в полученный эллипс, попарно образовали два равнобедренных треугольника, геометрические параметры которых повторяют параметры профиля пирамиды фараона Хеопса. Если же два треугольника Прейса соединить их гипотенузами, то получится 4-угольник с двумя прямыми углами (например, KEOG) или А-ромб И.Ш. Шевелёва, структурно описывающий объекты естественной геометрии [4, с. 47]. Перечисленные обстоятельства дали основание назвать полученный эллипс *золотым.* Существование золотого эллипса вызвало вопрос о существовании золотой гиперболы, который разрешился положительно (рис. 6).

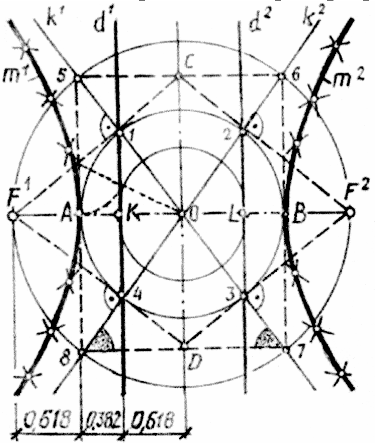


Рис. 6

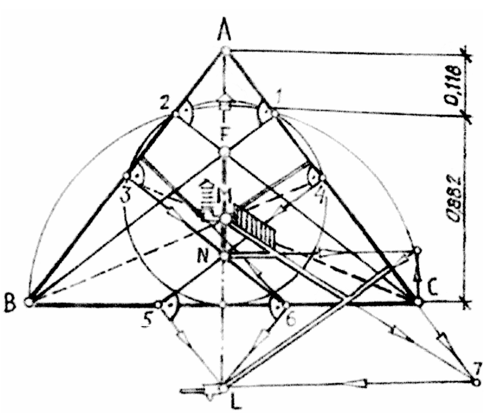


Рис. 7

Для графического построения золотой гиперболы необходимо:

1. Разделить действительную полуось ОА гиперболы при помощи треугольника Дюрера на два неравных отрезка АК и КО, длины которых относятся как 0,382 : 0,618;

2. Точку К принять за основание левой директрисы d^1 и циркулем построить симметричную ей точку L, как основание правой директрисы d^2.

3. Радиусом, равным длине действительной полуоси провести окружность, которая пересечет директрисы d^1 и d^2 в точках 1, 2, 3, 4, попарно определяющих асимптоты k^1и k^2 .

4. Фокусы F^1 и F^2 строятся как точки пересечения с действительной осью прямых, перпендикулярных к асимптотам в точках их пересечения с директрисами.

5. Ветви гиперболы m^1 и m^2 строятся по точкам традиционной графической технологией [5, с. 166].

Отличительной особенностью графической структуры золотой гиперболы также, как и золотого эллипса, является наличие в ней профилей пирамиды фараона Хеопса, входящих в состав А-ромбов И.Ш. Шевелёва.

Факт существования золотых коник, геометро-графические структуры которых наиболее сгармонизированы и естественны, явно относится к числу креативных, а поэтому рекомендуемых к изучению на уроках евклидовой геометрии в школе и начертательной геометрии в вузе.

Факт наличия в структурах золотых коник профиля пирамиды фараона Хеопса и умение производить геометро-графический структурный анализ произвольных треугольников (рис. 3, 4) вызвал познавательный интерес к подобному анализу равнобедренного треугольника этого профиля (рис. 7). В итоге получилось, что:

1. «Камера царя» М расположена в центре тяжести треугольника профиля;

2**.** «Камера царицы» N равноудалена от всех вершин профиля;

3**.** Ортоцентр F треугольника профиля совпадает с фокусом описанного вокруг него золотого эллипса;

4. Окружность Фейербаха пересекает ось симметрии профиля в «энергетическом центре» всей пирамиды, удалённом от её основания на величину, кратную числу 441, значению частоты колебаний звука «ля», мирового камертона [6, с. 14].

5. Направления основных туннелей, вентиляционных каналов и положение подземной камеры L определены простыми графическими построениями. Изотерическая мысль о том, что под надземной пирамидой существует гипотетическая подземная пирамида легко подтвердилась точным графическим построением (рис. 8). Единственная точка надземного профиля, расположенная под землей (камера L), принятая за ортоцентр искомой фигуры, определяет её как золотой треугольник А′ВС.

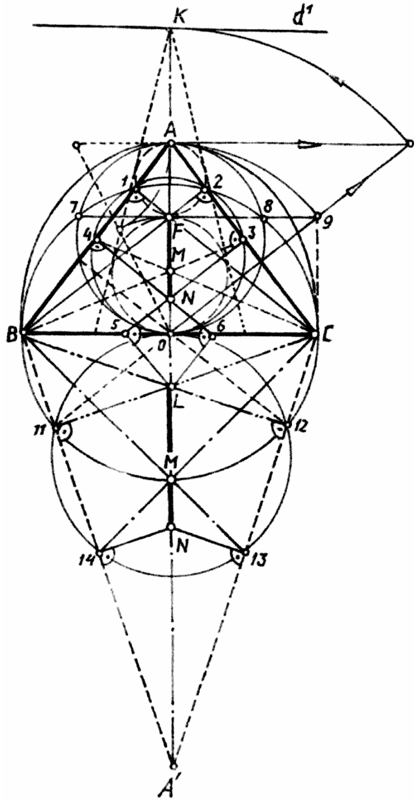


Рис. 8

Конец второго и начало третьего тысячелетия на планете Земля ознаменовались строительством пирамид Александра Голода, совершенно непохожих по форме на пирамиду фараона Хеопса, но обладающих всеми её энергетическими свойствами благодаря единству их геометрических структур, основанных на золотом сечении. Профиль пирамиды Александра Голода представляет собой равнобедренный треугольник, стороны которого касательны к двум окружностям, диаметры которых находятся в отношении золотой пропорции. Если такие окружности построить на большой полуоси золотого эллипса, описанного вокруг профиля пирамиды Хеопса, то получим искомый треугольник профиля новой пирамиды, вершина которой совпадает с основанием K директрисы d^1 этого золотого эллипса. Таким образом, новая пирамида как бы вырастает из старой или старая преобразовывается в новую.

Приведенные примеры являются незначительной частью креативных результатов, полученных на основе сознательного использования концепции системности в процессе синтетического исследования и аксиоматического описания изобразительных свойств ортогональных проекций изображаемых объектов.

Ведь принцип системности является философским, диалектическим, вызывающим текучесть познавательной мысли. Благодаря этому еще в 60-е годы прошлого столетия был предложен креативный аппарат центрального подвижного проецирования [7], который, в отличии от прочих аппаратов получения изображений, является также аппаратом конструирования широкого класса киноперспективных поверхностей [8], описаны структуры золотых поверхностей, в линейный каркас которых входят эллипсы и гиперболы, практически модернизированы все геометро-графические схемы построения наглядных аксонометрических и перспективных проекций архитектурных объектов за счет устранения рутинных операций замера и откладывания и многое другое.

Выводы:

1. Общепризнанный факт низкого уровня геометро-графической подготовки выпускников средних школ при необязательности изучения в них черчения является одной из причин посредственности конструктивно-композиционного мышления многих студентов технических и архитектурных специальностей и, соответственно, невысокого качества их профессиональной работы.

2. Принцип системности, эффективность которого показана выше, поло-женный в основу изложения евклидовой геометрии в школе и начертательной геометрии в вузе, способствует развитию профессионального мышления будущих специалистов народного хозяйства вплоть до креативного.

Литература

1. Ткач Д.І. Методологічні основи викладання та вивчення системної нарисної геометрії як фундаментальної науки і як навчальної дисципліни. В кн.: Матеріали IV науково-практичної конференції «Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі». – Кривий Ріг, 2004.
2. Ткач Д.И. Философия геометро-графического просвещения. В кн. «Проблеми сучасної педагогічної освіти». Серія «Педагогіка і психологія», вип. 5. – Київ: Педагогічна преса, 2003.
3. Рынин Н.А. Начертательная геометрия. – Л.-М.: Госстройиздат, 1939.
4. Шевелёв И.Ш. Принцип пропорции. – М.: Стройиздат, 1986.
5. Ткач Д.И., Русскевич Н.Л., Ниринберг П.Р., Ткач М.Н. Архитектурное черчение. Справочник. – К.: Будивельнык, 1991.
6. Уваров В.М. Жезлы Гора. – М.: Вече, 2000.
7. Ткач Д.И. Центральное подвижное проецирование. В кн. «Прикладная геометрия и инженерная графика». – Вып. 8. – К.: Будивельнык, 1969.
8. Ткач Д.И., Иванков А.О. Киноперспективные поверхности. В кн. «Прикладная геометрия и инженерная графика», Вып. 58. – К.: КГТУСА, 1995.

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ НЕВ'ЯЗКИ ПРИ ВИВЧЕННІ ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ

С.П. Ткаченко
м. Кіровоград, Машинобудівний технікум Кіровоградського національного технічного університету
serro@ukr.net

Засвоєння поняття границі функції викликає труднощі як серед більшості учнів, так і серед викладачів, що особливо помітно при аналізі відповідних тем у сучасних підручниках та посібниках. Найголовнішим недоліком є відсутність наочності з даної теми [5, с. 79-82], а це, в свою чергу, призводить до неправильного розуміння δ- та ε-околів. В цій ситуації учні вважають, що абсцисі $x_0+\delta$ відповідає ордината $A+\varepsilon$, а абсцисі $x_0-\delta$ відповідає ордината $A-\varepsilon$. Зараз пропонуються різні підходи щодо вивчення та використання означення границі функції [2]. Для полегшення сприйняття означення границі функції, усунення помилок та наочного зображення δ- та ε-околів пропонується використати метод нев'язки [4]. Даний метод значно полегшує роботу учнів і дає можливість вільно використовувати можливості обчислювальних машин.

Наведемо означення границі функції неперервного аргументу.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in R \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\delta>0 \ \ \forall x\in X,\ 0<|x-x_0|<\delta\text{: } |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Пропонуємо замінити останню двосторонню нерівність рівнянням, маємо:

$$-\varepsilon<f(x)-A<\varepsilon \Rightarrow f(x)-A=t\varepsilon,\ \text{де } -1<t<1,\ t\neq 0.$$

Зауважимо, що у випадку доведення неперервності немає потреби виключати $t=0$.

Таким чином,

$$f(x)-A=t\varepsilon \Rightarrow x\in\left\{x(t)\,\middle|\quad t\in(-1{,}0)\cup(0{,}1)\right\}=X\supset(x_0-\delta, x_0+\delta). \quad (1)$$

Покажемо на прикладах, як працює даний метод.

Приклад 1. Довести, що функція $f(x)=2x+1$ має при $x\to 3$ границю, яка дорівнює 7.

Розв'язання. Розв'язуючи відповідне рівняння (1), маємо

$$2x+1-7=t\varepsilon \Rightarrow x=3+\frac{t\varepsilon}{2} \Rightarrow x\in\left\{3+\frac{t\varepsilon}{2}\,\middle|\quad t\in(-1{,}0)\cup(0{,}1), \varepsilon>0\right\}.$$

Звідси знаходимо, що радіус околу $\delta=\varepsilon/2$.

Для побудови δ-околу використаємо програмний пакет Advanced Grapher. Вважаємо, що дана програма, яка розміщується на одній дискеті і доступна з мережі Інтернет (http://www.serpik.net/agrapher/agrapher.zip), може задовольнити потреби учнів, відповідатиме вимогам тих ПК які є в наявності в учбовому закладі. Вибираємо опцію **Построение → Добавить график**. У вікні, що з'явиться (рис. 1), вибираємо параметричні рівняння і вводимо потрібні вирази. Вибравши вкладку **Доп. свойства** встановлюємо мінімальне та максимальне значення t. Поклавши значення ε=0,1; ε=0,01, виконуємо побудову (рис. 2).

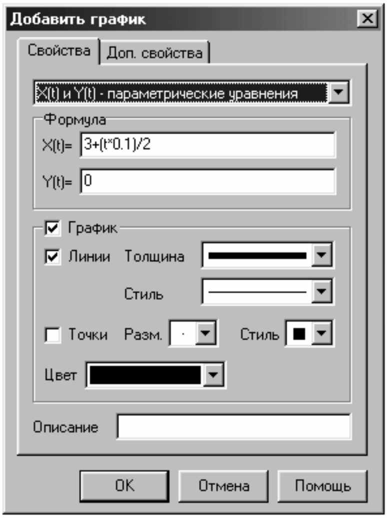
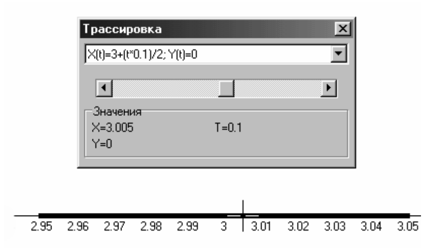
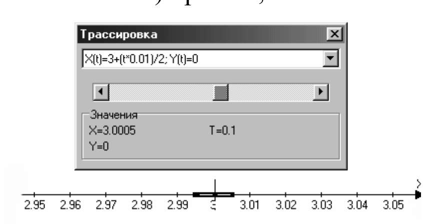


Рис. 1. Інтерфейс вікна "Добавить график"



а) при ε=0,1



б) при ε=0,01

Рис. 2. Побудова δ-околів точки x=3

Як бачимо, складнощі, які були пов'язані з побудовою, завдяки параметризації зникають. Учні можуть вільно будувати δ-околи, використовуючи сучасні програмні засоби, про що раніше не було і мови, бо будувати розв'язки нерівності, без використання методу нев'язки, було складно.

Таким чином, якщо раніше δ-окіл знаходили виключно алгебраїчним способом, то завдяки узагальненню методу нев'язки на подвійні нерівності при вивченні границі функції, ми можемо не тільки унаочнити знайдені розв'язки, але й при конкретно вибраному значенні t отримати потрібні значення δ та ε.

Крім того, полегшується процес відшукання δ-околу, бо відпадає потреба розв'язувати подвійні нерівності, які містять знак модуля.

Наведемо геометричну інтерпретацію границі функції $f(x)=2x+1$ у точці x=3, у випадку ε=0,1 (рис. 3).

Зрозуміло, що для лінійної функції складнощів із застосуванням методу нев'язки не виникатиме. Але якщо розглядати квадратичну функцію, то δ-околом треба вважати довжину меншого з отриманих відрізків [1, с. 29]. А тому в учнів виникатимуть труднощі при з'ясуванні цієї умови.

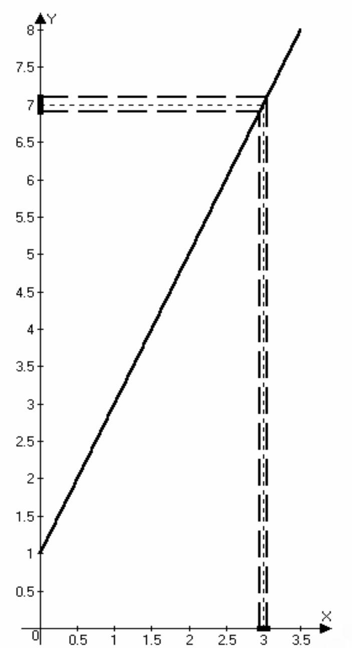


Рис. 3. Геометрична інтерпретація границі функції $f(x)=2x+1$ у точці $x=3$, при $\varepsilon = 0{,}1$

Приклад 2. Довести, що функція $f(x)=0{,}5x^2+2$ має при $x\to 2$ границю, яка дорівнює 4.

Розв'язання. Розв'язуючи відповідне рівняння (1), маємо

$$0{,}5x^2+2-4=t\varepsilon \Rightarrow 0{,}5x^2=2+t\varepsilon \Rightarrow x^2=4+2t\varepsilon \Rightarrow x=\pm\sqrt{4+2t\varepsilon}\,.$$

В даному випадку ми розглядаємо функцію при $x\to 2$, отже розв'язок $x(t)$ зі знаком "–" не задовольняє умову задачі. Отже,

$$x\in\left\{\sqrt{4+2t\varepsilon}\;\middle|\; t\in(-1{,}0)\cup(0{,}1),\varepsilon>0\right\}.$$

На рис. 4 зображено геометричну інтерпретацію границі функції $f(x)=0{,}5x^2+2$ у точці $x=2$, при $\varepsilon=0{,}1$. Завдяки трасировці ми наочно бачимо, що відрізок, зображений на осі Ox, не є δ-околом точки $x=2$, бо частина відрізка δ_1 "зліва" від точки $x=2$ більша частини відрізка δ_2 "справа" від точки $x=2$. Саме наочність того, що точці $x_0-\delta$ не відповідатиме значення функції $A-\varepsilon$, дає змогу полегшити сприйняття понять δ- та ε-околів, та створити в учнів чітке уявлення про те, що $\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2)$, бо в іншому випадку, тобто коли взяти δ_1, то знайдуться такі значення x, для яких відповідні значення $f(x)$ не потраплять в ε-окіл точки 4.

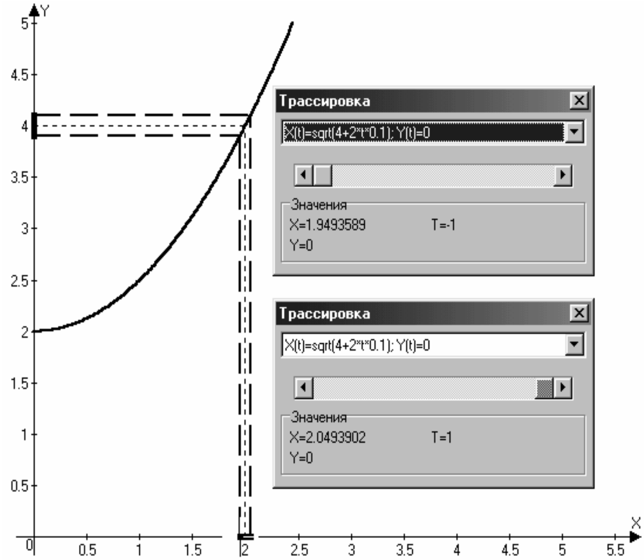


Рис. 4. Геометрична інтерпретація границі функції $f(x)=0{,}5x^2+2$ у точці $x=2$, при $\varepsilon=0{,}1$

Якщо графічним способом ми можемо вдало ілюструвати знайдені розв'язки, то знаходження δ залишається для алгебраїчного способу. Щоб знайти δ, розв'яжемо рівняння $0{,}5x^2+2–4=t\varepsilon$ відносно $x–2$. Якщо для лінійних функцій це вдається за допомогою тотожних перетворень, то в даному випадку це зробити не вдається. Тому використаємо прийом підсилення нерівності. Для цього накладемо на шукане δ обмеження $\delta\le 1$.

Це завжди можна зробити, оскільки δ залежить від ε, а число ε можна задавати як завгодно малим.

Отже,

$$0{,}5x^2+2–4=t\varepsilon \Rightarrow 0{,}5x^2=2+t\varepsilon \Rightarrow x^2–4=2t\varepsilon \Rightarrow (x–2)(x+2)=t\varepsilon.$$

Тоді $|x–2|<1 \Rightarrow x–2=t,\ t\in(–1, 0)\cup(0, 1)$.

Додамо до обох частин 4, маємо $x+2=4+t$, $t\in(–1, 0)\cup(0, 1)$, тоді

$$(x-2)(x+2)=2t\varepsilon \Rightarrow x-2=\frac{2t\varepsilon}{4+t},\ t\in(-1,0)\cup(0,1),\ \varepsilon>0.$$

Враховуючи підсилення при $t=1$, остаточно маємо $\delta=2\varepsilon/5$, $\varepsilon>0$.

Отже, за δ можна взяти менше з двох чисел 1 і $2\varepsilon/5$, запишемо це у вигляді $\delta=\min(1;\,2\varepsilon/5)$.

Як бачимо, використання методу нев'язки не тільки спрощує вивчення поняття границі, але й дає можливість легше сприймати ті поняття, які спираються на теорію границь, зокрема поняття похідної.

Наведемо означення похідної:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X,\ 0<|x-x_0|<\delta:$$

$$\left|\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)\right|<\varepsilon\,.$$

Використовуючи метод нев’язки, розв’яжемо наступний приклад.

Приклад 3. Довести, що функція $f(x)=x^2$ має у точці $x_0=1$ похідну, яка дорівнює 2.

Розв’язання. Для будь-якого числа $\varepsilon>0$ має існувати таке число $\delta>0$, що нерівність

$$\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}-2=t\varepsilon\Rightarrow\frac{1+2\Delta x+(\Delta x)^2-1-2\Delta x}{\Delta x}=t\varepsilon\Rightarrow\Delta x=t\varepsilon\Rightarrow x-x_0=t\varepsilon.$$

Враховуючи те, що $|x-x_0|<\delta\Rightarrow x-x_0=t\delta$, маємо $\delta=\varepsilon$. Отже, функція $f(x)=x^2$ має у точці $x_0=1$ похідну, яка дорівнює 2.

Таким чином, вивчення поняття границі – одного з найважливіших понять математичного аналізу, та водночас одного з найскладніших для сприймання учнями, яке вимагає високого рівня розвитку абстрактно-теоретичного мислення [3, с. 385], завдяки використанню методу нев’язки буде викликати в учнів менше труднощів і сприятиме полегшенню і глибшому усвідомленню понять неперервності, похідної та інтеграла, стійкості розв’язків задачі Коші, які використовують поняття границі.

Література:

1. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. – К.: Зодіак-ЕКО, 2002. – 384 с.

2. Долгих В., Штех О. Про один з підходів до доведення рівностей до вигляду $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ за означенням // Матем. в шк. – 2004. – № 9-10. – С. 35-37.

3. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

4. Ткаченко С.П., Філер З.Ю. Спосіб нев’язки (відхилу) розв’язування нерівності // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. Випуск 3: В 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2003. – Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – С. 254-258.

5. Швець В.О., Білянін Г.І. Математика: Навчальний посібник. – Чернівці: Зелена Буковина, 2003. – 382 с.

МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ПАКЕТУ MAPLE 7 ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ

Ю.В. Триус
м. Черкаси, Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького
trius@cdu.edu.ua

Широкі аналітичні, обчислювальні і графічні можливості сучасних математичних пакетів роблять їх необхідним інструментом у професійній діяльності фахівців у галузі математики, техніки, економіки, управління тощо. Однак, анкетування викладачів математичних дисциплін і студентів математичних і економічних спеціальностей кількох ВНЗ України, яке проводилось автором, виявило парадоксальну ситуацію щодо використання систем комп'ютерної математики (СКМ) при навчанні математичних дисциплін: універсальні математичні пакети практично не використовуються, зокрема, пакет Mathematica використовують 7% опитаних викладачів, Derive – 7%, Maple – 5%, Matlab – 2%, Mathcad – 2%, а найпопулярнішим програмним засобом, який використовується на заняттях з математичних дисциплін, є електронна таблиця MS Excel (22%), яка не є математично орієнтованим програмним продуктом (табл. 1).

Таблиця 1.

Використання систем комп'ютерної математики та обробки даних при вивченні математичних дисциплін

Системи комп'ютерної математики та обробки даних	Рівень знайомства і використання СКМ та обробки даних											
	Програмний засіб невідомий (%)			Знаю, але не застосовую у навчанні (%)			Знаю і застосовую для навчання (%)			Знаю і застосовую на заняттях з математичних дисциплін (%)		
	Студенти-економісти	Студенти-математики	Викладачі	Студенти-економісти	Студенти-математики	Викладачі	Студенти-економісти	Студенти-математики	Викладачі	Студенти-економісти	Студенти-математики	Викладачі
MS Excel	–	19	30	6	34	14	36	34	34	58	13	22
Mathcad	64	32	43	19	46	18	15	19	37	2	3	2
Matlab	81	56	57	16	27	34	2	10	7	1	7	2
Mathematica	71	85	64	16	13	27	11	–	2	2	2	7
Maple	99	92	59	1	3	23	–	3	13	–	2	5
Derive	97	75	84	2	19	16	1	5	–	–	1	7

Серед основних причин низького рівня використання СКМ при вивченні вищої математики, які відзначають респонденти, можна виділити як об'єктивні, так і суб'єктивні [5]. До *об'єктивних причин* можна віднести: недостатній рівень забезпечення сучасною комп'ютерною технікою математичних кафедр для регулярного її використання в навчальному процесі математичних дисциплін; відсутність коштів у ВНЗ на придбання ліцензованого програмного забезпечення; відсутність коштів у ВНЗ і викладачів на придбання навчальної, методичної і довідкової літератури з систем комп'ютерної математики, а до *суб'єктивних*: недостатню обізнаність викладачів про функціональні можливості СКМ, особливо тих, що вільно розповсюджуються, їх роль в математичних дослідженнях і математичній освіті; певний консерватизм викладачів у підходах до викладання математичних дисциплін; недостатній рівень інформаційної культури викладачів математичних дисциплін і студентів некомп'ютерних спеціальностей.

Дана робота є продовженням досліджень автора однієї з важливих сфер використання систем комп'ютерної математики – розв'язування екстремальних задач [5, 6]. Зокрема у ній буде розглянуто один з найкращих, за даними дослідження С. Стейнхауса [9], універсальних математичних пакетів – Maple 7, проаналізовано його основні засоби, призначені для знаходження екстремумів функцій від однієї та багатьох змінних, а також для розв'язування задач лінійного і нелінійного програмування, та наведено приклади їх використання для розв'язування конкретних задач. Це обумовлено тим, що у навчально-методичній літературі, присвяченій СКМ, недостатньо уваги приділяється питанням застосування пакету Maple для розв'язування екстремальних задач (див., наприклад, [2], [3], [8]).

1. Загальна характеристика пакету Maple. Математична система Maple фірми Waterloo Maple Inc. (Канада) (www.maplesoft.com) є однією з потужних систем комп'ютерної алгебри. Вже перші її реалізації мали найбільш повне ядро символьних операцій. Починаючи з версії R5, вона є універсальною математичною системою з багатими можливостями символьних перетворень, комп'ютерної графіки і чисельних методів.

Maple – типова інтегрована система, яка поєднує у собі потужну мову програмування, орієнтовану на складні математичні обрахунки, редактор для підготовки і редагування документів та програм, сучасний багатовіконний інтерфейс з можливістю роботи в інтерактивному режимі, ядро алгоритмів і правил перетворення математичних виразів, чисельний і символьний процесори із системою діагностики, засоби двовимірної і тривимірної графіки, бібліотеки вбудованих і додаткових функцій, пакети розширення системи, велику і зручну в користуванні довідкову систему (рис.1). Все це забезпечує унікальну можливість реалізувати на основі єдиної технології практично всі основні етапи математичного дослідження. При цьому результати виконання системою різноманітних інструкцій (команд) користувача у діалоговому режимі запам'ятовуються у єдиному документі (worksheet).

Робоче вікно системи Maple (рис. 1 і 2) має типову для Windows застосувань структуру: у верхній частині вікна розташоване головне меню, нижче панель інструментів (Toolbar) з піктограмами найбільш часто вживаних команд системи, ще нижче рядок піктограм Context Bar, який дозволяє керувати поданням даних у поточному документі, потім розташовуються один або кілька документів, які містять формули, графіки, супроводжуючий текст, таблиці, гіперпосилання, вбудовані об’єкти інших застосувань тощо. У нижній частині вікна знаходиться рядок Status line, який містить інформацію про систему.

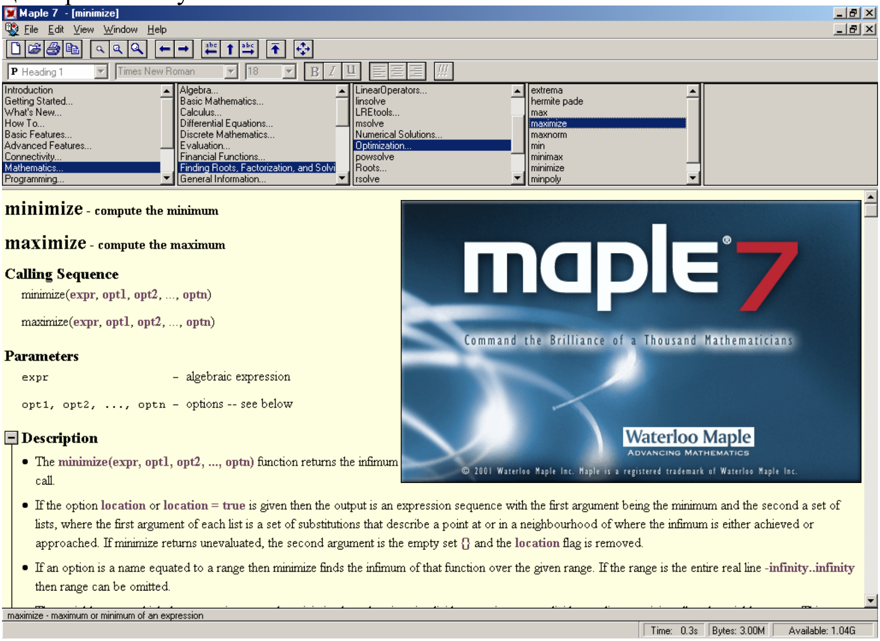


Рис. 1.

Робота з системою Maple відбувається у режимі сесії (session) – користувач вводить команди, математичні вирази, процедури, які сприймаються та інтерпретуються системою Maple. При цьому кожна команда повинна завершуватися або крапкою з комою “;” або двокрапкою “:”. У першому випадку в рядку під відповідним виразом буде виведено результат виконання команди або повідомлення про помилку, у другому випадку результат не виводиться. Для відміни всіх зроблених дій і початку нової сесії без виходу з системи використовується команда **restart**. Зауважимо, що різні документи, які створені в одній сесії, використовують загальну область пам’яті, і значення змінної, яке вона одержала в одному з документів, зберігається при переході до іншого документу. Для забезпечення багатозадачного режиму роботи системи використовується спеціальна програма Parallel Server Maple, при цьому значення змінних є дійсними у межах одного відповідного документу.

В системі Maple 7 для подання команд можна використовувати дві форми: *стандартна математична нотація* (Standard Math Notation), яка відповідає звичайному математичному зображенню виразів (похідних, інтегралів, сум тощо) і *внутрішня нотація Maple* (Maple Notation), яка є певним текстовим еквівалентом математичних виразів. Для зручності введення математичних виразів є кілька спеціальних палітр (рис. 2).

