Міністерство освіти та науки України
Національна металургійна академія України

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики

Збірник наукових праць
Випуск 3

Том 1

Кривий Ріг
Видавничий відділ НМетАУ
2003

УДК 371

Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. Випуск 3: В 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2003. – Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – 313 с.

Збірник містить статті з різних аспектів дидактики математики і проблем її викладання в вузі та школі. Значну увагу приділено проблемам розвитку методичних систем навчання фізики та застосування засобів нових інформаційних технологій навчання фізики у шкільній та вузівській практиці.

Для студентів вищих навчальних закладів, аспірантів, наукових та педагогічних працівників.

Рецензенти:
Г.Ю. Маклаков – д-р техн. наук, професор кафедри кібернетики та обчислювальної техніки Севастопольського національного технічного університету, науковий керівник лабораторії біокібернетики, дійсний член Міжнародної академії біоенерготехнологій
А.Ю. Ків – д-р фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри теоретичної фізики Південноукраїнського державного педагогічного університету (м. Одеса)

ISBN 5-7490-0093-1

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭВМ В РЕШЕНИИ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В СТРОИТЕЛЬНОМ ВУЗЕ

О.В. Александрова, А.Н. Маркин
г. Макеевка, Донбасская государственная академия строительства и архитектуры

В современных программах подготовки экономистов строительного профиля курс эконометрии занял одно из ключевых мест. Не зная хорошо этого предмета, не владея его инструментарием, невозможно ни проверить представляемые в учебниках, книгах и статьях эмпирические зависимости, ни получить новые такие зависимости. Без эконометрических методов нельзя построить сколь-нибудь надежного прогноза, а значит, под вопросом успех в банковском деле, финансах, бизнесе. Курс эконометрии входит в «ядро» учебных программ современных экономических вузов наряду с такими предметами, как микроэкономика, макроэкономика, финансовый анализ. Именно поэтому и предмет «Эконометрия» был введен и в нашем вузе.

Цель изучения дисциплины состоит в том, чтобы научить студентов оценивать взаимосвязи экономических показателей для разных массивов экономической информации, используя методы тестирования последней. В силу громоздкости вычислений и требований точности результатов предмет изучается с использованием компьютерной техники. В программу курса входят вопросы теории корреляции и математической статистики. Лабораторные работы выполняются студентами на персональных компьютерах с использованием пакета анализа Microsoft Excel.

В помощь студентам были разработаны «Методические указания и задания к практическим и лабораторным занятиям по курсу эконометрия», которые являются практическим руководством для изучения предмета эконометрии. Они содержат краткие теоретические сведения с примерами решения типовых задач, связанных с построением различных эконометрических моделей – простой линейной (с двумя переменными), нелинейных моделей, а также способы проверки их адекватности. Рассмотрен обобщенный метод наименьших квадратов для оценивания параметров модели с гетероскедастическими возмущениями, а также методы обнаружения и устранения автокорреляции.

Лабораторная работа 1 посвящена построению общей эконометрической модели. При ее выполнении студенты получают практические навыки работы с программой MS Excel – ввод различных массивов данных, операции с матрицами (нахождение транспонированной матрицы, умножение матриц, нахождение матрицы, обратной данной и др.) при помощи соответствующих функций программы, а также учатся оценивать значимость параметров модели при помощи статистических критериев Стьюдента, Фишера-Снедекора и др.

В лабораторной работе 2 выполняется построение эконометрической модели с гетероскедастическими возмущениями. При этом студенты продолжают совершенствовать навыки работы с массивами данных, осваивают способы сортировки данных. Также они учатся проводить статистические тесты на наличие гетероскедастичности в исходном массиве, например, такие, как тест Гольдфельдта-Кванта, тест Спирмена.

При построении модели с автокоррелированными излишками в лабораторной работе 3 студенты используют весь арсенал средств анализа программы MS Excel, с которым они познакомились при выполнении предыдущих лабораторных работ.

Следует отметить, что лабораторные работы сопровождаются соответствующими иллюстрациями (копиями экранов с программой MS Excel) и пошаговыми алгоритмами их выполнения. В Приложениях приведена необходимая справочная информация, а также контрольные вопросы и задания. Также составлены контрольные тесты для проверки знаний студентов при помощи ЭВМ, включающие в себя вопросы по теории с выбором ответа.

МОНІТОРИНГ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ З МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТІВ ВНЗ І–ІІ РІВНІВ АКРЕДИТАЦІЇ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ МІЦНИХ НАВИЧОК І УМІНЬ

О.Б. Байструк
м. Мелітополь, Мелітопольський державний промислово-економічний технікум

Створення Державних освітніх стандартів, введення в практику 12-бальної системи оцінювання на І курсі ВНЗ І-ІІ рівнів акредитації, важливість знань з математики для подальшого вивчення студентами предметів спеціального циклу, обумовлюють високі вимоги до системи контролю результатів навчання.

Як правило, студентами першого курсу ВНЗ І-ІІ рівнів акредитації стають випускники дев'ятих класів загальноосвітніх шкіл. Більшість з них не мають чітко визначених цілей у навчанні і потребують постійної уваги з боку викладача і систематичного контролю процесу засвоєння знань.

Згідно з вимогами особистісно-орієнтованого навчання пріоритетними питаннями контролю є особисті досягнення студента в опануванні знаннями, вміннями та навичками, динаміка росту рівня знань. Отже, контролю підлягають не тільки результати навчання, а й процес їх досягнення. Тому на перший план виходять моніторинг і об'єктивна педагогічна діагностика, що забезпечує зворотній зв'язок викладача зі студентами.

Введення 12-бальної системи оцінювання знань є доцільним і з тієї точки зору, що дозволяє студенту поступово нарощувати об'єм знань і складність навичок та умінь, реально відчуваючи свій прогрес. В цій ситуації задача викладача помітити і оцінити кожен успішний крок студента, надати йому моральну підтримку і своєчасну методичну допомогу.

Тому постає проблема оперативного контролю і оперативного доведення до студентів рівня їх досягнень, який ми розглядаємо як важливу ланку у навчанні. Оцінювання знань – активний, систематичний процес. На думку В.Ф. Шаталова [1], оцінювати кожного учня треба не тільки за "гідність", не тільки "об'єктивно", але й щоденно.

При ретельній підготовці викладача до занять, на моніторинг знань, навичок і умінь витрачається, як правило, дуже багато часу. Наш досвід свідчить, що одним з ефективних методів оперативного контролю знань з математики, який сприяє розвитку самооцінки знань, і, як наслідок, мотивації навчання є один із різновидів математичних диктантів.

При проведенні цього типу математичного диктанту студент одночасно робить дві копії, застосовуючи для цього копіювальний папір. Завершивши роботу, студенти один екземпляр здають викладачу, а другий залишають собі.

Це дає можливість зразу після здачі роботи провести її перевірку та виправити помилки. Вірні відповіді викладач може підготувати сам і пред’явити їх на транспаранті для кодоскопа або доручити добре підготовленому студенту виконувати завдання диктанту на кодоплівці.

При цьому і викладач, і студенти можуть зразу ж зрозуміти наявність “білих плям” у тих знаннях, що перевірялися. Якщо в процесі перевірки виявляться систематичні помилки, то викладач має можливість додатково звернути увагу на певні теоретичні положення або на алгоритм розв’язування вправ. В подальшій роботі викладач має можливість проконтролювати усунення виявлених недоліків.

За нашим досвідом, якщо студентам доручити оцінювання власних навчальних досягнень або досягнень своїх товаришів, то така перевірка дає сильний виховний ефект. Не було таких випадків, коли студент, оцінюючи власні знання за заданими критеріями, завищив би собі оцінку.

Включення в оцінювання власних знань грає важливу роль в формуванні у студентів критичного ставлення до одержаного результату, створює вірні уявлення про рівень своїх досягнень в навчанні, корегує поведінку, попереджує розвиток зарозумілості або, навпаки, невпевненості в собі.

Неминуча радість успіху, за В.О. Сухомлинським, приходить тоді, коли оцінка викладача збігається із самооцінкою студента. Це успіх для обох сторін.

Кількість варіантів, складність завдань для диктанту визначається викладачем в залежності від рівня підготовленості студентів. Важливо, щоб диктант містив завдання не тільки репродуктивного характеру, але й питання, які примушують студентів аналізувати подану інформацію.

Так при вивченні теми “Похідна функції в точці” включаємо завдання такого типу: знайти похідну sin 15° або 2^5 тощо. Не зважаючи на елементарність питання, частина студентів робить помилку, не сприймаючи sin 15° та 2^5 як константи, тобто виконує роботу механічно або погано відрізняє загальне поняття функції від значень функції в даній точці. Але якщо включати питання такого типу регулярно, то у студентів поступово розвивається здатність до аналітичного мислення і свідомого ставлення до використання математичних понять.

Відомо, що коректування знань студентів слід проводити саме в процесі опанування навчальним матеріалом, бо якщо помилки увійшли до стереотипу мислення, то і викладачу, і студентам потрібно докласти багато зусиль для його виправлення.

Однією з необхідних форм контролю за процесом набуття математичних знань є поточне усне опитування, яке не можна недооцінювати, віддаючи перевагу тільки письмовому, як поточному, так і тематичному оцінюванню.

Відомо, що під час опитування психофізичний стан студента змінюється: в залежності від типу нервової системи студент може стати збудженим або пригніченим, втратити психічну рівновагу, в нього змінюється швидкість процесів, які впливають на мислення і пам’ять. Отже, задача викладача створити такий психологічно комфортний клімат на занятті, щоб студент був впевнений у об’єктивності оцінки, у тому, що невдала відповідь не викличе негативної реакції з боку викладача і товаришів.

Усне поточне опитування сприяє розвитку точного математичного мовлення. Людина, яка чітко говорить – чітко й мислить. Невміння точно висловити свої думки є одним з наслідків переповнення шкільних класів і, як результат, у студентів виявляється недбале ставлення до вивчення означень та формулювань.

Таким студентам важко чітко поставити запитання, пояснити суть проблеми, яка перед ними виникає. Це, в свою чергу, приводить до зниження якості знань. Для розвитку умінь узагальнювати інформацію під час усного опитування можна дати завдання студентам щодо укладення питань і оцінювати не тільки відповіді, але й правильність, чіткість, зрозумілість питань. Студенти повинні упевнитися, що для того, щоб правильно задати питання, необхідно добре володіти матеріалом теми.

Щоб не спровокувати бажання деяких студентів поставити у незручне становище інших дуже складним питанням або таким, що виходить за рамки програми чи потребує багато часу на обміркування, студенти попереджаються про вимоги до складності питань і про необхідність знати на нього повну відповідь. Навіть, якщо питання мають підвищену складність, методи розв'язування повинні бути відомі всім. Таке опитування передбачає різноманітність форм: гра, змагання, конкурс тощо.

Пропонуємо і такий методичний прийом, як коментування при роботі над стандартними вправами: викладач назначає серед студентів "ведучого", який, виконуючи завдання в зошиті, повинен пояснювати свої дії так чітко, щоб всім був зрозумілий кожен його крок. Як свідчить практика, цей прийом найбільш ефективний на додаткових заняттях серед студентів першого курсу на початку навчального року, під час адаптаційного періоду.

Сьогодення дає широкі можливості здійснювати оперативний контроль за допомогою персонального комп'ютера, що заощаджує час викладача на перевірку, контролює час і якість виконання кожного завдання.

В залежності від рівня складності контролюючої програми, на монітор комп'ютера студента можуть бути виведені оцінки за роботу, кількість помилок, їх перелік, рекомендації з подолання недоліків та ін., вся ця інформація виводиться і на монітор комп'ютера викладача, що дає можливість оперативно оцінити рівень засвоєння певної теми і провести корегування.

Форми і методи оперативного контролю можуть бути різноманітними, і всі вони повинні формувати позитивне ставлення студентів до корекції знань, тому що усвідомлення своїх помилок – один із шляхів до швидкого інтелектуального прогресу.

Оцінюючи та контролюючи знання студентів, викладач зосереджує увагу не на оцінці, вираженій у певних балах, а на потребі індивідуального підходу до кожного студента, розумінні його труднощів при засвоєні навчального матеріалу. Безперечно, оцінка є дуже сильним інструментом і користування ним потребує обережності.

Слід зауважити, що регулярне отримання студентами завищеної оцінки за старанність і ставлення до предмета, з одного боку, може стимулювати бажання вчитись, а з іншого – дезінформувати студента, його батьків, групу, бо в заліковій книжці або в дипломі не написано, що оцінка одержана за старанність, а виражає рівень знань та вмінь студента. Несправедлива, необ'єктивна оцінка негативно впливає на ставлення студентів до вивчення предмета, “вбиває” бажання вчитись.

Лише творче застосування психолого-педагогічних принципів і підходів в контролі і оцінюванні знань дає змогу викладачеві максимально об'єктивно підходити до кожного студента, неупереджено ставитись до його знань, допомагати йому успішніше засвоювати навчальну програму.

Література.

1. Шаталов В.Ф. Точка опоры. – М.: Прогресс, 1980. – 356 с.
2. Подласый И.П. Педагогика. Учебн. для студентов высших пед. учебных заведений. – М.: Просвещение: Гуманит. изд. Центр ВЛАДОС, 1996. – 403 с.
3. Смолкин А.М. Методы активного обучения: Науч.-метод. пособие. – М. Высш. шк., 1991. – 176 с.

АКТИВІЗАЦІЯ ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Т.Г. Балюк
м. Кривий Ріг, Середня школа №99

Відомо, що однією з необхідних умов якісного навчання учнів є їхня активна участь у процесі пізнання, стійкий інтерес до предмета що вивчається, бажання пізнавати нове. Оскільки математична підготовка учнів орієнтується на широке розкриття зв'язків математики з оточуючим світом, а математичні вміння та навички знаходять безпосереднє застосування в виробничий і науковій діяльності, тому одним з основних завдань сучасної школи є розвиток математичних здібностей та творчого потенціалу школяра.

Урок – це творчість учителя, найактивнішим співробітником якого в досягненні мети є інтерес учнів до предмета. Інтерес, як стимул до дії, до переборення труднощів, позитивно впливає на увагу, пам'ять, мислення. Він підвищує працездатність, активізує здібності, сприяє вихованню наполегливості, волі.

Зацікавити весь клас і кожного учня зокрема, збудити фантазію, думку, розвивати бажання, досліджувати, доводити, відкривати, знаходити – найраціональніші завдання вчителя. Реалізація його – запорука успіху всього навчально - виховного процесу. Тому у своїй роботі використовую форму і методи навчання, які б створювали найбільш сприятливі умови активної роботи для кожного школяра.

Багаторічний стаж роботи в школі дає, сподіваюсь, мені право і змогу зробити певні висновки, стосовно яких і написано ці методичні рекомендації.

Яким би за формою чи за змістом не був урок, головним у ньому є праця – організована, результативна, творча.

Урок можна вважати результативним, якщо учні глибоко усвідомили і "привласнили" мету вчителя, коли вона перетворилася в їхнє особисте прагнення.

Сучасний урок – це урок демократичний, що проводиться не для учнів, а разом з учнями, глибоко продуманий, організований і керований, з урахуванням дитячих можливостей, потреб та інтересів. Саме тому, на уроці не може бути об'єктів та суб'єктів. Лише суб'єкти – по обидва боки учительського столу.

Кожен урок має бути уроком, якого чекають, на якому діти відчувають радість творчої праці, де виховання досягається не штучно, не мимохідь, а послідовно й логічно через навчання.

Практика керування навчально-виховним процесом має бути гнучкою й різноманітною, динамічною й емоційною, прийоми, методи і форми якої різні, але завжди доцільні. Це і створення тимчасових груп, і навчання без принципу, і орієнтування на мету, і можливість вільного вибору тощо.

Кожен учень – то є складна психологічна задача, яку вчитель покликаний розв'язати з високим професійним умінням.

Психологія твердить: добрі справи можуть творитися лише на позитивному емоційному тлі. Таким чином, дитину спочатку потрібно навчити хотіти й любити, а вже потім – знати і вміти. Як відомо, у двигуні внутрішнього згорання робочу суміш запалює іскра. Так само биття учнівської думки "запалює" інтерес. У збудженні його відводимо помітне місце ігровим елементам та урокам нестандартного типу.

У значній мірі підвищує активність учнів **гра.** Ігрові форми – є цінним засобом виховання і розвитку, вони активізують психічні процеси, викликають в учнів живий інтерес до процесу пізнання, виховують у них активну життєву позицію, привчають до колективних і індивідуальних форм роботи. Звичайно, гра – це форма, а зміст – це серйозна робота по відпрацюванню умінь та навичок, перевірці знань, закріпленню вивченого. Будь-яка гра – це змагання. Тому на уроці немає байдужих, усі активно працюють. Саме завдяки ігровій формі навчання стає доступним, а головне – цікавим. З пасивного спостерігача учень перетворюється на активного учасника навчального процесу.

Ігрова діяльність сприяє створенню пізнавального мотиву, активізації розумової діяльності учнів, підвищує їхню увагу до змісту матеріалу, що вивчається, працездатність, а також почуття відповідальності за успіхи в навчанні як усього колективу, так і своєї особистості. Процес гри, її результати часто спонукають деяких учнів замислитися, які прогалини є в їхніх знаннях та як їх ліквідувати. Усі структурні елементи дидактичної гри взаємопов'язані між собою: без ігрового задуму та ігрових дій, а також без правил дидактична гра втрачає свою специфічну форму, перетворюється у звичайне виконання вправ. Поєднання всіх елементів гри та їх взаємодія підвищують організованість, ефективність гри, приводять до бажаних результатів.

Прикладом може бути використання дидактичної гри **“Математичний поєдинок”** для засвоєння формул скороченого множення у 7-му класі. Гра сприяє набуттю нових знань. Основою її є змагання між командами під час відповідей на запитання і розв’язування вправ, запропонованих учителем. Назва гри підкреслює рівноправність команд у змаганні. Ігровий задум полягає в тому, щоб на основі створення проблемної ситуації і змагання команд активізувати мислення учнів, перетворити процес навчання в процес активної діяльності та самостійних відкриттів. Етапи гри відповідають етапам уроку – це актуалізація опорних знань, перевірка знань учнів з теми.

У процесі гри учні, допомагаючи один одному, значною мірою самостійно набувають нових знань. Використовуючи дидактичні ігри, учитель повинен стежити за збереженням інтересу школярів до гри. Якщо діти працюють з бажанням, то це добре впливає на засвоєння ними знань.

Дидактичні ігри в 5 – 7-их класах часто бувають пов’язані з окремими сюжетами, які можна зрозуміти з назви гри: **“Боротьба за цифру”, “Таблиця знань”.** Вони досить прості, розраховані на елементарну уяву. Героїчний пошук, романтика, подорожі в іграх підсилюють уяву та кмітливість школярів. Для вдосконалення усних обчислювальних навичок у середніх класах проводжу сюжетно-рольову гру **“Десантники”.** Вона подобається учням і потребує мінімальної попередньої підготовки. На магнітній дошці кріпляться невеличкі малюнки парашутистів різного кольору, під кожним записується приклад, а відповіді записуються нижче, одним рядком. Повідомляються дітям правила гри: кожен десантник повинен приземлитися в заданому пункті. З’єднайте приклад з відповіддю і дізнаєтесь, хто і де повинен приземлитися.

При організації групової роботи з метою формування обчислювальних навичок дітям пропонується гра **“ЕОМ”.** На дошці завчасно малюється блок-схема. Кожен блок виконує певну роботу-дію.

Учень, який сидить зліва за партою виконує роль ЕОМ – обчислює швидко і вірно, як обчислювальна машина, а другий учень, що сидить праворуч, виконує роль контролера.

Контролери запускають машину, пропонуючи на вході числа. Так учні, які виконують роль ЕОМ, обчислюють за схемою і на виході записують обчислювальну відповідь. Після перевірки відповіді контролером вони показують результати вчителю. Взагалі в ігрових формах уроків реалізуються ідеї спільної співпраці, змагання, самоуправління, виховання через колектив, виховання відповідальності кожного за навчання і дисципліну в класі, а головне – навчання математики.

САМОСТІЙНА РОБОТА СТУДЕНТІВ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ ПРИ ВИВЧЕННІ ДИСЦИПЛІН МАТЕМАТИЧНОГО СПРЯМУВАННЯ

М.М. Бантос
м. Кривий Ріг, Інститут ділового адміністрування

Економічний розвиток України потребує реформування системи вищої освіти. І математичні дисципліни, актуальність яких в підготовці економістів очевидна, не виняток.

Одна з головних вимог державної політики – розвиток активності і самостійності майбутніх фахівців, формування у студентів прагнення до безперервної самоосвіти, вміння постійно оновлювати і застосовувати здобуті знання.

Досвід свідчить, що міцними будуть ті знання, які студент здобув самостійно, користуючись власним досвідом і думками, визначив напрям їх практичного використання [1]. До того ж зростання кількості навчальних дисциплін, передбачених навчальним планом підготовки спеціалістів і зменшення годин на математичні дисципліни, потребує винесення значного об’єму теоретичного матеріалу на самостійне вивчення.

Самостійна робота студентів, методика її організації безпосередньо пов’язані з активізацією їх пізнавальної діяльності. Ніяка мета не буде досягнута без активної роботи студента і ефективно діючого зворотного зв’язку викладач–студент [2]. Оскільки математичні дисципліни вивчаються на перших курсах, то адаптація першокурсників до нових форм навчання, що застосовуються у вищих навчальних закладах, буде проходити швидше, якщо з перших днів навчання студент опиниться в умовах, які спонукають до активної самостійної діяльності. Крім того, слід відмітити, що це співпадає з новою концепцією Міністерства освіти і науки України стосовно збільшення обсягу самостійної роботи студентів до 50% і більше.

Саме тому перед викладачами кафедри постали наступні задачі:

1. Навчити студентів методам самостійної роботи (уважне сприйняття лекцій, ведення конспектів, виконання домашніх завдань, самостійне вивчення літератури, застосування вивченого

до розв’язування практичних завдань, підготовка до контрольних робіт, заліків, іспитів тощо.

2. Створити необхідну методичну базу для самостійної роботи студентів.

Оскільки дидактичні матеріали і методичні розробки виступають основним засобом самостійної роботи студентів, то до них повинні висуватися певні вимоги: урахування різного рівня підготовки студентів, ретельний відбір необхідної інформації, пов’язаний з обмеженістю навчального часу, доступність. Досить зручно розробляти методичні вказівки, які містять необхідні інструкції, достатню кількість розглянутих прикладів і завдання для індивідуальної роботи, компонуючи такі матеріали по окремим темам. Мета таких розробок – надання студентові можливості корегувати свої дії, виправляти допущені помилки, тобто контролювати себе.

3. Організувати самостійну роботу студентів. А саме систему поетапного контролю якості знань і навичок студентів, придбаних самостійно.

4. Впровадити сучасні технології навчання, орієнтовані на самостійну роботу студента (комп’ютерне тестування, прикладне програмне забезпечення і т.п.)

Так, для студентів спеціальностей “Менеджмент зовнішньо економічної діяльності” та “Менеджмент організацій” за навчальним планом курс вищої математики вивчається один семестр. Тому з кожного розділу курсу студенти повинні виконати індивідуальну самостійну роботу, з метою повного опрацювання всіх розділів. Підібрані завдання передбачають знання теоретичного матеріалу і придбання певних практичних навичок. Деякі з них мають різні способи розв’язання, що дає змогу проявити студенту свою індивідуальність.

Контроль за виконанням самостійної роботи проводиться згідного графіка захисту і здачі робіт. Деякі питання перевіряються безпосередньо на підсумкових контрольних роботах, які проводяться у навчальний час.

Таким чином оцінювання студента наприкінці семестру відбувається з урахуванням виконання всього обсягу запланованої самостійної роботи.

В даний час викладачами кафедри інформатики та вищої математики Інституту ділового адміністрування і автором особисто виконується робота з активного впровадження вище зазначених заходів в учбовий процес. На нашу думку, це дозволить стимулювати розвиток аналітичних здібностей студентів вже на початкових курсах і має сприяти підвищенню якості навчання.

Література

1. Герман Н. Адаптація форм організації самостійної роботи студентів до сучасних технологій навчання. // Вища школа. – 2001. – № 4–5. – с. 53–62.
2. Корольский В.В. Самостоятельная работа студентов при изучении математических дисциплин. // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Зб. наук. праць: в 3-х томах. – Кривий Ріг: Вид. відділ КДПУ, 2002. – Т.1: Теорія та методика навчання математики. – С. 171–176.

КОМПЬЮТЕР В ЛЕКЦИОННОЙ ЛАБОРАТОРИИ

В.Н. Беловодский, Г.Т. Климко
г. Донецк, Донецкий государственный институт искусственного интеллекта
klimko@iai.donetsk.ua

Задачи постоянного совершенствования учебного процесса диктуют настоятельную необходимость активного использования компьютера в лекционной аудитории. Возможность многократного воспроизведения подготовленного материала, высокие изобразительные возможности, позволяющие непосредственно в аудитории производить моделирование физических явлений, превращают компьютер в серьезного помощника и дают возможность концентрировать внимание преподавателя на усилении эффекта понимания учебного материала.

Считая для себя далеко не завершенным процесс поиска форм использования компьютера в аудитории, тем не менее, позволим поделиться опытом, приобретенным при разработке соответствующего методического обеспечения. Для этого изложим содержание электронного лекционного сопровождения, разрабатываемого при участии авторов, по отдельным темам курсов высшей математики и физики для технических специальностей вузов.

Тема 1. «Методы решения линейных систем уравнений»

Условно структура состоит из трех частей и содержит теоретическую и демонстрационную составляющие и раздел с упражнениями.

В первой (теоретической) части приводится краткое справочное описание изучаемых методов. Это правило Крамера, метод Гаусса и матричный метод. Изложение ограничивается формулированием и пояснением соответствующих расчетных формул для получения решения системы (правило Крамера), описанием методики выполнения прямого и обратного хода (метод Гаусса), методикой получения вектора решений (матричный метод). Вопросы, связанные с обоснованием и областью применимости указанных методов, а также сравнительный анализ их трудоемкости рассматриваются условно, как дополнительные, и в электронную версию не включены. Их рассмотрение представляется целесообразным проводить с той или иной степенью подробности непосредственно преподавателем «вживую».

Во второй части изложенные методы иллюстрируются на специально подготовленных системах уравнений. Порядок их решения демонстрируется пошагово, процесс воспроизведения управляется с клавиатуры компьютера.

Третья часть содержит задания для самостоятельного анализа. Каждое из них снабжено подробным описанием решения, содержащим систему указаний, подсказок и ссылок с учетом пожеланий пользователя в части выбора метода решения и завершается формулированием ответа. Здесь же, помимо запрограммированных заданий содержится и упражнение, в котором формирование системы уравнений пользователь проводит самостоятельно, вводя с клавиатуры коэффициенты уравнений. После этого, выбрав в меню желаемый метод решения, он имеет возможность получить необходимые рекомендации по ее решению и окончательный ответ, используемый для контроля самостоятельного решения.

Тема 2. «Замечательные пределы»

Электронная версия имеет примерно такую же структуру, как и описанная выше.

В ее теоретической части содержится обоснование первого замечательного предела. Учитывая, что центр тяжести доказательства находится на проведении геометрических построений, основное внимание уделено именно им. Предусмотрено воспроизведение их как в непрерывном режиме, так и пошаговом, для выделения различных фрагментов рисунка использована цветовая индикация. Изложение второго замечательного предела ограничивается лишь иллюстрацией к его доказательству. Проводится пошаговое построение графика функции $y = (1+1/x)^x$ при $x \to \pm\infty$, из которого виден асимптотический характер ее поведения. Тем самым, на наш взгляд, сознание слушателей подготавливается к теоретическому обоснованию результата, который с той или иной степенью подробности, проводится опять таки преподавателем «вживую». Первая часть завершается пояснениями применения числа e в части образования гиперболических функций. Приведены их определения, свойства, графики.

Вторая часть содержит примеры на вычисление пределов. Предусмотрен пошаговый режим демонстрации их решений. Это позволяет дать необходимые пояснения и, при желании, попытаться провести дальнейшие вычисления самостоятельно.

Такие же принципы организации режимов воспроизведения использованы и в третьей части, содержащей задания для самостоятельного выполнения. Решение каждого задания снабжено необходимыми указаниями и ссылками, позволяющими на каждом шаге вернуться в предыдущие части для дополнительной проработки.

Демонстрации и лабораторные работы по физике

Наш взгляд на достоинства и недостатки компьютерной модели физического эксперимента отмечены в [1]. Здесь мы остановимся кратко на описании наших демонстраций по много кратному упругому удару, вертикальным и горизонтальным колебаниям связанных тел, по применению колебаний маятника-стержня для экспериментального определения ускорения свободного падения, по закону Ома. Они содержат меню, «инструменты», справку по теоретической части и по элементам управления демонстрацией. Имеется возможность выбора упругости пружин, коэффициента восстановления ударяющихся тел, значения активного сопротивления, ускорения свободного падения, которое изменяется непрерывно или принимает значение для конкретной планеты, расстояния от верхнего конца стержня-маятника до его опорной призмы.

Подробнее опишем применение колебаний стержня для имитации эксперимента по определению ускорения свободного падения. По результатам 15 измерений времени 10 колебаний стержня с различной приведенной длиной, которые в виде точек переносятся в «окно» с координатной плоскостью, строится график для зависимости периода колебаний маятника–стержня от приведенной длины. Для построения всего графика нет необходимости в переворачивании маятника, а используется симметрия графика относительно расстояния до его центра. Точность измерений зависит от умения пользоваться секундомером и линейкой, имеющимися в виртуальной лаборатории и управляемыми с помощью мыши. Для измерений по графику приведенной длины имеются подвижные линейки параллельные координатным осям графика. Проведенные по измерениям значения ускорения свободного падения заносятся в таблицу. Предполагается также анализ погрешностей. По времени выполнения и достигаемой точности имитируемая лабораторная работа вполне соответствует реальному эксперименту.

В заключение отметим, что по мере подготовки законченные электронные разработки передаются в компьютерные классы и становятся доступными пользователям в сетевом режиме. Электронные страницы выполнены в масштабе *html*, графическая часть разрабатывается с привлечением языка *FLASH*.

Литература

1. Миненко А.С., Беловодский В.Н., Климко Г.Т. О разработке электронного методического обеспечения по математике и физике // Матеріали міжнародної науково-практичної конференції «Перспективи розвитку вищої освіти в період суспільної трансформації”, 13–14 листопада 2002 р., ДУЕТ, м. Донецьк (на CD).

СПЕЦИФИКА ИЗЛОЖЕНИЯ КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Н.А. Белоцкая
г. Алчевск, Донбасский горно-металлургический институт

В последние годы качество преподавания математики в школе оставляет желать лучшего. Резко уменьшилось количество часов математики, выпускник сам выбирает предметы для сдачи выпускных экзаменов и поскольку математика один из сложных предметов, часто обходит его стороной. Даже те учащиеся, которые знают, что встретятся с математикой в вузе, часто не желают сдавать выпускные экзамены по математике. Кроме того, многие годы в ДГМИ практикуется система приема в вуз без вступительных экзаменов. Тем самым абитуриент лишен возможности привести систему своих знаний по математике в порядок во время подготовки к экзаменам. Все это привело к тому, что уровень подготовки абитуриентов недостаточный для успешного обучения в вузе, т.к. вузовская программа предполагает определенный уровень знаний математики.

Поэтому, разрабатывая методику преподавания математики в вузе, нужно исходить из неготовности большинства абитуриентов к вузовскому обучению.

Методики обучения математике должны быть более активными, когда преподаватель играет более активную роль, чем студенты (лекция, объяснение, рассказ, беседа). При существующем количестве часов математики в вузе преподаватель имеет возможность дать лишь основные знания и навыки. Число аудиторных часов математики катастрофически мало. В сложившейся ситуации выход один – верно организовать, направить, проконтролировать самостоятельную работу студента.

На нашей кафедре практически по всем темам, изучаемым в институте, разработаны индивидуальные семестровые задания. Их разработка проведена так, что объем, качество и содержание заданий соответствует количеству часов, выделяемых деканатом для самостоятельной работы студентов.

Но выполнение этих заданий требует помощи со стороны преподавателя, который руководит выполнением этих заданий.

Выполнение заданий проводится поэтапно, в ходе чего преподаватель консультирует студента, а также контролирует правильность выполнения задания на каждом из этапов. Процесс обучения должен быть непрерывным, а не только во время выдачи и защиты заданий. Только при таком условии алгоритм выполнения задания будет полным, глубоко будет усвоен студентом материал и затем может быть использован им в аудиторных занятиях и на контрольных работах.

Основной проблемой при воспитании студента, обучении его правильности организации и выполнения работ, развития и становления его самостоятельности является то, что проводится эта работа в нашем институте исключительно на голом энтузиазме преподавателя.

На консультации и проверку индивидуальных заданий не выделяются часы. Возникает не очень корректная ситуация, когда кафедра считает задачу консультаций и проверки работы каждого студента очень важной, так как совершенно ясно, что без нее знания станут гораздо хуже. И при этом одновременно важность этой задачи никак не замечается и не оценивается администрацией института.

А ведь эта работа требует от преподавателей немалого времени. Деканатами планируются часы на самостоятельную работу и если следовать тому, что не выделяется времени на проверку заданий и контроль их выполнения, то эта работа студента должна остаться только его личным делом, а такое положение не может способствовать хорошей квалификации специалиста.

Самостоятельная работа должна корректно и ненавязчиво направляться, руководиться и контролироваться преподавателем, контакт которого со студентом должен быть максимально тесным, только тогда цель, которую ставит государство перед вузом, т.е. получение высококлассного специалиста, будет достигнута.

Важную роль в методике изложения математики в техническом вузе играет и заинтересованность студента в изучении математики, когда решаемые задачи на лекции и практике привязаны к специальности. Тогда студент видит и понимает необходимость знаний математики при решении конкретных задач, связанных с его специальностью. Подбор таких задач очень важен и обычно согласован с выпускающими кафедрами.

В последние годы математика читается так, чтобы все те разделы, которые широко используются для данной специальности, были освоены на достаточном уровне. Т.е. для металлургов, например, более подробно читается теория поля, тензоры, для экономистов линейная алгебра и т.д. Математика привязывается к специальности, чтобы подготовка специалиста была непрерывной.

Известно, что специалисты, получившие достаточно широкое физико-математическое образование, и научившиеся самостоятельно изучать материал, имеют способность к «физическому мышлению», т.е. могут сами осваивать новые технические направления, легко могут переучиваться и успешно работать по-новому.

В труде преподавателя нет просто повторяющихся элементов, педагогическая деятельность многогранна, сложна, трудоемка. Работа преподавателя требует постоянного поиска содержания, форм, методов и средств обучения, эффективных путей сотрудничества со студентами в процессе обучения с целью достижения основной цели – подготовки высококвалифицированного специалиста для экономики Украины.

ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ НА ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ ОТДЕЛЕНИЯХ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ

И.А. Берёзкина
г. Луганск, Восточноукраинский национальный университет

Развитие любой страны невозможно без эффективно действующей системы образования, которая готовит квалифицированные кадры для всех сфер деятельности. Качество образования в высшей школе, прежде всего, зависит от тех знаний основ наук и умений, которые получены учеником в средней школе, и, во-вторых, от его подготовленности к обучению в высшей школе.

Существует ряд трудностей, обусловленных тем, что студенты плохо представляют себе специфику своей будущей профессии в целом и, соответственно, слабо ориентированы в выборе специализации во время учёбы.

Школьник и абитуриент различаются не столько уровнем подготовки, сколько тем, что абитуриент работает (или, по крайней мере, должен работать) на понимание изучаемого материала, школьник же, как правило, - на его запоминание. Именно на основе понимания возникают прочные знания и, главное, интерес к учёбе. При этом вспомним, что «необходимо добиваться понимания и только понимания изучаемого материала», что давать слушателям формулы, полученные без вывода, и к тому же для кратковременного использования – это, значит, терять напрасно время.

Подтверждением тому являются исследования психологов по различным возрастным группам школьников и студентов. Как отмечает Э.А. Фарапанова: «Заметные изменения выявились в качественных особенностях процессов памяти. В старших возрастах нарастает использование смысловой группировки материала, что значительно слабее выражено в младшем возрасте».

Сформировать такого рода установку на понимание – важнейшая задача организованной в университете системы довузовского образования, включающей подготовительное отделение и подготовительные курсы.

Считаем, что вопросы отбора содержания учебного материала и организация обучения математике на подготовительных отделениях нельзя рассматривать в отрыве от решения проблемы подготовки слушателей к обучению в вузе. Но эта проблема должна решаться с учетом специфики вуза, где будут потом обучаться слушатели. В этой связи роль подготовительных отделений заключается не только в том, чтобы восстановить их знания, но и в подготовке слушателей к творческой деятельности в процессе дальнейшего их обучения в вузе.

Если взять технические вузы, то учет их специфики заключается в формировании у будущих специалистов начал общего инженерного подхода к решению задач. А инженерный подход к решению задач включает в себя развитое логическое мышление, развитые пространственные представления и умение применять знания на практике.

Как показывают работы советских психологов [1–3], умение оперировать с системой отсчета или точкой отсчета лежит в основе развития пространственных представлений.

Известный советский психолог С.Л. Рубинштейн говорил, что стержнем «общего развития понимания пространства является переход от фиксированной в себе точки отсчета (координат) к системе со свободно перемещаемой точкой отсчета» [2, с. 237].

Специально этими вопросами занималась И.С. Якиманская. Она утверждает, что одним из основных направлений, в котором развивается пространственное представление и даже мышление, является «использование любой теоретически заданной, произвольно выбранной точки отсчета» [1, с. 69]. Хотя нас интересуют лишь пространственные представления, приведем некоторые сведения о пространственном мышлении, которое иногда называют и визуальным мышлением.

По определению И.С. Якиманской, «пространственное мышление является специфическим видом мыслительной деятельности, которая имеет место в решении задач, требующих ориентировки в практическом и теоретическом пространстве (как видимом, так и воображаемом). В своих наиболее развитых формах это есть мышление образами, в которых фиксируются пространственные свойства и отношения. Оперируя исходными образами, созданными на различной наглядной основе, мышление обеспечивает их видоизменение, трансформацию и создание новых образов, отличных от исходных» [1, с. 28].

По определению В.П. Зинченко «визуальное мышление – это человеческая деятельность, продуктом которой является порождение новых образов, создание новых визуальных форм, несущих определенную смысловую нагрузку и делающих значение видимым» [3, с. 8].

Сравнивая первое и второе определения, легко придти к выводу, что они оба описывают деятельность, порождающую новые образы, поэтому в дальнейшем можно пользоваться только одним термином, а именно, термином пространственное мышление.

Интересно суждение психолога Б.Ф. Ломова. Он считает, что одним из основных механизмов чтения и построения графика является «перевод» временных и количественных представлений в пространственные [4, с. 176].

Поскольку пространственные представления суть пространственные образы, а мышление оперирует образами, в основе формирования пространственного мышления лежит развитие пространственных представлений.

Обращение к рисункам и графикам в процессе обучения приводит к развитию пространственных представлений слушателей, к развитию их навыков использования функциональной зависимости величин тоже является методом. Графический метод в понимании слушателей воспринимается только, как прием решения задач, который может привести к удовлетворению «сиюминутной» потребности.

Но дело в том, что мотивационное возбуждение, возникающее в процессе деятельности, «зависит не только от силы потребности, но и от вероятности его удовлетворения».

По информационной теории эмоций П.В. Симонова [5] в том случае, когда у студента недостаточно знаний для решения задачи, у него возникает эмоциональное напряжение.

Об этом свидетельствует также данные, которые приводятся В.С. Ротенбергом и В.В. Аршавским [9]. «Если испытуемым предлагать серию нерешаемых задач, они впоследствии хуже справляются с теми задачами, которые имеют решение». В этом случае у испытуемых вырабатывается обученная беспомощность. Если человек уверен, что только он не в состоянии справится с этой задачей, обучение беспомощности идет особенно интенсивно».

Курс математики на подготовительных отделениях слушатели изучают повторно. Повторение осложняется возрастными психофизическими особенностями слушателей и различиями в исходном уровне знаний. Но даже при обычном повторении необходимо помнить, что «всякое повторение – это движение вперёд, оно всегда должно включать элемент новизны».

Повторное изучение курса и возрастные особенности слушателей приводят к необходимости исключения формальных сведений. По наблюдениям психологов они хуже воспринимаются в старшем возрасте [6]. К тому же формальные знания легче утрачиваются.

Как указывает французский педагог Ж.Ф. Ле Ни, «при каждом удобном случае мы подчеркиваем основной принцип всякой педагогики: очень значительная (примерно 80%) часть сообщаемой преподавателем информации будет утрачена в ходе заучивания или забывания. Отсюда следует основное правило педагогики: обучающий должен заранее точно знать, какие именно знания он хочет видеть сохранившимися у учащегося и какие знания без ущерба для дела могут быть утрачены. Он должен, следовательно, располагать сообщаемую им информацию с учетом этой нацеленной когнитивной организации. Если судить по опыту, то очень многие преподаватели не устанавливают этой иерархии предпочтений, а потом иногда удивляются, что ученики «не замечают главного». Этот риск особенно велик, если все принимается за главное» [7, с. 16].

Итак, излишняя детализация учебного материала приводит не к обобщению знаний, а к перегрузке слушателей. Поэтому в новый для слушателей материал должны входить в первую очередь математические принципы и теории, параллельно с рассмотрением которых даются границы их применимости. Обратимся к исследованию В.Л. Кагана и процитируем его: «Автор выдвинул гипотезу о возможности достижения целей преподавания на подготовительном отделении вуза при использовании обобщений в качестве узловых моментов курса и максимальном применении дедуктивного способа изложения обобщённого материала. При этом единственно возможно использование теоретического мышления слушателей…» [8, с. 25].

«Понятие абстрагируется от индивидуальных черт и признаков отдельных восприятий и представлений и является, таким образом, результатом обобщения восприятия и представлений очень большого количества однородных явлений и предметов».

Говоря о новой форме занятий – лекции, используемой на подготовительном отделении, необходимо отметить следующее. Лекция как новая форма занятий может вызвать у слушателей утомление. Утомление можно снять переключением на другой вид деятельности. «Физиологической основой переключения человека на другой объект или вид деятельности, как известно, является возникновение нового очага возбуждения в коре головного мозга и подкорковых образованьях, которые по закону индукции как бы гасят, тормозят старый очаг». Применение технических средств обучения (видеозаписи, кинофильма, компьютера) в середине лекции позволит сохранить произвольное внимание, снизит утомляемость слушателей.

Помимо решения специальных задач технические средства обучения должны реализовывать дидактические принципы: наглядности, доступности обучения, научности, систематичности и последовательности, связи обучения с жизнью, сознательного и прочного усвоения знаний. Вопросу реализации принципа наглядности на подготовительных отделениях не уделяется должного внимания в исследованиях по проблеме подготовительных отделений.

«Одним из самых важных путей активизации познавательной деятельности с помощью средств наглядного обучения является применение их с целью усвоения обобщений в форме научных понятий и законов».

По мысли М. Планка, «каждое понятие, каким бы оно ни было сложным и абстрактным, может стать для нас наглядным благодаря тому, что мы к нему привыкнем, и со временем научимся удобно и уверенно с ним обращаться» [2].

Итак, принцип наглядности не противоречит теоретическому обобщению знаний. В настоящее время он остается в ряду самостоятельных принципов обучения и одновременно используется в принципе оптимального сочетания словесных, наглядных и практических методов, связывается с принципами сознательности, активности и развития теоретического мышления. Этот принцип ориентирует педагогов на то, чтобы в каждом конкретном случае с учетом поставленных учебно-воспитательных задач и уровня подготовленности учащихся определялось, какой из превалирующих методов позволит решать поставленные задачи.

Чрезвычайно важно организовать контроль знаний в начале обучения слушателей на подготовительном отделении. В этих условиях все многообразие функций контроля должно состыковываться с психологическими аспектами ситуации, и на первый план выдвигаться не оценочная, а обучающая функция контроля. Обучающая функция контроля реализуется через самоконтроль и текущий контроль. А предварительный контроль, образно говоря, является трамплином, без которого не может начаться реализация обучающей функции контроля.

Говоря о межпредметных связях математики и физики на подготовительных отделениях технических вузов, нужно отметить следующее: задача физики приблизить математические построения к реальным объектам. Поэтому в курсе физики введение тех или иных математических понятий незамедлительно должно сопровождаться их применением к описанию изучаемых физических явлений и физических величин. Так согласованное обучение должно способствовать мотивационной познавательной деятельности. Знания, на овладение которыми направлено учение, выступают в этом случае как мотив, в котором нашла свое предметное воплощение познавательная потребность слушателей. А «учение только тогда является собственно деятельностью, когда оно удовлетворяет познавательную потребность» [2, с. 83].

Таким образом, указанные выше психолого-педагогические принципы должны быть основополагающими в преподавании математики на подготовительных отделениях технических вузов, их необходимо, на наш взгляд учитывать, при составлении программы по математике для подготовительных отделений, ими нужно руководствоваться в решении проблемы подготовки слушателей к обучению в вузе.

Литература:

1. Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников. – М.: Педагогика, 1980.
2. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии. – М.: Учпедгиз, 1946.
3. Зинченко В.П. Проблемы визуальной культуры в свете современных исследований зрительного восприятия и визуального мышления. – Труды ВНИИТЭ. – М., 1993.
4. Ломов Б.Ф. Человек и техника. Очерки инженерной психологии. – Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1964.
5. Симонов П.В. Высшая нервная деятельность человека. Мотивационные аспекты. – М.: Наука, 1975.
6. Кулюткин Ю.Н. Индивидуальные различия в мыслительной деятельности взрослых учащихся. – М.: Педагогика, 1971.
7. Ле Ни Ж.Ф. Обучение конкретным знаниям. – М., 1984.
8. Каган В.Л. Теоретическое обобщение знаний слушателей при дедуктивном построении лекционного курса математики на подготовительных отделениях. – К.: Вища школа, 1993.
9. Ротенберг В.С. Поисковая активность и адаптация. – М.: Наука, 1995.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ВНЕШНЕГО ДОПОЛНЕНИЯ В РЕШЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

А.В. Бобрищев
г. Полтава, Полтавский университет потребительской кооперации Украины

Вообще говоря «Дополнение – операция, которая ставит в соответствие подмножеству M данного множества x другое подмножество $N \subset X$ так, что если известны M и N, то тем или иным способом может быть восстановлено множество x. В зависимости от того, какой структурой наделено множество x, получаются различные определения дополнения и различные определения дополнения и разные способы восстановления x по M и N», ([3], с. 373); внешнее дополнение – «это требование, предъявляемое одной частью неоднородной системы к другой ее части. Если вторая часть обладает достаточной изменчивостью, то она преобразуется согласно этому требованию, в чем и состоит процесс ее самоорганизации… Понятие внешнего дополнения получило свое развитие в математической логике в связи с появлением теоремы неполноты Геделя… Согласно теореме критерии выбора моделей следует разделить на внутренние и внешние. Критерий называется внутренним, если его определение основано на использовании той же информации, тех же данных, что и для получения данной модели. Критерий называется внешним, если его определение основано на новой информации, «свежих» точках, не использованных при синтезе модули», ([2], с.29-30). Покажем применение метода внешнего дополнения к решению некоторых математическо-статистических и математических задач.

I. Математико-статистическая модель.

Пусть x и y некоторые технико-экономические показатели, линейно связанные между собой. На основании точных статистических наблюдений за три периода времени деятельности трудового коллектива исследуемого предприятия материального производства, получена несовместная система линейных уравнений вида

$$(1)\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+6y=8 \\ 3x+9y=15 \end{cases}$$

Реальные значения показателей x и y, которые характеризуют работу данного предприятия, принимают, – только и только, положительные значения. Найти средние значения, соответственно, показателей x и y.

Решение. Так как система (1) является несовместной системой линейных уравнений, то решаем ее, вначале, традиционным МНК Гаусса. А именно, с учетом (1), находим наименьшее значение функции

$$f(x,y)=(x+2y-3)^2+(2x+6y-8)^2+(3x+9y-15)^2,$$

поскольку $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=x+2y-3+4x+12y-16+9x+27y-45=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2x+4y-6+12x+36y-48+27x+81y-135=0 \end{cases}$

или $\begin{cases} 14x+41y=64 \\ 41x+121y=189, \end{cases}$

откуда и находим приближенные решения системы (1): $x=-\dfrac{5}{13}$ и $y=\dfrac{22}{13}$. Однако, получено отрицательное значение показателя x, что не соответствует работе трудового коллектива данного предприятия материального производства. Для нахождения истинных средних значений производственных показателей x и y поступим следующим образом. Систему линейных уравнений (1) представим, в так нами названном (см. [1], с.3-33), – обобщенном виде:

$$(2)\begin{cases} x_1+2y_1=3 \\ 2x_2+6y_2=8 \\ 3x_3+3y_3=15 \end{cases},$$

где x_j, y_j – значения, соответственно x и y в i-том уравнении системы линейных уравнений (1); i=1, 2, 3; коэффициенты при неизвестных x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3, числа, что составляют правую часть каждого уравнения, соответственно, системы (2) – те числа, что и в системе (1).

Система (2), которая состоит из трех уравнений и шести неизвестных, которые не связаны между собой, очевидно, является неопределенной системой линейных уравнений.

Далее, одностолбцовые неизвестные в уравнениях системы (2), соответственно, x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3, – согласуется с системой (1), которая получается из системы (2), если в ней положить $x_1=x_2=x_3=x$ и $y_1=y_2=y_3=y$; из этого следует, что, вообще говоря, их значения, т.е., x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 или равные, или почти равные, соответственно, между собой. С этой целью рассматриваем, – с учетом системы (2), – внешнее дополнение F, – находим наименьшее значение функции шести переменных x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3, а именно, функции

$$F=(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2+$$
$$+(y_1-y_2)^2+(y_1-y_3)^2+(y_2-y_3)^2$$

Поскольку из (2) следует, что $x_1=3–2y_1$; $x_2=4–1{,}5y_2$ и $x_3=5–3y_3$, то подставляя эти значения в функцию F приходим к функции трех переменных, а именно

$$F(y_1,y_2,y_3)=(1-3y_2+2y_1)^2+(2-3y_3+2y_1)^2+$$
$$+(1-3y_3+3y_2)^2+(y_1-y_2)^2+(y_1-y_3)^2+(y_2-y_3)^2$$

Поскольку функция $F=F(y_1, y_2, y_3)$ всюду дифференцируемая функция и ограничена снизу, – при всех значениях y_1, y_2, y_3, $F\geq 0$, то наименьшее значение этой функции F находится в точке, где

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial y_1}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y_2}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y_3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10y_1-7y_2-7y_3=-6\\ y_1+4y_2-2y_3=0\\ -7y_1-10y_2+20y_3=9\end{cases}$$

откуда находим $y_1^0=\dfrac{30}{860}, y_2^0=\dfrac{255}{860}, y_3^0=\dfrac{525}{860}$ и учитывая систему линейных уравнений (2), $x_1^0=\dfrac{2520}{860}, x_2^0=\dfrac{2675}{860},$ и $x_3^0=\dfrac{2725}{860}$.

Далее, сложив уравнение в системе (2), получаем равенство

$$(3) \qquad 6\overline{x_0} + 17\overline{y_0} = 26, \text{ где}$$

$$\overline{x_0} = \frac{2520 + 350 + 8175}{(1+2+3)\cdot 860} = \frac{16045}{5160} \approx 3{,}11 \text{ и}$$

$$\overline{y_0} = \frac{60 + 1530 + 4725}{(2+6+9)\cdot 860} = \frac{6315}{14620} \approx 0{,}43 \text{ – средние}$$

значения, соответственно, производственных показателей x и y в (1). И действительно, подставив в (3) значения $\overline{x_0}$ и $\overline{y_0}$ имеем точное равенство

$$6\cdot\frac{16045}{5160} + 17\cdot\frac{6315}{14620} = \frac{22360}{860} = 26.$$

Поскольку

$$\min(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \frac{2520}{860} \approx 2{,}93 \quad \text{и} \quad \max(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \frac{2520}{860} \approx 3{,}17;$$

$$\min(y_1^0, y_2^0, y_3^0) = \frac{30}{860} \approx 0{,}03 \text{ и } \max(y_1^0, y_2^0, y_3^0) = \frac{525}{860} \approx 0{,}61,$$ то показатели x и y в системе (1) принимают, соответственно, интервальное значение, т.е.,

$$2{,}93 \le x \le 3{,}17 \qquad 0{,}03 \le y \le 0{,}61$$

этим же интервалам принадлежат соответственно и среднее значение показателей x и y в (1):

$$x \approx \overline{x_0} = \frac{16045}{5160} \approx 3{,}11 \qquad y \approx \overline{y_0} = \frac{6315}{14620} \approx 0{,}43$$

Этот результат получено благодаря тому, что система (1) является развивающейся системой линейных уравнений (в ней неизвестны показатели x и y принимают, – от уравнения к уравнению, – не одни и те же, соответственно значения); заменив систему (1) системой (2) и найдя наименьшее значение функции F – внешнего дополнения к системе линейных уравнений (2), находим средние значения показателей (неизвестных величин) x и y в несовместной системе линейных уравнений (1) (см. [1], с. 3-33).

II. Математическая задача. Покажем, что равенство

$$(4)\ z^3 = 2x^3$$

не имеет места для всех натуральных чисел x и z.

Решение. Известно (Л. Эйлер, 1770 г.), что

$$(5) z^3 \neq x^3 + y^3 \text{ для всех } x, y, z \in N.$$

Учитывая (5), всегда можно подобрать такое $k \in N$, которое, – для конкретных чисел x, y и z, – приводит к соотношению (равенству):

$$(6)\ z^3 = x^3 + y^3 + k^3,\ \text{где}\ x, y, z, k \in N.$$

Если теперь в (6) положить $x=y$, то получаем или равенство $z^3 = 2x^3 \pm k$, или равенство $z^3 = 2y^3 \pm k$, откуда находим, что $z^3 \neq 2x^3$ и $z^3 \neq 2y^3$, – ведь $k \in N$. Это доказательство получено благодаря рассмотрению внешнего дополнения (6) – множеству натуральных чисел x, y и z.

III. Математическая задача. Формулировка данной задачи следующая. Если взять любое целое число и поделить его пополам – если оно четное, и умножить на 3 и прибавить 1 – если оно нечетное, то повторение этой операции, в конце концов, приведет к цифрам 4, 2 и 1. так, например, если $n=6$, то получаем последовательность чисел: 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, … или при $n=13$ получаем последовательность 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, …, 4, 2, 1, …. Доказать это утверждение для произвольных целых чисел (см. [4], с.29).

Доказательство.

Пусть имеется последовательность чисел

$$(7) \qquad 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots, k, k+1, \ldots$$

Проверим справедливость, указанных условием задачи, преобразований-построения последовательности, которая оканчивается, в конце концов, бесконечно раз повторяющейся тройкой цифр 4, 2 и 1, если, например, взять, последовательно, числа от $n=1$ до $n=8$. Имеем:

при $n=1$	получаем последовательность	1, 4, 2, 1, …;
при $n=2$	получаем последовательность	2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …;
при $n=3$	имеем	3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, …;
при $n=4$	получаем последовательность	4, 2, 1, 4,2, 1, …;
при $n=5$	получаем последовательность	5, 16, 8, 4, 2, 1, …;
при $n=6$	имеем	6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, …;
при $n=7$	получаем последовательность	7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, …
при $n=8$	Получаем последовательность	8, 4, 2, 1, …

Таким образом, условие задачи, приводит, в конце концов, к последовательности чисел

$$(8) \qquad n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, 8, 4, 2, 1, \ldots, 4, 2, 1, \ldots,$$

если n=1, 2, 3, …, 8.

Если взять n=9=4+5, или 9=1+8 и т.п., то поскольку числа 4 и 5, или 1 и 8 обладают указанным условием задачи свойством, то и число 9 также обладает этим же свойством. И действительно, для n=9 алгоритм задачи позволяет найти последовательность чисел

9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, …,

что и требовалось доказать. Выше изложенное – для доказательства того, что указанный условием задачи алгоритм позволяет, для любого $n \in N$, найти последовательность чисел вида (8), реализуется с использованием метода полной математической индукции. Итак, используем этот метод доказательств. При n=1 указанные задачей преобразования реализуются, – получаем последовательность: 1, 4, 2, 1, …. Теперь предположим, что для числа $n=k \in N$ реализация алгоритма, указанного условием данной задачи, приводит к требуемой последовательности чисел вида (8). Требуется доказать, что к аналогичной, – по виду, – последовательности чисел (8) приводят и преобразования указанные условием задачи, ели первое число в (8) положить равным $n=k+1$. Поскольку для числа $k \in N$, по предположению, – исследуемое условием задачи, последовательность вида (8) реализуется, для числа 1 аналогичное свойство имеет место, то и для их суммы, т.е. числа $n=k+1$ это же свойство реализуется. Таким образом, на основании метода полной математической индукции доказано, что произвольное $n \in N$, – с указанными условием задачи операциями, приводит, в конце концов, к последовательности вида (8).

Аналогичное, но более компактное, доказательство получаем с использованием метода внешнего дополнения – рассмотрение всевозможных пар чисел m и p, где $m \in N$ и p=0, ±1, ±2, …. Тогда произвольное число $\alpha_i \in N$ может быть выражено равенством

$$(9) \qquad \alpha_i=2^m+p, \text{ где } \alpha_i, m \in N \text{ и } p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

если $\alpha_i \neq f$, где $f=2^m+b$ и α_i, f, $m \in N$ и b=0, ±1, ±2, … то $p \neq b$. Так, например, $13=2^2+9$;$25=2^2+21$;$1=2^2-3$ и т.д.

Итак, пусть имеется произвольное натуральное число n, или учитывая внешнее дополнение равенство (9). Если $\alpha_i=2^m+p$ – четное число, то после i-той операции – построения последовательности (8), осуществимо ли, например, равенство

$$(10) \qquad a_{i+1}=\frac{a_i}{2}=\frac{2^m+C_1}{2}=8, \text{ где } m\in N;\ C_1=0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Из (10) следует, что при $C_1=16–2^m$ равенство (10) всегда имеет место; $m\in N$.

Если $\alpha_i=2^m+C_2$ – нечетное число, то осуществимо ли ($C_2=\pm(2t+1)$, $t\in N$) появление числа 8, – после реализации некоторого конечного l-го числа операций, – в последовательности (8)? Имеем, – реализуя указанный алгоритм условием задачи, – равенство

$$(11) \qquad a_{l+1}=\frac{3\cdot2^m+3C_2+1}{2}=8,$$

откуда при $C_2=5\text{-}2^m$, получаем равенство (11), и значит последовательность (8).

Использование метода внешнего дополнения таким образом облегчает и упрощает анализ и решения многих математических задач, которые нередко встречаются в практике работы выпускников технических вузов Украины.

Литература:

1. Бобрищев О.В. Метод зовнішнього доповнення. – Полтава: Дивосвіт, 2002. – 56 с.
2. Ивахненко А.Г. Индуктивный метод самоорганизации модели сложных систем. – К.: Наукова думка, 1982. – 296 с.
3. Математическая энциклопедия. Т. 2. – М.: Советская энциклопедия, 1979. – 1104 с.
4. Открытия и гипотезы. – 2003. – № 1. – 32 с.

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ЛОГІЧНИХ ЗАДАЧ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ У 5-6 КЛАСАХ

М.О. Бугайова
м. Одеса, Південноукраїнський державний педагогічний університет ім. К.Д. Ушинського

Основною метою загальноосвітньої школи є гармонійний розвиток особистості. Одним із аспектів процесу формування особистих якостей учнів є забезпечення відповідного рівня розвитку їх логічного мислення та творчих здібностей.

У Проекті стандарту освітньої галузі “Математика” серед цілей і задач навчання математики виділяється розвиток логічного мислення, інформаційної культури, формування умінь володіння різними мовами математики (словесною, символічною, графічною тощо).

Високий рівень сформованості логічного мислення і творчих здібностей учнів виступає як мета математичної освіти. Важливим засобом розвитку логічного мислення учнів, їх математичної інтуїції є логічні задачі. Отже, в масової практиці роботи вчителів 5-6 класів не знаходять гідного місця логічні задачі. Звичайно вони використовуються в позакласної роботі. Включення логічних задач на уроці носить випадковий характер. Зміст логічних задач в більшості випадків не пов’язано з вивченим матеріалом, зазначаються вони взагалі для зняття усталю, зміни видів діяльності та носять розважальний характер. Важливі пізнавальні функції, які можуть нести логічні задачі – це тренування у використанні надбаних знань.

Крім того більшість логічних задач мають педагогічне значення. Аналіз цих задач показує широкі можливості їх використання для розвитку логічного мислення учнів, ілюстрацією необхідності ретельного аналізу умов задач тощо.

Враховуючи психологічні особистості, необхідно відмітити, що в 10-11 років діти проявляють великий інтерес до цікавих ситуацій. Одною з важливих умов підтримування та зберігання довільної уваги є інтерес учнів до вивчає мого матеріалу. Велику роль в цьому грає характер викладання матеріалу, характер вправ, організація учбової діяльності в цілому. Відомо, що у цьому віці яскравість та образність, наочність викладання викликає інтерес і підтримують дитяче любознавство. Але й цього буває недостатньо. Як показують багато численні дослідження психологів (С.Л. Рубінштейн, Д.Б. Ельконін, В.В. Давидов, В.А. Крутенькій, Н.Д. Левітов та ін.) інтереси учнів в загальній масі "самі по собі" не розвиваються, вони потребують ретельного виховання. Це підтверджують і дослідження педагогів (Ю.К. Бабанський, Л.В. Занков, Г.І. Щукіна).

Існують різні точки зору на роль цікавості на уроках математики. В ряді досліджень стверджується, що цікавість учнів молодшого шкільного віку виникає тільки в результаті введення цікавості на уроках. Уміле використання елементів цікавості в учбовому процесі сприяє розвитку таких якостей, як самостійність, допитливість, уважність, уміння логічно мислити. Цікавість сприяє також розвитку інтересу учнів до вивчення математики.

Одним з недоліків при вивченні математики є то, що основне навантаження при засвоєнні матеріалу пов'язано із запам'ятовуванням нових термінів, правил, способів дій та ін. Між тим, пам'ять молодшого школяра характеризується переважно образністю і конкретністю, недостатньою логічністю, обмеженістю.

Умови логічних задач здебільш образні, вони частіше викликають у школярів цікавість, визначні позитивні емоції. Крім того, початковий етап підліткового віку характеризується підвищенням почуттів відповідальності, творчої ініціативи.

Школярі цього віку прагнуть до самостійності, вони люблять розв'язувати задачі, які потребують кмітливості, деякого розумового напруження. Їм подобається пошук різних способів розв'язання одній й тій самій задачі. Вони відчувають задоволення при самостійному виконанні завдання.