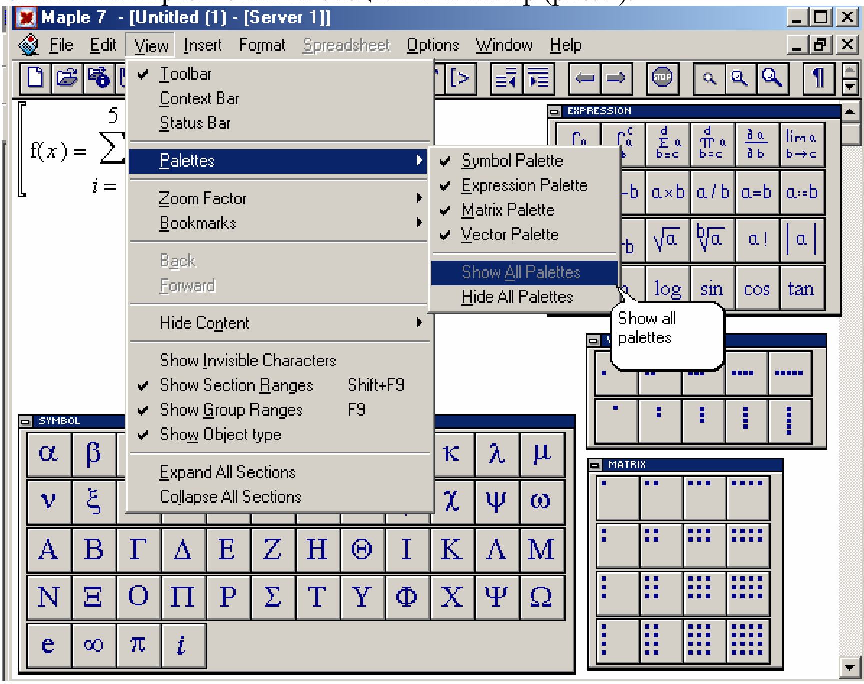


Рис. 2.

Команди в системі Maple, незалежно від нотації, набираються після запрошення у вигляді символу “>”. Після введення команди необхідно натиснути клавішу Enter, яка запускає на виконання відповідну команду. В результаті команда буде або виконана, або буде виведено повідомлення про помилку. У випадку синтаксичної помилки перша нерозпізнана літера буде відмічена символом “^”.

Введення команд та їх виконання в Maple здійснюється за групами (Execution Group). Кожна група складається з кількох частин: область введення команди (Input Region), область виведення результатів (Output Region), область коментарів (Text Region).

Область виведення може включати результати виконання математичних та алгоритмічних операцій, а також графічні об'єкти. Групи виділяються зліва квадратними дужками і відділяються сепараторами (Separator), які за замовченням невидимі але які можна зробити видимими.

Результати роботи з системою Maple можуть бути збережені у файлі (за замовченням з розширенням ".mws"), а також експортовані у вигляді файлів інших форматів (HTML, HTML with MathML, LaTex, RTF).

Пакет Maple постійно розвивається. Для збереження можливості роботи з документами, створеними у попередніх версіях, фірма-розробник постачає спеціальні програми-конвертори. Вони при завантаженні файлів, підготовлених у попередніх версіях пакету, пропонують здійснити перетворення нотації згідно нових правил.

Інтерфейс системи Maple, а також її основні можливості, досить детально описані в літературі, присвяченій СКМ (див., наприклад, у [2], [3]).

2. Основні можливості системи Maple 7 щодо розв'язування екстремальних задач. Для розв'язування задач оптимізації за допомогою системи Maple 7 можна використовувати вбудовані функції: **minimize**, **maximize**, **extrema**, а також пакет розширення (packages) **Simplex** для розв'язування задач лінійного програмування симплекс-методом.

Розглянемо коротко призначення цих засобів, їх синтаксис та опис.

Для відшукання мінімуму і максимуму функції від однієї чи багатьох змінних без обмежень на змінні, або при їх наявності у вигляді певного інтервалу, використовуються відповідно команди:

minimize(*expr*, *vars*, *ranges*, *opts*);
maximize(*expr*, *vars*, *ranges*, *opts*);

де

expr – алгебраїчний вираз, який визначає функцію, що мінімізується (максимізується);

vars – змінна або список змінних, за якими шукається мінімум (максимум);

ranges – область визначення змінних виду "*x*=*a*..*b*" (для функції однієї змінної) або "*x*1=*a*1..*b*1, *x*2=*a*2..*b*2, ..., *xn*=*an*..*bn*" (для функції від *n* змінних), при цьому якщо замість опису області визначення змінної стоїть опція *infinity*, або вона взагалі відсутня, то мінімум (максимум) буде шукатися при значеннях відповідної змінної з всієї числової вісі;

opts – список необов'язкових параметрів, серед яких може бути "*location*", який вказує на необхідність виведення координат точки мінімуму (максимуму). Якщо опція *location* або *location=true* вказана, то виводиться послідовність виразів, де спочатку йдуть координати точки екстремуму (або її наближення), а потім значення цільової функції в цій точці.

Зауважимо, що коли мінімум (максимум) відповідної функції не існує, або система не може його знайти, то виводиться вираз, що відповідає заданій функції, а при наявності опції *location* виводиться текст "*location =false*" і порожній список {}.

Для знаходження умовного екстремуму функції однієї та багатьох змінних при заданих обмеженнях-рівностях використовується команда

extrema(*expr*, *constraints*, *vars*, '*s*'),

де

expr – алгебраїчний вираз, який визначає функцію, умовні екстремуми якої треба знайти;

constraints – одне обмеження у вигляді виразу або рівняння, або множина таких обмежень (можливо порожня), які записуються у фігурних дужках;

vars – змінна або список змінних, за якими шукаються екстремуми;

s – ім'я змінної, яка одержить список із значеннями координат точок, які є підозрілими на умовний екстремум.

Ця команда реалізує метод множників Лагранжа для знаходження точок умовного екстремуму при обмеженнях-рівностях, а її результатом є значення цільової функції в точках умовного екстремуму (якщо вони існують, то на першому місті виводиться умовний мінімум, а на другому – умовний максимум).

Зауваження.

1. Якщо деяке обмеження в команді **extrema** задано як вираз, то воно розуміється системою Maple, як обмеження типу "= 0".
2. Якщо обмеження в команді **extrema** відсутні, то в списку параметрів замість них використовується порожня множина {}.
3. Параметри *vars* і '*s*' в команді **extrema** не є обов'язковими. Якщо відсутній параметр *vars*, то пошук точок умовного екстремуму відбувається за всіма змінними, від яких залежить алгебраїчний вираз *expr*. Якщо використовується параметр '*s*', то наявність списку змінних *vars* є обов'язковою.
4. Якщо точки, які є підозрілими на екстремум, не можуть бути подані у закритій формі, то змінна s буде містити систему рівнянь, розв'язки якої є точками екстремуму.

Для розв'язування задач лінійного програмування в системі Maple використовується пакет лінійної оптимізації Simplex, в якому реалізований один з варіантів симплекс-методу ("Linear Programming" by Chvatal, 1983, W.H. Freeman and Company, New York).

Виклик пакету здійснюється за допомогою команди

with(simplex);

або

with(simplex, <процедура>);

де параметр <процедури> може приймати одне із значень:
basis, convexhull, cterm, define_zero, display, dual, equality, feasible, maximize, minimize, nonnegative, pivot, pivoteqn, pivotvar, ratio, setup, standardize,
що викликають відповідні процедури, які надають можливість користувачу поетапно розв'язувати задачу лінійного програмування симплекс-методом.

Розглянемо коротко призначення деяких з цих процедур:

– *setup* – задання системи лінійних рівнянь для подальшого визначення базису (переліку змінних) за допомогою команди basis;

– *convert* – перетворення системи функціональних обмежень у необхідний вигляд, наприклад, якщо процедура містить параметр *equality*, то обмеження-нерівності перетворюються у обмеження-рівняння;

– *convexhull* – знаходження опуклої оболонки для скінченої кількості точок;

– *cterm* – визначення констант для системи рівнянь і нерівностей;

– *define_zero* – визначення найменшого ненульового значення (за замовчення це значення пов'язано із константою *Digits*);

– *display* – виведення заданих лінійних рівнянь і нерівностей у матричній формі;

– *dual* – виведення спряженої (двоїстої) задачі до прямої (заданої) задачі;

– *feasible* – перевірка сумісності системи обмежень (якщо одержано значення *true*, то система обмежень сумісна, якщо *false* – несумісна);

– *maximize* – знаходження максимуму цільової функції при заданих обмеженнях;

– *minimize* – знаходження мінімуму цільової функції при заданих обмеженнях;

– *nonnegative* – визначення умови, що всі змінні задачі повинні бути невід'ємними;

– *pivot* – конструювання нової системи рівнянь із заданим головним (роз'язковим) елементом;

– *pivoteqn* – виведення підсистеми для заданого головного (розв'язкового) елемента;

– *pivotvar* – виведення змінних, які мають додатні коефіцієнти в цільовій функції;

– *ratio* – виведення відношень для визначення найбільш жорсткого обмеження (обмеження, яке може бути використане для подальших симплекс-перетворень);

– *standardize* – зведення системи рівнянь і нерівностей до стандартної форми (у вигляді нерівностей виду "<=").

Розглянемо детальніше найбільш важливі для розв'язування задачі лінійного програмування процедури **maximize** і **minimize**, які при активізації заміщають відповідні вбудовані процедури. Використовуються, наприклад, такі варіанти виклику процедури **maximize**:

maximize(*f*, *consts*),
maximize(*f* , *consts*, *vartype*),
maximize(*f* , *consts* , *vartype*, '*NewC*', '*transform*'),

де

f – лінійний вираз, який описує цільову функцію задачі;

consts – множина або список лінійних обмежень задачі;

vartype – параметр, який може приймати значення *NONNEGATIVE*, якщо всі змінні в задачі повинні бути невід'ємними, або *UNRESTRICTED*, якщо всі змінні в задачі можуть приймати довільні дійсні значення;

NewC, *transform* – параметри, що використовуються при уточненні імен для одержання опису оптимального плану.

Процедура **maximize** повертає або множину рівностей, які описують оптимальний план, або порожню множину, якщо система обмежень *consts* є несумісною, або *NULL*, якщо цільова функція на допустимій множині необмежена. Рівності, що визначають оптимальний план, можуть бути підставлені у цільову функцію для одержання її максимального значення. Це можна зробити або за допомогою команд **evalf** або **subs**.

Зауважимо, що процедура **minimize** викликається аналогічним чином і має такі ж самі параметри, як і процедура **maximize**.

3. Приклади використання пакету Maple 7 для розв'язування задач оптимізації.

Розглянемо кілька прикладів, які дають можливість побачити як позитивні, так і негативні сторони використання пакету Maple 7 при розв'язуванні різних класів задач оптимізації, зокрема:

– одновимірної оптимізації;

– багатовимірної оптимізації нелінійних функцій;

– класичної задачі на умовний екстремум;

– лінійного програмування;

– нелінійного програмування.

3.1. Задача одновимірної оптимізації. Нехай задано задачу

$$f(x) \to \min\ (\max),\ x \in [a; b].$$

Для знаходження точки мінімуму (максимуму) цільової функції $f(x)$ на заданому інтервалі $[a; b]$ (який може бути й нескінченним, наприклад $(-\infty; +\infty)$, що записується у вигляді "*x* = **-infinity**..**infinity**") і її значення у цій точці в пакеті Maple 7, як вже зазначалося, використовуються функції **minimize**, **maximize**, **extrema**.

Приклад 1. Знайти глобальний мінімум функції

$$f(x) = \sum_{i=1}^{5} i \sin((i+1)x + i) \text{ при } x \in [-4; 4]$$

за допомогою команди **minimize**, побудувати графік цієї функції і перевірити правильність знайденого розв'язку.

Розв'язування поставленої задачі подано на рис. 3, при цьому використана функція **evalf**, яка дає можливість обрахувати значення функції в одержаній точці, а також команда **plot**, яка призначена для побудови графіків функцій від однієї змінної.

Як видно з рис. 3, за допомогою команди **minimize** було правильно знайдено точку глобального мінімуму x^*=–1,114072667 із заданою точністю, при цьому $f(x^*)$=–14,83794990.

Зауваження. Час, який було витрачено системою Maple 7 на ПК з мікропроцесором Duron 1200 для розв'язування задачі з прикладу 1, становив майже 10 хвилин. Хоча решта задач розв'язувались практично миттєво.

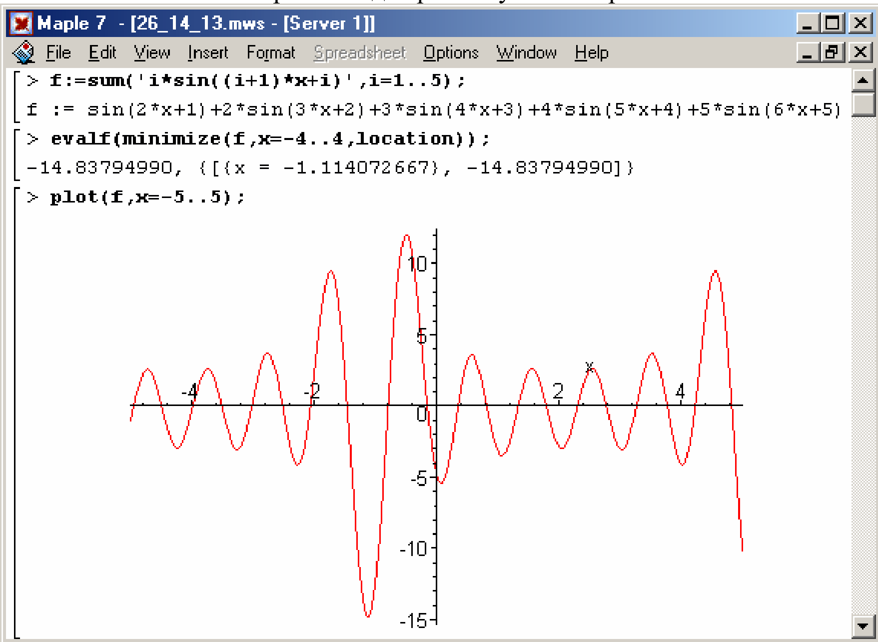


Рис. 3.

3.2. Задача багатовимірної оптимізації. Для знаходження екстремумів нелінійної функції багатьох змінних виду:

$$f(x) \to \min, \ x \in P,$$

$$\text{де } x=(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n, \ P = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n \mid x_j \in [a_j; b_j], \ j = \overline{1,n}\}$$

в системі Maple 7 використовуються, в основному, процедури **minimize**, **maximize**.

Приклад 2. Для функції

$$f(x_1, x_2) = (x_1^4 - 3)^2 + x_2^4$$

$$\text{при } x \in P = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in [-10; 10], x_2 \in [-10; 10]\}$$

знайти всі точки мінімуму, побудувати графік заданої функції і перевірити одержані результати.

Розв'язування поставленої задачі за допомогою процедури **minimize** подано на рис. 4, при цьому задана функція має дві точки глобального мінімуму:

$$X_1^* = (\sqrt[4]{3}; 0), \ X_2^* = (-\sqrt[4]{3}; 0), \text{ і } f(X_1^*) = f(X_2^*) = 0.$$

Для побудови графіка функції від двох змінних $f(x_1, x_2)$ використана команда **plot3d**.

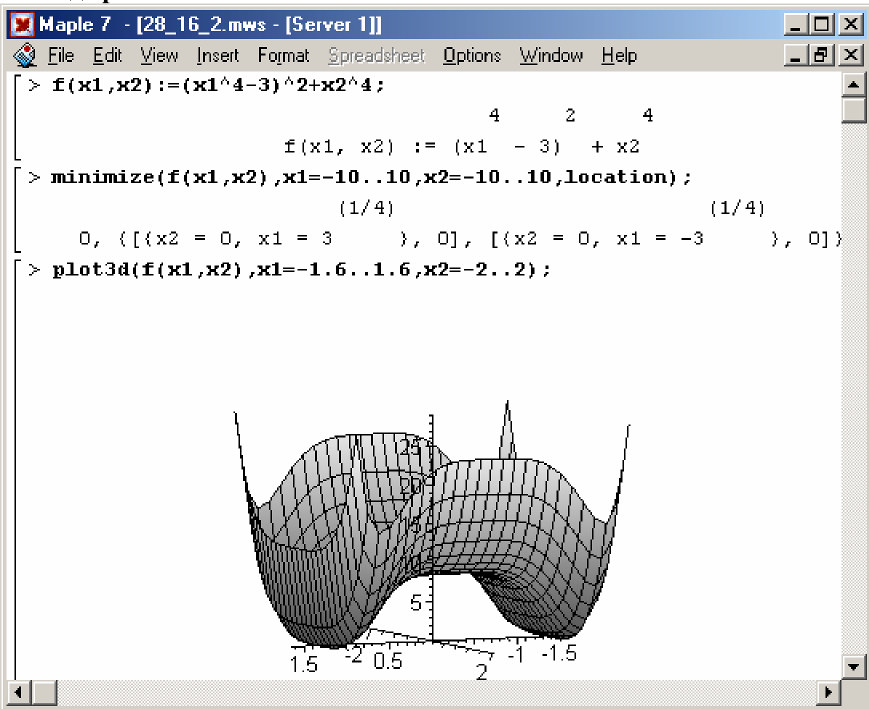


Рис. 4.

3.3. Задача на класичний умовний екстремум. Для розв'язування класичної задачі на умовний екстремум виду

$$f(x)\to\min\ (\max),$$

$$g_i(x) = 0,\ i = \overline{1,m},$$

$$x\in R^n,$$

методом множників Лагранжа в системі Maple 7 використовується процедура **extrema**. Розглянемо її застосування на прикладі.

Приклад 3. Знайти точки умовного екстремуму функції

$$f(x_1, x_2, x_3)=x_1x_2x_3$$

при обмеженнях

$$g_1(x_1, x_2, x_3)=x_1+x_2+x_3=5,$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=8,$$

$$x=(x_1, x_2, x_3)\in R^3.$$

Розв'язування поставленої задачі подано на рис. 5. Додаткові дослідження показали, що точки X_1=(2, 2, 1), X_2=(2, 1, 2), X_3=(1, 2, 2) є точками умовного мінімуму і значення цільової функції в цих точках дорівнює $f(X_1)=f(X_2)=f(X_3)=4$, а точки X_4=(7/3, 4/3, 4/3), X_5=(4/3, 7/3, 4/3), X_6=(4/3, 4/3, 7/3) є точками умовного максимуму і значення цільової функції в цих точках дорівнює $f(X_4)=f(X_5)=f(X_6)=112/27\approx4{,}1481$.

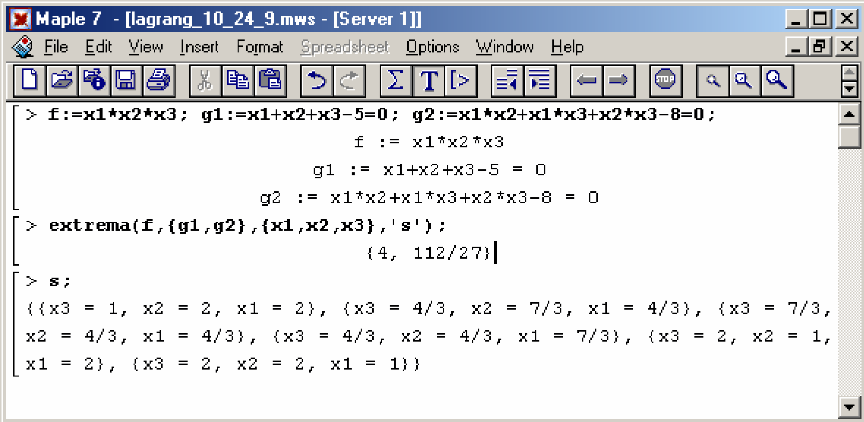


Рис. 5.

3.3. Задача лінійного програмування. Як вже відмічалось, для розв'язування задач лінійного програмування симплекс-методом в системі Maple 7 використовується пакет розширення **Simplex**. Розглянемо його роботу на прикладі реальної виробничої задачі.

Приклад 4. Плодоконсервний завод виготовляє п'ять видів фруктового соку: березово-яблучний, грушево-яблучний, сливово-грушевий, грушево-яблучно-сливовий, березово-грушевий. Прибуток від реалізації одного літру соку, норми витрат сировини та її запаси наведені в таблиці 2.

Як необхідно спланувати виробництво соку, щоб забезпечити заводу максимальний прибуток від реалізації виготовленої продукції?

Таблиця 2.

Види сировини	Витрати сировини на 1 л соку					Запаси сировини на сезон (т)
	Березово-яблучний	Грушево-яблучний	Сливово-грушевий	Грушево-яблучно-сливовий	Березово-грушевий	
Березовий концентрат (л)	0,8				0,7	10
Яблука (кг)	1,6	1,4		0,9		50
Груші (кг)		1,7	1,6	1,1	1,3	40
Слива (кг)			1,6	1,2		20
Прибуток від реалізації 1 л соку (грн)	0,33	0,45	0,4	0,38	0,29	

Нехай плодоконсервний завод планує виготовити

x_1 – літрів березово-яблучного соку;

x_2 – літрів грушево-яблучного соку;

x_3 – літрів сливово-грушевого соку;

x_4 – літрів грушево-яблучно-сливового соку;

x_5 – літрів березово-грушевого соку.

Тоді, враховуючи умову задачі, її математична модель буде мати такий вигляд:

$$f(x)=0{,}33x_1+0{,}45x_2+0{,}4x_3+0{,}38x_4+0{,}29x_5\to\max,$$

$$\begin{cases} 0{,}8x_1+0{,}7x_5\le 10000; \\ 1{,}6x_1+1{,}4x_2+0{,}9x_4\le 50000; \\ 1{,}7x_2+1{,}6x_3+1{,}1x_4+1{,}3x_5\le 40000; \\ 1{,}6x_3+1{,}2x_4\le 20000; \end{cases}$$

$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,5}\,.$$

Розв’язування цієї задачі лінійного програмування в системі Maple 7 за допомогою пакету Simplex подано на рис. 6, при цьому значення цільової функції для оптимального плану знайдено за допомогою функції **subs**.

Оптимальний план випуску фруктового соку плодоконсервним заводом виглядає так: $x_1^*=12500$ л – березово-яблучного соку, $x_2^*\approx 12574{,}8$ л грушево-яблучного соку, $x_3^*\approx 2170{,}6$ л –сливово-грушевого соку, $x_4^*\approx 13772{,}4$ л – грушево-яблучно-сливового соку, при цьому березово-грушевий сік виготовляти невигідно. За таких умов максимальний прибуток заводу буде становити близько 15885 грн.

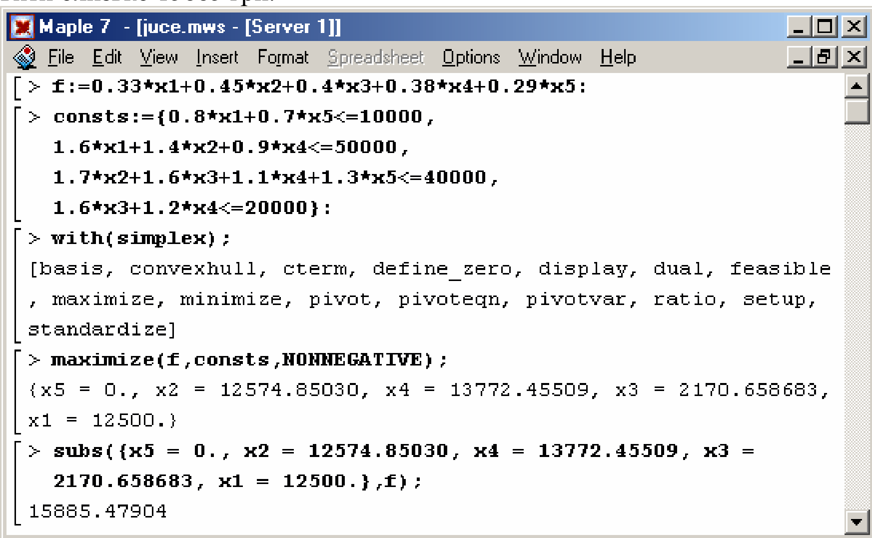


Рис. 6.

Зауваження. Пакет Simplex не дає можливості розв'язувати безпосередньо задачі цілочислового лінійного програмування. Тому для розв'язування задач цього класу можна скористатися, наприклад, методом гілок і меж (див., наприклад, [8]).

3.4. Задача нелінійного програмування. Одним з недоліків, який було виявлено при аналізі можливостей системи Maple 7 щодо розв'язування задач оптимізації, є те, що в ній немає засобів для безпосереднього розв'язування задач нелінійного програмування з обмеженнями-нерівностями. Але цей недолік, певною мірою, можна компенсувати, використавши для розв'язування задач цього класу деякі чисельні методи умовної оптимізації, наприклад, метод зовнішніх штрафних функцій (див, наприклад, [1]).

Розглянемо реалізацію такої можливості на наступному прикладі.

Приклад 5. Знайти розв'язок задачі нелінійного програмування

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 8x_1^2 - 10x_1 - 25x_2 \to \min,$$

при обмеженнях

$$g_1(x_1, x_2)=2x_1+3x_2+x_3 \le 13,$$
$$g_2(x_1, x_2)=2x_1-x_2 \le -1,$$
$$x=(x_1, x_2) \in R^2,$$

побудувати геометричну інтерпретацію цієї задачі і перевірити правильність одержаного результату.

Знаходження наближеного розв'язку цієї задачі в системі Maple 7 за допомогою методу зовнішніх штрафних функцій (з *експоненціальною* функцією штрафу виду $R(x, r_k) = \frac{1}{r_k}\sum_{i=1}^{m} e^{r_k g_i(x)}$, де $r_k \to \infty$ при $k \to \infty$) подано на рис. 7.

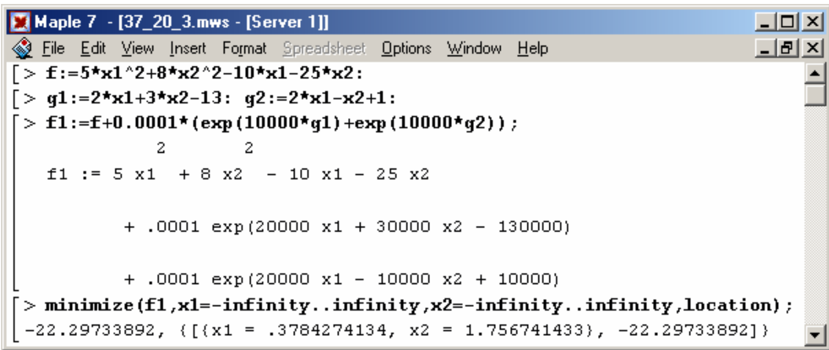


Рис. 7.

Геометрична інтерпретація задачі (рис. 8) одержана за допомогою команди
>plot3d({f,g1,g2}, x1=-4..6,x2= -6..6, axes=normal, style=contour, color=black);
і після встановлення за допомогою мишки точки спостереження зверху

вздовж вісі ординат (вісі значень функції). Зауважимо, що точка мінімуму і ліня рівня в цій точці на рис. 8 побудовані додатково засобами MS Word.

Наближене значення точки мінімуму цільової функції при заданих обмеженнях дорівнює X^*=(0,037842274134; 1,756741433), при цьому $f(X^*)$=–22,29733892. Як видно з рис. 8, знайдений результат відповідає дійсності.

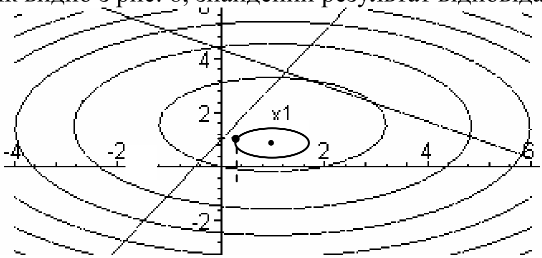


Рис. 8.

4. **Впровадження СКМ у навчальний процес.** Автором проводиться робота по створенню комп'ютерно орієнтованих методичних систем навчання таких дисциплін, як "Методи оптимізації" (для студентів математичних і комп'ютерних спеціальностей), "Математичне програмування" і "Дослідження операцій" (для студентів економічних спеціальностей). Результатом цієї роботи стало створення і впровадження у навчальний процес ВНЗ м. Черкаси навчально-методичних комплексів з цих дисциплін [4, 7], до складу яких зокрема входять:

– навчально-методичні матеріали у друкованому та електронному вигляді;

– лабораторний практикум на базі мультимедійного комп'ютерного класу, який передбачає використання універсальних математичних пакетів Mathcad, Matlab, Maple, Mathematica, електронної таблиці MS Excel з надбудовою "Solver" (пошук рішення), власних навчально-інструментальних програмних засобів: Extremum (для роз'язування задач лінійного і квадратичного програмування геометричним методом), Xtremum (для розв'язування задач одновимірної оптимізації наближеними методами), Nonline (для розв'язування задач нелінійного програмування геометричним методом), ASimplex (для розв'язування задач лінійного програмування симплекс-методом), Transport (для розв'язування транспортної задачі методом потенціалів);

– інформаційні ресурси (електронні версії навчально-методичних матеріалів, завдання для самостійного виконання, завдання для розрахунково-графічних робіт, посилання на математичні електронні бібліотеки, програмні продукти навчального призначення тощо), які розміщені на освітньо-науковому порталі Черкаського національного університету.

Висновки

1. Система Maple 7 має різноманітні і потужні засоби розв'язування за-

дач оптимізації, тому її можна використовувати в навчальному процесі при вивченні математичних дисциплін, які присвячені дослідженню екстремальних задач.

2. Досвід показує, що при використанні СКМ для розв'язування реальних задач оптимізації необхідно застосовувати різні СКМ і ретельно аналізувати одержані за їх допомогою результати.

3. Використання СКМ при навчанні математичних дисциплін, об'єктом вивчення яких є задачі оптимізації та методи і засоби їх розв'язування, дозволить:

– змінити акценти у підборі теоретичного матеріалу, зокрема приділити більше уваги методам оптимізації, які використовуються у СКМ;

– істотно розширити коло навчальних, математичних і науково-дослідних задач, зокрема збільшити долю задач на побудову математичних моделей реальних оптимізаційних задач та їх дослідження за допомогою СКМ;

– більш широко використовувати графічні методи при розв'язуванні задач оптимізації;

– підвищити математичну та інформаційної культуру студентів;

– як найкраще підготувати молоде покоління до професійної діяльності в інформаційному суспільстві.

Література:

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 520 с.
2. Говорухин В., Цибулин В. Компьютер в математических исследованиях. – СПб.: Питер, 2001. – 624 с.
3. Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М.: Нолидж, 2001. – 1296 с.
4. Триус Ю.В. Методична система навчання курсу "Основи теорії оптимізації" // Сучасні інформаційні технології в навчальному процесі: Зб. наук. пр. / Редкол. – К.: НПУ, 1997. – С. 64-76.
5. Триус Ю.В. Використання систем комп'ютерної математики при вивченні і розв'язуванні задач оптимізації // Проблеми сучасного підручника. – К.: Педагогічна думка, 2004. – Вип. 5. – Ч.ІІ. – С. 191-200.
6. Триус Ю. В., Онищенко Б. О. Використання Mathcad 2000 Professional для розв'язування задач оптимізації // Матер. міжн. конф., присв. 200-річчю з дня народж. М.В. Остроградського. – Полтава, 2001. – С. 46-48.
7. Триус Ю.В., Онищенко Б.О. Комп'ютерно-орієнтована система навчання курсу "Математичні методи оптимізації" // Матеріали третьої Всеукр. конф. молодих науковців ІТОНТ-2002. – Черкаси, 2002. – С. 155-156.
8. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці: Підручник для студентів вузів. – Харків: Гриф, 2002. – 580 с.
9. Stefan Steinhaus Comparison of mathematical programs for data analysis (Edition 4.4). – Munchen. – 60 p.: http://www.scientificweb.de/ncrunch/

ОЗНАЙОМЛЕННЯ СТУДЕНТІВ ІНЖЕНЕРНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ ЗІ СПЕЦІАЛЬНИМИ МАТЕМАТИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ НА ПРИКЛАДІ ПОЛІНОМІВ Я. БЕРНУЛЛІ

Г.Я. Тулученко, А.Н. Хомченко
м. Херсон, Херсонський національний технічний університет
meo@kstu.edu.ua

Спеціальні математичні функції широко використовуються при моделюванні фізичних та хімічних процесів. Але ознайомлення з ними студентів інженерних спеціальностей відбувається вже на старших курсах в межах застосування до розв’язання конкретної задачі. Великої уваги вивченню загальних властивостей спеціальних функцій при цьому не приділяється. При такому підході у студента часто складається враження про значне обмеження області застосування тієї чи іншої функції.

В умовах зменшення годин на вивчення математичних дисциплін, яке відбувається в останні роки, на нашу думку, доцільними є вивчення відомих спеціальних математичних функції на факультативних заняттях. Історичні аспекти такої тематики незаперечно мають сприяти підвищенню інтересу до предмета. Розглянемо методичні аспекти вивчення однієї з таких функцій – поліномів Я. Бернуллі.

Наприклад, наприкінці чергового факультативного заняття викладач сповіщає наступні історичні відомості. Вперше числа, які отримали ім’я їх автора Якоба Бернуллі, з’явилися в його творі “Мистецтво передбачень” в 1713 р. Книга вийшла через вісім років після смерті автора і була видана його племінником Н. Бернуллі – сином І. Бернуллі. На російській мові твір вийшов в 1913 році до свого 200-річчя з передмовою А.А. Маркова.

Твір складається з чотирьох частин. Саме в ньому наведено перше формулювання закону великих чисел – схеми повторних випробувань Бернуллі. Числа Бернуллі з’являються в другій частині книги. При вивченні властивостей сполучень та фігурних чисел Я. Бернуллі зустрівся з підсумовуванням степенів натуральних чисел:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m , \ k,m \in N .$$

Я. Бернуллі знайшов суми степенів натуральних чисел з 1 до 10 і вказав загальну формулу такої суми. Коефіцієнти цієї формули і отримали назву чисел Бернуллі. Автор склав їх першу таблицю.

Бернуллі підкреслював зручність таблиці фігурних чисел і писав, що знайшов суму десятих степенів першої тисячі натуральних чисел за “половину чверті години”. Дослідникам творчості Я. Бернуллі таку швидкість розвинути досі не вдалося, тому вважається, що висловлювання є хвальбою, і її причина криється в суперечці між братами Якобом та Іоганном за важливість досягнень.

Зараз збірники задач з математичного аналізу часто містять завдання довести тотожності:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}; \qquad 1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2.$$

Наведені приклади містяться, зокрема, в збірнику [1]. Отже, цим прикладам майже 300 років.

Після цієї інформації можна запропонувати наступні завдання для підготовки до наступного заняття.

1. Підготувати доповідь про родину видатних вчених Бернуллі з персоніфікацією внеску кожного члена сім'ї.
2. Ознайомитися з історією виникнення "фігурних чисел".
3. Розв'язати запропоновані приклади і знайти зразки подібних (для заохочення завдання можна сформулювати так: повторити хід думок самого великого Я. Бернуллі).
4. Підготувати повідомлення про подальший розвиток теорії чисел Я. Бернуллі та їх застосування в різних областях науки.

Вже в ході підготовки до наступного заняття четверте питання слід розподілити між кількома студентами для більш глибокого вивчення кожного з напрямків розвитку чисел Бернуллі. Акцент між напрямками встановлюються у відповідності до профілю спеціальності студентів і можливостями застосування набутих знань в професійній діяльності.

В додатку А наведений огляд історії розвитку чисел Бернуллі з виділенням внеску кожного вченого. Нумерація використаних джерел відповідає основному списку літератури. Окремо відзначимо, що російський математик В.Г. Імшенецький, який досліджував властивості поліномів Бернуллі, деякий час працював в Харківському університеті (1872–1881). В.Г. Імшенецький був серед тих вчених, за пропозицією яких петербурзька АН обирала С.В. Ковалевську своїм членом-кореспондентом.

Серед не названих в табл. А.1 застосувань чисел та поліномів Бернуллі виділимо наступні. Числа Бернуллі використовуються при обчисленні невласних інтегралів, зокрема в квантовій статистиці. Поліноми Бернуллі використовуються для інтегрального представлення диференційованих періодичних функцій, грають важливу роль в наближенні таких функцій тригонометричними поліномами та іншими агрегатами (задача Фавара). Числа Бернуллі набули особливого значення в роботах Куммера, які пов'язані з великою теоремою Ферма.

Сподіваємося, що бібліографічний список стане у пригоді викладачам при адаптації матеріалу до профілю вузу. Список літератури, в якій висвітлені властивості чисел та поліномів Бернуллі, поданий в кінці статті як додатковий.

Авторами поліноми Бернуллі використані при побудові квадратурних формул типу Гауса-Лежандра.

Література:

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1977. – С. 10.
2. Никифоровский В.А. Великие математики Бернулли. – М.: Наука, 1984. – 180 с.
3. Рыбников К.А. История математики. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974. – С. 308.
4. Математическая энциклопедия. Т.1. – М.: Сов. Энциклопедия, 1977. – С. 423.
5. История отечественной математики в 4 томах. – Т.2. – К.: Наукова думка, 1967. – С. 255.
6. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимация: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – С. 540-542.

Додаткова література:

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука,1970. – 720 с.
4. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
5. Лебедев А.В., Федорова Р.М, Справочник по математическим таблицам. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 550 с.
6. Маделунг Э. Математический аппарат физики. – М.: Наука, 1968. – 620 с.
7. Математическая энциклопедия. Т.1. – М.: Сов. энциклопедия, 1977. – 1152 с.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
9. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции (Формулы, графики, таблицы). – М.: Наука, 1968. – 344 с.

Додаток А

Таблиця А.1

РОЗВИТОК ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ Я. БЕРНУЛЛІ

Дата	*Внесок*	*Вчений*	*Джерело*
1713	Відкриття чисел Бернуллі	Я. Бернуллі	[2], [3]
	Перше вивчення при довільному x поліномів Бернуллі	Л. Ейлер	[4]
1728	Твірна функція	Н. Бернуллі	[2]
1730	Рекурентна формула для обчислення чисел Бернуллі	А. Муавр	[2]
1730	Твірна функція	Дж. Стірлінг	[2]
1740	Встановлення зв'язку між ζ-функцією Рімана та числами Бернуллі	Л. Ейлер	[2]
	Сформульовано кілька тверджень відносно чисел Бернуллі, але без доведення. Таблиця чисел доведена до 62-го числа	Дж. Адамс	[2]
1851	Введено термін "поліноми Бернуллі"	І.Л. Раабе	[4]
1870	Застосування функцій Бернуллі до виведення ейлеревої формули підсумовування та її залишкового члена. Введення більш загальних функцій Бернуллі будь-якого цілого порядку. Застосування функцій Бернуллі до наближеного обчислення інтегралів.	В.Г. Імшенецький	[5]
1888	Нове визначення поліномів Бернуллі, як частинного розв'язку різницевого рівняння $F(x+1)-F(x)=nx^{n-1}$, $n\in N$, яке перетворюється на нуль, коли $x=0$. Виведена формула для розвинення функцій по поліномам Бернуллі, з якої формули підсумовування Ейлера-Маклорена та Лежандра випливають як наслідки.	М.Я. Сонін	[5, С. 382-384]
1890	Узагальнення формули підсумовування Ейлера-Маклорена	Г.Ф. Вороний	[5, С. 544-545.]
1905	Доведення таблиці чисел Бернуллі до 90-го числа	Серебренников	[2]
1924	Введення узагальнених поліномів і чисел Бернуллі порядку ν і степеня n як поліноміальних розв'язків степеня n різницевого рівняння	Н.Е. Ньорлунд	[4, С. 424], [6]

ВИКОРИСТАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ ЗАДАЧ ПРИ ВИВЧЕННІ ГЕОМЕТРІЇ

П.І. Ульшин, О.В. Гаркава
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет.

На сучасному етапі розвитку освіти вчитель повинен не лише мати великий запас знань з різних розділів математики, але і вміти застосовувати їх на практиці та творчо реалізовувати свої здібності. На наш погляд важливим засобом при вивченні геометрії є використання нестандартних задач у навчальному процесі.

До нестандартних відносяться задачі, які розв'язуються нетрадиційними методами, тобто не за розробленими схемами чи побудованими алгоритмами або "шаблонами", а потребують творчого підходу, оригінального підбору методів, формул, правил; використання цікавих геометричних фактів тощо.

Нестандартний підхід до розв'язування геометричних задач пропагувався багатьма математиками: вченими і педагогами. В першу чергу слід назвати авторів відомих чудових книг з математики: Я.І. Перельмана, З.А. Скопця, П.А. Гальперіна, Б.А. Кордемського, Д.О. Шклярського, А.І. Маркушевича, Г.М. Бермана, І.Ф. Шаригіна, К.А. Рибнікова. Більшість з них вважали, що нестандартні задачі можна розв'язувати і традиційними методами, проте нестандартні підходи швидше і оригінальніше приводять до результату [1, 2].

Такі задачі пропонується розв'язувати як на уроках математики, так і при виконанні учнями домашніх завдань. Особливу увагу слід приділяти розв'язуванню нестандартних задач при підготовці учнів до участі в математичних олімпіадах, в конкурсах наукових робіт, під час гурткової роботи, в темах для науково-дослідницького пошуку, а також при підготовці учнів до конкурсних екзаменів.

Використання нестандартних задач на уроках геометрії сприяє активізації розумової діяльності учнів, розширенню їх уяви, спрямуванню уваги; викликає інтуїцію і створює творчий підхід до розв'язування проблеми.

Підбір і розв'язування нестандартних задач проводиться вчителем в залежності від теми уроку. Частіше такі задачі пропонуються при встановленні взаємозв'язків між певними геометричними величинами, що вивчаються в окремих темах; при повторенні матеріалу, вивченого за чверть, за півріччя або за рік; при підготовці до контрольної роботи, математичної олімпіади або до участі в конкурсах з математики, при виконанні учнями домашніх завдань і науково-дослідницьких робіт.

Розглянемо на прикладах деякі випадки доцільності використання нестандартних задач у навчальному процесі.

При вивченні властивостей вписаних і описаних кіл відносно трикутника важливо встановити певні залежності між радіусами кіл і сторонами трикутника, щоб потім використовувати їх при розв'язуванні складніших задач. Для цього пропонуються такі задачі на доведення тверджень.

№1. Довести, що в будь-якому прямокутному трикутнику сума діаметрів вписаного і описаного кіл дорівнює сумі його катетів.

№2. Довести, що в будь-якому трикутнику радіус R описаного кола і радіус r вписаного кола пов'язані з відстанню l між центрами цих кіл таким співвідношенням: $l^2 = R^2 - 2Rr$.

№3. Довести, що в будь-якому трикутнику добуток двох його сторін дорівнює добутку висоти, проведеної до третьої сторони, на діаметр описаного навколо трикутника кола: $a \cdot b = h_c \cdot 2R$..

№4. Довести, що у гострокутному трикутнику сума відстаней від центра описаного кола до сторін трикутника дорівнює сумі радіусів вписаного і описаного кіл: $h_1 + h_2 + h_3 = R + r$.

Кожна із запропонованих задач характеризується різними підходами до розв'язання з використанням відомих положень з геометрії, алгебри і тригонометрії. Завдання вчителя полягає у спрямуванні думки учнів при знаходженні результату.

Для прикладу розглянемо розв'язання задачі №4.

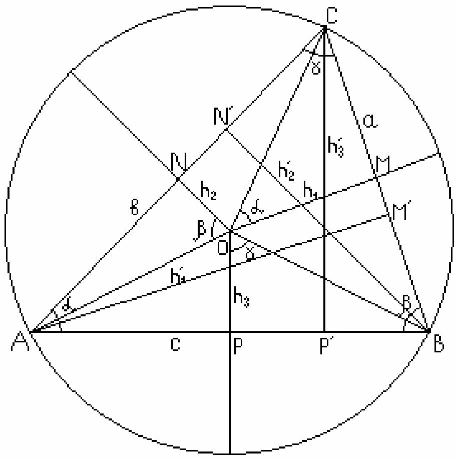


Рис. 1.

Нехай дано гострокутний ΔABC, в якому AB=c, BC=a, AC=b, O – центр описаного кола, є точкою перетину серединних перпендикулярів, проведених до сторін трикутника, OA=OB=OC=R – радіус описаного кола. Серединами сторін BC, AC і AB є точки M, N, P (рис. 1). Побудуємо трикутники: BOC, AOC і AOB і позначимо їх висоти відповідно: OM=h_1, ON=h_2, OP=h_3.

Очевидно, що площа трикутника дорівнює сумі площ його частин.

Площі трикутників ВОС, АОС і АОВ будемо визначати за формулою: $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, а площу ΔABC визначимо через добуток радіуса r вписаного кола на півпериметр. Тоді

$$ah_1 + bh_2 + ch_3 = r(a + b + c). \tag{1}$$

Позначимо у ΔABC кути при вершинах: $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$. Визначимо тепер кожну сторону даного трикутника через дві інші: побудуємо висоти з кожної вершини даного трикутника і за допомогою пар прилеглих до висот h_1', h_2' і h_3' (AM' = h_1', BN' = h_2', CP' = h_3') прямокутних трикутників, суми катетів яких утворюють одну із сторін даного трикутника. Запишемо рівності:

$$\begin{aligned} a &= b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta , \\ b &= a \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha , \\ c &= b \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\beta . \end{aligned} \tag{2}$$

Додавши почленно рівності (2) і домноживши їх на R, одержимо:

$$(a + b)R \cos\gamma + (a + c)R \cdot \cos\beta + (b + c)R \cdot \cos\alpha = R(a + b + c) \tag{3}$$

Оскільки вписаний кут $\angle$BAC$=\alpha$ опирається на дугу ВС, то центральний кут $\angle$BOC$=2\alpha$ (згідно теореми про вимірювання вписаних кутів). Так як пряма (ОМ) ділить навпіл хорду і дугу, відповідну цій хорді, то $\angle$COM$=\angle$BOM$=\alpha$.

Аналогічно, $\angle$BOP$=\angle$AOP$=\gamma$, і $\angle$AON$=\angle$CON$=\beta$.

Із прямокутних трикутників ВОМ, AON, AOP визначимо висоти:

$$h_1 = R \cdot \cos\alpha,\ h_2 = R \cdot \cos\beta,\ h_3 = R \cdot \cos\gamma. \tag{4}$$

Враховуючи формули (4), додамо почленно рівняння (1) і (3). Після елементарних перетворень одержимо:

$$h_1 + h_2 + h_3 = R + r.$$

Задачу розв’язано.

Нестандартність задачі полягає в тому, що при її розв’язанні використовувалися відомі твердження з різних розділів математики: різні формули площі трикутника, властивості вписаних і описаних кіл відносно трикутника, представлення сторін трикутника через тригонометричні вирази, властивості вписаних і центральних кутів, алгебраїчні перетворення рівнянь.

Розв’язування таких задач ставить потребу перед учнями регулярно повторювати пройдений матеріал з усіх розділів математики і швидко орієнтуватись в його застосуванні.

Такий підхід до проведення навчального процесу розвиватиме розумову діяльність учнів, викликатиме в них творчу ініціативу і сприятиме всебічному їх розвитку.

Література:

1. Скопец З.А. Геометрические миниатюры. / Сост. Г.Д. Глейзер. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
2. Михайловський В.І. Збірник республіканських математичних олімпіад. – К.: Вища школа, 1975. – 172 с.
3. Петраков И.С. Математические олимпиады школьников. – М.: Просвещение, 1982. – 96 с.

ПРО ПОБУДОВУ ПЕРЕРІЗІВ ПРОСТОРОВИХ ФІГУР НА ПРОЕКЦІЙНИХ МАЛЮНКАХ

П.І. Ульшин, Г.С. Єчкало
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

При вивченні геометрії важливим елементом є побудова зображень просторових фігур на площині. Використання учнями малюнків розвиває в них просторову уяву і графічну культуру. Правильно побудований малюнок наочно демонструє властивості геометричної фігури і стимулює розумову діяльність на виконання поставленої задачі.

Часто на уроках стереометрії недостатньо приділяється уваги побудові малюнків. При цьому учні як на дошці, так і в зошитах малюють як хто вміє, не дотримуючись ніяких правил. Доходить до того, що навіть прямі лінії будують від руки кривими. При такому навчанні в учнів виникає нерозуміння геометричних задач і небажання їх розв’язувати.

Розглянемо, як слід вчити будувати зображення геометричної фігури. Проекційний малюнок утворюється проектуванням фігури на площину. Є три види проектувань: центральне, паралельне і ортогональне. Ще в стародавні часи було помічено, що фігура менше спотворюється (змінюється) при паралельному проектуванні. Тому Евклід у своїй праці “Начала” користувався таким видом зображень.

В наш час до проекційного малюнка просторової фігури ставляться такі три вимоги: правильність, наочність і простота. Щоб малюнок був правильним, його потрібно будувати за законами паралельного проектування; щоб малюнок був наочним, на ньому не повинно бути співпадаючих ліній; простий малюнок не повинен містити зайвих ліній.

При побудові малюнка слід дотримуватись правил і вимог встановлених у кресленні. Зокрема, використовувати такі лінії: суцільну основну – для побудови видимого контуру фігури, суцільну потовщену – для виділення певних частин фігури; суцільну тонку – для штрихування перерізів; штрихову – для зображення невидимого контуру фігури; штрих-пунктирну – для осьових і центральних ліній і ін.

При побудові за допомогою паралельного проектування малюнків просторових фігур потрібно враховувати, що будь-який трикутник проектується у довільний трикутник; чотирикутники з протилежними паралельними сторонами (квадрат, прямокутник, ромб) зображаються паралелограмом; коло проектується в еліпс і т.д.

Особливо великі утруднення в учнів викликають задачі на побудову перерізів просторових фігур. Перерізом називають плоску фігуру, яка утворюється в перетині площиною даної просторової фігури. Так перерізом многогранника є многокутник з вершинами на його ребрах; перерізом кулі є круг, який зображається еліпсом; перерізом конуса можуть бути еліпс, або гіпербола, або парабола, або дві прямі (перетинні, паралельні чи співпадаючі) і т. д.

Перерізи просторових фігур на їх проекційних малюнках будуються за допомогою теоретично обґрунтованих способів. Найчастіше використовують 1) <u>спосіб сліду</u> і 2) <u>спосіб внутрішніх перерізів</u> (його ще називають способом відповідності).

Суть способу сліду полягає в тому, що за елементами, які задають січну площину і площину основи просторової фігури, будується <u>слід</u>, тобто лінія перетину цих площин. Далі розглядаються випадки: 1) якщо точка січної площини лежить у грані многогранника не паралельній до сліду, то пряма перерізу цієї грані пройде через дану точку і перетнеться із своєю проекцією на основу в точці, яка належить сліду; 2) якщо точка січної площини лежить у площині на фігурі паралельній до сліду, то в цій площині пряма, яка належить перерізу, пройде паралельно сліду.

Розглянемо приклади.

<u>№ 1</u>. Побудувати переріз чотирикутної піраміди SABCD січною площиною, заданою трьома точками M, N і P, розташованих відповідно на ребрах SA, SB і SC.

<u>Розв'язання</u>:

Точки M і N лежать у грані SAB даної піраміди, тому відрізок MN є перерізом цієї грані січною площиною.

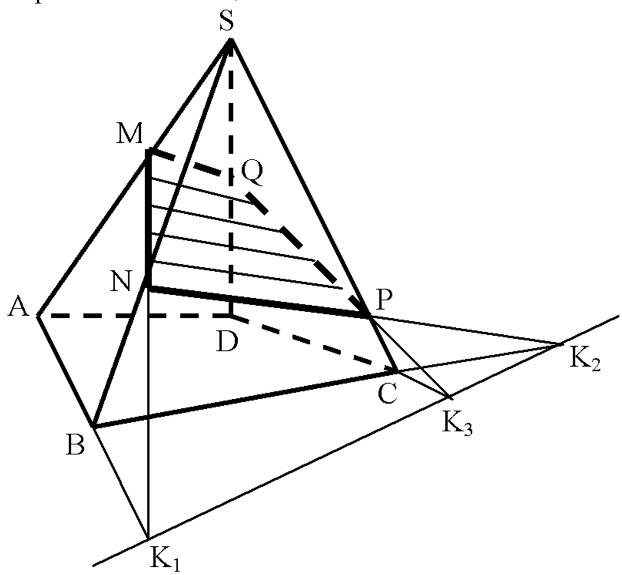


Рис. 1.

Відрізок AB є проекцією відрізка MN на площину основи піраміди при центральному проектуванні з точки S. Прямі (MN) і (AB) не паралельні, лежать в одній площині і тому перетинаються в точці K_1, яка належить сліду. Аналогічно знаходяться переріз NP грані SBC і точка K_2, яка належить сліду. Будуємо пряму (K_1K_2) – слід. Знаходимо точку $K_3 = (K_1K_2) \cap (DC)$. Будуємо пряму (K_3P) у січній площині і визначаємо точку $Q = (K_3P) \cap (SD)$. Відрізки PQ і QM є перетином січної площини з невидимими гранями SCD і SDA даної піраміди, тому малюються штриховими лініями. Чотирикутник MNPQ є шуканим перерізом (рис. 1).

№ 2. Побудувати переріз прямого кругового циліндра, з центрами основ O_1 і O_2, січною площиною, заданою слідом ℓ, розташованим у площині нижньої основи циліндра, і точкою M, яка належить верхній основі циліндра.

Розв'язання:

Через точку M проведемо пряму $\ell' \parallel \ell$ і знайдемо точки A і B перетину прямої ℓ' з контуром верхньої основи циліндра. Відрізок AB є перерізом січною площиною верхньої основи циліндра.

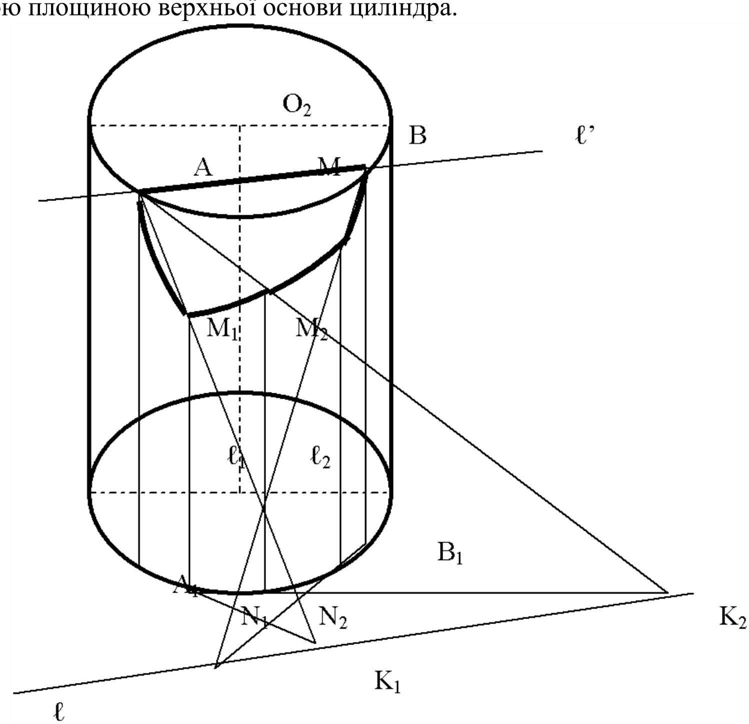


Рис. 2.

Розіб'ємо дугу A_1B_1 еліпса нижньої основи циліндра на *n* – частин точками N_1, N_2, … і проведемо через них твірні ℓ_1, ℓ_2, … циліндра. На слідові ℓ будуємо точки: $K_1 = (A_1N_1) \cap \ell$, $K_2 = (A_1N_2) \cap \ell$, … . На бічній поверхні циліндра знаходимо точки: $M_1 = (A_1K_1) \cap \ell_1$, $M_2 = (A_1K_2) \cap \ell_2$, … . точки M_1, M_2, … належать лінії перетину січної площини з бічною поверхнею циліндра. Цю лінію будують плавним з'єднанням одержаних точок за допомогою лекала. Чим більше буде число n, тим точніше буде побудована лінія. Одержаний переріз штрихується тонкими суцільними лініями (рис. 2).

Розглянутим способом сліду можна користуватися лише в тому випадку, коли можна побудувати слід у межах малюнка. У противному разі цей спосіб не підходить.

Спосіб внутрішніх перерізів є універсальним. Ним можна користуватися незалежно від нахилу січної площини до площини основи фігури. Суть його така: в середині просторової фігури проводяться допоміжні площини. Які перетинаючись з січною площиною утворюють точки шуканого перерізу. Розглянемо застосування цього способу на прикладі.

№ 3. Побудувати переріз п'ятикутної призми січною площиною, заданою трьома точками M, N і P на бічних ребрах призми.

Розв'язання:

Оскільки точки M і N у невидимій грані AA_1E_1E, то відрізок MN належить перерізу і будується штриховою лінією. Аналогічно, NP в грані EE_1D_1D будується штриховою лінією. Проведемо площину AA_1D_1D, яка перетинає січну площину по прямій (MP), а площину основи по прямій (AD).

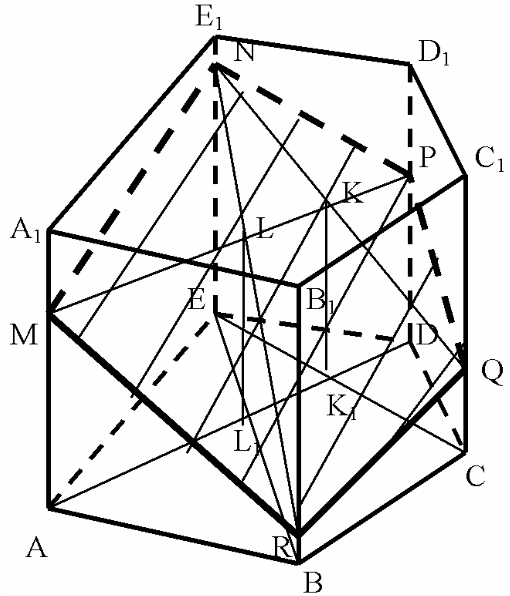


Рис. 3.

Побудуємо площину EE_1C_1C, яка перетинає площину основи по прямій

(EC), а січну площину по прямій (NK). Знаходимо точку Q = (NK) ∩ (C_1C). Відрізок PQ належить перерізу і лежить у невидимій грані, тому зображається штриховою лінією.

Будуємо площину EE_1B_1B, яка перетинає площину основи по прямій (EB), а січну площину по прямій (NL). Знаходимо точку R = (NL) ∩ (B_1B). Відрізки MR і RQ належать перерізу і будуються на видимих гранях суцільною потовщеною лінією. Побудований переріз MNPQR штрихується тонкою суцільною лінією (рис. 3).

Такий підхід до побудови перерізів просторових фігур на проекційних малюнках буде сприяти розвитку просторової уяви, графічної культури, навичкам роботи з креслярськими інструментами, підвищенню розумової діяльності учнів.

Література:

1. Астряб О.М., Дубінчук О.С. Методика викладання стереометрії. – К.: Радянська школа, 1956. – 279 с.
2. Бевз Г.П. Методика розв’язування стереометричних задач. – К.: Радянська школа, 1988. – 192 с.
3. Посвянский А.Д. Краткий курс начертательной геометрии. – М.: Высшая школа, 1970. – 240 с.