В цей період в учнів виникає нове відношення до наукових знань та умінь застосовувати ці знання. Інтереси учнів цього віку характеризуються легкістю виникнення та й при тому слабкою стійкістю, мінливістю, сильною залежністю від частих успіхів та невдач. При певних умовах інтерес молодшого підлітка стає глибоким, стійким, дійовим. Зауважимо, що доступність змісту розглядуваних задач нетотожна легкості їх розв'язання. Математична база, яка потрібна для розв'язання задач може бути досить обмеженою, але знайти рішення не завжди просто. Потрібна кмітливість, своєрідна "жвавість" мислення. Тоді розв'язання логічних задач може внести суттєвий вклад в розвиток можливих рис особистості.

Академік А. Колмогоров в статті "О профессии математик" відмічає, що при вивченні математики виховуються:

- здібність вмілого перетворення складних буквених виразів, знаходження вдалих шляхів для розв'язання рівнянь, які не підходять під стандартні, або, як це прийнято називати у математиків, обчислювальні або алгоритмічні здібності;
- геометричне уявлення, або геометрична інтуїція;
- мистецтво послідовного правильного розчленування логічного міркування.

Деякі з перелічених вище якостей, наприклад, нестандартні прийоми розв'язання задач, звертання до графічних ілюстрацій фактів, властивостей міркувань, можуть розвиватися при розв'язанні логічних задач.

Зміст логічних задач повинен відповідати віковим здібностям школярів та бути цікавими для них. Умови логічних задач повинні бути зрозумілими та не вимагати від школярів багато часу для засвоєння їх умов та крім цього додаткового пояснення вчителя. Вони повинні бути максимально чіткими, короткими, а використані символи повинні бути зрозумілими учням.

Розв'язання логічних повинно сприяти не тільки формуванню умінь та навичок відповідних програмним вимогам, а й розвитку "жвавості" мислення.

Система логічних задач являє собою підсистему вправ, які призначені для учнів 5-6 класів.

Логічні задачі можна поділяти на декілька груп:

- комбінаторні задачі;
- сюжетні логічні задачі;
- задачі на використання принці па Діріхлє;
- задачі на важення;
- числові ребуси;
- числові ігри;
- задачі на обчислення;

– магічні квадрати;
– задачі логічного моделювання та ін.

У розділі “Комбінаторні задачі” можна пропонувати такі задачі.

Задача. Скількома способами можна представити число 10 у вигляді чотирьох непарних цифр? Представлення, які відрізняються порядком доданків, вважати співпадаючими.

Задача. Скільки трьохзначних чисел можна скласти за допомогою цифр 1, 2, 3 так, щоб ніякі цифри не зустрічались у запису числа не більше, ніж один раз?

Задача. У шаховому турнірі з трьома учасниками всього було зіграна шість партій. Скільки партій зіграв кожен учасник турніру?

Задача. У шаховому турнірі приймали участь сім чоловік. Кожен з кожним зіграв по однієї партії. Скільки партій вони зіграли?

Задача. При складенні розкладу уроків на вівторок три викладача промовили свої пропозиції, щоб їх уроки були: по математиці – перший або другий; по історії – перший або третій; по літературі – другий або третій. Скількома способами при складанні розкладу можливо задовольнити побажання усіх викладачів?

Задача. В трьох ящиках лежить по одній кульки: білій, чорній та зеленій. На першому ящику надпис – “Білий”, на другому “Чорний”, на третьому – “Білий або чорний”. Але жодний надпис не відповідає дійсності. Де які кульки?

Цей набір задач можна ще поповнювати та змінювати. Наведені вище задачі в незначній мірі демонструють той об’єм завдань, який може бути використаний на позакласних заняттях та на уроках математики.

В роботі над логічними задачами можуть бути використані різні форми організації роботи учнів:

– колективна форма робота учнів всього класу;
– групова робота;
– вільне обговорення в групах за інтересом, які виникає при обговоренні завдань, виконання яких проводиться в позакласний час;
– частково самостійна робота в класі та на факультатив-

них заняттях;

– повністю самостійна робота учнів в класі, вдома та на факультативних заняттях.

В даній статті нами розглянуто можливості використання логічних задач як на позакласних заняттях, так і на уроках математики, їх роль у підвищенні ефективності навчання математиці, вихованні деяких якостей особистості, які мають важливе значення не тільки для оволодіння учнями математичними знаннями та їх застосуваннями, а й для загального розвитку учнів 5-6 класів.

ФАКУЛЬТАТИВ "ЖИВЫЕ ЧИСЛА"

В.К. Буряк, Е.В. Макаренко
г. Кривой Рог, Криворожский государственный педагогический университет

Факультативные курсы по математике являются одной из форм дифференцированного обучения, цель которой – углубление и расширение знаний учащихся, развитие их математических способностей и устойчивой заинтересованности математикой.

Если в 7-8-х классах содержание факультативов предусматривает углубленное изучение учебного предмета, основываясь на обязательном школьном курсе, то факультативы в 9-11-х классах служат ступенью перехода от усвоения предмета к изучению науки, знакомят учащихся с научными методами исследования.

Факультативное изучение математики направлено на систематизацию знаний учащихся, которые они приобрели во время изучения основного курса, а также на развитие логического мышления и творческих способностей.

Основным требованием факультатива является наличие у учащихся устойчивой заинтересованности к математике, именно это и определяет особенности методики обучения учеников в условиях факультативного курса. Если бы спросить всех школьников, какой предмет нравится им больше других, то вряд ли большинство из них назовет математику. Обычно ее скорее уважают, чем любят. Это объясняется не только тем, что ее изучение многим нелегко дается и требует упорства, но также тем, что некоторые вопросы школьной математики иногда кажутся недостаточно интересными и даже порой скучными. Часто можно слышать мнение, что в математике все уже известно, что времена открытий в этой науке давно прошли. В действительности же это не так. Именно сейчас математика переживает период чрезвычайно бурного развития, несмотря на то, что родилась она много тысячелетий назад [5].

Бурное развитие математики тесно связано с тем, что теория и практика выдвигают все новые задачи, которые математики должны решать. В настоящее время существует ряд теоретико-числовых проблем, которые требуют своего решения.

Коротко математику можно охарактеризовать как науку о числах и фигурах. Факультативный курс “Живые числа” полностью посвящен стихии чисел. С глубокой древности, по мере развития человеческого общества, накапливались сведения о числах. Можно смело утверждать, что нынешние школьники изучают в средней школе лишь небольшую часть этих знаний. Данный факультатив предназначен для учащихся 9-11-х классов лицеев, гимназий и классов с углубленным изучением математики. Курс предполагает наличие базовой подготовки по математики и информатики в пределах школьной программы. Цель факультатива – проникновение учащихся в удивительный мир чисел, раскрытие его богатств и разнообразия, развитие математической любознательности и собственной инициативы. Основные задачи факультатива “Живые числа”:

- Добиться того, чтобы обычные числа предстали перед учениками как живые; раскрыть их живую природу;
- Передать ученикам ощущение чар математики, которое испытывают те, кто избрал ее своей специальностью;
- Раскрыть притягательные стороны математики, что очень важно в подростковом возрасте, когда еще формируются, а иногда только определяются постоянные интересы и склонности к тому или иному предмету;
- Приподнять завесу, определяющую “элементарную”, школьную математику от математики “высшей”.

Учебный материал данного факультатива направлен на рассмотрение таких вопросов:

- История возникновения понятия числа (что является одним из гениальнейших проявлений человеческого разума);
- Системы счисления и их историческое развитие;
- Делимость чисел по модулю;
- Признаки делимости для отдельных чисел;
- Алгоритм Эвклида для нахождения НОД;
- Удивительная природа простых чисел и других интересных;
- Способы поиска простых чисел;
- Понятия “метакомпьютинг”, “суперкомпьютеры” и использование метакомпьютинга для решения теоретико-числовых проблем.

Учитывая, что учащиеся на факультативных занятиях имеют большие возможности по продвижению в обучении и заинтересованность математикой, необходимо, чтобы на факультативе преобладали методы проблемного обучения, которое способствует развитию познавательных возможностей школьников, инициативы в познании. Эффективной также является лекционно-практическая система обучения, в которой значительное место отводится семинарам. На семинарах учащиеся смогут сделать сообщения про интересные применения математических методов, способы решения нестандартных задач, привести исторические сведения [2]. Больше времени следует уделить на факультативе самостоятельной работе учащихся. Задания исследовательского характера можно разделить на несколько этапов. Сначала ученики изучают необходимую литературу, а потом ищут алгоритм решения задачи или проблемы. На занятиях учащиеся сообщают про результаты своих поисков. Затем разработанный алгоритм можно реализовывать в программу для персонального компьютера.

Практическую часть курса составляют разнообразные математические задачи. Среди них есть близкие по форме и содержанию задачам основного школьного курса, а также задачи повышенной трудности. Значительное место в данном курсе занимают математические головоломки, ребусы и другие занимательные задачи, которые воспитывают, укрепляют и обогащают такие качества ума, как интуиция, эрудиция и владение методами математики.[1] Все задачи раскрывают живую природу чисел, их удивительный и богатый мир. Основная задача практических занятий курса – формирование навыков и умений исследовательского характера в процессе решения математических задач с целью углубления знаний и развития математической любознательности.

Значительное место при изучении спецкурса отводится под индивидуальные курсовые задания, которые учащиеся подбирают с учетом своих интересов.

На факультатив отводится 60 часов в год. Занятия можно проводить по одному часу в неделю в течение учебного года или по два часа на протяжении полугодия, до или после уроков.

Приведем примерную программу обсуждаемого курса.

Программа курса “Живые числа”.

1. История возникновения понятия числа (2 часа) .Как люди считали в старину и как писали цифры. Счет двойками, тройками и дюжинами. Счет первобытных людей. Первые нумерации. Позиционные системы. Почему мы все-таки пользуемся десятичной системой. Всегда ли люди записывали числа, пользуясь традиционным принципом. Алфавитные нумерации.
2. Системы счисления (8 часов). История развития систем счисления. Их применение. Двоичная система. Троичная система. Шестнадцатеричная система счисления.
3. Делимость чисел (20 часов). Понятие делимости чисел. Наибольший общий делитель, Наименьшее общее кратное. Конгруэнции. Свойства конгруэнций, которые зависят от модуля. Свойства конгруэнций, которые не зависят от модуля. Общий признак делимости Паскаля. Признаки делимости для отдельных чисел (на 2, на 3, на 4, на 5, на 9, на 10, на 11, на 25 и на 100). Алгоритм Эвклида для нахождения НОД. Связь НОД и НОК. Итоговое занятие. Зачет.
4. Простые числа и другие интересные числа (15 часов). Простые и составные числа. Свойства простых чисел. Основная теорема арифметики. Интересные числа. Поиск простых чисел. Распределение простых чисел. Решето Эратосфена. Функция Эйлера. Теорема Эйлера. Малая теорема Ферма. Их использование для поиска простых чисел. Числа Мерсенна. Совершенные и дружественные числа. Женственные и мужественные числа. Избыточные и недостаточные числа.
5. Метакомпьютинг (5 часов). Метакомпьютеры. Суперкомпьютеры. Использование метакомпьютинга для поиска простых чисел. Проект GIMPS.
6. Курсовые задания (10 часов)

Факультативные занятия являются важным способом допрофильного обучения и помогают ученикам определиться в выборе будущей профессии. Факультативный курс “Живые числа” раскрывает богатый мир чисел, способствует развитию устойчивого интереса к математике.

Литература:

1. Ахадов А.А. Кордемский Б.А. Удивительный мир чисел. – М.: Просвещение, 1986.
2. Онищук В.А. Дидактика современной школы. – К.: Радянська школа, 1987.
3. Пичурин П.Ф. За страницами учебника алгебры. – М.: Просвещение, 1990.
4. Слепкань З.И. Методика обучения математике. – К.: Зодиак – ЕКО, 2000.
5. Детская энциклопедия. Математика. Том 3.

ДЕЯКІ СУЧАСНІ ПІДХОДИ ДО ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ У ПЕДАГОГІЧНОМУ ВУЗІ

О.Е. Валльє[1], О.П. Свєтной[2]
[1] м. Одеса, Одеський інститут удосконалення вчителів
[2] м. Одеса, Південноукраїнський державний педагогічний університет ім. К.Д. Ушинського

Сьогодні, в умовах реформи математичної освіти в Україні, особлива увага повинна бути звернена на удосконалення організації всіх ланок пізнавальної діяльності учнів при навчанні математики. Тому розробка технологій, які сприяють успішній підготовці вчителів математики, пошук шляхів та напрямків їх ефективності – важлива задача педагогіки вищої школи на сучасному етапі.

Реформування загальної середньої освіти передбачає методологічну переорієнтацію процесу навчання учнів з інформативної форми на розвиток особистості навчаємого, індивідуально-диференційований підхід до навчання та контролюючих учбових досягнень. Зауважимо, що сьогодні педагогічний процес у вищій школі не зорієнтований в повній мірі на особистість майбутнього вчителя, а є так би мовити, зв’язуючим ланцюгом в їх діяльності. В навчальному процесі переважають інформаційно-ілюстративні методи навчання, які перетворюють навчаємого в об’єкт впливу.

При інформаційно-ілюстративному навчанні особистість майбутнього вчителя розвивається односторонньо, працюють лише пам’ять та сприйняття, в той же час як в активізації діяльності особистості взагалі, основну роль повинна відігравати творчо-практична діяльність, в процесі якої активізуються всі сторони особи. Педагогічна діяльність взагалі є творчою за своїм характером, тому невід’ємною частиною процесу підготовки студентів до творчої діяльності є формування у них в процесі навчання у вузі, починаючи з молодших курсів, спеціальних умінь, які б забезпечували раціональне та ефективне здійснення творчої педагогічної діяльності. Зрозуміло, що вони існують в єдності, взаємодіють, взаємозбагачують одне друге і не можуть існувати ізольовано в даному виді діяльності тому, що творчий процес – це процес цілісний.

Безумовно, якість підготовки майбутніх вчителів математики до творчої педагогічної діяльності на молодших курсах підвищиться, якщо цілеспрямовано формувати у студентів взаємопов'язані складові творчої педагогічної діяльності вчителя і розглядати його як процес цілісний, що об'єднує такі види діяльності і творчу педагогічну діяльність в період неперервної педагогічної практики, науково-дослідну роботу, спеціально організовані спецкурси.

У відповідності з таким підходом, для визначення змісту творчих педагогічних умінь виділимо такі взаємопов'язані ключові складові творчої педагогічної діяльності майбутнього вчителя математики: творчі читання науково-педагогічної літератури; творчий аналіз підручників і навчальних посібників; вивчення та узагальнення педагогічного досвіду; проведення експериментального дослідження, підготовка творчої доповіді.

Виходячи з наведених міркувань про розвиток творчих здібностей, виходячи з потреб професійної діяльності вкрай необхідним є формування у майбутніх вчителів математики професійних установок, тобто відношення до математики, до завдань навчання, до учнів. Відношення до математики формується саме у студентські роки і лише уточнюється у практиці викладання. Природно з розвитком суспільства змінюється соціальне замовлення освіти і, як наслідок, програми викладання предмета, підручники, змінюється і мета навчання.

Сьогодні відправною точкою при оновленні освіти є визнання розвитку особистості. Математика, насамперед, це наука, а не керівництво з розв'язанню задач, необхідних учню до вступу до вузу. Саме тому, що більшість учнів у майбутньому не будуть професійними математиками у своїй практичній діяльності, саме тому вони повинні мати уявлення про математику, як про науку. Через математику потрібно передати учням науковий стиль діяльності – критичність, самостійність і т.д. Тобто математика повинна перед учнями предстати як дедуктивна наука, яка ґрунтується на аксіомах та має еталони строгості міркувань та зрозуміло, математика – це сукупність прийомів та методів для розв'язування різноманітних задач. В результаті вивчення математики учень повинен мати достатньо розвинуті інтелектуальні вміння, вміння самостійно працювати.

Сьогодні відбувається інверсія базових педагогічних понять "викладання" – "навчання". Тому суттєвим є не тільки і не стільки накопичення знань та вмінь, скільки розвиток здібностей учнів – важливим є бачення учнем у математичних формулах джерела появлення нових знань та думок. Навчати сьогодні – це навчати математичній діяльності. В установку вчителя входить і ставлення до учня як до суб'єкта учбового процесу. Учень у своїй діяльності має самостійно думати та робити. Вчитель повинен формувати в учня критичне, свідоме ставлення до математики.

Зрозуміло, що критична діяльність потребує уваги з боку вчителя і не меншого ніж інші види діяльності і метою має бути формування в учня вмінь оцінювати якість викладеного учбового матеріалу у підручниках, статтях, відповідях других учнів, роз'яснення вчителя і у підсумку – вміння оцінювати власну роботу. Тому одним з важливих підходів удосконалення підготовки майбутніх вчителів математики є формування у них в процесі навчання у вузі спеціальних умінь, починаючи з молодших курсів, які б забезпечували раціональне та ефективне здійснення розвитку критичної діяльності учнів.

Без спеціальної роботи вчителя учні не зрозуміють, що будь – яка їх власна діяльність повинна бути надійно перевірена, і тому критична діяльність направлена на той рівень розуміння учбового матеріалу, а не тільки на запобігання помилок. Всі ланки професійних установок вчителя утворюють систему його роботи, технологію навчання. Ось чому впродовж навчання у вузі студент повинен навчатися складовим педагогічної аналогії, без якої не можливе навчання учнів.

ПРИМЕНЕНИЕ ОПОРНОГО КОНСПЕКТА В ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ИЗЛОЖЕНИИ ТЕМЫ “ПРЯМАЯ” (В ПРОСТРАНСТВЕ И НА ПЛОСКОСТИ)

Г.А. Варварецкая, Т.И. Климова, Т.М. Сапронова
г. Одесса, Одесская национальная морская академия
math@ma.odessa.ua

На протяжении многих лет в ОНМА используется один из новых дидактических методов – метод параллельного изложения, который состоит в том, что изложение и введение таких основных понятий математики, как пространство, вектор, функция, предел, последовательность, дифференциал, интеграл, функционал даются одновременно: одномерное и конечномерное пространство, одномерный и n-мерный векторы, функции одной и многих переменных; производные функции одной и многих переменных, одномерные и многомерные интегралы.

В данной статье мы остановились на изложении темы «Прямая в пространстве и на плоскости» с применением опорного конспекта.

На кафедре высшей математики ОНМА на протяжении многих лет изложение материала по теме «Аналитическая геометрия» на лекциях начинается с поверхностей и их уравнений, классификации уравнений поверхностей первого и второго порядка. Затем излагаются сведения о поверхностях первого порядка (плоскость), строится векторное уравнение плоскости в скалярной и векторной форме, угол между векторами, нормальное уравнение, расстояние от точки до плоскости и т.д. Имея все виды уравнений плоскости, уравнений прямой в пространстве и уравнения линии на плоскости, легко получаются все виды уравнений прямой на плоскости.

С методической точки зрения на практических занятиях важно акцентировать внимание курсантов на упражнениях, которые служат для закрепления лекционного материала. Т.к. времени на проверку теоретического курса остаётся крайне мало, мы предлагаем курсантам в качестве домашнего задания – составление опорных конспектов лекций для каждого практического занятия. В данной статье рассматривается проведение практического занятия с применением такого опорного конспекта.

Предложенный ниже конспект составлен одним из курсантов. Тема практического занятия – «Прямая в пространстве и на плоскости». Идея параллельного изложения прямой в пространстве и на плоскости проходит красной нитью через всё занятие. Практика показывает, что при решении задач по новой теме у курсанта возникают сложности в выборе соответствующей формулы или уравнения. Используя же опорный конспект, курсант легко ориентируется в теоретическом материале, что приводит к увеличению количества решённых задач, и закреплению лекционного курса, помогает систематизировать знания по данной теме.

Прямая

в пространстве	на плоскости $z=0$

Канонические уравнения

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad\qquad \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$

где m, n, p – координаты направляющего вектора $\bar{s}$:

$$\bar{s}(m,n,p) \qquad\qquad \bar{s}(m,n)$$

Параметрические уравнения прямой в координатной форме

$$\begin{cases} x=mt+x_0, \\ y=nt+y_0, \\ z=pt+z_0, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x=mt+x_0, \\ y=nt+y_0, \end{cases}$$

где $t\in \boldsymbol{R}$

Уравнения прямой, проходящей через две данные точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad\qquad \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Общее уравнение прямой (линия пересечения плоскостей)

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ z=0, \end{cases}$$

где A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A, B – координаты нормальных векторов:

$$\overline{N_1}(A_1;B_1;C_1), \overline{N}_2(A_2;B_2;C_2) \qquad\qquad \bar{n}(A;B)$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$
$$y = kx + b,$$
$$tg\alpha = k$$

Условие параллельности двух прямых

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

$$k_1 = k_2$$

Условие перпендикулярности двух прямых

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0 \qquad m_1m_2+n_1n_2=0$$

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

$$k_1k_2 = -1$$

Угол между двумя прямыми

$$\cos\varphi = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1||\bar{s}_2|} =$$

$$= \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}}$$

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

где φ – угол между двумя прямыми.

Задачи на данную тему предлагаются из «Сборника задач по высшей математике» под редакцией П.Ф. Овчинникова.

Используя данную методику, мы, во-первых, значительно сокращаем время изложения темы, во-вторых, добиваемся более чёткого усвоения основополагающих понятий. Аналогичное использование опорных таблиц выигрышно применять для тех тем, где можно проводить параллельное изложение материала. Например, в таких темах, как «Пределы функции одной и многих переменных», «Непрерывность функции одной и многих переменных», «Производная функций одной и многих переменных», «Формула Тейлора для функций одной и многих переменных».

ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗНАНЬ НА УРОКАХ ГЕОГРАФІЇ

С.М. Гаврилюк
м. Кривий Ріг, Середня школа №99

Математика – фундаментальна наука. Знання основ цього предмету є необхідною умовою, базою для багатьох шкільних предметів: хімії, фізики, економіки, інформатики, географії.

Учні з перших тем географії у 6 класі дізнаються про роль математичної науки, коли знайомляться з історією пізнання людьми планети Земля. Саме завдяки розрахункам математиків мандрівники продовжували пошуки шостого континенту – Антарктиди – і їх старання увінчалися успіхом.

Ще з давніх часів мандрівники примусили картографів задуматись над точністю своїх атласів. Через незначну помилку в розміщенні острова на карті корабель міг розбитись на рифах, які є там, де карта показувала морську безодню.

Земну кулю не можна перенести на площину – при цьому обов’язково не дотримуються відстані. Для мореплавців було важливо, щоб на карті паралелі та меридіани перетинались під прямими кутами, тому що на земній поверхні ці кути завжди прямі. На таких картах маленькі ділянки земної поверхні зображуються подібними їм фігурами: квадрати – квадратами, колоколами. Але при переході до великих фігур подібність порушується, і інколи невеликі країни, острови займають на карті значно більше місця, ніж великі. Так, на карті Меркатора, яку він створив у 1569 році, Гренландія займає майже таку ж ділянку, як і Південна Америка, хоч насправді її площа в сім разів менша. Зате кути на цій карті прямі. Але полюси на карту Меркатора не потрапили, вони зображаються на ній безкінечно віддаленими точками, тому приполярні території значно виросли за площею.

Тісний зв’язок математики і географії прослідкується в курсі “Загальна географія” 6 класу, де учні закріплюють знання про масштаб, набувають навичок застосування його на практиці. За допомогою масштабу діти визначають протяжність материків, відстані між географічними об’єктами. Важливим моментом тут є вміння учнів переводити числовий масштаб в іменований і навпаки. Доцільно з цією метою проводити тренувальні вправи, наприклад:

Зведи числовий масштаб до іменованого

1: 250000;   1: 300000;   1: 1000000

Яка буде на карті масштабу 1:1000 000 довжина ліній, які на місцевості мають:

а) 10 км   б) 100 км   в) 5 км   г) 3 км 500 м

Задачі можна ускладнити: *відстань між населеними пунктами на карті з масштабом 1: 50000 дорівнює 20 см. Скільки потрібно часу пішоходу, щоб подолати цю відстань, якщо він долає 5 км/год?*

При вивченні топографічних карт учні знайомляться з лініями – горизонталями, за допомогою яких позначають пагорб чи заглиблення. Математики називають горизонталі лініями рівня. Під час виконання практичної роботи – кресленні плану місцевості, – я спираюсь на вміння учнів за допомогою транспортира відкладати кути (азимути) та відстані за допомогою певного масштабу.

У курсі 6 класу використовуються знання, вміння побудови графіків: річний та добовий хід температури повітря; визначення середньодобової температури та амплітуди коливань. Необхідні навички побудови діаграм: колових (хмарності) та стовпчастих: (опадів), рози вітрів.

У старших класах задачі ускладнюються і для їх рішення використовуємо геометричні формули: $S=a \cdot b$; $S=a^2$; $S=0,5ab$; $S=0,5ah$; $S=0,5(a+b) \cdot h$.

Курс економічної географії України теж має великі можливості здійснення міжпредметних зв'язків з математикою, де можна запропонувати задачі такого змісту:

Населення міста потребує 200 тисяч тонн цукру на рік. Для виробництва 1 т цукру необхідно 7 тонн цукрового буряка. Відстань між містом і сировинною базою – 200 км. Порівняйте транспортні витрати при розміщення цукрового заводу в районі споживання і в районі вирощування цукрового буряка. Транспортування сировини коштує 2,6 грн. за 1 т/км. Де варто будувати цукровий завод?

Широко використовуються в географії статистичні таблиці, які містять інформацію і з фізичної, і з економічної географії.

ОРГАНИЗАЦИЯ АУДИТОРНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБУЧАЮЩЕГО ПОСОБИЯ

В.С. Герасимчук, В.И. Кравцов
г. Макеевка, Донбасская государственная академия строительства и архитектуры
vme@dgasa.dn.ua

В теории вузовского обучения исследованы далеко не все аспекты такой актуальной проблемы, как самостоятельная работа студентов (СРС), далеко не во всех деталях раскрыты ее сущность и методика организации.

Встречаются различные толкования сущности СРС. Одни полагают, что СРС является необходимой составляющей любого метода обучения и любого вида учебных занятий, сводя ее к регламентированной организации при отсутствии прямого управления со стороны преподавателя в специально отведенное для этого время (в основном внеаудиторное). Другие понимают под СРС такую деятельность, когда сам студент изучает указанный учебный материал, анализирует его, обобщает и проверяет свои выводы. Третьи считают, что СРС является обязательным элементом содержания образования, предусмотренного учебным планом и особенностями работы высшей школы.

На наш взгляд, под СРС необходимо понимать совокупность многообразий типов учебных и исследовательских заданий, выполняемых под руководством преподавателя или с помощью учебного пособия (самоучителя) с целью приобретения навыков и умений самостоятельной творческой деятельности и выработки сознательного поведения.

Традиционные методы обучения характеризуются слабой направленностью на формирование у студента умений решения конкретных практических задач. Большинство студентов при таком обучении остаются пассивными созерцателями, безынициативно выполняющими установленный объем учебных заданий. Пассивность студентов можно объяснить и недостаточным уровнем их довузовской математической подготовки. Лекционный курс, где систематизированно изложены ключевые проблемы, а содержание насыщено множеством новых понятий и формул, студент зачастую не в состоянии осилить без помощи преподавателя или учебного пособия, адаптированного для определенной аудитории слушателей.

Одно из важнейших направлений деятельности преподавателя, причем деятельности, аккумулирующей и педагогические, и научные, и воспитательные устремления – это создание учебной литературы. А самостоятельная работа студента с литературой приобщает его к теоретическим знаниям и формированию его творческого мышления.

В связи с этим нами подготовлено учебное пособие “Курс классический математики в примерах и задачах”, которое соответствует программе курса высшей математики для студентов инженерно-технических специальностей и представляет собой достаточно полное и доступное руководство к решению задач и примеров по традиционному курсу высшей математики. Пособие построено по принципу проведения практических занятий и имеет целью оказать помощь студентам в изучении данного курса. В нем кратко излагаются основные теоретические положения каждой новой темы курса, соответствующие определенному практическому занятию. Далее приводятся решения типовых задач, а затем предлагаются для решения задачи, которые предполагают более глубокие знания теоретического материала. Все решения сопровождаются подробными пояснениями, опирающимися на содержание и выводы той или иной теоремы или математического положения. Затем формулируются вопросы и логические задания, призванные проверить степень усвоения важнейших теоретических положений и их применения к решению задач. Заканчивается каждый раздел набором заданий для самостоятельной работы, которые снабжены ответами и пояснительными комментариями в необходимых случаях.

В ряду важнейших задач всякого практического занятия отметим *умение* слушателей излагать, обосновывать и применять приобретенные теоретические знания, *приобретение* навыков решения практических заданий на основе теоретических знаний и положений, *развитие* умений анализировать полученные результаты и давать заключения по итогам решения конкретной задачи.

Весь этот комплекс действий, имеющий целью *построение* простейших математических моделей реальных инженерных систем и процессов, направляется преподавателем и в качестве обязательной составляющей включает целенаправленную самостоятельную работу обучающихся. Поэтому накануне практического занятия преподаватель доводит до сведения студенческой аудитории план работы и тему следующего занятия. Это существенно повышает заинтересованность студентов и побуждает их к предварительной проработке указанной темы: к очередному занятию студенты с помощью учебного пособия самостоятельно знакомятся с основными типовыми методами решения простейших задач. В аудитории студент продолжает с помощью учебного пособия и под руководством преподавателя решать более сложные задачи. Примеры, трудные для понимания, преподаватель решает вместе со студентами или студентом у доски. На заключительной стадии занятия проводится 10-15 минутный экспресс-контроль изученного материала, который позволяет проконтролировать степень усвоения материала и оценить знания слушателей, что стимулирует их активную учебно-познавательную деятельность.

Наличие в данном учебном пособии специальной главы “Прикладные задачи”, где изученные ранее математические методы применяются к решению задач практического содержания, способствует формированию у студентов положительной мотивации всей учебной деятельности, поскольку наглядно демонстрирует, как изученные ранее и уже известные им математические методы и приемы используются в специальных дисциплинах и практической деятельности.

Таким образом, преподаватель направляет и активизирует учебный процесс, стимулирует активность и заинтересованность слушателей, демонстрирует важность и необходимость сознательного изучения предмета. При этом студенты не превращаются в пассивных участников процесса обучения, а приобретают опыт самообразовательной творческой деятельности.

Было бы неверным утверждать, что в нашей работе нет трудностей, что все известные методы СРС нами решены оптимально. Поиск путей эффективного использования указанного пособия в учебном процессе продолжается.

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ В ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИМВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ MATHEMATICA

Е.А. Дахер
г. Сумы, Украинская академия банковского дела

Каждый раз, когда человечество, переживая потрясение, вступает в переходный период, резко возрастает необходимость гуманизации общества, а, значит, – гуманизации образования.

Главными задачами гуманистической парадигмы образования являются, с одной стороны – воспитание личности, стремящейся к самоактуализации, открытой для восприятия нового опыта, способной на сознательный и ответственный выбор, а с другой стороны – создание условий, обеспечивающих нормальное функционирование педагогического процесса, конечной целью которого и становиться формирование личности с вышеупомянутыми качествами. Очевидно, что реализация этих задач невозможна без внедрения эффективных научно-педагогических и информационных технологий с использованием соответственного учебно-методического и информационно-программного обеспечения в высших учебных заведениях. Только в комплексе с соответствующим учебно-методическим обеспечением использование компьютерных технологий даст позитивные результаты и явится шагом вперед на пути развития процессов гуманизации и информатизации высшего образования.

В целях реализации данных задач была разработана методика преподавания высшей математики с использованием символьной системы Mathematica. Символьная система Mathematica – программный продукт, созданный американской фирмой Wolfram Research. Ее новая версия Mathematica 4.2 признана лучшим программным продуктом на 18-м ежегодном конкурсе MacWorld (США) по категории научное программное обеспечение, а ее создатель Стефан Вольфрам был удостоен звания ученого 2002 года.

Широчайшие возможности этой системы в сочетании с разработанной методикой позволили поднять процесс обучения высшей математике на уровень модели реальной научной деятельности.

Основным принципом данной методики является опора на активность самого обучающегося. Ему предоставляется самый современный набор инструментов для реализации графических, аналитических и численных методов решения математических задач. Сосредотачиваясь на решении содержательных задач, доверив технику математических преобразований компьютеру, учащийся приобретает устойчивые навыки решения прикладных задач, выходит на уровень понятий, концепций, общих подходов и за короткое время может рассмотреть самостоятельно много примеров. Это позволяет всесторонне исследовать новые объекты, выделить закономерности и сформулировать обобщающие утверждения на основе собственных наблюдений, что способствует развитию творческого, критического и независимого мышления.

По разработанной программе с помощью необходимых методических и дидактических материалов на базе Украинской академии банковского дела при изучении дисциплин "Высшая математика для экономистов", "Дискретная математика", "Математическое программирование" был проведен курс лабораторных работ с использованием системы Mathematica 4.1.

Результатом проведения этого курса явилось совершенствование процесса обучения, а именно – повышение качества знаний, интенсификация процесса их усвоения.

Разработка и апробация такого рода методик, широкое внедрение их в систему образования повлечет позитивные изменения: возрастет самостоятельность и самодостаточность личности учащихся, их творческая активность, что позволит сегодняшним студентам, а завтрашним специалистам успешно решать сложные научные и профессиональные задачи.

Для примера рассмотрим лабораторную работу из курса "Высшая математика для экономистов".

Лабораторная работа.
Векторы. Линейные действия над векторами. Скалярное произведение. Векторное и смешанное произведение векторов.

Цель работы:

1. Ознакомиться с возможностями системы Mathematica 4.1 для решения задач по данной теме.

2. Закрепить понятия скалярного, векторного и смешанного произведений, компланарности векторов.

3. Убедиться в свойствах скалярного и векторного произведений.

Теоретические сведения:

Для задания векторов в системе Mathematica 4.1 используются списки. Список на языке данной системы – это совокупность произвольных данных, указанных в фигурных скобках. Мы уже встречались с этим понятием в предыдущих лабораторных работах. Например, чтобы задать вектор а с координатами (-3, 2, 1), используем форму списка (рис.1.)

```
In (1): = a = {-3, 2, 1}

Out (1) = {-3, 2, 1}
```

Рис.1. Пример задания вектора

Для задания матрицы используются списки в списке и дополнительно для вывода ее в привычной матричной форме используется функция Matrix Form [a] (рис. 2.)

```
In (1): = a = {{1, 2, 3}, {5, 7, 10}, {15, 17, 9}};
          Matrix Form [ a]
Out (1) // Matrix Form

             1   2   3
             5   7  10
            15  17   9
```

Рис. 2. Пример задания и вывода матрицы.

Линейные действия над векторами в системе Mathematica 4.1 задаются в виде

$a+b$, $a-b$, $\alpha\cdot a$, где α – некая константа.

Для задания скалярного и векторного произведений используются следующие функции:

° Dot [*a*, *b*] – возвращает скалярное произведение векторов а и *b*;

° Cross [*a*, *b*, *c*,...] – возвращает векторное произведение векторов *a*, *b*, *c* ... (может задаваться в виде *a** *b** *c**...);

Комбинация этих двух функций позволяет осуществлять смешанное произведение:

Dot [*a*, Cross [*b*, *c*]] – возвращает смешанное произведение векторов *a*, *b*, *c*.

Смешанное произведение векторов *a*, *b*, *c* можно также задавать с помощью функции

Det[v] – возвращает определитель матрицы *V*, строками которой являются координаты векторов *a*, *b*, *c* соответственно.

Порядок выполнения работы:

1. Подготовьте в тетради таблицу:

<table>
<tr><th>№ задания</th><th colspan="5">Численные результаты</th><th>Выводы</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="5"></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2"></td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="5"></td><td></td></tr>
<tr><td>Дополнительное задание</td><td colspan="4"></td><td></td><td></td></tr>
</table>

2. Включите компьютер и войдите в ядро (Kernel) системы Mathematica 4.1.

3. Выполните последовательно предлагаемые задания. Результаты и выводы запишите в таблицу.

4. На основе полученных результатов сделайте общий вывод о проделанной работе.

Задание 1.

Выполнить линейные действия над векторами *a*, *b*, *c*:

$$5a + 2\,b - c,$$

где a= (1, 0, -1), b = (3, -3, 2), c= (1, 1, 1)

Задание 2.

Найти скалярное произведение векторов a = (3, 2, 1) и b = (2, -3, 0). Сделайте вывод о том, какие это векторы.

Задание 3.

Даны векторы *a*= (3, -4, -8), *b* = (-5, 2, -1).

Найти:

а) скалярные произведения $a \cdot b$, $b \cdot a$

б) векторные произведения $a \times a$, $b \times b$, $a \times b$, $b \times a$.

Проанализируйте результаты

Задание 4.

Компланарны ли следующие векторы?:

a = (-2, -1, -3), *b* = (-1, 4, 6), *c* = (1, 5, 9)

Дополнительное задание.

Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах (1, 2. 3), (-1, 3, 4), (2, 5, 2).

Контрольные вопросы:

1. Покажите с помощью стрелок какие функции каким операциям над векторами соответствуют:

Dot [*a*, *b*] векторное произведение векторов *a*, *b*, *c*;

Det [*v*] скалярное произведение векторов *a*, *b*;

Cross [a, b, c] смешанное произведение векторов *a*, *b*, *c*.

2. Что называется скалярным, векторным произведением двух векторов *a* и *b*? Сравнить их свойства.

3. Что такое смешанное произведение векторов?

4. Какие векторы называются компланарными?

5. Как найти объем параллелепипеда, построенного на векторах *a*, *b*, *c*?

Методические рекомендации:

1. Необходимо подчеркнуть особенности синтаксиса системы: векторы и матрицы задаются с помощью фигурных скобок, название функций начинаются с заглавной буквы, а затем используются квадратные скобки.

2. Следует обратить внимание студентов на многоплановость осуществления смешанного произведения. Задание смешанного произведения с помощью комбинирования двух функций носит дефиниционный характер. Второй способ – генеративный.

Литература:

1. Національна доктрина розвитку освіти // Офіційний вісник України. – 2002. – №16. – С. 12–24.
2. Гончаренко С.У. Український педагогічний словник. – К.: Либідь. – 1997.
3. Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М.: Нолидж, 2001.
4. Лутай В.С. Філософія сучасної освіти. – К.: Центр-магістр-S, 1996.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ БІОЛОГІЇ

Л.М. Єжель
м. Кривий Ріг, Середня школа №99

Активізація пізнавальної системи діяльності учнів, вироблення в них умінь творчо розв'язувати навчальні завдання, систематично застосувати знання на практиці – важливі завдання, що стоять перед середньою загальноосвітньою школою. Використання на уроках та в позакласній роботі такого методичного прийому, як розв'язування задач і вправ біологічного змісту, певною метою сприятиме реалізації завдань при вивченні шкільного курсу біології.

Аналіз задачі, пошуки шляхів її розв'язування і саме розв'язування – це творчі процеси. Вони формують науковий світогляд, тісніше встановлюють міжпредметні зв'язки між основами наук, у першу чергу між природничо-математичними.

Задачі і вправи можна застосувати під час пояснення нового матеріалу, закріплення знань, як завдання додому, при перевірці знань, повторенні, на факультативних заняттях.

Для розв'язання задач слід застосовувати:

1. Розв'язання пропорцій.
2. Приведення до одиниці.
3. Використання графічних методів розрахунків.
4. Складання алгебраїчних рівнянь з одним невідомим.
5. Застосування методів елементарної комбінаторики.

Алгебраїчний спосіб розв'язування вимагає від учнів більшої глибини в логічних міркуваннях, привчає до широкого використання математичних знань у житті. Арифметичний спосіб розв'язання біологічної задачі може бути більш трудомісткий. Графічні задачі доцільної для вираження кількісних залежностей між розмірами та віком рослин або тварин. Вчителю біології треба звертати увагу учнів на найбільш раціональні прийоми розв'язання задач. Тому слід вимагати від учнів аналізу задач, вміння робити висновки і узагальнення.

Можливості застосування задач і вправ при вивченні біології різноманітні, і значною мірою залежать від творчого підходу вчителя до навчального процесу.

ОРГАНІЗАЦІЯ ТА ПРОВЕДЕННЯ ДИДАКТИЧНИХ ІГОР В НАВЧАЛЬНОМУ ПРОЦЕСІ

О.О. Жорник
м. Полтава, Полтавський університет споживчої кооперації України

Використання дидактичних ігор в навчальному процесі можна охарактеризувати як діяльність, елементом якої є дії студентів, властиві комунікативній поведінці в ігрових ситуаціях, що моделюються на заняттях.

Дидактична гра містить у собі великі можливості у підготовці студентів. Вона дає змогу включити кожного студента, всіх учасників у такі ситуації, що враховують динамізм, зміну педагогічних дій та їх нестабільність, вимагає від людини постійного вибору, потреби в самостворенні, само будуванні, у зміні самого себе [1,62].

Цінність і значущість ігрового спілкування у професійному становленні особистості, здатної до саморозвитку і конструктивної взаємодії з навколишньою дійсністю і соціальним середовищем, визначаються використанням кожної дидактичної гри, в якій закладений механізм, що забезпечує розвиток майбутнього спеціаліста [2,51].

Навчання з використанням дидактичних ігор при підготовці студентів слід будувати з урахуванням внутрішніх властивостей поведінки, внутрішнього досвіду і самопізнання студентів. Кожна людина має здібності до самовдосконалення, які розвиваються під час активної діяльності та ігрового спілкування. Тому однією з важливих умов оптимізації ролі дидактичних ігор у навчальному процесі є врахування самоактуалізації особистості студента.

Самоактуалізація розуміється як постійний розвиток і постійна реалізація можливостей студентів у процесі їхньої участі у дидактичній грі. Студент включається в навчально-ігрову комунікативну діяльність відповідно до своїх пізнавальних і професійних інтересів, мотивів і потреб, установок і ціннісних орієнтацій. Основною вимогою при цьому є створення необхідної мотивації ігрової діяльності як важливого чинника у формуванні здатності студентів до ігрової комунікації.

У психолого-педагогічній літературі під мотивацією розуміють всі типи спонукання, що викликають активність людини. Мотивація поєднує в собі цінності, ідеали переконання, спрямованість, потреби, інтереси. Зібрані факти дають змогу говорити про те, що в системі професійної підготовки студентів у вищій школі домінують такі мотиви: усвідомлення соціальної значущості і особистої зацікавленості у вирішенні навчально-пізнавальних завдань у сфері професійної діяльності: мотиви самовиявлення та самоствердження.

Існує безпосередній зв'язок і взаємна обумовленість результативності навчання і характеру мотивації, пізнавальних інтересів та потреб студентів. Дослідники визначають мотив як внутрішній стимул до дії, усвідомлену спонуку до певного виду дій. Мотив як усвідомлена спонука до дії власне і формується в міру того, що людина враховує, оцінює, зважує обставини, в яких вона перебуває, і усвідомлює мету, що перед нею постає. Від ставлення до них і породжується мотив з його конкретною змістовністю, необхідною для реально життєвої дії. Мотив як спонука – це джерело дії, що породжує, але щоб стати таким, він повинен сам формуватися.

Врахування специфіки мотивації студентів дає змогу коригувати навчальний процес з використанням дидактичних ігор для того, щоб надати йому особистісного змісту.

Мотив, його спрямованість і характер обумовлюються різноманітними потребами тих, хто навчається. Внутрішня спонука зважується з обставинами відповідно до пізнавальних інтересів і потреб, професійних установок і ціннісних орієнтацій студентів. При використанні дидактичної гри в навчальному процесі враховується те, що мотив як внутрішній стимул до дії неможливий без відповідності його спрямованості характеру діяльності, так само, як і самостійне вирішення навчальних завдань, пошук виходу з ігрової ситуації неможливі без наявності позитивної мотивації.

Під час використання дидактичних ігор у навчально-виховному процесі відбувається стимулювання позитивної мотивації студентів, внутрішніх спонук їхньої активної участі у пошуку виходу із запропонованих ігрових ситуацій.

При чому закріплення пізнавального інтересу до гри як методу підготовки майбутніх спеціалістів передбачає використання різноманітних стимулів: допитливість, потяг до нового, потреба знайти природний вихід енергії в ігровій діяльності, хвилювання щодо виконання ігрової ролі.

При введенні дидактичної гри в навчально-виховний процес ми враховуємо те, що позитивна мотивація можлива тоді, коли дидактичне завдання, випливаючи із зовнішніх факторів, що діють на свідомість студентів, сприймається ними як особистісно значуще.

Література:

1. Гинзбург Я.С., Коряк Н.М. Социально-психологическое сопровождение деловых игр // Игровое моделирование. Методология и практика. – Новосибирск, 1987. – С. 61–73.
2. Ладыжев Н.С. Философия и практика университетского образования. – Ижевск, 1995. – 256 с.
3. Ломов Б.Ф. и др. Познание и обобщение. – М.: Наука, 1988. – 208 с.

ЗАСТОСУВАННЯ ЙМОВІРНІСНИХ ПРОБІТ І ЛОГІТ МОДЕЛЕЙ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОБЛЕМ ВИБОРУ

Т.М. Задорожня
м. Ірпінь, Академія державної податкової служби України

Щоб піддати математичній обробці результати спостережень природи або соціального життя, необхідно попередньо ці явища систематизувати, побудувати їх математичні моделі.

Математичними моделями прийнято називати системи математичних відношень, які описують процес, що вивчається, або явище за допомогою математичних символів.

Ймовірнісні статистичні моделі математики виростають із задач, в яких йдеться про необхідність брати до уваги елементи випадкового. Успіхи науки знімають або дещо відсувають на задній план елемент випадковості, знаходять зв'язки і причини явищ, але кількість випадкових ситуацій не зменшується. Тому немає іншого шляху, як навчитися працювати з випадковими явищами. А починати це можна і необхідно ще в школі.

Моделі якісного вибору застосовуються у випадках, коли необхідно проаналізувати можливі варіанти рішень в залежності від деяких певних економічних або соціальних обставин. Скажімо, страхувати чи не страхувати майно в залежності від доходу та вартості самого майна. За видами моделі якісного вибору можна розділити на чотири типи: лінійні імовірнісні моделі, пробіт та логіт моделі, а також цензуровані моделі.

Лінійна ймовірнісна модель.

Лінійна імовірнісна модель має вигляд:

$$Y_i=\alpha+\beta X_i+\varepsilon_i,$$

де Y_i =1 при виборі першої альтернативи i-тим суб'єктом;

Y_i = 0 при виборі другої альтернативи i-тим суб'єктом;

X_i – величина ознаки, яка задається;

ε_i – похибка з нульовим сподіванням ($E(\varepsilon_i)=0$ та незалежна від X: $E(\varepsilon_i \cdot X_i=0)$;

α, β – регресивні коефіцієнти, які визначаються.

Нехай ймовірність вибору першої альтернативи P_i ($P_i=P(Y_i=1)$, $1–P_i=P(Y_i=0)$). Тоді математичне очікування залежної змінної:

$$E(Y_i)=1\cdot P_i+0\cdot(1-P_i)=P_i=\alpha+\beta X_i$$

Лінійну ймовірнісну модель можна подати у вигляді:

$$P_i=\begin{cases}\alpha+\beta X_i, \text{ де } 0<\alpha+\beta X_i<1; \\ 1, \quad \text{де } \alpha+\beta X_i \geq 1; \\ 0, \quad \text{де } \alpha+\beta X_i \leq 0; \end{cases} \qquad (1)$$

Виконуючи нескладні перетворення, що наведені в роботі [7], знаходимо, що $E(\varepsilon_i)=0$

$$E(\varepsilon_i^2)=P_i\cdot(1-P_i)=\sigma^2.$$

Величина дисперсії залежить від значення P_i. Якщо P_i наближається до 0 або до 1, дисперсія прямує до 0, якщо P_i=0,5 дисперсія набуває максимального значення. Це означає, що модель якісного вибору є гетероскедатична, тобто дисперсія не є сталою величиною, а залежить від X_i.

Недоліком даної моделі є передбачення при деяких X_i неможливих (P_i=0) або достовірних (P_i=1) подій, хоча завжди існує імовірність того, що при будь-яких X_i людина зробить вибір, який не відповідає розрахунковому. Це означає, що в моделі можуть з’явитися події неможливі та достовірні, а це небажано, оскільки не відповідає реальності.

Пробіт та логіт моделі.

Труднощів, які виникають при застосуванні лінійної моделі, можна уникнути, використовуючи інтегральну функцію розподілу, яка належить проміжку (0;1). Хоча для цього може підійти велика кількість функцій, найчастіше використовуються дві: функція Лапласа (нормальний розподіл) та логістична функція розподілу:

$$P_i=F(Z_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Z_1} e^{-t^2/2}\,dt \qquad (2)$$

$$P_i=F(Z_i)=\frac{e^{Z_1}}{1+e^{Z_1}} \qquad (3)$$

$$Z_i=\alpha+\beta X_i \qquad (4)$$

Різниця цих двох розподілів полягає в тому, що логістичний дає більші значення ймовірностей при значних Z. Використовуючи (2), можна знайти e^{Z_1}:

$$e^{Z_1} = \frac{P_i}{1-P_i}.$$

Прологарифмуємо обидві частини даної рівності. Отримаємо:

$$Z_i = \ln\frac{P_i}{1-P_i}.$$

Відповідна регресійна залежність має вигляд:

$$\ln\frac{P_i}{1-P_i} = Z_i = \beta_0 + \beta_1 X(i) + \beta_2 X(i) + \ldots + \beta_k X_k(i) + \varepsilon(i) \qquad (5)$$

де k – кількість змінних, які задаються.

Якщо для кожного випадку i ($1 \le i \le n$) відомі імовірності P_i та фактори $X_1(i)$, $X_2(i)$, …, $X_k(i)$, то це дозволяє, використовуючи загальний МНК, знайти оцінки регресійних коефіцієнтів β_0, β_1, …, β_k. Отримані оцінки регресійних коефіцієнтів дозволяють знайти оцінки Z_i та згідно із співвідношенням (3) оцінити значення відповідних ймовірностей:

$$P_i = \frac{e^{\hat{Z}_1}}{1+e^{\hat{Z}_1}}, \quad \hat{Z}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X(i) + \ldots + \hat{\beta}_k X_k(i) \qquad (6)$$

Величина $\ln\frac{P_i}{1-P_i}$ має приблизно нормальний розподіл (для великих вибірок) з нульовим середнім та дисперсією $V = \frac{n_i}{r_i(n_i - r_i)}$,

де n_i – кількість індивідуумів в і-ій комірці;

r_i – кількість позитивних відповідей

$$S = \sum_{S=1}^{G} \frac{n_i(\hat{P}_i - r_i/n_i)^2}{r_i/n_i\,(1 - r_i/n_i)} \qquad (7)$$

де $\hat{P}_i$ – оцінка імовірності для i-тої групи, отримана за допомогою (6), має розподіл χ^2 з числом степенів свободи $\nu = G-(k+1)$ – кількість комірок за винятком кількості параметрів, які оцінюються. Менша величина χ^2 відповідає кращій наповнюваності моделі.

Інший параметр, який характеризує адекватність моделі, – функція максимальної правдоподібності. Вона розраховується однаково як для логіт, так і для пробіт моделі:

$$L=\sum_{i=1}^{n}(y_i \ln P_i + (1-y_i)\ln(1-p_i)) \qquad (8)$$

де y_i – значення, що спостерігаються у випадку i;

P_i – прогнозоване значення ймовірності відповідно до виразу (6) для логіт моделі.

Найкращому варіанту розрахунків також відповідає менше значення L, оскільки P_i повинно прямувати до одиниці, якщо людина вибрала перший варіант (відповідно ln P_i прямує до нуля). Якщо людина вибрала другий варіант, то $P_i \to 0$ та $\ln(1-P_i) \to 0$.

Функцію максимальної правдоподібності для моделі, в якій всі коефіцієнти дорівнюють нулю, за винятком β_0 (нульове наближення), розраховують за формулою:

$$L_0=n_0\ln {n_0}/{n} + n_1\ln {n_1}/{n} .$$

n – загальна кількість учасників експерименту;

n_0 – кількість учасників, які вибрали другий варіант;

n_1 – кількість учасників, які вибрали перший варіант $n=(n_0+n_1)$.

Оцінка максимальної правдоподібності.

Розглянемо оцінку максимальної правдоподібності однофакторної моделі:

$$y_i=\beta_0+\beta_1 x_i+\varepsilon_i \quad (1)$$

де i=1, N (N – кількість спостережень).

Відомо, що y_i є величина, яка має нормальний розподіл з середнім значенням $\beta_0+\beta_1 X_i$ та дисперсією $M(\varepsilon_i^2)=\delta^2$.

Оцінка максимальної правдоподібності максимізує величину L:

$$L=P(Y_1)\cdot P(Y_2)\cdot\ldots\cdot P(Y_n) \;\; (2),$$

яка у подальшому і називається функцією правдоподібності. Розподіл ймовірності можна подати таким чином:

$$P(Y_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\delta^2}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1 x_i\right)^2\right) \qquad (3)$$

Тоді функція максимальної правдоподібності матиме вигляд:

$$L(\beta_0;\beta_1;\delta^2)=\frac{1}{\left(2\pi\delta^2\right)^{N/2}}. \quad (4)$$

$$L=\prod_{i=1}^{N}\exp(-\frac{1}{2\delta^2}(\mathrm{Y}_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2),$$

де П визначає добуток N факторів.

Якщо потрібно максимізувати функцію правдоподібності L, змінюючи параметри β_0, β_1 та δ^2, то необхідно знайти перші похідні від L за вказаними параметрами та прирівняти останні до нуля. Знайдемо натуральний логарифм функції правдоподібності:

$$\ln L=-\frac{N}{2}\left(\ln 2\pi-2\ln\delta\right)-\frac{1}{2}\delta^2\sum\left(Y_i-\beta_0-\beta_1 x_i\right)^2 \qquad (5)$$

Диференціюючи послідовно по β_0, β_1 та δ^2, знайдемо рівняння для визначення регресійних коефіцієнтів:

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\beta_0}\equiv\frac{1}{\delta^2}\sum(X_i-\beta_0-\beta_1 x_i)=0$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\beta_1}\equiv\frac{1}{\delta^2}\sum X_i(Y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)=0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\delta^2}\equiv-\frac{N}{2\delta^2}+\frac{1}{2\delta^n}\sum(X_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2=0$$

Розв’язок системи (6) не відрізняється від відповідного рішення для загального МНК, зокрема зміщення оцінки δ^2.

$$\hat{\beta}_0=\overline{Y}-\beta_1 X;$$

$$\hat{\beta}_1=\frac{\sum(x_i-\overline{\overline{x}})(y_i-\overline{\overline{y}})}{\sum(x_i-\overline{x})^2}; \qquad (7)$$

$$\hat{\delta}^2=\frac{\sum(Y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2}{N}.$$

Оцінки максимальної правдоподібності для логіт та пробіт моделей.

При використанні економетричних моделей якісного вибору (логіт та пробіт) найбільш зручно застосовувати метод максимальної правдоподібності.

Наприклад, нам потрібно оцінити параметри логіт моделі :

$$P_i = \frac{1}{1+e^{\overline{(\beta_0+\beta_1\chi_i)}}} \quad (8)$$

Нехай P_i невідомо, але ми маємо інформацію про вибір і індивідуум X_i=1, якщо вибраний перший, та X_i=0 – якщо вибраний другий варіант. Нехай перший вибраний n_1 разів, другий – n_2 разів (N=n_1+ n_2). Якщо врахувати, що ймовірність другого варіанту дорівнює "одиниця мінус ймовірність першого", тоді функція правдоподібності L дорівнює:

$$L = P_1 \cdot P_2 \cdot ... \cdot P_{n1} \cdot (1-P_{n1+1})...(1-P_N) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n_1} P_i \prod_{i=n_1+1}^{N} (1-P_i) = \prod_{i=1}^{N} P_i^{x_i} (1-P_i)^{1-y_i} \quad (9)$$

Останній вираз отримуємо за допомогою припущення, що Y_i=1 для n_1 перших спостережень, та Y_i=0 – для n_2 останніх.

Тепер підставимо вираз для логістичного розподілу (8) у функцію правдоподібності (9), спочатку перетворивши вираз (1–P_i):

$$1-P_i = 1 - \frac{1}{1+e^{\overline{(\beta_0+\beta_1\chi_i)}}} = \frac{e^{(\beta_0+\beta_1\chi_i)}}{1+e^{\overline{(\beta_0+\beta_1\chi_i)}}}$$

Тоді

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n_1} \ln P_i + \sum_{i=n+1}^{N} \ln(1-P_1) \quad (10)$$

Для знаходження оцінок β_0 та β_1 знайдемо похідну ln L за змінними β_0 та β_1:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial P_i / \partial \beta_0}{P_i} - \sum_{i=n+1}^{N} \frac{\partial P_i / \partial \beta_0}{1-P_i} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial P_i / \partial \beta_1}{P_i} - \sum_{i=n+1}^{N} \frac{\partial \mathrm{P}_i / \partial \beta_1}{1 - P_i} = 0 \quad (12)$$

Отримані оцінки для параметрів β_0 та β_1 є обгрунтовані та незміщені.

Тест на обмеження кількості незалежних змінних.

Цей тест допомагає визначити оптимальну кількість незалежних змінних, тобто проаналізувати правильність зміщення деякої кількості з них. Наприклад, ми проаналізували нуль–гіпотезу про те, що декілька з коефіцієнтів β_i дорівнюють нулю. Тест виконується таким шляхом. Нехай $\mathrm{L}(\beta_n)$ – максимальне значення логарифмічної функції правдоподібності, коли ніяких обмежень не введено (повна регресійна модель). $L(\beta_p)$ – максимальне значення логарифмічної правдоподібності з введеними обмеженнями. Тоді асимптотично виконується співвідношення:

$$2\ (L(\beta_p)\ \text{-}L(\beta_n)\sim \chi_n^2 - \chi_p^2 = \chi_\tau^2,$$

де τ – кількість обмежень.

Перевірка вагомості відкинутих коефіцієнтів утворюється шляхом порівняння величини χ^2 з відповідним значенням розподілу χ^2 на 5% рівні вагомості. Якщо χ_τ^2 більше критичного значення, то нульова гіпотеза повинна бути відкинута.

Метою побудови моделі якісного вибору є визначення ймовірності того, що особа певної соціально-економічної належності зробить один вибір з більшою ймовірністю ніж інший.

Нас цікавило дослідження проблеми вибору, який необхідно зробити молодій людині, яка закінчує школу.

Для обробки наших даних використаємо логіт та пробіт модель. Нехай $P(Z_i)$ – ймовірність вступу, тоді:

$$P_i = F(Z_i), \qquad (1)$$

де $Z_i = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ для однофакторної моделі,

$$Z_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + ... + \beta_k x_{ki} \qquad (2)$$

де k – кількість визначальних факторів,

i – індекс індивіда.

Побудуємо пробіт модель для дослідження ймовірності вступу до певного інституту . Вищі навчальні заклади розіб'ємо на дві категорії: для одних, умовно назвемо їх престижними, переважно університети – навчальні заклади IV категорії, які в більшості випадків мають військові кафедри; та інші, умовно назвемо їх непрестижними, – навчальні заклади третьої категорії, коледжі. Початкові дані взяті після проведення анкетування серед більше ніж ста випускників середніх шкіл Ірпінського регіону у червні 1999 року.

Ідентифікуємо змінні. У якості екзогенних змінних виступають: місце роботи батьків x_1 (у приватному (0) чи державному секторі економіки (1)); середній бал атестата x_2; середній бал з математичних дисциплін x_3; стать x_4 (чоловік (0), жінка (1)); бажання вступати до того чи іншого вузу x_5 (це бажання випускника (1) чи бажання його батьків (0)); середньодушовий дохід x_6. Ендогенною змінною, що визначається, виступає вибір, зроблений випускником: вступати до вузу IV категорії з високим конкурсом (1) чи до непрестижного (0) або зовсім не вступати (–1).

Незважаючи на досить різний рівень підготовки випускників, практично всі мають бажання навчатись в учбових закладах. Можливо, це пов'язано з наявною в суспільстві думкою про незворотність економічних перетворень і бажанням глибше зрозуміти їх суть. Частина незалежних змінних задавалась у бінарному вигляді (місце роботи батьків, стать, бажання), виняток становили: середній бал атестата, середній бал з математичних дисциплін та дохід.

На першому етапі було проведено статистичний аналіз доходів, середніх балів атестатів та середніх балів з математичних дисциплін.

Статистичний аналіз доходів показав, що вони знаходяться у проміжку 20 – 5000 грн. на одного члена сім'ї, середнє значення x_1=183 грн., медіана X_M=102 грн., середньоквадратичне відхилення – 316 грн., нижній та верхній квартіль $x_{0.25}$=75 грн., $x_{0.75}$=200 грн. Виходячи з цього, екзогенну змінну "дохід" представляємо у вигляді x_1=–1 для $x \le 75$; x_1=0 для $75 \le x \le 200$; x_1=1 для $x > 200$.

Середній бал атестатів і середній бал з математичних дисциплін знаходяться у проміжку 3–5 балів, тому відповідні змінні x_2

– бал атестата і x_3 – бал з математичних дисциплін мають вигляд:

$$x_{2,3} = \begin{cases} -1, & x < 3,5 \\ 0, & 3,5 < x < 4,5 \\ 1, & x > 4,5 \end{cases}$$

Ендогенна змінна задавалась у вигляді Y=1, якщо респондент збирався вступати до престижного вузу; Y=0 – у протилежному випадку; і Y=–1 – якщо респондент не збирався вступати до вузу взагалі (таких було зовсім мало, тому дані про них практично не розглядалися).

Побудуємо логіт- і пробіт - моделі за отриманими статистичними даними.

У результаті розрахунків методом максимальної правдоподібності отримана наступна залежність вибору респондента від екзогенних змінних:

$$Z=-0,637+0,184x_1+0,529x_2+0,207x_3-1,283x_4+1,76x_5+0,684x_6.$$

Число максимального зменшення функції правдоподібності дорівнює L=84,09. Для змінних x_1, x_2, x_3 одержані оцінки параметра в моделі за t-критерієм Стьюдента – незначимі. Оскільки відповідно до критерію Стьюдента коефіцієнти x_1, x_2, x_3 незначимі, вважаємо їх рівними нулю. Тобто залишається лише залежність від: x_4 (стать), x_5 (бажання), x_6 (матеріальні можливості). Тому для подальшого дослідження використовуються саме ці параметри. Досить цікавим є зв'язок певного бажання випускника і його матеріального стану.

Таблиця 1.