ВИКОРИСТАННЯ ВЕКТОРНОЇ АКСІОМАТИКИ Г. ВЕЙЛЯ ПРИ ВИВЧЕННІ ГЕОМЕТРІЇ

П.І. Ульшин, І.В. Сорока
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Аксіоматичний метод, родоначальником якого вважається видатний вчений Стародавньої Греції Евклід, чітко обґрунтовує як шкільну так і вузівську геометрію. Суть його можна описати так:

1. Вводяться основні поняття, які називаються первісними, тобто без означень. Ці поняття складаються з основних об'єктів і основних співвідношень. Основними об'єктами є певні речі. Ними можуть бути, наприклад , точки, прямі, площини, вектори. Основні співвідношення встановлюють певні зв'язки між основними об'єктами. Їх можна визначити такими словами: "належність", "лежати між", "конгруентність", "довжина відрізка", "градусна міра кута", "додавання і віднімання векторів", "множення вектора на число", "скалярний добуток векторів", "відкладання вектора від точки" тощо.
2. Основні поняття володіють певними властивостями. Ці властивості описуються найпростішими очевидними твердженнями, які називаються аксіомами. Від цієї назви і походить назва даного методу.
3. Далі, формулюються твердження, які доводяться лише за допомогою аксіом. Потім, ідуть твердження, які доводяться за допомогою аксіом і вже доведених тверджень і т. д. Доведені твердження, якими користуються для доведення інших тверджень і розв'язування задач, називаються теоремами. Всі твердження повинні бути логічними наслідками аксіом або доведених теорем. Так за допомогою аксіоматичного методу будується теорія, в якій усі твердження систематизуються, тобто розташовуються в певній послідовності від простішого до складнішого.

На початку XX століття, крім евклідової, з'явилися і інші аксіоматики, які теж правильно обґрунтовують геометрію і відрізняються вибором основних понять та аксіомами.

Аксіоматика на базі векторів вперше була описана німецьким математиком Г. Вейлем у його книзі "Простір. Час. Матерія", що вийшла в 1918 році. Векторна аксіоматика характерна тим, що нею можна обґрунтовувати не лише планіметрію і стереометрію, а всю геометрію n-вимірного простору, де n – довільне натуральне число. Таке обґрунтування поставило геометрію в загальний стрій системи математичних наук і створило сучасне її розуміння.

Відомо, що в сучасній математиці важливим апаратом є векторне обчислення. Таке обчислення містить в собі векторну алгебру і векторний аналіз.

До векторної алгебри відносяться дії над векторами: додавання, віднімання, множення вектора на число, добутки векторів (скалярний, векторний, мішаний й ін.). У векторному аналізі вивчаються вектор-функції. Основними поняттями його є градієнт, дивергенція, ротор, векторні поля тощо.

В наш час за допомогою векторного обчислення будуються всі сучасні курси теорії електрики, теоретичної механіки, аеродинаміки, аналітичної і диференціальної геометрій.

Векторна аксіоматика дає строге, просте і зрозуміле обґрунтування елементарній геометрії. З ним можна детально ознайомитися в книзі В.Г. Болтянського [1]. Проте такий підхід у викладанні, незважаючи на його строгість і сучасність, має деякі ускладнення у методичному плані. Він дещо формалістичний. Тому питання доцільності використання векторної аксіоматики і шкільному курсі поки що залишається відкритим.

Незважаючи на це, векторний метод пропонується використовувати в шкільній геометрії там, де він приводить простіше і швидше до вірних результатів, ніж інші методи.

Векторний метод ґрунтується на застосуванні властивостей векторів і дій над ними. У шкільному курсі геометрії вектор не відноситься до основних об'єктів аксіоматики і вивчається в планіметрії і стереометрії після введення координатного методу. Проте, у багатьох випадках при розв'язуванні задач та доведенні теорем застосування векторів ефективніше за конструктивні підходи, пов'язані з використанням додаткових побудов, застосуванням елементарної алгебри і тригонометрії.

Для швидкого користування векторним методом потрібно навчити учнів записувати таблицю геометричних співвідношень і їм відповідних векторних рівностей. Як записується така таблиця можна показати на уроках, коли вивчаються певні властивості векторів, а детальніше її розглянути на факультативних заняттях або в позакласній роботі.

Щоб успішно розв'язувати геометричні задачі за допомогою векторів, потрібно не тільки знання законів векторної алгебри, знайомство з поняттям розкладання вектора в базисі, уміння переводити геометричний факт на мову векторів, але і певна методика. Відзначимо кілька важливих положень.

1. Якщо потрібно обчислити відстань або кут, то треба застосовувати скалярний добуток векторів.

2. При введенні векторів можна йти двома шляхами:

а) вибрати точку, від якої відкладаються відомі вектори;

б) вектори зображати напрямленими відрізками, які пов'язані з фігурами, що розглядаються в задачі, не відкладаючи їх від однієї точки.

3. Якщо задача планіметрична, то доцільно виділити два неколінеарних вектори в якості базисних, а інші виразити через них; якщо ж задача стереометрична, то як базис варто вибрати три некомпланарних вектори. При цьому введення початкової точки необов'язкове.

4. В деяких випадках, наприклад, при розв'язуванні задач на многогранні кути, обчислення спрощуються, якщо ввести одиничні вектори, відкладені від вершини многогранного кута.

Розглянемо приклад застосування векторного методу до розв'язування задач.

Приклад. В трапеції ABCD бічна сторона CD перпендикулярна до основи AD, BC = *a*, AD = *b*, *a* < *b*. На основі AD існує така точка M, що MB⊥AC, а MC⊥BD. Знайти висоту трапеції.

Розв'язання

Покладемо $\overrightarrow{BC}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}, \overrightarrow{CD}=\vec{h}, \overrightarrow{MD}=\vec{y}$ (рис. 1).

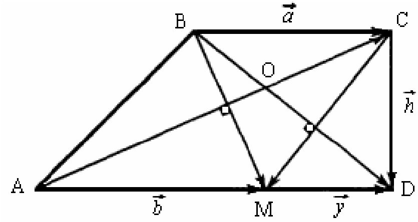


Рис. 1

Тоді $\overrightarrow{BD}=\vec{a}+\vec{h}$, $\overrightarrow{CM}=\vec{h}-\vec{y}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}-\vec{h}$, $\overrightarrow{BM}=\vec{a}+\vec{h}-\vec{y}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{CM}$ перпендикулярні, то $\overrightarrow{BD}\,\overrightarrow{CM}=0$, звідки $(\vec{a}+\vec{h})(\vec{h}-\vec{y})=0$

або

$$\vec{a}\vec{h}-\vec{a}\,\vec{y}+\vec{h}^2-\vec{h}\vec{y}=0 \quad . \tag{1}$$

Вектор $\vec{h}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{y}$, тому $\vec{a}\vec{h}=\vec{h}\vec{y}=0$.

З (1) маємо:

$$-\vec{a}\,\vec{y}+\vec{h}^2=0 .$$

Оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{y}$ колінеарні і співнапрямлені, то $\vec{a}\,\vec{y}=ay$.

Тому

$$\vec{h}^{\,2}=a\cdot y \tag{2}$$

З того, що $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BM}$, випливає $\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BM}=0$,

або

$$(\vec{b}-\vec{h})(\vec{a}+\vec{h}-\vec{y})=0 ,$$

$$\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{h}-\vec{b}\vec{y}-\vec{a}\vec{h}-\vec{h}^2+\vec{h}\vec{y}=0 . \tag{3}$$

Як вже зазначалось, $\vec{a}\vec{h}=\vec{h}\vec{y}=0$. На тій же підставі $\vec{b}\vec{h}=0$. Тому з (3) маємо:

$$\vec{a}\vec{b}-\vec{b}\vec{y}-\vec{h}^2=0 ,\ a\cdot b-b\cdot y-h^2=0,\ y=\frac{a\cdot b-h^2}{b} .$$

Значення y підставимо в (2): $h^2 = \frac{a^2b - ah^2}{b}$, звідки $h = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$.

Відповідь: $h = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$.

Векторний метод, звичайно, не універсальній, до розв'язання деяких задач він не може бути застосований або виявляється малоефективним. Але цей метод має також і значні переваги, а саме: при розв'язанні задач він дає можливість порівняно легко робити узагальнення, іноді далекосяжні; він не вимагає розгляду складних геометричних конфігурацій, а зводить геометричну задачу до алгебраїчної, яку легше розв'язувати, ніж вихідну геометричну; метод дозволяє зняти труднощі при розв'язанні стереометричних задач, що викликані недостатнім розвитком просторових уявлень, який заважає учням бачити необхідні зв'язки між елементами просторових фігур; дозволяє раціонально розв'язувати традиційні і нетрадиційні задачі та демонструвати цікаві властивості геометричних фігур, чим, безперечно, розвиває інтерес до геометрії; дає можливість розв'язувати також фізичні (і технічні) задачі, і тим самим здійснює міжпредметні зв'язки.

Література:

1. Болтянский В.Г., Волович М.Б., Семушин А.Д. Векторное изложение геометри (в 9 классе средней школы): Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982. – 143 с.
2. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия, I часть. – М.: Просвещение, 1986. – 336 с.
3. Гусев В.А. и др. Векторы в школьном курсе геометрии. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1976. – 46 с.

ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ З ВИКОРИСТАННЯМ ЕЛЕМЕНТІВ ЇЇ ІСТОРИЧНОГО РОЗВИТКУ

П.І. Ульшин, Г.Є. Сипіна
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Використання елементів історизму при вивченні математики є одним із важливих принципів навчального процесу. Цей принцип мав місце у всіх періодах вивчення математики і ніколи не втратить свого призначення. З цього приводу ще в 17 ст. дуже влучно помітив видатний німецький вчений Г. Лейбніц: "той, хто хотів би обмежитися сучасним без знання минулого, ніколи не зрозуміє сучасного" [2].

Прикладне значення математики дуже велике. А всебічний розвиток будь-якої науки неможливий без глибокого аналізу її історії. Історія математики має особливу привабливість. Задачі й теореми, доведені сотні й тисячі років тому, захоплюють своєю красою, витонченістю логічних міркувань, так само, як захоплювали всі попередні покоління.

На IV курсі спеціальності "математика та інформатика" вивчається курс історії математики. На лекціях студенти знайомляться з періодизацією розвитку цієї науки, зробленою академіком А.М. Колмогоровим.

Далі розглядається розвиток математики у кожному із чотирьох періодів. Звертається увага на суспільно-економічні відносини між країнами, розповідається про видатних вчених та їх відкриття, розглядаються характерні особливості, що відбуваються в математиці: кризи, застої, стрибки плодотворного розвитку.

На семінарських заняттях студенти на конкретних прикладах із задоволенням вивчають застосування методів: неподільних, вичерпування, вставок, луночок та інших. Досліджують властивості "золотого перерізу" різних видів, розв'язують цікаві класичні задачі нестандартними методами і т.д.

Серед елементів змісту при викладанні історії математики слід відмітити нумерації, символи і терміни, історичні задачі, цитати з математичних трактатів тощо. Вони можуть подаватися як вербалізовано (виклад лекції викладачем, виступ студента на семінарському занятті, усний контроль), так і матеріалізовано (тексти у книгах чи методичних розробках, схеми, діаграми). Наведемо кілька конкретних прикладів.

Маючи ще зі школи уявлення про римську нумерацію, кожен студент може прочитати число XXIV. Ознайомившись з правилом запису чисел за допомогою давньогрецької (іонійської) нумерації, студенти без особливих труднощів прочитають числа $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ (1, 2, 3) та, $\overline{\alpha}$ (1000) і $\overline{\beta}$ (2000). Але щоб записати в іонійській нумерації число 444, їм потрібно звернутися до грецького алфавіту, матеріалізованого у вигляді таблиці (табл. 1).

Історичні задачі та спеціальні способи їх розв'язування дають можливість показати, як розвиток математики впливав на саму постановку задачі, метод її розв'язання та власне розв'язки. Так, у Стародавній Греції за відсутності алгебраїчної символіки та уявлення про від'ємні числа подання і розв'язування квадратних рівнянь виконувалось за допомогою геометричних побудов. У такий спосіб знаходилися тільки додатні корені, а рівняння виду $x^2+c=bx$ і $x^2+bx=c$ вважалися різними і мали різні способи розв'язування.

Таблиця 1.

Свою специфіку використання мають і матеріальні засоби навчання. Не традиційними засобами навчання для математики, але широко застосовними у процесі викладання її історії, є карти. Карти з історії різних часів мають стати невід'ємним атрибутом лекції з історії математики. За їх допомогою відбувається поєднання слухового й візуального сприйняття матеріалу, концентрується увага студентів не лише на хронологічній послідовності подій, а й на їх територіальних ознаках. Виникнення і взаємозв'язок багатьох подій в історії розвитку математики обумовлюється певною мірою територіальними й національними особливостями. Так, найбільшого розвитку в найдавніші часи математика набула в Єгипті (долина річки Ніл) та Вавилоні (долини річок Тигр та Євфрат). Про це писали грецькі історики, а Геродот ще й підкреслював, що саме розливи річки Ніл сприяли розвитку геометрії, бо з погляду оподаткування потрібно було знати, скільки землі втрачено під водою. Відомості про розвиток математики в Єгипті за 2000 р. до н.е. дійшли до нашого часу завдяки тому, що були записані на спеціально обробленому папірусі (трава, що росте на берегах річки Ніл). Цей матеріал учитель математики зможе пізніше використати в шкільній практиці :на позакласних заняттях з математики чи під час інтегрованих уроків. Прикладом може служити інтегрований урок з математики та історії в 6-му класі на тему "Математика в Стародавньому Єгипті".

Знання, вміння і навики, одержані студентами при вивченні історії математики використовуються ними при написанні курсових, кваліфікаційних і магістерських робіт. В цих роботах певні поняття, символи, твердження описуються не „сухими" фазами означень, а з використанням їх історії виникнення. Це надає роботам більшої цінності.

Важливо, що історія математики розширює кругозір студентів у поглядах на використання відомих тверджень, методів, формул, цікавих задач тощо. В зв'язку з цим в їх свідомості закріплюються можливості для створення проблемних ситуацій, написання цікавих тем для наукових робіт школярам тощо.

Вчитель, який вміло використовує цікаві історичні факти на уроках математики, як правило, завжди успішно проводить уроки, а учні добре засвоюють поданий ним матеріал.

В математиці є багато тверджень, задач, методів з легендарним минулим. Повідомлення учням про це обов'язково пробудить в них інтерес до вивчення цієї дисципліни.

Учні повинні твердо знати, що математика є продуктом творчої діяльності людського генія на протязі тисяч років, а не хитра вигадка "мудреця". Кожна теорема − це узагальнення велетенського досвіду людства.

Правильно організоване включення історичного матеріалу на уроках математики дозволить показати учням зразки наукової принциповості, працелюбності, наполегливості й завзятості в роботі.

Розглянемо конкретні приклади з історії елементарної геометрії, які допоможуть "прикрасити", "оживити" геометричні факти, вміщені в підручниках.

Життєві потреби поставили людину перед низкою питань, що стосуються форми оточуючих її предметів; обчислень, пов'язаних з вимірюванням земельних ділянок, будівельною роботою і т.п.

Обчислюючи об'єм призми і циліндра, єгипетські вчені множили площу основи S на висоту h, а для знаходження об'єму піраміди використовували формулу $V=(1/3)S{\cdot}h$.

Найвидатнішим досягненням єгипетської математики є правило знаходження об'єму правильної зрізаної чотирикутної піраміди. Це правило відповідає сучасній формулі

$$V = (1/3){\cdot}h{\cdot}(a^2 + ab + b^2),$$

де h – висота піраміди, a і b – сторони нижньої і верхньої основ піраміди.

Порівняно з єгиптянами, вавілонські математики зробили крок уперед у розвитку геометрії. Квадрат і трикутник вавілоняни сприймали як абстрактні фігури, про прямокутник говорили – "те, що має довжину і ширину", про трапецію – "лоб бика", про круг – "вигин", про сегмент – "поле півмісяця", фігуру з двох конгруентних сегментів із спільною хордою – "око бика". Термінів для понять: "точка", "пряма", "лінія", "поверхня" "паралельність" ще не було. Вимірювання проводилось за допомогою мотузки.

Єгипетську та вавілонську математичну культури продовжували розвивати греки. Вони змогли привести в систему накопичені знання і, таким чином заклали початки геометрії як дедуктивної науки. Математика давньої Греції пройшла довгий та складний шлях розвитку, в якому відокремлюють три періоди в залежності від характеру знань.

1. Накопичення окремих математичних фактів та проблем (VI–V ст. до н.е.).

2. Систематизація отриманих знань (IV–III ст. до н.е.).

3. Період обчислювальної математики (III ст. до н.е. – VI ст.).

При формуванні в учнів наукового мислення можна використовувати не лише сучасні методи, а й методи, відомі з давніх давен.

Розв’язування цікавих задач давнини сучасними методами сприяє поглибленому засвоєнню навчального матеріалу.

Наприклад, Архімед у трактаті “Вимірювання круга” (III ст. до н.е.) при обчисленні периметрів вписаного і описаного 96-кутників встановив, що $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ [1]. Покажемо, як встановлюється цей проміжок.

Нехай l_k – сторона правильного k-кутника, l_{2k} – сторона правильного $2k$-кутника. Подамо довжину сторін l_{2k} через l_k (рис. 1). З прямокутних трикутників ОМК та NMK маємо:

$$l_{2k} = \sqrt{KM^2 + MN^2} \,,$$

де $KM = l_k/2$, $MN = R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l^2}$.

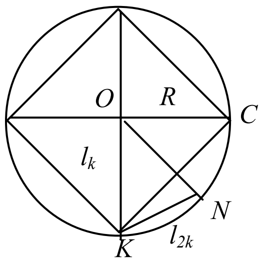


Рис. 1.

Перетворимо вираз під знаком кореня:

$$l_{2k} = \sqrt{2\sqrt{R^2} - R\sqrt{4R^2 - l_k^2}} \,. \qquad (2)$$

При $r = 1$ маємо Так як $l_6 = R = 1$, то, використовуючи формулу (2) для l_{2k}, послідовно обчислюємо:

$$l_{2k} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_k^2}} \,.$$

$$l_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4-1}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}\,, \quad l_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \,.$$

$$l_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

$$l_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} \approx 0{,}06544... \approx \frac{223}{3408}$$

Для одиничного кола

$$\pi R = \pi, \quad 2\pi R > 96 \cdot l_{96}, \quad \pi > 48 \cdot l_{96} \quad \text{або} \quad \pi > 3\frac{10}{71}$$

Верхня межа обчислюється аналогічно.

Вивчення елементів історизму сприяє встановленню внутрішньопредметних зв’язків серед математичних дисциплін, розширенню розумового кругозору учнів та підвищенню їх загальної культури.

Література:

1. Ван дер Варден Б. Пробуждающаяся наука. – М.: Физматгиз, 1959.
2. Конфорович А.Г. Математика служить людині. – Київ: Рад. шк., 1984. – 192 с.

НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ З ВИКОРИСТАННЯМ НОВІТНІХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Т.М. Фасолько
м. Кам’янець-Подільський, Кам’янець-Подільський державний університет
k_i_t_t_y@xaker.ru, tanichka13@yandex.ru

Кінець XX століття характеризується розбудовою освіти на нових прогресивних концепціях, запровадженням у навчально-виховний процес сучасних педагогічних та інформаційних технологій, науково-методичних досягнень. У своєму курсі до Європейського освітнього простору система освіти в Україні зіткнулася з необхідністю інтенсифікації розвитку нових та вдосконалення існуючих педагогічних технологій, пошуку нових форм навчання та ін.

На сучасному етапі розвитку суспільства стало зрозумілим, що вся система знань про світ, людину і суспільство має бути переглянута в напрямку повернення до цілісного знання єдиної картини світу. Студенти мають усвідомити, що математика має своїм предметом цілком реальний матеріал, але, розглядаючи його, повністю відволікається від конкретного змісту і якісних особливостей. Вони повинні зрозуміти, що можливість широких застосувань математики до досліджень реального світу ґрунтується саме на тому, що її взято з цього самого світу і вона виражає частину притаманних йому форм зв’язків і власне тільки тому взагалі може застосовуватись. В проекції на шкільну математичну освіту вимога “знати небагато про все” має забезпечуватися державними освітніми стандартами, а тим, хто навчається на достатньому і вищому рівнях, – знати більше. Саме стандарт виділяє мінімум змісту математичної освіти і мінімальні вимоги до цього змісту і стає основою диференціації навчання.

Також, постає проблема викладання на природничих факультетах, в яких частина студентів вважають, що це “зайвий предмет” і для них вимоги програми з вищої математики завищені, а інші знають, що вивчення математики – це об’єктивна необхідність в сучасному інформаційному просторі. Важливим засобом розв’язання цієї “вічної ”проблеми могла б бути рівнева диференціація опитування за допомогою прикладного програмного забезпечення. Таким чином, відібравши попередньо за складністю питання і завдання для перевірки, викладач дає змогу кожному самостійно, оцінюючи свої можливості, вибрати рівень складності. Використання мультимедійних засобів та інших інформаційних технологій при вивченні математики може зацікавити, надати новий поштовх для вивчення математичних дисциплін.

Проаналізувавши визначення мультимедіа засобів, можна дійти висновку, що вони можуть цілком самостійно уособлювати матеріальну частину освітнього середовища, за виключенням, звичайно, педагогічних кадрів. Хоча й в деяких випадках, коли мова йде про самоосвіту студентів, цю роль на себе беруть контролюючі тестуючі системи або ж програми-репетитори. Важливість застосування мультимедіа засобів саме й полягає в тому, що вони вносять в урок “цікаву новизну”, яка за своїм змістом і формою викладу дає можливість відтворити за короткий час значний за обсягом матеріал, а також по-новому його з’ясувати, викликати в студентів нові образи, уточнити нечітко сформовані уявлення, поглибити здобуті знання.

Використання мультимедіа з метою повторення, узагальнення та систематизації знань не тільки допомагає створити конкретне, наочно-образне уявлення про те, що вивчається, але й доповнити відоме новими даними та провести чітку рівневу диференціацію, яку з допомогою новітніх інформаційних технологій можна досить легко втілити в життя. Відбувається не лише процес пізнання, відтворення та уточнення вже відомого, але й поглиблення знань. Проте зловживати цими засобами не можна. По-перше, це забирає дуже багато часу вчителя на підготовку до такого уроку, а, по-друге, може “збити” з робочого настрою – тому що, як показує практика, студенти сприймають такі уроки як свято і досить важко налаштувати їх на роботу. Але це пояснюється лише тим, що раніше нічого подібного на заняттях в них не було і з часом настає звикання.

Поява нових цифрових, телекомунікаційних та мережевих технологій, засобів мультимедіа, систем штучного інтелекту викликала необхідність створення нових освітніх систем із зовсім іншими підходами до побудови навчального процесу як середньої, так і вищої школи. Однак при спробі впровадження та використання нових інформаційних і комп’ютерних технологій виникає проблема спроможності цих засобів оптимізувати навчання та забезпечити досягнення глобальної мети освіти – оволодіння теоретичними та прикладними основами предмета, розвиток здатності до самоосвіти на рівні інтелектуального, світоглядного та соціокультурного збагачення особистості.

Становлення наукового світогляду студентів неможливе без ознайомлення зі специфікою математичних методів пізнання, формування уявлень про математичне моделювання, розуміння зв’язку математики з дійсністю. Наприклад, вивчення геометрії сприяє формуванню наукового стилю мислення та творчих здібностей людини, розвитку в неї раціонального мислення з характерними для нього такими рисами, як обґрунтованість, критичність, економічність, алгоритмічність; розвитку уяви, інтуїції, які є основою творчої діяльності особистості. Якщо при вивчені перерізів використовувати комп’ютер і дати можливість кожному студентові самостійно побудувати переріз для просторової фігури, то кожен зможе на власні очі побачити, як виглядатиме фігура з різних кутів зору, і цей матеріал не буде настільки важким і незрозумілим.

Більшість написаних навчальних програм являють собою навчання по аналогії, чи по прикладах з елементами інтуїтивно-інтерактивного підходу. А таким методом досягається успіх лише при виконанні певних умов:

– задачі повинні бути формалізовані;
– покрокові інструкції повинні бути представлені в термінах, добре відомих користувачеві;
– необхідно мати можливість активного апробування фрагментів навчальної програми в реальному навчальному середовищі.

Тому досить важко знайти і придбати дійсно потрібні, грамотно написані програми, які б могли допомогти вчителеві інтенсифікувати навчальний процес, враховуючи при цьому степінь зацікавленості і рівень підготовки кожного студента. Проте використовувати на своїх заняттях тестуючі програми, або писати власні, може кожен викладач математики. Послідовність підготовки завдань для тестового контролю містить у собі наступні етапи:

1. Відбір питань і завдань та специфікація навчальних елементів з математики.
2. Визначення об'єктів контролю і виділення навчальних елементів, по яких будуть складені тести.
3. Складання тестів у першому (чорновому) варіанті.
4. Експертно-редакційна перевірка і коректування тестів.
5. Експериментальна перевірка.
6. Аналіз результатів експериментальної перевірки і коректування завдань і еталонів.

При використанні тестування необхідне коректування традиційних форм і методів організації навчального процесу. Можливість підвищення оперативності і регулярності контролю припускає розбивку матеріалу досліджуваного розділу на ряд навчальних модулів, що мають відносно самостійне значення. Обсяг модуля може відповідати 1-4 лекціям і 3-5 практичним заняттям.

Очевидним є той факт, що інформаційні технології розвиваються більш інтенсивно порівняно з їх використанням в навчальному процесі. Це пов'язано, насамперед з тим, що є недостатня кількість педагогічних кадрів, які б так само добре володіли інформаційними технологіями, як і своїм предметом. Також, звичайно, на даний час відчувається дефіцит математичного програмного забезпечення, написаного на високому рівні, а існуючі чітко спеціалізовані на певному конкретному розділі математики.

Література:

1. Авраменко Н.И. Уроки алгебри и начал анализа 10 и 11 классах: Пособие для учителя. – К.: Радянська школа, 1989. – 320 с.
2. Бевз Г.П. Методика викладання математики. – К.: Вища школа, 1989. – 368 с.
3. Бурда М. Теорія шкільного підручника з математики як предмет методичного дослідження // Математика в школі. – 1999. – №2. – С. 4-7.

ДОВЕДЕННЯ ТА ВИКОРИСТАННЯ НЕРІВНОСТІ КОШІ-БУНЯКОВСЬКОГО

З.Ю. Філер
м. Кіровоград, Кіровоградський державний педагогічний університет
ім. Володимира Винниченка
filer@kw.ukrtel.net

Автор, як і всі студенти Харківського університету 50-х років, вивчав формулу Коші-Буняковського-Шварца (КБШ) в курсі лінійної алгебри та почув згадку про неї в курсі матаналіза. Потім побачив її в спецкурсі "Функціональний аналіз". Авторство В.Я. Буняковського сприймалося в контексті боротьби за пріоритет вітчизняної науки всупереч "космополітичній буржуазній" науці. Пройшли роки; цю формулу він багато разів доводив традиційним методом студентам-інженерам та математикам-прикладникам у Донецькому політехнічному інституті. Як правило, він обмежувався евклідовим простором. У 1972 р. він працював за індивідуальним планом на ФПК Новосибірського держуніверситету (НДУ), користуючись не тільки бібліотекою НДУ, а й бібліотеками СВ АН СРСР та Інституту математики СВ АН СРСР. В Інституті математики був вільний доступ до полиць. На одній з них знайшлась книга *Августина Каші* у російському перекладі В.Я. Буняковського 1831 р. Додумався, що так *тоді* писали замість сучасного "Огюстен Коші". Пізніше прочитав, що з дозволу Коші Буняковський видав переклад *раніше*, ніж вийшов французькою оригінал. Це значно підняло авторитет Буняковського в очах вже не студента, а викладача. Викладаючи математику студентам-математикам та фізикам у Кіровоградському педагогічному університеті, він зацікавився *комплексними* розв'язками нерівностей, використовуючи для їх розв'язання метод *відхилу* (нев'язки) [1]. Тому стало цікаво: як доводять нерівність КБ (Коші-Буняковського) для *унітарного* простору; виникла ідея дійти й до тіла кватерніонів. Далі розглядається методичний підхід авторів до нерівності КБ.

Вступ. Всі знають, що модуль добутку двох дійсних чисел дорівнює добутку їх модулів: $|\boldsymbol{ab}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$. Потім встановлюється справедливість цього правила й для комплексних множників. Перехід до *скалярного* множення **векторів** на площині чи в просторі, яке виникає у фізиці при знаходженні роботи A сили $\boldsymbol{F}$ на переміщенні $\boldsymbol{s}$ за формулою $A=\boldsymbol{Fs}\cdot\cos(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{s})$, дає для них формулу $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Фактично, роботу A створює не вся сила $\boldsymbol{F}$, а її проекція $\boldsymbol{F_s}$ на напрямок переміщення ($\boldsymbol{F_s}=\boldsymbol{F}\cdot\cos(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{s})$) (рис. 1). Враховуючи область значень функції *косинус*, отримаємо **нерівність** $-\boldsymbol{ab}\leq(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\leq\boldsymbol{ab}$, або за допомогою модулів: $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|\leq|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$. Це і є нерівність Коші-*Буняковського*, яка безпосередньо випливає з означення скалярного добутку *геометричних* векторів в "реальному" просторі, в якому ми живемо і працюємо. Для величини роботи маємо із закону збереження енергії $|A|\leq\boldsymbol{Fs}$. Знак "=" досягається, коли сила має напрямок переміщення.

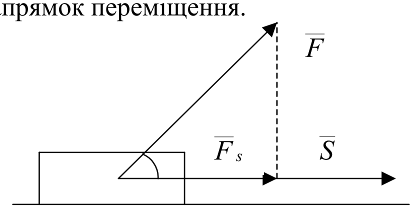


Рис. 1. Робота сталої сили на прямолінійному шляху

1. Класична нерівність Коші-Буняковського для *довільного* евклідового простору (лінійного простору зі скалярним добутком – *дійсним* числом) може бути доведена достатньо просто за допомогою леми.

Лема 1. Для довільних **одиничних** векторів $\boldsymbol{a}^0$ й $\boldsymbol{b}^0$ справедлива нерівність

$$-1 \le (\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0) \le 1. \qquad (1)$$

Доведення використовує властивості скалярного добутку для квадрата суми та різниці цих векторів: $(\boldsymbol{a}^0 \pm \boldsymbol{b}^0)^2 = 2 \pm 2\cdot(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0) \ge 0$.