Залежність ймовірності бажання навчатися від визначених факторів для юнаків

Чоловіча стать	Бажання(1)	Небажання (0)
Бідні (-1)	0,61	0,39
Середні (0)	0,75	0,25
Добре забезпечені (1)	0,859	0,141

$$Z(0;1;-1) = -0,637 - 1,28 \cdot 0 + 1,76 \cdot 1 + 0,684 \cdot (-1) = 0,439$$

$$P_1(Z) = \frac{e^{0.439}}{1+e^{0.439}} = 0.61$$

$$Z(0;1;0) = -0,637 + 1,76 + 0,684 \cdot 0 = 1,123$$

$$P_1(Z) = \frac{e^{1,123}}{1+e^{1,123}} = 0.75$$

$$Z(0;1;1) = -0,637 + 1,76 + 0,684 \cdot 1 = 1,807$$

$$P_1(Z) = \frac{e^{1,807}}{1+e^{1,807}} = 0.859 \ .$$

Таблиця 2.

Залежність ймовірності бажання навчатися від визначених факторів для дівчат

Жіноча стать	Бажання (1)	Небажання (0)
Бідні (-1)	0,301	0,659
Середній (0)	0,461	0,539
Добре забезпечені (1)	0,629	0,371

$$Z(0;1;-1) = -0,637 - 1.28 + 1,76 \cdot 1 + 0,684 \cdot (-1) = -0.841$$

$$P_1(Z) = \frac{e^{-0,841}}{1+e^{-0,841}} = \frac{1}{e^{0,841}+1} = 0.301$$

$$Z(0;1;0) = -0,637 - 1.28 + 1,76 + 0,684 \cdot 0 = -0.157$$

$$P_1(Z) = \frac{e^{-0,157}}{1+e^{-0,157}} = \frac{1}{e^{0,157}+1} = 0.461$$

$$Z(1;1;1) = -0,637 - 1.283 \cdot 1 + 1,76 \cdot 1 + 0,684 \cdot 1 = 0.524$$

$$P_1(Z) = \frac{e^{0.524}}{1+e^{0.524}} = 0.681 \, .$$

На основі розрахунків, приведених в таблиці №2, видно, що питання вступу до вузу стоїть гостріше для юнаків, ніж для дівчат. При інших рівних умовах значення параметрів бажання до вступу юнаків значно перевищує аналогічну величину у дівчат, причому, навіть у тих, у кого матеріальна база не дає змоги вчитися, бажання вступити значно перевищує 50%.

На відміну від юнаків, у дівчат тільки добре забезпечених бажання вступати до вузу перевищує небажання.

На основі проведеного анкетування, бесід із старшокласниками та порівняння цих даних з результатами вступу можна зробити певні висновки.

Старшокласник як суб’єкт учбової діяльності через специфіку соціальної ситуації розвитку, в якій він знаходиться, характеризується якісно новим змістом цієї діяльності. По-перше, поряд з внутрішніми пізнавальними мотивами засвоєння знань навчальних предметів, що мають особистісно змістову цінність, з’являються широкі соціальні і вузькоособистісні зовнішні мотиви, серед яких мотиви досягнення займають велике місце. Учбова мотивація якісно змінюється за структурою, оскільки сама учбова діяльність є для старшокласника засобом реалізації життєвих планів майбутнього. Основним внутрішнім мотивом для більшості є орієнтація на результат. Але як досягнути цього результату? Чи готова молода людина до цього сьогодні? Чи може вона правильно проаналізувати всі свої можливості і зробити правильні висновки? Результати нашого невеличкого дослідження свідчать, що значна частина випускників неспроможна чітко визначитись зі своїми бажаннями на майбутнє. Досить часто це – просто бажання батьків, які хочуть бачити дитину в стінах вищого учбового закладу (інколи навіть неважливо якого), забуваючи, що фізична праця не виключає інтелекту. І сьогодні він вимагається незрівнянно частіше, ніж учора. Тому досить важливим є вміння оцінити свій інтелектуальний потенціал, щоб потім вирішити, якій сфері діяльності себе присвятити. І не тільки інтелект вимагає правильної оцінки, а й саме життя, що є серйозною боротьбою, яка вимагає сил і уміння орієнтуватися в житті. А, на жаль, значна частина випускників до цього не готові.

Нове покоління, навчаючись в середніх школах, коледжах, ліцеях, отримуючи знання з різних предметів, повинно одночасно оволодівати методикою, яка стимулює їх потребу творчо мислити. А для цього їм необхідно вміти аналізувати інформацію, факти, узагальнювати спостереження.

Розвиток самостійності, творчого підходу до рішень, вміння приймати такі рішення, аналізувати дійсність і критично, конструктивно її осмислювати складають зміст учбової діяльності старшокласника при вивченні теорії ймовірностей та елементів математичної статистики.

У старшокласника складається особлива форма учбової діяльності при вивченні цього предмета. Вона включає елементи аналізу, дослідження, в загальному контексті деякої уже осмисленої або усвідомленої як необхідність професіональної спрямованості, особистісного самовираження. “Найважливіше психологічне новоутворення даного віку – вміння школяра складати життєві плани, шукати засоби їх реалізації”, – так Д.І. Фельдштейн визначає специфіку змісту учбової діяльності старшокласників.

Література

1. Гарднер М. Путешествие во времени. – М: Мир, 1990.
2. Гинзбург М. Психологическое содержание личностного самоопределения. – Вопр. психол. – 1994. – № 3.
3. Зимняя И. Педагогическая психология: Учеб. пособие. – Ростов-Н/Д.: Изд-во “Феникс”, 1997.
4. Козелецкий К. Психологическая теория решений. – М: Просвещение, 1979.
5. Кон Н. Психология старшеклассника. – М.: 1980.
6. Максименко В., Паниотто В. Зачем социологу математика? – К.: Рад. шк., 1988.
7. Pindyck R.S., Rubinfeld D.L. Econometric models and economic forecasts. – Mc. Grow-Hill, Inc., USA, 1991.

ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМНОГО ЗАСОБУ GRAN1 ДЛЯ РОЗВИТКУ ПІЗНАВАЛЬНОЇ АКТИВНОСТІ УЧНІВ

Н.І. Зеленкова, Н.О. Сирота
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Застосування нових інформаційних технологій у процесі вивчення різних навчальних дисциплін, з одного боку, відкриває цілий ряд можливостей для різнобічного, нетрадиційного, наочного засвоєння учнями знань з предмета. З іншого боку, перед вчителем постає багато різнопланових проблем, що стосуються, насамперед, методичного і програмного забезпечення уроків із використанням комп'ютерно орієнтованих систем навчання (надалі КОСН).

На сьогодні є достатня кількість програмних засобів, які дозволяють розв'язувати різноманітні математичні задачі. Під час викладання шкільного курсу математики увагу вчителів привернули розрахункові програми DERIVE, EUREKA, GRAN1. Здебільшого ці програмні засоби почали використовувати в школах нового типу: ліцеях, гімназіях, які краще забезпечені комп'ютерною технікою і відповідними комп'ютерними програмами.

Особливо ефективним є застосування програм на уроках математики у школах і гімназіях гуманітарного спрямування, оскільки в учнів виникає можливість розв'язувати задачі, не засвоївши відповідного аналітичного апарату, краще зрозуміти постановку і суть задачі, розвивати уяву, просторове мислення і пізнавальну активність. Доцільно використовувати розрахункові програмні засоби і в навчальних закладах з поглибленим вивченням математики. За допомогою комп'ютера зручно розв'язувати складні задачі, уникаючи одноманітної роботи та громіздких проміжних дій. У цей час можна більше уваги приділити аналізу та дослідженню отриманих результатів.

Вивчення досвіду роботи вчителів та анкетування школярів показали, що багато учнів зазнають значних труднощів під час розв'язування прикладних задач, у яких потрібно використовувати елементи математичного аналізу.

Використання КОСН дозволяє виявити знання учнів з даної теми, забезпечити індивідуальний підхід у навчанні, врахувати психологічні особливості і наявний рівень знань школярів, підвищити наочність навчання. Нині на уроках математики доцільно використовувати такі програмні засоби, як GRAN1, DERIVE, MAXIMA та ін. По-перше, ці програми не потребують потужних комп'ютерів, досить прості у використанні, мають зручний інтерфейс. По-друге, їх можна використовувати під час вивчення математики від 6-го до 11-го класів на різних етапах уроку. Ці програмні середовища дозволяють розв'язувати деякі задачі, навіть не знаючи відповідного аналітичного апарату. Використання КОСН дає можливість головну увагу зосередити на з'ясуванні проблем, розробці математичної моделі, а технічні операції перекласти на комп'ютер. [2] Завдяки використанню засобів КОСН можна отримати додатковий час для розвитку творчих здібностей учнів, більше уваги приділяти індивідуальному підходу у навчанні.

Використання програми GRAN1 [1] допомагає активізувати навчально-пізнавальну діяльність учнів, використовуючи в навчальному процесі цю програму можна досягти таких цілей:

– учні навчаються роботі на комп'ютері;

– учні закріпляють практичні навички і вміння побудови об'єктів планіметрії та графіків функцій в алгебрі та початках аналізу;

– економиться час побудови об'єктів завдяки виконанню рутинних операцій комп'ютером;

– вчитель має можливість контролювати виконання завдання на кожному конкретному етапі кожним учнем.

Засіб GRAN1 призначено саме для графічного аналізу функцій. Для роботи з програмою досить мати на диску 2 файли gran1.exe та gran1.hlp , загальний обсяг яких становить близько 240 кбайт.

Програма передбачає вивчення у 10–11 класах спеціалізованих шкіл, ліцеїв та гімназій фізико-математичного профілю трьох математичних дисциплін: геометрії, алгебри та математичного аналізу.

При вивченні теми ” Застосування визначеного інтегралу до обчислення геометричних величин” у розділі „Визначений інтеграл” розглядаються питання про обчислення: площ плоских фігур (межі яких можуть бути задані рівняннями в декартових і полярних координатах); об'ємів геометричних тіл, площ поверхонь обертання. При вивченні цих тем досить ефективно може бути використаний програмний засіб GRAN1. В ньому передбачено спеціальну послугу „Довжина дуги" (в пункті „Операції"), звернення до якої дає можливість визначити довжину дуги між двома вказаними точками. При цьому відповідна функціональна залежність може бути задана явно (тип $y = f(x)$), пораметрично (тип $x = \gamma(x)$, $y = \psi(x)$), в полярних координатах (тип $r(f)$), у вигляді полінома, який наближає таблично задану функцію(тип *poly*).

У зв'язку з наявністю типу залежності між змінними "Ламана FLT-B" є можливість продемонструвати ще один спосіб обчислення довжини дуги кривої з досить великою точністю. Після того, як вказали тип залежності, звернемося до пункту „Об'єкт" головного меню і далі до підпункту „Нова ламана". В результаті на полі вікна „Графік" з'явиться нове підменю: „Ламана замкнена", "Ламана не замкнена". Після обрання одного з вказаних типів ламаної на полі з'явиться ще одне підменю: "Таблиця з клавіатури ", „Таблиця з екрану", на полі вікна „Графік" з'являється координатний курсор.

Курсор слід встановити у потрібні точки на екрані і, фіксуючи (натисканням Enter чи лівої клавіши мишки), ввести одну за одною вершини ламаної. Після вводу вершин одним із вказаних способів можна отримати зображення у вікні „Графік", для чого досить звернутися до послуги „Побудувати".

Отже, використання КОСН відкриває широкі можливості підсилення мотивації [3] школярів до навчання та розвитку їх пізнавальної активності. Це досягається, по-перше, за рахунок незвичного використання комп'ютера на уроках математики, що безпосередньо само по собі сприяє підвищенню рівня пізнавальної активності учнів, по-друге, за рахунок розподілу навчальних задач за ступенем складності, заохочення до отримання правильних розв'язків. При цьому завжди можна довести розв'язування задачі до чисельного результату, пояснити спосіб розв'язування, обговорити його переваги і недоліки, складнощі, що виникають при використанні інших методів розв'язування подібних задач.

Таким чином, застосування КОСН в навчанні, зокрема педагогічного програмного засобу GRAN1 на уроках математики (зокрема, алгебри та початків аналізу –10 кл), дає можливість забезпечити позитивне відношення учнів до навчання та підвищення рівня пізнавальної активності, за рахунок досягнення успіху при розв'язуванні різноманітних навчальних задач навіть учнями зі слабкою математичною базою. Зникає одна з найважливіших причин негативного відношення до навчання-невдача, що виникає в результаті нерозуміння сутності проблеми, або є результатом значних прогалин в знаннях.

Системне та цілеспрямоване використання КОСН в процесі навчання математики сприяє гуманітаризації освіти, наданню результатам навчання практично значимого характеру, формуванню і розвитку образного і логічного мислення учнів, створює необхідні умови для інтенсифікації навчального процесу, інтеграції навчальних предметів і диференціації навчання, надання навчальній діяльності дослідницького, творчого характеру, розкриття творчого потенціалу вчителя і учнів, підвищує рівень пізнавальної активності, математичної та інформаційної культури учнів.

Література:

1. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. – К.: Техніка, 1997. – 304 с.

2. Терешин Н.А. Направленность школьного курса математики. – М.: Просвещение, 1990. – 96 с.

3. Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2002. – №3. – С. 18.

ОЦЕНКА И СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ И КОНЕЧНЫХ СУММ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ПРИ ПОМОЩИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

О.В. Зиновеева
г. Запорожье, Запорожский авиационный колледж
им. А.Г. Ивченко

Рассмотрим задачу теории вероятности: *имеется бесконечное (счетное) количество занумерованных автоматов, каждый из которых может находиться в одном из двух состояний: А или В. Опыт состоит в том, что автоматы по очереди проверяются, и опыт заканчивается, когда обнаруживается автомат, находящийся в состоянии А. Требуется найти вероятность того, что опыт закончится.*

Обозначим через H событие, что опыт закончится. Событие, состоящее в том, что опыт закончится до испытания n+1-го автомата (событие H^n), состоит из следующих событий: опыт закончится после испытания первого автомата (событие H_1), опыт закончится после испытания второго автомата (событие H_2),…, опыт закончится после испытания n-го автомата (событие H_n), т.е. $H^n=H_1+H_2+\ldots H_n$. В силу несовместимости событий H_1, H_2, …, H_n можем записать, что $p\left(H^n\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} p\left(H_i\right)$ [1]. Обозначим через p_i вероятность того, что i–й автомат находится в состоянии А, тогда вероятность того, что этот автомат находится в состоянии В, равна $q_i=1-p_i$. Событие H_k состоит в том, что первые k–1 автоматов находятся в состоянии В, а k–й автомат находится в состоянии А, и вероятность наступления события H_k вычисляется по формуле $p(H_k)=q_1q_2\ldots q_k-1p_k$. Отсюда, $p\left(H^n\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(p_k\Pi\left(1-p_i\right)\right)$. С другой стороны, найдем $p\left(\overline{H^n}\right)=\prod\limits_{j=1}^{n}\left(1-p_j\right)$. Так как $p(H^n)+p(H^n)=1$ [1], то отсюда

$$\sum_{k=1}^{n}\left(p_k\prod_{i=1}^{k-1}(1-p_j)\right)+\prod_{j=1}^{n}(1-p_j)=1. \qquad (1)$$

Хотя эти рассуждения проведены только для случая, когда $p_i \in [0; 1]$, можно показать, что тождество (1) верно и для произвольных действительных (и даже комплексных) чисел. Это легко доказывается при помощи метода математической индукции.

Теперь мы хотим от конечных сумм перейти к рядам. Введем в рассмотрение следующие понятия:

А–последовательность – последовательность $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ действительных числе, где все $p_i \in [0; 1]$.

Рассмотрим последовательность $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ действительных чисел, каждое из которых определяется по правилу $b_k = p_k \prod_{i=1}^{k-1}(1-p_i) = 1 - \prod_{j=1}^{\infty}(1-p_j)$, или, в других обозначениях,

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1 - \prod_{s=1}^{\infty} q_{s.} \qquad (2)$$

Левую часть этого равенства будем называть *А–рядом А–последовательности.* Из определения сразу следуют:

Предложение 1. Для любой А-последовательности ее А-ряд сходится, и его сумма меньше или равна 1.

Предложение 2. Если хотя бы одно из p_i в А-последовательности равно 1, то сумма А-ряда равна 1.

Менее очевиден следующий факт:

Предложение 3. Если А-последовательность не стремится к нулю, то сумма А-ряда в точности равна 1.

Доказательство. Для доказательства сделаем три замечания:

Замечание первое: Если все p_i в А-последовательности равны между собой, и равны например, p, то ряд (2) превращается в сумму убывающей геометрической прогрессии:

$$p + qp + q^2 p + ... q^n p + ... = p(1 + q + q^2 + ...) = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1,$$

$p \neq 0$, и его сумма равна 1.

Замечание второе: Наряду с одним набором автоматов мы рассмотрим другой набор автоматов, обладающих тем свойством, что вероятность нахождения каждого автомата из второго набора в состоянии А меньше соответствующей вероятности для автомата из первой серии под тем же номером. Тогда вероятность наступления события H^n для автоматов первой серии не меньше вероятности наступления события H^n для автоматов второй серии.

Замечание третье: Добавление между двумя автоматами любого конечного числа автоматов с нулевой вероятностью нахождения в состоянии А не влияет на величину вероятности наступления события H, так как это добавление эквивалентно добавлению в сумму (2) соответствующего количества нулей.

Теперь перейдем к доказательству предложения 3. Напомним, что если А-последовательность $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ не стремится к нулю, то существует такое $\varepsilon>0$, что бесконечное число элементов последовательности будут больше ε (так как все p_i неотрицательны). Наряду с исходным набором автоматов рассмотрим второй набор автоматов, обладающих следующим свойством: вероятность нахождения автомата в состоянии А равна ε, если вероятность соответствующего автомата из первой серии больше, чем ε, и равна нулю, если вероятность соответствующего автомата меньше или равна ε. В этом случае вероятности для автоматов из второго набора меньше или равны соответствующих вероятностей для автоматов первого ряда. Мы попадаем в условия второго замечания, и отсюда делаем вывод, что вероятность для наступления события H для первого набора не меньше вероятности события H для второго набора.

Рассмотрим третий набор, отличающийся от второго набора лишь отсутствием автоматов с нулевой вероятностью нахождения в состоянии А. По третьему замечанию вероятность наступления события H для автоматов второго и третьего набора совпадают. По первому замечанию вероятность наступления события H равна единице (все вероятности равны ε). Подводя итог рассуждениям, получим, что с одной стороны, вероятность события H для автоматов исходного набора не меньше единицы, а с другой стороны, она не может превосходить единицы (по предложению 1). Отсюда делаем вывод, что сумма ряда (1), которая равна этой вероятности, тоже равна 1. Предложение 3 доказано.

Предложение 3 является частным случаем следующей теоремы:

Теорема. Если для А-последовательности $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \infty$, то сумма ее А-ряда равна 1. Если для А-последовательности $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = c \prec \infty,$ то сумма ее А-ряда меньше 1.

Доказательство. Если $\lim p_i$ не равен нулю или не существует, то $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \infty$ (не выполняется необходимое условие сходимости ряда), и по предложению 3 $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = 1,$ т.е. в этом случае теорема выполняется.

Теперь рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{i\to\infty} p_i=0$. Обозначим $S_n = 1 - \sum_{i=1}^{n} b_i = \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$. Так как $S_n \geq 0$ и $\{S_n\}$ – убывающая последовательность, то существует $\lim\limits_{i\to\infty} S_n$.

Тогда

$$\ln \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln S_n = \lim_{n\to\infty} \ln \prod_{i=1}^{n}(1-p_1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ln(1-p_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \ln(1-p_i).$$

Так как $\lim\limits_{i\to\infty} p_i=0$, то $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{\ln(1-p_i)}{-p_i} = 1$. Поэтому ряды $\sum_{i=1}^{\infty} \ln(1-p_i)$ и $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ сходятся или расходятся одновременно. Значит, если $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \infty,$ то $\sum_{i=1}^{\infty} \ln(1-p_i) = -\infty$ и, следовательно, $\ln \lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty,$ то есть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0.$

Если же ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ – сходящийся, то $\sum_{i=1}^{\infty} \ln(1-p_i) = -c \succ -\infty$, откуда $\lim\limits_{i\to\infty} S_n = e^{-c} \neq 0$. А так как $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = 1 - \lim\limits_{i\to\infty} S_n$, отсюда и получаем утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

В том случае, когда $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = c,$ оценку суммы А-ряда можно уточнить. Так как $-p_i \geq \ln(1-p_i)$, то $\sum_{i=1}^{\infty} \ln(1-p_i) \leq -\sum_{i=1}^{\infty} p_i = -c$, и, следовательно, $\lim_{i\to\infty} S_n \leq e^{-c}$, откуда $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = 1 - \lim_{i\to\infty} S_n \geq 1 - e^{-c}$, то есть в этом случае

$$1 - e^{-c} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(p_k \prod_{i=1}^{k-1} (1-p_i) \right) \leq 1 \quad (3)$$

Приведем еще несколько фактов, относящихся к А-рядам.

Предложение 4. Если А-последовательность $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ минорируется некоторой дугой А-последовательностью $\{d_i\}_{i=1}^{\infty}$ (то есть для всех i выполняется неравенство $1 \geq p_i \geq d_i \geq 0$), и для последовательности $\{d_i\}_{i=1}^{\infty}$ А-ряд сходится к 1, то для последовательности $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ ее А-ряд сходится к 1.

Предложение 4 – следствие второго замечания.

Предложение 5. Если в А-последовательности $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которой сумма ее А-ряда равна S, отбросить первый член (если он не равен единице), и для полученной последовательности снова подсчитать сумму S' ее А-ряда, то эта сумма будет вычисляться по формуле $S' = \dfrac{S - p_1}{1 - p_1}$. В частности, если S=1, то сумма нового ряда также равна 1.

Доказательство. Обозначим через $G_i\left(\overline{G_i}\right)$ событие, что i-й автомат находится в состоянии А(В), а через $\widetilde{H}$ – событие, что опыт закончится позже, чем после испытания первого автомата. Тогда сумма нового ряда, полученного из исходного отбрасыванием первого члена, есть вероятность события $\widetilde{H}$. Используя аппарат теории вероятностей, можем записать равенство $p(H) = p(G_1) + p(\overline{G_1}\widetilde{H})$. В силу независимости событий $\overline{G_1}$ и $\widetilde{H}$ будем иметь $p(H) = p(G_1) + (1 - p(G_1))\, p(\widetilde{H})$. Подставляя численные значения, получим равенство $S=p_1+(1-p_1)S'$, откуда следует утверждение теоремы.

Следствие. Если для А-последовательности $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ ее А-ряд сходится к единице, то отбрасывание и добавление к этой последовательности конечного числа неединичных элементов не меняет суммы получаемого А-ряда для новой последовательности.

Доказательство состоит в применении к исходному ряду конечное число раз предыдущего предложения, а также того факта, что добавление конечного числа автоматов не уменьшает вероятности события *H*, и если событие *H* достоверное, то и итоговая вероятность так же равна 1.

Предложение 6. Пусть задан А-ряд, тогда элементы $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ соответствующей А-последовательности определяются по формуле $p_i=\dfrac{a_i}{1-S_{i-1}}$, где a_i, S_i, $i=1, 2, \ldots$ – элементы и частичные суммы А-ряда соответственно.

Доказательство легко проводится при помощи метода математической индукции.

Предложение 7. Если сумма некоторого неотрицательного ряда $\sum a_i$ не превосходит 1, то $\sum a_i$ есть сумма А-ряда для некоторой А-последовательности.

Доказательство. Так как ряд неотрицателен и его сумма не превосходит 1, то для всех частичных сумм ряда верно $S_i<1$, $i=1, 2, \ldots$. Учитывая, что $S_i=S_{i-1}+a_i$, получим

$$0\le S_{i-1}+a_i\le 1\Rightarrow 1-S_{i-1}\ge a_i\Rightarrow 0\le\frac{a_i}{1-S_{i-1}}\le 1,\ p_i=\frac{a_i}{1-S_{i-1}},\ p_i\in[0,1].$$

Приведем несколько иллюстрирующих примеров.

Начнем с примеров получения тождеств для конечных сумм.

Пример 1. Пусть $p_k=\dfrac{k}{n},\ k=\overline{1,n}$, тогда

$$q_k=1-p_k=\frac{n-k}{n},\ b_k=p_k\prod_{i=1}^{k-1}q_i=\frac{k}{n}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{n-i}{n}=\frac{k(n-1)!}{(n-k)!n^k},$$

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}q_k=\prod_{k=1}^{n}\frac{n-k}{n}=0$ и по формуле (1) получаем тождество

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-1)!}{(n-k)!n^k} = 1.$$

Пример 2. Пусть $p_k = \frac{n-k}{n}, k = \overline{1,n}$, тогда $q_k = 1 - p_k = \frac{k}{n}, b_k = p_k \prod_{i=1}^{k-1} q_i = \frac{n-k}{n} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{i}{n} = \frac{(n-k)(k-1)!}{n^k}$,

$\prod_{k=1}^{n} q_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}$, и по формуле (1) получаем тождество $\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)(k-1)!}{n^k} = 1 - \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}$.

Пример 3. Пусть $p_k = \frac{k}{k+1}, k = \overline{1,n},$ тогда $q_k = 1 - p_k = \frac{1}{k+1}, \quad b_k = p_k \prod_{i=1}^{k-1} q_i = \frac{k}{k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i+1} = \frac{k}{(k+1)!}$,

$\prod_{k=1}^{n} q_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, и по формуле (1) получаем тождество $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

Пример 4. Пусть $p_k = k+1$, тогда $q_k = 1 - p_k = -k$, $b_k = p_k \prod_{i=1}^{k-1} q_i = (k+1) \prod_{i=1}^{k-1} (-i) = (-1)^{k-1} \frac{(k+1)!}{k}$,

$\prod_{k=1}^{n} q_k = \prod_{k=1}^{n} (-k) = (-1)^n n!$, и по формуле (1) получаем тождество $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(k+1)!}{k} = 1 - (-1)^n n!$.

Теперь несколько примеров вычисления сумм рядов.

Пример 5. Пусть $p_k = \frac{1}{k+1}$, тогда $q_k = 1 - p_k = \frac{k}{k+1}$, $b_k = p_k \prod_{i=1}^{k-1} q_i = \frac{1}{k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{k(k+1)}$. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ – расходящийся, то по доказанной выше теореме получим равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1.$$

Пример 6. Пусть $p_k=\dfrac{1}{k+2}$ (эта последовательность отличается от предыдущей отбрасыванием первого члена). Тогда $q_k=1-p_k=\dfrac{k+1}{k+2}, b_k=p_k\prod\limits_{i=1}^{k-1}q_i=\dfrac{1}{k+2}\prod\limits_{i=1}^{k-1}\dfrac{i+1}{i+2}=\dfrac{2}{(k+2)(k+1)}$.

Так как А-ряд для примера 6 сходится к единице, то по предложению 5 получаем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2}{(k+2)(k+1)}=1$.

Пример 7. Пусть $p_k=\dfrac{1}{(k+1)^2}$, тогда $q_k=1-p_k=\dfrac{k(k+2)}{(k+1)^2}$,

$$b_k=p_k\prod_{i=1}^{k-1}q_i=\frac{1}{(k+1)^2}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{i(i+2)}{(i+1)^2}=\frac{(k-1)!(k+1)!}{((k+1)!)^2\cdot 2}=\frac{1}{2k(k+1)}.$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=\dfrac{\pi^2}{6}-1$ [2], то по формуле (3)

$$1-\exp\left(1-\frac{\pi^2}{6}\right)\approx 0.4753\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k(k+1)}=\frac{1}{2}\le 1.$$

Таким образом, взяв различные последовательности, можно получить новые тождества и неравенства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков Ф.Ф. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986.
2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981.

ХАРКІВСЬКИЙ ПЕРІОД НАУКОВО-ПЕДАГОГІЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ КОСТЯНТИНА ОЛЕКСІЙОВИЧА АНДРЄЄВА

В.Д. Зоря, Н.В. Григор'єва
м. Харків, Харківський державний педагогічний університет
ім. Г.С. Сковороди

В наш час немає потреби доводити необхідність розгляду питань історії математики при вивченні чисто математичних дисциплін. Це пов'язано як із змінами в системі освіти, так і з початком нового тисячоліття, яке змушує замислитись про тисячоліття минулі, озирнутися на пройдений шлях, по-новому осмислити своє життя, життя своїх пращурів, хід історії та історію науки. Поряд із задачею розгляду історії окремих галузей математики на перший план виходять задачі дослідження життєвого шляху, умов формування наукової та громадської особистості, творчого внеску в науку видатних колись і забутих нинішніми поколіннями вчених.

Одним з таких "забутих" імен є ім'я Костянтина Олексійовича Андрєєва (1848–1921). Найбільш продуктивний період його творчості тісно пов'язаний з Харківським університетом, який саме в ті часи став центром наукових математичних досліджень на Україні, і 200–річчя заснування якого буде відзначатися у 2005 році. Тому цей період творчості К.О. Андрєєва заслуговує на те, щоб стати об'єктом дослідження та викладання у вузівських курсах історії математики, аналітичної та проективної геометрії.

1. К.О. Андрєєв народився 14 березня 1848 року в Москві в сім'ї купця. В 1867 році він закінчив із золотою медаллю Московську 3 гімназію і був зарахований на математичне відділення Московського університету, після закінчення якого (1871 р.) був залишений при університеті для "удосконалення в науках" і приготування до професорського звання. Навчаючись на 4 курсі, написав на запропоновану факультетом тему свій перший науковий твір "Про таблиці смертності". Ця робота була удостоєна золотої медалі, надрукована в Наукових Записках Московського університету і стала його дисертацією, яку він захистив при

вступі на посаду приват-доцента Харківського університету.

Наукову і педагогічну діяльність на кафедрі чистої математики Харківського імператорського університету К.О. Андрєєв проводив протягом 25 років (з грудня 1873 р. по жовтень 1898 р.). Цей період його творчості був найбільш плідним. В 1876 р. Харківський університет надав йому наукове відрядження до Парижу, Берліну, Гейдельбергу. В Парижі він мав можливість спілкуватись з видатним французьким геометром М. Шалем. Перебуваючи в Харкові, К.О. Андрєєв провів свої основні визначні дослідження і написав майже всі наукові роботи. Тут він почав викладацьку діяльність, захистив магістерську дисертацію (1875 р.) і був обраний штатним доцентом; незабаром після захисту в Москві докторської дисертації (1879 р.) Рада Харківського університету затвердила його екстраординарним, а в 1886 р. – ординарним професором. Крім того, в 1885–1898 роках, тобто з початку заснування Харківського технологічного інституту (нині це Харківський технічний університет "ХПІ") і до від'їзду до Москви, К.О. Андрєєв працював його професором. В 1884 році його оригінальні наукові результати (головним чином – геометричні) стали підставою для обрання його членом-кореспондентом Петербурзької Академії Наук та членом-кореспондентом Товариства фізичних і природничих наук в Бордо.

К.О. Андрєєв був одним з семи засновників Харківського математичного товариства (1879 р.), його першим секретарем, на протязі 15 років (з 1884 по 1899 рік) – незмінним головою і редактором журналу "Сообщения Харьковського математического общества".

В Харкові написані і вперше опубліковані його підручники "Основной курс аналитической геометрии" (1888 р.) і "Сборник упражнений по аналитической геометрии" (1892 р.), які витримали декілька видань.

Як свідчить список публікацій К.О. Андрєєва, на час переїзду до Московського університету на зміну свого вчителя В.Я. Цингера, він вже закінчив свої основні наукові дослідження. З іншого боку, як справедливо зазначив Д.Ф. Єгоров [1], "ці роки належать до найбільш блискучих в житті фізико-математичного факультету Харківського університету, якому пощастило мати в своєму складі цілий ряд визначних математиків (серед них – сам К.О. Андрєєв, покійний О.М. Ляпунов, академік В.А. Стеклов)”.

2. К.О. Андрєєв – перший дослідник з питань проективної геометрії в Росії. Школа проективної геометрії в Росії бере свої витоки з неповторного її викладання “естетом математики, незабутнім вчителем, першим синтетиком Росії” професором Московського університету Василем Яковичем Цингером (1836–1907). Він вважається засновником проективного напрямку в Московській математичній школі і в Росії взагалі. Під впливом Цингера сформувалася ціла плеяда російських геометрів: К.О. Андрєєв, Б.К. Млодзеєвский (1858–1923), О.К. Власов (1868–1922). Саме завдяки впливу Цингера вихованець Московського університету Андрєєв став палким прихильником синтетичного методу в геометрії. Йому належать найперші оригінальні наукові праці з проективної геометрії в Росії. Сучасники Андрєєва дали високу оцінку його творчості. До Андрєєва, як свідчить сам В.Я .Цингер у відгуку про його докторську дисертацію, “ніхто з російських вчених не обирав цієї цікавої науки предметом спеціальних і самостійних досліджень”.

Притаманні його роботі “оригінальність прийомів і витриманість в чисто математичному дусі”, “новий погляд, або ж удосконалення простих розв’язань питання в більш геометричному дусі” відзначали академіки О.А. Баклунд, В.Г. Імшенецький, В.Я. Буняковський. За їх поданням Андрєєва було обрано членом-кореспондентом Петербурзької Академії Наук. На заслуги Андрєєва в розробці проективної геометрії в Росії зверталася увага і в рішенні комісії другого присудження премії ім. М.І. Лобачевського фізико-математичного товариства при Казанському університеті в 1900 р. у зв’язку з його нагородженням золотою медаллю, встановленою для рецензентів. Очевидно, що визнанням заслуг Андрєєва в галузі математичної науки і математичної освіти було і його переведення в 1898 р. до одного з найсильніших в країні Московського університету та звання заслуженого професора. Все це дало підставу Д.Ф. Єгорову охарактеризувати К.О. Андрєєва як “проективіста, який не має собі рівних” серед вітчизняних математиків; а його докторську дисертацію як таку, яка по “справедливості повинна бути настільною книгою” кожного вітчизняного геометра [1].

Незважаючи на те, що дослідження К.О. Андрєєва були гармонічним продовженням досліджень визначних математиків, які стоять у витоків проективної геометрії, за кордоном його праці залишились майже непоміченими. Мабуть тому деякі його важливі результати були пізніше заново відкриті іншими математиками. Пріоритет К.О. Андрєєва в деяких питаннях було встановлено в основному лише в середині XX століття. Серед робіт, присвячених аналізу і розробці його ідей, слід відзначити перш за все роботи О.О. Глаголєва, А.І. Манздюк, М.П. Черняєва. До 150-річчя Харківського університету в Харкові був виданий збірник вибраних робіт із вступною статтею та примітками професора університету Д.З. Гордевського та його ж книга [3] з детальним викладом змісту геометричних робіт Андрєєва. Нещодавно вийшла також книга В.С. Рижого [5], в якій дано характеристику діяльності найбільш видатних математиків університету, в тому числі і Андрєєва.

3. Основні наукові результати в галузі геометрії викладені К.О. Андрєєвим в його магістерській та докторській дисертаціях. Магістерська дисертація “О геометрическом образовании плоских кривых” (1875 р). присвячена питанню побудови на площині кривих третього і четвертого порядку. Це питання в свій час розглядали Шаль, Вейер, Шрьотер. Але робота Андрєєва відрізняється тим, що вона є узагальненням попередніх досліджень і, як наголошував сам автор, його метод – це “перший досвід геометричного встановлення взаємно-двозначної відповідності в найзагальнішому вигляді”.

В своїй роботі Андрєєв чітко показує, що його метод побудови кривих третього порядку і четвертого порядку з двома подвійними точками за допомогою пучків прямих, які знаходяться у взаємно-двозначній відповідності, є загальним. А метод Вейера (побудова кривих за допомогою одно-двозначної відповідності) і метод Шрьотера (побудова кривих за допомогою двох інволюційних пучків) є лише частковими випадками.

Метод Андрєєва базується на взаємно-двозначній відповідності двох пучків, яка встановлюється таким чином. На площині зафіксовано дві точки O і O' і шість прямих, з яких три – a, b, c проходять через O, а інші три – k, l, m довільного положення, які не проходять ні через O, ні через O'. Будь-який довільний промінь $O'X'$ пучка з центром O' перетне прямі k, l, m в точках K, L, M. У пучку прямих a, b, c, OK, OL, OM з центром O двома трійками прямих (a, b, c) і (OK, OL, OM) буде встановлена проективна відповідність між променями одного і того ж пучка (з центром O) з подвійними променями OL_1, OL_2. Таким чином, кожному променю $O'X'$ пучка O' буде ставитись у відповідність два променя OL_1, OL_2 пучка O. Ця відповідність є взаємнодвозначною; до речі, якщо OO' розглядати як промінь пучка O', то один з двох відповідних йому променів пучка O буде співпадати з OO'. Таке положення пучків Андрєєв називає перспективним, і з допомогою ряду перспектив переходить до розгляду загальної взаємно-двозначної відповідності.

В докторській дисертації “О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий” (1879 р.) К.О. Андрєєв значно розширив коло розглянутих питань. В перших главах він розглядає теоретичні основи і побудови, які необхідні для досягнення основної мети – побудови кривих більш високого порядку за достатнім числом їх даних точок. Цієї мети він досягає в останній п’ятій главі, розглядаючи утворення кривих прямолінійними пучками, пов’язаними взаємно-тризначною і взаємно-чотиризначною відповідністю. Андрєєв доводить ряд дуже важливих теорем, на основі яких (використовуючи взаємно-тризначну і взаємно-чотиризначну відповідності) приходить до побудови кривої 4-го порядку за 14 її точками, і кривої 5-го порядку за 20 її точками. Йому вдається побудувати деякі криві до 8-го порядку.

4. Заслуговує на увагу активна участь К.О.Андрєєва у створенні і роботі Харківського математичного товариства (ХМТ) та його друкованого органу “Сообщений Харьковского математического общества”. Харківське наукове товариство було засноване другим на території Росії (1879) – після Московського (1864), членом якого К.О. Андрєєв був з 1872 р.; пізніше були створені Київське (1889), Казанське (1890), Сибірське (1894) товариства. Якщо на початку XIX ст. подібні товариства могли мати на меті не наукові, а виключно навчальні цілі (складання та переклад підручників, організація лекцій з математики для бажаючих), то найбільш вагомим результатом діяльності наукових товариств, які виникали при університетах у другій половині

XIX ст., було видання ними періодичних видань і збірників протоколів, наукових праць. Поряд з Академією Наук такі товариства стали головними чинниками швидкого розвитку самостійних наукових досліджень в Росії, сприяли встановленню і підтримці зв'язків з іншими товариствами та окремими вченими в Росії і за кордоном. Харківське математичне товариство дуже швидко завоювало почесне місце в науковому математичному світі. Видатні математики різних країн були його членами і публікували свої роботи в його "Сообщениях". Пропозиції про обмін виданнями отримувались товариством з боку академій, наукових товариств, видавництв наукових журналів не тільки Росії, але й інших країн світу. Вже на кінець другого року існування ХМТ встановило обмін виданнями з 11 науковими установами і науковими товариствами, зокрема з французьким математичним товариством, товариством в Бордо, Вашингтонською морською обсерваторією. Такі зв'язки з математичними колами, регулярне проведення засідань товариства, обговорення результатів наукових досліджень, публікація робіт започатковували і культивували в Харківському університеті відповідні математичні традиції та творчу атмосферу. Саме в такий спосіб сформувався і проявився математичний талант багатьох математиків, вихованих Харківським університетом. Студенти фізико-математичного факультету проявляли стійкий інтерес до справ товариства, з великою увагою слідкували як за самими повідомленнями, так і за дискусіями між членами товариства.

Доцент К.О. Андрєєв був наймолодшим із засновників ХМТ, інші шість були професорами, головним ініціатором був В.Г. Імшенецький. Як свідчать протоколи товариства, від самого заснування К.О. Андрєєв приймав енергійну участь в його роботі, за 20 років (до 1898 р.) зробив 32 доповіді. Одним з найвизначніших є виступ Андрєєва на честь 100–річчя "Коперніка математики" – М.І. Лобачевського (1893). В цьому виступі К.О. Андрєєв не лише охарактеризував наукові досягнення М.І. Лобачевського, а й пояснив суть його геометричних ідей. За ініціативою К.О. Андрєєва харківські математики провели в 1893 р. велику роботу зі збору коштів "на капітал Лобачевського", з якого потім фінансувалося спорудження пам'ятника вченому в Казані та заснування міжнародної премії його імені. Крім того, Андрєєв запропонував запросити до участі в поповненні цього фонду середні учбові заклади Харківського учбового округу. На цей заклик відгукнулося декілька десятків чоловічих та жіночих учбових закладів. Внесок харків'ян у фонд Лобачевського за своїми розмірами зайняв четверте місце після Казані, Петербурга та Москви. К.О. Андрєєв був почесним членом ювілейного комітету, приймав участь у рецензуванні робіт, висунутих на здобуття премії Лобачевського.

5. В Харківському університеті К.О. Андрєєв читав курси аналітичної, проективної і нарисної геометрії, диференціального числення, вищої алгебри, теорії чисел. Підготовлені ним учбові посібники та літографовані курси свідчать про їх високий для свого часу науковий і методичний рівень. Серед них найбільшої уваги заслуговує підручник "Основной курс аналитической геометрии" (останнє, п'яте видання було здійснено в 1909 р.). Декілька поколінь студентів вивчали за ним аналітичну геометрію. Так, програмою механіко-математичного факультету Московського університету, складеною в 1935 р. професором Н.О. Глаголєвим, серед рекомендованих підручників був і "Основной курс аналитической геометрии" К.О. Андрєєва. При цьому теми програми знаходяться в основному у відповідності зі змістом вказаного підручника. Як класичний, один з найкращих підручників з аналітичної геометрії згадує його академік П.С. Александров у передмові до своїх "Лекций по аналитической геометрии" (1968).

В підручнику К.О. Андрєєва поєднується елементарний, зрозумілий виклад аналітичної геометрії з високим ступенем науковості. Весь курс аналітичної геометрії ділиться на дві великі частини: геометрію на площині і геометрію в просторі. Виклад матеріалу ведеться координатним методом (сучасний векторний метод в той час тільки набував теоретичної міцності). Багато уваги Андрєєв приділяє косокутній системі координат, уявним елементам, проективній геометрії. При вивченні ліній і поверхонь 2-го порядку спочатку розглядається загальна теорія, а вже потім їх окремі види. Дуже пізнавальним є матеріал, який присвячується так званому "скороченому способу". Тут мається на увазі можливість при сумісному розгляді декількох ліній чи поверхонь розв'язувати різні питання і отримувати деякі загальні висновки, не беручи до уваги окремі властивості рівнянь, що виражають дані геометричні образи. В таких випадках рівняння цього образу подається в скорочених позначеннях $f=0$ і знак f розглядають лише за умови існування деяких спільних властивостей для визначених ним виразів. Наприклад, якщо $f_1=0$ і $f_2=0$ – рівняння двох ліній одного й того ж самого порядку m, то рівняння $f_1–k\,f_2=0$ при сталому значенні k виражає лінію порядку m, яка проходить через всі точки перетину даних ліній; при змінних значеннях k воно виражає цілу систему ліній, які мають той же порядок m, і проходять через одні й ті ж самі точки перетину даних ліній. Таку систему називають пучком ліній. Цей спосіб послідовно розгортається у застосуванні до прямої лінії на площині, ліній 2-го порядку, площини, прямої в просторі, поверхонь 2-го порядку, побудови проективної геометрії. Стосовно, наприклад, прямої лінії на площині розглядаються питання про геометричний зміст сталої k для випадків задання прямих нормальними та загальними рівняннями; виводяться рівняння бісектрис кутів, утворених двома даними прямими; формулюється умова проходження трьох прямих через одну точку; зручність способу ілюструється на простих доведеннях відомих тверджень про трикутники (про перетин в одній точці бісектрис, висот і медіан, теорема про гомологічні трикутники).

Істотною особливістю третього (Москва, 1900 р., 610 сторінок) і наступних видань “Основного курса аналитической геометрии” є наведення в кінці кожної глави прикладів і задач з короткими відповідями, а також питань для повторення, поданих в кінці книги. Всього в підручнику вміщено 268 вправ і 726 питань. Як зазначає сам автор, більшість вправ і всі питання взяті із його ж “Сборника упражнений по аналитической геометрии”. Такий методичний підхід, доповнення підручника задачами і питаннями дає, на думку автора, достатній матеріал для тренування та засвоєння основних відомостей. Наприклад, серед задач на скорочений спосіб у застосуванні до прямої лінії вміщено такі.

1. Показати: якщо нормальні рівняння сторін трикутника мають вигляд $L_1=0$, $L_2=0$, $L_3=0$, а їх довжини відповідно дорівнюють d_1, d_2, d_3, то медіани цього трикутника виражаються рівняннями:

$$d_1L_1–d_2L_2=0, \quad d_2L_2–d_3L_3=0, \quad d_3L_3–d_1L_1=0.$$

2. Показати: якщо нормальні рівняння чотирьох сторін чотирикутника мають вигляд $L_1=0$, $L_2=0$, $L_3=0$, $L_4=0$, а довжини їх дорівнюють відповідно d_1, d_2, d_3, d_4, то рівняння $d_1L_1–d_2L_2+d_3L_3–d_4L_4=0$ виражає пряму, яка проходить через середини діагоналей цього чотирикутника.

3. Дано дві прямі рівняннями $U_1=0$, $U_2=0$. Що виражає рівняння $aU_1^2+bU_1U_2+cU_2^2=0$, де a, b, c – постійні величини?

Відп: Дві прямі, які проходять через точку перетину даних.

Сам К.О. Андрєєв надавав особливого значення питанням для повторення як “засобу приведення в порядок отриманих знань”. Ці питання є дуже змістовними, методично обґрунтованими, їх призначення – допомогти студенту повністю засвоїти теорію. Наведемо питання, що стосуються матеріалу про згаданий вище скорочений спосіб.

1. Що називається скороченим способом в аналітичній геометрії?
2. Що виражає рівняння $f_1–k\,f_2=0$, де f_1 і f_2 – многочлени одного й того ж степеня з двома змінними x і y, а k – будь-яка стала величина?
3. Що виражає те ж саме рівняння, якщо в ньому k є величиною змінною?
4. Чому величину k в рівнянні $f_1–k\,f_2=0$ називають параметром?
5. Яке геометричне значення має параметр k в рівнянні $A_1–k\,A_2=0$, де A_1 і A_2 – ліві частини двох рівнянь першого степеня в нормальній формі?
6. Яке геометричне значення має параметр k в рівнянні $U_1–k\,U_2=0$, де U_1 і U_2 – ліві частини двох рівнянь першого степеня загального виду?
7. В чому полягає умова, щоб три прямі, які виражаються рівняннями $U_1=0$, $U_2=0$, $U_3=0$, проходили через одну точку?
8. Як застосовується скорочений спосіб для доведення того, що бісектриси кутів трикутника перетинаються в одній точці?
9. Скільки існує точок, в яких сходяться по три бісектриси внутрішніх і зовнішніх кутів трикутника?
10. Як застосовується скорочений спосіб для доведення того, що висоти трикутника проходять через одну точку і що медіани трикутника проходять через одну точку ?
11. В чому полягає теорема про гомологічні трикутники? Що

називається віссю і центром гомології для таких трикутників?
12. Як доводиться скороченим способом теорема про гомологічні трикутники?

В цілому для підручників К.О. Андрєєва характерна підмічена В.Я. Цингером ще у відгуку про його докторську дисертацію здатність дати настільки "прекрасний, чіткий, ясний і точний виклад" матеріалу, що "з найважливішими вченнями вищої геометрії змогли б розібратися навіть початківці, знайомі лише з першими основами цієї науки".

Підсумовуючи все, що наведено вище, можна зробити висновок, що наукова і педагогічна спадщина Андрєєва є однією із яскравих сторінок в історії розвитку математики і математичної освіти на Україні. Вона дає достатній і благодатний матеріал для використання в навчально-виховному процесі і організації дослідницької роботи студентів.

Література

1. Егоров Д.Ф. Константин Алексеевич Андреев (некролог). – Математический сборник, т. XXXI, в. 3, 1924. – С. 337-340.
2. Черняев М.П. Константин Алексеевич Андреев как геометр.- Историко-математические исследования. В. IX. – М., 1956. – С. 723-756.
3. Гордевский Д.З. К.А. Андреев – выдающийся русский геометр. – Х.: Харьковский государственный университет, 1955. – 45 с.
4. Андреев К.А. Основной курс аналитической геометрии. – М., 1900. – 610 с.
5. Рыжий В.С. Из истории механико-математического факультета Харьковского университета. – Х.: 2001. – С. 13–14.

ДОГМАТИЧНИЙ ТА ЕВРИСТИЧНИЙ МЕТОДИ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ

Я.Ф. Калюта
м. Київ, Київський національний торговельно-економічний університет

Сучасний етап розвитку науки, техніки, економіки вимагає більш серйозної, поглибленої математичної підготовки майбутніх інженерів, економістів, соціологів та інших фахівців. Для цього потрібно мати не тільки математичні знання, а й вміння застосувати математичний підхід до вивчення явищ реального світу. Тому потрібно мати дієвий спосіб набути знання з математики. У цьому може допомогти сучасна методика викладання предмету **математика**.

Розглянемо деякі аспекти викладання математики у вузі, а саме, догматичний та евристичний методи. Починаючи з XVII століття відбувається повний розрив між математикою–наукою і навчальний предметом математикою, який виник на базі науки математики античного та середньовічного часів. У цей час виникають курси математики, які складаються із самостійних дисциплін – арифметики, алгебри, геометрії, тригонометрії.

У XVIII столітті сформувалась аналітична геометрія, математичний аналіз та інші розділи математики. Відповідно до цих змін у XIX столітті була сформульована нова система міжнародної математичної освіти. Виникає міжнародний рух реформи математичної освіти. У 1908 році на IV міжнародному конгресі в Римі створюється міжнародна комісія з реформи математичної освіти, до якої входило 25 національних комісій. Було написано 250 томів праць, в яких розроблено методи вивчення математики відповідно до цих реформ.

У цей період в кожній країні створили нові програми, підручники і методики вивчення математики, наближаючи цей процес до сучасної математики–науки. Були визначені більш високі цілі викладання математики – розвиток функціонального мислення, просторової інтуїції, логічного розуміння. Все більше культивуються евристичні методи вивчення математики. Перша світова війна зупинила прогресивний міжнародний рух реформ математичної освіти. Після війни досить швидко розвивались технічні, природничі та педагогічні науки (у тому числі і в Україні). У 30-ті роки XX століття у Франції виходить багатотомна праця "Сучасна математика", написана талановитими математиками під псевдонімом Миколи Бурбаки. У цій роботі дано підсумок розвитку математичної освіти. У 1950 році виникла інтернаціональна комісія з вивчення методів навчання математики. Розпочався рух за реконструкції всієї математичної освіти, яка ставила перед собою нові завдання: 1) наближення викладання предмета математики до потреб сучасності; 2) розвиток творчої ініціативи студентів; 3) поєднання догматичного та евристичного методів викладання математики.

Викладач математики, як правило, користується двома проміжними методами навчання. **Перший метод** полягає в тому, що викладач передає студентам готові знання, а їм залишається лише зрозуміти та запам'ятати. **Другий, евристичний метод,** передбачає самостійне розв'язування студентом поставленої проблеми, при цьому викладач лише керує процесом. В обох випадках роль педагога є різною: в першому випадку викладач – ідеальний знавець предмета, що стоїть вище студента і не терпить тих, хто допускає помилки. В другому випадку викладач є старшим товаришем студента, що шукає і допускає помилки, від яких не застрахований навіть викладач. Викладач першого типу передає знання швидко, чітко, але засвоюють матеріал не повністю і ненадовго. Викладач другого типу розвиває мислення студентів, виховує їх розум, веде їх поступово, але вірно, до повного розуміння матеріалу. Проте, враховуючи фактор часу, викладачу доводиться застосовувати синтез обох методів. Вивчення вищої математики за короткий термін призводить до нерозуміння матеріалу, адже викладач не має можливості довести до слухачів необхідні формули, терміни. Студентам залишається їх лише запам'ятати і механічно застосовувати.

Досить часто математики стикаються з тим, що діти або підлітки поділяються на здібних і нездібних до вивчення математики. Це можна пояснити одностороннім методом догматичного навчання такого специфічного предмета, як математика, який вимагає активного мислення. Звідси психологічні гальма, відсутність ініціативи, тобто повне нерозуміння предмету.

Варто відмітити ще один специфічний фактор вивчення математики, а саме те, що студент, який не знає матеріалу середньої школи, не може зрозуміти вищу математику. У цьому випадку потрібно обов'язково заповнити прогалини в знаннях з елементарної математики. У практиці викладання математики часто тріумфує догматизм. Наприклад, неможливо навчити диференціальному численню студента, який не знає формул диференціювання та інтегрування.

Еволюція викладання математики не обмежується чергуванням цих обох методів, застосування яких приводить до поступового засвоєння матеріалу, використовуючи щасливу комбінацію догматизму та евристики. Викладачеві потрібно щоденно доводити студентам, що математика не повинна бути "баштою із слонової кістки". Вона повинна змінити свій суворий вигляд і стати доступною всім. Цього можна досягти гармонічним та ефективним застосуванням розглянутих методів та врахуванням психологічних особливостей студентів.

Викладені положення стосуються ідеального середнього студента, якій зустрічається дуже рідко. Нажаль, частина студентів є надто покірними, пасивними та індиферентними. Їх потрібно виховувати за допомогою дуже сильної дози евристики. Іншим властива безплідна активність: вони не читають і не чують. Для них потрібно більше догматизму. Мистецтво педагога – навчити кожного. Педагогу треба розібратись в індивідуальних особливостях своїх студентів. Він повинен знати, що, якщо деякі із студентів не розуміють його пояснень, то це не від розумового розвитку, а часто від слабкого фізичного здоров'я, з емоційних причин, а інколи тому, що бояться виглядати нерозумними.

Видатні педагоги-математики доводять, що не існує нездібних до математики учнів. Нерозуміння математики пов'язане з думкою, яка позбавила їх впевненості в собі, завдавши при цьому болю та страждань.

Проаналізувавши причини незнання математики, приходимо до висновку, що використання розглянутих методів допоможе студентам спочатку ліквідувати страх перед математикою, а потім, за умови наполегливої праці студента, – до повного розуміння предмета.

ВПЛИВ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ НАВЧАННЯ НА ЗМІСТ ТА МЕТОДИКУ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНІЧНИХ ВНЗ

В.І. Клочко
м. Вінниця, Вінницький державний технічний університет

Курс вищої математики посідає чільне місце у фундаментальній підготовці спеціалістів вищого технічного навчального закладу. Проте досить часто знання з математики майбутніх інженерів носять формальний характер, не відповідає потребам фахових дисциплін і загальному рівню підготовки сучасного фахівця. Наблизитись до подолання суперечностей навчального процесу можна, якщо вдається розв'язати проблему активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів взагалі і зокрема при вивченні математики.

Одним із напрямів підвищення рівня ефективності навчання є педагогічно вивірене використання комп'ютерних технологій навчання в поєднанні з системою психологічних і педагогічних засобів активної навчальної діяльності.

Застосування комп'ютерів у майбутній професійній діяльності фахівця передбачає опанування студентом в період навчання знаннями з предметної галузі, навичками використання математичних методів, алгоритмічних засобів, програмного забезпечення, тобто використання сучасних інформаційних ресурсів, доступ до яких забезпечується навчальним закладом. Отже, на заняттях, організованих за комп'ютерно-орієнтованою технологією, студент переконується в тому, що фахівець і комп'ютер утворюють принципово нову синтетичну систему, яка спроможніша розв'язати складні творчі завдання, ніж фахівець сам по собі.

Розглянемо деякі положення комп'ютерно-орієнтованої методики вивчення теорії ймовірності та математичної статистики. Цей розділ курсу вищої математики для студентів інженерних спеціальностей скоріше носить інформативний характер, а ніж логічний. А тому вважаємо, що вивчення такого курсу із застосуванням комп'ютерів ефективніше, ніж традиційно.

Зміст і методика вивчення теорії ймовірностей і математичної статистики повинні значною мірою визначатися не лише вимогами розвиваючих функцій курсу (розвиток логічного мислення, абстрактного математичного мислення, підсилення інтегрованих впливів математики в системі вузівських дисциплін тощо), а й мотивами використання методів теорії ймовірностей та математичної статистики при розв'язуванні прикладних задач та їх впливом на рівень професійної підготовки студентів.

Спираючись на теорію мотивації навчання, викладач розробляє систему завдань позитивної мотивації для формування навчальних дій та мотивації досягнення, як необхідних компонентів інтересу до вивчення даної дисципліни. Студенти, спрямовуючи свою діяльність на розв'язання пізнавальних задач, тим самим опановують методами розв'язання творчих завдань, усвідомлюють потребу у розвиткові навичок дослідницької діяльності.

Для досягнення цих цілей перш за все необхідно сформувати базові поняття: ймовірність випадкової події, функція розподілу та щільність розподілу випадкової величини і інші. Своєчасне та якісне оволодіння одним поняттям безпосередньо пов'язане із засвоєнням інших.

Якщо виділити такі види діяльності, пов'язані з математикою, як створення понятійного апарату, одержання нових знань, систематизація та узагальнення накопичених знань, їх застосування, передавання знань, то у зв'язку з цим слід уже розглядати не просто математичні методи, а на їх основі створювати технології з формування математичних понять, одержання нових знань тощо.

Одним із шляхів реалізації вказаного підходу є впровадження в навчальний процес комп'ютерного моделювання. Воно має ту специфічну особливість, що одночасно виступає методом як наукового пізнання, так і навчання, змістом навчального процесу.

Зокрема комп'ютерне моделювання дає можливість проілюструвати підходи до введення поняття ймовірності, статистичного, геометричного означення ймовірності події та зіставити з класичним [1].

Наприклад, розглядається задача про зустріч:

З технічних причин залізнична станція може забезпечити приймання потягів з інтервалом не менше 10 хв. Два потяги повинні прибути за розкладом: один о 19.30, другий – о 19.40. Яка ймовірність того, що другому потягу (позначимо А) прийдеться зачекати, якщо відхилення від розкладу для першого потягу можливе в межах 19 год. 20хв.÷19 год. 40 хв., другого – 19 год. 35 хв.÷19 год. 45 хв. з рівномірним розподілом.

Ймовірність визначається, як відношення площі відповідних областей. Найчастіше на цьому викладач і зупиняється. Зрозуміло, що неможливо провести експеримент щодо оцінювання ймовірності. Проте використання комп'ютера дозволяє одержати оцінку і глибше усвідомити поняття статистичної ймовірності. Наприклад, за допомогою одного з математичних пакета студенти здійснюють моделювання і оцінюють ймовірність.

Найскладнішим завданням було переведення задачі на мову геометрії. Далі генеруються координати точки та визначаються умови попадання її у задану область. Спершу припускаємо, що попадання точки в будь-яку точку простору елементарних подій рівноможливе. Тому випадкові величини $\xi_1(x)$ і $\xi_2(y)$ вважаються рівномірно розподіленими на відповідних проміжках.

Ймовірність $P(A)$ події A визначається, як відношення кількості n_A випадкових точок, які знаходяться в області P_A до загальної кількості n згенерованих точок: $P(A)=n_A/n$. Студенти порівнюють значення частот $W_A = \dfrac{n_A}{n}$ при деяких значеннях n. Наприклад, n=10; 1000; 10000, а також аналізують поведінку W_A при повторюванні експерименту з одними і тими ж значеннями n.

Поряд з цим з'являється можливість глибше проаналізувати зміст задачі і розглянути інші припущення. Наприклад, можна вважати, що час прибуття потягів є випадковою величиною із законом розподілу відмінним від рівномірного, наприклад, розподілений за нормальним законом, експоненційним або іншим. Студенти розглядають і ці випадки, порівнюють з раніше одержаними результатами.

Так, припустивши, що час прибуття потягів є нормально розподіленою випадковою величиною, студенти одержують частоту W_A, яка не співпадає з раніше одержаною W_A=0.426.

При цьому важливу відіграє використання положення психологів про інтегративну дію пам'яті. Знання осмислюються студентами продуктивніше тоді, коли вони закріплені в пам'яті. Закріплення ж інформації відбувається в досконалій формі тоді, коли нова інформація інтегрується із засвоєними поняттями, які вже є в пам'яті, і чим вище цей рівень засвоєння, тим досконаліше і грунтовніше відбувається осмислення і запам'ятовування нової інформації.

Так, в задачах, пов'язаних із теоретичним та практичним застосуванням рядів, виникають потреби у виконанні операцій із рядами, які у відповідності з введеним означенням суми ряду, є розбіжними. Тобто, є необхідність в узагальненні поняття збіжності ряду. Його ефективно можна сформувати, якщо закріплено в пам'яті студента класичне поняття суми ряду.

На основі такого підходу, було висунуто принцип залучення студентів до навчальної діяльності незалежно від рівня їхніх попередніх знань з деяких розділів курсу математики, можлива на базі застосування пакетів прикладних програмованих засобів [2]. Незважаючи на прогалини в знаннях, наявність яких пояснюється або відношенням до навчання, або психофізіологічними характеристиками (наприклад, інтенсивністю забування чи відновлення знань), застосування ППП дає можливість слабкіше підготовленим студентам на рівні з іншими бути включеними в процес навчання і будувати взаємодії з математичним середовищем через свою інтерпретацію навчального матеріалу (свій рівень пізнання, своє розуміння та рівень засвоєного навчального матеріалу), і в решті-решт оволодіти матеріалом теми. Деякі студенти мають навички роботи з комп'ютером, можуть застосувати свої знання, допомогти викладачеві в організації заняття, і підвищити свій рейтинг серед однокурсників.

Фундаментальною методичною ідеєю вивчення тієї чи іншої теми курсу математики є положення про те, що початковий етап навчання повинен забезпечити стійке автоматичне виконання дій з обмеженим обсягом нових понять і тим самим створити міцну базу для швидкого засвоєння нового навчального матеріалу.

Застосування комп'ютера дозволяє узгоджувати співвідношення між рівнем трудності (мірою зусиль, що витрачаються студентом на розв'язування задачі) та рівнем складності (кількістю і різноманітністю складових частин та особливістю їхнього взаємозв'язку) задачі. Це досягається шляхом регулювання значень факторів складності задачі. Якщо міру складності навчальної задачі визначати кількістю операцій у способі розв'язування, то використання комп'ютерів сприяє підвищенню рівня проблемності навчальної задачі шляхом обмеження таких факторів складності, як кількість використовуваних студентом математичних понять чи інших математичних об'єктів, громіздкість процедур розв'язування.

Так, при застосуванні математичної статистики до обробки результатів експерименту, мають справу з функціями розподілу, графіки яких відрізняються від описаних в літературі. Часто функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини можна подати як комбінацію відомих розподілів $F_1(x)$ і $F_2(x)$: $F(x)=c_1F_1(x)+c_2F_2(x)$, де c_1, c_2 – сталі. Результуюча функція розподілу $F(x)$ залежить від інтенсивності взаємного впливу функцій розподілу $F_1(x)$ і $F_2(x)$. Вважаючи, що функції $F_1(x)$ і $F_2(x)$ є деякими стандартними розподілами (нормальний, показниковий та інші), та використовуючи один з математичних пакетів, студенти будують криві, близькі до досліджуваних кривих $F(x)$.