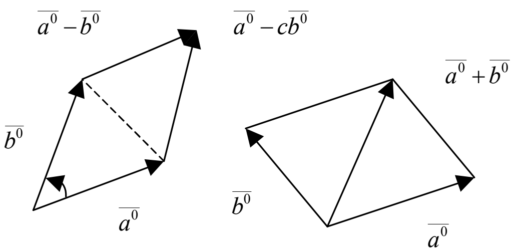
Тепер нерівність Коші-Буняковського

$$-\boldsymbol{ab} \le (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \le \boldsymbol{ab} \qquad (2)$$

отримується множенням (1) на добуток $\boldsymbol{ab}$ модулів векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$, ортами яких є вектори $\boldsymbol{a}^0$ та $\boldsymbol{b}^0$.

2. Традиційно для доведення НКБ використовують нерівність для скалярного квадрату $(\boldsymbol{a}-c\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-c\boldsymbol{b}) \ge 0$, яка є однією з аксіом **скалярного множення векторів**. Інші аксіоми містять переставний закон, можливість винести скалярний (дійсний) множник c у вектора за знак скалярного добутку та розподільний закон множення відносно додавання, тобто, щоб помножити суму векторів, треба помножити кожен доданок окремо і результати додати. Рівність його нулю досягається лише для нуль-вектора $(0, 0)=\mathbf{0}$. Розкриваючи дужки, отримують квадратний тричлен $\boldsymbol{b}^2c^2-2\cdot(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\cdot c+\boldsymbol{a}^2$ відносно множника c; його знакосталість вимагає недодатності *дискримінанта*, що й дає нерівність $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\le 0$. Знак рівності "=" виконується для колінеарних векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$, коли згаданий дискримінант дорівнює нулю. Очевидний *штучний* характер доведення нерівності. *Чому* треба брати такий скалярний квадрат?

Нерівності (1) мають просту геометричну інтерпретацію: діагоналі одиничного ромба мають довжину не більше 2, а скалярний добуток векторів-сторін є косинусом кута, який не перевищує за модулем 1 (рис. 2). Нерівність (2) дозволяє коректно ввести поняття **кута між векторами** у будь-якому евклідовому просторі, задаючи його формулою $\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})/(\boldsymbol{ab})$. Можна ввести й поняття проекції вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ за формулою $\mathbf{Пр}_{\boldsymbol{в}}\,\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})/\boldsymbol{b}$. Модуль вектора $\boldsymbol{b}$ при цьому визначається формулою $b=\sqrt{(\bar{b},\bar{b})}$.



1) гострий кут 2) тупий кут

Рис. 2. Менша діагональ ромба

3. Можна побудувати метод доведення, який легко узагальнюється. Замість двох випадків ("+" чи "–") можна взяти один, коли будується вектор $\boldsymbol{a}^0 - s\boldsymbol{b}^0$, а s=sgn(($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$)) – сигнум-функція (1***знак**($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$)). Тоді $s(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|$. Тут sgn($\boldsymbol{a}$)=$\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ при $\boldsymbol{a} \in \mathbf{C}$.

4. В унітарному просторі, де скалярний добуток є **комплексне** число, тим же методом отримуємо нерівність $-\boldsymbol{ab} \le \mathrm{Re}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \le \boldsymbol{ab}$.

Але можна довести більш жорстку нерівність для скалярного добутку, який є **комплексним** числом:

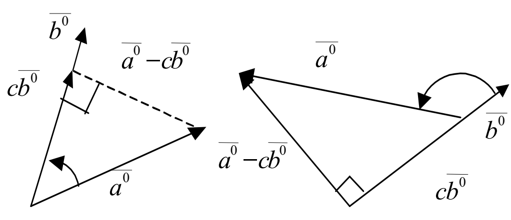
$$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \le \boldsymbol{ab}, \tag{3}$$

розглянувши у лемі нерівність $(\boldsymbol{a}^0 - c\boldsymbol{b}^0,\ \boldsymbol{a}^0 - c\boldsymbol{b}^0) \ge 0$ при c=sgn(($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$)), sgn $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}/|\boldsymbol{d}|$ для $\boldsymbol{d} \in \mathbf{C}$. В унітарному просторі замість переставного закону скалярного добутку $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ маємо перестановку векторів із спряженням, коли $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})^*$, а добуток спряжених є квадратом модуля. Для множника c другого вектора маємо правило винесення за знак скалярного добутку: $(\boldsymbol{a}, c\boldsymbol{b}) = c^*(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Більш інформативною, ніж нерівність, є відповідна рівність

$$|(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)|^2 = 1 - (\boldsymbol{a}^0 - c\boldsymbol{b}^0,\ \boldsymbol{a}^0 - c\boldsymbol{b}^0)/2, \tag{4}$$

із якої й випливає нерівність Коші-Буняковського (КБ). Для **дійсних** геометричних векторів ця рівність є наслідком теореми Піфагора (вектори $c\boldsymbol{b}^0$ й $\boldsymbol{a}^0 - c\boldsymbol{b}^0$ є катетами трикутника з гіпотенузою $\boldsymbol{a}^0$, яка має довжину 1; їх довжини дорівнюють косинусу та синусу кута між векторами $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$) (рис. 3). Ідейно такий метод доведення наведено й в [2, с. 87].



1) гострий кут 2) тупий кут

Рис. 3. Катети трикутника, побудованого на ортах

Нерівність (3) та рівність (4) дають велику кількість конкретних нерівностей та **оцінок** при виборі того чи іншого векторного простору та закону скалярного добутку в ньому. Наприклад, для $\boldsymbol{k}$-мірних векторів із комплексними координатами отримаємо нерівність

$$\left|\sum_{p=1}^{k} a_p b_p^{*}\right|^2 \le \sum_{p=1}^{k} |a_p|^2 \sum_{p=1}^{k} |b_p|^2$$

та її відповідний інтегральний аналог у **дійсному** просторі інтегрованих з квадратом функцій:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right). \tag{5}$$

Для комплекснозначних функцій замість функції $g(x)$ під інтегралом зліва треба взяти комплексно спряжену функцію $g^*(x)$, а замість квадратів функцій справа – квадрати їх модулів (тобто, добутки типу $g(x)g^*(x)$).

У нескінченно вимірному просторі замість сум виступають **ряди** та **невласні** інтеграли.

5. Якщо скалярний добуток є число $a+b\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{j}+d\boldsymbol{k}$ **з тіла кватерніонів** (де $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1$, a, b, c, $d \in \mathbf{R}$), то тим же методом доводиться й нерівність (3). Число $s=\exp(\boldsymbol{i}\arg(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0))$. В будь-якому **нормованому** просторі можна ввести поняття *орта* вектора $\boldsymbol{a}$ за правилом $\boldsymbol{a}^0=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$. Число s відіграє таку ж роль у просторі значень скалярного добутку векторів лінійного простору.

6. Геометричне тлумачення нев'язки (відхилу). В евклідовому просторі (де скалярний добуток є **дійсне** число) згаданий вище ромб має гострий кут між сторонами при додатному $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, а діагональ $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ є меншою з двох діагоналей, нев'язка $|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|^2/2$ в нерівності Коші *менша*, ніж при знаку "+". Для тупого кута, при від'ємному $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, меншою буде нев'язка при знаку "–" (діагональ – сума векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ – має меншу довжину), тобто $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|^2/2$ (рис. 3).

Тут число c має тільки два значення. В унітарному просторі в ролі знакового множника s виступає значення функції $\mathrm{sgn}((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})/|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|$, тому для доведення й варто використовувати скалярний квадрат $(\boldsymbol{a}-s\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-s\boldsymbol{b})$; тоді нев'язка у нерівності Коші – величина $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|^2/2$ – буде *найменшою*. Похідна по s від скалярного квадрата є $2\cdot(\boldsymbol{a}-s\boldsymbol{b}, -\boldsymbol{b}) = 0$ при $s=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})/|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|$. Звідси випливає перпендикулярність векторів $\boldsymbol{a}-s\boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{b}$.

Рівність (4) для звичайних векторів є наслідком теореми косинусів

$$\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{ab}\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Для одиничних векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ й отримано рівність (4).

7. Цікаво, що підручник геометрії О.В. Погорєлова [3] містить завдання на *самостійне* доведення нерівності $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 \le \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$ для векторів на *площині* (с. 139), де скалярний добуток визначається як сума добутків відповідних координат. Уже потім доводиться, що скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх модулів на косинус кута між ними. Там можна отримати різницю величин правої та лівої частин $\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1)^2>0$ при $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1\neq 0$. Якщо вектори колінеарні (тоді їх координати пропорційні, що доводиться у підручнику на с. 132), то $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1=0$ й замість нерівності маємо рівність $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$. У відповідях та вказівках з приводу цього доведення автор підручника нічого не радить. Ми гадаємо, що при вивченні геометрії за підручником О.В. Погорєлова бажано це завдання розглянути *на уроці* зі згадкою В.Я. Буняковського (16.12.1804–12.12.1889) та підкреслити зв'язок із областю значень функції *косинус*.

8. Нерівність КБ в інтегральному варіанті можна тлумачити мовою фізики ще в школі! Для ланцюга змінного синусоїдального струму $\boldsymbol{i}(t)=\mathbf{I}\sin\omega t$, який знаходиться під напругою $\boldsymbol{u}(t)=\mathbf{U}\sin(\omega t-\varphi)$ маємо миттєву потужність $\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{u}(t)\boldsymbol{i}(t)$, яка дає *використану* енергію $\mathbf{E}$ за період $\mathbf{T}=2\pi/\omega$ у вигляді інтегралу від $\boldsymbol{P}(t)$. Враховуючи формулу добутку синусів двох кутів, отримаємо $\mathbf{E}=0{,}5\mathbf{UIT}\cos\varphi$; очевидно $\mathbf{E}=(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{i}(t))$ за формулою (5). Для $(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t))$ та $(\boldsymbol{i}(t), \boldsymbol{i}(t))$ маємо відповідно значення $\mathbf{U}^2\mathbf{T}/2$ та $\mathbf{I}^2\mathbf{T}/2$. Звідси отримаємо очевидну нерівність $\mathbf{E}^2=(0{,}5\mathbf{UIT}\cos\varphi)^2 \leq (0{,}5\mathbf{UIT})^2$, бо $(\cos\varphi)^2 \leq 1$. Серед фахівців-енергетиків зрозуміла боротьба за *підвищення* модуля $\cos\varphi$ – це боротьба за ефективне використання електричної енергії. У методі *векторних діаграм* для синусоїдальних векторів використовується просто означення скалярного добутку двох векторів як добутку їх модулів на косинус кута між ними (рис. 4). Аналогічний результат отримується при використанні комплексних функцій $\boldsymbol{u}(t)=\mathbf{U}\exp(\boldsymbol{i}\omega t-\varphi)$, $\boldsymbol{i}(t)=\mathbf{I}\exp(\boldsymbol{i}\omega t)$ й $\mathbf{P}=\mathbf{UI}\exp(\boldsymbol{i}\varphi)$, бо $\mathbf{P}=\mathbf{I}\exp(\boldsymbol{i}\omega t)\cdot\mathbf{U}\exp(\boldsymbol{i}\omega t-\varphi)^*=\mathbf{UI}\exp(\boldsymbol{i}\varphi)$.

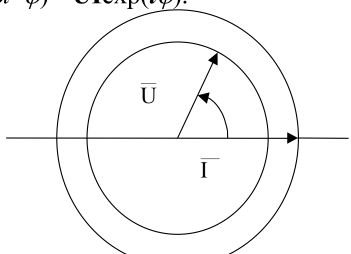


Рис. 4. Метод векторних діаграм для потужності

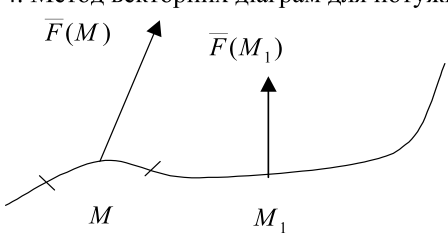


Рис. 5. Робота змінної сили на криволінійному шляху.
Диференціал роботи $\mathrm{d}A = (\boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{s})$, $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$.

Ще простіший приклад знаходження роботи сили $\boldsymbol{F}(t)$, яка діє на тіло, що рухається зі швидкістю $\boldsymbol{v}(t)$: вона є інтегралом від скалярного добутку $(\boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{v}(t))$ по t (рис. 5).

9. Інші види добутків векторів. Враховуючи, що *векторний* добуток $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ має модуль $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, для звичайних геометричних векторів маємо аналог нерівності Коші

$$|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|^2 \le \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2.$$

Для *мішаного добутку трьох* векторів маємо аналогічну нерівність

$$|\boldsymbol{abc}|^2 \le (\boldsymbol{abc})^2.$$

В декартовій системі координат це дає нерівності

$$((\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1)^2 + (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1)^2 + (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1)^2) \le \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$$

та

$$(\det(\boldsymbol{abc}))^2 \le (\boldsymbol{abc})^2.$$

Знак “=” досягається тут для перпендикулярних векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ й $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$. Останній результат узагальнюється для *зовнішнього* добутку векторів з координатами, які утворюють квадратну матрицю **A** з рядками-векторами $\boldsymbol{a}_k$:

$$|\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n)|^2 \le (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2...\boldsymbol{a}_n)^2, (\det(\mathbf{A}))^2 \le (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2...\boldsymbol{a}_n)^2.$$

Знак “=” тут досягається для взаємно перпендикулярних векторів, коли матриця $\mathbf{A}^0$ з ортів буде *ортогональною*, тобто її добуток на транспоновану буде за абсолютною величиною рівним 1.

При кількості векторів, яка на 1 менша, ніж “довжина” вектора – його розмірність, матимемо узагальнення векторного добутку 2 векторів, для квадрата модуля якого маємо нерівність:

$$\mathbf{A}_{11}{}^2 + \mathbf{A}_{12}{}^2 + ... + \mathbf{A}_{1n}{}^2 \le (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2...\boldsymbol{a}_{n-1})^2,$$

де $\mathbf{A}_{1k}$ – алгебраїчне доповнення елемента $\boldsymbol{a}_{1k}$. Знак “=” досягається для взаємно перпендикулярних векторів-рядків $\boldsymbol{a}_k$. Для **компланарних** векторів (коли ранг матриці **A** дорівнює нулю) всі $\mathbf{A}_{1k}=0$ й векторний добуток є нуль-вектор.

Література:

1. Філер З.Ю. Рівняння та нерівності в науці та навчанні // Математика, її застосування та викладання: Матер. міжвуз. регіон. наук. конф. 24-25.09.1999. – Кіровоград: КДПУ, 1999. – С. 141-145.

2. Ткаченко С.П., Філер З.Ю. Комплексні розв’язки квадратної нерівності // Математика в школі. – 2003. – № 2. – С. 47-49.

3. Математические основы теории автоматического регулирования / Под ред. Б.К. Чемоданова. – М.: Высш. шк., 1971. – 808 с.

4. Погорєлов О.В. Геометрія. Навч. посіб. для 6-10 кл. сер. шк., вид. 6. – К.: Рад. шк., 1987. – 187 с.

КАК ОБЕСПЕЧИТЬ КАЧЕСТВО ЗНАНИЙ МАТЕМАТИКИ

З.Е. Филер
г. Кировоград, Кировоградский государственный педагогический университет имени Владимира Винниченко
filer@kw.ukrtel.net

За последние полвека в СССР постепенно снизился уровень реальных знаний математики учащимися и выпускниками средней школы. Подчиняясь последствиям этого процесса, органы народного образования и вузы снижают уровень требований к абитуриентам. Из билетов письменного экзамена в большинстве вузов изымают задачи, способствующие выработке навыков построения математической модели. Более стандартными становятся примеры на тождества, уравнения и неравенства. В последние десятилетия массово издаются решебники, снимающие необходимость творческих усилий для решения нестандартных задач. Появление калькуляторов ведёт к неумению производить арифметические действия «вручную», к утрате чутья величины числа. Дело дошло до практического незнания таблицы умножения. Ученики и студенты не хотят и не умеют проверить результат своих вычислений, у них отсутствует чувство ответственности за правильность найденного решения. Учителя жалеют время, необходимое для проверки, решая как можно большее число типовых примеров. Качество знаний «теории» (определений, формул, теорем и их доказательств) находится на очень низком уровне. Часто не усвоены основные понятия даже начальной школы. В условиях уменьшения времени на изучение математики в общеобразовательной школе всё это ведёт к практической математической неграмотности основной массы выпускников. Особенно пагубно это для работы педагогических вузов. Часто их выпускники с трудом усваивают в конце обучения то, что раньше поступившие знали в период вступительных экзаменов. Непрестижность педагогических профессий, низкая оплата труда учителя только ухудшают ситуацию. Каждое следующее поколение учителей знает свой предмет всё хуже и хуже. Замкнутый круг: слабые учителя – слабые абитуриенты – ещё более слабые учителя. Как разорвать этот круг?

Выделить необходимый *минимум*, предъявить эти *требования* учащимся, научить их *самоконтролю*. Автор был причастен к старту известного учителя – новатора В.Ф. Шаталова. Именно таким путём донецкий учитель обеспечил высокое качество знаний учеников, вселил в них веру в возможность знать этот минимум, уметь решать задачи и желание их решать. Будучи заведующим кафедрой математики в Донецком политехническом институте, автор предложил метод изучения малых доз формализованной информации, дополнив указанный метод Шаталова использования опорных конспектов.

Анализ стандартного курса математики начала 70-х гг. показал наличие всего 256 простых фактов – основных понятий, определений, теорем, формул (без таблиц сложения и умножения, изучаемых в начальной школе, и элементов математического анализа, вошедших в школьную программу в конце 70-х гг.). Учитывая, что эти понятия изучались с 5 по 10-й класс, более 30 недель в учебном году, по 5–6 уроков в неделю, мы видим, что один такой факт непосредственно изучается на 3–4 уроках, а потом многократно повторяется на протяжении нескольких лет. И всё-таки, большинство детей не владеет этими фактами, не говоря уже об умении их использовать! Мы предлагаем использовать для запоминания таблички из плотной бумаги (картона), на одной стороне которых написана одна часть двойного «слова», а на другой – вторая. Например, на одной стороне написана разность кубов чисел A и B, а на другой – произведение разности оснований на неполный квадрат их суммы:

$A^3 - B^3 =$	$(A - B)(A^2 + AB + B^2)=$

При желании ученик может за один день заучить 10 таких табличек. Поместив их в один карман, и вытягивая по одной, он напрягает свою память и проверяет, правильно ли он запомнил факт, записанный на табличке. Угадав содержимое обратной стороны, он перекладывает формулу в другой карман. Когда первый карман опустеет, начинается работа с табличками из второго кармана. Двукратное узнавание формулы (определения и т.п.) свидетельствует об усвоении факта. Так можно изучать однозначно формализованные факты из всех учебных дисциплин, особенно словарный запас иностранного языка. Учитель предлагает ученикам заготовить таблички дома, заполнив их прямо на уроке. Сложнее научить *использовать* запомненные факты.

В погоне за «скоростью» при решении типовых задач, учителя оформляют кабинеты математики таблицами, висящими на стенах класса, которые можно использовать на уроке. Эта «скорая помощь» такая же, как использование таблицы умножения, помещённой на обложке тетради в клеточку. Многие учителя не понимают, что *научить* означает обеспечить, прежде всего, *запоминание* необходимых фактов. Прошедшие дореволюционную школу имели глубокие знания в результате высокого качества преподавания и требовательности учителей. Наученные ими выпускники 20–30-х годов стали ядром советской интеллигенции, обеспечившей Победу и послевоенное восстановление народного хозяйства. Снижение требований и процентомания начались с середины 50-х гг.; через поколение это и привело ко всеобщей безответственности, увеличению числа ЧП и даже к Чернобыльской трагедии мирового масштаба. Там безответственность при наличии возбуждающего фактора привела к недозволенным роковым экспериментам с ядерным реактором. Одним из таких факторов стала быстро нарастающая солнечная активность, приведшая к резкому скачку геомагнитной активности непосредственно перед расплавлением регулирующих стержней. Отключение автоматики и неадекватная реакция в ручном режиме и привели к тепловому взрыву. Ещё страшнее были бы последствия ядерного взрыва 200 тонн радиоактивных веществ в реакторе. А сколько «простых» аварий случилось за последние десятилетия в стране! Извечное русское «авось» наложилось на некомпетентность и безответственность всюду, от материального производства до духовного состояния общества. Зато «качество знаний» школы и вузы обеспечивают (по требованию непосредственных руководителей) очень высокое. Фактически исчезла не только «2», но и «тройка» без особых усилий. Раз требуют, то поставлю, что, мне жалко, что ли? От этого лучше всем – от ученика и его родителей до руководителей кафедр, факультетов, вузов и министерств. Между тем, настоящий государственный подход требует объективной оценки знаний учащихся. Украина сегодня – бедная страна; она не может себе позволить готовить за свой счёт плохих специалистов, которые законсервируют эту бедность. “Чого ми дурні? – Бо бідні. – А чого ми бідні? – Бо дурні”. Открытие коммерческих вузов и отделений в государственных вузах внесло в эту проблему новый стимул – борьбу за абитуриента. Снижать плату за обучение – не просто (исчезает смысл открытия такой формы обучения), но легче снижать требования к поступающим вплоть до отсутствия всякой проверки. Плати деньги – и ты студент! А потом идут разговоры, что и с таким студентом надо работать, надо его учить. А он часто не *хочет*, да и не *может* учиться нормально – нет базы и нет привычки, навыков самообучения.

Где же выход? В регулярном проведении *оперативного контроля*. Мы его реализуем в форме математических диктантов (МД). Идеальным было бы проведение их на каждом практическом занятии (ПЗ) и на некоторых лекциях. На лекциях лучше проверять твёрдое усвоение «теории» – определений, теорем и формул, а на ПЗ – навыков их использования. Вопросы должны быть простыми и знакомыми, задачи – на 1–2 действия. На лекциях достаточно 5 вопросов (на 5 минут), на ПЗ – 5–15 вопросов-задач. Чтобы уменьшить влияние списывания, можно часть данных связать с личностью студента (например, с его № по списку группы). Приведём пример одного варианта на тему «Функция».

1. Дайте определение функции.
2. Варианты аналитического способа задания функции.
3. $F(x) = (3nx - 1)/(2nx + 2)$. $F(2)$ – ?
4. Найти область существования $F(x)$.
5. $F'(x) = ?$
6. $F'(2) = ?$
7. Какой смысл имеет это число?
8. Выделить целую и дробную части функции $F(x)$.
9. Найти первообразную для $F(x)$.
10. Какой физический смысл имеет результат?
11. Найти интеграл функции $F(x)$ по отрезку (0; 1).
12. Дать геометрическое истолкование этому интегралу.

13. Какой геометрический смысл имеет предел $F(x)$ при $x\to\infty$?

14. Найти этот предел.

15. Какой вид имеет график этой функции?

После ответов студентам на вопросы по этому МД, можно организовать его проверку с помощью студентов (лично проверив работы проверяющих). Студентам необходимо переписать все условия и дома выполнить *анализ* МД, дав полные аргументированные ответы. Затем надо организовать контроль за правильностью и полнотой этого анализа, рассказав на следующих занятиях о лучших решениях, о типичных ошибках и нерациональных подходах и т.п. Безусловно, можно добавлять и другие вопросы (например, о наличии экстремумов, об интервалах монотонности, об односторонних пределах к точке разрыва и т.д.). Знание важных понятий необходимо проверять многократно. Мы считаем нецелесообразным проводить длительные контрольные работы (на 1 или 2 часа) и на них давать и «творческие» задачи. Такие задачи можно давать на дом, обсуждая затем разные решения в аудитории.

Необходимо приучить студентов к самоконтролю и, в частности, к *проверке*. К сожалению, большинство преподавателей в школе и в вузе жалеет время на проверку, считая целесообразным «сэкономленное» время использовать на дополнительные тренировки в решении «прямых» задач. Такие суждения иллюзорны. Проверка – органический способ *повторения.* Проверяя вычитание, дети складывают, проверяя результат деления – умножают; найденный корень проверяют подстановкой, радикал – возведением в степень и т.п. Особенно важно научить проверять интегрирование и решение дифференциального уравнения. Труднее проверить найденное число – значение определённого интеграла, решения в указанной точке и т.п. К сожалению, изучение тригонометрии, логарифмов и радикалов часто является чисто формальным. Ученики и студенты не умеют работать с *таблицами*, даже Брадиса; получая число на дисплее калькулятора, не представляют *правдоподобность* результата, не могут сделать даже прикидку. Аналогичные недостатки присущи и решениям задач «высшей математики», когда преподавателя устраивает результат типа $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x+3}\right)^{2x-1}=e^{10}$. А сколько это? Ведь e^{10} – это символ, указывающий, что надо взять число e=2,71828… и возвести его в 10-ю степень. Тут полезно использовать таблицы или калькулятор со встроенной функцией x^y. В любом случае необходимо понимать, что $2^{10}<e^{10}<3^{10}$, т.е. $1024<e^{10}<59049$, ближе к 59 тысячам, чем к 1 тысяче.

Больше решать *задач*, чем примеров. Работая в политехническом институте, автор, взаимодействуя с инженерами, усвоил их желание выработать у студентов навыки в *постановке* математических моделей с последующем их *анализом* и *истолкованием* результатов в терминах изучаемой задачи. Для этого преподавателей математики необходимо надолго закреплять за конкретными факультетами и специальностями, стимулируя их научно-исследовательскую работу в содружестве с инженерами. Однако, сообщения студентам того, что такой-то материал будет использоваться ими при изучении специальных дисциплин, недостаточно. Естественным связующим звеном между математикой и специальными дисциплинами является *физика*, изучавшаяся в школе и изучаемая в вузе. Поэтому желательно вводить новые математические понятия с помощью соответствующих физических понятий (*векторы* и операции с ними с помощью перемещений, скоростей, ускорений, сил, используя понятия равнодействующей, результирующей, второй закон Ньютона и т.п.). Практически все математические понятия являются абстракциями от *физических* абстракций, даже такие экзотические, как δ–функция Дирака, понятия потенциальной *бесконечности*, несобственного интеграла, *плотности* вероятности и т.п. Начиная от введения новых понятий до решения задач с физическим содержанием, можно и нужно взаимодействовать с коллегой – преподавателем физики, теоретической механики, сопротивления материалов, электротехники и др.

Высокое качество знаний математики – это не только овладение минимально необходимым математическим аппаратом, но и воспитанные *волевые* качества, *ответственность* за результаты своего интеллектуального труда, *организованность* и умение использовать результаты предшественников, реализованные в формулах, алгоритмах, программах. Надо поощрять выполнение студентами индивидуальных домашних расчётных заданий (ИДЗ) с помощью программных комплексов типа Excel, Matlab, Mathcad и др., *поиск информации* не только в учебнике, но и в журналах и монографиях, в Интернет. Желательно выдавать студентам темы для рефератов с учётом их специальности, накапливая эти рефераты, выдавая их в следующие годы для рецензирования. «Свежие» рефераты надо давать студентам на взаимное рецензирование. Очень полезно изготовление студентами *моделей*, что способствует выработке у них опыта конструирования и делает сложные понятия наглядно простыми. Нами накоплен 50-летний опыт такой работы в школе и ВУЗе. К сожалению, ряд коллег считает такую работу не только не необходимой, но и вредной. Не все собранные за много лет лучшие рефераты и модели при смене помещения кафедры были сохранены. В условиях тесноты, фактического отсутствия помещений и шкафов, лаборантов на математических кафедрах, это, как и многое другое, ложится на плечи преподавателя-энтузиаста, которого часто недолюбливают за объективность требований к студентам, за действительное желание обеспечить высокое качество их знаний. Их работа служит укором для тех, кто поддался давлению и делает вид соответствия требований и выставленных им же желаемых для «начальства» оценок реальным знаниям учащихся. Автор мечтает о времени, когда работа преподавателя будет оцениваться объективно и за *завышение* оценок преподавателя будут наказывать. Помнится, как в конце 60-х ректор Донецкого политехнического института (ДПИ) предложил автору изучить опыт «передовых» вузов и использовать его для резкого подъёма % успеваемости (о «качестве» тогда ещё разговора не было). Изучив опыт одного из молодых вузов, автор убедился в сознательном завышении оценок коллегами в этом институте. Через несколько лет в решении Коллегии Минвуза этот вуз был обвинён в резком завышении оценок на экзаменах. Вместо 95% успеваемости проведенная инспекцией контрольная работа показала только 5% успеваемости! Интересно, что наши коллеги с кафедры графики ДПИ ещё в 60-е годы проводили зачёты и экзамены в студенческих группах «перекрестно». Никто не обижался на этот порядок, введенный на кафедре уже не один год. При независимом тестировании после школы и в вузе объективности можно добиться, особенно, если тестирующая фирма дорожит своей репутацией и не хочет быть лишённой лицензии на свою деятельность.

Видимо, при объективной оценке знаний средний балл распределён по нормальному закону, где % отличных и неудовлетворительных оценок невелик, а основную массу составляют оценки «4» и «3». Существенное смещение вершины кривой успеваемости в сторону «5» и «4» возможно только при высокой заинтересованности учеников и учителя. Так и произошло с восьмым классом СШ №13 г. Донецка, в котором математику и физику преподавал в конце 60-х В.Ф. Шаталов. Автор по просьбе Шаталова присутствовал на уроках математики во время работы комиссии Минобразования УССР, целью которой было закрыть идущий в нём эксперимент. Почувствовав настроение комиссии, дети стали горой на защиту своего учителя, несмотря на провокации комиссии, обвинявшей учителя в перегрузке учащихся. Он и себя загрузил большой работой по шлифовке содержания и методов преподавания, вёл уроки с высокой интенсивностью, так что у него «рубашка была в поту» не только в переносном смысле. Результат его работы освещён и в книжке «Куда и как девались тройки». Стимулом для учащихся был не только повседневный тотальный контроль усвоения материала, но и гарантирование знаний, достаточных для поступления в институт. Кому – в МГУ или МФТИ, кому в КГУ, ДонГУ, ДПИ, а кому – в Краматорский индустриальный. Сейчас же требуют *планового* смещения кривой среднего балла не менее, чем на 10% безотносительно к составу класса (группы) на «входе» и реального состояния знаний учащихся. А знания эти, как мы уже отмечали, необычайно низки. Действительно, «принимаем дубы, а выпускаем липу». Может быть, и осознание этого было одной из причин активного участия студентов в «оранжевой революции»? Надоела всеобщая атмосфера лжи и ханжества. Поймут ли это новые руководители Минобразования?