Зміст і обсяг математичної освіти у ВНЗ не можна, на наш погляд, обмежувати обов'язковим базовим рівнем.

А тому в систему задач, розв'язання яких передбачає використання комп'ютера, включаються і обернені задачі. В процесі перетворення прямої задачі студенти встановлюють взаємообернені зв'язки між величинами задачі. При цьому студенти опановують навичками перебудови суджень та висновків прямої задачі, складнішими формами міркувань. Важливо розглядати пряму і обернені задачі в комплексі, не відокремлюючи їх в часі.

Обернену задачу до вище наведеної можна сформулювати так: відомі значення функції розподілу $F(x)$ на дискретній множині значень аргументу x_1, x_2, …, x_n, а також відомий один із компонентів $F_1(x)$. Знайти іншу складову $F_2(x)$, якщо вважати, що $F(x)$ є лінійною комбінацією $F_1(x)$ і $F_2(x)$.

Під час розв'язання задачі вводиться умова про можливу форму кривої розподілу $F_2(x)$. Виникає проблема апроксимації функції $F_2(x)$, якщо відомі її значення $F_2(x_i)$, $i=\overline{1,n}$. Не витрачаючи значних зусиль, студент може побудувати наближення. Викладач детально зупиняється на питаннях формування критерію наближення функції розподілу.

Іншим прикладом розширенням змісту і обсягу математичних понять, тобто вихід за межі обов'язкового базового рівня є явище Гіббса, яке має місце у функціональних рядах, зокрема тригонометричних.

Проаналізуємо поведінку часткових сум ряду Фур'є. Побудувавши графіки часткової суми та функції $f(t)$ на періоді та в околі точки розриву, де проявляється явище Гіббса, яке полягає в тому, що графіки часткових сум $S_n(x)$ в околі точки розриву коливаються і не мають тенденції до зменшення амплітуди коливання. Графік часткової сум $S_n(x)$ ряду Фур'є наведено на рисунку.

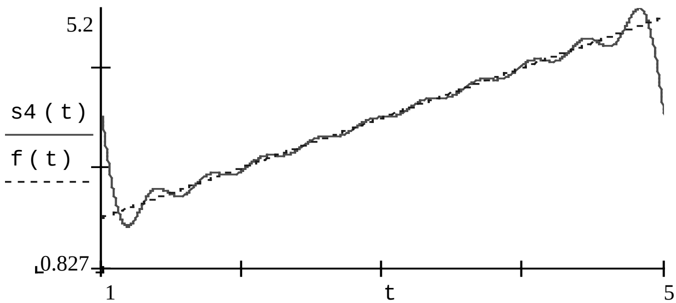


Рис. 1.

Зокрема, студенти переконуються в тому, що в околі точок неперервності функції $f(x)$ абсолютна величина різниці між значеннями функції та часткової суми $S_n(x)$ прямує до нуля при $n\to\infty$: $|f(x) - S_n(x)| \to 0$. Крім того, швидкість прямування до нуля у точках x віддалених від точки розриву тим більша, чим далі знаходиться x від точки розриву. По іншому ведуть себе часткові суми в околі точок розриву x_0.

В околі точки розриву скінчена сума членів ряду Фур'є більша за відповідні значення функції. Коли кількість членів часткової суми ряду зростає (студенти проводять чисельний експеримент при m=10, m=100, m=1000), ця особливість не зникає, а зміщується ближче до точки розриву. Тобто розриви функції породжують осциляції часткових сум ряду Фур'є.

Ця ситуація обґрунтовується, наприклад, дослідженням на екстремум часткової суми $S_n(t)$ функції $f(t)=t$, $1<t\leq 5$. Екстремуми розміщені таким чином: між двома послідовними максимумами знаходиться мінімум. Із збільшенням n точки екстремуму наближаються до кінців проміжку. Обчислюються значення часткових сум в екстремальних точках.

При $t=1.4$ часткова сума $S_{10}(1.4)=1.588$, тобто перевищує значення функції $f(1.4)$ майже на 14%. В першій точці мінімуму $t=17/11$ часткова сума $S_{10}(1.545)=1.421$, тобто менша за значення функції $f(1.545)$ майже на 8%.

Використання математичних пакетів при розв'язанні задач різних розділів курсу математики дає можливість студентам кваліфікованіше, ефективніше маніпулювати математичними об'єктами, (обчислювати границі, похідні, інтеграли, розв'язувати системи рівнянь тощо). Вони оволодівають ідеями, насиченими геометричними ілюстраціями алгебраїчних методів, а не витрачають час на механічні обчислення. Важливим педагогічним завданням викладача є застосування таких методів і форм організації заняття, на яких студент отримував би осмислені відповіді на кожному етапі розв'язання задачі або їх осмислював.

Відомі педагоги та психологи вважають, що основним призначенням педагогіки вищої школи є вирішення проблеми перетворення наукових знань у навчальний предмет "… строить учебный предмет – это не просто отбирать материал из соответствующей науки для целей образования, это – и строить познавательный процесс, его содержание, средства, логику, … . Учебная программа должна не только фиксировать содержание знаний об объекте, их объем, в ней должен быть заложен и способ изучения предмета, логика его изложения "[3].

Математика відноситься до дисциплін, які є фундаментом технічної освіти. Але існуючий традиційний курс вищої математики у вищому технічному навчальному закладі є занадто об'ємним. Студенти, які готуються стати інженерами, а не професіоналами математиками, за два роки повинні засвоїти елементи лінійної алгебри, елементи аналітичної геометрії, математичний аналіз, векторний аналіз, звичайні диференціальні рівняння, рівняння математичної фізики, функції комплексної змінної та операційне числення, теорію ймовірностей з елементами математичної статистики. Зрозуміло, що майже неможливо в межах існуючої кількості годин та традиційної методики викладання зробити так, щоб студенти сприйняли, зрозуміли та засвоїли усі відповідні нові поняття; зрозуміли та засвоїли способи та межі їх використання; зрозуміли та засвоїли відповідний математичний апарат.

У наш час студенти першого курсу, вчорашні школярі, не мають навичок у вивченні теоретичного математичного матеріалу. Багато з них навіть не відрізняють, коли вони розуміють певний матеріал, а коли не розуміють. У такій ситуації традиційний метод викладення теоретичного матеріалу "від теорії до практики" є мало ефективним.

Відомо, що студенти краще сприймають нові поняття, коли вони є результатом розв'язання деяких практичних задач.

Останнє твердження проілюструємо на прикладі викладення теми "Визначений інтеграл". Спочатку розглядається одна із геометричних задач. Це може бути задача про знаходження площі криволінійної трапеції у вигляді границі послідовності інтегральних сум. На цьому етапі означення подається одночасно як формула для обчислення, оскільки простішої формули на даний момент немає. Причому, звертається увага на основний момент застосування інтегральної схеми до розв'язання геометричних задач, а саме, на наближену заміну складного елементарного геометричного об'єкту більш простим, часто це є заміна криволінійного елементарного геометричного об'єкту на прямолінійний об'єкт.

Далі розглядається одна із фізичних задач, яка також розв'язується за інтегральною схемою. Це може бути задача про знаходження маси неоднорідного матеріального стрижня. Аналогічно до попереднього, результат розв'язання задачі є означенням маси неоднорідного матеріального стрижня у вигляді границі послідовності інтегральних сум. Одночасно означення подається як формула для обчислення.

Із викладеного робиться висновок щодо практичної важливості нової неелементарної операції, яку називають інтегруванням.

Відомо, що переважна більшість основних математичних понять виникли із практичних задач шляхом абстрагування. Із розглянутих задач випливає означення нової операції – визначеного інтегралу.

При вивченні невласних інтегралів, доцільно сформулювати задачу щодо можливості вираження числом площі певної необмеженої фігури. Процес і результати розв'язання переконують студентів у важливості операції переходу до границі при розв'язання задач, в яких мають справу з нескінченністю.

Поява сучасних комп'ютерів та математичних комп'ютерних систем створюють умови для використання у навчальному процесі більшої кількості наближених методів та ознайомлення студентів із сучасними наближеними аналітичними методами розв'язування, наприклад, ДР, зокрема, методом відомого українського математика Дзядика В.К. (1919-1998).

Метод дає можливість на заданому проміжку будувати многочлени, які з високою точністю наближають шуканий розв'язок, особливо у випадку, коли коефіцієнтами лінійного диференціального рівняння (ДР) є многочлени. Без використання математичних комп'ютерних систем здійснити обчислення можна лише в найпростіших випадках.

В статті розглянуто лише окремі моменти методики вивчення предмета з використанням комп'ютера.

З'ясовано, що застосування сучасних інформаційних технологій дозволяє значно ефективніше розв'язувати протиріччя між формально-логічним вивченням курсів математики та евристичною діяльністю інженера шляхом інтенсивного та систематичного впровадження адаптованих до навчального процесу завдань; між обсягом курсу вищої математики та часом на оволодіння ним за рахунок одночасного використання всіх засобів подання інформації.

Застосування сучасних інформаційних технологій підвищує пізнавальний інтерес студентів до навчального матеріалу розширює можливості цілеспрямованого упорядкованого формування, поглиблення і розширення теоретичної бази знань студентів. Це досягається шляхом урізноманітнення подання матеріалу та удосконалення методики викладання предмету. Використання засобів НІТН дає можливість систематично розглядати різні шляхи розв'язання завдань, збільшити кількість завдань, урізноманітнити їх зміст, розширити можливості узагальнень математичних понять.

Застосування математичних пакетів при вивченні теорії ймовірності і математичної статистики розвиває у студентів відчуття структури і структурних відношень теорії ймовірності та математичної статистики, схильність до аналізу, розуміння математичних об'єктів, бачення їхньої взаємодії.

Запропонована методика спрямована не лише на вивчення окремих розділів курсу вищої математики, а й на формування фахівця, підготовленого до активної професійної і соціальної діяльності у сучасному інформаційному просторі.

Література

1. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Берлінська С.Ю. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології. – Київ: Вища школа, 1995. – 352 с.
2. Клочко В.І. Нові інформаційні технології навчання математики в технічній вищій школі. Автореф. дис…д-ра пед. наук. – К., 1998. – 36 с.
3. Решетова З.А., Сергеева Т.А. Формирование теоретического мышления студентов при изучении курса общей химии в высшей школе. – Современная высшая школа. – 1978. – №3.
4. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983. – 416 с.

ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПАКЕТА MATLAB В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Е.А. Кожаев, Г.Г. Маклакова
г. Севастополь, Севастопольский национальный технический университет

При изучении курса высшей математики большая роль может быть отведена математическим пакетам (MathCAD, Maple, MatLab и др.). Пакеты дают возможность быстро провести необходимый численный эксперимент, проверить ту или иную гипотезу, испытать различные методы и подходы к решению задачи, выяснить границы использования метода.

В настоящее время все большее применение получает пакет MATLAB (MATrix LABoratory – матричная лаборатория), особенно для проведения сложных математических расчетов. Пакет является одной из наиболее мощных универсальных интегрированных систем математического проектирования. Система MATLAB была разработана К. Молером (C. B. Moler) и с конца 70-х гг. широко использовалась на больших ЭВМ [1, 3]. В начале 80-х гг. Джон Литл (John Little) из фирмы MathWorks, Inc. разработал версии системы PC MATLAB для компьютеров класса IBM PC, VAX и Macintosh. В дальнейшем были созданы версии для рабочих станций Sun, компьютеров с операционной системой UNIX и многих других типов больших и малых ЭВМ. Сейчас свыше десятка популярных компьютерных платформ могут работать с системой MathLab [1].

Важными достоинствами системы являются ее открытость и расширяемость. Большинство команд и функций системы реализованы в виде текстовых m-файлов (с расширением .m) и файлов на языке Си, причем все файлы доступны для модификации. Пользователю дана возможность создавать не только отдельные файлы, но и библиотеки файлов для реализации специфических задач. Легкость модификации системы и возможность ее адаптации к решению специфических задач науки и техники привели к созданию десятков пакетов прикладных программ. Приведем характеристику некоторых пакетов, которые с успехом могут использоваться в преподавании прикладных вопросов высшей математики.

Fuzzy Logic Toolbox (определение переменных, нечетких правил и функций принадлежности; интерактивный просмотр нечеткого логического вывода; современные методы: адаптивный нечеткий вывод с использованием нейронных сетей, нечеткая кластеризация).

Symbolic Math Toolbox (решение задач в символьном виде: дифференцирование и интегрирование, вычисление сумм и произведений, разложение в ряды Тейлора и Маклорена, операции с полиномами, вычисление корней полиномов, решение нелинейных уравнений и другие всевозможные символьные преобразования). Следует отметить, что по возможностям символьной математики пакет сильно уступает специализированным системам компьютерной алгебры, таким как новейшие версии Maple и Mathematica.

NAG Foundation Toolbox (дискретное преобразование Фурье; обыкновенные дифференциальные уравнения: методы Адамса и Рунге-Кутта; уравнения в частных производных; интерполяция; вычисление собственных значений и векторов, поддержка комплексных и действительных матриц; аппроксимация кривых и поверхностей: полиномы, кубические сплайны, полиномы Чебышева; минимизация и максимизация функций: линейное и квадратичное программирование, экстремумы функций нескольких переменных; разложение матриц; решение систем линейных уравнений; статистические расчеты, включая описательную статистику и распределения вероятностей; корреляционный и регрессионный анализ: линейные, многомерные и обобщенные линейные модели; генерация случайных чисел: нормальное распределение, распределения Пуассона, Вейбулла и Коши).

Statistics Toolbox (реализация статистических вычислений и статистической обработки данных, генерация случайных чисел, векторов, матриц и массивов с различными законами распределения, а также множество статистических функций).

Optimization Toolbox (методы оптимизации функций ряда переменных: безусловная оптимизация нелинейных функций; метод наименьших квадратов и нелинейная интерполяция; решение нелинейных уравнений; линейное программирование;

квадратичное программирование; условная минимизация нелинейных функций; метод минимакса; многокритериальная оптимизация).

Partial Differential Equations Toolbox (пакет содержит множество функций для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных).

Control System Toolbox (моделирование, анализ и проектирование систем автоматического управления — как непрерывных, так и дискретных при этом реализуются традиционные методы передаточных функций и современные методы пространства состояний).

Digital Signal Processing (DSP) (пакет прикладных программ для проектирования устройств, использующих процессоры цифровой обработки сигналов. Результаты моделирования и проектирования цифровых устройств с помощью этого пакета могут использоваться для построения высокоэффективных цифровых фильтров на современных микропроцессорах цифровой обработки сигналов).

Signal Processing Toolbox (моделирование и проектирование устройств обработки всевозможных сигналов, обеспечение их фильтрации и множества преобразований: моделирование сигналов и линейных систем; проектирование, анализ и реализация цифровых и аналоговых фильтров; быстрое преобразование Фурье; оценка спектров и статистическая обработка сигналов; параметрическая обработка временных рядов; генерация сигналов различной формы).

Image Processing Toolbox (цифровая обработка и анализ изображений: восстановление и выделение деталей изображений; работа с выделенным участком изображения; анализ изображения; линейная фильтрация; преобразование изображений; геометрические преобразования; увеличение контрастности важных деталей; цветовые преобразования; изменение палитры; преобразование типов изображений).

В последних версиях MATLAB появилась возможность готовить документы в текстовом процессоре Word 95/97/2000 со вставками в виде документов MATLAB и результатов вычислений, представленных в численном, табличном или графическом виде. Таким образом, становится возможной подготовка «живых» электронных книг, в которых демонстрируемые примеры могут быть оперативно изменены. Представляется возможным менять условия задач и тут же наблюдать изменение результатов их решения.

Следует отметить еще одно из достоинств системы MATLAB. В нее входит ядро системы символьной математики (компьютерной алгебры) Maple V Release 5. Оно используется пакетами расширения Symbolic Math Toolbox и Extended Symbolic Math Toolbox, благодаря которым в среде MATLAB стали доступны новые возможности символьных и аналитических вычислений.

Особенностью системы MATLAB является то, что ее легко приспособить к решению нужных классов задач. Расширение достигается естественным путем и реализуется в виде создаваемых пользователем m-файлов. Эффективность разрабатываемых программ существенно повышается при использовании средств построения интерактивного графического интерфейса пользователя (GUI Builder), входящих в систему MATLAB.

Для иллюстрации возможностей использования пакета MATLAB в преподавании высшей математики были разработаны программы по разделу теории вероятностей и математической статистики [2]. Разработка программ проводилась в среде графического интерфейса GUIDE.

Разработанные программы позволяют наглядно представить изменение законов распределения случайной величины от параметров распределения. Предусмотрены различные режимы визуализации (изменение толщины линии графика распределения, цвета линии, видов маркеров). Одна из программ позволяет моделировать работу генератора псевдослучайных чисел с различными законами распределения. Предоставляется возможность наглядно продемонстрировать работу генератора и изучить влияние параметров распределения на сгенерированную последовательность чисел. Предусмотрено изменение объема анализируемой выборки, закона распределения генерируемой последовательности и параметров закона распределения. Программы являются интерактивным средами, которые позволят их использовать для совершенствования учебного процесса при преподавании вопросов прикладной математики.

Использование пакета MATLAB в учебном процессе позволит совершенствовать формы и методы самостоятельной работы студента при изучении курса высшей математики. Появляется возможность больше внимания уделить рассмотрению узловых вопросов курса за счет уменьшения затрат на рутинную вычислительную работу, развиваются творческие способности студентов.

Литература

1. Ануфриев И.Е. Самоучитель MatLab 5.3/6.x. – Спб.: БХВ Петербург, 2002. – 736 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.
3. Потемкин В.Г. Система MatLab 5 для студентов. Справочное пособие. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1998. – 314 с.

ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МОДУЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

В.М. Комяк
г. Харьков, Академия пожарной безопасности Украины
fd@apbu.kharkiv.com

Создание новой пожарной техники, автоматизированных и автоматических систем обнаружения пожара и построения прогноза динамики его развития, оптимизационных методов обоснования размеров пожарной службы и ее дислокации требует усиления фундаментальной подготовки специалистов пожарной охраны, в частности по фундаментальным дисциплинам, таким как высшая и прикладная математика, математическое моделирование, системный анализ, информационные технологии.

На кафедре фундаментальных дисциплин с целью лучшего усвоения высшей математики на протяжении двух лет внедрялась и совершенствовалась модульно-рейтинговая система. Особенности ее использования состояли в следующем:

1. Материал семестра разбивался на модули, которые совпадали с разделами тематического плана дисциплины.
2. Выбирались 3-4 основные темы из раздела.
3. По каждой из выбранной тем готовились и проводились на практических занятиях в течение 10÷15 мин. контрольные работы. Задания для каждого слушателя готовились преподавателем индивидуально.
4. Результаты контрольных работ объявлялись курсантам и заносились в учебные журналы преподавателей. Если оценка не удовлетворяла курсанта, он имел возможность ее отработать у преподавателя. Каждая последующая отработка снижала на 10% рейтинговую оценку. Например, курсант сдал задолженность с третьего раза на оценку «3», его рейтинговая оценка составляла 3×0,8=2,4.
5. По результатам контрольных работ всего модуля выставлялась оценка в журнал успеваемости учебной группы.
6. При завершении семестра определялась средняя оценка по модулям, которая принималась за рейтинговую. По получен-

ным рейтинговым оценкам проводилось ранжирование курсантов. Если группы потока примерно одного уровня знаний, то в каждой группе по результатам рейтинга определялись 2-3 курсанта, которые имели возможность получить либо зачет-«автомат», либо экзамен-«автомат». Если группы разнородные по знаниям, то ранжирование оценок осуществлялось на всем потоке, в результате чего определялись группы отстающие, имеющие минимальное число «автоматчиков», и группы-победители, имеющие максимальное число «автоматчиков». При этом разрабатывалась и система премирования групп-победителей.

Опыт использования такой модульно-рейтинговой системы показал, что курсанты, регулярно готовящиеся к занятиям, имеют лучшие остаточные знания, и как результат, лучший результат на сессии. На втором курсе средний балл по высшей математики составил: в 2000-2001 у/г. – «3,29», а в 2001-2002 у/г. – «3,46».

Таким образом, предлагаемая система контроля знаний позволяет:

- иметь более глубокую и объективную оценку знаний;
- равномерно активизировать учебную работу курсантов в течение года;
- повышать заинтересованность слушателей в посещении занятий;
- стимулировать учебную работу курсантов.

Основной недостаток системы – большая загрузка преподавателей, связанная с необходимостью подготовки большого количества материала для контрольных работ, дополнительного учета и обработки рейтинговых оценок. И тут на помощь может прийти компьютерная техника. Ведется работа по подготовке электронных вариантов индивидуальных заданий по каждой отрабатываемой теме, предполагается создание программы обработки рейтинговых оценок.

ФОРМУВАННЯ ЗАГАЛЬНОНАВЧАЛЬНИХ УМІНЬ ЛІЦЕЇСТІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

С.В. Кондратенко
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Раніше основним завданням школи було забезпечення учнів систематизованими знаннями, коло яких було точно визначено. Випускники отримували так звану “повну середню освіту”. Сучасна ж школа постає як один з етапів неперервної освіти. Навіть у державній програмі “Освіта” (“Україна XXI століття”) [1] зазначено, що принцип неперервності освіти, перетворення її у процес, що триває протягом усього життя людини, має стати одним із найважливіших принципів реформи освіти.

Здається незрозумілим, навіщо людині навчатися все своє життя? Але на це є цілком певне пояснення. Сьогодні, перебуваючи в умовах розквіту інформаційного суспільства, коли відбувається бурхливий розвиток наукових технологій, кожна освічена людина повинна вільно орієнтуватися в величезному потоці різноманітної інформації, вміти її добути, проаналізувати і дійти власних висновків.

У зв’язку з цим особливої актуальності набуває задача формування загальнонавчальних умінь, які є необхідною умовою як самостійного набуття знань (в широкому розумінні цього слова), так і оволодіння системою знань, що отримують учні в процесі навчання.

Проблема формування загальнонавчальних умінь не є новою. Ґрунтовні дослідження цієї проблеми здійснювали Бабанський Ю.К., Щукіна Г.І., Шамова Т.І., Буряк В.К., Кабанова-Меллер О.М., Платонов К.К., Мілерян Є.О., Менчинська Н.О. Були запропоновані програми по формуванню загальнонавчальних умінь на уроках математики (Єпішева О.Б., Деніщева Л.О., Грудьонов Я.І.) та на уроках фізики (Усова А.В., Бобров А.А.).

Основна доля проведених досліджень припадає на 80-ті роки. Майже десять років проблемі формування загальнонавчальних умінь у психолого-педагогічній літературі не приділялося достатньої уваги. За цей час відбулися значні зміни в організації навчально-виховного процесу та освіти в цілому – гуманізація освіти, методологічна переорієнтація процесу навчання з інформативної форми на розвиток особистості учня, індивідуально-диференційований, особистісно-орієнтований підходи до навчання.

Нами досліджувалась проблема формування загальнонавчальних умінь в процесі експериментального навчання учнів 10-11 класів фізико-математичного профілю Саксаганського природничо-наукового ліцею (м. Кривий Ріг).

Саксаганський природничо-науковий ліцей являє собою середній навчальний заклад нового типу. З часів заснування (1990 р.) керівництво ліцею за підтримки Інституту педагогіки АПН України, перебувало у пошуках стилю діяльності ліцею, який вбачали у наданні визначної ролі науково-дослідницькій діяльності.

У зв’язку з цим у всіх класах ліцею вивчався предмет “Основи наукової творчості та наукових досліджень”, що складався з декількох частин. Зміст предмета розподілявся за роками, виходячи з принципу поступового ускладнення.

На першому році вивчалися “Основи наукової творчості”. Головним при опрацюванні цього курсу було усвідомлення основних ідей теорії розв’язування винахідницьких задач (ТРВЗ); освоєння зразків розумової діяльності в процесі дослідження навчальних задач; набуття досвіду самостійного застосування набутих знань при розв’язуванні творчих задач; навчання методів активізації пошуку нових рішень.

На другому році навчання тривало вивчення курсу “Основи науково-технічної творчості” і в його межах курсу “Розвиток творчої уяви”. Основним завданням другого року було навчання прийомів системного мислення, прийомів боротьби з психологічною інертністю, навичок користування інструментами ТРВЗ при розв’язуванні творчих завдань.

На третьому році навчання завершувалося опрацювання курсу “Розвиток творчої уяви”, паралельно з яким викладався курс “Життєва стратегія творчої особистості”. Вивчаючи його, ліцеїсти повинні були оволодіти організаційною основою ТРВЗ, функціонально-ціннісним аналізом, набути стійкі якості мислення, розвивати керовану уяву, формувати якості творчої особистості, навчатися оформляти заяви на патент.

Вивчення цього курсу закінчувалося на четвертому році навчання. Водночас вводився курс “Основи наукових досліджень. Розв’язування дослідницьких задач”. У ході його опрацювання ліцеїсти ознайомлювалися з основними прийомами відкриття явищ та закономірностей, законами розвитку наукових систем та наукових колективів. Вони вчилися розв’язувати дослідницькі задачі, оволодівали ефективними прийомами, підходами до побудови нових наукових систем, інструментарієм наукової діяльності, формували комплекс якостей творчої особистості.

Проте сьогодні задача формування творчої особистості у Саксаганському ліцеї розв’язується по-іншому. Навчально-виховний процес було перебудовано на засадах креативної освіти, коли розвиток дослідницьких умінь учнів здійснюється на кожному уроці з будь-якої дисципліни. У зв’язку з цим вже немає необхідності читання окремого спецкурсу “Основи наукової творчості та наукових досліджень”.

На нашу думку, умовою ефективності дослідницької діяльності учнів є розвиненість загальнонавчальних умінь, серед яких до найбільш важливих відносяться організаційні, інформаційні та інтелектуальні.

З метою удосконалення науково-дослідної діяльності ліцеїстів на уроках математики, що розглядається як визначальна складова системи роботи навчального закладу, побудованого на засадах креативності, ми організували дослідно-експериментальну роботу з підвищення рівня сформованості загальнонавчальних умінь.

В процесі формування навчально-організаційних та навчально-інформаційних умінь роль математики не є визначальною, однак вивчення математики здійснює свій внесок в їх формування. Адже в порівнянні з іншими навчальними предметами математичні дисципліни є більш складними, вимагають повсякденної кропіткої самостійної роботи, досить специфічної і різноманітної.

В курсі математики найбільш доцільно формувати навчально-інтелектуальні та навчально-комунікативні уміння, оскільки у системі шкільної освіти математика відіграє провідну роль у формуванні інтелектуальних умінь. А уміння логічно міркувати знаходиться у тісному зв'язку з умінням чітко й лаконічно викладати свої думки, що є умовою розвитку навчально-комунікативних умінь.

В процесі дослідно-експериментальної роботи слід було врахувати те, що, по-перше, головна мета ліцею – це формування високо інтелігентної, активної, творчої особистості; по-друге – навчальний матеріал з профільних дисциплін має більш високий рівень складності і науковості, ніж у звичайних загальноосвітніх школах; по-третє – методика його подання повинна бути спрямована на реалізацію дослідницького підходу у навчанні, і останнє – це те, що ми мали працювати з ліцеїстами-старшокласниками, які відрізняються високими інтелектуальними здібностями і мають чітко визначений інтерес до фізико-математичних дисциплін.

Врахувавши зазначені фактори впливу, ми в якості засобів реалізації умов ефективного формування загальнонавчальних умінь обрали застосування прикладних задач на всіх етапах навчання, організацію самостійного опрацювання окремих тем, як ділової гри, що моделює науково-дослідну діяльність, проведення різноманітних міні-конкурсів, які б давали можливість кожному ліцеїсту проявити свої здібності та таланти.

Результати формуючого експерименту, що тривав протягом 2001-2002 навчального року, свідчать про доцільність обраної системи дидактичних умов та засобів її реалізації. Зазначимо, що певна доля отриманих за короткий час покращень обумовлена високим рівнем здібностей та пізнавальної активності ліцеїстів-старшокласників.

Література:

1. Державна національна програма "Освіта". Україна XXI століття. – К.: Райдуга, 1994. – 62 с.

ОСОБЛИВОСТІ ОРГАНІЗАЦІЇ КОРЕКЦІЇ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ ВУЗІВ ПРИ ВИВЧЕННІ РОЗДІЛУ “ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА” В КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

О.М. Кондратьєва
м. Черкаси, Черкаський державний університет
ім. Б. Хмельницького

Одними з основних складових процесу навчання є контроль і корекція знань студентів. Інформація, яку дістають внаслідок проведення контролю, та її аналіз стають основним способом здійснення зворотного зв’язку між суб’єктами педагогічного процесу. Причому, у разі невідповідності еталону перевірки результатів, які отримані під час контролю, постає необхідність здійснення корекції.

Стосовно вивчення курсу вищої математики в технічних вузах, можна виділити такі основні види корекції: корекцію вхідних знань, тематичну корекцію (корекцію знань з окремої теми після її вивчення) та підсумкову корекцію (корекцію знань з курсу в цілому).

Серед основних форм проведення корекції виділимо корекційну консультацію та самостійну роботу студентів із використанням коригуючи засобів.

До засобів корекції ми відносимо індивідуальні коригуючи картки, методичні вказівки коригуючого характеру, коригуючи вправи з використанням ПЕОМ та інші.

Зауважимо, що будь-яка форма корекції повинна бути реалізована з урахуванням особистісних потреб та можливостей кожного зі студентів. При проведенні корекції основний акцент потрібно ставити на самостійну роботу кожного студента, але рівень успішності такої діяльності напряму залежить від якості своєчасної допомоги викладача.

Традиційно курс вищої математики, який викладається у вищих технічних закладах освіти, починається з розділу „Лінійна та векторна алгебра”. Основні напрямки корекційної роботи при вивченні вказаного розділу ми вбачаємо у наступному.

1. Для успішного засвоєння матеріалу даної теми доцільно

провести корекцію вхідних знань студентів з таких питань курсу елементарної математики:

- розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з двома змінними;
- побудова множини точок координатної площини, координати яких є розв'язками системи лінійних нерівностей;
- вектори на площині та у тривимірному просторі (координати вектора, модуль вектора, операції додавання векторів та множення вектора на число).

Корекційна робота такого характеру має здійснюватись у поза аудиторний час здебільше індивідуально кожним зі студентів. Для цього знадобляться індивідуальні тематичні завдання з вище означених питань. Після перевірки виконання цих завдань студентам, які цього потребують, бажано надати або пояснювальну консультацію, або додаткові корекційні завдання. Зауважимо, що наявність методичних вказівок коригуючого характеру для здійснення кожного з видів корекції значно полегшуватиме роботу викладача.

2. Тематична корекція з розділу „Лінійна та векторна алгебра", на наш погляд, повинна стосуватися наступних питань:

- лінійний простір, лінійна залежність векторів, дослідження та розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (повторення та уточнення матеріалу з цих питань необхідне для ефективного засвоєння розділу „Аналітична геометрія", деяких питань математичного аналізу, спецкурсу „Математичне програмування" та ін.);
- скалярний, векторний та мішаний добутки векторів (необхідність звернення уваги на ці питання обумовлена їх використанням в аналітичній геометрії, теорії поля та ін.);
- лінійні перетворення (матеріал з цієї теми використовується в аналітичній геометрії при зведенні рівнянь ліній та поверхонь до канонічного вигляду, при поясненні механізму здійснення заміни змінної в кратних інтегралах, при розв'язуванні систем диференціальних рівнянь та ін.).

Особливо відмітимо, що вказані питання мають широке застосування при вивченні спеціальних дисциплін на профілюючих кафедрах. Отже, якісне засвоєння студентами матеріалу розділу „Лінійна та векторна алгебра" виступатиме одним із факторів подальшої професійної освіти студентів.

ГУМАНІТАРНІ АСПЕКТИ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ

Т.П. Коростіянець, А.Л. Іщенко
м. Одеса, Південноукраїнський державний педагогічний університет ім. К.Д. Ушинського

Характерною рисою нового світогляду нашого часу є розуміння того, що природу не можна “покоряти” не думаючи про наслідки своєї діяльності, що людиною не можна управляти, як машиною, і сильно примушувати до чого-небудь для її ж блага. Світ, в якому ми живемо, є складною динамічною системою, що сама розвивається і включає в себе природу і людину. Відповідно до цього в основу шкільного викладання повинні бути покладені нові цінності, орієнтири.

Одна з найважливіших цілей викладання полягає в тому, щоб виховати молоду людину, сформувати її світогляд, навчити її раціональному мисленню. Цій меті можна підкорити викладання будь-якого предмета, в тому числі й математики. Ще яких-небудь 50 років тому представники природознавства дивились на математику лише як на засіб, що дозволяє формулювати кількісні закономірності природи.

Але в наш час ці погляди змінились, до попередніх уявлень додались ряд нових: математика була названа мовою науки. Математика не тільки створює математичні моделі явищ, що дозволяють виводити шляхом обчислень наслідки, але й указує експериментатору, в якому напрямку і як проводити експеримент. Ця обставина має виняткове значення для розвитку багатьох галузей людської діяльності.

Можна навести багато прикладів, коли математичний підхід дозволяв розкрити суть економічних, сільськогосподарський, екологічних або технічних явищ і внести суттєві зміни в наші знання і в подальші практичні дії.

Новий погляд на математику безпосередньо стосується виховання наукових ідеалів молоді: пізнавати, щоб діяти і вдосконалювати наше повсякденне життя. Тому на уроках необхідно формувати систему цінностей, з якою молода людина вступає у світ. Треба учням показати, що цінність науки визначається не тільки тим, що вона допомагає створювати матеріальні блага. Наука формує і інтелектуальну атмосферу. Для людини поруч з матеріальними цінностями важливі цінності – знання, вміння послідовно мислити (міркувати), аналізувати факти, узагальнювати їх. Вирішуючи задачі, вона тренується в точності і строгості суджень, вчиться шукати різні шляхи виходу із становища, що склалось, звикає долати труднощі. Але, щоб досягти таких результатів, треба роз'яснити учням мету і завдання виучуваного предмету. Тому при викладанні нової теми необхідно розповісти про її виникнення й розвиток, про галузь її застосування. Наприклад, з допомогою математики людство далеко просунулось у вивченні природи – цієї стійкої і організованою системи, що склалася в процесі еволюції органічного світу. Сюжет, фабула багатьох прикладних задач, що вирішуються в різноманітних темах шкільного курсу математики допоможуть розкрити перед учнями важливі галузі застосування екологічних знань таких як, охорона природи, сільське господарство, деякі галузі промисловості, і покажуть вирішення багатьох проблем в цих галузях з допомогою математики.

Новий світогляд, який наші дні необхідно формувати у школярів, передбачає виховання у кожної людини вміння враховувати не тільки думку окремої особистості чи групи, але, в першу чергу, інтереси суспільства. З'ясувати й зрозуміти ці інтереси можна тільки вислуховуючи різноманітні точки зору, ведучи аргументований діалог, доводячи справедливість одних тверджень і спростовуючи інші. Саме математика вчить проведенню доказів. Вивчаючи її, школяр вперше в своєму житті зустрічає таку високу вимогливість до повної аргументації. Один з найвидатніших педагогів і математиків нашого часу О.Я. Хінчин неодноразово відмічав, що хороший вчитель привчить своїх учнів до взаємної критики: коли один з них що-небудь доводить чи вирішує яку-небудь задачу перед класом, решта повинна напружено шукати можливості заперечень й негайно їх висловлювати.

Учень, який "відіб'ється" від таких заперечень, примусить замовкнути усіх своїх критиків, неодмінно зазнає законну радість перемоги. Разом з тим він ясно відчує, що саме логічна повноцінність аргументації була тією зброєю, яка дала йому цю перемогу. А раз відчувши це, від неодмінно навчиться поважати цю зброю, постарається, щоб вона завжди була при ньому. І звичайно, не тільки в математичних, але й в будь-яких інших дискусіях він все більше і наполегливіше буде прагнути до повноцінної аргументації. Цей виховуючий процес має вирішальне значення для логічної культури мислення, особливо якщо врахувати, що учень звикає бути безпощадно вимогливим до повноцінної аргументації не тільки в спорі, а й в своєму власному мисленні.

Крім специфічних, особливо суворих вимог до логічної правильності умовиводів, математика відрізняється від інших наук, що викладаються в школі також стилем мислення. Цій стиль, хоч і зазнав на протязі віків значні зміни, все ж має деякі загальні для всіх епох риси, які помітно відрізняють його від стилів, прийнятих в інших науках. Серед тих особливих рис, які властиві стилю математичного мислення, є ряд таких, які мають загальне й широке значення.

В основі кожного правильно побудованого ходу мислей, незалежно від його предметного змісту, лежить така формально-логічна схема, яка відчувається вишколеним розумом як деякій логічний кістяк, злагоджений і закономірний. Для математики характерно доведене до межі домінування логічної схеми міркування. Очевидно, що вона в найбільшій степені дозволяє слідкувати за правильністю течії мислі і гарантує від помилок.

Другою, характерною рисою математичного стилю мислення, є його лаконізм, свідоме прагнення завжди находити короткій логічний шлях, якій веде до даної цілі, нещадне відкидання усього, у чому нема абсолютної необхідності для бездоганної повноцінної аргументації. Тому саме уроки математики дають учням навички лаконічного, прямого, без відхилень мислення, яке необтяжливе ніякими зайвими елементами.

Далі, для стиля математичного мислення характерна читка розчлененість ходу міркувань. Якщо, наприклад, при доведенні якого-небудь твердження ми повинні розглядати чотири можливих випадки, з яких кожен може розбитися на ту, чи іншу кількість інших випадків, то в кожен момент міркувань математик повинен пам'ятати, в якому випадку або іншому випадку його мисль зараз знаходиться і які випадки йому ще залишилось розглянути. В звичайному, ненауковому мисленні ми часто спостерігаємо у таких випадках змішання і перескоки, які приводять до помилок в міркуванні. Для того, щоб зробити такі змішання і перескоки неможливими, математики широко користуються простим зовнішнім засобом нумерації понять, суджень. Зрозуміло, що така нумерація служить лише зовнішнім засобом, дуже корисним, але необов'язковим, суть справи не в неї, а в розчленоності аргументації, або класифікації, котру вона і стимулює і знаменує собою.

Нарешті, слід згадати ще одну чисто зовнішню традицію математичного стилю. Це точність символіки. Кожен математичний символ має строго визначене значення. Учень, який не звик ще відноситися з достатньою вимогою до точності усної мови і письмового висловлювання, спочатку може з недовірою віднестися до запрошення вчителя математики – вести математичний запис з абсолютною точністю. Але переконавшись, що точність символічного запису відповідає його інтересам, він починає слідкувати за собою і поступово строга правильність математичної символіки робиться його звичкою. Така звичка, яка здобута в якій-небудь сфері мислення, приводить до виховання і загального стиля мислення учня; він починає точніше висловлювати свої думки як в усній мові, так і в письмовій мові.

Скільки-небудь помітний виховний ефект уроки математики можуть дати при тих умовах, що вчитель, по-перше, достатньо володіє своєю наукою, її історією, методичними принципами, по-друге має достатній педагогічний такт і досвід, по-третє, сам володіє в достатній мірі усіма якостями, які він збирається виховувати у своїх учнів.

ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТІВ ФІЗИЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ ВИЩИХ ПЕДАГОГІЧНИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

О.Б. Красножон
м. Бердянськ, Бердянський державний педагогічний університет

Широке впровадження нової інформаційної технології в навчальний процес породжує ряд проблем, що стосуються змісту, методів, організаційних форм і засобів навчання, гуманітаризації освіти та гуманізації навчального процесу, інтеграції навчальних предметів і фундаменталізації знань, підготовки і удосконалення кваліфікації педагогічних кадрів, створення системи неперервної освіти, зокрема системи самоосвіти і самовдосконалення вчителів, яка забезпечувала б оволодіння ними основами сучасної інформаційної культури [3, с. 3].

Впровадження нової інформаційної технології в навчально-виховний процес – проблема не нова в сучасній педагогічній науці. Її загострення саме тепер обумовлене бурхливим розвитком і вдосконаленням засобів отримання, опрацювання, зберігання, а також оперативного доступу до потужних інформаційних потоків, з якими нерозривно пов’язані як діяльність сучасної ділової людини, так і функціонування та розвиток наукоємних виробництв і технологій.

Педагогічні і теоретичні аспекти використання інформаційної технології у навчальному процесі досліджені у працях М.І. Жалдака, Ю.С. Рамського, С.А. Ракова, В.І. Клочка, Ю.І. Машбиця, Н.В. Морзе, А.В. Пенькова, Ю.В. Горошка, В.В. Дровозюка, О.Б. Жильцова, А.Г. Олійника, М.С. Голованя, Ю.О. Жука, Б.Б. Бєсєдіна, І.М. Забари та ін.

Актуальною на сьогоднішній день є проблема розробки науково-обґрунтованих методичних систем навчання дисциплін математичного циклу з використанням інформаційної технології у вищому педагогічному навчальному закладі, оскільки сьогоднішнім випускникам педагогічних вузів – вчителям математики, фізики, інших навчальних предметів – завтра доведеться зіткнутись віч-на-віч з проблемою впровадження інформаційної технології у закладах освіти середньої та середньо-спеціальної ланки.

Процес інформатизації середньої освіти має виняткове значення в плані політехнізації навчання та загальної підготовки учнів до практичної діяльності, оскільки вже зараз певний базовий рівень інформаційної культури вимагається від кожного члена суспільства [2, с. 21].

На Україні, в системі вищої і середньої освіти, найбільш поширеними програмними продуктами, які використовуються у навчально-виховному процесі, є комплект педагогічних програмних засобів *Gran1*, *Gran-2D*, *Gran-3D* та відповідне науково-методичне забезпечення у вигляді навчальних посібників, розроблені у Національному педагогічному університеті ім. М.П. Драгоманова під керівництвом академіка АПН України, доктора педагогічних наук, професора М.І. Жалдака, а також програмний засіб *DERIVE*. Детально можливості використання зазначених програмних продуктів у навчальному процесі розкрито в роботі [1].

Наведемо приклади розв'язування задач практичного змісту курсу "Алгебра і геометрія" за допомогою педагогічного програмного засобу *GRAN-3D* та програмного засобу *DERIVE*.

Приклад 1. Обчислити відстань між прямими $\frac{x+3}{4}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{2}$ (l_1) та $\frac{x-4}{8}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+7}{3}$ (l_2). [5, с. 167].

Розв'язування. Напрямним вектором прямої l_1 є вектор $\vec{a}\{4;-3;2\}$, т. $A(-3;6;3)\in l_1$; напрямним вектором прямої l_2 є вектор $\vec{b}\{8;-3;3\}$, т. $B(4;-1;-7)\in l_2$. Спочатку з'ясуємо взаємне розташування прямих l_1 та l_2 в просторі. Дослідимо на компланарність вектори $\overrightarrow{AB}\{7;-7;-10\}$, $\vec{a}\{4;-3;2\}$ та $\vec{b}\{8;-3;3\}$: $\left(\overrightarrow{AB}\ \vec{a}\ \vec{b}\right)=\begin{vmatrix}7 & -7 & -10\\ 4 & -3 & 2\\ 8 & -3 & 3\end{vmatrix}=-169\neq 0$, отже, прямі l_1 та l_2 – мимобіжні. Наведемо три можливі способи розв'язування поставленої задачі – геометричні та алгебраїчний.

Спосіб 1 (геометричний). Обчислюємо об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}\{7;-7;-10\}$, $\vec{a}\{4;-3;2\}$ та

$\vec{b}\{8;\,-3;\,3\}$ як на ребрах: $V_{пар-да} = \left|\left(\overrightarrow{AB}\;\vec{a}\;\vec{b}\right)\right| = 169$. Площа основи паралелепіпеда – паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\{4;\,-3;\,2\}$ та $\vec{b}\{8;\,-3;\,3\}$ як на сторонах – дорівнюватиме модулю векторного добутку векторів $\vec{a}\{4;\,-3;\,2\}$ та $\vec{b}\{8;\,-3;\,3\}$:

$$S_{осн.} = \mathrm{mod}\left[\vec{a}\;\vec{b}\right] = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 2 \\ 8 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \mathrm{mod}\left(-3\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}\right) = 13.$$

Шукана відстань d між прямими l_1 та l_2 дорівнюватиме висоті цього паралелепіпеда. Отже, $d = \dfrac{V}{S_{осн}} = \dfrac{169}{13} = 13$.

Спосіб 2 (геометричний). Запишемо рівняння площини, заданої початковою точкою $A(-3;\,5;\,3)$ та напрямними векторами $\vec{a}\{4;\,-3;\,2\}$ та $\vec{b}\{8;\,-3;\,3\}$:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-6 & z-3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 8 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -3x + 4y + 12z - 69 = 0.$$

Шукана відстань між прямими l_1 та l_2 дорівнюватиме відстані від довільної точки прямої l_2, наприклад, $B(4;\,-1;\,-7)$, до площини $-3x+4y+12z-69=0$:

$$d = \frac{\left|-3\cdot 4 + 4\cdot(-1) + 12\cdot(-7) - 69\right|}{\sqrt{9+16+144}} = 13.$$

Спосіб 3 (алгебраїчний). Відстань між прямими l_1 та l_2 дорівнюватиме довжині ортогональної складової $\boldsymbol{CB}$ вектора $\boldsymbol{AB}=(7;\,-7;\,-10)$ відносно підпростору L векторного простору R^3, породженого векторами $\boldsymbol{a}=(4;\,-3;\,2)$ та $\boldsymbol{b}=(8;\,-3;\,3)$. Очевидно, вектори $\boldsymbol{a}=(4;\,-3;\,2)$ та $\boldsymbol{b}=(8;\,-3;\,3)$ утворюють базис підпростору L, оскільки

$$rang\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 8 & -3 & 3 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

Ортогоналізуємо цей базис: $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}=(4;\,-3;\,2)$,

$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b} - \frac{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)} \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b} - \frac{47}{29} \boldsymbol{a}_1 = \left(\frac{44}{29}; \frac{54}{29}; -\frac{7}{29} \right)$. За базисні вектори ортогонального базису підпростору L візьмемо вектори $\boldsymbol{e}_1$=(4; –3; 2) та $\boldsymbol{e}_2$=(44; 54; –7). Легко перевірити, що $\boldsymbol{e}_1 \perp \boldsymbol{e}_2$. Знаходимо ортогональну проекцію $\boldsymbol{AC}$ вектора $\boldsymbol{AB}$=(7; –7; –10) на підпростір L:

$$\boldsymbol{AC} = \Pi p_L \boldsymbol{AB} = \frac{(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)} \boldsymbol{e}_1 + \frac{(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{e}_2)}{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)} \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 .$$

Обчислюємо ортогональну складову $\boldsymbol{CB}$ вектора $\boldsymbol{AB}$=(7; –7; –10) відносно підпростору L:

$$\boldsymbol{CB} = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{e}_1 = (3; -4; -12).$$

Шукана відстань між прямими l_1 та l_2 дорівнює довжині d ортогональної складової $\boldsymbol{CB}$: $d = |\boldsymbol{CB}| = \sqrt{169} = 13$.

Розв’язування наведеної задачі за допомогою педагогічного програмного засобу *GRAN-3D* здійснюється у наступній послідовності.

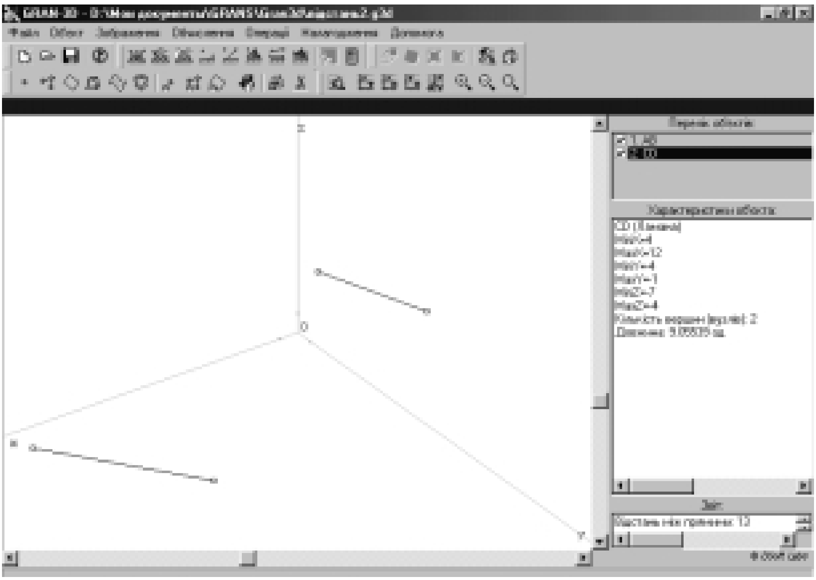


Рис. 1

Очевидно, що пари точок A(–3; 6; 3) та B(1; 3; 5), C(4; –1; –7) та D(12; –4; –4) належать відповідно прямим l_1 та l_2. В опції меню *“Об’єкт”* обираємо пункт *“Створити”* і підпункт *“Ламана”*. У полі *“Точки:”* вводимо послідовно координати точок $A(-3; 6; 3)$ та $B(1; 3; 5)$. Натисканням клавіші *“Виконати”* будуємо відрізок AB, який містить пряма l_1. Аналогічним чином будуємо відрізок CD, який містить пряма l_2. Очевидно, що відстань між прямими l_1 та l_2 дорівнюватиме відстані між відрізками AB та CD. Для обчислення відстані між даними прямими в опції меню *“Обчислення”* обираємо пункт *“Відстань”* і підпункт *“між двома прямими”*. Покажчиком послідовно підсвічуємо кожний з побудованих відрізків. У полі *“Звіт:”* читаємо відповідь: *“Відстань між прямими: 13”*.

Результат виконання зазначених дій програмою *GRAN-3D* представлений на рис. 1.

Відповідь: 13.

Наведемо приклад використання програмного засобу *DERIVE* для автоматизації виконання обчислень.

Приклад 2. В лінійному просторі R^3 задано площина P, яка в прямокутній декартовій системі координат $O\boldsymbol{ijk}$ має рівняння $2x+y-z=0$, та лінійний оператор φ, який переводить довільний вектор $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM}$ у вектор $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OK}$, такий, що, якщо точка T – основа перпендикуляра, опущеного з точки M на площину P, то точка K належить відрізку TM і $\left|\overrightarrow{TK}\right| = k\left|\overrightarrow{TM}\right|$, де k – додатне число. Знайдіть матрицю лінійного оператора φ в координатному базисі $O\boldsymbol{ijk}$ [4, с. 73-74].

Розв’язування. У якості базисного вектора $\boldsymbol{a}$ нового, більш зручного для знаходження матриці лінійного оператора φ, базису $O\boldsymbol{abc}$ візьмемо нормальний вектор $\boldsymbol{a}=(2; 1; -1)$ площини P. Ортогональним доповненням до підпростору, породженого вектором $\boldsymbol{a}=(2; 1; -1)$, буде фундаментальна система розв’язків рівняння $2x_1+x_{12}-x_3=0$, загальний розв’язок якої має вигляд $\left(\dfrac{x_3 - x_2}{2}; x_2; x_3\right)$. Отже, у якості векторів $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ можна узяти, наприклад, вектори $\boldsymbol{b}=(1; -2; 0)$ та $\boldsymbol{c}=(1; 0; 2)$. Матриця переходу T від базису $O\boldsymbol{ijk}$ до базису $O\boldsymbol{abc}$ матиме вигляд: $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Очевидно, що даний лінійний оператор φ переводить базисні вектори $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ як такі, що належить площині P, у самих себе, тобто $\varphi(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}=(0;1;0)$, $\varphi(\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}=(0;0;1)$ (координати образів базисних векторів $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ записані в базисі $O\boldsymbol{abc}$). Знаходимо образ базисного вектора $\boldsymbol{a}$. Для цього потрібно знайти координати точки K, яка розділить відрізок OM у відношенні $\lambda=\frac{k}{1-k}$, де точки O та M – відповідно початок та кінець вектора $\boldsymbol{a}$. Зрозуміло, що друга і третя координати точки K дорівнюватимуть нулю, оскільки точка K належить першому базисному вектору $\boldsymbol{a}$. Отже, $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{\frac{k}{1-k}}{1+\frac{k}{1-k}}=k$, тобто $\varphi(\boldsymbol{a})=(k;0;0)$. Таким чином, матриця лінійного оператора φ в базисі $O\boldsymbol{abc}$ матиме вигляд:

$$A^{\varphi}_{\{O\boldsymbol{abc}\}}=\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Використавши формулу $A^{\varphi}_{\{O\boldsymbol{ijk}\}}=T\cdot A^{\varphi}_{\{O\boldsymbol{abc}\}}\cdot T^{-1}$, будемо мати:

$$A^{\varphi}_{\{O\boldsymbol{ijk}\}}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

$$\#13:\quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\#14:\quad \begin{bmatrix} \frac{2\cdot k}{3}+\frac{1}{3} & \frac{k}{3}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\frac{k}{3} \\ \frac{k}{3}-\frac{1}{3} & \frac{k}{6}+\frac{5}{6} & \frac{1}{6}-\frac{k}{6} \\ \frac{1}{3}-\frac{k}{3} & \frac{1}{6}-\frac{k}{6} & \frac{k}{6}+\frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

Рис. 2.

Обчислення виконаємо за допомогою програмного засобу *DERIVE* (рис. 2).

Відповідь: $\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 4k+2 & 2k-2 & 2-2k \\ 2k-2 & k+5 & 1-k \\ 2-2k & 1-k & k+5 \end{pmatrix}.$

Література

1. Жалдак М.І. Комп’ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. – К.: Техніка, 1997. – 303 с.

2. Жалдак М.І., Морзе Н.В., Олійник А.Г., Рамський Ю.С. Вплив нової інформаційної технології на зміст освіти //Сучасна інформаційна технологія в навчальному процесі: Зб. наук. праць /Редкол.: М.І.Шкіль (відп. ред.) та ін. – К.: КДПІ, 1991. – С.17-21.

3. Жалдак М.І. Проблеми інформатизації навчального процесу в школі і в вузі //Сучасна інформаційна технологія в навчальному процесі: Зб. наук. праць /Редкол.: М.І. Шкіль (відп. ред.) та ін. – К.: КДПІ, 1991. – С. 3-16.

4. Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учеб. пособие для студентов вузов по спец. «Физика» и «Прикл. математика». – М.: Высш. шк., 1985. – 120 с.

5. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1964. – 336 с.

ДО МЕТОДИКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПОРІВНЯННЯ ЧИСЛОВИХ ЗНАЧЕНЬ ЛОГАРИФМІЧНИХ ФУНКЦІЙ

В.В. Крючковський, А.Н. Хомченко, О.В. Цибуленко
м. Херсон, Херсонський державний технічний університет
meo@kstu.edu.ua

Задачі, що пропонуються на вступних іспитах до вузу, вимагають від абітурієнтів не тільки знань властивостей тієї чи іншої функції, а й можливість творчого підходу, навиків логічного, нестандартного мислення. Одними з таких задач є задачі на порівняння числових значень логарифмічних функцій при різних основах: $log_b a$ і $log_c d$.

Нажаль методика розв'язування таких задач у літературі розроблена не достатньо. Обходять стороною ці задачі і в курсі "Методика розв'язування задач", що викладається для майбутніх вчителів у педагогічних інститутах. І той факт, що відсутній загальний метод порівняння числових значень логарифмічних функцій, пояснюється тим, що питання це дуже складне.

Авторам відомі п'ять часткових методів, за допомогою яких можна відповісти на питання: яке з чисел $log_b a$ чи $log_c d$ більше?

1. Порівняння наближених числових значень, знайдених за допомогою таблиць або калькулятора, кожного з порівнюваних чисел.
2. Порівняння кожного з порівнюваних логарифмів з одним і тим же цілим числом [1, с. 82].
3. Порівняння відношення порівнюваних логарифмів з одиницею [1, с. 82].
4. Порівняння різниці порівнюваних логарифмів з нулем [1, с. 82-83].
5. Порівняння різниці порівнюваних логарифмів з нулем після того, як їх виразять через один і той же третій логарифм [2, с. 285-286].

Перший метод перевіряє лише уміння учня користуватися таблицями чи калькулятором. Останні чотири методи не потребують таблиць, але змушують учня виявити не тільки знання особливостей логарифмічної функції, але й особисту кмітливість. Але ні один з цих чотирьох методів не в змозі дати стверджувальної відповіді при порівнянні будь-яких чисел $log_b a > 0$ і $log_c d > 0$.

Крім того для окремих прикладів ці методи досить громіздкі і мають для учнів певні як математичні так і психологічні труднощі.

Приклад 1. Порівняти числа $log_{108} 72$ і $log_{54} 18$.

Розв'язання.

Відповідно до метода п.5 перетворимо обидва логарифми наступним чином:

1) $log_{108} 72 = log_{3^3 \cdot 2^2} 3^2 \cdot 2^3 = 2 log_{3^3 \cdot 2^2} 3 + 3 log_{3^3 \cdot 2^2} 2 =$

$$= \frac{2}{3 + 2 log_3 2} + \frac{3}{3 log_2 3 + 2} = \frac{2}{3 + \frac{2}{log_2 3}} + \frac{3}{2 + 3 log_2 3}.$$

Позначимо $log_2 3 = a$, тоді

$$log_{108} 72 = \frac{2}{3 + \frac{2}{a}} + \frac{3}{2 + 3a} = \frac{2a}{3a + 2} + \frac{3}{3a + 2} = \frac{2a + 3}{3a + 2}.$$

2) $log_{54} 18 = log_{3^3 \cdot 2} 3^2 \cdot 2 = 2 log_{3^3 \cdot 2} 3 + log_{3^3 \cdot 2} 2 =$

$$= \frac{2}{3 + log_3 2} + \frac{1}{3 log_2 3 + 1} = \frac{2}{3 + \frac{1}{a}} + \frac{1}{3a + 1} = \frac{2a}{3a + 1} + \frac{1}{3a + 1} = \frac{2a + 1}{3a + 1}.$$

Тепер порівняємо числа

$$\frac{2a + 3}{3a + 2} \vee \frac{2a + 1}{3a + 1} \Leftrightarrow \frac{2a + 3}{3a + 2} - \frac{2a + 1}{3a + 1} \vee 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{6a + 1}{(3a + 2)(3a + 1)} \vee 0; \\ a = log_2 3 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{6a + 1}{(3a + 2)(3a + 1)} > 0.$$

Відповідь: $log_{108} 72 > log_{54} 18$.

Суттєвим недоліком цього методу є не тільки громіздкість необхідних математичних перетворень, а й обмеженість у його застосуванні. Наприклад при порівнянні чисел $log_{2,71} 3{,}14$ і

$log_{2,711} 3{,}141$ цей метод не спрацьовує.

Звернемо увагу, що має місце наступна теорема.

Теорема 1. Різниця значень логарифмічних функцій $log_a(x+c)$ і $log_a x$ при віддаленні x у нескінченність наближається до нуля.

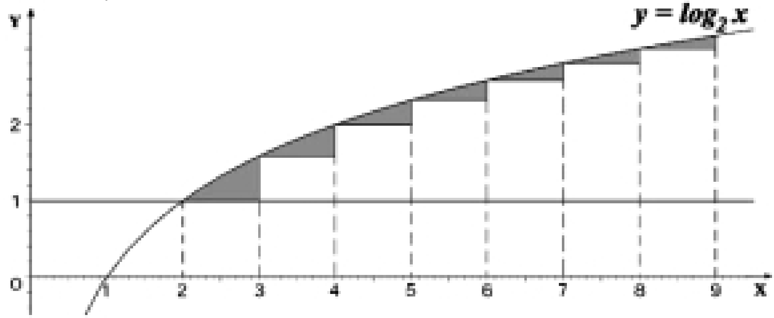


Рис. 1.

Доведення. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(log_a(x+c)-log_a x\right)=\lim\limits_{x\to\infty} log_a\left(1+\dfrac{c}{x}\right)=0.$

Ілюстрацію теореми 1 дивись на рис. 1.

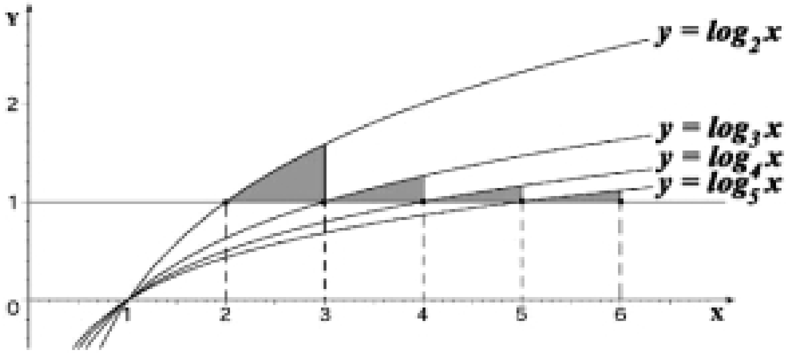


Рис. 2.

При $c=1$ маємо:

$$log_2 3-log_2 2>log_2 4-log_2 3>log_2 5-log_2 4>... \qquad (1)$$

Має місце і така послідовність нерівностей

$$log_2 3-log_2 2>log_3 4-log_3 3>log_4 5-log_4 4>..., \qquad (2)$$

що спирається на загальну формулу [1, с. 82] (див. рис. 2):

$$log_a(a+1) > log_{a+1}(a+2).$$

З останньої послідовності випливає наступна послідовність нерівностей:

$$log_2 3/2 > log_3 4/3 > log_4 5/4 > log_5 6/5 > \ldots \qquad (3)$$

Приклад 2. Порівняти числа $log_2 3$ і $log_4 5$.

Розв'язання.

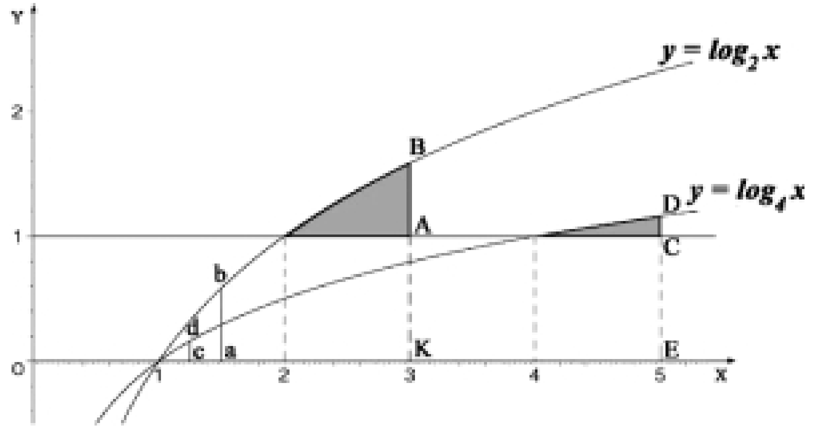


Рис. 3.

Обидва числа більші за одиницю. На рис. 3 це відрізки $|KB|$ і $|ED|$. Тому, якщо кожне з них зменшити на одиницю, то будемо порівнювати вже відрізки $log_2 3/2 = log_2 1{,}5 = |AB| = |ab|$ і $log_4 5/4 = log_2 1{,}25 = |CD| = |cd|$. А нові числа мають такі властивості, якими не володіють числа $log_2 3$ і $log_4 5$. Дійсно

$$(log_2 3 \vee log_4 5) \Leftrightarrow \left(\frac{ln 3}{ln 2} \vee \frac{ln 5}{ln 4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} ln 3 < ln 5; \\ ln 2 < ln 4. \end{cases}$$

З останньої системи нерівностей не можна зробити висновок яке з чисел $log_2 3$ і $log_4 5$ більше. Тепер порівняємо числа

$$(log_2 3 \vee log_4 5) \Leftrightarrow (log_2 1{,}5 \vee log_4 1{,}25) \Leftrightarrow \left(\frac{ln 1{,}5}{ln 2} \vee \frac{ln 1{,}25}{ln 4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ln 1{,}5 > ln 1{,}25; \\ ln 2 < ln 4; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{ln 1{,}5}{ln 2} > \frac{ln 1{,}25}{ln 4}.$$

Так як частка від ділення більшого числа на менше завжди більша за частку від ділення меншого числа на більше.

Відповідь: $log_2 3 > log_4 5$.

<u>Приклад 3.</u> $log_{11} 12 \vee log_{13} 14$?

<u>Розв'язання.</u>

Обидва ці числа більші за одиницю. Але на скільки більше кожне з них за одиницю?

Рис. 4.

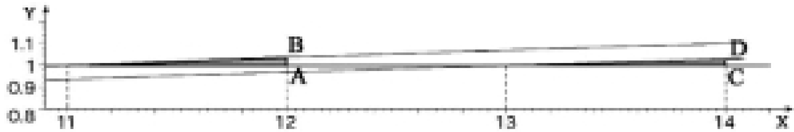


Рис. 5.

На рис.4 криві $y = log_{11} x$ і $y = log_{13} x$ майже зливаються. Будемо порівнювати не ці числа, а зменшене кожне на одиницю.

$$log_{11} 12 - log_{11} 11 \vee log_{13} 14 - log_{13} 13;$$

$$log_{11} 12/11 \vee log_{13} 14/13;$$

$$log_{11} 1{,}0(90) \vee log_{13} 1{,}076.$$

На рис. 5 $|AB| = log_{11} 1{,}0(90)$ і $|CD| = log_{13} 1{,}076$.

$$\frac{ln 1{,}0(90)}{ln 11} \vee \frac{ln 1{,}076}{ln 13} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ln 1{,}0(90) > ln 1{,}076; \\ ln 11 < ln 13; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ln 1{,}0(90)}{ln 11} > \frac{ln 1{,}076}{ln 13}.$$

Відповідь: $log_{11} 12 > log_{13} 14$.

<u>Приклад 4.</u> $log_{2,71} 3{,}14 \vee log_{2,711} 3{,}141$?

<u>Розв'язання.</u>

$$log_{2,71} 3{,}14 - 1 \vee log_{2,711} 3{,}141 - 1;$$

$$log_{2,71}1{,}15867 \vee log_{2,711}1{,}15861;$$

$$\frac{ln1{,}15867}{ln2{,}71} \vee \frac{ln1{,}15861}{ln2{,}711} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ln1{,}15867 > ln1{,}15861; \\ ln2{,}71 < ln2{,}711; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ln1{,}15867}{ln2{,}71} > \frac{ln1{,}15861}{ln2{,}711}.$$

Відповідь: $log_{2,71}3{,}14 > log_{2,711}3{,}141$.

Як бачимо, перевага запропонованого метода складається не тільки з його простоти, а і з його надзвичайно високої чутливості. Цей метод чітко проводе межу між більшим і меншим числом. Навіть тоді, коли числа відрізняються один від одного на будь-яку цифру після коми:

$$log_{2,71}3{,}14 \approx 1{,}1475; \qquad log_{2,711}3{,}141 \approx 1{,}1472.$$

<u>*Зауваження.*</u> Іноді після зменшення даних чисел на одиницю, або на декілька одиниць (в залежності від співвідношення між числами під логарифмами і їх основами) ми одержуємо такі числа, що не дозволяють дати відповідь на запитання яке з них більше.

<u>**Приклад 5.**</u> Яке з чисел $log_{45}75$ чи $log_{135}675$ більше?

<u>*Розв'язання.*</u>

$$log_{45}75 \vee log_{135}675;$$

$$log_{45}75 - 1 \vee log_{135}675 - 1;$$

$$log_{45}1{,}(6) \vee log_{135}5; \tag{4}$$

Так як $\begin{cases} ln1{,}(6) < ln5; \\ ln45 < ln135; \end{cases}$

то з цієї системи нерівностей відповідь на запитання ми дати не можемо. Тому нерівність (4) замінюємо на таку рівносильну нерівність, числа якої знову можна було б зменшити на одиницю:

$$log_5 135 \vee log_{1,(6)}45;$$

$$log_5 135 - 1 \vee log_{1,(6)}45 - 1;$$

$$log_5 27 \vee log_{1,(6)}27;$$

$$\frac{\ln 27}{\ln 5} \vee \frac{\ln 27}{\ln 1,(6)};$$

$$\frac{\ln 27}{\ln 5} < \frac{\ln 27}{\ln 1,(6)}.$$

Відповідь: $\log_{45} 75 < \log_{135} 675$.

Заміна однієї нерівності на рівносильну є правомірною, бо має місце наступна теорема.

<u>Теорема 2.</u> Зміст нерівності між двома додатними логарифмічними числами не зміниться, якщо поміняти місцями число, що стоїть під знаком одного з логарифмів і число, що стоїть в основі другого логарифма.

<u>Доведення.</u>

Нехай після зменшення на одиницю чисел $\log_b a$ і $\log_c d$ ми одержали нерівність:

$$\log_a a/b \vee \log_c d/c. \qquad (5)$$

Помножимо обидві частини нерівності (5) на додатне число $\log_{a/b} c$. Маємо

$$\log_a a/b \cdot \log_{a/b} c \vee \log_c d/c \cdot \log_{a/b} c. \qquad (6)$$

Якщо скористатися формулою [3, с.246]:

$$\log_y x \cdot \log_x z = \log_y z,$$

то нерівність (6) набуває вигляду $\log_a c \vee \log_{a/b} d/c$.

Зауважимо, що за наслідком цієї теореми можна одночасно поміняти обидва числа, що стоять під знаками логарифмів на числа, що стоять в основах інших логарифмів.

<u>Приклад 6.</u> $\log_{15} 60 \vee \log_{60} 480$?

<u>Розв’язання.</u>

$$\log_{15} 60 - 1 \vee \log_{60} 480 - 1;$$

$$\log_{15} 4 \vee \log_{60} 8;$$

$$\begin{cases} \ln 4 < \ln 8; \\ \ln 15 < \ln 60. \end{cases}$$

Ця система не дає можливості дати відповідь на запитання: яке з чисел $\log_{15} 60$ чи $\log_{60} 480$ більше.

Замінюємо останню нерівність рівносильною:

$$\left(\log_8 60 \vee \log_4 15\right) \Leftrightarrow \left(\log_8 60 - 1 \vee \log_4 15 - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(log_8 7{,}5 \vee log_4 3{,}75\right) \Leftrightarrow \begin{cases} ln 7{,}5 > ln 3{,}75; \\ ln 8 > ln 4. \end{cases}$$

Ця система теж не дає можливості дати стверджуючу відповідь.

Замінюємо останню нерівність рівносильною:

$$\left(log_{3,75} 7{,}5 \vee log_4 8\right) \Leftrightarrow \left(log_{3,75} 7{,}5 - 1 \vee log_4 8 - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(log_{3,75} 2 \vee log_4 2\right) \Leftrightarrow \left(\frac{ln 2}{ln 3{,}75} \vee \frac{ln 2}{ln 4}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{ln 2}{ln 3{,}75} > \frac{ln 2}{ln 4}\right).$$

Відповідь: $log_{15} 60 > log_{60} 480$.

<u>**Приклад 7.**</u> Порівняти числа $log_{289} 288$ і $log_{290} 289$.

<u>*Розв'язання.*</u>

$$\left(log_{289} 288 \vee log_{290} 289\right) \Leftrightarrow \left(log_{289} 290 \vee log_{288} 289\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(log_{289} 290 - 1 \vee log_{288} 289 - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(log_{289} 1{,}00346 \vee log_{288} 1{,}00347\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{ln 1{,}00346}{ln 289} \vee \frac{ln 1{,}00347}{ln 288}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} ln 1{,}00346 < ln 1{,}00347 \\ ln 289 > ln 288 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{ln 1{,}00346}{ln 289} < \frac{ln 1{,}00347}{ln 288}\right).$$

Відповідь: $log_{289} 288 < log_{290} 289$.

Зауважимо, що $log_{289} 288 \approx 0{,}9993904$;

$$log_{290} 289 \approx 0{,}9993908 .$$

Таким чином, розв'язування задач на порівняння числових значень $log_b a$ і $log_c d$ логарифмічних функцій зводиться до застосування наступного алгоритму:

1. Порівнюємо кожне з чисел $log_b a$ і $log_c d$ з одиницею. Якщо одне з них більше за одиницю, а друге менше за одиницю, то відповідь готова. Якщо ні, то переходимо до п.2.
2. Зменшуємо кожне з чисел на одиницю. Одержимо: $log_b a / b$ і $log_c d / c$. Складаємо систему:

$$\begin{cases} \ln a/b \vee \ln d/c; \\ \ln b \vee \ln c. \end{cases}$$

Якщо одержані нерівності будуть протилежного смислу, то відповідь готова. Якщо ні, то переходимо до п.3.

3. Замінюємо нерівність $\log_b a/b > \log_c d/c$ на рівносильну так, щоб порівнювані числа були більші за одиницю. Потім переходимо до п.2.

Література

1. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие./ Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. – М.: Наука, 1987. – 432 с.
2. Бесчетнов В.М. Математика: курс лекций для учащихся 7-11 классов: т.1. – М.: Демиург, 1994. – 288 с.
3. Моденов П.С., Новоселов С.И. Пособие по математике для поступающих в вузы. – М.: Изд. МГУ, 1966. – 432 с.

СТВОРЕННЯ ГІПЕРТЕКСТОВИХ НАВЧАЛЬНИХ КОМПЛЕКСІВ З МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

О.С. Куцевол
м. Полтава, Полтавський університет споживчої кооперації України

Застосування інформаційних технологій в навчанні фундаментальним дисциплінам, а саме, математичним, в вищих навчальних закладах потребує нового підходу до методичного забезпечення навчального процесу. Кафедрою вищої математики та фізики Полтавського університету споживчої кооперації України розробляється власне електронне методичне забезпечення дисциплін кафедри для програмної оболонки, яка призначена для поступового формування і розміщення у внутрішній intranet–мережі університету типових гіпертекстових навчальних комплексів (див. схему 1).

Задумуючи ідею створення гіпертекстових навчальних комплексів з математичних дисциплін, переслідувалися такі цілі:

– по-перше, надати студентам при вивченні дисциплін ефективний і легкодоступний засіб навчання, який включав би у себе теоретичний матеріал, питання і практичні завдання, і виконував би не тільки навчальну, але і контролюючу й оцінюючу функції;

– по-друге, провести аналіз запропонованого до комп'ютерної реалізації теоретичного матеріалу, з метою визначення його придатності, і ступінь ефективності цієї реалізації;

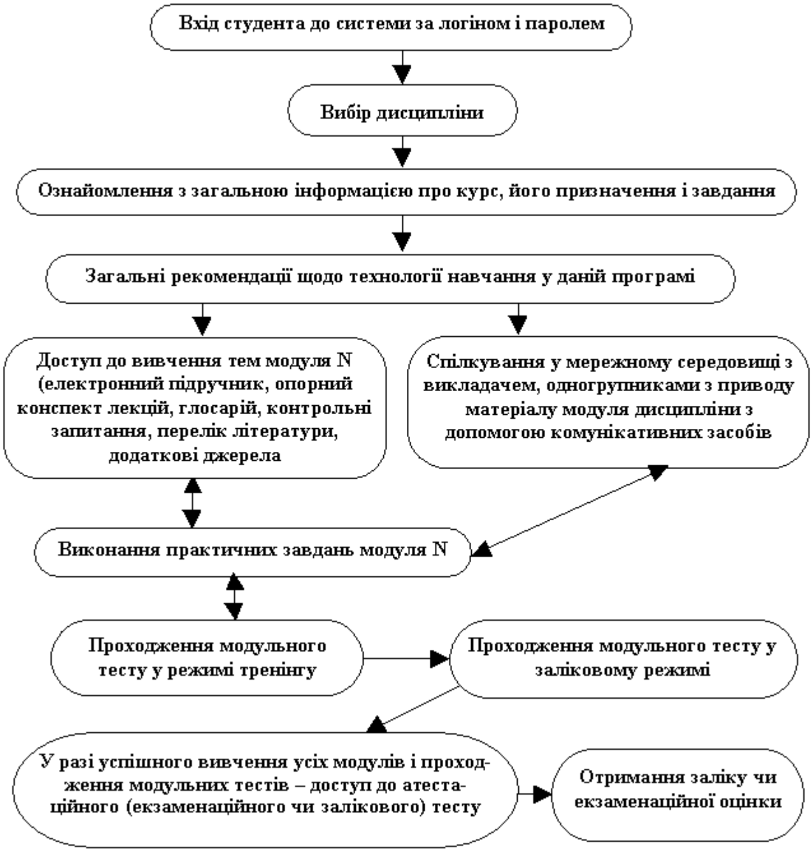
– по-третє, продовжити, і в чомусь оживити, процес впровадження інформаційних технологій в область навчання математики, прискорити інтеграцію математичних і інформаційних дисциплін;

– і, по-четверте, надати університету повноцінне програмне забезпечення, яке може бути застосоване в навчанні студентів математичним дисциплінам на молодших курсах, і яким зможуть скористатися сотні студентів.

Облік навчального плану університету, його практична спрямованість і досить широкі можливості роблять гіпертекстовий навчальний комплекс корисним і своєчасним для використання при навчанні математичним дисциплінам. Але комп’ютер є і завжди залишиться лише базою даних, і щоб вилучити з нього знання, як і з будь-якої іншої бази, потрібен викладач. Тому роль викладача повинна бути спрямована на те, щоб дати студентам необхідні опорні знання, за допомогою яких на рівні своєї реальної підготовленості вони зможуть розвивати їх з використанням комп'ютера.

Схема 1.

Принципова схема програмного забезпечення



При успішному складанні модульного тесту – перехід до наступного модулю. Матеріал попереднього модулю при цьому стає недоступним для студента.

О СОДЕРЖАНИИ КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ БУДУЩИХ ИНЖЕНЕРОВ-СТРОИТЕЛЕЙ

В.М. Левин
г. Макеевка, Донбасская государственная академия строительства и архитектуры
levin@mail.donbass.com

Различные аспекты математического образования инженера анализировались в течение длительного времени самыми авторитетными учеными и педагогами, что само по себе свидетельствует о ее важности, сложности и наличии различных тенденций. Наиболее обоснованными выглядят подходы (достаточно близкие), развиваемые Д. Пойя [1], А.Н. Крыловым [2], Б.В. Гнеденко [3], Л.Д. Кудрявцевым [4,5], И.И. Блехманом, А.Д. Мышкисом, Я.Г. Пановко [6], В.В. Паком [7], на которые автор и опирается в дальнейшем. Эти подходы логичны, совершенно очевидны и основаны на богатом опыте преподавания в ведущих инженерных вузах, образуют в своей совокупности цельную, законченную и убедительную концепцию, содержащую в себе побудительные мотивы для периодического обновления содержания курса высшей математики в высшем техническом учебном заведении.

Согласно этой концепции содержание курса должно соответствовать: целям обучения математике; уровню подготовки слушателей; кругу их интересов и прагматических запросов, характеру их последующей производственной деятельности.

Одна из указанных целей – вооружить слушателей доступным математическим инструментарием в интересах других общенаучных, общеинженерных и специальных дисциплин и для решения задач, которые возникнут у них впоследствии, когда они начнут работать по специальности. Так как строительная наука постоянно развивается, возникают новые задачи и методы их решения, расширяется арсенал прикладных математических методов и реализующих их программ, программа курса должна соответствующим образом пополняться, чтобы рецептурная часть курса работала и была достаточно полной.

Наиболее высокие требования к курсу высшей математики обусловлены современными задачами расчета строительных конструкций и их систем и теоретической основой такого расчета – строительной механикой. В этой связи можно отметить следующие задачи и соответствующий им математический аппарат.

При расчете конструкций и их систем преобладающим методом дискретизации является метод конечных элементов. Несмотря на то, что он является прикладным математическим методом, он в курсе высшей математики не рассматривается (как и вообще вопросы дискретизации и аппроксимации), а вводится в курсе строительной механики. В результате обычно не акцентируется внимание на многих важных для приложений вопросах, в частности, таких, как погрешность аппроксимации и сходимость последовательности конечноэлементных аппроксимаций при сгущении сетки узлов. Очевидно, соответствующее пополнение курса (затрагивающее только идеологию и необходимые практические выводы и предупреждения) было бы весьма полезным.

Так как метод конечных элементов (как и некоторые другие методы расчета на прочность и устойчивость) – метод вариационный, целесообразно общее знакомство с вариационным исчислением осуществить в рамках математического курса, введя исходные понятия функционала и вариации и показав в основных чертах переход к классической задаче на экстремум при дискретизации системы.

Большое значение в практике проектирования имеют задачи динамики и устойчивости сооружений; для их решения с единых позиций (что было бы полезно и с точки зрения математической культуры, и с точки зрения устранения ненужных повторов) необходимо введение понятия собственной проблемы для дифференциального оператора (в случае расчета непрерывной системы) и для конечного линейного оператора (после ее дискретизации), описание идеи основных методов ее решения и небольшой вычислительный практикум с использованием компьютера.

Насущная необходимость учета реальных деформативных и прочностных свойств материалов и грунтов основания, а также особенностей работы конструкций при больших деформациях и перемещениях (физическая и геометрическая нелинейность, расчет по деформированной схеме) обуславливают необходимость хотя бы самого краткого ознакомления с идеологией решения нелинейных задач, а также интегральных уравнений и их систем. Хорошо было бы подкрепить изложение этих вопросов элементарным введением в функциональный анализ.

Понятие о тензорах иногда вводится в курсах сопротивления материалов и механики грунтов. Целесообразнее было бы уделить этому немного времени в курсе высшей математики.

Для решения задач динамики стержневых систем, статики и динамики плит, оболочек и массивов необходимо знакомство с основами теории дифференциальных уравнений в частных производных и методами их решения (не только МКЭ).

Так как рассчитываемые несущие системы имеют случайные свойства (размеры, распределение деформативных и прочностных свойств) и подвергаются случайным нагрузкам и воздействиям, при их расчете все большее распространение приобретают вероятностные методы. Для грамотного осуществления контроля качества, для нормирования механических свойств материалов и грунтов необходимо владение методами математической статистики. Конечно, подготовить слушателей к их использованию даже в тривиальных случаях в отведенные для этой цели восемнадцать аудиторных часов не представляется возможным.

Естественно, изложение этих (и, возможно, некоторых других) вопросов возможно скорее в виде обзора, с четким описанием области и порядка использования в нашей отрасли каждой математической теории.

Однако, излагать эти вопросы на первых двух курсах всем слушателям в процессе подготовки бакалавров нецелесообразно, да и невозможно: это не отвечает ни подготовке среднего студента, ни его интересам, ни характеру его последующей производственной деятельности (он может работать мастером на стройке, на заводе стройиндустрии, в службе эксплуатации зданий и сооружений, младшим инженером или старшим лаборантом в отраслевых НИИ, проектных организациях, низовых управленческих структурах и т.п.) и должен быть всего лишь подготовлен к дальнейшему получению специального образования.

Поэтому изучение затронутых вопросов математики и механики конструкций и оснований целесообразно перенести на периоды подготовки специалистов и магистров.

Одновременно курс высшей математики при подготовке бакалавров можно было бы освободить от вопросов, связанных с запоминанием большого количества ненужных формул, выполнением достаточно сложных и ненужных тождественных преобразований, не актуальных сегодня методов (не нужно запоминание столь полных таблиц производных и интегралов – при необходимости этими таблицами всегда можно воспользоваться; приемы интегрирования различных функций, выраженных громоздкими формулами, выражения для частных решений дифференциального уравнения в обыкновенных производных с постоянными коэффициентами второго порядка с правой частью специального вида в эпоху сплошной компьютеризации выглядят достаточно архаично).

Следовательно, для того, чтобы курс высшей математики во втузе отвечал своему назначению, работал на хорошую профессиональную подготовку, приносил пользу студентам с различной подготовкой, его программу надо периодически пересматривать с учетом интересов и возможностей различных категорий слушателей, изменения потребностей практики и других изучаемых в вузе курсов.

Литература

1. Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975. – 464 с.
2. Крылов А.Н. Мои воспоминания. – Л.: Судостроение, 1979. – 480 с.
3. Гнеденко Б.В. Математическое образование в вузе. – М.: Высшая школа, 1981. – 174 с.
4. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и ее изучении. – М.: Наука, 1977. – 112 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Современная математика и ее преподавание. – М.: Наука, 1980. – 143 с.
6. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Д. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики. – М.: Наука, 1983. – 328 с.
7. Пак В.В. Инженер, математика и другие. Простые методы математического моделирования природных и технологических процессов. – Донецк: ДонГТУ, 1995. – 224 с.

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В КУРСАХ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ПРОГРАМУВАННЯ

І.В. Лупан, З.П. Халецька, Л.В. Ізюмченко
м. Кіровоград, Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка
ilupan@kspu.kr.ua

Одна з головних цілей вищої освіти полягає у тому, щоб за допомогою різних форм навчання і виховання підготувати студента до плідної творчої участі в житті суспільства. В той же час у плануванні курсів фундаментальних дисциплін зберігається тенденція зменшення кількості аудиторних годин та збільшення годин на самостійну роботу при збереженні обсягу навчального матеріалу. Виникає потреба ефективніше використовувати час і шукати нові підходи в поєднанні традиційних методик вивчення дисциплін з інтеграцією між ними в процесі самостійної роботи студентів. Одним із можливих шляхів в організації такої роботи є індивідуальні завдання, які пов’язують окремі розділи різних дисциплін, що вивчаються студентами протягом одного семестру.

Ми пропонуємо поєднання індивідуальних завдань з предметів: алгебра, геометрія і програмування на спеціальності “Інформатика” першого курсу навчання. Перші результати такого досвіду показують доцільність і корисність даного підходу [1, 2].

Інтеграція фундаментальних математичних та комп’ютерних дисциплін сприяє формуванню цілісного уявлення про предмет дослідження, допомагає студенту набувати різнобічні знання, оцінювати результати і творчо застосовувати їх, позитивно впливає на якість навчання та фахову підготовку спеціалістів.

Інтегровані індивідуальні завдання є формою контролю самостійної роботи студентів і охоплюють значну частину навчального матеріалу. У практиці роботи кафедр математики та інформатики маємо завдання, наприклад, з математичного аналізу та програмування (обчислення подвійних інтегралів, дослідження збіжності числових рядів і т. ін.) [3].

Дана робота присвячена вивченню кривих другого порядку і можливим застосуванням цієї теми при вивченні програмування та інших розділів математики.

Завдання для кожного студента носить індивідуальний характер, містить 5 загальних рівнянь другого порядку $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$, які відповідають різним типам кривих, причому одне з них – уявний випадок, і захищається в три етапи відповідно до вивчення тем з предметів: геометрія, алгебра, програмування. Наприклад:

Варіант 1

1) $5x^2–6xy+5y^2–16x–16y–16=0$;
2) $x^2+2xy+y^2–3\sqrt{2}\,x+3\sqrt{2}\,y–12\sqrt{2}=0$;
3) $x^2+4xy+y^2+4x+2y–2=0$;
4) $x^2–4xy+4y^2+4x–8y–5=0$;
5) $x^2–2xy+y^2+4x–4y+6=0$.

Геометрична постановка завдання традиційна: звести рівняння другого порядку до канонічного виду, визначити тип кривої другого порядку, знайти відповідне перетворення координат (базис і початок нової системи координат), зобразити схематично криву і відповідні (стару та нову) системи координат.

Алгебраїчна постановка завдання пов’язана з вивченням тем “Лінійні оператори” і “Білінійні та квадратичні форми”. На етапі виконавчої частини від студента вимагається: виділити квадратичні форми з рівняння квадрик, за допомогою методу власних векторів звести матрицю квадратичної форми до діагонального виду; визначити базис – власні вектори та нормувати їх; записати формули перетворення та застосувати їх до вихідного рівняння; виділяючи повні квадрати, одержати координати нового початку та остаточне перетворення координат; зробити порівняльний аналіз отриманих результатів в геометрії, алгебрі і програмуванні.

При захисті геометричної частини завдання від студента вимагається знання теорії кривих другого порядку (означення, класифікація, властивості, алгоритми зведення загального рівняння до канонічного виду) та афінні, зокрема прямокутні, перетворення координат площини.

Під час захисту алгебраїчної частини студент зобов’язаний показати теоретичні знання тем “Лінійні оператори”(ЛО) (означення та властивості ЛО, ядро та ранг ЛО, власні значення та власні вектори ЛО, ЛО з простим спектром та алгоритм зведення матриці ЛО до діагонального виду) та “Квадратичні форми” (КФ) (означення та матриця КФ, методи зведення КФ до канонічного виду: власних векторів, Якобі, Лагранжа).

Наведемо розв’язання першого завдання поданого варіанта: $5x^2–6xy+5y^2–16x–16y–16=0$.

1. Обчислюємо інваріанти: $I_1=a_{11}+a_{22}$, $I_1=5+5=10$; $I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,

$I_2=\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=16$; $I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $I_3=\begin{vmatrix} 5 & -3 & -8 \\ -3 & 5 & -8 \\ -8 & -8 & -16 \end{vmatrix}=-1280$.

За інваріантами робимо висновок: крива центральна, еліптичного типу, не розпадається на пару прямих.

2. Знаходимо корені s_1, s_2 характеристичного рівняння: $s^2 – I_1s + I_2=0$, $s^2 – 10s + 16=0$, $s_1=2$, $s_2=8$.
3. Зведене рівняння даної кривої має вид: $s_1x'^2+ s_2y'^2+I_3/I_2=0$, $2x'^2+8y'^2–80=0$, звідки $x'^2/40+y'^2/10=1$. За канонічним рівнянням робимо висновок, що крива є еліпс з півосями: $a=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$, $b=\sqrt{10}$.
4. Знайдемо центр $S(x_0, y_0)$ заданої кривої з системи:
$\begin{cases} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}=0, \\ a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}=0, \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_0-3y_0-8=0, \\ -3x_0+5y_0-8=0, \end{cases}$ звідки $x_0=4$, $y_0=4$.

Таким чином, $S(4,4)$.

5. Знайдемо кут повороту системи кординат α: $tg\alpha=\dfrac{s_1-a_{11}}{a_{12}}$, $tg\alpha=\dfrac{2-5}{-3}=1$, звідки $\alpha=\pi/4$.
6. Запишемо формули перетворення координат, розширена матриця якого має вигляд: $T=\left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \end{array}\right)$.

Отже, відповідне перетворення координат:

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}/2x'-\sqrt{2}/2y'+4, \\ y=\sqrt{2}/2x'+\sqrt{2}/2y'+4. \end{cases}$$

7. Будуємо схематичне зображення даної кривої та нової системи координат в старій (рис. 1).

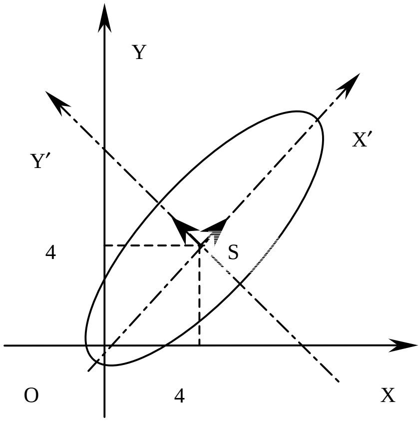


Рис. 1

Розглянемо алгебраїчний підхід, а саме – застосування методу власних векторів.

1. Виділяємо квадратичну форму із загального рівняння кривої: $5x^2 – 6xy + 5y^2$, тоді матриця квадратичної форми має вигляд: $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Запишемо характеристичне рівняння матриці А: $|A – \lambda E| = 0$ та знайдемо його корені.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ тоді } (5-\lambda)^2 - 9 = 0 \text{ і } \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 8.$$

3. Визначимо власні вектори $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ – базис, в якому матриця А зводиться до діагонального вигляду: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Покладемо $\overline{a} = (x, y)$ – власний вектор, тоді $\overline{a}\,A = \lambda\,\overline{a}$.

При $\lambda_1 = 2$ отримаємо систему $\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases}$, звідки x=y і, вибравши вектор одиничної довжини, маємо: $\overline{a_1} = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$.

При $\lambda_2=8$ маємо систему $\begin{cases} -3x-3y=0 \\ -3x-3y=0 \end{cases}$, звідки $x=-y$ і $\overline{a_2}=\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$. Таким чином, $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}\}$ – ортонормований базис. Запишемо перетворення координат, при якому квадратична форма має канонічний вид: $2x_1^2+8y_1^2$:

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}/2x_1-\sqrt{2}/2y_1 \\ y=\sqrt{2}/2x_1+\sqrt{2}/2y_1 \end{cases}.$$

4. Знайдемо рівняння кривої при цьому перетворенні: $2x_1^2+8y_1^2-16\sqrt{2}\,x_1-16=0$. Виділивши повні квадрати, одержимо: $2(x_1-4\sqrt{2}\,)^2+8y_1^2-80=0$. Покладемо $\begin{cases} x'=x_1-4\sqrt{2} \\ y'=y_1 \end{cases}$. Тоді $2x'^2+8y'^2-80=0$, $x'^2/40+y'^2/10=1$ – канонічне рівняння кривої.
5. Знайдемо формули остаточного перетворення координат. Виразимо x', y' через x_1, y_1: $\begin{cases} x_1=x'+4\sqrt{2} \\ y_1=y' \end{cases}$, а тоді $\begin{cases} x=\sqrt{2}/2x'-\sqrt{2}/2y'+4 \\ y=\sqrt{2}/2x'+\sqrt{2}/2y'+4 \end{cases}$.

Завдання з програмування полягає у написанні програми побудови графіків відповідних кривих засобами мови програмування, яка вивчається на даному етапі. Як правило, на першому курсі студенти вивчають мову Pascal або C.

При написанні програми побудови будь-якого графіка слід перш за все вирішити декілька проблем, пов'язаних з особливостями екранної системи координат та структурою графічного зображення. По-друге, оскільки в індивідуальному завданні отриманий за допомогою комп'ютерної програми графік виконуватиме роль еталона, за яким студент звірятиме правильність виконання алгебраїчних перетворень, необхідно не просто отримати на екрані деяке зображення, а й прив'язати його до певної системи координат, зобразити координатну сітку, за якою візуально можна буде визначити, хоча б наближено, положення центра нової системи координат, асимптот, реальні розміри півосей і т. ін. По-третє, при виконанні даного завдання студенти мають справу із неявно заданими функціями, в той час, як на практиці вони здебільшого будували графіки явно заданих функцій. І, почетверте, при побудові графіка необхідно буде переходити від дійсних значень координат функції до цілочисельних координат точок екрана. Додатково вимагатиметься отримати на екрані рівняння кривої, підписати координатні осі тощо.

Таким чином, метою завдання з програмування є узагальнення знань студентів про особливості графічного режиму, засвоєння прийомів перетворення екранної системи координат, закріплення навичок роботи з графічними процедурами та функціями, застосування навичок програмування до розв’язування математичних задач.

Перетворення екранної системи координат виконують одним із двох способів: паралельним перенесенням початку координат у центр екрана або застосуванням процедури *SetViewPort*, яка встановлює розміри та положення області для графічного виводу. З першим способом студенти знайомляться при виконанні лабораторної роботи з програмування. Другий спосіб – більш простий – опановують самостійно, керуючись вказівками викладача. При застосуванні процедури *SetViewPort* усі наступні координати обраховуються відносно границь визначеної області. Застосування параметра *clip* у значенні *clipoff* дозволяє отримувати зображення як у межах заданої області, так і поза нею. У нижченаведеному прикладі початок координат перенесено у центр екрана:

```
xx:=getmaxx; yy:=getmaxy;
xx2:=xx div 2; yy2:=yy div 2;
setviewport(xx2, yy2, xx, yy, clipoff);
```

Побудова координатної сітки – задача тривіальна. Необхідно лише слідкувати за тим, щоб вісі координат співпадали з границями області, заданої процедурою *SetViewPort*.

Побудова власне графіка виконується за допомогою процедури *putpixel*. Змінна *z* задає масштаб – кількість пікселів в одиничному відрізку.

На даному етапі побудови графіка найбільш відповідальним моментом є узгодження точності обчислень з якістю отриманого зображення. З одного боку, навряд чи вдасться отримати значення функції точно рівне нулеві (як це задано рівнянням), а з іншого – при дуже грубому округленні лінії графіків перетворюються на більш або менш широкі смуги, а при збільшенні точності обчислень можуть стати надто тонкими. Нижче наведено текст програми побудови графіка кривої $5x^2 – 6xy + 5y^2 – 16x – 16y – 16 = 0$, а на рис. 2 – результат її виконання.

```
Uses graph,crt;
    var  a, b, z, c:integer; x1, y1:real;
           x, y, xx, yy, xx2, yy2:integer; color, bk:byte;
    function f(x,y:real):real;
        begin f:=5*x*x–6*x*y+5*y*y–16*x–16*y–16; end;
    procedure net;          {побудова координатної сітки}
      var x,y:integer;
      begin
        line(0, –yy2, 0, yy2); outtextxy(–3, –yy2+5,'^ Y');
        line(–xx2, 0, xx2, 0); outtextxy(xx2–15, –3,'>'); outtextxy(xx2–
        15, 10, 'X');
        x:=0; y:=0; setlinestyle(4,$1111,1);
        while x<xx2 do begin line(x, –yy2, x, yy2);
                                 line(–x, –yy2, –x, yy2); x:=x+z end;
        while y<yy2 do begin line(–xx2, y, xx2, y);
                                 line(–xx2, –y, xx2, –y); y:=y+z end;
    end;
begin
    writeln('Введіть кількість пікселів на одиничний відрізок');
    write('z=');readln(z);
    detectgraph(a,b); initgraph(a,b,'c:\bp\bgi');
    color:=blue; bk:=white; setcolor(color); setbkcolor(bk);
    net;
    for x:= –xx2 to xx2 do
        for y:= –yy2 to yy2 do
          begin
            x1:= x/z; y1:= –y/z;
            if trunc(f(x1,y1))=0 then putpixel(x,y,color)
          end;
    repeat until keypressed; closegraph;
end.
```

Для переходу від дійсних значень аргументів до цілочисельних координат графіка використано функцію *Trunc*. Відповідну точку графіка слід будувати, коли trunc*(f(x*1,*y*1*))*=0. Натомісць можна використати умову *abs(f(x*1,*y*1*))*<=0.1, де 0.1 – прийнята похибка обчислень.

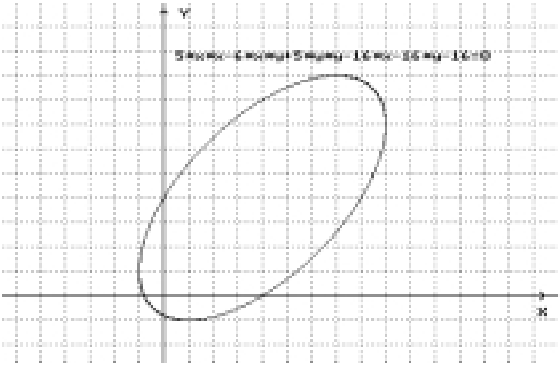


Рис. 2

Для завдань 2, 3 та 4 з варіанта 1 отримаються графіки, показані на рис. 3, 4 та 5 відповідно.

Захист програми передбачає обґрунтування та роз’яснення обраного алгоритму побудови графіка, способу масштабування зображення та перетворення екранної системи координат. Студент повинен бути готовим пояснити, які фактори впливають на якість зображення, повинен знати призначення та особливості застосування використаних у програмі процедур та функцій.

Рис. 3.

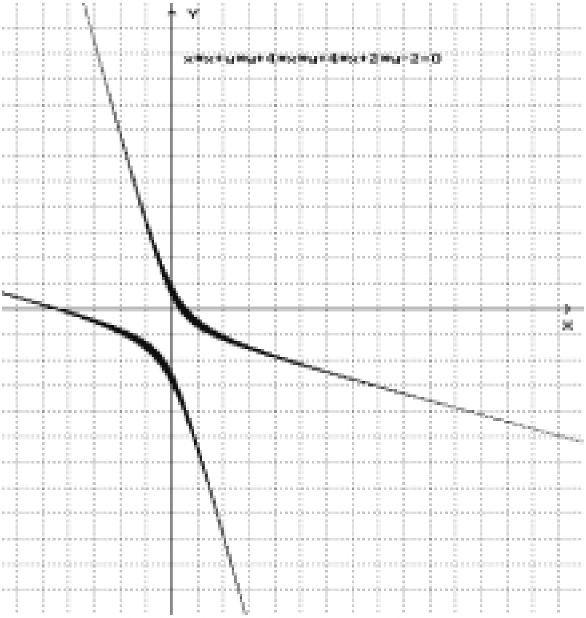


Рис. 4.

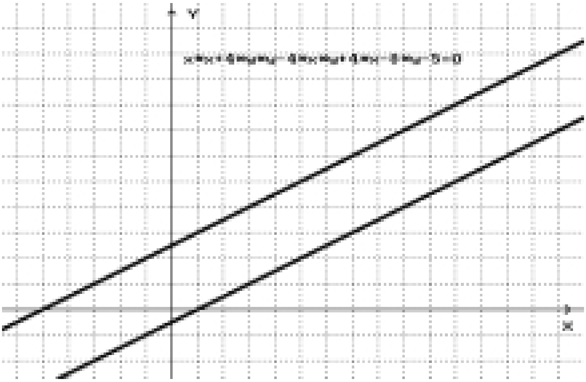


Рис. 5.

Творча співпраця викладачів різних навчальних предметів дозволяє при організації самостійної роботи студентів з одного боку, враховувати зміст споріднених дисциплін, які вивчалися раніше, з іншого – орієнтує на матеріал, який буде вивчатися далі.

Література.

1. Халецька З., Лупан І. Індивідуальні завдання з алгебри, геометрії та програмування // Наукові записки. – Випуск 46. Серія: Педагогічні науки. – Кіровоград: РВЦ КДПУ ім. В.Винниченка. – 2002. – С. 191-194.
2. Ізюмченко Л.В., Лупан І.В., Халецька З.П. Інтегровані завдання з дисциплін алгебра і геометрія та програмування // Комп’ютери в навчальному процесі: Матеріали 2-ої Всеукр. наук.-практ. конф. – Умань: Алмі, 2002. – С. 27-28.
3. Авраменко О.В., Шевченко Н.Г. Використання систем символьних обчислень при дослідженні функцій на неперервність // Сучасні педагогічні технології у вищих закладах освіти: Матеріали Всеукр. наук.-метод. конф. – Ніжин, 2001, ч.2. – С. 57-61.
4. Иванова Г.С. Основы программирования: Учебник для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. –392 с.

ОСОБЛИВОСТІ НАУКОВО-МЕТОДИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ СТУДЕНТІВ В УМОВАХ ЕКОНОМІЧНОЇ ПЕРЕБУДОВИ

Г.А. Малахай
м. Кривий Ріг, Криворізький економічний інститут
Київського національного економічного університету

Соціальна перебудова нашої країни обумовлює необхідність ґрунтовних змін в системі вищої освіти. Для того, щоб ринкові відносини з їх специфічними особливостями стали не лише зрозумілими молодому поколінню, а і стали звичними, закономірними та керованими необхідно навчати молодь мислити категоріями нових економічних відносин відповідно їх вікових особливостей засобами, які забезпечують фундаментальність знань. Досягти цієї мети можливо лише тоді, коли грамотно на певному науковому рівні, послідовно, систематично і системно проводити лінію на економізацією навчального процесу (як в середній школі так і в вищій школі) з опорою на реальні можливості і специфіку кожної навчальної дисципліни. Саме така суспільно обумовлена потреба в перегляді основ вищої освіти закономірно сприяє розформалізації змісту, перш за все, дисциплін математичного циклу. А щоб це можливо було зробити, потрібна чітко визначитися у понятійному взаємозв'язку цих дисциплін та певних аспектів економічних закономірностей.

Вище сказане і обумовлює необхідність перегляду напрямків науково-методичної підготовки майбутніх вчителів математики. Для здійснення цього є різні шляхи. Один з них, на нашу думку, практично здійснений в межах вузівської математичної підготовки, а саме, знайомство їх зі змістом певної системи понять та їх особливостей як характеристики економічних закономірностей – спецкурс "Функціональні залежності в економічних процесах на прикладі мікроекономіки". Саме такий спецкурс дає можливість озброїти студентів певною системою знань про математичні моделі в економіці. Це дає можливість в майбутній роботі на певному науковому рівні навчати учнів розумінню економічних законів через розв'язання задач практично-економічного змісту.

Для того, щоб дати студентам певну систему економічних знань необхідно вибрати певну базисну дисципліну. Такою, на наш погляд, може бути мікроекономіка.

Мікроекономіка (від грецького “мікро” – маленький) розглядає економічні явища (виробництво, пропозиція, попит, споживання та інші) у світлі законів господарської діяльності первісних осередків економіки – фірм, споживачів, найманих працівників, власників капіталу, землевласників, окремих підприємців. Вона пояснює як і чому приймаються економічні рішення на рівні цих осередків.

Мікроекономіка вивчає відношення між підприємцями і найманими працівниками, між самими підприємцями (конкуренція), а також між продавцями і покупцями.

Усі ці відношення реалізуються через ціни на фактори виробництва та економічні блага.

Мікроекономіка допомагає зрозуміти закономірності розвитку тієї чи іншої галузі виробництва і сфери послуг, те, як взаємодіють між собою виробники та споживачі на ринках окремих товарів.

Мікроекономіка формує і пояснює цілий ряд законів: рідкість ресурсів та благ; попиту і пропозиції; спадання граничної корисності, спадання прибутку в залежності від факторів виробництва.

Усі ці знання необхідні практично кожній людині для розуміння складного світу господарських відносин між людьми, для формування економічного мислення.

В мікроекономіці особлива увага приділяється інструментам економічного аналізу, без оволодіння якими доволі важко розібратися у різноманітних наукових висновках та впроваджувати їх із користю для себе.

Основним з таких інструментів є математичне моделювання економічних явищ та процесів. Модель є спрощеним, хоча в той же час і достатнє багатостороннім, зображенням економічної дійсності. З технічної точки зору математична модель описує функціонування тієї чи іншої економічної системи з допомогою алгебраїчних рівнянь, що виражають відношення, які знаходяться між підлягаючими вимірюванню та які вважаються важливими економічними величинами для даної системи. Економісти використовують моделі двох типів:

– оптимізаційній, що описують окремих економічних агентів (споживачів, фірм);

– рівноважні, що характеризують взаємовідносини між суб'єктами ринкових відносин.

Використання традиційних економічних моделей (оптимізаційних, рівноважних), які лише принципово передають математичну сутність тієї чи іншої економічної закономірності, дасть можливість більш суттєво відтворити певний процес без перевантаження математичними викладками. Використання в економіці простих математичних моделей, представлених функціональними залежностями між компонентами економічних явищ, робить їх прозорими і цікавими для студентів математичних спеціальностей.

В основу спецкурсу були взяті моделі системи характеристик мікроекономічних процесів: крива виробничих можливостей, функція і закон попиту, функція і закон пропозиція, ринкова рівновага, еластичність, корисність блага, крива байдужості і бюджетна лінія.

Крива виробничих можливостей. Графічно ця характеристика наближено трансформується відрізком графіка обернено пропорційної залежності відносно певної системи координат, а саме, при фіксованій потужності розглядається проблема виробництва при наймі двох видів продукції. "Крива" розбиває площину можливостей на три області – недовикористання можливостей (під графіком), неможливість виробництва (над графіком), можливе виробництво (точки графіка). Крива виробничих можливостей дає характеристику трьом виробничим станам підприємства і не є числовою характеристикою співвідношення виробництва.

Функція і закон попиту. В умовах ринку бажання споживача трансформується в нове поняття – попит.

Функція попиту – це взаємозв'язок між бажанням мати товар (попит на товар) і факторами, що його визначають. Загальна функція попиту, може бути визначена таким чином:

$$Q_D = f(P,\ I,\ T,\ N),$$

де D – попит; P – ціна товару; I – дохід; T – смаки споживачів; N – число покупців товару.

Маємо яскравий приклад функції багатьох змінних. При введенні поняття "частині похідні" виникає досить складна ситуація в навчанні студентів “працювати” лише з одною з багатьох змінних, не зважаючи уваги на інші. Ця процедура легко пояснюється економічною ситуацією переходу від функції багатьох змінних $Q_D = f(P,\ I,\ T,\ N)$ до функції однієї змінної $Q_D = f(P)$.

Тепер припустимо, що усі фактори, крім ціни товару P, незмінні. Тоді Q_D буде залежати від ціни P (введення функції однієї змінної):

$$Q_D = f(P)$$

Між ціню товару P і його обсягом Q_D, який бажає придбати споживач, існує наступна залежність: чим нижча ціна товару P, тим більший обсяг попиту Q_D, і навпаки, із збільшенням ціни кількість тих, хто має можливість придбати товар, буде зменшуватись. Бачимо, що між P і Q_D існує зв’язок, що виражається спадною функцією. Графічно цю залежність подається відрізком графіка спадної функції (частиною вітки гіперболи, або відрізка прямої з від’ємним кутовим коефіцієнтом.

Функція і закон пропозиції. Подивимось на ринок зі сторони продавця, який представляє іншу сторону ринкових відносин – пропозицію. Пропозиція на ринку – результат виробництва і відображає бажання продати товар. Введемо функцію залежності пропозиції від ціни.

$$Q_S = f(P)$$

де Q_S – обсяг пропозиції;

S – пропозиція;

P – ціна.

Між ціною товару P і його пропонованим обсягом Q_S наближено існує пряма функціональна залежність: тобто із збільшенням ціни Р відповідно і збільшиться і величина пропозиції; а із зменшенням ціни – зменшиться також і пропозиція. Звідси випливає і закон пропозиції: обсяг пропозиції збільшується при рості ціни і зменшується при її зниженні. Графічно залежність пропозиції від ціни може бути представлена відрізком прямої з додатнім кутовим коефіцієнтом, або відрізком “гіперболи” з від’ємним коефіцієнтом.

Об’єднуючи графічне представлення функції попиту і функції пропозиції отримаємо графік функції, для якої має зміст поняття „ліво- і правосторонні” границі в околі деякої точки (рис. 1).

Ріст ціни P (рис. 1.) не може відбуватися нескінченно, бо настає момент, коли покупець неспроможний покупати товар. Відбувається насичення товаром ринку, попит на товар падає – функція пропозиції перестає зростати.

Еластичність. Цікавою з точки зору математичної суті є така характеристика процесу реалізації продукції, як зміна попиту і пропозиції при зміні ціни P.

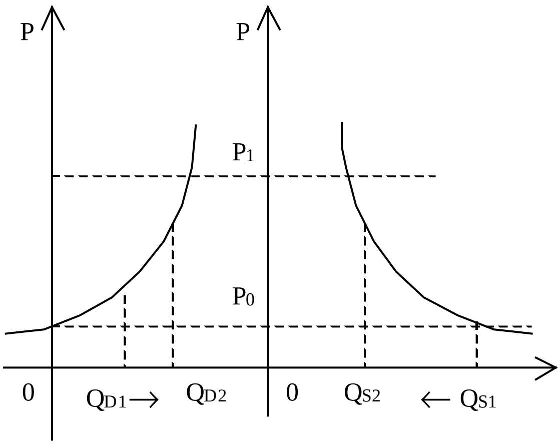


Рис.1. Графік функції, яка поєднує закон попиту та пропозиції

Для розв’язання цієї проблеми користуються поняттям “еластичність”, математична сутність якого полягає в оцінці відношення змін характеристик. Коефіцієнт еластичності є результат відношення відсотку зміни величини попиту, або пропозиції, до процентів зміни ціни товару.

Розглянемо це поняття на прикладі еластичності попиту по ціні. Еластичність попиту по ціні називається коефіцієнтом впливу зміни ціни на зміну кількості продукції, на яку існує попит. Отже, це є відношення зміни обсягів попиту ΔQ_P до зміни ціни ΔP_D, або це відношення приросту функції однієї змінної $\Delta f(P)$ до приросту аргументу ΔP, а це с точки зору математичного аналізу є середня швидкість зміни обсягу попиту $Q_{D.}$

В економіці розглядають E_d-точку від еластичності.

$$E_d = \frac{\text{Зміна кількості продукції}}{\text{Початкова кількість продукції}} : \frac{\text{зміна ціни}}{\text{початкова ціна}}$$

тобто:

$$E_d = \frac{\Delta Q}{Q} : \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta Q}{Q} \cdot \frac{P}{\Delta P} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta P},$$

в результаті маємо точкову еластичність, яка має місце при $\Delta P \to 0$.

$$E_d = \frac{\Delta Q}{\Delta P}; \quad \Delta P \to 0 \quad .$$

Така величина в математиці називається миттєвою швидкістю зміни, бо маємо справу з локальним максимумом, або локальним мінімумом функцій Q в достатньо малому оточенні ціни P.

Корисність блага. Отримувати будьяке благо – це прагнення споживача. Під благом розуміється усе те, що потрібно для максимального задоволення потреб споживача.

В економіці має місце перший закон Гассена:

При послідовному зростанні вживання одиниць блага, корисність кожної додаткової одиниці його зменшується.

Згідно цього закону функція корисності має точку насиченості, що відповідає локальному максимуму цієї функції. В зв'язку з цим розпізнають загальну и граничну корисність блага.

Крива байдужості і бюджетна лінія. Для моделювання споживчого вибору використовуються криві байдужості та бюджетні прямі. Криві байдужості (рівно корисний контур) дозволяють описати поведінку споживача з точки зору переваги того чи іншого блага. Криві байдужості – це множина точок, кожна з яких представляє собою такий набір з двох товарів, який для споживача байдужий: користь кожного з них однакова. Прийнято криву байдужості зображати віткою "гіперболи".

Якщо крива байдужості дає картину "бажання споживача", то бюджетна лінія дає картину "можливості споживача": не кожний товарний набір йому доступний і він обмежений в своїх можливостях саме це фіксує бюджетна функція:

$$I = P_x \cdot X + P_y \cdot Y,$$

де I – місячний дохід споживача, який він витрачає на придбання двох товарів X та Y;

P_X та P_Y – ціни товарів X та Y відповідно.

Маємо лінійну функцію I двох змінних X та Y, яка графічно представляється прямою лінією.

Розглядання ситуацій взаємного розміщення кривої байдужості та бюджетної лінії дає можливість продемонструвати ситуацію, одного з важливих понять математичного аналізу: дотична до кривої в даній точці є граничне положення січної.

Проведений аналіз змісту понять, які є основними в мікроекономіці свідчать про те, що спецкурс "Функціональні залежності в економічних процесах на прикладі мікроекономіки" сприяє формуванню нових науково-методичних аспектів підготовки студентів, бо використання властивостей різних функцій з економічним підтекстом дає можливість відчути реальний вихід математичних понять в практику оцінки ринкових відносин і тим самим виховує особливий математичний стиль мислення – аналітико-економічний, що повинен бути притаманним кожній людині, яка існує і працює в ринковій економіці.

Література

1. Винокуров Е.Ф., Винокурова Н.А. Экономика в задачах. – М.: Начала-прес, 1995.
2. Ивашковский С.М. Микроэкономика. – М.: Дело, 2001.
3. Макконел К.Р. Экономікс: Принципи, проблема та політика. – К.: Хагар, 2000.
4. Мицкевич А.А. Сборник задач по экономике, 2-е изд. – М.: Школа-Пресс, 1999.

ПРО ОРГАНІЗАЦІЮ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ МОЛОДШИХ КУРСІВ

К.І. Маслова
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

У зв’язку з реформуванням системи вищої освіти в Україні в якості головної вимоги підкреслюється освоєння випускниками вузів методики самостійної, творчої науково-практичної діяльності. Основним результатом діяльності освітнього закладу повинна стати не система знань, умінь та навичок сама по собі, а розвиток здібностей до самостійного здобування знань, вміння навчатися самому. Якщо проаналізувати навчальні плани, наприклад, підготовки вчителів математики та основ інформатики, то можна помітити, що порівняно з 90-ми роками обсяг матеріалу, що виноситься на самостійне опрацювання збільшився до 50%. Тому проблема самостійної роботи студентів при вивченні математичних дисциплін набуває все більшої актуальності.

Особливу увагу слід звернути на організацію самостійної роботи студентів на молодших курсах. Як показує досвід саме студенти 1-х, 2-х курсів мають більш низький рівень успішності і найбільш високий рівень “відсіву”.

Одним з найбільш важливих факторів ефективності навчання будь-якого навчального предмету є рівень умінь студентів самостійно навчатися, який залежить від рівня оволодіння ними загальнонавчальними уміннями та навичками. Загальнонавчальні уміння й навички дають можливість найбільш раціонально навчатися по всім дисциплінам, здійснювати більш ефективно всі види діяльності, що входять до навчального процесу. Тому ключовим моментом при організації самостійної роботи студентів, стає розв’язання проблеми формування загальнонавчальних умінь. А це означає перехід від простої обізнаності, частинних вмінь і конкретних навичок, від інформації як предмета запам’ятання – до школи мислення і розвитку здібностей.

Очевидно, що особлива роль у формуванні загальнонавчальних умінь приділяється початковій школі, хоча процес формування навчальних умінь і навичок є тривалим, і, як правило, займає не один рік, а багато з цих умінь формуються й удосконалюються на протязі всього життя. До того ж, як показує практика, більшість студентів молодших курсів не мають чітко сформованих навчальних умінь. Це пов'язано з тим, що багато вчителів вважають, що спеціально, цілеспрямовано навчати загальнонавчальних вмінь непотрібно: в процесі навчання учні самі набувають ці уміння. Саме тому студенти молодших курсів мають значні труднощі при оволодінні навчальним матеріалом.

Особливу увагу, на наш погляд, слід звернути на загальноорганізаційні уміння. Саме цьому типу вмінь приділяється найменше уваги в школі, а за рахунок їх сформованості студенти можуть уникати значних труднощів при самостійному оволодінні знаннями. Основною проблемою при самостійному здобуванні знань є проблема постановки задачі діяльності та раціонального її планування. Адже не секрет, що більшість студентів не планує свою діяльність і відкладає виконання самостійної роботи на кінець семестру, а потім починає робити все відразу і за браком часу матеріал вивчається формально, відсутнє його глибоке розуміння, логічна стрункість та системність.

Щодо інших типів загальнонавчальних умінь, то саме на молодших курсах є можливість удосконалити деякі з них. На наш погляд, все ж таки необхідно сприяти формуванню загальнонавчальних умінь і у вищих навчальних закладах. Адже ефективність навчальної роботи студентів залежить від розвитку у них здібностей до навчання, здібності розумно і правильно навчатися.

У зв'язку з вище сказаним мета навчальної дисципліни полягає не тільки у формуванні спеціальних знань й умінь, а у формуванні на їх основі загальнонавчальних умінь та навичок.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДУЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ НА КАФЕДРЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Л.А. Маслова, О.А. Сухинина
г. Алчевск, Донбасский горно-металлургический институт

Социальные условия развития рыночных отношений, научно-технический прогресс, принципиальные изменения в характере профессиональной деятельности требуют перевода традиционной системы подготовки инженерных кадров на качественно новую основу. В связи с этим перед преподавателями математических дисциплин в вузе стоит непростая задача: и «возвести» фундамент математических знаний, и способствовать воспитанию специалиста с высоким творческим потенциалом и культурой мышления. Поэтому назрела потребность в использовании эффективных форм и методов обучения, предполагающих систематическую самостоятельную работу над дисциплиной.

Эффективной системой комплексной проверки знаний, умений и навыков, позволяющей управлять познавательной деятельностью студентов есть модульно-рейтинговая система контроля знаний, используемая в ДГМИ более десяти лет.

Данная система позволяет управлять самостоятельной работой студентов при изучении курса высшей математики и контролировать её.

В основу рейтинговой системы положена стобальная шкала оценок, отводимых на семестр. На первой же лекции преподаватель знакомит студентов с планом предстоящей им работы, списком литературы по данной дисциплине и соответствующими этой системе требованиями.

На кафедре высшей математики для каждой специальности согласно рабочему плану и количеству отводимых на дисциплину часов, разработаны инструкции по рейтинговому контролю на основании институтского «Положения о рейтинговой системе контроля знаний студентов», утвержденного на ученом совете.

Для удобства оценки работы студента в течение семестра изучаемая дисциплина разбивается на модули. Каждый модуль включает ряд тем, связанных между собой смысловым содержанием. Внутри модуля в баллах оцениваются все основные элементы учебной работы студентов (выполнение и защита индивидуальных заданий, самостоятельные и контрольные работы, коллоквиумы, рефераты и т.д.)

Сумма баллов, отведенная на дисциплину, распределяется между модулями в зависимости от их значимости, а затем между элементами модуля.

Студент в течение семестра согласно графика сдает определенные разделы (модули) и набирает баллы.

Максимальное количество баллов, которое может набрать студент в течение семестра не должно превышать 100 баллов в рамках программы данного курса.

Студент, набравший 60 и более баллов, освобождается от сдачи экзамена, и это количество баллов выставляется в зачетную книжку и экзаменационную ведомость. В случае, если студента не удовлетворяет количество набранных в семестре баллов, он имеет право повысить свой рейтинг путем сдачи экзамена в сессию. При этом, набранные в семестре баллы не учитываются [1].

Приведем пример инструкции для одной из металлургических специальностей, разработанной на нашей кафедре.

Инструкция по рейтинговому контролю по дисциплине «Высшая математика»

Курс: первый

Семестр: первый

Сумма баллов, полученных студентами в течение семестра, складывается из следующих элементов (с указанием максимального и минимального количества баллов, выделяемых для оценки модуля).

Модуль 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.

Самостоятельная работа №1	3 б.-5 б. (3-я неделя)
Контрольная работа №1	9 б.-15 б. (6-я неделя)
Коллоквиум №1	12 б.-20 б. (7-я неделя)
Самостоятельная работа №2	3 б.-5 б. (8-я неделя)
ВСЕГО за первый модуль	27 б.-45 б. (восемь недель/)

Модуль 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Контрольная работа №2	9 б.-15 б. (11-я неделя)
Самостоятельная работа №3	3 б.-5 б. (13-я неделя)
Коллоквиум №2	12 б.-20 б. (15-я неделя)
Итоговая контрольная работа	9 б.-15 б. (16-я неделя)
ВСЕГО за второй модуль	33 б.-55 б. (восемь недель)
ИТОГО за семестр	60 б.-100 б.

Итак, в чем же преимущества модульно-рейтинговой системы от традиционной? На наш взгляд, это:

1) учебная нагрузка и контроль равномерно распределены на семестр, что снимает стрессовую ситуацию, возникающую на экзамене;

2) приведенная выше инструкция позволяет планировать самостоятельную работу студента на семестр;

3) систематическая работа в семестре благотворно влияет на процесс обучения и усвоения знаний и приучает к дисциплине;

4) рейтинговая система позволяет индивидуализировать обучение, так как карточки контроля составлены по уровням и содержат такие задания, которые позволяют среднему и слабому студенту набирать 60-80% от общего количества баллов, отводимых на контрольную работу. Остальные задания требуют более глубокой и вдумчивой проработки изучаемого материала;

5) рейтинг позволяет более дифференцированно отразить как сам процесс обучения, так и способности обучаемых, что позволяет преподавателю на ранней стадии обучения выявить способных студентов, увлечь их нестандартными заданиями с целью повышения их математической культуры, углубления знаний в фундаментальных вопросах теории, а также в той или иной сфере приложения математики;

6) модульно-рейтинговая система может служить надежным адекватным критерием отбора кандидатов на вторую ступень высшего образования.

Для подтверждения эффективности работы рейтинговой системы контроля приведем данные исследований лаборатории квалиметрии по динамике изменений процента качества успеваемости студентов по дисциплине «Высшая математика» от сессии к сессии.

Семестры	Процент качества, %
I	48
II	58
III	66

К успевающим относятся студенты, получившие более 71 балла. Другим примером, подтверждающим действенность методики, служит показатель изменения среднего балла успеваемости по кафедре высшей математики для шести факультетов нашего института. Так, в первом семестре 1999-2000 учебного года средний балл составил 68,9 б., а в летнюю – 74,3 б.

Итак, инновации в системе контроля знаний порождают обновление методики преподавания математики, что свидетельствует о прогрессивном характере модульно-рейтинговой системы. Её эффективность обуславливается и незаменимым дидактическим средством, активизирующим творческие способности студентов – проблемным обучением, применением целой системы тестов, включающих задания различных типов и уровня сложности.

Литература.

1. Дорофеев В.Н. и др. Использование квалиметрии для оценивания деятельности студентов в техническом вузе: Учеб.-метод. пособие / В.Н. Дорофеев, С.Н. Петрушов, Л.В. Шевцов, О.А. Сухинина. – Алчевск: ДГМИ, 2002. –108 с.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Л.В. Мигунова, А.Е. Басманов
г. Харьков, Академия пожарной безопасности Украины
fd@apbu.kharkiv.com

Курс высшей математики является фундаментальным в овладении инженерной профессией. Задача преподавателя максимально развить математическое мышление, творческий подход к решению задач, самостоятельную работу со специальной литературой.

При изучении различных разделов математики, особенно прикладных, объединяющим аппаратом является матричная алгебра, включающая вектор-столбцы (строки), на которые распространяются арифметические операции над матрицами. Изометрические свойства векторов, углы между ними, ортогональность, легко переносятся на соответствующие свойства матриц, рассматриваемых как системы векторов. Такие основополагающие понятия как базис, ранг системы векторов, идентифицируются с понятиями базиса и минора матрицы. Практическим аппаратом, применяющим эти понятия, являются системы линейных уравнений, для решения которых целесообразно применять метод Гаусса (чаще прямой ход метода Гаусса, приводящий матрицу в трапециевидную форму). Он прост в практическом применении, позволяет работать с определенными и неопределенными системами любой конечной размерности, находить частные, базисные, опорные решения, т.е. подготовить студента к последующему восприятию курсов «Исследование операций», «Основы системного анализа».