ПРИКЛАДИ ЗДІЙСНЕННЯ МІЖПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ МІЖ АЛГЕБРОЮ І ГЕОМЕТРІЄЮ

А.І. Хазін, Г.А. Хазін
м. Умань, Загальноосвітня школа №3 I–III ступенів
м. Умань, Уманський державний педагогічний університет
імені Павла Тичини
g_khazin@yahoo.com

В ті чи інші часи такому важливому інструменту навчання, як міжпредметні зв'язки, надавалось різне місце. Але слід усвідомити, що без здійснення міжпредметних зв'язків не може бути якісної освіти в будь-яки часи, в будь-яких умовах.

Математика є опорним предметом при вивченні суміжних дисциплін (фізики, хімії, інформатики, біології, географії, економіки). Тому без належної математичної підготовки є неможливим повноцінна освіта сучасної людини та забезпечення її неперервності [4].

В різні часи основним завданням освіти, як з точки зору суспільства, так і з точки зору того, хто свідомо навчається, є, з одного боку, формування наукового світогляду, реальної цілісної картини оточуючого світу. З іншого боку, метою навчання є одержання таких знань, умінь і навичок, які створюють передумови для дальшого професійного і культурного вдосконалення. І з цієї точки зору роль міжпредметних зв'язків в системі предметного навчання і роль математики при здійсненні цих зв'язків, як інтегруючого фактору, є неоціненною.

Серед міжпредметних зв'язків в системі предметного навчання слід відмітити зв'язки між алгеброю і геометрією. З певних міркувань може виникнути думка, що ці зв'язки зовсім і не варто кваліфікувати, як міжпредметні, оскільки і те, і те – це математика. Але як би ми не кваліфікували ці зв'язки, вони потрібні, тому що і в алгебрі і в геометрії зустрічаються ситуації, з яких вийти, покладаючись на закономірності лише даного предмета, неможливо.

Сучасному юному поколінню часто бракує звички задавати питання "Чому?". Можливо, в цьому винні вчителі, а можливо, однією з причин є великий наплив інформації, і юні не встигають задати питання і відповісти на нього. Але така звичка дуже важлива і необхідна. Вона є джерелом пошуку, творчості, прагнення до пізнання . І дуже важливо, якщо навіть не самім учням, то вчителю на кожному кроці ставити таке питання і , ясна річ, показувати як відповідати на нього в тому, чи іншому випадку. Мова йде про такий важливий фактор, що впливає на ефективність процесу навчання, як поєднання доступності і науковості при вивченні програмного матеріалу. Саме на це і повинно бути спрямовано встановлення і здійснення міжпредметних зв'язків між алгеброю і геометрією. Ці зв'язки легко здійснювати тому, що алгебру і геометрію викладає один вчитель. Слід лише пам'ятати про наявність таких зв'язків, готуватися до їх впровадження і систематично намагатися не упускати жодного моменту для їх здійснення.

Розглянемо етапи вивчення в курсі математики питання про рівняння прямої. Вже в самій назві питання криється зв'язок між алгебраїчним поняттям "рівняння" і геометричним поняттям "пряма". Тому, розглядаючи при вивченні програмового матеріалу кожне з цих понять окремо, слід мати на увазі і передбачати, що ці два поняття колись зійдуться. Поле, на якому це відбудеться – координатна площина. Тому в шостому класі, коли учні вперше знайомилися з координатною площиною, слід, зокрема, звернути увагу учнів на зв'язок між парою чисел (абсциса і ордината) і точкою координатної площини; на те , що цей зв'язок носить зворотній характер: кожній парі чисел знайдеться відповідна точка і , навпаки, кожна точка має свої координати – пару чисел. Слід закріпити в учнів уявлення про графік на координатній площині, як, принаймні, про сукупність точок на координатній площині, і про те, що цей графік здійснює (за допомогою кожної точки) зв'язок між абсцисою і ординатою (тобто між двома числами). Це важко зробити ще й тому, що, нажаль, в діючому підручнику для 6-го класу [2] зовсім відсутнє поняття графіка в теоретичній частині. Але це необхідно зробити при вивченні цього питання.

Важливим питанням в підготовці майбутнього розгляду питання про рівняння прямої є поняття пропорційності, прямої пропорційності величин, яке теж розглядається в шостому класі. Принаймні, слід досягти чіткого розуміння, що поняття пропорційності чітко пов'язано з поняттям пропорції, тобто пропорційними вважаються, називаються такі числа, з яких можна утворити пропорцію. При чому відношення, з яких утворюються ці пропорції, складають різні пари *відповідних* (слово на яке теж слід звернути увагу) значень величин і ці відношення в різних пропорціях дорівнюють одному і тому самому числу, яке називається коефіцієнтом пропорційності. Це дуже важливо зробити хоча б для того, щоб допомогти "бідним" колегам фізикам, які згідно діючих програм задовго до математиків, вже в 7-му класі, намагаються вивчити різні функціональні зв'язки між фізичними величинами (шляхом і часом, напругою і струмом, тощо), які носять пропорційний характер. Та й в геометрії часто зустрічаємось з поняттям пропорційності.

Але повернемось до поставленого питання: рівняння прямої. Вперше ці два поняття зустрічаються за діючими програмами і підручниками в курсі алгебри 7-го класу. Потрібно відзначити досить вдале викладення питання в §22 "Графік лінійного рівняння з двома змінними" діючого підручника [1], де спочатку згадуються основні відомості з 6-го класу. Потім розглядається приклад рівняння першого ступеня з двома змінними, встановлюється відповідність між розв'язками рівняння (парами чисел) і точками координатної площини. І традиційно за цими точками, які "виструнчуються" вздовж прямої, одержується графік лінійного рівняння з двома змінними. І лише у двох місцях (ключових в нашому розгляді) слід було б загострити увагу учнів згадуваним раніше запитанням “чому?”. Перше місце, – це коли в тексті підручника виділеним шрифтом записане відоме кожному математику твердження: “графік кожного рівняння першого степеня з двома невідомими – пряма”.

Другим місцем є твердження, теж відоме в математиці, хоч і не виділене шрифтом: “Щоб побудувати графік рівняння першого степеня з двома змінними, досить знайти два його розв’язки, позначити на координатній площині відповідні їм точки і провести через них пряму”. Запитання “чому?” у зв’язку з другим твердженням слід поставити, і учні одразу ж мають змогу відповісти на нього, згадавши відповідний матеріал з геометрії: аксіома належності точок і прямих (аксіома I_2 [4]) стверджує, що кожну пряму визначають лише дві точки. От чому для побудови даної прямої слід одержати координати лише двох точок. Ці координати корисно записувати в таблиці, в якій лише два стовпчики клітинок. Здавалося б, це дрібниця, але така позиція зміцнює в учнів необхідність все обґрунтовувати, така позиція корисна не тільки в математиці, а й в житті. Відповідь на запитання “чому?” в зв’язку з першим твердженням має бути такою: “Наші знання ще не достатні, але в геометрії 8-го класу частково це твердження буде обґрунтовано”. В подальшому розгляді цього питання відбувається знайомство учнів з системою рівнянь і графіком розв’язання системи рівнянь.

Далі, вивчаючи геометрію 8-го класу, зустрічаємо в підручнику [4] таке твердження: “Доведемо, що будь-яка пряма у декартових координатах x і y має рівняння виду $ax + by + c = 0$, де a, b, c – деякі числа”.

Маючи на увазі здійснення зв’язку між алгеброю і геометрією, учням слід запропонувати відкрити підручник алгебри [1, с. 75] і зіставити твердження в підручнику геометрії з твердженням у підручнику алгебри, яке вже нами згадувалось. В результаті цього зіставлення повинні одержуватись такі висновки:

1. Мовою алгебри можна стверджувати геометричне правило так: “Будь-яка пряма в координатній площині є графіком певного лінійного рівняння (тобто рівняння першого степеня) з двома змінними”.

2. Геометрична теорема обґрунтовує алгебраїчне твердження лише в тій частині, що кожна пряма описується певним лінійним рівнянням. В теоремі не обґрунтовується, що будь-яке навмання взяте лінійне рівняння має графіком пряму. І слід зауважити, що ця частина алгебраїчного твердження може бути також обґрунтоване і обґрунтовується в математиці.

Це обґрунтування приводиться частково в §89 підручника з геометрії [4], де приводиться доведення, яке починається словами “Нехай $y = ax + b$ – дана лінійна функція. Доведемо, що графіком її є пряма”. Але по-перше, на момент розгляду цього питання в геометрії в курсі алгебрі 8-го класу ще не вивчається поняття функції, взагалі, і питання про лінійну функцію, зокрема. Коли ж в алгебрі підійшла черга для розгляду цих запитань, то в геометрії вже розглядаються інші питання. Для узгодження проблеми обґрунтованості згадуваного алгебраїчного твердження можливо доцільно розподілити і розглядати теоретичний матеріал в двох підпунктах (алгебра і геометрія) за такою послідовністю:

1) В геометрії розглянути теорему про рівняння прямої в зіставленні з відповідним твердженням з підручника алгебри [1] і з вказаним зауваженнями [4] (§75, с. 116–117).

2) Базуючись на досвіді з алгебри 7-го класу стосовно графічного розв'язування систем рівнянь, розглянути в геометрії §76 [4] “Координати точки перетину прямих” (с. 117–118).

3) Досить важливо при вивченні геометрії в §77 [4] “Розміщення прямої відносно системи координат” (с. 118–119) зробити такі висновки:

а) якщо в рівнянні $ax+by+c=0$ $a=0$, $b\neq 0$, то рівняння набуває вигляду: $by+c=0$, яке в результаті рівносильних перетворень зводиться до рівняння виду $y=m$. А на основі властивостей систем координат точки, які мають одну і ту саму ординату, утворюють пряму, паралельну осі x;

б) аналогічно, якщо в рівнянні $ax+by+c=0$ $b=0$, $a\neq 0$, то рівняння перетворюється в рівносильне рівняння $x=n$, і на основі властивостей системи координат всі точки з тією самою абсцисою утворюють пряму, паралельну осі y.

Ці два висновки повністю описані в підручнику геометрії [4, с. 118] (за виключенням посилання на властивості системи координат).

в) якщо $b\neq 0$, то рівняння виду $ax+by+c=0$ може бути поданим у вигляді

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b},$$

тобто у вигляді $y=kx+l$.

Цей висновок на момент вивчення в геометрії може бути використаний, наприклад, в другому способі розв'язування вправи №35 [4] “Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки A(–1; 1), B(1; 0)” (способом, відмінним від того, який пропонується у підручнику). Так як т. A і B мають різні абсциси (–1 і 1), то вони не лежать на прямій, паралельній до вісі y. Отже, рівняння шуканої прямої може бути записане у вигляді $y=kx+l$. Підставляючи координати точок в це рівняння, одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{matrix} A(-1;1).... \\ B(1;0).... \end{matrix}\begin{cases} 1=k*(-1)+l \\ 0=k*1+l \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -k+l=0 \\ k+l=0 \end{cases}$$

За способом додавання одержуємо $k=-\frac{1}{2}$, $l=\frac{1}{2}$

Отже, рівняння прямої має вигляд

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

Помноживши обидві частини рівняння на 2 і перенісши всі доданки в ліву частину одержуємо рівняння: $x+2y-1=0$.

Слід звернути увагу учнів на те, як тлумачиться поняття рівносильності рівнянь в геометрії. Так як рівносильні рівняння мають ті самі розв'язки, а розв'язки – це координати точок (графіка), то рівносильні рівняння описують одну і ту саму фігуру. Ось чому рівняння $x+2y-1=0$, яке одержалось в цьому способі розв'язування, і рівняння $-x-2y+1=0$, яке одержується в підручнику – це рівняння тієї самої прямої.

Висновок б) використовується в наступному етапі розгляду цього питання.

4) В алгебрі 8-го класу при розгляді питання про лінійну функцію слід повторно нагадати попередні етапи в розгляді питання про рівняння прямої. Зокрема, читаючи твердження в підручнику алгебри [1] на с. 169, яке виділене шрифтом: "Можна довести, що графік кожної лінійної функції – пряма. І кожна пряма на координатній площині, не перпендикулярна до осі абсцис, – графік деякої лінійної функції", слід, принаймні показати учням в підручнику геометрії [4] п. 79 "Графік лінійної функції" і відзначити, що це обґрунтування першої частини алгебраїчного твердження, а друга частина обґрунтовується на основі загальної теореми геометрії про те, що рівнянням прямої є рівняння $ax+by+c=0$, і висновку 3 п. б) про те, що якщо $b\neq0$, то рівняння набирає вигляду $y=kx+b$, а пряма, що є його графіком, не є паралельною до осі y.

Що стосується твердження про те, що "графік кожного рівняння першого степеня з двома змінними – пряма", твердження яке, як виявилось, досить проблемне, може бути обґрунтоване, таким чином в два кроки: 1) Якщо в рівнянні $ax+by+c=0$ $b=0$, то рівняння набуває вигляду $x=n$, і його графік – пряма паралельна до вісі y. 2) Якщо в рівнянні $ax+by+c=0$, $b\neq0$, то це рівняння може бути записаним у вигляді $y=kx+b$.

Це рівняння виражає лінійну функцію, а (як доведено в §79 [4]) графіком лінійної функції є пряма.

Можна навести ще один приклад можливого здійснення зв'язку між алгеброю і геометрією. Мова піде про перетворення графіків функцій (§54, с. 216-217 [1]).

Так на згадуваній с. 216 підручника алгебри [1] виділено шрифтом таке твердження: "..., щоб дістати графік функції $y=f(x-m)$, досить графік функції $y=f(x)$ перенести на m одиниць в напрямі осі x, якщо $m>0$, або на –m одиниць в протилежному напрямі, якщо $m<0$. По-перше, доцільно змінити формулювання цього правила, розглянувши два випадки $y=f(x-m)$ і $y=f(x+m)$ (при умові $m>0$). Тоді в першому випадку слід перенесення здійснювати вправо вздовж вісі x, а в другому випадку вліво вздовж осі x (тобто при відніманні числа m – перенесення в право, при додаванні числа m – перенесення вліво).

Але ці зміни в правилі слід вносити (якщо вносити) лише після уточнення, яке перенесення графіка мається на увазі взагалі – адже мова йде про паралельне перенесення. Можна було б і не робити цього уточнення, але суть і результат цього перетворення графіка саме базується на цьому. Як відомо, з геометрії паралельне перенесення є рух, а при русі фігура перетворюється у фігуру, рівну даній (див. п. 90 [4]). Ось чому, якщо довести що графік функції $y=f(x-m)$ одержується з графіка функції $y=f(x)$ в результаті паралельного піднесення, то ці графіки рівні. Наприклад, якщо графік $y=f(x)$ – парабола, (тобто $y=x^2$), то графік $y=f(x-m)$ ($y=(x-m)^2$)також парабола, причому, така сама (рівна), як і $y=x^2$.

Тому пропонується доповнити правило в підручнику попереднім розглядом теореми:

Теорема 1. Графік функції $y=f(x-m)$ одержується з графіка функції $y=f(x)$ за допомогою паралельного перенесення, заданого координатними формулами $x'=x+m$, $y'=y$, а тому графік функції $y=f(x-m)$ є фігура, що дорівнює графіку функції $y=f(x)$.

Спочатку слід нагадати, що паралельне перенесення – це перетворення, яке задається координатами формулами [4]: $x'=x+a$, $y'=y+b$, де $(x; y)$– координати будь-якої точки даної фігури F, $(x'; y')$ – координати відповідної точки фігури F', в яку переходить фігура F при даному паралельному перенесенні.

Нехай графік функції $y=f(x)$ – це фігура F. Визначимо, в яку фігуру F' перетвориться F при паралельному перенесенні, заданому формулами $x'=x+m$, $y'=y$.

Для цього, перш за все згадаємо, що функція – це залежність змінної y від змінної x, і в нашому випадку ця залежність задана формулою $y=f(x)$ (наприклад, $y=x^2$).

Графік функції – це множина точок, абсциси яких – значення аргументу, ординати – значення функцій [1, с. 165]. Отже, для графіка F залежність, тобто зв’язок між ординатою y і абсцисою x, записується $y=f(x)$ (тобто $y=x^2$). Таким чином, завдання теореми можна сформулювати так: якою формулою записується зв’язок між ординатою і абсцисою точок фігури F', в яку переходить графік F при паралельному перенесенні, заданому вказаними в теоремі формулами?

Виразимо координати x і y (фігури F) з формул паралельного перенесення і підставимо їх в формулу даної функції.

Одержимо, що в результаті паралельного перенесення, заданого формулами $x'=x+m$, $y'=y$, графік функції $y=f(x)$ переходить у графік функції $y'=f(x'-m)$, тобто парабола $y=x^2$ переходить у параболу $y'=(x'-m)^2$.

А так як при паралельному перенесенні фігура зміщується вздовж паралельних прямих і на однакову відстань [4], то при цьому перенесенні ординати не змінюються, а абсциси змінюються на m одиниць, і має місце правило в підручнику алгебри (ст. 216 [1]).

Так само розглянемо інше правило в підручнику алгебри [1, с. 216]: “... щоб дістати графік функції $y=f(x)+n$, треба графік функції $y=f(x)$ перенести на n одиниць в напрямі осі y, якщо $n>0$, або в протилежному напрямі якщо

$n<0$. Іншими словами, вважаючи n додатнім числом, слід переносити відомий графік $y=f(x)$ на n одиниць догори, якщо $y=f(x)+n$ і на n одиниць донизу, якщо $y=f(x)–n$.

Але перед цим розглядається теорема.

<u>Теорема 2.</u> Графік функції $y=f(x)+n$ одержується з графіка функції $y=f(x)$ за допомогою паралельного перенесення, заданого координатними формулами $x'=x$, $y'=y+n$, а тому графік функції $y=f(x)+n$ є фігура, що дорівнює графіку функції $y=f(x)$. Доведення теореми аналогічне доведенню у випадку теореми 1:

Тобто в результаті паралельного перенесення, заданого формулами $x'=x$, $y'=y+n$, графік функції $y=f(x)$ переходить в графік функції $y'=f(x')+n$. Тобто парабола $y=x^2$ переходить в параболу $y'=(x')^2+n$. Точки зміщуються вздовж паралельних прямих і на однакову відстань. Абсциса не змінюється, а ордината змінюється на n, і має місце правило в підручнику алгебри [1, с. 216].

Доцільно узагальнити висновок цих двох теорем теоремою 3.

<u>Теорема 3.</u> Графік функції $y=f(x–m)+n$ одержується з графіка функції $y=f(x)$ за допомогою паралельного перенесення, заданого координатними формулами: $x'=x+m$, $y'=y+n$, а тому графік функції $y=f(x–m)+n$ є фігура, що дорівнює графіку функції $y=f(x)$. (Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 1 і 2).

Отже, графік функції $y=f(x–m)+n$ одержується з графіка функції $y=f(x)$ переміщенням вздовж осі x на m одиниць і вздовж осі y на n одиниць.

Нехай учням не все буде зрозуміло у доведеннях теорем. Але основне, що вони повинні усвідомити, це те, що на основі геометричних властивостей руху при цих перетвореннях змінюється не сам графік, а його розташування. При цьому ця зміна розташування запрограмована в формулі $y=f(x–m)+n$.

Якщо учням стане зрозумілим цей висновок досліджень, пов’язаних з перетворенням графіків, то при подальшому розгляді питання про графіки і властивості квадратичної функції це дасть змогу конкретизувати відповідний висновок для випадку квадратичної функції. Так як будь-яка квадратична функція $y=ax^2+bx+c$ може бути подана у вигляді $y=a(x–a)^2+n$, де $m=-\dfrac{b}{2a}$ і $n=\dfrac{-b^2+4ac}{4a}$, то внаслідок зробленого вище висновку графіком функції $y=ax^2+bx+c$ (квадратичної функції) є парабола, яка дорівнює параболі $y=ax^2$ і вершина O′ цієї параболи одержується з вершини O(0; 0) параболи $y=ax^2$ переміщенням на m одиниць вздовж осі x і на n одиниць вздовж осі y. Тобто парабола $y=ax^2+bx+c$ має координати O′(m; n), де $m=-\dfrac{b}{2a}$;

$$n=\frac{-b^2+4ac}{4a}.$$

Одержані висновки використовуються в практичній побудові графіків квадратичних функцій. Зокрема, на основі теореми легко обґрунтовувати, що симетричність параболи $y=ax^2$ відносно осі y переходить в симетричність параболи $y=a(x–a)^2+n$ відносно прямої $x=m$, паралельної осі y (хоча саме обґрунтування можна запропонувати вже не на уроці, а на позаурочних заняттях).

Цей факт потім слід використати для складання таблиці значень координат точок графіка $y=ax^2+bx+c$, яку варто починити заповнювати з середини, де вказуються знайдені координати вершин $O'\left(m=-\dfrac{b}{2a}; n=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$, де $f(x)=ax^2+bx+c$ (можна не запам’ятовувати формулу для n, а просто підставити значення $x_0=m$ в формулу $f(x)$). Потім підстановкою в формулу функції заповнюються лише половину таблиці (права, чи ліва від O′). Друга половина, яка будується з тим самим кроком від O′, що і перша, тільки в інший бік, заповнюється автоматично, без обчислень, з врахуванням симетрії графіка.

Література:

1. Бевз Г.П. Алгебра: Підручник для 7–9 класів. – К.: Освіта, 2003. – 304 с.
2. Возняк Г.М., Литвиненко Г.М. Математика: Пробний підручник для учнів 6 класу загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Освіта, 2002. – 239 с.
3. Математика. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. – Київ: Навчальна книга, 2003 – 302 с.
4. Погорєлов О.В. Геометрія: Планіметрія: Підручник для 7–11 класів середніх шкіл. – К.: Освіта, 1992. – 351 с.

МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЯК СКЛАДОВА ОРГАНІЗАЦІЇ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ НА НАВЧАЛЬНО-ПІДГОТОВЧОМУ ВІДДІЛЕННІ

О.М. Хара
м. Київ, Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
khara@rambler.ru

Дистанційне навчання є комплексною педагогічною технологією, що поєднує досягнення педагогіки і психології з дидактичними можливостями інформаційних і телекомунікаційних технологій, які дозволяють використовувати комп'ютер як носій інформації та засіб організації спілкування. Будемо виходити з того, що власне зміст навчання, форми його засвоєння, а також засоби і технології передачі інформації є основою системи дистанційного навчання.

Якщо розглядати дистанційне навчання як цілісну дидактичну систему, то воно має задовольняти ряд вимог, зокрема передбачати розробку технологій навчання, які оптимізують та інтенсифікують процес навчання, та забезпечувати неперервне та ефективне керування навчальним процесом [3].

Інформаційне забезпечення дистанційного навчання передбачає залучення до навчального процесу навчальної та методичної літератури та інших інформаційних матеріалів. Принциповою вимогою до інформаційного наповнення дистанційного курсу є структурування навчального матеріалу та його поділ на окремі логічно завершені частини (модулі, розділи, параграфи).

Середовище дистанційного навчання дозволяє здійснювати управління процесом навчання в межах курсу двома шляхами: через безпосереднє використання комп'ютерних технологій під час контролю та за допомогою власної вмотивованої діяльності слухача. Ці шляхи доповнюють одне одного та сприяють досягненню цілей навчання. Основною формою роботи для слухача дистанційного курсу є самостійна робота. Самостійне вивчення, як зазначено в "Положенні про дистанційне навчання" [1], передбачає використання навчальних матеріалів дистанційних курсів, які слухачі отримують через Інтернет та (або) на магнітному носії. Вимоги щодо самостійного вивчення навчального матеріалу конкретної дисципліни визначаються навчальною програмою дисципліни, методичними вказівками, інструкціями і завданнями, що містяться у дистанційному курсі. Але успішним навчання буде за умови, коли слухач постійно відчуває, що його діяльність спрямовується та корегується викладачем. Саме використання різноманітних методичних матеріалів дає можливість організувати та систематизувати діяльність тих, хто вивчає предмет дистанційно.

Враховуючи вказану специфіку дистанційного навчання, пропонуємо дистанційний курс математики для слухачів навчально-підготовчого відділення Інституту дистанційного навчання НПУ імені М.П. Драгоманова.

Мета курсу: формування у слухачів навчально-підготовчого відділення системи математичних знань, навичок і умінь, необхідних у повсякденному житті та майбутній трудовій діяльності, достатніх для успішного оволодіння іншими освітніми галузями знань і забезпечення неперервної освіти, а також інтелектуальний розвиток особистості, передусім – розвиток у слухачів логічного мислення, просторового уявлення і уяви, алгоритмічної, інформаційної і графічної культури, пам'яті, уваги, інтуїції.

Загальний курс математики розбито на 4 модулі (таблиця 1), кожен з яких в свою чергу має такі складові: назву, що відображає зміст модуля; ключові поняття; теми з переліком питань для вивчення; літературу; завдання для самоконтролю.

Таблиця 1

№	Модулі	Кількість тижнів на вивчення
1	Рівняння, нерівності та їх системи. текстові задачі	12
2	Планіметрія	7
3	Функції та елементи математичного аналізу	6
4	Стереометрія	6

На початку навчання кожен слухач-дистанційник отримує відповідний комплект матеріалів: навчальний план, програму дисципліни, навчальні посібники, методичні рекомендації. Для продуктивної організації навчання та покращення самоконтролю запропоновані методичні рекомендації до кожного модуля містять графік навчання (таблиця 2), в якому теми модуля розбито по тижнях із зазначенням виду роботи на кожному тижні.

Таблиця 2.

Графік навчального процесу для слухачів дистанційної форми навчання

<table>
<tr><th>Теми</th><th>Тиждень</th><th>Вид роботи</th><th>Кількість балів</th></tr>
<tr><td>1. Функції: загальні властивості та графік</td><td>17</td><td rowspan="2">Вивчення теоретичного матеріалу. Розв'язування задач</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>2. Побудова графіків за допомогою елементарних перетворень</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Теми 1-3</td><td>19</td><td>Консультація
Поточний контроль</td><td></td></tr>
<tr><td>3. Похідна функції.</td><td>19</td><td rowspan="3">Вивчення теоретичного матеріалу. Розв'язування задач
Консультація</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>4. Дослідження функції за допомогою похідної. Побудова графіків функцій.</td><td>20</td></tr>
<tr><td>5. Площа криволінійної трапеції</td><td>21</td></tr>
<tr><td>Теми 1–6</td><td>22</td><td>Модульне тестування 4</td><td>30</td></tr>
</table>

Методичні вказівки посідають певне місце у навчальному процесі. Головне їх завдання – розвиток розумових здібностей слухачів під час самостійної роботи з навчальним матеріалом. Вони покликані допомогти в організації роботи слухачів з оволодіння конкретними вміннями, навичками та методичними знаннями, сприяти розвитку мислення та формуванню узагальнених умінь. Основний зміст навчальної літератури такого типу становить орієнтовна система дій – система попередніх уявлень людини про мету, план і засоби використання дій. Структура методичних вказівок відображає структуру всього навчального матеріалу та окремих тем курсу [2].

Розбивши весь курс навчання на логічно завершені частини, визначивши терміни на їх вивчення та вказавши час та форми контролю, ми надаємо можливість тому, хто навчається, самостійно оцінити та усвідомити обсяг навчального матеріалу, темп навчання, а зразки тестових завдань дають можливість оцінити рівень знань. Але це не заважає в інформаційному просторі дистанційного курсу кожному обирати свою траєкторію навчання та діяльності з точки зору її навчальної рівня, досконалості, наукової або професійної спрямованості. І загалом сприяє вихованню культури самостійної роботи та навчає ефективно організовувати власну діяльність.

Література:

1. Положення про дистанційне навчання – http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/
2. Середа Л.П., Павленко В.С. На допомогу авторам навчальної літератури: Навч.посібн. / За ред. В.С. Павленка. – К.: Вища шк., 2001. – 79 с.
3. Стефаненко ПВ. Дистанционное обучение в высшей школе / АПН Украины; Институт педагогики и психологии профессионального образования. – Донецк: ДонНТУ, 2002. – 398 с.

ПІДГОТОВКА МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ ДО ЗАСТОСУВАННЯ ІТ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

В.М. Харченко, Л.В. Ваврикович
м. Ніжин, Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя
khvn@aport.ru

У всьому світі відбувається глобальний перехід від індустріальних до інформаційних суспільств, тобто таких, у яких більшість працюючих отримує, опрацьовує, зберігає та надає інформацію. Даний перехід вимагає не тільки великої кількості відповідних кваліфікованих працівників, а й покращення інформаційної грамотності всіх громадян. Оскільки активне використання інформаційних технологій (ІТ) у навчанні сприяє кращій підготовці спеціалістів та є ключем до розв'язання проблем, що пов'язані з переходом до нової економіки [1], то важливу роль у цьому процесі відіграють вчителі.

Як помітив Берон Ґ.-Л., саме від позиції "середнього учителя" залежить успішність впровадження ІТ в освіту [2]. А враховуючи той факт, що старше покоління вчителів переважно не бажає відходити від традиційного навчання, то в даний момент особливо гострою є проблема підготовки молодих вчителів. Саме вони повинні активно впроваджувати нові технології навчання в школі.

У 2002 р. Міністерство освіти та науки (МОН) України вирішило більш активно сприяти підготовці вчителів нової формації і запровадило відповідний курс на всіх спеціальностях педагогічних вузів. Зокрема, для майбутніх вчителів математики був введений курс "Використання комп'ютерної техніки в шкільному курсі математики". Оцінивши матеріально-технічний стан шкіл, МОН України суттєво покращило матеріальну базу сільських шкіл, поставивши їм значну кількість сучасних комп'ютерних класів, безкоштовно надавши ліцензійні Windows XP, Microsoft Office, DG, "Географічний атлас України для 8-9 класів" і відеоінтерпретатор алгоритмів пошуку та сортування.

Проте досвід викладання такого курсу дає підстави стверджувати, що на даний час його ефективність не висока через наявність проблем:

1. Відсутність продуманої політики МОН України в сфері матеріально-технічного забезпечення вузів та шкіл.