Такой синтез матриц и векторов позволяет уже на первых порах определить структуру общего решения системы линейных неоднородных уравнений, обеспечив преемственность методики при последующем изложении систем линейных дифференциальных уравнений. Достоинством методики является возможность быстро ознакомить студентов с методами исследования квадратичных форм и их линейных преобразований, методикой исследования систем линейных неравенств. Геометрия пространств R^2

и R^3 излагается как приложение векторов.

Раздел математического анализа целесообразно излагать с широким применением символики математической логики. Удобно первоначально ввести понятие ε-окрестности точки пространства, используя понятие расстояния, дать алгебраическую запись на прямой и плоскости, геометрическую интерпретацию способов приближения к точке. Определить ε-окрестность бесконечной точки, односторонние окрестности на прямой. Это упростит представление о пределах. Символы бесконечно малой функции, главной части функции упрощают одновременное изложение производной и дифференциала. Введение обозначения производной $\dfrac{dy}{dx}$ и его последующее применение при параметрическом, неявном, повторном дифференцированиях.

Функция нескольких переменных излагается автоматически, задав точку плоскости и ее окрестность, подчеркнув, что производные теперь можно строить в определенных направлениях. Определив частные производные и дифференциалы, записать производные по направлению. Напомнив запись скалярного произведения, ввести градиент функции и исследовать скорость изменения функции в направлении градиента. Соответственно обобщается понятие экстремума функции двух переменных, а достаточное условие исследуется путем представления второго дифференциала в виде квадратичной формы (ранее упоминаемой). В качестве приложения экстремума вводится метод наименьших квадратов, позволяющий исследовать целый ряд прикладных задач.

При изложении интегрального исчисления особо уделяется внимание общей схеме построения интегральных сумм при решении геометрических и физических задач, их интегральному переходу.

Рассматривая ряды Фурье, обобщить понятие ортогональности функций, указав на связь с ортогональностью векторов и формальной записью операции перехода. При переходу к интегралу Фурье обратить внимание на построение интегральной суммы. Сделать запись преобразования Фурье, подчеркнув, что частный случай этого преобразования (преобразование Лапласа) имеет широкое применение в технических исследованиях. Показать применение рядов Фурье и интеграла Фурье при решении уравнения теплопроводности.

Помимо практических занятий, выдаются индивидуальные задания прикладной направленности.

Изложенная методика построения курса высшей математики позволяет ускоренно изложить основные идеи и методы математических исследований, дать ориентацию на изучение новых современных прикладных методов, привлекать наиболее сильных студентов.

ВИКОРИСТАННЯ GRAN-3D НА УРОКАХ СТЕРЕОМЕТРІЇ

І.А. Мороз, Н.І. Зеленкова
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Під час вивчення стереометрії в учнів виникають труднощі, пов'язані з правильним просторовим уявленням геометричних фігур і тіл обертання в, з розумінням взаємозв'язків між фігурами в просторових конфігураціях, з усвідомленням можливих перетинів тривимірних об'єктів площинами та з фігурами, що утворилися внаслідок цього. На допомогу допитливому розуму та просторовій уяві учнів приходить комп'ютерна техніка з педагогічно доцільним програмним забезпеченням вітчизняного виробництва. Йдеться про новий програмний продукт "GRAN-3D".

Використовуючи цю програму, учні обчислюють об'єми просторових геометричних фігур та різноманітних тіл обертання, а також площі їх поверхонь, не витрачаючи часу на виведення формул, на виконання обчислень, на перевірку істинності одержаних значень. Навчальний час, звільнений завдяки автоматизованим процедурам обчислень і побудов, що виконуються за допомогою програми "GRAN-3D" методично доцільно використати для проведення експериментальних досліджень побудованих об'єктів, для складання власних задач з досліджуваними фігурами та їхніми елементами.

Спробуємо розв'язати деяку стереометричну задачу двома способами: аналітично і за допомогою ППЗ GRAN-3D.

Задача: У правильній шестикутній призмі, бічні грані якої – квадрати, проведено площину через сторону нижньої основи та протилежну їй сторону верхньої основи. Сторона основи дорівнює 4. Знайти площу побудованого перерізу (рис. 1).

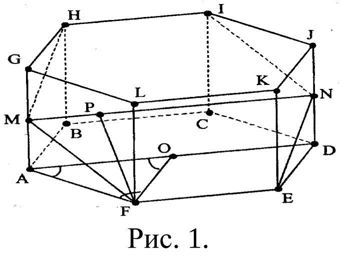


Рис. 1.

Спершу розв’яжемо задачу "класичним" аналітичним способом. Розглянемо малюнок. Очевидно, що площа утвореного перерізу FENIHM складатиметься із сум площ двох трапецій: MNEF та MNIH. Оскільки означені трапеції рівні (FE=HI за умовою, MN – спільна, MF=EN=MH=NI (бо AM=GM, DN=JN, AF-ED=GH=IJ)), то площа перерізу рівна подвоєній площі трапеції MNEF.

$$S_{\text{трапеції}} = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

де *a*, *b* – довжини основ, *h* – висота трапеції.

Довжина однієї з основ трапеції MNEF нам відома (за умовою FE=4). Залишилось знайти довжину основи MN та висоту трапеції FP.

Оскільки MN=AD (бо MNDA - прямокутник), а AD=2AO (O – центр кола, описаного навколо основи), то MN=2AO. З рівностороннього трикутника AFO (всі кути рівні) маємо: AF=AO. Отже, MN=S.

Залишилось знайти висоту FP.

Розглянемо прямокутній трикутник FMP:

$$MP = \frac{MN - FE}{2} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$MF = \sqrt{AM^2 + AF^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2 \cdot \sqrt{5}$$

(з прямокутного трикутника MAF).

Таким чином, $FP = \sqrt{MF^2 - MP^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4$. Висоту знайдено.

Обчислимо площу трапеції MNEF:

$$S = \frac{MN + EF}{2} \cdot FP = \frac{8+4}{2} \cdot 4 = 24 \text{ кв.од.}$$

Отже, площа перерізу FENIHM рівна 48 кв.од. На розв’язання задачі (відшукання шляху розв’язання, виконання малюнка, обчислення) затрачено близько 15 хвилин.

А тепер розв’яжемо цю ж задачу з використанням ПЕОМ за допомогою ППЗ GRAN-3D (вважатимемо, що GRAN-3D вже запущено на виконання і на екрані з’явилося головне вікно програми).

Слід зазначити, що розв’язання будь-якої задачі за допомогою ППЗ GRAN-3D зводиться до створення відповідних стереометричних об’єктів та виконання операцій, що фігурують в умові задачі.

Повернемося до розв’язання задачі. По-перше, слід створити об’єкт – правильну шестикутну призму. Це можна зробити кількома способами. Можна скористатися конструктором просторових об’єктів, для активізації якого необхідно встановити тип створюваного об’єкту ("Многогранник", оскільки призма є многогранником) у перемикачеві типу об’єкту у правій частині головного вікна та звернутись до послуги головного меню *Об’єкт\ Створити*. У вікні "Конструювання просторового об’єкту") на вкладинці "Многогранник" слід вручну задати кількість та координати вершин призми, а також встановити кількість трикутних граней об’єкту та вибрати по три точки у кожній грані.

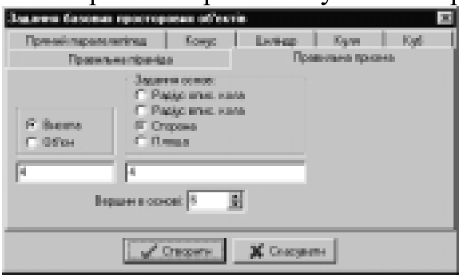


Рис. 2.

Але створення призми у такий спосіб не є ефективним, оскільки треба щонайменше знати просторові координати вершин призми. Тому краще скористатися послугою головного меню програми *Об’єкт/ Створити базовий об’єкт*, що активізує вікно "Задання базових стереометричних об’єктів". Це вікно містить вкладинки.. Користувачеві слід лише звернутися до вкладинки з назвою, що відповідає типу створюваного об’єкту (у нашому випадку це вкладинка "Пряма правильна призма"), та вказати певні параметри об’єкту, після чого програма автоматично обчислить всі інші параметри, необхідні для створення об’єкту (кількість та координати вершин, грані тощо). Оскільки відомі кількість кутів при основі, висота та сторона основи призми (за умовою вони рівні відповідно 6, 4 та 4), слід ввести число 6 у рядок введення біля напису "Кутів при основі:", ввести число 4 у рядок введення під лівим перемикачем та встановивши перемикач способу задання основ у положення "Сторона", ввести довжину сторони основи (також число 4) у рядок введення під цим перемикачем.(рис. 2) Після натиснення кнопки "Створити" з'явиться вікно "Конструювання просторового об'єкту" з вкладинкою "Многогранник", де є змога при потребі відкоригувати параметри. Змінимо назву об'єкту на "Шестикутна призма" (ця назва виводитиметься у переліку об'єктів) та встановимо синій колір об'єкту (цим кольором буде зафарбовано об'єкт у полі зображення). Після "натиснення" кнопки "Ok" об'єкт буде створено, тобто назва об'єкту з'явиться у переліку об'єктів, а його зображення – у полі зображення головного вікна програми(рис. 3). Індекс біля назв вершин призми вказує на номер об'єкту у переліку об'єктів.

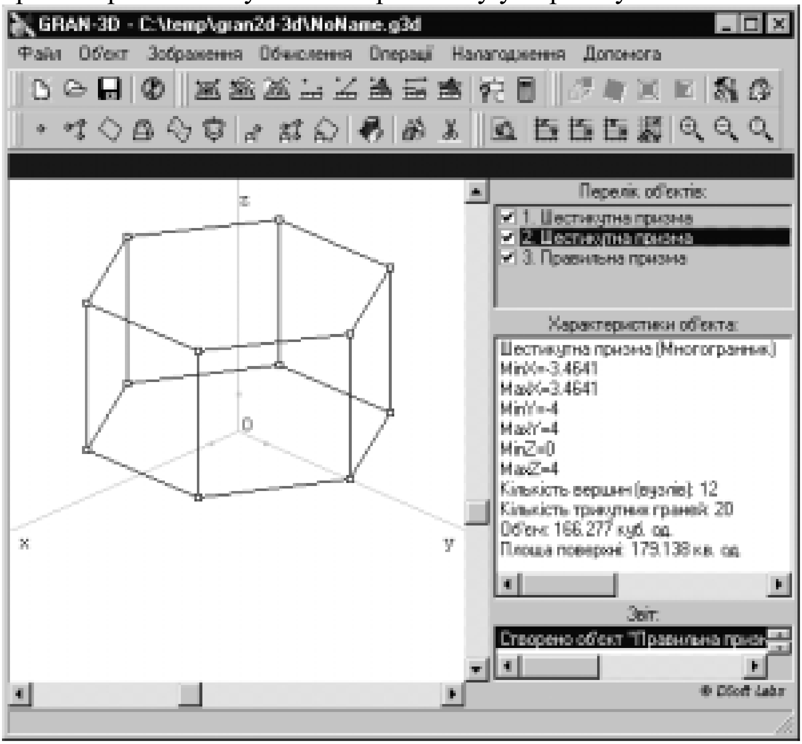


Рис. 3.

Далі необхідно створити другий об'єкт – площину перерізу. Доцільно скористатися послугою головного меню програми *Об'єкт\Створити з екрану,* для чого необхідно встановити тип створюваного об’єкту у перемикачеві типу об’єкту на значенні "Площина" та звернутися до відповідної послуги. Після виконання зазначених операцій необхідно задати три точки площини.. У полі назви об’єкту введемо "*Площина перерізу*".

Оскільки обидва об’єкти, що фігурують в умові задачі, задано, залишилося лише виконати операцію перерізу призми площиною. Для цього слід звернутись до послуги програми *Операції\Виконати переріз*. Далі за відповідним запитом програми необхідно вказати многогранник, переріз якого має бути виконано. Підводимо вказівник "*мишки*" до будь-якої сторони або вершини призми на зображенні та натискаємо ліву клавішу "*мишки*". Після виконання зазначених операцій буде виконано переріз призми.

Після виконання операції перерізу у полі звіту з’явиться площа отриманого перерізу. Вона рівна 47.999999 кв. од., що майже точно дорівнює значенню, отриманому при розв’язуванні аналітичним шляхом . Але слід зазначити, що на розв’язання задачі за допомогою ППЗ GRAN-3D було затрачено близько 2-х хвилин, тобто задачу було розв’язано набагато швидше і з досить великою точністю. Суттєво відрізняються і шляхи розв’язування. Слід зауважити, що можливості використання розглядуваного програмного засобу GRAN-3D не обмежуються розв’язуванням задач наведеного типу.

Література

1. Жалдак М.І. Проблеми інфороматизації навчального процесу в школі і в вузі. // Сучасна інформаційна технологія в навчальному процесі: Зб. наук. праць: – К.: МНО України; Київ. держ. пед. інститут ім. М.П.Драгоманова, 1991. – С. 3-16.

2. Жалдак М.І. Комп’ютер на уроках математики. – К.: Техніка, 1997. – 304 с.:іл.

3. Жалдак М.І. Нові інформаційні технології навчання геометрії. // Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць /Редкол. – К. :"КОМП’ЮТЕР у ШКОЛІ та СІМ’Ї". – 1998., 231 с.

5. Раков С.А., Горох В.П. Компьютерные зксперименты в геометрии. – Харків: МП Регіональний центр нових інформаційних технологій, 1996. – 176 с.

ЧИСЛОВІ СИСТЕМИ ТА ЇХ ВИВЧЕННЯ В ЗАГАЛЬНООСВІТНІЙ ШКОЛІ

В.Г. Моторіна
м. Харків, Харківський державний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди

Числа. Натуральні числа та дії над ними.

Поняття числа – стрижневе поняття шкільного курсу і служить фундаментом, на якому будується вивчення функцій, тотожних перетворень, рівнянь і т.ін.

В учнів повинно бути уявлення про число як про об'єкт, з котрим можна проводити арифметичні операції.

В шкільному курсі математики ми розглядаємо множини натуральних цілих, раціональних, дійсних і комплексних чисел, які є прикладами кілець і полів, що вивчаються в алгебраїчній науці з єдиної точки зору.

Вчитель, проводячи лінію розвитку поняття числа, додержується принципу розширення множини А до множини В, що визначається такими умовами:

1. А повинна бути під множиною В ($A \subset B$).

2. Операції з елементами із множини А такі ж самі, що й з елементами із множини В, але суть тих операцій, які були тільки в множині А, залишаються незмінними.

3. На множині В повинна виконуватись операція, яка в множині А є нездійсненою або не завжди здійсненою.

4. Розширення В повинно бути мінімальним з усіх розширень множини А і повинно визначуватись однозначно з точністю до ізоморфізму.

Числа мають властивості, які ми виражаємо в поняттях їх рівності, суми і добутку.

Еволюція поняття числа залежить від розвитку понять рівності, суми, добутку. Змінюючи умови рівності, суми і добутку, ми одержуємо нові числа.

Для того, щоб нові числа були рівноправними і узаконеними, необхідно внести означення:

I. 1) Поняття рівності.

2) Поняття "більше" і "менше", тобто установлення кри-

терію порівняння нових чисел між собою і з раніше відомими числами, крім комплексних чисел, для яких поняття “більше” і “менше” не вводяться.

II. Поняття суми.

III. Поняття добутку.

Потрібно показати також, що нові числа підпорядковані всім законам арифметичних дій, які встановлено для вивчаємих раніше чисел.

Схематичний зв’язок понять за темою “Числова система” ілюструє рис. 1.

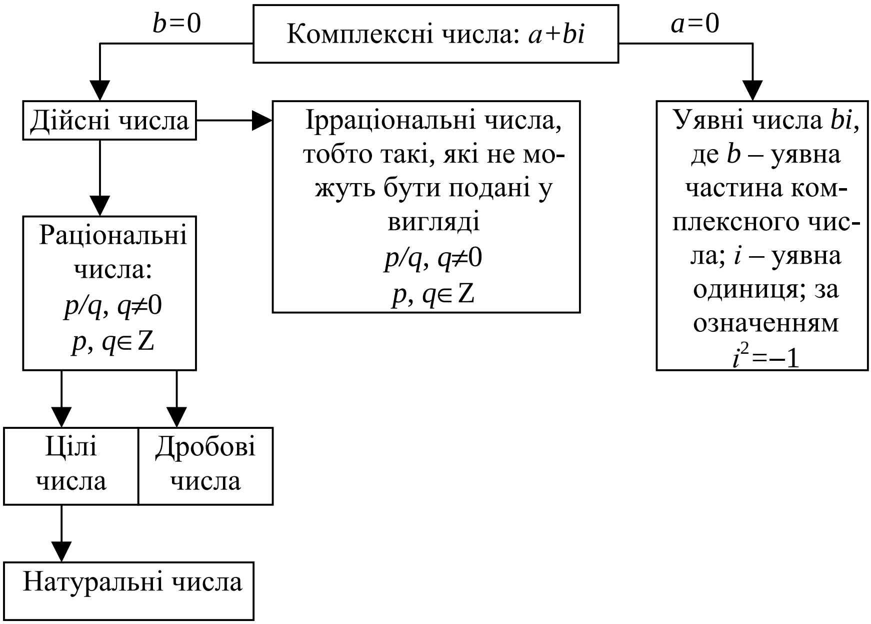


Рис. 1. Числова система.

Властивості числової системи

1. До істотних ознак структурних елементів числової системи належать такі:

а) підпорядкованість законам алгебраїчних операцій;

б) наявність у кожного елемента числової системи модуля, тобто міри, яка позначається символом | |.

Схематичний зв’язок понять за темами “Властивості числової системи та основні поняття арифметики” ілюструє рис. 2.

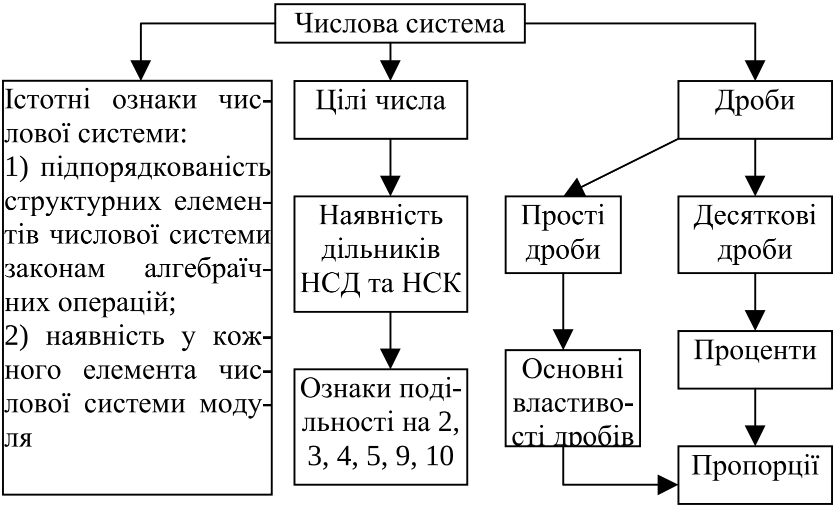


Рис. 2. Властивості числової системи та основні поняття арифметики.

В математиці існує два підходи до побудови числових систем: аксіоматичний і конструктивний. У шкільному курсі математики присутні елементи обох цих підходів.

Натуральні числа і дії над ними

Арифметика – наука про числа – перша складова частина математики; арифметичні знання – основа, на якій будується подальше навчання математиці.

Як відомо, в основі арифметики, як і всякої математичної дисципліни, лежить кілька первинних, неозначуваних понять, для яких дається система аксіом, що встановлює між ними формальне взаємовідношення. Для всякого поняття, що вводиться заново, обов’язковим є точне означення. Найбільш поширеною є система первинних понять і аксіом арифметики натуральних чисел, яку дав італійський математик Пеано. Сучасна система аксіом така:

Первинні поняття

1. Число (натуральне).
2. Одиниця.
3. Наступне число.

Аксіоми

1. Одиниця є число.

2. За кожним числом безпосередньо йде єдине наступне число.

3. Два числа, за якими йде одне й те саме число, рівні між собою.

4. Одиниця не йде ні за яким числом.

5. Якщо будь-яке твердження є правильним для одиниці і коли воно, будучи справедливим для будь-якого числа, є справедливим і для наступного числа, то це твердження є правильним для всякого числа.

У загальноосвітній школі не викладаються аксіоми натуральних чисел, хоч неявно учні ними користуються. У 5–6 класах певна частина нових понять дається учням без означень. Термін "аксіома" не дається.

Вивчення натуральних чисел у 5 класі має на меті:

1) поглибити знання учнів про нумерацію багатоцифрових чисел;
2) розкрити роль нуля як числа;
3) систематизувати відомості про чотири арифметичні дії, зокрема про зв'язок між прямими та оберненими діями;
4) узагальнити знання учнів про закони арифметичних дій і їх застосування.

Розглянемо кожний з цих напрямків окремо.

1) Під нумерацією розуміють спосіб читання (усна нумерація) і записування (письмова) нумерація чисел. Учням краще говорити не про нумерацію, а про читання і записування багатоцифрових чисел.

З питань нумерації учні 5 класу не дістають принципово нових знань порівняно з 4 класом, де вони вже вивчили нумерацію до мільйонів, навчилися читати і записувати числа в цих межах, встановлювати співвідношення між розрядними одиницями, записувати число у вигляді суми розрядних одиниць.

Подальше застосування відомостей у записуванні багатоцифрових чисел вимагає, щоб учні правильно вживали слова "цифра" і "число", уміли читати і записувати будь-яке число в межах мільярдів, розуміли позиційний принцип десяткової нумерації, уміли записувати число як суму розрядних доданків.

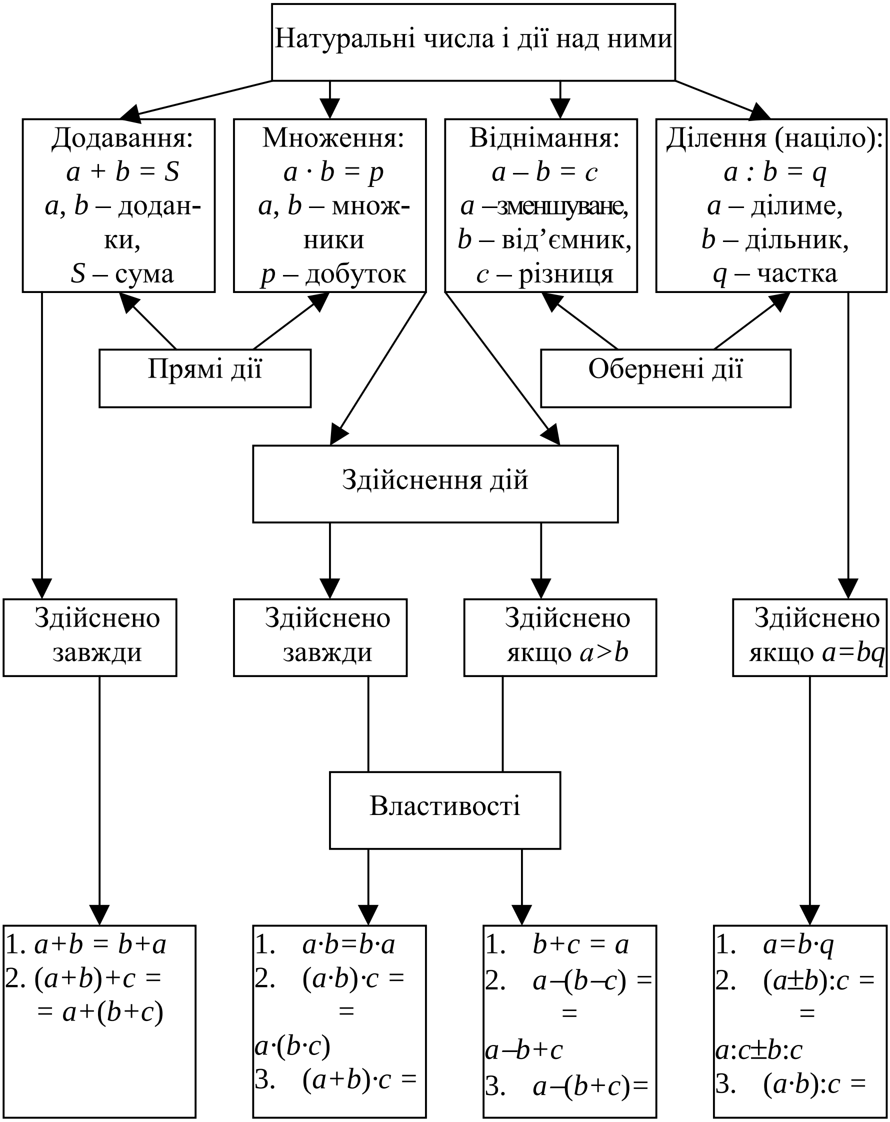


Рис. 3. Натуральні числа і дії над ними.

Найбільше помилок у записуванні багатоцифрових чисел припадає на ті числа, в яких немає одиниць певних розрядів, а то й одиниць цілих класів, бо учні недостатньо усвідомлюють ідею поділу чисел на класи і розряди. Тут не допоможе орієнтація на розряди – заучування номерів розрядів. Головну увагу треба зосередити на класах і добитися, щоб учні добре вміли називати класи, починаючи з класу одиниць і закінчуючи класом мільярдів, і навпаки, починаючи з класу мільярдів і закінчуючи класом одиниць.

2) Питання про роль нуля в початковому навчанні математиці тривалий час було предметом гострих дискусій. Йшлося про те, чи варто в курсі арифметики початкових класів знайомити учнів з нулем як числом, чи обмежитися лише тим, щоб вони знали нуль як цифру, що показує відсутність одиниць певного розряду, тобто лише як показника розряду.

Думку про тлумачення нуля як числа відстоював О.Я. Хінчин. Він підкреслював, що немає підстав протиставляти шкільний курс арифметики його науковій побудові, і наводив такі аргументи:

– уся сучасна наука вважає нуль числом;

– якщо ми не визнаємо нуль числом, то змушені будемо визначити, що різниця (а після введення від'ємних чисел – і сума) двох чисел може не бути числом;

– якщо ми не визнаємо нуль як число, то змушені будемо виконувати арифметичні дії над тим, що не є числом; навпаки, визначаючи нуль числом, можна довести до свідомості учнів: нуль можна додавати і віднімати, на нуль можна множити, отже, нуль є числом;

– нуль, який спочатку виникає як заперечення натурального числа, з розвитком поняття числа стає в один ряд з натуральними числами, виступає як продукт операцій над натуральними числами, підпорядковується однаковим з ними законам і правилам.

Питання про нуль цікавить і психологів у зв'язку з проблемою диференціації понять. Зокрема, Н.О. Менчинська підкреслює важливість проблеми числа і цифри стосовно до нуля і вказує такі напрями розкриття змісту поняття нуля: значення його як цифри, що впливає на величину числа; значення його як початку відліку у вимірюванні; значення його як числа, що виступає об'єктом арифметичних операцій.

У процесі вивчення чотирьох арифметичних дій у 5 класі слід розрізняти вимоги до техніки обчислень і теоретичні питання, пов’язані з обґрунтуванням кожної дії, розглядом взаємозв’язку між прямими та оберненими діями, ролі нуля як компонента дій.

Дія додавання в підручниках з математики не визначається. Зміст дії розкривається на конкретних прикладах додавання натуральних чисел. Звернути увагу в процесі вивчення дії додавання треба, насамперед, на виконуваність дії та її однозначність.

Під час вивчення дії додавання важливо з’ясувати той факт, що термін “сума” вживається у двох значеннях: як результат дії додавання і як вираз, що складається з двох або кількох чисел (змінних), сполучених знаком “плюс”. Тому в першому випадку говорять про “значення суми”.

Дія віднімання вводиться за означенням: “Відняти від числа *a* число *b* означає знайти таке число *x*, яке в сумі з числом *b* дає a:$b+x=a$”.

На цьому етапі навчання учням ще важко вивчити це означення і тим більше повністю усвідомити його. Адже тут йдеться про логічне виведення нової дії (віднімання) з уже відомої (додавання). Зміст дії віднімання розкривається на зрозумілій учням задачі, від розв’язання якої можна перейти до узагальнення у вигляді наведеного вище означення.

У підручниках з математики не розглядається у загальному вигляді питання про виконуваність дії віднімання і однозначність результату. Проте як підсумок розв’язування відповідних вправ учні повинні усвідомити такі факти:

1) різниця натуральних чисел буде натуральним числом, якщо зменшуване більше за від’ємник;

2) якщо зменшуване дорівнює від’ємнику, то різниця дорівнює нулю;

3) якщо зменшуване менше за від’ємник, то нема натурального числа, яке дорівнювало б різниці цих чисел.

У добре підготовлених класах доцільно записати умову, за якої можливе віднімання від числа *a* числа *b*, у вигляді нерівності $a \geq b$ і підкреслити, що за цієї умови маємо єдине число, яке дорівнює різниці даних чисел *a* і *b*.

Після розгляду дій додавання і віднімання систематизуються знання учнів на перевірку цих дій. Важливо, щоб учні усвідомили можливі два способи перевірки віднімання: знаходження зменшуваного за від'ємником і різницею (додаванням) і знаходження від'ємника за зменшуваним та різницею (відніманням).

Мова йде не про заучування відповідних правил, а про вміння їх застосовувати на конкретних прикладах.

У 5 класі систематизуються й узагальнюються знання учнів про дію множення, набуті в 3–4 класах.

Зміст поняття добутку дається в загальному вигляді, а саме: суму b доданків, кожний з яких дорівнює a, називають добутком чисел a і b й позначають $a{\cdot}b$. Це означення учні засвоюють поступово, розглядаючи приклади на записування сум однакових числових і буквених доданків у вигляді добутків, і, навпаки, на записування добутків у вигляді відповідних сум.

Спеціально розглядаються випадки множення одиниці й нуля на натуральне число: $1{\cdot}b=b$, $0{\cdot}b=0$. Оскільки множення є окремим випадком додавання, то дію множення можна завжди виконати.

Після розгляду задачі з конкретними числовими даними зміст дії ділення розкривається так: поділити число a на число b означає знайти таке число x, при множенні якого на число b дістанемо a : $x \cdot b = a$.

Завдяки систематизації відомостей про чотири арифметичні дії забезпечується єдиний підхід до вивчення обернених дій – віднімання і ділення. Ці дії вводяться за означеннями, які мають однакову структуру і відображають зв'язок між відповідними прямими та оберненими діями. Подібність цих означень певною мірою допомагає учням запам'ятовувати їх, проте зміст кожного з них усвідомлюється поступово і у частини учнів викликає деякі труднощі. Щоб подолати ці труднощі, важливо розв'язувати вправи, в яких вимагається пояснити зміст дії ділення на числових прикладах.

Істотне значення має питання про виконуваність дії ділення:

– дія ділення в множині натуральних чисел не завжди можлива;

– обґрунтування "заборони" ділення на нуль.

Важливим питанням є техніка ділення. Це виявляється, зокрема, у невмінні відшукати першу цифру частки, коли друга цифра дільника більше 5. Щоб учням було легше це робити, треба приділити достатню увагу усному множенню двоцифрових чисел на одноцифрові.

Досвід показує, що найбільше помилок припадає на ті випадки, коли всередині частки є нулі.

До питань техніки дії ділення, які потребують особливої уваги, належить і ділення чисел, що закінчуються нулями. Щоб запобігти помилкам, такі числа доцільно ділити згідно із загальним правилом, не закреслюючи нулі у діленому і дільнику.

Розглядаючи ділення з остачею, слід добитися, щоб учні добре засвоїли залежність між діленим, дільником, часткою і остачею (основну теорему про подільність).

У процесі вивчення відомостей про дільники і кратні та ознак подільності чисел нові поняття водяться через систему вправ. Ознаки подільності є тими твердженнями, що їх учні мають завчити напам’ять, і на кожну ознаку вони повинні вміти наводити власні приклади.

Закони прямих арифметичних дій (додавання і множення) є теоретичною базою для обґрунтування техніки дій над багатоцифровими числами і мають безпосереднє практичне значення як засоби реалізації обчислень. Проте цим їхня роль не вичерпується. Тотожні перетворення виразів у курсі арифметики і початків алгебри теж ґрунтується на законах арифметичних дій.

Подаючи закони арифметичних дій за допомогою змінних, треба щоразу підкреслювати, що записані рівності правильні за будь-яких значень змінних. Наприклад: за будь-яких значень змінних a і b є правильною рівність $a+b=b+a$; за будь-яких значень a, b і c є правильною рівність $(a+b)\cdot c=ac+cb$ та ін.

Послідовність вивчення натуральних чисел і дробів в середній школі і короткий методичний коментарій.

Натуральні числа і дроби в початковій школі.

Натуральні числа

5 клас

→ Координатний промінь

→ Рівняння

→ Нерівність

Дії з багатоцифровими числами.

Закон поглинання нуля.

Зв'язок з геометрією: площа прямокутника; об'єм прямокутного паралелепіпеда.

Дробові числа

Мотивування введення поняття дробу.

Пропедевтика звичайних дробів у 5 класі, що спочатку вивчати: десяткові дроби чи звичайні?

Спочатку – десяткові:

– їх запис – продовження нумерації цілих чисел;

– велика практична значимість; зв'язок з метричною системою мір;

– техніка операцій над десятковими дробами простіша;

– обчислення за допомогою ЕОМ простіші;

– обґрунтування правил додавання, віднімання десяткових дробів простіші.

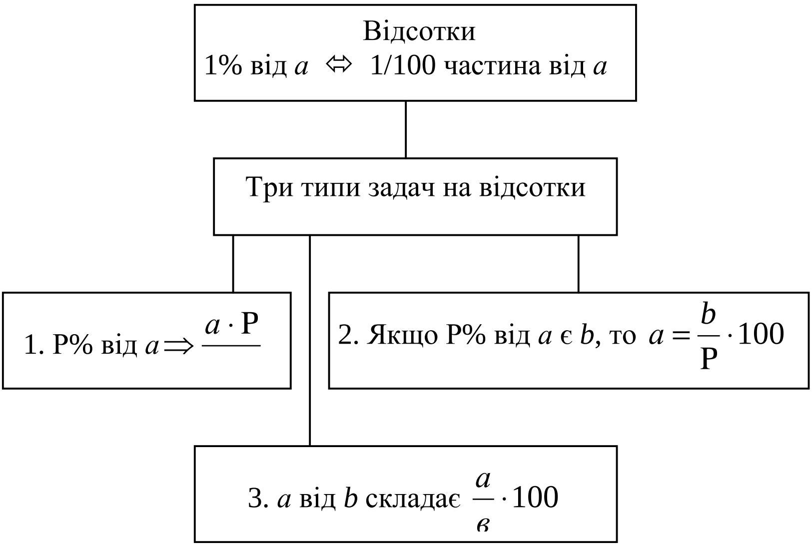


Рис. 4. Відсотки. Типи задач на відсотки

Спочатку – звичайні:

– учням важко 1/10, 1/100, 1/1000, … без опори на 1/2, 1/3, 1/4, …;

– спираємося на відомості про звичайні дроби із початкової школи;

– дріб – результат ділення цілого на рівні долі і взяття декилька таких долей.

Десяткові дроби як засіб запису дробів із знаменником виду 10.

Історичні відомості про виникнення дробових чисел у процесі вимірювання.

Координатний промінь для позначення дробів, порівняння дробів і вивчення основної властивості дробу.

Арифметичні операції з десятковими дробами. Основні закони.

Арифметичні операції із звичайними дробами. Особливості додавання дробів з різними знаменниками.

Розв'язування рівнянь.

Текстові задачі, які розв'язуються арифметичними і алгебраїчними способами. Зв'язок з геометричним матеріалом.

Мета формування поняття звичайного дробу – підготувати необхідний грунт для вивчення десяткових дробів. Учитель повинен звернути особливу увагу на термін "дробове число" у програмі і підручнику.

Терміни "звичайний дріб", "чисельник", "знаменник" вводяться у зв'язку з розглядом поділу предметів на рівні частини. Одразу ж дається поняття про рівні дроби.

Принципово новим кроком у розгляді питання про рівні дроби у 5 класі є твердження "Два рівні дроби – це різні позначення одного й того самого числа".

По-перше, учні зустрічаються тут з новим розумінням терміна "рівність", по-друге, вони вперше сприймають дріб як число, не вдаючись до розгляду конкретних предметів. Формування в учнів поняття дробового числа – тривалий процес.

В математиці дробове число визначається як клас еквівалентних дробів. Кожний із дробів, які входять у визначений клас еквівалентності, є представником цього класу. Тому поняття "звичайний дріб" і "дробове число" відрізняються один від одного як елемент множини і множина.

Важливим елементом методики вивчення чисел є переконання учнів в доцільності введення нових чисел:

– можливість записати долі за допомогою звичайних дробів;

– операція ділення натуральних завжди здійснена;

– пов'язана з задачею вимірювання величин.

Основним змістом перших уроків вивчення десяткових дробів є читання і записування десяткових дробів та їх порівняння.

Початкове ознайомлення з поняттям десяткового дробу пов'язується з метричною системою мір. Спеціальну увагу слід звернути на читання і записування дробів, у яких пропущені одиниці певних розрядів.

Для усвідомлення нумерації десяткових дробів важливе значення має порозрядне читання і записування їх.

Порівнюють десяткові дроби за величиною двома способами: через зорове сприймання кожного з дробів і порівняння відповідних розрядних одиниць цілої та дробової частин та зіставлення того, як розміщені дані дроби на координатному промені.

Дії додавання і віднімання десяткових дробів у більшості учнів 5 класу не викликають труднощів, бо вони виконуються так само, як додавання і віднімання натуральних чисел.

Щоб пояснити дію додавання десяткових дробів, можна скористатися аналогією з додаванням натуральних чисел, підкреслюючи, що десятковий принцип нашої нумерації поширюється і на десяткові дроби.

Досвід вивчення десяткових дробів показує, що частина учнів робить помилки при додаванні цих дробів, бо неправильно підписує доданки.

Техніка віднімання десяткових дробів не становить нічого принципово нового порівняно з додаванням, проте у складніших випадках (наприклад, при відніманні десяткового дробу від одиниці, від цілого числа) частина учнів допускає помилки.

При розгляді дії множення десяткових дробів:

– обґрунтувати доцільність правила множення десяткового дробу на десятковий дріб;

– розглянути алгоритм множення;

– звернути увагу учнів на те, що правило множення складається, по суті, з двох частин: у першій частині йдеться про те, як звести множення десяткових дробів до множення цілих чисел, а в другій зазначається, скільки десяткових знаків слід відокремити в добутку;

– під час множення десяткових дробів учні допускають найбільше помилок тоді, коли в добутку виходить дріб, який закінчується нулями, і коли не вистачає десяткових знаків, щоб відокремити комою потрібну їх кількість.

Особливістю вивчення ділення десяткових дробів є те, що ця дія вивчається в два етапи: спочатку розглядається ділення дробу на натуральне число, а потім, відповідно, ділення на десятковий дріб. Найбільше помилок учні допускають у діленні десяткового дробу на 10, 100, 1000 і т. ін., коли в числі не вистачає цифр для перенесення коми на потрібну кількість знаків. Головну увагу треба зосередити на техніці ділення на десятковий дріб і засвоєнні самого алгоритму ділення.

Додатні і від'ємні числа.
Короткий методичний коментарій їх вивчення.

Історія виникнення від'ємних чисел.

Діофант, індійські математики. Майно і борг. Леонард Ейлер про множення чисел з різними знаками. Рене Декарт: неправильні числа.

Мотивування введення від'ємних чисел у школі:

– алгебраїчне (можливість виконання віднімання);

– геометричне (відповідність між точками прямої і числами);

– практичне (характеристика зміни величини).

Від'ємні числа – рівноправні з додатними.

Означення поняття рівності.

Критерії порівняння нових чисел між собою і з раніше відомими числами.

Означення дій додавання і множення.

Установлення справедливості законів дій для нових чисел.

Деякі методичні прийоми, які використовуються при введенні поняття від'ємного числа:

– робота з моделлю термометра;

– текстові задачі про зміну температури і про рух за течією і проти течії;

– робота з числовою прямою.

Модуль числа. Протилежні числа.

Додавання додатних і від'ємних чисел. Числова пряма.

$(+a) + (-a) = 0$

Віднімання від'ємних чисел як дія, обернена додаванню.

Таблиці:

I. $(+) \cdot (+) = (+)$
$(-) \cdot (+) = (-)$
$(+) \cdot (-) = (-)$

(–) (–) = (+)

II. Закони додавання:

переставний: $a + b = b + a$

сполучний: $a + (b + c) = (a + b) + c$

Наявність нейтрального елементу: $a + 0 = a$

Наявність протилежного елементу: $a + (-a) = 0$

III. Закони множення:

переставний: $a \cdot b = b \cdot a$

сполучний: $a\ (b + c) = ab + ac$

Наявність нейтрального елементу: $a \cdot 1 = a$

Наявність оберненого елементу: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Дійсні числа.

Короткий методичний коментарій їх вивчення.

Мотивування введення поняття ірраціонального числа. Різні способи введення поняття ірраціонального числа.

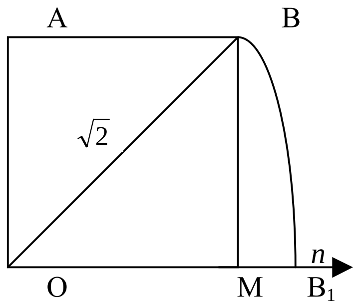


Рис. 5. Діагональ квадрату несумірна з його стороною

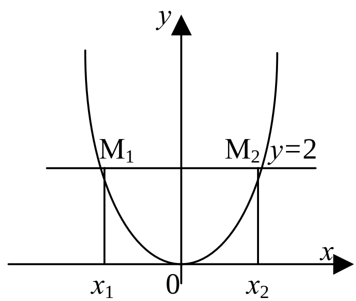


Рис. 6. Розв'язування рівняння $x^2=2 \quad x=\pm\sqrt{2}$

Дійсні наближення ірраціональних чисел

$\sqrt{2}$:   1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 … з недостачею

1,5; 1,42; 1,415; 1,4143 … з надлишком

Геометрична інтерпретація дійсного числа: між дійсними числами і точками координатної прямої існує взаємо-однозначна відповідність.

$$|a| = \begin{cases} a, & \textit{якщо } a > 0 \\ -a, & \textit{якщо } a < 0 \\ 0, & \textit{якщо } a = 0 \end{cases}$$

Рівносильність нерівностей $|a| \le b$ і $-b \le a \le b$.

$$-|a| \le a \le |a|$$

$$-|b| \le b \le |b|$$

$$-(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b| \Leftrightarrow |a| + |b|$$

$$|a| \ge b \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge b \\ a \le -b \end{cases}$$

Порівняння дійсних чисел. Що більше: $2\sqrt{3}$ чи $3\sqrt{2}$?

Операції з дійсними числами.

Звільнення від ірраціональності в знаменнику.

Числові приклади $\dfrac{a}{\sqrt{a}}$; $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$

Комплексні числа.

Мотивування введення комплексного числа: можливість розв'язування квадратних рівнянь виду: $ax^2 + bx + c = 0$, якщо $D=b^2-4ac < 0$.

Поняття про комплексне число.

Геометрична інтерпретація комплексних чисел.

Тригонометрична форма комплексного числа.

Комплексні корені алгебраїчних рівнянь.

Введення дійсних чисел

Існують різні підходи до побудови теорії дійсних чисел:

– Дедекінда (побудова перерізу на множині раціональних чисел);

– Вейерштраса (представлення дійсного числа у вигляді нескінченого десяткового дробу);

– Кантора (побудова фундаментальної послідовності раціональних чисел).

В підручниках (посібниках) для загальноосвітньої школи “в чистому вигляді” жодна з концепцій (Дедекінда, Вейерштраса) не була реалізована. Ідеї цих концепцій взаємно збагачують друг друга. За нашого часу дійсні числа вводяться так:

1) Робиться спроба розв'язання рівняння $x^2 - 2 = 0$. Це веде до необхідності доведення теореми: “Не існує ні цілого, ні дро-

бового числа, квадрат якого дорівнював би числу 2”.

2) Позаяк теорему доведено, надалі ставиться задача знаходження числа, квадрат якого був би близький до числа 2.

3) Паралельно з цим поняття дійсного числа вводиться на геометричній основі. (Задачі: а) розв’язати геометрично рівняння $x^2=2$; б) знайти довжину діагоналі квадрата, сторона якого дорівнює 1).

4) Вимірювання відрізків. Сумірні і несумірні відрізки. Десяткові наближення довжини відрізку.

5) Нескінчені періодичні і неперіодичні дроби.

6) Перетворення звичайного дробу в нескінчений періодичний і обернена задача.

7) Ірраціональні числа.

8) Дійсні числа (рис. 7).

9) Порівняння дійсних чисел.

10) Операції над дійсними числами.

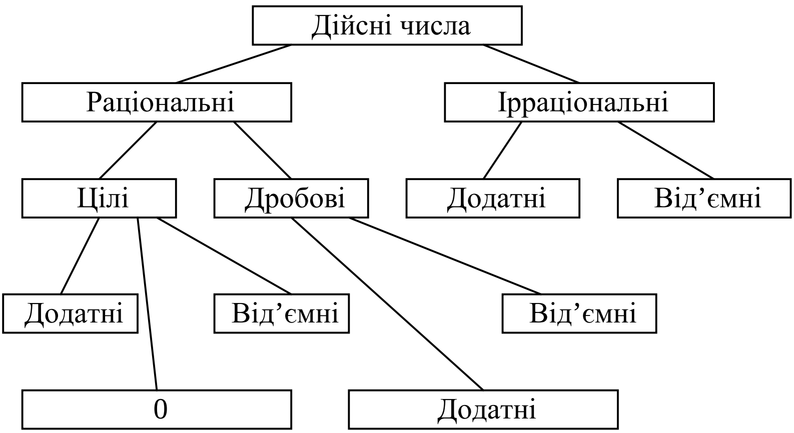


Рис. 7. Дійсні числа

Зазначимо, що між множиною дійсних чисел і точками координатної прямої існує взаємно-однозначна відповідність: кожному дійсному числу відповідає єдина точка координатної прямої, і навпаки, кожній точці координатної прямої відповідає єдине дійсне число. Цим множина дійсних чисел істотно відрізняється від усіх інших відомих учням числових множин. Слід зауважити, що теорія дійсних чисел досить складна і не входить у програму загальноосвітньої школи.

Література

1. Моторіна В.Г. Технології навчання математики в сучасній школі. – Харків, 2001. – 262 с.

К МЕТОДИКЕ ИЗЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ «АВТОМАТИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ»

Г.В. Налева[1], Н.П. Худенко[2]
[1] г. Одесса, Одесская национальная морская академия
[2] г. Одесса, Одесская национальная академия пищевых технологий

В теории автоматизированных систем управления и регулирования очень часто используется операционное исчисление, где с его помощью производится анализ переходных и установившихся процессов в автоматических системах. Поэтому в курсе «Теория функции комплексного переменного и интегральные преобразования» предусмотрена тема «Преобразование Лапласа и его приложения». Это связано с тем, что при анализе процессов в автоматизированных системах используются функции $\sigma(t)$, $A\sin\omega t$, $A\cos\omega t$, $\exp(\alpha t)$, $\alpha>0$ и другие, которые не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости, и потому к ним не применимо интегральное преобразование Фурье. Кроме того, это объясняется наличием наглядной связи между операторным (символическим) методом и гармоническим анализом, вносящей физический смысл в понятие изображения. Изображение по Лапласу $F(\alpha+i\omega)$ – это спектральная функция по отношению к затухающей функции $\exp(-\alpha t)f(t)$, для которой переменная ω является частотой.

Изложение темы в лекционном курсе ведется традиционными методами в соответствии с учебными пособиями [1], [2]. На практических и лабораторных занятиях сочетаются традиционные методы с методами современных компьютерных технологий, применение которых дает новые возможности в методике преподавания математических дисциплин в технических ВУЗах. Речь идет не только об экономии времени на выполнение рутинных математических операций (хотя и это немаловажно), а о появлении новых методических и дидактических приемов, позволяющих глубже и нагляднее изложить трудные для восприятия темы, что ранее было невозможно сделать «вручную».

На факультетах «Автоматизация технологических процессов» в указанных ВУЗах на лабораторных занятиях используется программный пакет MathCAD по теме «Интегральные преобразования». В частности, по теме «Операционное исчисление» после традиционного изложения на практических занятиях вопросов, связанных с нахождением изображений и оригиналов по Лапласу и решением дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами ([3], [4]), проводятся лабораторные работы. Во время проведения этих работ студенты знакомятся со способами получения с помощью MathCAD прямого и обратного преобразования Лапласа и использованием их для решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Использование MathCAD позволяет решать различные типы задач, строить графики, развивая пространственное воображение студентов. С помощью графических построений нагляднее иллюстрируются трудно воспринимаемые понятия качественных свойств решений дифференциальных уравнений, например, устойчивости.

В целях профессиональной направленности на практических и лабораторных занятиях рассматриваются примеры применения преобразования Лапласа для анализа непрерывных автоматизированных систем [5].

В расчетно-графических работах предусмотрено решение дифференциальных уравнений и задач с прикладным содержанием с помощью применения свойств преобразования Лапласа и проверка результата с использованием пакета MathCAD.

Таким образом, сочетание традиционных методов и методов новых компьютерных технологий в преподавании математических дисциплин позволяет разнообразить учебный процесс, заинтересовать студентов возможностью применения математических знаний в будущей специальности.

Литература

1. П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. Вища математика: Підручник. У 2 ч. – К.: Техніка, 1999-2000.

2. Высшая математика. Специальные главы: Пособие для студентов вузов / П.И. Чинаев, Н.А. Мишин, А.Ю. Пере-

возников, А.А. Черенков. Под ред. П.И. Чинаева. – К.: Вища шк., 1981. – 368 с.

3. Высшая математика: Сборник задач / Под общ. ред. П.Ф. Овчинникова. – К.: Вища шк., 1991. – 455 с.

4. М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1971. – 256 с.

5. Математические основы теории автоматического регулирования, т. 1, 2. / Под ред. Б.К. Чемоданова. Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1977. – 455 с.

ПРОФЕСІЙНА СПРЯМОВАНІСТЬ КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ПРИ ПІДГОТОВЦІ ВЧИТЕЛІВ ТРУДОВОГО НАВЧАННЯ

М.М. Ніколаєв, Є.Я. Прасолов
м. Полтава, Полтавський державний педагогічний університет імені В.Г. Короленка

Завдання курсу вищої математики для забезпечення прикладних спеціальностей має певні особливості. З одного боку необхідно дати теоретичну основу вивчення усіх фундаментальних основ курсу, а з іншого – пов’язати загальнотехнічні положення з розв’язанням інженерних задач певного профілю.

Це зумовлює суперечливе завдання, яке доводиться вирішувати викладачеві математики. Яким чином, зберегти науковість та абстрактність цієї навчальної дисципліни, досягти її тісний взаємозв’язок з профілем підготовки вчителя трудового навчання? Досвід показує, що тільки оптимальне поєднання фундаментальної та професійної спрямованості курсу вищої математики дозволяє забезпечити високий рівень якості підготовки вчителів трудового навчання. В цій статті автори роблять спробу узагальнити досвід викладання курсу вищої математики на педагогічно-індустріальному факультеті Полтавського державного педагогічного університету ім. В.Г. Короленка.

Курс вищої математики практично виключає можливість вивчення всіх розділів та понять на високому рівні та в цьому і немає необхідності. Працюючи над планами математичної підготовки виявлено, що для кожної спеціалізації можна виділити дуже важливі розділи, питання, які повинні бути засвоєні глибоко та повно. Поряд з цим є положення, які в загальнотехнічних дисциплінах використовуються рідко. Таким чином, методично вірно побудований навчальний процес полягає не в тому, щоб робити даремні спроби домогтися від студентів засвоєння всіх питань на самому високому рівні, а в тому, щоб раціонально визначити необхідні рівні засвоєння кожного положення з врахуванням його значення при вивченні інших дисциплін.

Рівень засвоєння знань студентами безпосередньо пов’язаний з видом діяльності при навчанні. Перший рівень засвоєння (λ=1) пов'язаний з репродуктивною діяльністю на рівні пізнання. Кожна операція репродуктивної діяльності в цьому випадку виконується з допомогою підказки, яка є в явному або неявному вигляді, на відповідь чи опис подій. Відмітимо, що лекція може сформувати тільки перший рівень засвоєння знань.

Другий рівень засвоєння знань (λ=2) пов'язаний з репродуктивною діяльністю на рівні відтворення, який характеризується відтворенням знань по пам'яті без підказки.

Третій рівень засвоєння знань (λ=3) пов'язаний с продуктивною діяльністю на рівні використання. Спеціалісти по ряду розділів повинні володіти цим рівнем засвоєння знань, тому потрібно підібрати правильну методику проведення практичних занять з розв'язанням нетипових задач, а також об'єм, типи та види позакласних самостійних робіт, які допомагають досягти бажаного рівня засвоєння знань.

Четвертий рівень засвоєння знань (λ=4) пов'язаний з продуктивною діяльністю на рівні творчості. Його сформувати дуже важко. Безумовно, є студенти, які його досягають, але в цьому заслуга не тільки викладача.

Якщо λ=0, то це означає, що по даному розділу у студента немає знань, отриманих в результаті попереднього навчання, але є необхідний мінімум, для їх сприйняття. Для цього були скоректовані навчальні плани по курсу вищої математики з врахуванням вимог профільних кафедр до рівня засвоєння студентами кожного розділу дисципліни.

Вдало використовується вказаний підхід на конкретному прикладі теми "Комплексні числа". При вивченні цієї теми слід орієнтуватися на третій рівень знань.

Аналіз необхідності та достатності кількості навчальних годин для даної теми та досягнення відповідного початкового та кінцевого рівнів засвоєння знань дозволяє скласти таку таблицю:

Рівні засвоєння

№ п/п	Назва	Рівні засвоєння знань	
		початковий	**кінцевий**
1.	Алгебраїчна форма запису комплексного числа (КЧ)	нульовий	другий
2.	Тригонометрична форма запису КЧ	нульовий	третій

		Рівні засвоєння знань	
3.	Показникова форма запису	нульовий	третій
4.	Дії над КЧ, які представлені в алгебраїчній формі	нульовий	другий
5.	Дії над КЧ, які представлені в тригонометричній формі	нульовий	третій
6.	Дії на КЧ, які представлені в показниковій формі	нульовий	третій

Таким чином, по даній темі студенти не мали знань, отриманих в результаті попереднього навчання. Тому поняття КЧ в алгебраїчній формі вводиться як результат розширення поняття дійсного числа, знайомого студентам зі шкільної програми. Крім того, із таблиці видно, що кінцеві рівні засвоєння знань навчальних предметів нижчі, ніж цього вимагає тема в цілому. Чим пояснюється те, що в алгебраїчній формі записи та дії над КЧ практично не використовуються в електротехніці і спеціальних та загальнотехнічних дисциплінах.

Тому, при вивченні теми “Комплексні числа” особливу увагу слід звернути на другий, третій, п’ятий та шостий підрозділи, які студентам потрібно засвоїти на рівні використання (λ=3).

Відомо, що є залежність рівнів засвоєння знань, яка говорить, що неможливо сформувати більш високий рівень знань, не засвоївши попередній більш низький. Це відноситься і до даної теми.

Досягти потрібний рівень засвоєння знань в короткий термін дозволяє така послідовність в навчанні. На проблемній лекції комбінованого типу студенти досягають першого рівня засвоєння знань. При виконанні домашнього завдання, отриманого на лекції, вони закріплюють і отримують знання на рівні відтворення. На наступному практичному занятті студенти перші вправи виконують самостійно, що примушує їх старанно опрацьовувати лекційний матеріал, встановлювати зв’язок теорії із практичними питаннями. Завдяки такій методиці організації самостійної роботи студентів, викладач має можливість на практичних заняттях надати перевірці знань студентів навчальний характер, використовуючи новий дидактичний матеріал, який сформульований в вигляді питань та завдань. Завдання поступово ускладнюються до рівня використання. Пізніше кожен студент отримує індивідуальне домашнє завдання, зміст якого другого та третього рівнів. Корисно закінчити вивчення даної теми дискусією, діловою грою. При цьому в основу завдань корисно було взяти професійну направленість навчання.

Аналогічно організовується пізнавальна діяльність студентів з врахуванням потрібних рівнів засвоєння знань при вивченні інших розділів вищої математики. При розгляді питань, які мають менш важливе значення для майбутньої професійної діяльності, інформацію можна подавати на рівні більш простих моделей. Але на всіх рівнях навчального процесу слід звільнятися від вивчення довідкового матеріалу, обмежившись повідомленням про його існування.

Логічним продовженням професійної орієнтації курсу вищої математики є розвиток навчальної та науково-дослідної роботи студентів в напрямі інтенсивного використання математики та електронно-обчислювальної техніки. При вивченні загальнотехнічних дисциплін потрібно формувати у студентів первинні знання по методології наукових досліджень. На першому курсі такими роботами можуть бути розрахунково-графічні завдання з елементами творчого пошуку або самостійні розробки конкретних питань з навчального предмету. А студентам другого курсу під силу уже навчальні завдання науково-дослідного характеру. Основою для планів та тематики таких завдань є програма по конкретній дисципліні, а також інформація та пропозиції випускаючих кафедр. Бажано тематику студентських завдань науково–дослідного характеру формулювати відповідно з напрямом та профілем підготовки спеціалістів.

Таким чином, в курсі вищої математики передбачається залучення студентів до науково–технічної творчості з першого курсу , що сприяє набуття четвертого рівня засвоєння знань. Підводячи підсумок, можна сказати, що на педагогічно-індустріальному факультеті курс вищої математики не слід викладати абстрактно. Ілюстрації та завдання прикладного характеру, особливо ті, що пов’язані з майбутньою професією студентів (вчитель трудового навчання) викликають зацікавленість студентів до вищої математики. Оскільки не всі питання математики однаково важливі для майбутнього вчителя трудового навчання, то в умовах обмеженого часу пропонується намітити необхідні рівні засвоєння знань з врахуванням специфіки майбутньої спеціальності.

Раціонально організована професійна орієнтація курсу математики дозволяє без зниження його логічної будови досягти більш високої ефективності навчального процесу за рахунок підвищеної зацікавленості здобуття математичних знань, мотивуючи професійною цілеспрямованістю.

Література

1. Бугаєнко Г.О. Методи математичної фізики. – К.: Вища школа, 1970. – С. 182-205.
2. Дудников Е.Г., Балакирев В.С. Построение математических моделей химико-технологических объектов. – Л.: Химия, 1970. – С. 173-194.
3. Хэмминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1972. – С. 163-177.

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ АВІАЦІЙНО-ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

О.П. Ніконова
м. Кривий Ріг, Криворізький авіаційно-технічний коледж Національного авіаційного університету

Сучасні технічні системи виконують дуже відповідальні задачі, тому є велика потреба в їх абсолютної надійності, що в дійсності не завжди співпадає.

В теорії та практиці надійності використовуються методи і закономірності теорії ймовірностей та математичної статистики.

Будь-яка технічна система має функціональне призначення, при цьому до неї надаються вимоги:

- вона не повинна виходити з робочого стану в заданий період;
- за умови правильної експлуатації вона повинна бути готова виконувати ті функції, які на неї покладені:
- виконання необхідних робіт по ремонту не повинно мати перешкод.

Широке використання авіаційного обладнання важливість задач, які на нього покладаються, пред’являють великі вимоги до його надійності. Проблема надійності важлива для бортового обладнання літаків, ракет. Можливість ремонту там практично вилучається, а відмова у польоті, наприклад, навігаційного обладнання може привести до катастрофи.

Бортове обладнання працює в складних умовах механічних навантажень (удари, вібрації, прискорення) і при різких змінах температури [1, 2]. Велике значення для бортового обладнання мають розміри, маса, та кількість елементів, які в ньому застосовуються.

У літаковій панорамній радіолокаційній станції використовується декілька десятків елементів, сотні конденсаторів і опорів і т.ін.

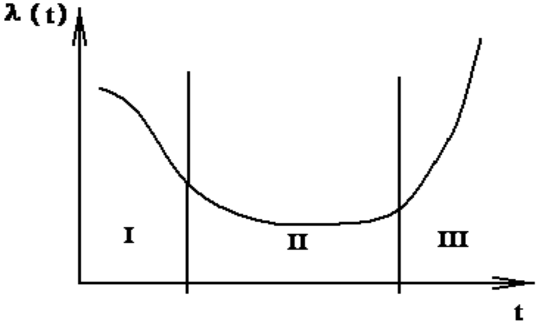
Проблема забезпечення надійності має також і важливе економічне значення. Якщо рівень надійності низький, то експлуатація такого обладнання приводить до подорожчання технічної експлуатації.

Теорія надійності вирішує надійність авіаційного обладнання при його конструюванні, виготовленні, експлуатації.

Теорія надійності займається дослідженням таких питань, як:

– ймовірності безвідмовної роботи елемента;
– частоти відмови елементів у часі;
– інтенсивності відмови.

Інтенсивність відмови – це ймовірність відмови виробу, яке не ремонтується за одиницю часу, при умові, що відмова до цього моменту не виникла [3].



I – період припрацювання.

На ньому спостерігається відносно швидке зменшення інтенсивності відмови, що пояснюється виходом із ладу елементів з внутрішніми дефектами.

II – період нормальної експлуатації.

Це найбільше тривалий період роботи апаратури. Він характеризується тим, що інтенсивність відмов в цей час зберігає постійне значення.

III – період інтенсивного зношування.

При тривалій експлуатації обладнання настає такий період, коли починається масовий вихід із ладу елементів внаслідок їх зношування та старіння.

Знання інтенсивності відмов як функції часу дозволяє використовувати її для розв’язання багатьох практичних задач.

Зокрема, якщо відома тривалість I ділянки, то можливо прийняти заходи, щоб цей період був відпрацьований в час випробовування апаратури.

Для періоду II-ої ділянки, можливо уникнути експлуатації обладнання з низьким рівнем надійності шляхом своєчасного ремонту або заміни цього обладнання.

Для розв’язання такого роду проблем на допомогу приходять бортові комп’ютери, які встановлені на сучасних літаках. Вони допомагають у вирішуванні задачі контролю, режимів роботи та обліку ресурсів бортового обладнання, а також встановлювати терміни ремонту та заміни обладнання за фактичним відпрацюванням ресурсів. Це дає можливість контролювати технічний стан авіаційної техніки, для встановлення оптимального режиму польоту літака.

Оцінювати надійність роботи систем можливо при використанні формул теорії ймовірності.

Наведемо приклади задач, які використовуються при вивченні роботи надійності авіаційно-технічних систем.

Оцінити надійність роботи системи, елементи якої з'єднані за схемою, наведеною на рис. 1 [4].

Рис. 1.

При цьому відомі ймовірності безвідмовної роботи кожного елемента p_i (i=1, ..., n).

Позначивши надійність системи через R, дістанемо

$$R = \prod_{i=1}^{n} p_i \,.$$

Оцінити надійність роботи системи, елементи якої з’єднані за схемою, наведеною на рис. 2.

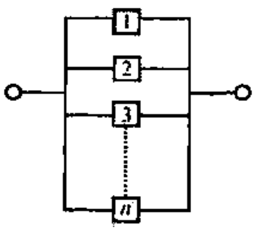


Рис 2.

При цьому відомі ймовірності безвідмовної роботи кожного елемента P_I (i=1, ..., n):

$$R = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_1 \,,\ q_i = 1 - p_i$$

Приклад, Електричні лампочки, з'єднані за схемами, наведеними на рис. 3 і 4[5,6].

Рис. 3.

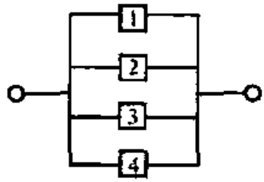


Рис. 4.

Імовірність того, що електролампочка не перегорить при ввімкненні в електромережу наведених схем, є величиною сталою і дорівнює p_i = 0,8.

Яка ймовірність того, що при ввімкненні в електромережу наведених схем у них буде електрострум?

Розв'язання. За відомим значенням p_i знаходимо q_i=1–p_i= =1–0,8=0,2 (i = 1, 2, 3, 4).

$$a)\ R = \prod_{i=1}^{4} p_i = (0{,}8)^4 = 0{,}4096$$

$$б)\ R = 1 - \prod_{i=1}^{4} q_i = 1 - (0{,}2)^4 = 1 - 0{,}0016 = 0{,}9984$$

Імовірність безвідказної роботи блока, що входить у систему впродовж певного часу дорівнює 0,9. Для надійності роботи системи встановлюється такий же блок, що буде знаходитись у резерві. Яка ймовірність безвідмовної роботи системи, коли при цьому враховувати резервний блок?

Відповідь, p = 0,99.

Радіолокаційна система, до якої входять дві станції, що працюють самостійно, виконує деяке завдання з виявлення літака-порушника повітряного простору України на певній ділянці кордону. Для виконання цього завдання необхідно, щоб у справному стані була хоча б одна радіолокаційна станція. Імовірність безвідказної роботи першої станції дорівнює 0,95, а другої 0,85.

Система працюватиме надійно, якщо буде справною хоча б одна радіолокаційна станція. Знайти ймовірність цієї події.

Відповідь, р = 0,9925 [7].

Таким чином, розв’язання задач теорії ймовірностей являються доцільними не тільки для теоретичного курсу, а також для практичного оцінювання роботи систем.

Література.

1. Надёжность автоматизированных систем управления. Под ред. А.Я. Хетагурова. Учебное пособие для вузов. – К.: Рад. школа, 1979.

2. Надёжность и долговечность авиационных газотурбинных двигателей. Сборник научных трудов. Выпуск I. – Киев, 1971.

3. Надёжность полупроводниковых радиоустройств летательных аппаратов. Методы расчёта на надёжность по постепенным, временным и перемежающимся отказам. – М.: Машиностроение, 1968.

4. Рудановський Ю.К., Костробій П.П., Олексів І.Я. та ін. Збірник задач з теорії ймовірностей: Навчальний посібник – Львів: Видавництво національного технічного університету “Львівська політехніка”, 2000.

5. Жлуктечко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навчальний посібник, ч. I, II. – Київ, 2000.

6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Изд. 5-е, перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2000.

7. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей. – К.: Вища школа, 1994.

О КОМПЬЮТЕРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ В КУРСЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

А.И. Олейников[1], Н.В. Рашевская[2], Н.А. Рашевский[3]
[1] Россия, г. Комсомольск-на-Амуре, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет
[2] г. Кривой Рог, Криворожский государственный педагогический университет
[3] г. Кривой Рог, Криворожский технический университет

Одним из средств активизации познавательной деятельности учащихся при изучении математических дисциплин является их компьютерная поддержка, которая с использованием программных средств дает значительный педагогический эффект [1]. Компьютер используется здесь как средство обучения и контроля.

Исследования по компьютерной поддержке изучения математики касаются в основном методики использования готовых программных средств, в то же время использование их в курсе теории вероятностей и математической статистики (ТВ и МС) весьма ограничено по причине неформализованной, как правило, постановки задач. Решение многих из них целесообразно получать с помощью компьютерного моделирования. Поэтому здесь можно удачно вводить элементы программирования, используя компьютер в качестве средства постановки эксперимента самими учащимися. Методике изучения компьютерного моделирования посвящена работа [4], где отмечено, что «…выпускники школ плохо осознают модельный характер научных понятий и объектов из базовых учебных предметов, значительная их часть имеет низкий уровень знаний и умений при решении практических задач с помощью ПЭВМ…». Причины видятся в «…отсутствии внимания к формированию научного мировоззрения … через содержание отдельных предметов, недостаточной осведомленности учащихся с возможностями новых информационных технологий, в существовании слабой межпредметной интеграции информатики с другими базовыми …дисциплинами». [4, с. 13] (перевод авт.). Затронутые вопросы актуальны и для высшей школы, в особенности технического профиля. По мнению авторов, целесообразно сочетать изучение курса ТВ и МС с изучением информатики, и, в частности, программирования. Программирование предъявляет более высокие требования к строгости рассуждений, чем даже математический язык. Если задача (или подзадача) недостаточно точно поставлена, это непременно обнаружится при ее программировании. В [2] компьютерный эксперимент применялся в лабораторном практикуме по физике.

С целью более глубокого усвоения материала учащимися, предлагаемые при изучении ТВ и МС индивидуальные задания можно нацеливать на приобретение и (или) использование навыков программирования, и применение компьютера в качестве средства постановки эксперимента. Сформулированные ниже задания предполагают написание программы по предварительно составленному алгоритму, также учащийся может получить готовый алгоритм или его вербальное описание.

Задания включают следующие задачи: <u>разработка алгоритмов генерирования комбинаторных структур</u> (и их реализация на одном из языков программирования); <u>решение задач на геометрические вероятности методом Монте-Карло</u> с дальнейшим анализом возможного отличия полученного результата от теоретических расчетов; <u>моделирование цепей Маркова</u> (на конкретных примерах); <u>исследование генератора случайных чисел</u>; <u>статистические расчеты</u> с помощью программы Excel.

Любую из названных задач можно упрощать или усложнять в зависимости от уровня подготовленности учащегося, от типа учебного заведения. Количество и содержание задач также можно варьировать в достаточно большом диапазоне. Например, для генерирования комбинаторных соединений можно воспользоваться готовыми алгоритмами и программами [В. Липский. Комбинаторика для программистов], или ставить задачу построения структур маленького (фиксированного) объема. Если же речь идет об усложнении задачи, то, кроме самостоятельной разработки соответствующего алгоритма, можно ставить задачи с ограничениями, которые, как известно, имеют более сложное (иногда неэлементарное) решение. Цель выполнения заданий – овладение учащимися методикой проведения компьютерного эксперимента или ее совершенствование, а в ходе выполнения – корректировка теоретических знаний. В случае согласования курсов ТВ и программирования, значительная часть задач решается именно при изучении программирования. Хотя не обязательно курс программирования специально нацеливать на курс ТВ. Предлагаемые задачи можно решать исключительно при изучении ТВ. Остановимся на обсуждении задач, специфике их выполнения и других сопутствующих вопросах.

Задача генерирования комбинаторных структур (например, перестановок) решается без использования генератора случайных чисел (ГСЧ). Ее решение требует не только глубокого знания свойств названных структур, но и некоторой изобретательности. Поэтому на первых порах необходимо ограничиться работой с готовым алгоритмом.

Вторая из перечисленных задач требует использования ГСЧ. Здесь и возникают некоторые затруднения. Рассмотрим решение классической задачи о встрече [5] с использованием компьютера. Сгенерировав n случайных пар чисел (x, y), и, посчитав количество m пар, удовлетворяющих условию $|x-y| < 1/3$, найдем вероятность встречи по формуле $P(A) \approx m/n$. Приведем результаты расчетов при различных n. Так, при $n = 50$ (произведено 15 испытаний) получаем $0{,}4 \le P(A) \le 0{,}62$. Точное (теоретическое) значение $P(A) = 5/9 \approx 0{,}556$. Средняя вероятность в 15 полученных ответах равна 0,51467, что также существенно отличается от точного значения. Дальнейшее увеличение n не улучшает результат. Очевидно, что причина неудачи в ГСЧ.

Смоделируем опыт с подбрасыванием монеты. К.Пирсон получил 12012 «гербов» при 24000 подбрасываний. Пятнадцатикратное повторение эксперимента с 39000 «компьютерных» подбрасываний привело к значениям вероятности выпадений герба от 0,3948 до 0,5297. Среднее значение равно 0,496. Опять причиной большой погрешности есть неравномерность ГСЧ. В качестве хорошего ГСЧ можно использовать цифры (или последовательности цифр) десятичных знаков числа π [3, с. 192].

Моделировать цепи Маркова можно на простой задаче.

Задача. Каждый день студент пользуется одним из справочников: A, B или C, соответственно с вероятностями p_1, p_2 и p_3. Книги стопкой лежат на письменном столе. Воспользовавшись книгой, студент кладет ее сверху стопки. Описать возможные состояния стопки. Для каждого состояния найти вероятность. Найти вероятности перехода из одного состояния в любое другое.

Здесь несовершенство ГСЧ незаметно, и роль задачи не в получении и анализе ответа, а в формировании новых понятий (методом Дж. Пойа «от задачи – к теории»).

Разработав самостоятельно, или получив в готовом виде алгоритм, учащийся, если это возможно, проверяет его работу вручную в предельных случаях. Зная теоретический результат и, получая отличный от него экспериментальный, учащийся выясняет возможные причины такого отличия. Обратим внимание на две причины вероятностного характера:

1) Событие “экспериментальный результат отличается от теоретического” является случайным, имеет ненулевую (хотя и возможно маленькую) вероятность, и могло произойти в данном испытании.

2) ГСЧ дал числа, неравномерно распределенные на промежутке [0, 1].

Статистические расчеты могут проводиться в виде лабораторных работ. При этом допускается полное отсутствие творчества, но при оперировании с числовыми характеристиками случайных величин не теряется время на вычисления. Эффективной является названная работа в случае обработки самостоятельно собранного материала. В частности, можно предложить на основании данных о массе m и росте h учащихся нескольких классов (групп) получить уравнение регрессии h на m. Получив уравнение ($h = m + 100$, известное как «правило «минус сто»), сделать анализ полученного результата. Можно также исследовать и «зависимости» между ростом и успеваемостью учащегося или другими самостоятельно придуманными параметрами. Одной из таких «зависимостей» является увеличение числа случаев психических заболеваний с увеличением количества радиослушателей [3, с. 93]. Правильное объяснение того или иного парадоксального результата будет свидетельствовать о хорошем уровне овладения теорией.

Компьютерный эксперимент часто не требует глубокого знания теории, а наоборот, формирует и корректирует знания, благоприятствует формированию умений анализировать полученные результаты, ставить новые задачи, самостоятельно формулировать проблему. Студентам педагогического учебного заведения приобретенные навыки станут полезными не только для расширения и углубления предметной области, но и для дальнейшей работы в качестве учителя-предметника, где можно будет использовать приобретенный опыт.

Литература

1. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики. – К.: Техніка, 1997. – 303 с.
2. Поснова М.Ф., Титовицкая А.Э. ЭВМ в учебном процессе. – Мн.: «ВайталАда», 1996. – 104 с.
3. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: Мир, 1990. – 240 с.
4. Теплицький І.О. Розвиток творчих здібностей школярів засобами комп'ютерного моделювання: Автореф. дис. … канд. пед. наук. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 22 с.
5. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей. – К.: Вища шк., 1994. – 192 с.

ОБ ИЗЛОЖЕНИИ ТЕМЫ «ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ» НА ЛЕКЦИОННЫХ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ

Н.Д. Орлова
г. Одесса, Одесская национальная морская академия

Посвящается памяти ученого и замечательного педагога Петра Филипповича Овчинникова

Курс математики, предусмотренный учебной программой по высшей математики для технических, технологических и экономических специальностей высших учебных заведений (утвержденной Министерством образования Украины 5 января 1999 года), содержит различные разделы, начиная с линейной алгебры и аналитической геометрии и заканчивая вариационным исчислением, всеми видами интегральных преобразований, аналитическими и численными методами решения дифференциальных и интегральных уравнений. Количество аудиторных часов по курсу высшей математике в высших технических учебных заведениях составляет около 50% от общего количества часов, остальной объем часов выносится на самостоятельную работу. Стремясь изложить предусмотренный программой объем материала, преподаватель вынужден излагать лишь общий взгляд на определенные математические понятия. Избежать поверхностного изучения различных разделов курса высшей математики можно пользуясь общим взглядом на основные математические понятия. Такое изложения учебного материала нашло свое отражение в учебном пособии «Высшая математика» [1] и в учебнике на украинском языке «Вища математика» под общей редакцией П.Ф. Овчинникова [2] и часто используется при изложении курса высшей математики студентам нематематических специальностей [4, 5].

Основными принципами построения учебника являются: краткость и объёмность изложения материала, метод – аналогий, принцип – от общего к частному [3]. Остановимся более подробно на третьем принципе, который был использован при изложении темы интегралы, как в лекционном курсе, так и на практических занятиях.

Введение понятия Риманова интеграла по мере позволяет с единой позиции изложить все известные определенные интегралы (однократные, многократные, криволинейные, поверхностные) и дает возможность экономии лекционного времени и сравнительно легкого обобщения на не Римановские построения интеграла. При введении понятия измеримости величины, меры, полагаем, что сначала вводятся числа, а последним ставится в соответствие определенная измеряемая величина, таким образом элементарное понятие меры соответствует духу книги Г. Лебега «Об измерении величин», опубликованной Учпедгизом в 1938 году в переводе А.Н. Колмогорова. Мера как философское понятие – совокупность количественных и качественных характеристик объекта, с помощью которых можно измерить указанный объект. В математике в роли объекта, который необходимо измерить, выступает область D евклидового пространства. Область D может быть открытой, замкнутой, ограниченной, неограниченной, одномерной, двумерной, трехмерной, n-мерной.

Мера пространства вводится аксиоматически, поэтому на конкретных примерах поясняются понятия покрытия области с недостатком и избытком, существование областей меры – нуль, понятие ориентированной меры.

Затем рассматривается понятие интеграла по области (по мере) и задачи, приводящие к ним (вычисление площади криволинейной трапеции, вычисление объёма цилиндрического тела, массы тела, массы тонкой проволоки, вычисление работы массы поверхности и потока жидкости через поверхность). И только после этого проводятся традиционные лекционные занятия по частным случаям вычисления интеграла по мере (определенного интеграла, двойного, тройного, криволинейных и поверхностных интегралов). Первое практическое занятие по теме «Мера конечного n-мерного евклидова пространства» проводится несколько необычно, ибо на этом занятии подробно разъясняются теоретические вопросы, связанные с понятием меры.

Отрабатываются следующие вопросы:

Существование единиц измерения в одномерном, двумерном, трехмерном пространствах. Например, для одномерной области существует единица измерения 1 см, двумерной – 1 кв. см, трехмерной – 1 куб см и т.д. Единица измерения должна обладать способностью непрерывного уменьшения, т.е. существует см/10, см/100, ..., см/10^n. То же для квадратных, кубических и других единиц.

Существование наибольшего линейного размера (понятие ранга разбиения). Поясняется, что если сторону квадрата делить на все меньшие части, то квадрат в точку не превратится. Квадрат превратиться в точку, если его диагональ (допустим, AC) будет стремиться к нулю. Диагональ AC – это наибольший линейный размер единицы измерения. Наибольший линейный размер единицы измерения называется рангом разбиения λ (иногда разделения λ). Аналогично вводятся понятия ранга разбиения для пространственной кривой и поверхности.

После этого проводятся обычные занятия по вычислению определенного интеграла, кратных и криволинейных интегралов. При данном типе изложения учебного материала становится более понятным, что вычисление любого типа интегралов в конечном итоге сводится к вычислению определенного интеграла, а также связь между интегралами различных типов (формулы Остроградского-Грина, Стокса).

Многолетний опыт изложения теоретического материала и его проработка на лекционных и практических занятиях показали высокую усвояемость излагаемого материала различными кругами слушателей. Результатом данной работы являются [1, 2].

Литература

1. Высшая математика / под общей редакцией П.Ф. Овчинникова. – 1, 2 том. – К.: Вища школа, 1989.
2. Вища математика / за загальною редакцією П.П. Овчинникова. – 1, 2 том. – К.: Техніка, 1999.
3. Орлова Н.Д. К методическим принципам построения учебника по высшей математике для технических ВУЗов. // Матеріали IX Міжнародної наукової конференції імені акад. М. Кравчука, 16-19 травня 2002 року. – К., 2002. – С. 532.
4. Дюженкова Л.І., Михалін Г.О. Щодо викладання курсу вищої математики студентам нематематичних спеціальностей. // Матеріали IX Міжнародної наукової конференції імені акад. М. Кравчука, 16-19 травня 2002 року. – К., 2002. – С. 498.
5. Коляда Ю.В., Сторожук Є.А. Психологічні засади математичної освіти податківців. // Матеріали IX Міжнародної наукової конференції імені акад. М. Кравчука, 16-19 травня 2002 року. – К., 2002. – С. 514.

К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПОДХОДЕ К ИЗЛОЖЕНИЮ КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Т.В. Павленко
г. Алчевск, Донбасский горно-металлургический институт
Info@dgmi.ivc.com.ua

Главная задача изучения курса высшей математики – формирование строгого, доказательного, последовательного образа мышления. Инженер обращается с реальными объектами и конечная цель его работы – это не только установление закономерностей изучаемого процесса, сколько использование полученного знания для управления ним.

Поэтому при изучении высшей математики большое значение в реализации связи теории с практикой имеет решение задач, начинённых практическим содержанием, использующих реальные проблемы, которые возникают в специальных дисциплинах, позволяющих применять несколько этапов исследования к одному и тому же материалу. Например, при изучении статистики полезно отрабатывать все приёмы обработки опытных данных на одном и том же наборе. Такой «сквозной» анализ позволяет выделить ключевые моменты для проверки и самоконтроля, а так же позволяет подготовить студентов к проведению и самостоятельной обработке экспериментов в будущем.

Так для специальности «Технология машиностроения» на практических занятиях по математической статистике изучается зависимость силы резанья – **P** от режимов обработки **t**, **s**, **v**, а для горных специальностей – зависимость себестоимости по участку (грн/т.) от мощности между пластами (до нижележащего). В этой индивидуальной работе каждый студент выполняет исследование генеральной совокупности выборочным методом, статистические оценки параметров распределения, проверку гипотезы о виде распределения и корреляционно-регрессионный анализ.

В последние годы наметилась тенденция к сокращению количества часов аудиторных занятий по высшей математике. При сохранении прежнего объёма нормативных программ очень остро встаёт проблема отбора лекционного материала, построения практических занятий, организации самостоятельной и исследовательской работы студентов.

Определённая «экономия» времени может быть достигнута за счёт компьютеризации учебного процесса. Однако широкое и часто необоснованное применение на практических занятиях по математической статистике стандартных программ не способствует глубокому осознанию и проработке учебного материала, кроме того, слабая компьютерная подготовка части студентов приводит к слепой вере во «всемогущество» и правоту «машинного результата. Поэтому, их использование может быть рекомендовано лишь в качестве средства проверки вычислений.

В практике работы нашей кафедры используется следующая схема проведения практических занятий по статистике для будущих инженеров:

- формулировка задачи и объёма исследований, которые должны быть проведены на данном занятии;
- коллективное повторение необходимого теоретического материала (в виде опроса студентов по лекционному материалу либо в виде ответов преподавателя на вопросы, возникшие у студентов во время самоподготовки);
- самостоятельная исследовательская работа студента, допускающая использование компьютера для автоматизации элементарных вычислений (например, вычисление $\sum x_i$, $\sum y_i$, $\sum x_i y_i$, $\sum x_i^2$ для нахождения коэффициентов линии регрессии);
- проверка полученных результатов при помощи стандартной программы Excel или Matcad.

Такой порядок работы позволяет параллельно с экономией времени, отведённого на вычисления, укреплять связи между различными дисциплинами и ещё раз продемонстрировать возможности стандартных пакетов, а с другой стороны, проверить знание студентом основных понятий статистики и его умение делать выводы о полученных результатах.

ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФОРМЕ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ В ОДЕССКОЙ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ СВЯЗИ

В.Н. Паскаленко
г. Одесса, Одесская национальная академия связи
им. А.С. Попова

С 1998–1999 уч. года в Одесской национальной академии связи введена новая форма подготовки студентов. На первый курс принимаются школьники, окончившие 9 классов. Продолжая обучение в школе днем, они во второй половине дня учатся в академии и в течении двух лет проходят программу первого курса по всем дисциплинам учебного плана. Таким образом, к моменту окончания школы эти ученики становятся уже студентами второго курса. Окончив второй курс, они получают диплом младшего специалиста и продолжают обучение.

Преимущества такой формы обучения очевидны. Эти студенты на год раньше, чем остальные, получают диплом о высшем образовании. Существенным, особенно для родителей, является и тот факт, что в столь ответственный период формирования личности, дети не предоставлены сами себе, а заняты учебой, находятся в студенческой среде.

Но в организации учебного процесса, в выборе форм обучения имеется много проблем. Далее речь пойдет о проблемах преподавания высшей математики.

Одна из главных проблем состоит в том, что выпускники девятого класса не умеют учиться, т.е. не умеют организовать учебный процесс, не умеют выделить главное в теме и в нужный момент им воспользоваться. Поэтому приходится не только учить студентов высшей математике, но и учить учиться.

Вторая проблема состоит в отсутствии среднего образования. Поэтому возникает острая необходимость согласования по времени тем курса высшей математики с темами курса элементарной математики. Такая проблема оказалась разрешимой. Единственное, что не укладывается в согласовании по времени, это такой вопрос, как логарифмическая и показательная функции. Этот вопрос приходится излагать при изучении курса высшей математики.

К числу самых сложных проблем следует отнести проблему базовой подготовки по элементарной математике. К сожалению, большинство школьников, окончив девять классов, не умеют должным образом выполнять арифметические операции такие, как действия над числами с разными знаками, действия с обыкновенными дробями. В алгебре плохо усвоены действия с алгебраическими дробями и с иррациональными выражениями; тригонометрические функции.

Все годы приходилось многократно по ходу напоминать основные правила работы с этими понятиями. Следует признать, что особого эффекта такой метод не приносит. Поэтому принято решение начиная со следующего учебного года при проведении собеседования с поступающими распределять их на группы по уровню знаний и организовывать для каждой группы в соответствии с уровнем знаний неделю переподготовки по некоторым темам курса элементарной математики.

И, наконец, проблема согласования учебной нагрузки и физических возможностей её выполнения. Выпускники девятых классов – физически ещё не окрепшие дети, однако им приходится выполнять двойную нагрузку: и в школе, и в академии.

Для решения этой проблемы по высшей математике введена модульная форма обучения, которая позволяет, не уменьшая уровня требований, контролировать знания студентов.

Весь семестровый курс высшей математики делится на 2–3 логические части и по каждой части по мере усвоения выполняется модульная работа. Задание составлено таким образом, что дает возможность проверить наличие знаний по теме, уровень этих знаний. Модульной работе предшествует выполнение индивидуальных домашних заданий; выполнение проверочных работ в присутствии преподавателя.

Таким образом, модульная форма контроля знаний исключает пиковую нагрузку на студентов и, что очень важно, способствует систематической работе над курсом высшей математики.

В заключение, следует отметить, что практика приема на первый курс выпускников девятого класса себя оправдала. С нынешнего года такая подготовка ведется не только в Одессе, но и в других областях Украины, где открыты филиалы.

ВИХОВНЕ ЗНАЧЕННЯ ДИДАКТИЧНИХ ІГОР У ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ

Л.І. Петрушина
м. Кривий Ріг, Середня школа №99

Одним із ефективних засобів розвитку інтересу до навчального предмета поряд з іншими методами та прийомами, які використовуються на уроках, є дидактична гра.

У дошкільному віці гра має важливе значення у житті дитини. Вона займає і значне місце у перші роки навчання в школі.

Спочатку учнів зацікавлює тільки форма гри, а потім і той матеріал, без якого неможливо приймати участь у ній.

У процесі гри учні непомітно для себе виконують різноманітні вправи: порівнюють множини, виконують арифметичні дії, тренуються в усних обчисленнях, розв'язують задачі. Гра ставить учнів в умови пошуку, викликає інтерес до перемоги, а тому діти намагаються бути швидкими, зібраними, вправними, наполегливими, винахідливими, чітко виконувати завдання, дотримуючись правил гри.

В іграх, особливо колективних, формуються і моральні якості особистості. Діти вчаться надавати допомогу товаришам, враховувати інтереси інших, стримувати свої бажання. У дітей розвивається почуття відповідальності, колективізму, виховуються воля, характер, дисциплінованість.

Включення ігор, ігрових моментів в урок перетворює процес навчання у більш цікавий, створює у дітей бадьорий робочий настрій, полегшує подолання труднощів у засвоєнні матеріалу, підсилює зацікавленість дітей не тільки до навчального предмета, а й до пізнання навколишнього світу.

Прийоми зорової, слухової, рухової наочності, цікаві та посильні дітям запитання, загадки, задачі – жарти, моменти несподіванки, змагання сприяють активізації розумової діяльності.

Більшість дидактичних ігор містять у собі запитання, завдання, заклик до дії, наприклад: хто вірніше та швидше? Не лови гав! Відповідай зразу! Одержи здачу! т. п.

Значна кількість ігор дозволяє зробити те чи інше узагальнення, усвідомити те чи інше правило, закріпити, актуалізувати одержані знання, сприяють більш глибокому засвоєнню нового матеріалу.

Наприклад, під час закріплення учнями таблиці множення можна використовувати гру "*Хто швидший*?" Навпроти кожного ряду на дошці закріплюються малюнки транспортних засобів, під якими записані приклади:

Літак	*Катер*	*Машина*
$9 \cdot 6$	$8 \cdot 9$	$5 \cdot 4$
$5 \cdot 7$	$5 \cdot 6$	$7 \cdot 8$
$6 \cdot 4$	$4 \cdot 7$	$4 \cdot 8$
$3 \cdot 8$	$6 \cdot 9$	$6 \cdot 6$
$2 \cdot 3$	$3 \cdot 9$	$9 \cdot 2$

За сигналом учителя учні кожного ряду по черзі виходять до дошки та пишуть відповіді.

Літак	*Катер*	*Машина*
63	12	42
54	18	27
56	24	35
9	72	8

У цьому варіанті гри треба скласти приклади за даною відповіддю, наприклад: $12 = 6 \cdot 2$; $3 \cdot 4$; $4 \cdot 3$; $2 \cdot 6$.

Хлопчики – дівчатка

На картках чітко записані приклади. Зворотний бік карток червоний або зелений. Учитель показує дітям приклад. Якщо картка червоного кольору, відповідь дають дівчатка, зеленого – хлопчики. Перемагає той, хто допустив меншу кількість помилок.

Прочитай прислів'я

Розв'язавши правильно приклади, ви прочитаєте народне прислів'я, бо кожна відповідь відповідає порядковому номеру літери українського алфавіту.

$12 : 6=2$	$3 \cdot 7=21$	$6 \cdot 3=18$	$5 \cdot 4=20$
$56 : 8=7$	$8 \cdot 3 =24$	$63 : 9=7$	$4 \cdot 4=16$
$5 \cdot 2=10$	$24 : 4=6$	$6 \cdot 3 – 1=17$	$3 \cdot 5 + 4=19$
$7 \cdot 3 + 2=23$	$18 : 6 – 2=1$	$25 : 5 – 4=1$	$48 : 8=6$

$28 : 7 – 3=1$

(Без труда нема плода.)

Ці ігри прості, але вони дозволяють в ігровій формі повторити таблицю множення, ввести в урок елемент змагання, що сприяє активізації діяльності учнів, вимагає від них зібраності, кмітливості.

Багато ігор та вправ будується на матеріалі різного ступеня труднощів, що дає можливість здійснити індивідуальний підхід, забезпечити участь у тій самій грі учнів з різним рівнем розумових здібностей. Наприклад, дається самостійна робота у вигляді гри "*Хто першим вирушить у космос*?" Пояснюється мета гри: той, хто розв'яже задачу, зможе вважати себе космонавтом, бо космічні простори підкоряються тільки тим, хто добре знає математику. Оскільки це гра, учні почувають себе вільно, а тому з цікавістю беруться до роботи.

Кожний одержує картку із завданням – задачею. Вона у всіх одна й та сама, але ступінь допомоги в її розв'язанні у кожного учня різний. Добре підготовленим дітям пропонується розв'язати задачу за коротким записом, склавши вираз; слабким – скласти задачу за коротким записом та закінчити розв'язування.

Поступово на дошці записуються прізвища дітей, які закінчили виконувати завдання. Вони зараховуються в загін космонавтів. Тим, кому не вдалося потрапити у цей список, надається індивідуальна допомога, щоб наступного разу вони не зазнали розчарувань та разом з усіма могли вирушити в космічну подорож.

Таким чином ігри та ігрові ситуації на уроках призводять до того, що учні, які захопилися грою, непомітно для себе, без особливого напруження засвоюють певні знання, уміння та навички з математики, допомагають встановити зв'язок навчального матеріалу з життям.

Гра повинна бути засобом розвитку інтересу до математики. Для цього необхідно додержуватися таких положень:

1. Ігрове завдання за змістом має збігатися з навчальним.
2. Правила гри повинні бути простими, чітко сформульованими. Зміст гри посильний для всіх дітей.
3. Дидактичний матеріал за способом виготовлення та використання має бути простим.
4. Гра цікава тільки в тому випадку, якщо в ній приймає участь кожна дитина. Довге очікування своєї черги знижує інтерес до гри.

5. Підведення підсумків повинно бути чітким та справедливим

Велике виховне значення має колективний аналіз гри. Під час цієї роботи важливо враховувати швидкість, якість виконання ігрових дій. Аналіз та оцінка повинні стосуватися не тільки техніки виконання, а й таких виявлень особистості, як витримка, наполегливість у досягненні мети, справедливість, взаємна допомога.

Тактовно відзначаючи досягнення та недоліки в ігровій діяльності школярів, учитель спонукає у них прагнення до самовдосконалення своїх фізичних та психічних якостей, до розвитку творчих здібностей, краси рухів та вчинків. Уміле педагогічне керівництво грою викликає до життя зустрічну активність дитини у самовихованні..

На уроках корисно використовувати і логічні ігри, в яких шляхом нескладних висновків можна передбачити результат, відповідь.

Дітей неважко зацікавити математикою. Звичайне розв'язування прикладів можна подати так, що ця робота не буде здаватися дітям нудною та втомлюючою. Для цього достатньо надати вправам незвичного характеру. Дидактична гра нерідко пов'язується з певним сюжетом: *"Спіймай рибку"*, *"Таблицю знаю"*, *"Магазин"*, *"Садівники"*, *"Яка дорога веде на Січ"*. У багатьох іграх закладений елемент змагання між групами, який підсилюється емоційним характером. Діти не тільки намагаються добре виконувати завдання, а й хвилюються за своїх товаришів, надають їм допомогу.

Ігри, крім розв'язування навчальних завдань, сприяють вихованню моральних якостей особистості, прищепленню навичок правильної поведінки в колективі. На кожного учня лягає відповідальність за результат гри. Це їх дисциплінує. *"Хороша гра схожа з хорошою роботою"*, – писав А.С.Макаренко. Ось чому грі повинна надаватися належна увага у навчально-виховному процесі.

ПРОПЕДЕВТИКА КУРСУ ТЕОРІЇ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ПРИ ВИВЧЕННІ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

М.О. Рашевський
м. Кривий Ріг, Криворізький технічний університет

Питання про зміст та методику викладання матеріалу з теорії аналітичних функцій (або ТФКЗ) вирішується по-різному в залежності від профілю ВЗО та спеціальності. Так, у технічних вузах про необхідність вивчення згаданого матеріалу та міру математичної строгості при початковому ознайомленні з деякими поняттями говориться в [2]: «Электрики жаждут как можно скорее получить в свое распоряжение формулу Эйлера $e^{ix} = cosx + +isinx$. Действительно ли для обоснования ее нужно многое знать о функциях комплексного переменного и рядах?… ничто не мешает трактовать формулу Эйлера просто как определение новой операции - возведения в чисто мнимую степень». Саме як означення і вводиться формула Ейлера при вивченні теми «Комплексні числа». Дана тема подається в основному без особливих наголошень на практичні застосування. При вивченні теми формуються уміння та навички оперування з комплексними числами (КЧ). У разі потреби скорегувати ці вміння доцільно при вивченні інших тем курсу вищої математики. З реальними ж застосуваннями КЧ зустрінуться лише студенти, що матимуть справу з електротехнічними розрахунками, із фізикою суцільних середовищ. Як окремий курс ТФКЗ вивчається не всіма технологічними спеціальностями. Ознайомлення з елементарними функціями комплексної змінної може відбутися і без вивчення окремого курсу. Наприклад, у темі «Степеневі ряди». Проте це ознайомлення може вважатися лише пропедевтикою для ТФКЗ. Для успішного його засвоєння у разі подальшого вивчення корисними будуть застосування КЧ при опрацюванні інших тем, безпосередньо не пов’язаних із даним матеріалом.

У даній роботі наводяться деякі прийоми застосування КЧ, що можуть бути використані в аудиторний час при вивченні теми «Невизначений інтеграл». Задіяння КЧ дозволяє отримати відомі співвідношення між елементарними функціями комплексної змінної, хоча і без достатнього теоретичного обґрунтування. Згадані формальні співвідношення слугуватимуть пропедевтичними для поняття функції комплексної змінної, а властивості елементарних функцій дійсної змінної, отримані за допомогою введених формальних рівностей, стануть «доведенням» їх правильності. Розглянемо згадані прийоми використання КЧ. Одним із них є аналіз таблиці інтегралів на предмет надання комплексних значень сталим, що знаходяться у підінтегральних функціях. Так, надаючи комплексного значення сталій $k = a+bi$ в інтегралі $\int e^{kx}dx$, отримаємо після відокремлення за допомогою формул Ейлера дійсної та уявної частини первісні функцій $e^{ax}\cos bx$ та $e^{ax}\sin bx$:

$$\int e^{(a+bi)x}dx = \int e^{ax}\cos bx\,dx + i\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a+bi}e^{(a+bi)x} + C =$$

$$= \frac{a-bi}{a^2+b^2}e^{(a+bi)x} + C = \frac{a-bi}{a^2+b^2}(e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\sin bx) =$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + \frac{i}{a^2+b^2}e^{ax}\times$$

$$\times(-b\cos bx + a\sin bx) + C,$$

які зазвичай обчислюють двічі інтегруючи частинами. Наведемо також приклад розкладання раціонального дробу, що проілюструє ще одне застосування КЧ. Розкладаючи дріб $\frac{1}{(x^2+1)(x-1)}$ на найпростіші $\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{(x-1)}$, для визначення коефіцієнтів матимемо таку тотожність: $(Ax+B)(x-1) + C(x^2+1) = 1$. Поклавши тут $x=i$ та, записавши умову рівності КЧ $-A-B + (-A+B)i = 1$, визначимо A і B як розв'язки системи лінійних рівнянь. Розглянуті приклади ілюструють лише найпростіші застосування КЧ. У наступному необхідні дещо складніші перетворення. Розглянемо інтеграли $\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,arctg\,\frac{x}{a} + C$ та $\int\frac{dx}{x^2-b^2} = \frac{1}{2b}\ln\left|\frac{x-b}{x+b}\right| + C$.

Прирівнюючи праві частини записаних двох рівностей при $a = 1$, $b = i$, отримуємо рівність $arctg\,x = \frac{1}{2i}\ln\left|\frac{x-i}{x+i}\right| + C$, що зв'язує елементарні функції, не зв'язані між собою без задіяння КЧ. На основі формальної рівності маємо:

Невідому s знайдемо з умови рівності аргументів:

$$\frac{s-i}{s+i}=\frac{(x-i)(y-i)}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}.$$

Позначення $\frac{(x-i)(y-i)}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}=p$ дозволяє записати вираз для s у вигляді $s=i\frac{1+p}{1-p}$, звідки після тотожних перетворень запишемо таку рівність:

$$s=\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}+xy-1-i(x+y)}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}-xy+1+i(x+y)}=\frac{x+y}{1-xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$$

Отже, визначивши s, маємо формулу

$$arctg\,x+arctg\,y=2arctg\frac{x+y}{1-xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}},$$

уперше отриману в [1], і прокоментовану там як «несподівано, але факт». Зауважимо, що у наведених міркуваннях не записано довільну сталу, і рівності арктангенса й логарифма є правильними з точністю до сталої, значення якої знаходимо у кінцевій формулі, надаючи конкретного значення змінним. Наявність константи вказує на многозначність логарифмічної функції при переході до комплексних аргументів. Многозначність же арктангенса можна пояснити і без застосування комплексної змінної як множину обернених функцій до функції $y = tg\ x$ для кожного k та $x \in [-\frac{\pi}{2} + k\pi; \quad \frac{\pi}{2} + k\pi]$.

Література

1. Акулов О.В. Нові формули // Матем. в шк. – 1999. – № 2. – С. 25.
2. Соколовский Ю.И. Онтодидактический арсенал методики математики // Сборник научно-методических статей по математике (Проблемы преподавания математики в вузах). 1974, вып. 4, с. 29–37.

УЗАГАЛЬНЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗНАНЬ

А.О. Розуменко
м. Суми, Сумський державний педагогічний університет

Курс геометрії, який вивчають студенти математичних спеціальностей педагогічних вищих навчальних закладів, містить такі розділи: аналітична геометрія, проективна геометрія, диференціальна геометрія та елементи топології, основи геометрії. Кожний розділ вивчається протягом одного навчального семестру. Внаслідок цього у деяких студентів формується неправильне уявлення про те, що різні розділи геометрії взагалі не пов'язані між собою. Щоб уникнути цієї ситуації викладач повинен приділяти особливу увагу засвоєнню суті методів, що використовуються в тому чи іншому геометричних розділах, усвідомленню взаємозв'язків між окремими поняттями, темами, формуванню системи знань.

Часто ми вимагаємо від студентів точного відтворення доведення того чи іншого факту, чіткого формулювання означень, розв'язання типової задачі. При цьому не вистачає часу на головне, що на наш погляд є усвідомленням основних ідей геометричної науки.

При вивченні кожного розділу геометрії доцільно демонструвати загальні висновки і частинні випадки, спеціально розглядати різні класифікації понять.

Найбільш плідною з точки зору узагальнення знань студентів є проективна геометрія. При вивченні курсу аналітичної геометрії студенти знайомляться з поняттями перетворень площини, перетворень простору. З курсу алгебри їм відомі поняття групи, підгрупи. Ще до початку вивчення проективної геометрії доводяться твердження про те, що перетворення площини утворюють групу (відносно операції "композиція"); множини перетворень руху і подібності є підгрупами даної групи. Тому після введення поняття проективних перетворень, доведення того факту, що множина проективних перетворень площини відносно операції "композиція" утворює групу, природнім стає питання: як пов'язані між собою відомі групи перетворень з проективними?

Обґрунтування відповіді на це питання доцільно провести за такою схемою:

1. Історичні зауваження.

2. Загальна характеристика геометрії як теорії інваріантів відповідної групи перетворень.

3. Проективна група та її основні підгрупи. Інваріанти проективної групи.

4. Афінна група. Інваріанти афінної групи.

5. Ортогональна група. Інваріанти ортогональної групи.

В результаті такого "дослідження" необхідно підвести студентів до висновку про те, що проективна геометрія є більш загальною по відношенню до елементарної (евклідової) геометрії. Разом з тим клас об'єктів, що вивчає проективна геометрія є більш вузьким порівняно з елементарною. В елементарній геометрії можна розглядати і афінні об'єкти (просте відношення трьох точок прямої, паралельність, тощо) і проективні (складне відношення чотирьох точок прямої, тощо). Навпаки, проективна геометрія не розглядає афінні властивості фігур, а в афінній геометрії не розглядаються метричні властивості. Чим ширша група, що лежить в основі геометрії, тим вужчий клас геометричних об'єктів. Але при цьому властивості фігур, які інваріантні відносно проективної групи, є більш "стійкими", порівняно з властивостями фігур, які інваріантні відносно будь-якої її підгрупи.

Ці загальні твердження доцільно продемонструвати на прикладі класифікацій кривих другого порядку з точки зору проективної та афінної геометрій. У проективній геометрії розрізняють вироджені і невироджені лінії другого порядку. В афінній площині інша класифікація. Тут розрізняють три види невироджених ліній другого порядку і два види вироджених.

На наш погляд, ґрунтовне вивчення теоретико-множинного підходу до побудови геометрії, сприяє формуванню наукового світогляду, засвоєнню провідних ідей науки, які є золотим фондом математики.

Література

1. Семенович О.Ф. Геометрія. Групи перетворень. – К.: Рад. шк., 1971. – 279 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ В УСЛОВИЯХ КОНТРАКТНОЙ СИСТЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ

В.М. Серебреников, В.В. Серебреникова
г. Кривой Рог, Криворожский технический университет

Введение контрактной системы образования привело к особенностям обучения студентов фундаментальным дисциплинам. Это связано, прежде всего, с наличием в студенческих группах двух категорий студентов: «бюджетников» и «контрактников», которые резко отличаются уровнем начальной подготовки по фундаментальным дисциплинам, а, следовательно, и способностью к обучению этим дисциплинам. Эта разнородность состава студентов выдвигает как одну из проблем анализ результатов обучения студентов фундаментальным дисциплинам. Такой анализ даст возможность указать пути, позволяющие улучшить обучение студентов фундаментальным дисциплинам в условиях контрактной системы образования.

Как один из подходов решения поставленной проблемы предлагается математическое моделирование результатов обучения студентов на основе теории марковских цепей [1].

Рассмотрим группу студентов, состоящую из «бюджетников» и «контрактников».

Возможные состояния студента в экзаменационную сессию таковы:

S_1 – экзамен не сдавался;

S_2, S_3, S_4, S_5 – экзамен сдан на “неудовлетворительно”, “удовлетворительно”, “хорошо”, “отлично”, соответственно.

Перед экзаменом студент находится в состоянии S_1.

Вероятности перехода из состояния S_l в состояние S_k обозначим $P^{(i)}_{lk}$, где i=1 соответствует студенту – «бюджетнику», а i=2 – студенту – «контрактнику».

Очевидно, что $P^{(i)}_{ll}$ соответствует тому, что оценка студента не изменилась при пересдаче экзамена.

Размеченный граф состояний студента в период сдачи экзамена представлен на рис. 1.

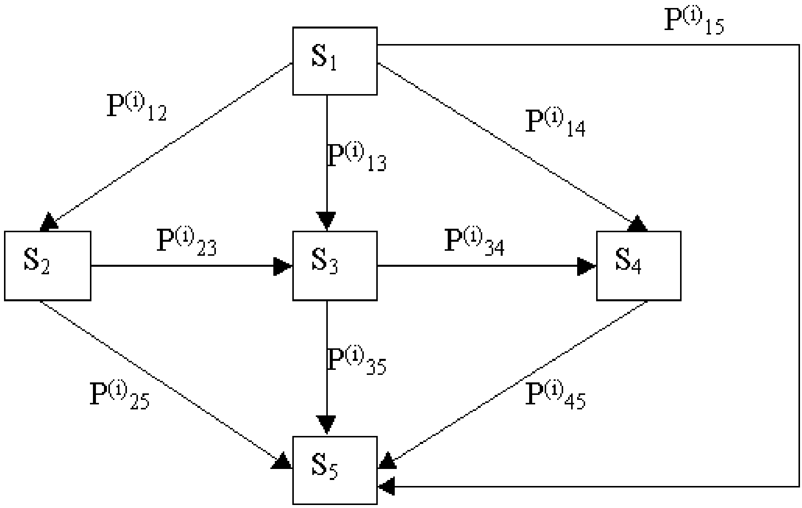


Рис. 1.

Переходные вероятности, отмеченные на рис. 1, могут быть представлены в виде матрицы:

$$P^{(i)} = \begin{pmatrix} P_{11}^{(i)} & P^{(i)}{}_{12} & P^{(i)}{}_{13} & P^{(i)}{}_{14} & P^{(i)}{}_{15} \\ 0 & P^{(i)}{}_{22} & P^{(i)}{}_{23} & P^{(i)}{}_{24} & P^{(i)}{}_{25} \\ 0 & 0 & P^{(i)}{}_{33} & P^{(i)}{}_{34} & P^{(i)}{}_{35} \\ 0 & 0 & 0 & P^{(i)}{}_{44} & P^{(i)}{}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Зная матрицу (1), можно рассчитать вероятность состояния S_l студента после k-того раза сдачи экзамена:

$$P_l^{(i)}(K) = \sum_{j=1}^{5} P_j^{(i)}(k-1) * P_{jl}^{(i)}, \qquad (2)$$

где $l = 1, 2, 3, 4, 5$.

Тогда среднее число студентов, находящихся в состоянии S_l после k-того раза сдачи экзамена, находится по формуле:

$$n_l^{(i)}(k) = n^{(i)} * P_l^{(i)}(k), \qquad (3)$$

где $n^{(1)}$, $n^{(2)}$ – число “бюджетников”, “контрактников” в студенческой группе, соответственно.

Математическая модель, представленная формулами (1), (2), (3), позволяет рассчитать число задолжников после k-того раза сдачи экзамена:

$$n_2(k) = \sum_{i=1}^{2} n^{(i)} * P_2^{(i)}(k).$$

Тогда число студентов, сдавших экзамен после k-того раза сдачи, равно:

$$n(k) = n - n_2(k),$$

где $n = n^{(1)} + n^{(2)}$ – общее число студентов в группе.

Математическое моделирование результатов обучения студентов в группах, состоящих из «бюджетников» и «контрактников», показало, что среднее число студентов-задолжников определяется в основном числом «контрактников». Отмечена также тенденция, связанная с тем, что снижение требований на экзаменах путем «завышения» оценок приводит к уменьшению значений переходных вероятностей в матрице (1), что вызывает в последующем рост числа студентов-задолжников, формируя негативное отношение к обучению данной дисциплине.

Анализ проведенного математического моделирования показывает, что для достижения заданного качества обучения студентов фундаментальным дисциплинам необходимо выдерживать в студенческих группах определённое соотношение между числом «бюджетников» и «контрактников». Величина такого соотношения определяется в конечном итоге матрицами переходных вероятностей для каждой категории студентов.

Литература

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Наука, 1970.

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИКУМЕ НА СОВРЕМЕННОМ ЭТАПЕ

И.М. Симкина
г. Мариуполь, Индустриальный техникум Приазовского государственного технического университета

Начиная с 1996/97 учебного года, курс математики в вузах первого уровня аккредитации на базе неполной средней школы разделен на две дисциплины: математика и высшая математика (или основы высшей математики – название зависит от специальности). Преподавание каждого из указанных курсов перед преподавателем математики ставит свои проблемы.

На первом курсе на изучение математики программой отведено 216 часов. За указанное количество времени студентам необходимо изучить и освоить материал 10 – 11 классов. Простой расчет показывает, что в техникумах на изучение материала одного школьного года отводится по 108 часов, что не соответствует даже количеству часов, отведенных на математику в средних учебных заведениях и классах гуманитарного профиля. Появление в техникумах студентов, обучающихся на контрактной основе, еще более усложнило ситуацию. При этом перед преподавателем в каждом семестре первого курса встают свои проблемы.

В первом семестре первого курса преподаватель математики совместно с преподавателями других дисциплин должен помочь адаптироваться студентам к новым для них требованиям. Для этого необходимо развить у студентов умение воспринимать большой объем и сложное содержание изучаемого материала; научить слушать и записывать лекции одновременно; ознакомить с новыми формами контроля; подготовить студентов к самостоятельному изучению нового материала. Для повышения интереса студентов к выбранной профессии преподаватель математики должен акцентировать внимание учащихся на примерах, непосредственно связанных с их возможным трудовым будущим. Для этого постоянно использовать межпредметные связи как с базовыми, так и со специальными дисциплинами.

Во втором семестре первого курса в преподавании математики наряду с перечисленными проблемами встает проблема обучения студентов самостоятельной работе над заданным материалом, чему в школах, к сожалению, не уделяют должного внимания.

На втором курсе техникума на всех предметах от 1/3 до 2/3 часов отведено на самостоятельную работу студентов. При этом возраст студентов второго курса техникума (на базе неполной средней школы) соответствует возрасту учеников 11 класса школы, в обучении которых нет специально отведенных часов для самостоятельной работы.

В первом семестре второго курса при изучении высшей математики перед преподавателем возникают следующие проблемы:

- малое количество часов (на данном этапе – 60–70 аудиторных часов);
- большое количество изучаемого материала;
- низкий уровень знаний студентов при изучении определенных тем высшей математики;
- заполнение часов самостоятельной работы;
- появление студентов – выпускников 11 классов школ, для которых характерны проблемы первого курса техникума.

Каковы решения перечисленных проблем? Преподавателю математики и высшей математики необходимо:

1. Выбрать разделы, используемые специалистами данной профессии.
2. Определить необходимый математический материал по каждому предмету, изучаемому в техникуме на данной специальности.
3. Определить математический уровень студентов, обучающихся на данной специальности.
4. Разработать программу изучения математики для конкретной специальности.
5. Скорректировать полученную программу с программой по математике, утвержденной министерством образования и науки Украины.
6. Разработать рабочую программу курса, распределив отобранные разделы по времени изучения и количеству часов.
7. Разработать каждый отобранный раздел курса. Для этого не-

обходимо:

A. определить уровень научности при изучении каждой темы: приводить ли строгие математические определения и доказательства, возможно ли дать лишь обоснования, подтвердив их на примерах или геометрически, или отдать предпочтение рецептурному методу;
B. разработать конспект лекций по каждой теме, уделив особое внимание межпредметным связям;
C. отобрать задачи, необходимые для демонстрации особенностей данной темы и ее применение в будущей специализации студентов;
D. отобрать задания для отработки умений и навыков, необходимых в данной теме;
E. определить методы контроля за уровнем понимания и усвоения изучаемого материала;
F. создать раздаточный материал.
G. Из разработанных разделов и тем отобрать материал, который возможно выдать на самостоятельное изучение студентам.
H. Отобрать задачи для самостоятельного решения.
I. В связи с развитием производства и возникновением новых математических элементов в каждой специальности преподавателю математики необходимо корректировать отобранный теоретический и практический материал.
J. В связи с быстрой компьютеризацией производства в преподавании математики желательно включать элементы компьютерных технологий.

К сожалению, преподавателю математики невозможно разбираться в спецификах всех специальностей, студентам которых преподается математика. Для изучения потребностей конкретной специальности в математическом аппарате необходима объединенная работа всех преподавателей техникума. Эта работа выходит за рамки обязанностей преподавателей, поэтому такая работа часто держится лишь на энтузиазме отдельных преподавателей. Другой путь решения этой же проблемы – изучение учебников и книг профильных предметов. Но и он не свободен от недостатков, т.к. не позволяет преодолеть различия математических подходов в преподавании (к примеру, перевод комплексного числа в показательную форму можно осуществить через нахождение синуса и косинуса аргумента, а можно найти тангенс аргумента - необходимо согласовывать преподавателю математики и электротехники) и различие в терминологии (например, в математике системы решаются методом Крамера, а в прикладных науках – методом определителей. Специалисту понятно, что это одно и тоже, но студенту – нет).

Выяснение математического уровня студентов определенной специальности, разработка и корректировка рабочей программы курса, составление и корректировка конспектов лекций и подбор задач – очень длительный и трудоемкий процесс. Но наибольшие затруднения возникают перед преподавателем при трактовке математических понятий элементами будущей профессии студентов. Эти затруднения продиктованы не только проблемами знаний преподавателя, но и проблемами знаний студентов. Как было сказано выше, математика и высшая математика изучаются студентами на младших курсах наряду с физикой, химией, информатикой и т.д., о своей будущей профессии студенты знают лишь понаслышке, так как выбор профессии осуществляется часто под влиянием родных, знакомых, друзей. При этом комментарии преподавателя математики должны быть понятны студентам и не расходится с теми знаниями, которые они получат на старших курсах от специалистов. Может быть, в этой ситуации проще не профилировать знания математики, приводить лишь примеры из уже известных студентам предметов? Для повышения заинтересованности студентов к будущей специальности, для повышения мотивации студентов в изучении математики, для обобщения полученных знаний при изучении различных предметов, для активизации мыслительной деятельности студентов (причины можно перечислять и далее) внедрение профессиональных компонентов представляется целесообразным.

Наибольшие трудности и у преподавателя и у студентов вызывают задачи практического содержания. Для преподавателя, во-первых, составляет проблему найти задачи по данной теме нужного уровня (обычно такие задачи в литературе поверхностны, используют ошибочную терминологию и символику), во-вторых, требуют использовать метод математического моделирования, который сложен для понимания студентов.

Как же успеть на занятиях решить поставленные проблемы? Для экономии времени и обучения студентов самостоятельной работе преподаватель математики должен заранее подготовить конспекты лекций, с помощью которых можно на занятиях объяснять новый материал без ненужных повторений для записи в конспект. В качестве домашнего задания, в этом случае, студенты получают проработать и законспектировать изученную тему.

В настоящее время для контроля знаний, повышения мотивации обучения, проведения самостоятельной работы студентов, закрепления навыков на занятиях по математике используются информационные технологии. Это и компьютерные варианты конспектов лекций, и демонстрация необходимых элементов в динамике (например, преобразования графиков функций), и компьютерные тесты, и обучающие программы, и дидактические компьютерные игры. Подготовка таких программ очень трудоемка и требует специальных знаний и в математике, и в программировании. Необходимо также учесть рекомендации психологов по размещению текста на экране, по цветовой гамме, по использованию символов. Преимуществом же является заинтересованность студентов, долговременность использования, легкая корректировка материала.

В индустриальном техникуме ПГТУ был проведен эксперимент по внедрению в обучение разделов высшей математики необходимых студентам различных специальностей, составлению программы и рабочей программы по высшей математике, внедрению готовых конспектов лекций и на занятиях, и при самостоятельной работе, а также применение компьютерных технологий при обучении математике. В результате эксперимента повысилась успеваемость и качество знаний по профессиональным предметам. Анкетирование преподавателей профессиональных и специальных дисциплин показало появление большей заинтересованности студентов, появления возможности усложнения преподаваемого курса.

В данной работе рассмотрены некоторые из существующих проблем, решаемых преподавателями математики в техникумах. Для продолжения учебы в высших учебных заведениях выпускникам техникума необходимы знания по высшей математике, что ставит перед преподавателем техникума новые задачи.

О НЕОБХОДИМОСТИ ЛИКВИДАЦИИ ПРОБЕЛОВ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ У СТУДЕНТОВ ПЕРВОГО ГОДА ОБУЧЕНИЯ

И.А. Смагина
г. Алчевск, Донбасский горно-металлургический институт
Info@dgmi.ivc.com.ua

Последние годы в связи с упадком горной промышленности на горный факультет абитуриенты идут неохотно, и следствием этого является слабый контингент учащихся. Таким образом, вопрос о качестве подготовки кадров по этой специальности стоит остро.

Основная задача высшей школы не только построить фундамент математических знаний для изучения специальных предметов, но и укрепить основу, на которой он воздвигается. Поскольку школа в большинстве случаев не дает глубоких базовых знаний, рекомендуется проводить занятия по ликвидации пробелов школьного курса. Это будет эффективным, если будут учитываться индивидуальные особенности восприятия и базовой подготовки студентов.

На первом занятии следует провести контрольную работу по проверке остаточных школьных знаний, результаты которой позволят сделать вывод о необходимых путях и методах работы с данной группой.

На основании опыта работы со студентами горного факультета и изучения их школьной подготовки на кафедре высшей математики ДГМИ разработаны «Методические указания по ликвидации пробелов школьного курса».

Первые две-три недели учебного семестра предлагается уделить ликвидации пробелов, т.е. больше времени отвести на повторение тех разделов школьного курса, которые непосредственно нужны студентам: решение линейных и квадратных уравнений, вычисление дробей, решение неравенств, знание тригонометрических функций, построение графиков элементарных функций. После чего проводится опять срез знаний.

Студентам, написавшим контрольную неудовлетворительно, предлагается проведение теперь уже факультативных занятий или консультаций, на которых они смогут в индивидуальном порядке освоить те темы, которые для них наиболее трудны.

Но так как студентов надо приучать работать и самостоятельно, то на этом этапе необходимо предлагать индивидуальные домашние задания различного уровня сложности в зависимости от их подготовки.

При кажущейся потере времени, такой опыт ликвидации пробелов школьного курса позволяет студентам достаточно успешно в дальнейшем усваивать программу высшей школы.

МОДУЛЬНА ТЕХНОЛОГІЯ ОРГАНІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ

І.М. Сулима, І.І. Ковтун, І.А. Нікітіна
м. Київ, Національний аграрний університет
ira@otblesk.com

В сучасних умовах зміни соціально-економічного середовища перед вищою школою повстало завдання підготовки таких спеціалістів, які б користувалися попитом на ринку праці або готувалися за попередніми договорами з підприємствами. Це потребує розробки нових технологій організації навчального процесу, напрямлених на формування спеціалістів, здатних активно і систематично оволодівати новими знаннями. З'явилася нагальна потреба відмовитися від традиційних пасивних форм проведення занять і перейти до нестандартних методів індивідуального навчання.

Навчальний процес потрібно організувати так, щоб студент самостійно оцінював свій рівень підготовки, визначав рівень засвоєння знань (не нижче визначеного мінімуму), одержував би задоволення від навчання.

Необхідно сформувати майбутнього спеціаліста і як творчо мислячу особистість, що неможливо без всебічного розвитку його пізнавальної активності, якій притаманні такі якості:

- наявність пізнавальної потреби;
- глибоке осмислення мотивів пізнавальної діяльності;
- постійне намагання одержувати нові знання;
- оволодіння такими загальними інтелектуальними операціями, як аналіз, синтез, абстракція, узагальнення тощо;
- оволодіння формами логічного мислення і специфічними методами та прийомами, що характерні для даної дисципліни;
- самостійність у своїй діяльності і уміння оцінювати результати, а також багато інших.

Це означає, що в процесі навчання потрібно намагатися активізувати усі механізми діяльності інтелекту студента.

Процес навчання у вищій школі – складний і різноманітний процес, що містить у собі різні види діяльності. Важливо розвинути і своєчасно направити пізнавальні потреби, бажання і вміння оволодівати новими знаннями, розвинути початкові навички творчої роботи. Потреба розвитку самостійного мислення проявляється не тільки в умінні розв'язувати нові проблеми, але і в здатності побачити ці проблеми самостійно.

Система освіти у вищій школі не може дати запасу знань на все трудове життя. Можуть бути закладені тільки основи знань і вироблена здатність до самоосвіти, здатність сприймати нові інформаційні технології, вміння при необхідності впродовж свого життя оволодівати і новими спеціальностями.

Важливим моментом у процесі формування системи знань студентів, зокрема інженерних спеціальностей, і вивчення фундаментальної науки – математики, як інструмента для вивчення нових спеціальних дисциплін на базі математичного апарату, для експериментальних досліджень і проектування, для яких потрібні сучасні математичні методи обробки експериментальних даних і математичного моделювання. Високий рівень фундаментальної підготовки – запорука успіху в оволодінні методами самостійного пошуку і підбору спеціальних знань для їх реалізації у практичній діяльності інженера.

Пізнавальна діяльність при підготовці спеціаліста повинна складатися із внутрішніх взаємопов'язаних дій, логічна послідовність яких приводить до встановлення нових зв'язків між окремими факторами. Результату можна досягти при організації цілеспрямованої діяльності студента і створення йому умов для включення у необхідний темп роботи і пошуку потрібних знань.

Однією з прогресивних технологій навчання, що забезпечує поєднання активної самостійної і аудиторної роботи, є модульно-рейтингова система організації навчального процесу [1–4].

На протязі останніх років викладачі кафедри вищої математики застосовують модульно-рейтингову систему на факультеті механізації НАУ.

Загальний курс вищої математики на цьому факультеті викладається на протязі трьох семестрів. У кожному семестрі є декілька логічних блоків (розділів вищої математики). Їх і обирають за модулі. Навчальний модуль є інтеграцією різних видів і форм навчання.

Враховується:

- ступінь засвоєння теоретичного матеріалу;

- вміння застосовувати набуті знання до розв'язання практичних задач;
- якість та терміни виконання індивідуальних завдань;
- розв'язування додаткових, більш складних задач;
- здача колоквіумів;
- підготовка і захист рефератів;
- участь у студентських наукових конференціях;
- участь в олімпіадах серед студентів НАУ та республіканських олімпіадах;
- виготовлення стендів, посібників тощо;
- участь у науково-дослідній роботі на кафедрі.

Перед вивченням дисципліни студентів знайомлять із системою оцінки їх роботи, показниками оцінки кожного виду роботи.

Вивчення матеріалу в обсязі модуля забезпечується під час аудиторних занять і за рахунок самостійної роботи студентів. За кожен модуль виставляється певна кількість балів.

Навчальний рейтинг, як інтегральний індекс студента, є об'єктивною оцінкою діяльності студента. Він має також соціально-психологічне навантаження, активно впливає на характер навчального процесу, дає більш високий рівень підготовки спеціаліста.

Рейтингова оцінка відрізняється від традиційної більш широким інтервалом балів, які, в свою чергу, диференційовані в залежності від складності матеріалу, що вивчається.

За допомогою цієї оцінки можна об'єктивно оцінити знання студента навіть без здачі екзамену.

Наведемо як приклад модулі третього семестру.

У відповідності з навчальною програмою для інженерних факультетів аграрних університетів і інститутів третій семестр має 15 тижнів. Щотижня 4 години читаються лекції і 4 години проводяться практичні заняття, тобто аудиторні заняття складають 120 годин. Ця кількість годин приймається за кількість балів, які студент може набрати на протязі третього семестру.

У відповідності з набраними балами оцінки можуть бути такими: "відмінно" – за 104–120 балів, "добре" – за 87–103 бала, "задовільно" – за 70–85 балів.

У третьому семестрі пропонуються такі модулі.

Модуль 1. **Кратні та криволінійні інтеграли**

- Типовий розрахунок (ТР) “Кратні та криволінійні інтеграли” – 15 балів;
- Контрольна робота (КР) “Кратні інтеграли” – 5 балів;
- КР “Криволінійні інтеграли” – 5 балів;
- Поточна робота – 5 балів;
- Колоквіум – 10 балів.

Отже, сума балів за перший модуль складає 40 балів.

Модуль 2. **Диференціальні рівняння**

- ТР “Диференціальні рівняння” – 10 балів;
- КР “Диференціальні рівняння першого порядку” – 5 балів;
- КР “Диференціальні рівняння другого порядку” – 5 балів;
- Поточна робота – 5 балів;
- Колоквіум – 10 балів.