2. Відсутність на ринку України достатньої кількості навчально-методичної літератури, педагогічного програмного забезпечення (ППЗ), нерозвиненість української освітньої мережі Інтернету.

Як говорилося раніше, Міністерство освіти та науки України активно поставляє деякі ППЗ школам, проте не надає їх вузам, які здійснюють підготовку вчителів. Наслідком цього стало неможливість підготовки студентів до роботи з вказаними програмними засобами, відсутність детально описаної частинної методики вивчення математики з використанням рекомендованих педагогічних програмних засобів. Крім того, вузам доводиться використовувати ті програмні продукти, які розробляються в його стінах або ж безкоштовно пропонуються в мережі Інтернет. Досить часто такі ППЗ мають багато недоліків і спричинюють скептичне відношення студентів до можливостей застосування інформаційних технологій на уроках математики.

Вражає і бідність ППЗ, які рекомендовані МОН України для застосування на уроках математики в школі: GRAN1 (версії під DOS та Windows), GRAN2D, GRAN3D та DG. Всі ці програмні продукти належать до інформаційно-освітніх середовищ і створені ентузіастами-одинаками (наукові керівники М.І. Жалдак та С.А. Раков). У цей же час, скажімо в Росії, використовується тільки електронних підручників 34 [3], серед яких виділяються ППЗ фірм “ФИЗИКОН”, “1С”, “Кирилл и Мефодий”, “ИНТ”, “ИНИС-СОФТ”, “КУДИЦ” та інші. У цьому році на XIV Міжнародній конференції-виставці “Информационные технологии в образовании” в м. Москві було визначено 6 найкращих ППЗ з математики [4], тоді як на Україні не знайдеться такої кількості професійно зроблених продуктів.

Фінансова неплатоспроможність шкіл привела до того, що наші комерційні фірми або не розробляють педагогічних програмних продуктів, або ж, як Донецький інститут штучного інтелекту, працюють на ринки інших країн. Давно відомо, що над таким видом програмних продуктів повинні працювати щонайменше методист, сценарист, дизайнер та програміст. На Україні до цього часу переважно працюють двоє: науковий керівник та програміст. Фактично, науковий керівник бере на себе функції сценариста, дизайнера та методиста. Саме тому наші педагогічні розробки грішать недосконалістю.

Поставки класів, у яких лише учительський комп’ютер оснащений CD-ROM приводом, спричинює до значних труднощів в учителів щодо відновлення роботи операційної системи. Оскільки практично всі вузівські комп’ютери мають CD-ROM, то проблем з інсталяції програмних засобів в ході навчання студенти не мають, вони з’являються на робочому місці.

У такій ситуації майбутнім вчителям математики ми радимо активно використовувати стандартні програмні засоби на зразок Microsoft Office. Зокрема, використання програми для створення презентацій може суттєво унаочнити матеріал, що вивчається (відсилаємо до рекомендацій, які підтримуються фірмою Microsoft [1, 5]). Завдяки презентаціям учні можуть постійно слідкувати за думкою вчителя щодо викладу нового матеріалу, учитися аналізувати отриману інформацію і виділяти головне в ній. Тому одне з лабораторних завдань присвячено створенню навчальних презентацій. Майбутні вчителі мають змогу вчитися стисло викладати основні думки, використовувати графіку і анімацію, добирати кольори фону і текстової інформації, компонувати презентацію.

Оскільки все менше стає безкоштовних навчальних програм, навіть тестових оболонок, то для автоматизації перевірки знань пропонуємо використовувати електронні таблиці. Тому на лабораторному занятті поряд із завданням написати тест для перевірки знань в тестовій оболонці пропонуємо зробити це і в Microsoft Excel.

Розповідаючи про особливості поставок комп'ютерних класів МОН України, пропонуємо майбутнім вчителям активно використовувати програми створення образів дисків, оскільки це полегшить роботу по відновленню нормальної роботи інформаційної системи.

Досить складне становище в Україні з науково-методичною літературою, що стосується використання ІТ при вивченні математики. По великому рахунку, при вивченні курсу "Використання комп'ютерної техніки при вивченні математики" можна рекомендувати майбутнім вчителям лише методичні посібники [6–11]. Якщо ж поглянути на Росію, то там список суттєво більший, зокрема на [12] наводиться 20 книг, що стосуються загальних підходів використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчанні, а на [13] – 21 методичні рекомендації по використанню інформаційно-освітніх середовищ.

Оскільки найближчим часом тенденція з книгодрукуванням, напевне, не покращиться, то слід більшу увагу звертати на публікації в мережі Інтернет. Так при розширеному пошуку "з усіма словами" за допомогою пошукової машини google.com.ua нами були отримані такі результати: запит "методика навчання геометрії" видав 162 веб-сторінку, а "методика вивчення геометрії" – 110. Звичайно, це не порівняти з даними google.com.ru, яка видала 5260 сторінок на запит "методика изучения геометрии" та 6170 – на запит "методика обучения геометрии". Слід зауважити, що частина із цих сторінок відноситься до різноманітних програм та реклами книг і дисків, проте є багато методичних порад та форумів на яких обговорюються проблеми впровадження ІТ в математику. Інший російський портал – Російський загальноосвітній портал – пропонує своїм відвідувачам ознайомитися із 337 статтями, які відносяться до математичної освіти в загальноосвітніх школах[14].

До корисних серверів, з якими рекомендуємо майбутнім педагогам ознайомитися, відносяться сервер МОН України (www.mon.gov.ua) та Міністерства освіти і науки Росії (www.ed.gov.ru), освітньої української мережі (www.ednu.kiev.ua), Інститут змісту і методів навчання Міністерства освіти України (www.ictme.edu-ua.net), Інститут засобів навчання АПН України (www.ime.edu-ua.net), Центральний інститут післядипломної освіти (www.cippe.edu-ua.net), освітній портал (www.osvita.org.ua) та російські федеральні освітні портали: федеральний портал "Российское образование" (www.edu.ru), природничий науково-освітній портал (www.en.edu.ru), Російський портал відкритої освіти (www.openet.edu.ru), Російський загальноосвітній портал тощо [14]. Слід зауважити, що структура освітньої мережі Інтернету Росії може бути певним еталоном для України:

– є мережа федеральних освітніх порталів, які дозволяють досить легко знайти всі необхідні ресурси та виконувати переходи від одного порталу до іншого;

– є посилання на регіональні портали;

– суттєво краще відслідковуються посилання на ресурси мережі.

На жаль, українська освітня мережа не структурована, погано організована і непродумана. Знайти методичні поради в ній або ж просто потрібну інформацію дуже складно.

Майбутнім вчителям ми радимо активно використовувати можливості Інтернету для поповнення своїх знань, методичної скарбнички, ідей щодо використання інформаційних технологій, обговорення проблем, які виникають у їх роботі. Саме на роботу з мережею Інтернет ми відводимо лабораторне заняття на якому студенти повинні знайти інформацію для свого індивідуального проекту, не менше 4-6 теоретичних статей по запровадженню ІТ в математиці, знайти 4-5 конспектів уроків з математики у яких пропонується використовувати ППЗ, ознайомитися із рекомендованими сайтами.

У даний час в мережі обмаль електронних підручників, які б дозволили учням самостійно вивчати математику. Переважно на Україні говорять про необхідність використання дистанційної освіти для додаткового навчання учнів і здобуття знань, які не надає звичайна школа. Напевно, не далеко той час, коли буде усвідомлено, що не одна тисяча дітей через слабкий імунітет, інвалідність не може відвідувати школу. У такому разі до них для консультацій приходять вчителі шкіл. Проте ця консультативна діяльність не дуже ефективна. Фактично, переважна більшість цих дітей не отримує знань, які дозволяли б їм у подальшому житті здобути вищу освіту, набути професію і відчувати повноцінним членом суспільства. Існування безкоштовних дистанційних курсів з шкільних предметів, а також значної кількості електронних підручників в мережі дозволила б усунути цю проблему. Інша причина створення електронних підручників – необхідність організації особистісно-орієнтованого навчання в класах. Тому частині студентів даються проекти по створенню фрагментів таких електронних підручників та освітніх сайтів.

Література:

1. Государство в XXI веке: Опыт и перспективы использования информационных технологий в школьном образовании. // www.microsoft.com/rus
2. Baron G.-L. Computers in education: the shape of things to come. // Bulletin of the International Bureau of Education, 1989. – №250. – P. 8-28.
3. http://www.curator.ru
4. http://ito.edu.ru
5. Новенко Д.В., Сурков В.А. Использование Microsoft Office в школе: Учебн.-метод. пособ. для учителей. География. – М., 2002. – 112 с.
6. Жалдак М.І., Вітюк О.В. Комп'ютер на уроках геометрії. Посібник

для вчителів. – К.: Деніт, 2000. – 160 с.

7. Жалдак М.І. Комп’ютер на уроках математики. – К.: Техніка, 1997. – 303 с.

8. Жалдак М.І., Грохольська А.В., Жильцов О.Б. Математика (алгебра і початки аналізу) з комп’ютерною підтримкою. – К.: МАУП, 2003. – 304 с.

9. Основи нових інформаційних технологій навчання: Посібник для вчителів / За ред. Ю.І. Машбиця. – К.: ІЗМН,1997. –264 с.

10. Раков С.А., Горох В.П. Відкриття геометрії засобами пакета DG: Посібник для учнів з курсу геометрії. – Харків: ХДПУ, 2002. – 175 с.

11. Раков С.А., Горох В.П., Осенков К.О., Думчикова О.В., Костіна О.В., Ларін О.Р., Лисиця В.Т., Пікалова В.В. Відкриття геометрії через комп’ютерні експерименти в пакеті DG: Посібник для викладачів математики. – Харків: ХДПУ, 2002. – 108 с.

12. www.ict.edu.ru/books/

13. http://deposit.mto.ru

14. www.school.edu.ru

ПРОБЛЕМА ФОРМУВАННЯ ГРАФІЧНОЇ ГРАМОТНОСТІ ПРИ НАВЧАННІ ГЕОМЕТРІЇ

Л.Г. Чашечникова[1], О.С. Чашечникова[2]
[1] м. Суми, Сумський державний педагогічний університет
ім. А.С. Макаренка
[2] м. Київ, Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова

Одною з невирішених проблем сучасної математичної освіти є традиційні останні роки ускладнення при подоланні вчорашніми учнями – сьогоднішніми студентами – межі між навчанням у загальноосвітній і вищій школі. На наш погляд, декларована неперервність і наступність математичної освіти між цими ланками на даному етапі є ще тільки гаслом.

Розглядати цю проблему необхідно багатопланово, враховуючи всі аспекти. Зупинимося на деяких з них. В загальноосвітній школі реально ставиться і розв'язується питання цілеспрямованого розвитку особистості в процесі навчання математики (вдосконалюються та створюються відповідні методичні системи). У вищій школі, якщо метою навчання не є підготовка майбутнього дослідника в галузі математики, найчастіше відбувається лише констатація факту наявності певного рівня розвитку математичних здібностей студента та опора на них в процесі навчання. Як наслідок, навчання, яке не спрямоване на розвиток, не використовує наявного інтелектуального та творчого потенціалу особистості, що поступово призводить до регресу у розвитку.

Відносно прагматичного аспекту, неузгодженість починається із змісту навчання, стосується вимог, які пред'являються до системи знань і вмінь (*назвемо це інтелектуальною базою*) студентів – вчорашніх школярів, і починається це вже на етапі вступних іспитів.

Зокрема, зупинимося на вимогах до студентів інженерних спеціальностей, що починають вивчати курс "Нарисна геометрія" [1.2]. Аналіз цих вимог свідчить: передбачається, що в процесі вивчення шкільного курсу геометрії (як планіметрії, так і стереометрії) вони вже ознайомилися з деякими методами розв'язування задач на побудову, набули певного досвіду їх використання, що є основою формування достатнього рівня графічної грамотності. Викладачі відмічають, що досягнення при вивченні курсу нарисної геометрії високих результатів є визначальним для наступного успішного оволодіння іншими інженерними дисциплінами [1.5].

Розуміючи ускладнення, що виникають у студентів в процесі вивчення нарисної геометрії, пропонують доповнити лекційний матеріал мультимедійними демонстраційними моделями з елементами інтерактивності, які підвищують ефективність сприймання і засвоєння алгоритму побудови [1.5]. Але це, звичайно, не замінить самостійного виконання студентами побудов за допомогою креслярських інструментів, тобто якісна підготовка з нарисної геометрії є неможливою без ґрунтовної графічної підготовки учнів у школі.

З іншого боку, аналіз практики навчання математики свідчить про зниження рівня графічної грамотності старшокласників в останні роки, а як наслідок – недостатній для цього віку рівень розвитку просторової уяви учнів. Одною з причин цього є істотне зменшення уваги на сучасному етапі геометричним побудовам на площині в основній школі. В деяких посібниках такий матеріал практично відсутній [2.3]. Одна з причин такого стану проблеми – задачі на побудову не пропонуються у змісті атестаційних робіт, практично відсутні на вступних іспитах до вищих навчальних закладах, і це зумовлює недостатню увагу до них вчителів.

Але виконання задач на побудову є не тільки одним з перших щаблів здійснення спрямованості шкільного курсу математики на формування спроможності до оволодіння конкретними спеціальностями. Таке прагматичне відношення до навчального матеріалу не враховує можливостей розвитку інтелектуальних і творчих здібностей учнів, що надає розв'язування задач на побудову. Не можна не підкреслити, що їх виконання є важливим засобом розвитку математичної інтуїції, абстрактного мислення, уяви, формування і розвитку винахідливості, ефективності мислення, творчої активності та ініціативи, тому достатня увага їм повинна приділятися у класах будь-якого профілю. Важливість їх використання для діагностики, формування і розвитку творчого мислення підкреслюється й тим, що такі задачі пропонуються на математичних олімпіадах [2.4].

Сама структура сучасної програми з математики не сприяє формуванню в учнів навичок розв'язувати задачі на побудову, що відмінні від основних, які розв'язуються за алгоритмом. У 7 класі на вивчення теми "Геометричні побудови" відводиться обмаль часу, що не дає можливості усвідомити підходи до виконання таких задач (порівняємо: у програмі з математики 1989 року на вивчення теми "Геометричні побудови" у 7 класі відводилося 13 годин). Це відбувається в умовах, коли учні вже не мають можливості ґрунтовно ознайомитися навіть з основними задачами на побудову і відпрацювати відповідні навички в курсі математики 6 класу. Ця проблема є інтернаціональною [2.6].

Також у 7 класі учні знайомляться лише з методом геометричних місць [2.1, 2.2, 2.5]. Пізніше відбувається ознайомлення з матеріалом, на якому ґрунтується застосування методів геометричних перетворень та алгебраїчного. Але аналіз шкільної практики свідчить, що узагальнити відповідний матеріал, ввести його в систему таким чином не вдається.

У сучасних умовах взагалі на вивчення математики за програмою відводиться необґрунтовано мало часу, учні перевантажені (в тому числі, різноманітними спецкурсами), та ми все ж таки вважаємо за необхідне включати в процес навчання геометрії (в тому числі, у позакласній роботі) такі питання.

Частина I “Геометричні побудови на площині”

1. Функції креслярських інструментів. Що значить “розв’язати задачу на побудову”? Схема розв’язування задач на побудову. Скільки розв’язків має задача на побудову?

2. Поняття про визначальні точки фігури.

3. Основні задачі на побудову (побудова трикутника за трьома сторонами; побудова кута, що дорівнює даному; побудова бісектриси кута; поділ відрізка навпіл; побудова прямої, що перпендикулярна даній). Побудова четвертого пропорційного відрізка.

4. Геометричне місце точок. Основні геометричні місця точок на площині. Сутність методу геометричних місць.

5. Рухи (симетрія відносно точки; симетрія відносно прямої; поворот; паралельне перенесення). Подібні перетворення. Гомотетія.

6. Сутність методу геометричних перетворень.

7. Сутність алгебраїчного методу.

8. Золотий переріз. Алгебраїчне розв’язання задачі на золотий переріз. [Застосування алгебраїчних властивостей золотого перерізу. Геометрична інтерпретація розв’язання квадратних рівнянь].

9. Поняття про просту фігуру, рівноскладені та рівновеликі фігури. Побудова рівновеликих фігур (метод розбиття фігури і метод доповнення).

При розгляданні даних питань на уроках геометрії, в процесі індивідуальних та факультативних занять, при проведенні спецкурсу “Методи геометричних побудов”, в процесі самостійної роботи учнів ефективним є використання навчального посібника “Геометричні побудови на площині” [1.3], що підтверджено експериментально.

Особливу увагу звертаємо на такі питання:

1. *Необхідно ознайомити учнів з поняттям “визначальні точки”*, введеним у посібнику [1.1, с. 50]: ***визначальні точки фігури*** – точки, що однозначно визначають фігуру. Побудову фігур, що вивчаються в шкільному курсі математики, можна звести до побудови їх визначальних точок.

Наприклад, визначальними точками трикутника є три його вершини, прямої – будь-які дві точки, що належать даній прямій і т. ін.

Учням можна запропонувати такі завдання, спрямовані на розвиток творчого мислення:

1) чи можна вважати визначальними точками трикутника: а) три його вершини; б) три точки – середини його сторін;

2) чи можна однозначно задати коло: а) трьома його точками; б) двома точками (розглянути можливі варіанти);

3) які точки можуть бути визначальними: а) для відрізка; б) для променя; в) для прямої?

2. Важливим є питання про *кількість розв’язків задачі на побудову* [1.1, с. 57-58; 1.3, с. 5-7].

Якщо у задачі на побудову *не висуваються вимоги до розташування* *шуканої фігури*, то *різними розв'язками задачі вважаються нерівні фігури, що задовольняють вимогу*. Наприклад: "Побудувати трикутник за двома сторонами і висотою, що проведена до третьої сторони". У загальному випадку ($a>b>h$) ця задача має два розв'язки.

Якщо у задачі на побудову *висуваються вимоги до розташування шуканої фігури*, то *різними розв'язками задачі вважаються навіть рівні фігури, що задовольняють вимогу, якщо вони відрізняються розміщенням на площині*. Наприклад: "Побудувати трикутник за двома сторонами і висотою, що проведена до третьої сторони, якщо задана точка – вершина, з якої проведена висота". У загальному випадку ($a>b>h$) різними розв'язками є також рівні трикутники, що відрізняються розміщенням на площині.

Пропонуючи учням дослідити кількість розв'язків задач, запропонованих вище, можна полегшити їх роботу, доповнивши умови попередніх задач: "Сторони трикутника мають довжини a і b, висота h. Розглянути випадки: а) $a>b>h$; б) $a>b$, $b=h$; в) $a=b$, $b>h$".

Для усвідомлення учнями того, як визначати кількість розв'язків задачі на побудову, їм можна запропонувати такі завдання: "Дослідити, скільки розв'язків має задача:

1) побудувати коло з центром O;

2) побудувати коло з радіусом R;

3) побудувати коло з центром O і радіусом R;

4) побудувати коло з центром O і радіусом R, що проходить через точку A;

5) побудувати коло з центром O, що проходить через точку A;

6) побудувати коло з радіусом R, що проходить через точку A;

7) побудувати коло з радіусом R, що проходить через точки A і B;

8) побудувати коло з радіусом R, якщо на дотичній до нього прямій a задано точку дотику A.

<u>Частина ІІ "Геометричні побудови у стереометрії"</u>

Пропонуємо розглянути такі питання:

1. Паралельне проектування. Основні властивості паралельних проекцій. Ортогональне проектування.

2. Зображення просторових фігур на площині. [Побудова ортогональних прямих і площин]. Особливості зображення комбінацій просторових фігур.

3. Методи побудови перерізів многогранників.

4. Побудова перерізів тіл обертання.

Відносно розв'язування задач на побудову у стереометрії необхідно відмітити, що найчастіше в школі обмежуються побудовою паралельних проекцій фігур, причому у класах нематематичного профілю основна увага приділяється відповідним задачам на доведення та дослідження.

Для формування графічної грамотності учнів доцільно більше уваги приділяти таким задачам: "Точки A_1, B_1, C_1 – проекції точок A, B, C на площину α відповідно. Побудувати пряму перетину площин ABC і α".

В процесі розв'язування цієї задачі формується уміння учня не тільки працювати з готовим зображенням просторових фігур на площині, але й самостійно його виконувати. При чому вимоги до виконання рисунку в даному випадку відрізняється від вимог до рисунків, які виконуються в процесі розв'язування задач на обчислення та доведення.

У даному випадку необхідно працювати водночас в умовах певної "невизначеності" (площина ABC не є явно наданою) і при наявності конкретних вимог до зображення (задані точки, що належать площині ABC), що вимагає від учня підключити власне "просторове бачення". Для правильного виконання рисунку старшокласнику необхідно залучити теоретичні знання (знання аксіом і теорем) і використовувати їх нестандартно.

Відмітимо також те, що для формування графічної грамотності учнів в процесі навчання геометрії нами експериментально підтверджено (1989–2003 рр.) ефективність виконання ними задач на побудову у безклітинних зошитах – зошитах для малювання.

Для розвитку просторової уяви та абстрактного мислення корисним є використання усних вправ. Наприклад: "Якою фігурою буде множина точок простору, що рівновіддалені від даної точки?"

Ефективним є пропонування учням завдань на дослідження. Наведемо одну з них: "Три площини взаємно перетинаються. Скільки дотичних до них сфер можна провести?"

Підкреслимо також те, що формуванню графічної грамотності учнів і студентів сприятиме доцільне поєднання традиційних та новітніх дидактичних засобів навчання. У даному випадку мається на увазі використання динамічних комп'ютерних програм (найбільш сприятливі для сприймання візуалами і аудиалами) поряд з моделями і розгортками фігур; наочними посібниками, що моделюють рухи, в тому числі, – виготовленими самими учнями та студентами [1.3, 1.6, 1.7], що покращує сприймання матеріалу кінестетиками.

Така робота є можливою навіть в сучасних умовах, коли на вивчення математики в школі в класах нематематичного профілю виділяється програмою обмаль годин. Ще раз підкреслимо, що розвинені просторова уява, абстрактне мислення є необхідними не тільки для тих, хто обрав спеціальність, пов'язану з математикою, але для будь-якої людини як складові творчого мислення.

Важливим є також питання підготовки майбутніх вчителів математики до формування графічної грамотності учнів. Під нашим керівництвом протягом декількох років працюють творчі групи студентів. За цей час підготовлені дипломні і магістерські роботи, присвячені розв'язуванню даної проблеми на практиці [1.9].

Це одна із спроб реалізації принципу неперервності і наступності в процесі формування графічної грамотності учнів загальноосвітньої школи та студентів вищих навчальних закладів, розвитку їх математичних здібностей, творчого мислення.

Література

1.1. Тесленко И.Ф., Чашечников С.М., Чашечникова Л.Г. Методика преподавания планиметрии. – К.: Рад.шк., 1986. – 160 с.

1.2. Фольта О.В., Антонович Є.А., Юрковський П.В. Нарисна геометрія. – Львів: Світ, 1994. – 304 с.

1.3. Чашечникова Л.Г., Петренко С.В., Чашечникова О.С. Геометричні побудови на площині. – Суми: Ярославна, 1999. – 98 с.

1.4. Чашечникова Л.Г., Петренко С.В., Чашечникова О.С. Ознайомлення учнів з алгебраїчним методом розв'язування задач на побудову при вивченні планіметрії // Проблеми освіти. – Вип. 14. – К., 1998. – С. 113-121.

1.5. Слепушко Н.Н. Демонстрационные материалы с элементом интерактивности в дистанционном курсе «Начертательная геометрия» // Інформатизація освіти та дистанційна форма навчання6 сучасний стан і перспективи розвитку. Зб. матер. VI Міжн. наук.-мет. конф. 13-15 жовтня 2004 р. – Суми: СумДУ, 2004. – С.251-252.

1.6. Чашечникова О.С. Формування просторової уяви учнів старшої школи // Педагогіка і психологія. – 1996. – №3. – С. 83-85.

1.7. Чашечникова Л.И., Петренко С.В., Чашечникова О.С. Решение задач на построение с использованием наглядных средств обучения (комплект для дистанционного обучения по теме «Движение») // Евристика та дидактика точних наук. Міжн. зб. наук. роб. – Вип. 9. – Донецьк, 1998. – С. 52-54.

1.9. Чашечникова О.С., Нікітіна О.Ю., Федоренко Г.М., Тарасенко Ю.В. Навчальний експериментальний комплект як засіб розвитку математичних здібностей учнів // ІІ Всеукраїнська студентська наукова конференція "Родзинка-2000". – Черкаси, 2000. – 18-19 травня. – С.180.

2.1. Геометрія 7-9: Підруч. для 7-9 кл. загальноосв. шк. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. – К.: Вежа, 2001. – 272 с.

2.2. Геометрия: Учеб. для 7-9 кл. сред.шк. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 1990. – 336 с.

2.3. Нікулін О.В., Кукуш О.Г. Геометрія 7-9: Погл.курс.: 7-9 кл. Навч. посібн. – К., Ірпінь: Перун, 1999. – 352 с.

2.4. Обласні математичні олімпіади / Конет І.М., Паньков В.Г., Радченко В.М., Теплінський Ю.В. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2000. – 304 с.

2.5. Погорелов А.В. Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1990. – 384 с.

2.6. Cewe A., Nahorska H. Matematyka. Zbior zadan. – Gdansk, 1999.

РОЗВИТОК САМОСТІЙНОСТІ СТУДЕНТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

Л.О. Черних, Н.В. Богатинська
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Найбільш ефективним механізмом оволодіння вчителем педагогічною діяльністю, що побудована на основі гуманістичної концепції освіти, є його неперервний особистісний та професійний саморозвиток, що виступає в двох основних формах – самоосвіта та самовиховання. Саме тому при підготовці майбутнього вчителя особливої уваги набуває розвиток самостійності студентів, яка відіграє значну роль і під час безпосереднього навчання в університеті, і в подальшому професійному становленні фахівця. Самостійність виступає як якість людини, яка характеризується власним свідомим ставленням до вибору дії та рішучості в її здійсненні (Кобалевський Ю.Д.).

Питання про розвиток самостійності студентів пов'язане з багатьма сторонами навчального процесу; шляхи вирішення цього питання впливають на рівень спеціального та професійного розвитку майбутнього вчителя, а отже, і на рівень вищої освіти в цілому.

Специфіка математики надає широких можливостей для розвитку самостійності у студентів в процесі навчання. Цьому в значній мірі сприяє і логічна побудова математичних курсів (засвоєння яких неможливе без розвинутого мислення), і абстрактна математична мова, і лекційно-практична форма організації навчання. Особливої актуальності набуває проблема виявлення методичних можливостей та розробки шляхів розвитку самостійності студентів в процесі вивчення математичних дисциплін в вищому педагогічному навчальному закладі. Обумовлена ця актуальність, з одного боку, недостатнім рівнем самостійності студентів, з іншого боку, необхідністю посилення цієї важливої якості для успішності їх навчання.

Зупинимось детальніше на виявленні значення самостійності в процесі набуття студентами спеціальних математичних знань та умінь. Знаннями та вміннями студенти оволодівають на лекційних, практичних заняттях, під час самостійної позааудиторної роботи. Специфіка сучасних навчальних планів та робочих програм з математичних дисциплін полягає в тому, що обсяг та складність теоретичного матеріалу зростають при переході від курсу до курсу, і при цьому збільшується обсяг навчального матеріалу , що опановується студентами цілком самостійно. В цих умовах виняткового значення набувають навчальні уміння, як спеціальні, математичні, так і загальнонавчальні. Уміння, що пов'язані з засвоєнням знань, виявляються і удосконалюються тільки в процесі самостійної діяльності студентів. Опанувати діями практичного і розумового характеру по-справжньому можна, тільки докладаючи власні зусилля. Реалізація будь-яких знань, одержаних студентами в процесі навчання, знаходить свій вихід через уміння, а отже –

через самостійну діяльність. Характеризується ця самостійна діяльність свідомим активним ставленням студентів до вивчення математичного навчального матеріалу. Воно виявляється в усвідомленому сприйнятті пояснень викладача або тексту підручника, осмисленні одержаних знань, практичному їх застосуванні, виробленні різноманітних умінь.

В наш час більш розвиненою є практична сторона самостійної діяльності студентів. Це репродуктивне відтворення теоретичного матеріалу (часто формально, без достатнього осмислення) або розв'язання практичних задач (в основному, за відомим алгоритмом). Не менш важливою є для студентів і інша сторона самостійної діяльності – розумова. Вона дозволяє їм досить повно усвідомити навчальний матеріал, відпрацювати уміння не механічно, а з розумінням внутрішньої логіки. Діяльність такого рівня обов'язково повинна бути продуктивною, а її найвищий рівень передбачає таку розумову роботу студентів, при якій вони на основі власного досвіду, раніше здобутих знань та засвоєних умінь можуть одержати нові знання, новий практичний досвід. Низький рівень розумової самостійної роботи студентів часто призводить до зубріння, до механічного, неусвідомленого запам'ятовування окремих математичних тверджень, їх доведень, алгоритмів розв'язання стандартних задач.

З розвитком умінь та самостійною діяльністю студентів тісно пов'язана така життєво необхідна якість, як самостійність. Вміння та самостійність, що розвиваються у студентів в процесі їх самостійної діяльності, взаємно збагачують одне одного. Сама сутність самостійної діяльності полягає в тому, що студенти діють самі, тобто реалізують, виявляють свою самостійність. Чим вище рівень самостійності, тим ефективніша самостійна діяльність.

Реалізується самостійність людини через самостійність її мислення та самостійність вчинку. Самостійність мислення студентів полягає в цілеспрямованості, критичності, нешаблонності мислення, схильності до самоконтролю.

На різних етапах процесу пізнання (сприйняття, осмислення, застосування знань) самостійність студентів виявляється та розвивається порізному. Лекційна форма організації навчального процесу сприяє досить високому рівню сприйняття студентами навчального матеріалу, який представлений в поясненнях викладача. Розвиток самостійності тут пов'язаний з розвитком у студентів важливого загальнонавчального уміння – уміння активно слухати та сприймати аудіоінформацію. Процес слухання пояснень та мисленого слідування за мовою викладача вимагає від студента значних зусиль. Щоб полегшити цю розумову діяльність студентів, доцільно використовувати різноманітні прийоми та засоби мовної діяльності лектора (інтонаційні характеристики мови–темп, логічні наголоси, паузи; внутрішньо діалогізоване пояснення та ін.).

Наступні етапи пізнавального процесу (осмислення та застосування знань) вимагають більш високого рівня самостійності. Пояснюється це не лише тим, що сам процес осмислення є досить складним і з психологічного, і з педагогічного боку, але й тим, що глибина осмислення студентами теоретичного матеріалу перевіряється часто лише на екзамені. Аналіз існуючої самостійної навчальної діяльності студентів та рівня розвитку їх самостійності свідчить про те, що осмислення навчального матеріалу є найслабшим етапом в процесі вивчення студентами математичних дисциплін. Тому розвиток самостійності студентів повинен бути направлений на формування тих спеціальних та загальних навчальних умінь, які сприяють поглибленому розумінню математичного матеріалу, усвідомленню його внутрішньої логічної структури, зовнішніх предметних та міжпредметних зв'язків.

Серед загальнонавчальних умінь на перше місце тут виступають так звані навчально-інтелектуальні та навчально-комунікативні уміння студентів. Найбільш широкі можливості для формування і розвитку у студентів-математиків інтелектуальних і мовних умінь мають вузівські дисципліни методичного циклу. Саме на цих заняттях формуються не тільки спеціальні, але й загальнонавчальні уміння; до того ж тут окремо розглядаються питання методики їх формування. Але методичні дисципліни систематично вивчаються, починаючи з третього курсу, в той час як вже на молодших курсах студенти мають значне навчальне навантаження з суто математичних дисциплін (математичний аналіз, алгебра і теорія чисел, геометрія).

Аналіз програмного матеріалу, що вивчається в першому семестрі в зазначених математичних курсах, свідчить про те, що курс алгебри і теорії чисел має більш широкі можливості для розвитку інтелектуальних та комунікативних умінь першокурсників. Враховуючи, що рівень абстрактності алгебраїчних теорій досить високий, виникає необхідність починати в курсі алгебри з вивчення загальноматематичних розділів ("Елементи теорії множин", "Елементи математичної логіки", "Бінарні відношення"). Вивчення цих розділів посилює загальну логічну підготовку студентів та дозволяє сформувати уміння, необхідні для самостійного усвідомлення довільного математичного матеріалу.

Зокрема, вивчаючи елементи математичної логіки, доцільно включити в цей розділ такі питання: теореми та їх логічна структура, види теорем, необхідні і достатні умови. Спеціальні уміння, що формуються при вивченні цих питань, при доцільній організації навчальної діяльності студентів можуть перерости в загальнонавчальні та професійні. Проілюструємо це на прикладі організації навчальної діяльності, пов'язаної з розвитком у майбутніх учителів уміння формулювати та переформульовувати математичні речення. Уточнимо, що ці вміння можна в рівній мірі віднести як до мовних, так і до загальнологічних. Ми виходимо з такої послідовності етапів формування навчального уміння:

а) діагностика рівня сформованості відповідного уміння;

б) постановка мети (розкриття її для тих, хто навчається, усвідомлення та прийняття мети);

в) відпрацювання прийому навчальної діяльності за допомогою системи спеціальних вправ;

г) демонстрація зразка, опис послідовності дій;

д) оперативний контроль;

е) застосування прийому та системи дій;

є) узагальнення і навчання переносу.

Перший етап – етап діагностики – включає завдання на формулювання означень і теорем шкільного курсу математики та перших розділів матаналізу, АТЧ, геометрії. Наприклад: а) сформулювати третю ознаку рівності трикутників; б) сформулювати цю теорему в категоричній формі; в)сформулювати обернене твердження; г) чи буде воно теоремою? Аналіз відповідей свідчить про низький рівень сформованості у першокурсників зазначених умінь (правильні відповіді на питання б, в, г дають лише біля 20% опитаних).

На другому етапі перед студентами розкривається мета майбутньої діяльності: не просте “механічне” переформулювання математичного речення, а саморозвиток професійної та загальнокультурної якості, пов’язаної з умінням чітко і грамотно висловлювати свої думки. Як відомо, процес цілеутворення в неявному вигляді містить в собі весь процес майбутньої діяльності. Саме тому для дійсного прийняття студентами цілі діяльності слід цю мету “розгорнути” у вигляді конкретних задач-завдань. Зокрема, уміння перетворити категоричну форму твердження (теореми) в умовну потребує попереднього розвитку такого логічного уміння, яке пов’язане з розумінням логічної структури теореми та виділенням її компонентів (роз’яснювальна частина теореми, умова і висновок теореми). Обернене уміння – переформулювати теорему з умовної форми в категоричну – передбачає перш за все досить розвинені мовні уміння і разом з тим сприяє їх розвитку. Логічні уміння тут теж присутні, але проявляються вони у внутрішньому плані. Наприклад, щоб сформулювати в категоричній формі третю ознаку рівності трикутників (яка традиційно формулюється умовно), необхідно не тільки досконале володіння рідною мовою але й уміння утримувати в свідомості логічну структуру цієї теореми. В противному разі може бути допущена дуже поширена помилка – замість категоричного формулювання прямої теореми пропонують обернену їй теорему: замість “Трикутники з відповідно рівними сторонами рівні між собою” одержують: “У рівних трикутників відповідні сторони рівні”.

Третій етап може бути виділений як самостійний, а може проходити і разом з другим. Тут викладач не тільки дає зразок правильних переформулювань, але (і це головне) дає прийоми розумових дій. Запропонувавши студентам пряме і обернене твердження певної теореми, далі викладач разом з ними аналізує типові помилки в переформульованих реченнях, з’ясовує причини цих помилок. Ця робота дозволяє намітити послідовність відповідних логічних операцій і, певним чином, алгоритмізувати цей процес. Тепер виникає можливість цілком природно перейти до наступних етапів формування необхідного уміння.

На наступних етапах систему вправ для відпрацювання прийому (або прийомів) слід будувати за принципом ускладнення. При цьому слід і студентів залучати до роботи по складанню таких завдань. Найбільш важливим моментом тут є те, що дії повинні виконуватись не тільки у внутрішньому, але і в зовнішньому плані, тобто необхідно розкривати “технологію” процесу переформулювання. Важливо, щоб розглядались не тільки теореми ШКМ та АТЧ, але й теореми з курсу матаналізу та геометрії.

Як зазначалось вище, вміння формулювати та переформульовувати математичні твердження (теореми) тісно пов’язане з іншим спеціальним умінням – умінням розкривати логічну структуру теореми та виділяти її компоненти. Уявлення першокурсників про умову та висновок теореми сформовані на рівні “дано – довести”. Зрозуміло, що без чітко визначеної роз’яснювальної частини не можна правильно сформулювати умову теореми і її висновок (навіть, якщо студент розуміє, що в теоремі дано і що треба довести) .Досвід свідчить про те, що вибір множини об’єктів для роз’яснювальної частини теореми викликає забруднення у багатьох студентів. Причина тут зрозуміла: в словесному формулюванні теореми роз’яснювальна частина, як правило, взагалі відсутня. Саме тому корисними будуть такі поради з боку викладача:

1) множина об’єктів в роз’яснювальній частині – це обсяг поняття, про яке йдеться в теоремі;

2) це поняття буде родовим (частіше – найближчий рід) по відношенню до поняття ,про яке говориться в умові теореми.

На закінчення відмітимо, що загальнонавчальні уміння (зокрема, інтелектуальні і комунікативні) є основою розвитку самостійності майбутніх вчителів математики. Ефективність роботи по формуванню цих умінь у студентів залежить від того, наскільки кожний викладач-математик усвідомлює важливість цієї роботи і наскільки він володіє відповідною методикою.

ЗАСТОСУВАННЯ СУЧАСНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ДЛЯ ІНТЕНСИФІКАЦІЇ ПРОЦЕСУ ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРІЇ У СЕРЕДНІХ І ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ

Н.В. Шаповалова, Т.В. Ломаєва
м. Київ, Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Визначною ознакою сучасного періоду світового розвитку є інформатизація всіх видів діяльності людини. Це не лише отримання, обробка, передача та збереження інформації, а й розробка нових інформаційних технологій, які мають безпосередній вплив на характер і структуру виробництва, транспорту, наукових досліджень, телекомунікаційних систем, систем інформаційного обслуговування, освітньо-виховних процесів та ін. Зазначені фактори спонукають до активної розробки нових моделей і освітніх технологій, орієнтованих на виховання і розвиток всебічно розвиненої і освіченої особистості в сучасному суспільстві.

Ключову роль в освітньо-виховному процесі відіграє вища педагогічна школа, яка покликана підготувати висококваліфіковані педагогічні кадри для загальноосвітньої, професійної і вищої шкіл, які зможуть не лише споживати й передавати знання, а й самі виробляти і впроваджувати нові інформаційні технології в різні сфери освіти, виробництва і побуту. Основна мета вищих педагогічних закладів полягає в підготовці вчителя, здатного забезпечити всебічний розвиток людської особистості, формування її розумових, фізичних та естетичних здібностей, збагатити її інтелектуальний, творчий та культурний потенціал.

Розв'язанню проблеми приведення освітнього і культурного рівня педагогічних кадрів у відповідність до швидкого розвитку науки і техніки, суспільно-політичних і соціально-економічних процесів, та процесу стандартизації освіти сприяє розвиток інформаційної підготовки студентів.

Вивчення курсу геометрії, як одного з фундаментальних курсів математичної підготовки майбутніх вчителів відкриває широкі можливості для їх інтелектуального розвитку, а саме для формування і розвитку логічного мислення, просторових уявлень і уяви, алгоритмічної культури, вміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, будувати математичні моделі досліджуваних процесів і явищ, обгрунтовувати отримані висновки та ін.

Одним з найбільш важливих і складних аспектів навчально-виховного процесу при цьому є розвиток просторового мислення.

Актуальність цієї проблеми визначається не тільки тим, що без достатньо сформованих просторових уявлень неможливо досягнути необхідного рівня засвоєння ряду навчальних дисциплін, але й тим, що добре розвинена просторова уява сприяє оволодінню різними знаннями і застосуванню їх до розв'язання різноманітних задач як теоретичного, так і практичного характеру.

Важливу роль і особливе значення геометрії в формуванні просторової уяви підкреслював М.Ф. Четверухін: “Однією з самих важливих задач викладання геометрії є формування і розвиток просторової уяви, а також здібностей і вмінь виконувати операції над просторовими об’єктами” [6].

Психологами встановлено, що необхідним компонентом творчої діяльності людини в різних галузях є наявність просторових уявлень і вміння оперувати ними.

Як відмічає І.С. Якиманська, “орієнтація людини в часі і просторі є необхідною умовою її соціального буття, формою відображення оточуючого світу, умовою успішного пізнання і активного перетворення діяльності” [4].

Розв’язанню цих проблем в значній мірі допомагає застосування нових інформаційних технологій. Вони надають можливість студентам не лише використовувати математичні пакети, а й самим створювати нові комп’ютерні програми, завдяки яким розширюються не лише їх технічні, а й інтелектуальні можливості. В результаті появи нових математичних програм розширюється коло доступних дослідженню задач, а також можливості використання нових методів дослідження.

Комп’ютерні програми дають можливість побудови і дослідження моделей нових об’єктів і явищ, тому застосування нових комп’ютерних технологій до дослідження їх властивостей сприяє не лише кращому засвоєнню навчального матеріалу, а й більш повному осмисленню його студентами. Це робить їх діяльність більш усвідомленою і продуктивною.

Для сприйняття студентами оточуючого нас тривимірного простору, різної форми і величини предметів, які його складають, та їх взаємного розташування, потрібен запас просторових уявлень і знань, які складають підґрунтя геометричної уяви та мислення, необхідних при розв’язуванні задач і доведенні теорем. Це обумовлює актуальність проблеми розвитку просторових уяви та мислення.

В методиці геометрії недостатньо вивчений процес розвитку просторової уяви. Труднощі управління цим процесом виникають у викладача із-за відсутності розроблених критеріїв для виявлення і оцінки рівня розвитку просторової уяви у студентів. Тому розробка засобів для цілеспрямованого і ефективного розвитку просторової уяви у студентів є необхідною при вивченні геометрії.

Просторова уява необхідна не лише для професійної діяльності математиків, а й для орієнтації будь-якої людини в просторі і часі, що є необхідною умовою її соціального життя умовою успішного пізнання і активного перетворення діяльності.

Використання моделювання, як одного із засобів наочності, сприяє правильному формуванню абстрактних геометричних понять і вмінню доводити геометричні твердження. Воно розвиває логічне мислення, просторову уяву і вміння оперувати образом.

Математичне моделювання, як один з методів наукового пізнання, широко використовується для розв'язування практичних задач різних галузей науки, техніки, економіки та виробництва. При цьому слід зауважити, що моделі завжди будуються чи вибираються людиною для визначеної мети, тому, різні люди, переслідуючи одну й ту ж мету, можуть побудувати різні моделі для одного й того ж об'єкта або явища. Це відкриває широкі можливості для творчого підходу студентів до навчального предмету.

Моделювання сьогодні стало важливим методом наукового пізнання дослідження. Цей метод використовується на всіх етапах наукового пізнання, завдяки йому вдається звести вивчення складного до більш простого, невидимого і невідчутного до видимого і відчутного, тобто зробити довільний досить складний об'єкт або процес доступним для реального і всебічного дослідження.

Використання моделювання в навчанні має два аспекти: по-перше, побудована модель повинна відображати зміст того, що передбачається засвоїти студентами в результаті навчання, і, по-друге, моделювання є тим методом пізнання, без якого не можливе повноцінне розуміння учбового матеріалу. Цілеспрямоване формування модельованого підходу до вивчення геометрії створює сприятливі умови для розвитку у студентів теоретичного мислення, просторової уяви, внутрішньої мотивації навчання, робить їхню діяльність більш усвідомленою і продуктивною.

Використання педагогічних програмних засобів для формування модельованого підходу сприяє кращому засвоєнню базових рівнів знань, а також диференціації навчання, створює достатні умови для переходу до дослідження реальних явищ за допомогою комп'ютера.

Методи і форми застосування комп'ютерних технологій у навчальному процесі – актуальна методична і організаційна проблема кожного викладача, кожного адміністратора середнього і вищого навчального закладів.

В організації комп'ютеризації навчання можна виділити два напрямки:

1) розробка комп'ютерних навчальних програм, спеціально призначених для вивчення окремих дисциплін;

2) використання програмного забезпечення, розробленого для професійної діяльності у відповідній області знань; для більшості природничо-наукових дисциплін – це професійні математичні пакети.

Зміст навчання об'єктивно потребує реалізації сучасних інформаційних технологій. Комп'ютер є одним із засобів для формування понять, які спираються на наочні образи. Професійні математичні пакети типу Mathematica, Maple V, MatLAB, Derive, MathCad, Gran та інші – це програми, які мають засоби виконання різноманітних чисельних і аналітичних математичних розрахунків, від простих арифметичних обрахунків до розв'язування рівнянь з частинними похідними, розв'язування задач оптимізації, перевірки статистичних гіпотез засобами конструювання математичних моделей та іншими інструментами, необхідними для проведення різноманітних технічних розрахунків. Всі вони мають розвинуті засоби наукової та інженерної графіки, зручну довідкову систему та інші допоміжні засоби.

Розробники математичних пакетів швидко доповнюють свої програми новими технологічними досягненнями, розширюючи коло доступних дослідженню задач. Ці програми надають можливість побудови графіків плоских і просторових кривих, а також поверхонь, що задані в явній або параметричній формі. Педагогічний програмний засіб Графічний Аналіз 3D (GRAN-3D) є програмним продуктом, орієнтованим на застосування у навчальному процесі середніх та вищих учбових закладів при вивченні курсу стереометрії та геометрії в цілому. Він надає можливість користувачу (учню або студенту) оперувати моделями просторових об'єктів та забезпечує засобами для їх аналізу та дослідження, а також орієнтований на розв'язування стереометричних задач обчислювального характеру. GRAN-3D дає змогу оперувати такими геометричними об'єктами, як точка, відрізок, ламана, площина, многогранник, поверхня та поверхня обертання. Деякі характеристики цих об'єктів обчислюються автоматично відразу після створення об'єкта або після їх модифікації та виводяться у полі характеристик поточного об'єкту. Так, наприклад, для многогранників обчислюється об'єм та площа поверхні, а також площа і периметр окремо кожної грані. Для поверхонь можливе обчислення їх площ та об'ємів, що ними обмежуються, а також знаходження найвищих та найнижчих точок на цих поверхнях, тобто найбільших і найменших значень функцій виду $z=f(x,y)$, заданих на деякому прямокутнику чи деякій області. Для поверхонь обертання обчислюються об'єми та площі.

Впровадження сучасних інформаційно-комунікаційних технологій дає можливість значно підвищити ефективність отримання і засвоєння навчального матеріалу, доступність його, врахувати індивідуальні особливості студентів, ефективно поєднати індивідуальну і колективну діяльність, надати навчальній діяльності творчого, дослідницького характеру. Студенти мають можливість користуватися новими інформаційно-комунікаційними технологіями не лише як засобом навчання, а й самостійно створювати нові комплекси програм.

Сучасні комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання спрямовані на цілісне сприйняття досліджуваного явища, з'ясування його сутності, зв'язків між окремими його проявами, змістовної сторони отримуваних формальних розв'язків, розвиток образного, просторового мислення поряд із логічним, аналітичним, на побудову математичних моделей досліджуваних процесів і явищ.

Це яскраво можна проілюструвати за допомогою комп'ютерних програм динамічної геометрії. Вони дозволяють дослідити і вивчити динаміку розвитку процесу або явища на прикладі геометричних моделей.

Математичні та фізичні формули завдяки побудові геометричних моделей набувають конкретного змісту, образності та наочності. А також формування абстрактних геометричних понять, вміння доводити геометричні твердження можна досягнути лише при правильному використанні засобів наочності.

Вихідним пунктом пізнання є “живе споглядання”. З точки зору теорії пізнання “живе споглядання” є першою сходинкою пізнання, процесом безперервного відображення об’єктивної дійсності в мозку людини. Ототожнювання “живого споглядання” і “наочності” є помилковим, оскільки “живе споглядання” – процес на окремому етапі пізнання. А “наочність” – властивість пізнання, присутня йому на всіх етапах.

Сприймання наочного матеріалу не являється чисто актом спостереження. Цей процес тісно пов’язаний з логічним мисленням і оперуванням образом. В процесі роботи над розкриттям змісту того чи іншого геометричного поняття потрібно правильно розробити абстракцію існування, порівняння, ідеалізації і так далі.

Використання засобів наочності при навчанні геометрії тісно пов’язане з встановленням рівнів геометричного мислення як учнів, так і студентів. Кожному рівню мислення відповідають свої зовнішні і внутрішні засоби наочності.

А.М. Колмогоров підкреслює евристичну сторону наочності: “В основі більшості математичних відкриттів лежить яка-небудь ідея: абсолютно наочна геометрична побудова, яка-небудь нова геометрична нерівність та ін.” Математики намагаються розглядувані ними проблеми зробити геометрично наочними. Тому відмічає А.М. Колмогоров: “геометрична уява, або, як кажуть, “геометрична інтуїція”, відіграє велику роль в дослідницькій роботі в усіх розділах математики, навіть в самих сторонніх”.

Геометрія, як навчальний предмет, має свою специфіку. Поняття геометрії більш абстрактні, і геометричне мислення виконується на більш високому рівні абстракції, ніж в будь-якій іншій навчальній дисципліні. Цю специфіку потрібно враховувати при використанні наочності в процесі вивчення геометрії.

Засоби наочності виконують наступні функції: 1) функція світоглядної спрямованості; 2) навчальна; 3) розвиваюча; 4) виховна.

Засоби наочності повинні сприяти формуванню широкого, яскравого світогляду. В процесі викладання геометрії йде ознайомлення з одним з основних методів наукової роботи – переходом від часткового до особливого і в кінці до загального. Викладач не повинен обмежуватись лише поясненнями про те, які математичні методи сприяють розв’язанню конкретних практичних задач. Він повинен пояснити, що без цих методів багато практичних задач розв’язуються значно важче або взагалі не можуть бути розв’язані. Доведення того, що володіння такими методами передбачає знання внутрішньо геометричних зв’язків, вже має філософсько-світоглядне значення і повинно проводитись свідомо. В цьому, без сумніву, вирішальну роль може відіграти правильне застосування наочності. Вона повинна сприяти усвідомленню тісного зв’язку геометрії з суспільною практикою, повинна показати зв’язок геометрії з життям.

За абстрактністю математичних істин можна не побачити їх життєвого походження і значення. Засоби наочності відіграють важливу роль в усуненні цього недоліку, підвищують інтерес до предмету, стимулюють активну роботу думки.

Надзвичайно важливе значення мають засоби наочності з точки зору навчальної функції. Перш за все вони є носіями великої кількості інформації. Засвоєння і застосування термінології і символіки, в чому дуже допомагає застосування засобів наочності, є однією з умов, які сприяють подальшому вивченню геометричних понять, доведенню теорем, розв’язуванню задач.

Ще І.Г. Песталоцці стверджував, що наочність – основа для виникнення уявлень, вихідний початок для розвитку духовних сил, пов’язаний з роботою думки. Наочність К.Д. Ушинський вважав необхідною основою навчання, пов’язуючи її застосування з розвитком розумових сил. Отже наочність – це не тільки основа чуттєвого сприйняття, необхідна для свідомого засвоєння нових знань, але й шлях, що веде до розвитку мислення. В процесі вивчення геометрії перед засобами наочності стоїть одна з найважливіших задач – сприяти розвитку інтелектуальних здібностей, самостійних розумових дій, логічного мислення.

Величезна виховна роль засобів наочності, оскільки вивчаючи геометрію, ми знаходимо значні можливості для всебічного розвитку здібностей учнів і студентів, їх естетичного виховання.

В умовах широкого використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі, активізації пізнавальної діяльності учнів, значно зростають вимоги до професійної підготовки вчителя. Вчитель повинен мати різноманітні знання, володіти культурою мови, спілкування, поведінки, швидко орієнтуватися в потоці інформації, вміти добирати її, оцінювати її відповідність дидактичним принципам навчання, враховувати психолого-фізіологічні норми, оцінювати науковість подання матеріалу, зручність у використанні, обґрунтовувати доцільність застосування у навчально-виховному процесі. Від обізнаності і майстерності вчителя залежать ефективність і результативність навчально-пізнавальної діяльності учнів. Разом з тим нові інформаційно-комунікаційні технології повинні сприяти її вдосконаленню.

Сучасні комп’ютерні програми надають засоби для більш плідної самостійної роботи студентів під керівництвом викладача, як організатора і консультанта. При цьому поряд з формуванням у студентів знань, умінь та навичок, забезпечується розвиток їхніх особистісних якостей. Вони можуть самостійно не лише збирати інформацію, а й визначати найоптимальніший шлях розв’язку проблеми. Така діяльність розвиває особистісні риси студента, оскільки спонукає його до виконання функцій: окреслення мети, вибору, визначення суті проблеми, прийняття самостійних рішень і відповідальності за їх виконання, забезпечення творчої реалізації в обраній сфері.

Неперервна і комплексна підготовка студентів із використанням сучасних інформаційних технологій базується на комп'ютерній орієнтації всіх компонентів педагогічної підготовки вчителя.

Ретельно і правильно організована робота з комп'ютерними моделями дозволить навчити студентів не лише створювати нові технології, а й аналізувати можливі наслідки їх застосування, розвине в них почуття відповідальності перед суспільством.

Література:

1. Архангельский С.И. Учебный процесс в высшей школе, его закономерные основы и методы. – М.: Высшая школа, 1980. – 368 с.
2. Жалдак М.І. Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Збірник наукових праць. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова. – Випуск 7. – 2003. – С. 3–16.
3. Жалдак М.І., Вітюк О.В. Комп'ютер на уроках геометрії: Посібник для вчителів. – К.: Техніка, 2000. – 168 с.
4. Скаткин М.Н. Совершенствование процесса обучения: Проблемы и суждения. – М.: Педагогіка, 1971. – 206 с.
5. Співаковський О.В. Теорія і практика використання інформаційних технологій у процесі підготовки студентів математичних спеціальностей: монографія. – Херсон: Айлант, 2003. – 215 с.
6. Четверухин Н.Ф. Изображения фигур в курсе геометрии. Пособие для учителей и студентов. – М.: Учпедгиз, 1958. – 216 с.

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ КАЧЕСТВЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА

Т.А. Ярхо
г. Харьков, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

Понятие предела является одним из основных в математике, лежащим в основе следующих фундаментальных определений математического анализа: непрерывности функции, производной, дифференциала, интеграла, ряда. Поэтому глубина усвоения этого понятия вместе с теорией пределов во многом определяет степень понимания математики переменных величин, то есть высшей математики.

Одним из простейших случаев предела является предел последовательности. При введении этого понятия в соответствующем разделе курса высшей математики технических университетов представляется целесообразным уделить максимум внимания его смысловому содержанию, раскрыть геометрический смысл, а также попытаться предотвратить возможность возникновения неправильного представления о бесконечно малых и бесконечно больших величинах, связанного с неверным толкованием соответствующих терминов. В данной работе представлены фрагменты качественного анализа понятия предела, как правило, не излагаемые при традиционном чтении общего курса высшей математики.

1. Устанавливающиеся последовательности

На наш взгляд, удачным является начинать изложение темы «Предел последовательности» с введения предварительного определения **устанавливающейся последовательности** [1].

<u>Определение 1.</u> Последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ **устанавливается на числе** a, если, начиная с некоторого номера N, все её элементы равны a:

$$x_N=a,\ x_{N+1}=a,\ x_{N+2}=a,\ ...\ .$$

Примеры:

1. Постоянная последовательность 5, 5, … , 5, … устанавливаются на числе 5.
2. Последовательность 1, 3, 5, 7, 9, 9, …, 9, … устанавливается на числе 9.

Если последовательность не устанавливается ни на каком числе, то она называется неустанавливающейся.

Примеры

1. Последовательность 1, –1, 1, –1, …, $(-1)^{n+1}$, … не устанавливается.
2. Последовательность 1, 4, 9, 16, …, n, … не устанавливается.

Часто встречаются последовательности, которые устанавливаются лишь приближенно. Элементы этих последовательностей, начиная с некоторого номера, очень мало отличаются от числа a.

Пример. Последовательность 16, 8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ... не устанавливается на числе 0, однако, все её элементы по мере того, как возрастают их номера, приближаются к 0.

Эта последовательность обладает следующим свойством: какое бы число $\varepsilon>0$ мы не задали, всегда найдется номер N, начиная с которого члены последовательности отличаются от 0 меньше, чем на ε. Говорят, что рассматриваемая последовательность сходится к 0.

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется **сходящейся** к числу a, если для произвольного $\varepsilon>0$ существует такой номер $N=N(\varepsilon)$, что при всех $n>N$ выполняется неравенство

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

Число a называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$ при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a .$$

Отличие между сходящимися и устанавливающимися последовательностями состоит в том, что для **устанавливающихся** последовательностей, начиная с некоторого номера N, выполняется **точное** равенство

$$x_n=a,$$

а для **сходящихся** последовательностей это равенство выполняется только **приближенно**.

Для сходящихся последовательностей равенство

$$x_n=a$$

выполняется с любой наперед заданной степенью точности ε, то есть

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

начиная с некоторого номера N, зависящего от ε: чем меньше ε мы возьмем, тем, вообще говоря, позже будет выполняться $x_n=a$ с точностью до ε.

Ясно, что всякая устанавливающаяся последовательность сходится к тому самому числу, на котором она устанавливается. Однако, обратное утверждение неверно. Не все сходящиеся последовательности устанавливаются.

2. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Определение 3. **Вариантой** называется переменная x, принимающая некоторую последовательность значений

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots .$$

Определение 4. Варианта, имеющая своим пределом нуль, называется **бесконечно малой величиной** (или просто бесконечно малой).

Примеры: $x_n = \dfrac{1}{n}$, $x_n = -\dfrac{1}{n}$, $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ – бесконечно малые величины, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Исторически сложившийся не вполне удачный термин «бесконечно малая» величина может создать неверное впечатление, что величина, о которой идёт речь, имеет очень малые значения.

Однако, суть дела в том, что это переменная величина (за исключением тривиального случая, когда она тождественно равна нулю), которая лишь в **процессе** своего изменения способна стать меньше произвольно заданного числа ε.

Точнее существо вопроса отражает термин «бесконечно умаляющаяся величина», однако, этот термин не привился [2].

<u>Определение 5.</u> Варианта называется **бесконечно большой величиной**, если она по абсолютной величине становится и остается большей сколь угодно большого наперед заданного числа $A>0$, то есть

$$|x_n|>A,\ n>N.$$

Примеры: $x_n=n$, $x_n=-n$, $x_n=(-1)^{n+1}n$ – бесконечно большие величины.

Как и в случае бесконечно малых, здесь следует подчеркнуть, что ни одно в отдельности взятое значение бесконечно большой величины не может квалифицироваться как «большое». Мы имеем дело с **переменной** величиной, которая только **в процессе** своего изменения может стать по абсолютной величине большей произвольно взятого числа A.

Говорят, что x_n стремится к бесконечности и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty,$$

хотя на самом деле x_n никуда не стремится, а лишь **изменяется** так, что по модулю перерастает любое большое постоянное число A, то есть является **безгранично растущей**.

Литература:

1. Виленкин Н.Я., Шварцбурд С.И. Математический анализ. – М.: Просвещение, 1973. – 512 с.

2. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1968. – 727 с.

Зміст

Наукове видання

Теорія та методика навчання

математики, фізики, інформатики

Випуск V

В 3-х томах

Том 1

Підп. до друку 06.03.2005 Формат 60×84 1/16
Папір офсетний №1 Зам. №1-0603
Ум. друк. арк. 19,77 Тираж 300 прим.

Жовтнева друкарня
50014, м. Кривий Ріг-14, вул. Електрична, 5
Тел. (0564) 664381

E-mail: cc@kpi.dp.ua