Отже, сума балів за другий модуль складає 35 балів.

Модуль 3. **Ряди**.

- ТР “Ряди” – 10 балів;
- КР “Числові ряди” – 5 балів;
- КР “Функціональні ряди” – 5 балів;

Поточна робота – 5 балів.

Отже, сума балів за третій модуль складає 25 балів.

До здачі екзамену допускаються студенти, які виконали індивідуальні завдання і типові розрахунки (хоча б частково) та набрали не менше, ніж 50 балів. Найвища оцінка на іспиті складає 20 балів.

Як видно із підрахунку балів, найбільша кількість балів, яку може набрати студент, систематично виконуючи завдання, складає 100 балів, тобто оцінити знання студента можна тільки на “добре”. Якщо студент не набрав відповідної кількості балів, він може здавати іспит та одержати відповідну оцінку за відповідь на іспиті.

Додаткову кількість балів (для оцінок “відмінно” та “добре”) можна дістати за такі роботи:

- дострокова здача завдань;
- виконання додаткових, більш складних, ніж типові, завдань;
- участь у студентських конференціях із підготовленою

доповіддю;

- участь у студентських олімпіадах різних рівнів.

Ця система організації навчального процесу викликає зміни у психології студента. Він змушений працювати самостійно, систематично, ініціативно на протязі всього семестру, інакше не зможе набрати необхідної кількості балів.

З'являється також можливість переводити студента на більш високий рівень навчання, що особливо актуально при багатоступеневій підготовці фахівців: бакалавр, спеціаліст, магістр.

Підвищується якість знань студентів, з'являється зацікавленість у заняттях, стимул до навчання. Студентам надається можливість продовжити семестрові канікули за рахунок безсесійного навчання.

Навчальний процес стає ритмічним, активізується самостійна робота студентів з літературою. Забезпечується індивідуалізація та інтенсифікація навчального процесу.

Викладач виступає в ролі не тільки інформатора, передавача знань, а і у ролі організатора творчої діяльності та самостійної роботи студентів.

Результати опитування показують, що модульно-рейтингова система користується популярністю у студентів.

Розглянута технологія організації навчального процесу позитивно впливає на розвиток пізнавальних потреб студентів, підвищує рівень оволодіння загальними інтелектуальними операціями, виховує математичну акуратність.

Стимулюються всі сторони навчальної діяльності студентів, підвищується рівень навчально-методичної роботи викладача, якість підготовки спеціалістів, здатних сприймати нові інформаційні технології.

Література:

1. Сулима І.М., Ковтун І.І., Нікітіна І.А. Про модульну технологію викладання вищої математики // Тези конференції "Інформаційні технології в процесі підготовки спеціалістів вищої кваліфікації". – Кострома, 1999. – С. 18-19 (рос. мовою).
2. Ковтун І.І., Нікітіна І.А. Застосування модульно-рейтингової системи оцінки знань студентів при вивченні курсу вищої ма-

тематики // Матеріали Шостої Міжнародної конференції імені академіка М. Кравчука. – Київ, 1997. – С. 204.
3. Сулима І.М., Ковтун І.І., Нікітіна І.А. Модульно-рейтингова технологія навчання студентів та контроль їх знань // Тези Всеукраїнської науково-методичної конференції "Математика. Актуальні проблеми навчання, викладання і застосування у науковій та інженерній діяльності". – Львів, 2000. – С. 20-22.
4. Ковтун І.І., Нікітіна І.А. Про один спосіб управління пізнавальною діяльністю студентів // Збірник "Математика. Комп'ютер. Освіта", вип. 6, ч. 1. – М.: Прогрес-Традиція, 1999. – С. 74-76 (рос. мовою).

СПОСІБ НЕВ'ЯЗКИ (ВІДХИЛУ) РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕРІВНОСТІ

С.П. Ткаченко[1], З.Ю. Філер[2]
[1] м. Кіровоград, Технікум Кіровоградського державного технічного університету
[2] м. Кіровоград, Кіровоградський державний педагогічний університет ім. Володимира Винниченка

Вступаючи до ВУЗів, діти продовжують мати справу з нерівностями і здебільшого при їх розв'язанні використовують вміння та навички, набуті ще у шкільні роки, але цього виявляється замало при вивченні класичних нерівностей, при доведенні або дослідженні нерівностей та застосуванні нерівностей у різних галузях науки та техніки. Учні краще сприймають і пам'ятають рівняння. Тому пропонуємо допомогти їм у цьому завдяки зведенню задачі про розв'язання нерівності до розв'язання рівняння з врахуванням нев'язки (різниці між лівою й правою частинами нерівності). Це внесе структуризацію в множину розв'язків нерівності, і дасть змогу відповісти на питання не тільки, **де** виконується нерівність $\varphi(x) < \psi(x)$, але й **наскільки** менше $\varphi(x)$, ніж $\psi(x)$ при знайденому x, тобто чому дорівнює $r(x) = \psi(x) - \varphi(x)$, точніше яке $\boldsymbol{x}$ відповідає прийнятому $r>0$.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $2x - 3 < 5$.

Прирівнявши обидві частини нерівності, додамо зліва число $r > 0$: $2x - 3 + + r = 5$. Тепер використаємо відомий алгоритм розв'язування лінійних рівнянь:

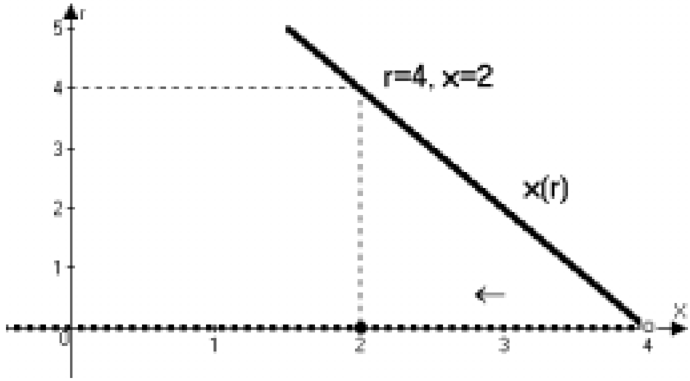
$$2x = 5 + 3 - r = 8 - r \Rightarrow x = 4 - r/2 .$$

Таким чином, розв'язок – це множина $\boldsymbol{M}$ $\boldsymbol{x}$-ів, які представляються формулою $x = 4 - r/2$, при $r > 0$:

$$x \in M = \{4 - r/2 \mid r > 0\} .$$

За допомогою параметра **r**, який являється **нев'язкою** в даній нерівності, множина розв'язків структурована: кожному $r > 0$ ставиться у відповідність єдиний $x(r)$, який задовольняє даній нерівності. Наприклад, при $r = 4$, маємо $x = 2$ (мал. 1а). Даний малюнок відображає розв'язки, які отримуються й без використання нев'язки й структуризація розв'язків не має чіткої наочності. Тому зобразимо розв'язки, виходячи з того, що x залежить від нев'язки r (мал. 1б). Можна було врахувати функціональну залежність x(r) і поміняти осі місцями, але в даному випадку зображення розв'язків наочно не відходить від загальноприйнятого, що буде краще сприйматись учнями й до того ж матиме пропедевтичну сторону – підготовка учнів до побудови графіків $x(y)$.

а)



б)

Мал. 1.

Приклад 2. Розв'язати **систему** нерівностей $3x < 5$, $5x > 4$.

Дана система еквівалентна системі рівнянь і нерівностей: $3x + r = 5$, $5x = 4 + + s$, $r > 0$, $s > 0$. З рівнянь знаходимо

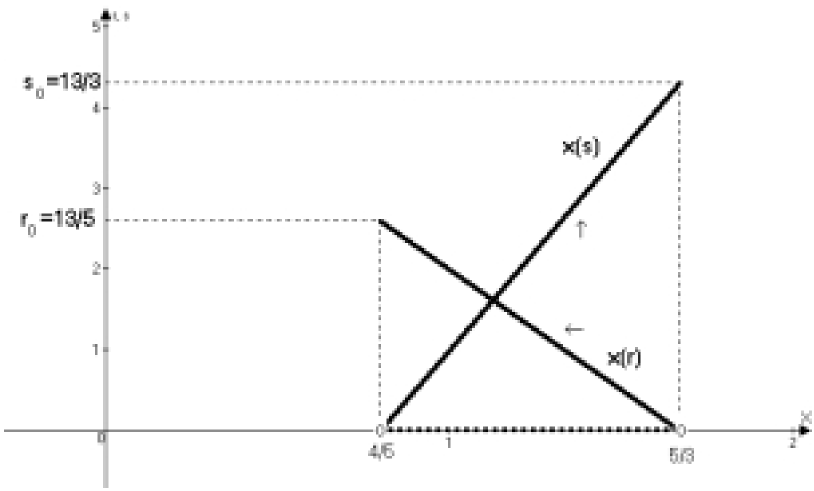
$x = (5 – r)/3 = (4 + s)/5$, звідки

$$\frac{5-r}{3}=\frac{4+s}{5}\Rightarrow 4+s=\frac{5}{3}(5-r)\Rightarrow s=\frac{13-5r}{3}>0\Rightarrow r<\frac{13}{5}=r_0\,.$$

Це дає розв'язок системи нерівностей у вигляді:

$$x\in\{(5-r)/3\,|\,0<r<13/5\}=\{(4+s)/5\,|\,0<s<13/3\}.$$

Другу форму відповіді неважко отримати, міркуючи аналогічно. Відповідь дає більшу інформацію, ніж традиційно прийнята: не тільки, **де** лежать x, які задовольняють дану систему, але й **наскільки** більше або менше відповідні вирази при конкретних значеннях x. При цьому ще й указується верхні межі нев'язок r. Ситуацію пояснює мал. 2.



Мал. 2.

Як бачимо, розв'язки знаходяться на інтервалі (4/5; 5/3), але вони чітко структуровані для вибраних параметрів $r > 0$ або $s > 0$.

Нагадаємо, що зміст поняття "нерівність" можна розкрити так: "Два вирази, сполучені знаком <, > або ≤, ≥ утворюють нерівність". А розв'язати нерівність – означає вказати дійсні (**або комплексні**) значення невідомих, для яких ця нерівність справджується. Саме поява комплексних розв'язків нерівності, зокрема, при використанні даного способу нев'язки при розв'язуанні квадратних або двочленних нерівностей [1; 2] викликає здивування і навіть помилки в більшості вчителів, коли вони вчать учнів казати "**немає розв'язків**" замість "**немає дійсних розв'язків**".

Приклад 3. Розв'язати нерівність $x^2 + 6x + 10 < 0$.

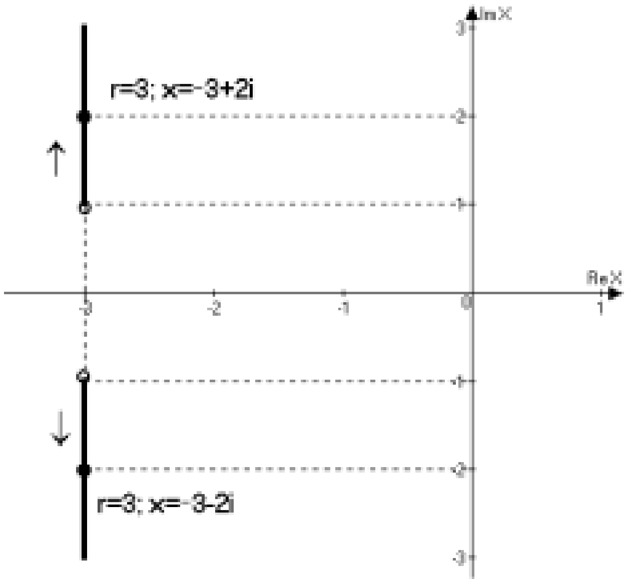
Розв'язками будуть комплексні числа, бо дискримінант від'ємний, тому введемо нев'язку $r > 0$ і розв'яжемо систему: $(x + 3)^2 = -1 - r,\ r > 0 \Rightarrow x + 3 = \pm\sqrt{-1(1+r)} = \pm \mathrm{i}\sqrt{1+r}$,

$x_1(r) = -3 + i\sqrt{1+r}$, $x_2(r) = -3 - i\sqrt{1+r}$.

Тоді загальний розв'язок нерівності можна записати так: $x \in \{-3-i\sqrt{1+r}, -3+i\sqrt{1+r} \mid \mathrm{r}>0\}$.

$$x \in \{x_1(r), x_2(r) \mid x_1(r) = -3 + i\sqrt{1+r}, x_2(r) = -3 - i\sqrt{1+r}, r > 0\}$$

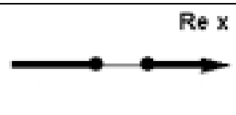
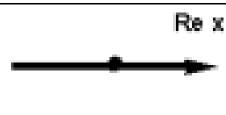
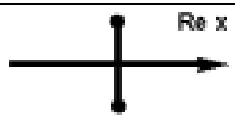
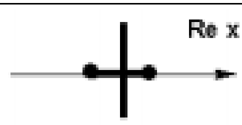
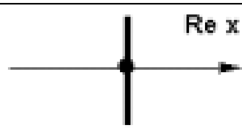
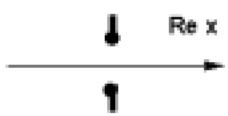
Ситуацію пояснює мал. 3. Зрозуміло, що із збільшенням r точка $x_1(r)$ буде рухатися вгору, а $x_2(r)$ – униз. Таким чином, дана нерівність має **комплексні** розв’язки, геометрично зображені об’єднанням двох півосей, паралельних осі **Im X**.



Мал. 3.

Таблиця

Розв’язки нерівностей виду $x^2 + px + q$ V 0 (де V – це один із знаків >, <, ≤ або ≥; p, q ∈ R), які отримуються при використанні метода нев’язки

D V	**D > 0**	**D = 0**	**D < 0**
≥ 0			
≤ 0			

При розв'язанні інших квадратних нерівностей, навіть при наявності дійсних розв'язків, з'являються комплексні розв'язки. Узагальнену картину можна спостерігати в наведеній таблиці.

По вертикалі відкладено уявні частини розв'язків квадратних нерівностей, які необов'язково перетинають вісь **Re X** і можуть розташовуватись з однієї сторони від осі **Re X**.

Виконаємо перевірку розв'язків даної нерівності. Підставимо $x_1(r)$ і $x_2(r)$:

$$(-3+i\sqrt{1+r})^2+6(-3+i\sqrt{1+r})+10=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9-6i\sqrt{1+r}-1-r-18+6i\sqrt{1+r}+10=0\Rightarrow 0=0.$$

$$(-3-i\sqrt{1+r})^2+6(-3-i\sqrt{1+r})+10=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9+6i\sqrt{1+r}-1-r-18-6i\sqrt{1+r}+10=0\Rightarrow 0=0.$$

Отже, при підстановці розв'язків у нерівність отримується правильна числова нерівність із дійсними числами, суто уявні числа при цьому взаємознищуються.

Таким чином, даний метод зведення нерівностей до рівнянь дозволяє структуризувати відповідь, що досить корисно для машинної обробки й дозволяє зручно й легко отримати комплексні розв'язки квадратних нерівностей, що допоможе при вивченні теорій нерівностей та комплексних чисел. Даний метод дає можливість узагальнити поняття нерівності, розглядаючи задачу її розв'язання як пошук образу за даними прообразом та законом відображення.

Список використаної літератури

1. Філер З.Е., Ткаченко С.П. Комплексные решения квадратного неравенства // Понтрягинские чтения – XI. Тезисы докл. – Воронеж: ВГУ, 2000. – С. 142.

2. Філер З.Ю. Рівняння та нерівності в науці та навчанні // Математика, її застосування та викладання. Матер. міжвуз. регіон. конф. (24-25.09.1999р.). – Кіровоград: КДПУ. – С. 141-145.

ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ІСТОРИЗМУ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ

П.І. Ульшин, С.В. Діордіца
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Історія математики є важливим і необхідним елементом у повноцінному та якісному вивченні сучасної математики як у вищих учбових, так і в середніх закладах освіти. Свідченням цьому є багато різних фактів. Розглянемо деякі з них.

При вивченні теореми Піфагора не достатньо було б запам'ятати її твердження і доведення. Такий підхід у навчанні був би вузьким і не сприяв би запам'ятанню на довго. Для розширення світогляду учнів потрібно обов'язково повідомити їм, що цю теорему довів стародавній грецький вчений Піфагор у V ст. до н.е., показати прості й наочні доведення цієї теореми, розповісти пов'язані з нею легенди. При цьому можна відмітити, що твердження цієї теореми без доведення, було викарбовано вавілонянами на клинописних табличках ще за 1200 років до Піфагора, а єгиптяни ще в XX ст.. до н.е. знали, що трикутник із сторонами: 3, 4, 5, – прямокутний і користувалися ним для побудови прямих кутів при будівництві різних споруд. Такі повідомлення свідчать про важливість теореми Піфагора.

При вивченні властивостей трикутників у курсі геометрії середньої школи серед інших розглядаються такі твердження:

1. Три бісектриси внутрішніх кутів трикутника перетинаються в одній точці, яка є центром вписаного кола.
2. Перпендикуляри, проведені через середини сторін трикутника, перетинаються в одній точці, яка є центром описаного кола.
3. Три висоти трикутника перетинаються в одній точці.
4 Три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини.

Про ці твердження можна повідомити наступне. Перші два з них були з доведенням описані у творі Евкліда "Начала" (III ст. до н.е.), а третє й четверте були відомі Архімеду (II ст. до н.е.), причому, точку перетину висот було названо ортоцентром (від грецького слова “ортос” – прямий), а точку перетину медіан Архімед назвав барицентром – центром ваги трикутника.

Вчені XVIII ст. продовжили вивчати властивості трикутників. У 1765 р. Л. Ейлер довів твердження: “У будь-якому трикутнику ортоцентр, барицентр і центр описаного кола лежать на одній прямій”, яку пізніше було названо “прямою Ейлера”. У 20-х роках XIX ст. французькі математики Ж. Поснеле і Ш. Бріаншон незалежно один від одного встановили твердження: “Основи медіан, основи висот і середин відрізків висот, які з’єднують ортоцентр з вершинами трикутника, лежать на одному і тому ж колі, яке називається колом дев’яти точок”. К. Фейєрбах довів, що центр цього кола лежить на “прямій Ейлера”. Останні два твердження можуть зацікавити учнів і викликати бажання побудувати “коло дев’яти точок”.

У вищій математиці вивчаються ряди Фур’є. Цікавою була історія їх відкриття. Після довголітніх досліджень коливання струни французький математик Ж. Фур’є у 1807 році без доведення, інтуїтивно сформулював теорему, за якою будь-яка довільна функція може бути представлена тригонометричним рядом. Він та його сучасники користувалися цим твердженням при дослідженні функцій. Проте, видатній французький математик П. Лаплас застерігав, що не можна користуватися не доведеним твердженням при обчисленнях. Лише в 1829 році цю теорему довів математик П. Діріхле. Після цього ім’ям Фур’є була названа і його теорема, і тригонометричні ряди та їх коефіцієнти. Так інтуїція допомогла вченому зробити відкриття.

У 1853 році німецький геометр К. Польке інтуїтивно сформулював і опублікував основну теорему аксонометрії, яка читається так: Три відрізки довільної довжини, що лежать в одній площині і виходять з однієї точки під довільними кутами один до одного, можна розглядати як паралельну проекцію просторового ортонормованого репера $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$. Довів це твердження у 1860 році німецький математик Г. Шварц, і воно тепер зветься теоремою Польке-Шварца. Як бачимо, К. Польке інтуїція не підвела. Отже, інтуїтивне відчуття результатів, поставленої проблеми приносить користь як для дослідника, так і для науки. У математиці є багато таких проблем, які швидше розв’язати інтуїтивно, а потім можна зробити і строге доведення.

При вивченні алгебраїчного методу геометрії побудов за допомогою циркуля та лінійки доцільно звернути увагу на те, що він був обґрунтований древньогрецькими вченими у V ст. до н.е., які застосовували його для розв'язування алгебраїчних рівнянь першого і другого степенів.

Обов'язково потрібно розв'язати задачу на золотий поділ відрізка, тобто поділ відрізка точкою на дві частини так, щоб більша з них була середнім пропорційним між меншою частиною і всим відрізком. Такий поділ ще називають гармонічним. Він виконується циркулем та лінійкою при розв'язуванні рівняння другого степеня: $x^2+ax-a^2=0$, де a – даний відрізок, x – більша його частина.

Після ефективного розв'язання поставленої задачі слід привести приклади широкого використання гармонічного поділу. Розповісти, що такий поділ виявлено у будові єгипетських пірамід, у розміщенні колон шедевра архітектури Стародавньої Греції – Парфеноні, у статуї Аполлона, на картинах Леонардо-да-Вінчі, Рафаеля, Шишкіна і ін. Слід відмітити, що про золотий поділ написано багато наукових статей і книг. Психологи виявили цікаву властивість золотого поділу. Сприймання його дає людині естетичну і духовну насолоду: розслаблення, спокій, душевну рівновагу і т.п.

Отже, використання історичних відомостей при вивченні сучасної математики сприяє розвитку світогляду школярів і студентів, сприяє формуванню їхніх поглядів на цю дисципліну, пробуджує інтерес до її вивчення, стимулює появу інтуїції при розв'язуванні теоретичних і практичних проблем, розвиває духовні цінності людини: математичне мислення, витонченість логічних міркувань, щиру повагу до видатних вчених минулого.

ГРАФІЧНІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

П.І. Ульшин, С.М. Пашенко
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Всі графічні методи розв'язування рівнянь у деякій мірі є наближеними. Це випливає хоч би з того, що зображення точок і ліній на площині завжди абстрактне, тобто таке, що не точно відповідає означенню.

Відмітимо, що окремі рівняння розв'язувалися за допомогою геометричних побудов ще в стародавні часи. Найбільшого розквіту досягли методи розв'язування рівнянь за допомогою циркуля та лінійки у Стародавній Греції в елліністичний період: VI-I ст. до н.е.

Піфагорійці у V ст. до н.е. відкрили несумірні відрізки, тобто такі, що не вимірюються раціональними числами. Крім раціональних і цілих чисел ніяких інших вони не знали. Дізнавшись, що зв'язок між відрізками будь-якої довжини можна встановити за допомогою відношень, вони замінили числові коефіцієнти рівнянь відрізками і корені рівнянь знаходили у відрізках. Теорію відношення відрізків розробив видатний грецький геометр Евдокс. Так була створена геометрична алгебра.

Методами геометричної алгебри піфагорійці розв'язували рівняння першого і другого степенів таких видів:

1) $x + ax = b$ $\quad (b > a)$;

2) $x^2 = a^2 + b^2$ $\quad (a > b)$;

3) $x + y = a,$ $\quad xy = b,$ $\left(\dfrac{a}{2} > b\right)$;

4) $x^2 + ax - a^2 = 0$ та інші.

Тут a і b – відрізки певної довжини, які відповідають цілим або раціональним додатним числам. Від'ємні числа в той період були невідомі, і тому на від'ємні корені не зверталася увага. Якщо обидва корені одержувалися від'ємними, то рівняння вважалося нереальним або неправильно складеним.

Правильність розв'язку рівняння обґрунтовувалася застосуванням аксіом і правильних геометричних тверджень. Одержаний розв’язок не завжди можна було виразити числом, оскільки він міг бути несумірним відрізком.

Відомо, що задача “про трисекцію кута”, яку піфагорійці довго намагалися розв’язувати циркулем і лінійкою, була зведена до алгебраїчного рівняння третього степеня: $x^3 - 3x + a = 0$, де $a = 2\cos\alpha$, $x = 2\cos\varphi$, $\alpha = 3\varphi$, де α – даний кут, φ – шуканий кут.

Вперше це рівняння було розв’язане видатним грецьким вченим Архімедом у II ст. до н.е., за допомогою розробленого ним методу “вкладок”. Користуючись циркулем і лінійкою з двома поділками, він точно побудував кут φ, а величину x знайшов із прямокутного трикутника, в якому число 2 – гіпотенуза, x – катет і φ – гострий кут.

Розроблений Архімедом метод, був популярний довгий час. У XVI ст. його часто використовував видатний математик Ф. Вієт для розв’язування рівнянь третього степеня.

У XI ст. видатний персидський математик Омар Хайям для розв’язування кубічного рівняння: $x^3 + ax = b$ застосував “конічні перерізи”, відкриті Аполлонієм ще у III ст. до н.е. Він замінив дане рівняння рівняннями кола $x^2 + y^2 = qx$ і параболи $x^2 = py$, де $a = p^2$ і $b = p^2q$. Побудувавши на площині коло і параболу, він визначив невідоме x, як абсцису точки перетину кривих.

Аналогічно, за допомогою різних пар “конічних перерізів”, Омар Хайям розв’язав ще 14 типів рівнянь третього степеня з різними коефіцієнтами.

За допомогою геометричних побудов корені рівнянь третього і четвертого степенів знаходили і математики XVII століття. Так, для графічного розв’язування рівняння четвертого степеня $z^4 + z^2 - 9 = 0$ Р. Декарт, ввівши нову змінну, замінив його еквівалентною системою рівнянь параболи $z^2 = x$ і кола $x^2 + z^2 = 9$. Координати точок перетину кола і параболи визначають корені даного рівняння.

Графічними способами розв’язували рівняння третього і четвертого степенів видатні математики П. Ферма, І. Ньютон, Г. Монж та інші.

Створений у XVII ст. координатний метод Р. Декарта спростив графічне розв’язування рівнянь:

1). Якщо дано систему двох рівнянь з двома невідомими, то будують графіки обох рівнянь і знаходять координати спільних точок цих графіків. Одержані координати є розв'язками системи.

2). Якщо алгебраїчне рівняння з одним невідомим має степінь вище першого, то вводять нову змінну, за допомогою якої будують систему двох рівнянь, еквівалентну даному рівнянню. Будують графіки рівнянь системи. Координати спільних точок графіків і визначають розв'язок рівняння.

3). Якщо рівняння складається з двох частин: алгебраїчної і трансцендентної (тобто тригонометричної або логарифмічної), то трансцендентну частину позначають новою змінною і одержують систему двох рівнянь з двома невідомими. Будують графіки рівнянь цієї системи і знаходять координати спільних точок. Ці координати визначають розв'язок.

Використовуючи геометричний зміст похідної та інтегралу, розроблено графічний метод знаходження функцій, які є розв'язками диференціальних рівнянь першого і другого порядків.

Отже, графічне розв'язування рівнянь має довгу та цікаву історію розвитку, і в сучасній математиці широко використовується і продовжує розвиватись. Воно цінне тим, що унаочнює процес розв'язування рівнянь; запобігає виникненню помилок при побудові точних розв'язків; вказує проміжки на числовій вісі, де треба шукати розв'язки рівняння; наближено визначає функції, які є розв'язками диференціальних та інтегральних рівнянь.

Література:

1. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. – М.: Мир, 1986. – 432 с.

ОБ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

С.В. Уткина
г. Кривой Рог, Криворожский государственный педагогический университет

Дисциплина «Высшая математика» учебными планами для нематематических специальностей высших учебных заведений традиционно отнесена к циклу фундаментальных дисциплин. Восприятие программного материала этой дисциплины требует достаточно высокого уровня математической подготовки за курс средней школы. Отсутствие такового в большей части студентов первых курсов инженерно-педагогических специальностей с первых шагов изучения этой дисциплины вызывает негативное отношение к процессу усвоения курса «Высшая математика». Поэтому с самого начала изучение этого курса возникает проблема преодоления психологического барьера: страх перед появлением новых математических понятий и закономерностей и боязнь повторения бессилия перед усвоением новых фактов.

Все вышесказанное и должно предопределять специфику организации самостоятельной работы студентов нематематических специальностей.

Определенный опыт работы с таким контингентом студентов позволил нам определиться по формам и методам организации познавательной деятельности студентов при изучении дисциплины «Высшая математика» на инженерно-педагогическом факультете. Основной формой организации самостоятельной работы были избраны домашние творческие работы (ДТР) по пять шесть работ в каждом учебном семестре. Термин «творческая работа» воспринимается студентами как некоторое утверждение веры в их математические способности: каждая ДТР требует знаний, умений и навыков составления индивидуальных условий заданий согласно той или иной темы.

К таким темам в первом семестре отнесены: «Матрицы. Операции над матрицами, их основные свойства», «Определитель квадратной матрицы. Основные свойства определителей», «Операции над векторами (на плоскости, в пространстве)», «Линейная комбинация векторов», «Нелинейные операции над векторами», «Проекция вектора», «Уравнения прямой линии на плоскости», «Прямая линия и элементы треугольника».

Каждый из ДТР предшествует тщательно продуманное и компактно проведенное практическое занятие по соответствующей теме. В процессе проведения такого занятия осуществляется научение студентов (по Л.Б.Ительсону) постановки проблемы и нахождения путей ее решения. Например, по теме «Прямая линия на плоскости» выполняется две ДТР: подготовительная – «Уравнение прямой», и итоговая – «Прямая линия и элементы треугольника». Первая из них предполагает научение студентов осуществлять обоснованный переход от одного вида уравнения прямой – общего уравнения прямой, к любому из пяти им известных и наоборот. Вторая из ДТР предполагает научение рационального выбора уравнения прямой. В связи с такими дидактическими целями этих ДТР на первом из практических занятий четко формулируется задание:

1) задать общее уравнение прямой на плоскости;

2) заданное уравнение прямой преобразовать в уравнение прямой, проходящей:

а) через две заданные точки;

б) через одну заданную точку и угловой коэффициент;

в) в отрезках на осях и т.д.

Домашняя творческая работа – аналог заданий, получивших реализации на практических занятиях. Такая постановка ДТР заставляет студентов продуктивно работать на занятиях, сознательно осмысливать содержание заданий. Следующая ДТР по теме «Прямая линия на плоскости», продолжая содержание предыдущей, будучи отработанной на практическом занятии, содержит задания:

1. Задать координаты вершин треугольника (необходимо самостоятельно рационально выбрать вершины треугольника).

2. Записать уравнение:

а) сторон;

б) высот;

в)медиан треугольника.

3. Определить координаты точек пересечения:

а) высот,

б) медиан.

4. Определить углы треугольника.
5. Определить длину:

а) высот;

б) медиан треугольника;

6. Записать уравнение прямой, проходящей через любую избранную точку параллельно каждой из сторон треугольника.

Поскольку каждый студент сам задает исходные данные для решения целого ряда конкретных заданий по теме, то каждая из ДТР получает статус индивидуальной работы, выполнение которой требует не только определенных знаний, умений и навыков, но и проявление уверенности в свои математические способности.

Закономерно, что каждая ДТР обязательно проверяется, анализируются допущенные ошибки, а наиболее важные ошибки отмечаются специальным знаком © - знак обязательной индивидуальной консультации.

После такой проверки в ДТР, оцененных оценками «2» и»3», студенты выполняют работу над ошибками (важно, что бы в тех же ДТР на месте отмеченной ошибки другим цветом пасты или карандашом). Работа повторно оценивается.

Завершающим этапом по каждой ДТР является ее защита каждым студентом или выборочно (в зависимости от назначения ДТР, качества ее выполнения всей академической группой).

Такая технологи проверки знаний, умений и навыков позволяет максимально индивидуализировать работу с каждым студентом по заранее заложенной учебной программой системе знаний, позволяет студентам постепенно преодолеть психологический барьер боязни математики и позволяет оценить реальную подготовку каждого студента к итоговому семестровому контролю – экзамену или зачету.

Чтобы каждый студент мог во временном измерении оценить свою подготовку к итоговому контролю составляется «карточка допусков» – КД, где фиксируются все виды контроля по темам и оценки, за каждый вид контроля.

Очевидно, что важно добиться от каждого студента качественного выполнения всей системы ДТР как основной формы контроля за самостоятельной работой студентов в межсессионный период обучения. Такая система позволяет в первом учебном семестре точно определить потенциальные возможности каждого студента к дальнейшему обучению высшей математики, т.е. провести дифференциацию потенциальных возможностей студентов нематематических специальностей:

– может и хочет знать математику;

– может, но не хочет знать математику;

– хочет, но не может знать математику;

– не может и не хочет знать математику.

Закономерно, что каждая из вышеназванных групп в дальнейшем требует определенного подхода, но при этом каждый студент осознает, что он перестал быть загадкой для преподавателя в аспекте его реальных математических способностей.

Литература:

1. Ительсон Л.Б. Лекции по проблемам современной педагогики обучения. – Владимир, 1970.
2. Лернер И.Я. Дидактические основы методов обучения. – М.: Педагогика, 1981.
3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В трех частях. Ч. 1 / Под общей ред. А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 1990.
4. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. Ч. 1 / Пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1982.

МЕТРИКА

Р.Э. Фердман
г. Днепропетровск, Днепропетровская еврейская община
rodion@ff.dsu.dp.ua

Понятие метрики связано с определением расстояния между парой точек в пространстве. Пространство, в котором можно определять расстояние между точками в математике называется метрическим пространством [1].

У метрики есть следующие основные свойства:

1. Расстояние (длина) между парой точек не зависит от порядка выбора первой (начальной) и второй (конечной) точек:

$$l(x_1, x_2) = l(x_2, x_1) \tag{1}$$

2. Расстояние между парой точек всегда положительно:

$$l(x_1, x_2) \geq 0\,. \tag{2}$$

Причем расстояние равно нулю в том и только в том случае, если точки совпадают, т.е. $x_1 = x_2$.

3. Для любых трех точек выполняется неравенство треугольника:

$$l(x_1, x_3) \leq l(x_1, x_2) + l(x_2, x_3) \tag{3}$$

Частным случаем метрического пространства является евклидово пространство знакомое нам со школьной геометрии. Рассмотрим метрику евклидовых пространств с различным числом измерений:

1 измерение – Координатная ось.

Если координаты точек оси имеют размерность длины (например, метры), то расстояние между парой точек:

$$dl = |x_2 - x_1| = |dx|, \quad \text{а} \quad dl^2 = dx^2 \tag{4}$$

Если же масштаб на координатной оси не имеет определенной единицы измерения (в общем случае он может изменяться от точки к точке, т.е. быть функцией координаты), то расстояние между парой близких точек:

$$dl = h(q)|dq|, \quad \text{а} \quad dl^2 = (h\,dq)^2 = h^2 dq^2\,, \tag{5}$$

где q – координата точки, h – масштабный коэффициент, называемый коэффициентом Ламе [2, 4, 5], который показывает, ка-

кая длина (например, в метрах) приходится на единицу изменения координаты q в данной точке.

Примечание:

Вообще-то есть смысл говорить и о нахождении расстояния между парой далеких друг от друга точек, хотя оно и не будет нас здесь интересовать. Но чтобы «не напускать туману», можно прояснить, что такое расстояние получается интегрированием:

$$l = \int_{q_1}^{q_2} dl = \left| \int_{q_1}^{q_2} h(q) dq \right| \tag{6}$$

Т.е. весь промежуток от q_1 до q_2 разбивается на бесконечно малые отрезки dq, и расстояние l между крайними точками находят суммированием их длин.

Очевидно, что если масштаб постоянен на всем отрезке, то есть h не зависит от q, то интегрирование выполняется тривиально:

$$l = \left| \int_{q_1}^{q_2} h dq \right| = h|q_2 - q_1|$$

В случае пространства большего числа измерений, еще возникает непростой вопрос о выборе траектории для интегрирования, но мы здесь не будем заниматься этим вопросом.

Далее, мы будем говорить о бесконечно близких точках, специально не уточняя этого.

2 измерения – Плоскость

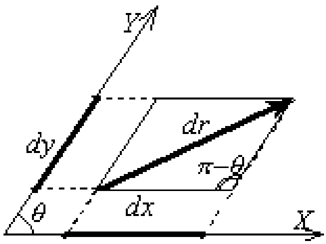
Как известно, расстояние между парой близких точек на плоскости в декартовых прямоугольных координатах определяется как длина dl вектора $d\vec{r} = (dx, dy)$, соединяющего эти точки, квадрат которого находят по теореме Пифагора:

$$dl^2 = dr^2 = dx^2 + dy^2 \tag{7}$$

В случае декартовых косоугольных координат длина вектора определяется по теореме косинусов:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + 2\cos(\theta)\, dx\, dy\,, \tag{8}$$

где θ – угол между осями координат.



Эта формула обобщается на случай произвольных (неортогональных криволинейных) координат q^1, q^2:

$$dl^2 = \left(h_1 dq^1\right)^2 + \left(h_2 dq^2\right)^2 + 2\cos\theta\left(h_1 dq^1\right)\left(h_2 dq^2\right) \qquad (9)$$

При этом как угол θ, так и коэффициенты Ламе h_1, h_2, могут меняться от точки к точке, т.к. угол между линиями координатной сетки и масштаб каждой из координат не обязательно везде одинаковы.

Эту формулу можно записать в виде произведения матриц:

$$dl^2 = \begin{pmatrix} dq^1 & dq^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (h_1)^2 & h_1 h_2 \cos\theta \\ h_1 h_2 \cos\theta & (h_2)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dq^1 \\ dq^2 \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

где матрица коэффициентов называемая фундаментальной матрицей, которая является ковариантным тензором второго ранга (здесь не доказывается). Она также называется фундаментальным или метрическим тензором [4] и обозначается:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h_1)^2 & h_1 h_2 \cos\theta \\ h_1 h_2 \cos\theta & (h_2)^2 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Обратим внимание, что $g_{21} = g_{12}$, то есть метрический тензор является симметричной матрицей. Его элементы, в общем случае являются функциями обоих координат, т.е. могут изменяться от точки к точке по-разному при перемещении в любом направлении. А если координаты являются ортогональными (даже криволинейные), то метрический тензор представляется диагональной матрицей, то есть, все его элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю.

Принято обозначать суммирование по каждому из индексов, записывая его дважды (по одному разу вверху и внизу) и опуская знак суммы, тогда квадрат расстояния:

$$dl^2 = g_{ij} dq^i dq^j \qquad (12)$$

Используется два различных представления вектора $d\vec{q}$ [4]:

- Матрица-столбец: $dq^i = \begin{pmatrix} dq^1 \\ dq^2 \end{pmatrix}$ – контравариантная

форма вектора, обозначаемая верхним индексом;

- Матрица-строка:

$$dq_i = \begin{pmatrix} dq_1 & dq_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dq^1 & dq^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = g_{ij} dq^j, \qquad (13)$$

являющаяся произведением двух первых матриц в правой части (10), называемая ковариантной формой вектора $d\vec{q}$ и обозначаемая нижним индексом.

Тогда (12) можно записать в виде:

$$dl^2 = dq_i dq^i = dq^i dq_i = g^{ij} dq_i dq_j, \qquad (14)$$

где g^{ij} – контравариантная форма метрического тензора.

Формулы (12), (14) применимы для **пространства Римана любого числа измерений**. При этом область значений каждого из индексов i, j и размер векторов q^i, q_i, и матриц g_{ij}, g^{ij} равны числу измерений пространства. Кроме описания положительно определенной метрики эти формулы применимы и к описанию псевдометрики (например, в теории относительности), не рассматриваемой здесь.

Применения: Метрический тензор применяется не только для определения расстояния между двумя близкими точками, а и для нахождения квадрата (длины) любого вектора:

$$\vec{A}^2 = g_{ij} A^i A^j \qquad (15)$$

Кроме того, с его помощью определяется скалярное произведение двух различных векторов:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = g_{ij} A^i B^j \qquad (16)$$

Обратим внимание, что коммутативность скалярного произведения векторов: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$, связана именно с симметричностью метрического тензора.

Примеры нахождения h^i, h_i, q^i, q_i, g_{ij}, g^{ij} для различных стандартных криволинейных ортогональных координат, особенно важных для приложений, имеет смысл предложить слушателям выполнить самостоятельно в виде упражнений. А именно: декартовы (2, 3, 4 измерения), полярные (2), цилиндрические (3), сферические (3).

1. Декартовы прямоугольные координаты (*x*, *y*) на плоскости:

Как видно из формулы (7), на плоскости:

$$dq^i = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \quad h_1 = h_2 = 1, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для евклидова пространства любого числа измерений в декартовых прямоугольных координатах, каждый из коэффициентов Ламе равен 1, а метрический тензор представляет собой единичную матрицу. Обратим внимание, что в этом случае элементы метрического тензора не зависят от координат, то есть, постоянны во всем пространстве. Иными словами, в декартовых координатах явно проявляется их однородность и однородность евклидового пространства. Этим свойством обладает только декартова прямоугольная система координат в евклидовом пространстве.

2. Полярные координаты (*r*, *α*) на плоскости**:**

Являются ортогональными криволинейными координатами. Расстояние между парой близких точек в них, как известно из аналитической геометрии:

$$dl^2 = (dr)^2 + (r\,d\alpha)^2 \tag{17}$$

Как видно, для полярных координат

$$dq^i = \begin{pmatrix} dr \\ d\alpha \end{pmatrix}, \quad h_1 = h_r = 1, \quad h_2 = h_\alpha = r, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

3. Цилиндрическая система координат (*ρ*, *α*, *z*) в трехмерном пространстве:

Квадрат расстояния между точками будет:

$$dl^2 = (d\rho)^2 + (\rho\,d\alpha)^2 + (dz)^2 \tag{18}$$

Отсюда:

$$dq^i = \begin{pmatrix} d\rho \\ d\alpha \\ dz \end{pmatrix}, \quad h_1 = h_\rho = 1, \quad h_2 = h_\alpha = \rho, \quad h_3 = h_z = 1.$$

Метрический тензор: $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Сферическая система координат (*r*, *θ*, *α*) в трехмерном пространстве.

Квадрат расстояния между точками будет:

$$dl^2 = (dr)^2 + (r\,d\theta)^2 + (r \sin\theta\, d\alpha)^2 \qquad (19)$$

Отсюда:

$$dq^i = \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\alpha \end{pmatrix}, \quad h_1 = h_r = 1, \quad h_2 = h_\theta = r, \quad h_3 = h_\alpha = r \sin\theta$$

Метрический тензор: $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$

Литература:

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.– М.: Наука, 1984.
2. Ли Цзун-дао. Математические методы в физике. – М.: Мир, 1965.
3. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – Харьков: Вища школа, 1986.
4. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. – М.: МГУ, 1974.
5. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – М.: Наука, 1985.

МЕТОДИ АКТИВІЗАЦІЇ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

З.Ю. Філер
м. Кіровоград, Кіровоградський державний педагогічний університет ім. Володимира Винниченка

1. Індивідуальні домашні завдання

Ще в школі автор усвідомив малу ефективність фронтальних домашніх завдань, коли значна частин учнів навіть при наявності контролю списує у своїх більш відповідальних та краще підготовлених товаришів. Застосовуючи **індивідуальні** домашні завдання (ІДЗ), автор просив учнів робити їх чітко, доповнювати в разі потреби моделями. Класом розв'язувалися **всі** завдання з підручника та збірника задач. Це вимагало від учителя приділяти увагу учням й практично оволодіти самому всіма матеріалами. Цей досвід автор переніс у роботу зі студентами Донецького політехнічного інституту (1960-1989 рр.). Будучи учасником Всесоюзної наради завідуючих кафедрами математики 1975 р., автор із задоволенням сприйняв досвід МЕІ, де було створено "Збірник задач із курсу вищої математики" (Типові розрахунки Кузнєцова). Хоча теоретичні питання (ТП) та теоретичні вправи (ТВ) є фронтальними, а розрахункові завдання (РЗ) відрізняються лише конкретним "числовим" матеріалом, їх виконання чіткіше організує поточний навчальний процес. За кожне ТП, ТВ та РЗ призначається відповідальний студент, який знає, що він буде запрошений до дошки з відповідним своїм завданням й повинен його виконати одним із перших, показати викладачеві, врахувати його зауваження, а потім – перевіряти виконання завданнями колегами з групи, приймати це завдання. У групі ведеться екран виконання ІДЗ ("простирадло"), де студенти самі відмічають факт виконання закресленням відповідної клітини. Після прийому відповідальний перекреслює її вдруге. Викладач контролює виконання відповідальними й, вибірково, іншими студентами на практичних заняттях (ПЗ) та на заліку чи екзамені, куди студенти приносять свої ІДЗ. В разі необхідності з дозволу викладача студент може подивитися свої записи при відповіді на питання екзаменаційного білета. Це підвищує роль самостійного виконання ІДЗ. Екзаменаційні вимоги не виходять за рамки, встановлені ІДЗ.

2. Нові поняття з математики формулюються як абстракції фізичних понять, які допомагають створити проблемні ситуації

Доцільність тих чи інших понять та теорем, нового математичного апарату студентам всіх, зокрема, технічних Вузів, яка визначає зацікавленість студентів, повинна формуватися на лекціях та практичних заняттях за допомогою задач із фізичним та технічним змістом. Так майже завжди було і в історії науки; згідно з ноогенетичним законом, кожна людина у своєму розумовому та професійному становленні повинна пройти, хоч і прискореним темпом, тими шляхами, які вже пройшло людство. "Чисті" математики забувають ті дитячі відкриття, які вони зробили в ранньому дитинстві, коли рахували спершу до 10, а потім до 100 й далі; знайомство з таїнами числа та форми теж відбувалося роками дитинства. Ми забуваємо, що від методів Євдокса та Архімеда до відкриттів Кеплера та Кавальєрі пройшло майже 2000 років. Навіть, від знахідок Декарта, Ньютона й Лейбніца пройшло вже більше 300 років. Студенти технічних та педагогічних Вузів, які не мають видатних математичних здібностей, вивчають важливі математичні результати протягом 5–6 років у школі та 1–2 років у вузі. Без чіткої мотивації та фізичних і "економічних" аналогій цього зробити неможливо. У студентів треба створювати математичну інтуїцію, яка ґрунтується на відомих поняттях із побуту та фізики. Визначальним тут є поняття **руху**, зміни, вектора, швидкості та прискорення тощо. Багато складних неочевидних понять та формул мають дуже просте "фізичне" тлумачення. Так, формула похідної складеної функції $y=f(u)$, $u=g(x)$ по суті зрозуміла учням 1-го класу! Вона еквівалентна задачі типу: Літак рухається втричі швидше автомобіля, який іде швидше мотоцикла вдвічі. У скільки разів літак рухається швидше, ніж мотоцикл? Діти скажуть, що у 6 разів, а за вимогою вчителя скажуть і як знайшли 6: множачи 3 на 2. Якщо студент засвоїв не тільки формальне означення похідної як границі, але знає і її механічний смисл як **швидкість** зміни функції по зрівнянню зі зміною аргументу, для нього ланцюгове правило $y'_x=y'_u u'_x$ абсолютно зрозуміле. Формальне **доведення,** в разі нестачі часу, може бути й опущено. Вивчення математики в школі та вузі зараз іде в основному **за** допомогою розв’язання **прикладів**; на відміну від минулого, учням пропонується мало **задач**, які виробляють навички побудови математичної **моделі** реальної дійсності. А як раз це й потрібно, перш за все, користувачам математики. Безумовно, необхідно й оволодіти основним математичним апаратом. Задачі з фізики, теоретичної механіки, опору матеріалів, електротехніки тощо сприяють закріпленню цих навичок.

3. Математичні диктанти як форма контролю та навчання студентів

Знайомство з групою (потоком) автор починає з так званого “математичного диктанту” (МД) – знайомства, де крім анкетних даних (прізвище, ім’я, по батькові, де, що, коли закінчив, які мав оцінки з алгебри, геометрії, інформатики, фізики, іноземної мови, а також які має інтереси, хобі, № тел., чи має доступ до комп’ютера), перевіряється наявність навичок арифметичних дій (додавання, віднімання, множення та ділення десяткових 3-4 значних чисел, вміння працювати з алгебраїчними дробами, розв’язувати квадратні рівняння та нерівності, прості логарифмічні, тригонометричні та показникові рівняння, розв’язувати нескладну геометричну задачу. Розв’язання кожної задачі оцінюється окремо за 4–бальною системою: ставиться прочерк, якщо студент за завдання не брався, 0 – якщо у відповіді немає нічого раціонального, 1 – якщо є раціональне зерно, але зроблено мало, 2 – при майже розв’язаній задачі з несуттєвими недоліками. 1 ставимо при повній вірній відповіді. 12 питань при всіх вірних відповідях дають суму Σ=36, тому оцінкою буде округлене значення Σ/3. Ця оцінка визначає **рейтинг** студента в групі, а сума балів по кожному стовпцю дає рівень засвоєння відповідного поняття групою в цілому. Студентів попереджають, що в журнал **ця** оцінка не ставиться, а такі диктанти будуть проводитися часто, хоча б з 4–6 питань, і вже ті оцінки визначають рівень роботи студента на заняттях та вдома. Перевірку МД можна здійснювати за допомогою самих студентів, перевіривши з поясненнями – мотиваціями роботи перевіряючих. Такі МД проводяться й на заліку та перед екзаменом. Оцінка за МД тоді стає складовою частиною екзаменаційної оцінки студента. Після диктанту студент зобов’язаний зробити **аналіз** МД, доповнити свої відповіді.

На диктанті перевіряється лише те, що необхідно для подальшої роботи з дисципліни чи в суміжних та наступних дисциплінах. Означення, основні формули, наявність основних навичок, позначення, смисл того чи іншого результату – складові частини МД.

4. Як заучувати основні поняття та формули

Дехто вважає, що математика тому складна, що в ній багато формул. Ми порахували такі основні поняття й формули – їх (крім таблиць додавання та множення) 256. Це на **всі** класи, починаючи з 5–го! У середньому менше 37 на рік, по одній на тиждень. Серед них є й такі, що відомі з початкової школи (наприклад, переставні закони додавання та множення). Чому ж діти не знають їх? Бо ні вони самі, ні вчителі не ставлять перед собою таку задачу. Кабінетна система створює можливості не пам'ятати формул, бо вони висять на стінах, задня обкладинка зошита містить таблицю множення, у класі хтось згадає чи знайде її й розповість класу. Навіть прості обчислення хтось зробить на калькуляторі, поки більшість учнів буде бавитись… Таке неможливо в класах, де працював відомий донецький учитель – новатор В.Ф. Шаталов або його учні та послідовники. Автор сприяв обговоренню досвіду Шаталова в ДПІ, проведенню ним занять в експериментальному гуртку на кафедрі вищої математики ДПІ та рекомендації Міносвіти дати йому можливість проведення експерименту у звичайному класі звичайної донецької школи. Буваючи на уроках у цьому класі, автор бачив, що діти **хочуть** і працюють у нього активно на уроці й вдома. Шаталов мав моральне право назвати одну з своїх книжок "Куда и как девались тройки". Автор поглиблює метод опорних конспектів Шаталова, пропонуючи метод заучування малих доз формалізованої інформації. Математика, фізика, курси іноземні мови мають основну інформацію у вигляді "подвійних слів". Якщо одне з цих "слів" записати з одного боку, а друге "слово" – з іншого боку, то учень може сам перевіряти себе, чи він уже запам'ятав його. В разі необхідності процес самоперевірки – заучування може

5. Написання рефератів – одна з форм виконання ІДЗ – пропедевтика до написання курсових робіт та робіт на конкурс

Колись студенти мали непоганий досвід написання творів.

На вступних іспитах в університетах України на фізмат факультет було 3 письмових екзамени: сочинение по русской литературе, твір з української літератури й письмова робота з математики. Абітурієнти були готові до таких випробувань. Зараз складають лише один такий екзамен – диктант з української мови. Це визнання неспроможності випускників шкіл до написання "власного" тексту. Але ж для інженера–керівника важлива хоча б ділова писана мова. Перші курсові роботи студенти пишуть на 5–6 семестрі, не маючи досвіду написання достатньо великого зв'язного тексту. Підготовка й оформлення за чітко сформульованими вимогами відповідей на ТП й ТВ з ІДЗ (з усіма поясненнями й посиланням на літературу хоча б тих, за які студент відповідальний) може стати доцільною підготовкою до виконання майбутніх курсових (КР) та дипломних робіт (ДР), пояснювальних записок до дипломної роботи. Цей досвід допоможе й оформленню роботи на конкурс, написанню статей і тез доповідей. Автор запроваджує таку форму звітності з ІДЗ вже багато років як із загального курсу вищої математики, так і з курсів "Диференціальні рівняння", "Алгебра", спеціальних курсів. Ми вважаємо цей досвід позитивним. В умовах збільшення питомої ваги самостійної роботи студента (СРС) така форма організації СРС є достатньо ефективною. Студент вчиться шукати й використовувати літературні джерела, включаючи пошукові системи в Інтернет. Автор веде на 3 курсі дисципліну "Основи наукових досліджень" (ОНД), де чітко відрізняються в кращу сторону студенти тих груп, у яких використовувалася така форма звітності студента, як написання та захист реферату. Основою СРС із курсу ОНД є написання та оформлення за держстандартом КР, якщо вони виконуються за навчальним планом у цьому ж семестрі, або рефератів за темою майбутньої КР. В останньому разі студент працює за вибраною темою цілий рік; якість цих робіт значно підвищується – у них є й елементи творчості. Буває й так, що курс ОНД читається після написання й захисту першої КР; тоді студентам пропонується її переоформити , доповнити згідно порад і вимог, сформульованих в курсі ОНД. Автор читає цей курс вже 10 років. За цей час відшліфовані необхідні форми і зміст цього курсу. Навіть тоді, коли він є чисто лекційним, вдається допомогти студентам отримати мінімально необхідні навички написання звіту про наукову роботу, оформленого за діючим стандартом, відвідати науковий семінар (конференцію), оформити макети плакатів (слайдів) для доповіді на конференції, написати тези доповіді на наукову конференцію на 1–2 повних сторінки, вивчити "чужі" звіти й написати рецензію на них, вміти, прочитавши реферат роботи з Реферативного журналу, описати його для списку літератури й виділити ключові слова для пошукової системи. В останні роки все більше студентів використовує для роботи над КР чи Рефератом ЕОМ, Інтернет. Дехто, навіть, надсилає чернетки своєї роботи викладачеві для попереднього перегляду перед захистом і просить сповістити йому всі необхідні зауваження. Мабуть, реферати можуть разом із контрольними роботами стати основною формою організації дистанційного навчання.

Автор протягом багатьох років веде курс "Історія математики", у якому основною формою звітності є реферат про розвиток тої чи іншої математичної теорії, математичної науки у регіоні у певний період чи про життя та творчість видатного вченого. Така форма викликає у студентів – майбутніх учителів інтерес, збагачує їх загально – культурний та фаховий рівень, готує їх до роботи в гуртках та на факультативі, дає досвід позакласної роботи. Крім реферату, студент випускають ще й історико-математичний бюлетень, який використовують під час педагогічної практики у школі. Рецензування робіт студентів минулих років допомагає проведенню практичних занять у формі семінару, на якому студент–рецензент не тільки розповідає результати даної йому роботи, а й дає її критичний аналіз з пропозицією оцінки за 5–бальною системою (із курсу проводиться простий залік).

Маючи досвід написання рефератів, студенти можуть стати помічниками й співавторами у творчій роботі старших колег. Цей досвід допоможе їм і в магістратурі.

ПРО ФОРМУВАННЯ ЗАГАЛЬНОНАВЧАЛЬНИХ УМІНЬ СТУДЕНТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

Л.О. Черних
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет

Специфіка сучасних навчальних планів з математики для вищих навчальних закладів полягає в тому, що значну частину програмного матеріалу студенти повинні опанувати самостійно. Щоб спланувати та організувати самостійну роботу студентів, викладачу необхідно: 1) – провести аналіз програмного навчального матеріалу, щоб з'ясувати, які теми і розділи доцільно винести на самостійне опрацювання; 2) – для відібраних тем та розділів підготувати відповідні методичні матеріали (рекомендації, системи індивідуальних завдань, питання колоквіумів тощо); 3) повідомити студентам тематику питань, що виносяться на самостійне опрацювання, основну та додаткову літературу, заплановані форми та методи контролю.

Як свідчить досвід, самостійне вивчення окремих тем і розділів програми викликає у більшості студентів серйозні труднощі. Основна причина цих труднощів – низькій рівень сформованості у студентів певних груп загальнонавчальних умінь, зокрема, уміння працювати з науковою математичною літературою. Щоб успішно засвоювати математичний матеріал, який викладається в аудиторії і той, що виноситься на самостійне опрацювання, у студента мають бути сформовані не лише спеціальні математичні уміння, а й певні групи загальних навчальних умінь. У методичній літературі виділяють такі основні групи загальнонавчальних умінь: загально-інтелектуальні, загальноінформаційні, загальнокомунікативні, загальноорганізаційні. Передбачається, що формування таких умінь починається у школі, а подальшого розвитку вони набувають, якщо випускник середньої школи продовжує навчання, щоб придбати спеціальну освіту.

Дослідження (тестування, анкетування) серед студентів молодших курсів свідчать про те, що насправді більшість з них має дуже низький рівень сформованості вказаних умінь. Це в свою чергу породжує серйозне протиріччя між значним обсягом самостійної роботи і фактичною готовністю студентів до її виконання; розв'язати це протиріччя самотужки більшість студентів, як правило, не здатні.

Для успішного самостійного вивчення певних тем та розділів навчального математичного матеріалу, студент у першу чергу повинен уміти працювати із спеціальною математичною літературою. Вміння працювати з літературою відноситься до групи загальноінформаційних умінь. Це уміння є комплексним, воно тісно пов'язане з іншими загальнонавчальними уміннями, зокрема із загальнологічними. Підкреслимо, що не достатньо навчати працювати із літературою взагалі (як загальне лінгвістичне уміння – аналіз тексту); слід робити акцент на формуванні уміння працювати із спеціальною, зокрема математичною літературою.

Специфіка навчальної математичної літератури для вищих навчальних закладів полягає у тому, що навчальний матеріал в ній не має такого методичного оздоблення, як це є у шкільних підручниках (виклад матеріалу суто дедуктивний, без мотивацій, надмірно детальних пояснень). Матеріал викладається стисло, лаконічно, послідовно у словесній та символіко-графічній формах. Кожна з цих форм – це своєрідна мова, за допомогою якої передається наукова інформація. Щоб досягти свідомого і точного розуміння навчального матеріалу, студент повинен мати відповідну підготовку до сприйняття як словесної, так і символічно-графічної математичної мови.

Назвемо деякі спеціальні знання і навчальні уміння (не систематизуючи їх), які потрібні студенту молодших курсів для самостійної роботи з математичною літературою:

– вміння провести смисловий аналіз тексту;

– знання елементів теорії множин для розуміння теоретико-множинної трактовки багатьох математичних понять;

– знання елементів логіки висловлень; володіння символікою логіки предикатів (операція квантифікації);

– уміння провести логічний аналіз означення та здійснити підведення під поняття (розпізнавання);

– уміння розкрити логічну структуру теореми, встановити вид теореми за логічною структурою;

– володіння поняттями «необхідні» і «достатні» умови;

– знання основних методів та прийомів доведення математичних тверджень (дедуктивне і індуктивне доведення, метод від супротивного, метод повної індукції, метод математичної індукції та ін.);

– знання латинського та грецького алфавітів.

Зрозуміло, що формування таких знань та умінь не входить в програму загальноосвітньої школи, тому придбати їх студент повинен на початку навчанні у вищому навчальному закладі. З цією метою в навчальну програму курсу «Алгебра і теорія чисел» для спеціальності «математика і інформатика» в І семестрі ми включаємо такі теми для вивчення їх в умовах аудиторної роботи: «Елементи теорії множин», «Елементи математичної логіки», «Бінарні відношення (відображення)». Знання та уміння, набуті при вивченні цих тем, будуть використовуватись не лише при вивченні АТЧ, а й при вивченні усіх математичних дисциплін, оскільки вони носять загальноматематичний, загальнонауковий характер. Підкреслимо, що знання та уміння, набуті при вивченні елементів математичної логіки є основою формування усіх важливих груп загальнонавчальних умінь: інтелектуальних, інформаційних, комунікативних, організаційних. У зв’язку з цим доцільно після вивчення формул логіки висловлень та основних рівносильностей між ними розглянути такі питання:

– теореми, їх логічна структура;

– основні види формулювання теорем;

– види теорем за логічною структурою;

– необхідні і достатні умови;

– метод доведення від супротивного.

Проте формальне включення цих питань у програму з АТЧ не може сприяти результативному формуванню загальнонавчальних умінь, якщо викладач не проводить для цього спеціальну роботу, не розробляє доцільну методику.

Методику формування у студентів-математиків зазначених умінь доцільно будувати, виходячи з основних етапів навчання довільному навчальному вмінню, при цьому слід врахувати необхідність усвідомлення своїх дій. В своїй роботі ми використовуємо таку послідовність етапів формування умінь:

а) діагностика рівня сформованості відповідного уміння;

б) постановка мети (розкриття її для тих, хто навчається, та прийняття ними мети);

в) демонстрація зразка, інструктаж введення прийомів, опис послідовності дій;

г) оволодіння прийомами за допомогою системи спеціальних вправ;

д) оперативний контроль;

е) застосування прийому і системи дій;

є) узагальнення і навчання переносу здобутого уміння;

ж) навчання знаходженню нових прийомів;

з) формування відповідних професійних умінь, а саме, умінь, пов'язаних з необхідністю навчати інших тим видам діяльності, що опановані особисто.

Проілюструємо ці загальні положення на прикладі організації навчальної діяльності, пов'язаної з розвитком у студентів уміння аналізувати, формулювати та переформульовувати математичні твердження (означення, теореми, окремі положення в доведеннях). На першому етапі – етапі діагностики – студентам пропонується завдання на формулювання означень і теорем шкільного курсу математики та перших розділів університетських курсів алгебри, геометрії, математичного аналізу.

Наприклад: а) сформулювати третю ознаку рівності трикутників; б) сформулювати цю теорему в категоричній формі; в) сформулювати обернене твердження; г) чи буде воно теоремою? Аналіз відповідей показав, що правильні відповіді на питання (б, в, г) змогли дати лише біля 20% опитаних. Зокрема, найбільш поширеною відповіддю на питання б) була така: «В рівних трикутниках відповідні сторони рівні», тобто замість прямого твердження в процесі переформулювання одержали йому обернене. Наведені тут помилки та труднощі переформулювання свідчать, з одного боку, про тісний взаємозв'язок мовних та логічних умінь. З іншого боку, такий низький покажчик говорить про те, що при вивченні таких вузівського дисциплін, як математична логіка, алгебра, математичний аналіз, геометрія, основна увага приділяється формуванню лише спеціальних умінь щодо цих дисциплін, загальнонавчальні ж уміння формуються недостатньо.

На другому етапі перед студентами розкривається мета майбутньої діяльності, підкреслюється значення набутих умінь для здійснення самостійної роботи з математичними текстами. Як відомо, процес цілеутворення в неявному вигляді містить в собі весь процес майбутньої діяльності. В зв'язку з цим для дійсного прийняття студентами цілі діяльності слід цю мету «розгорнути» у вигляді конкретних задач-завдань. Так, уміння перевести категоричну форму твердження теореми в умовну форму потребує попереднього розвитку такого логічного уміння, яке пов'язане з розумінням логічної структури теореми та виділенням її компонентів. Обернене уміння – переформулювати теорему з умовної форми в категоричну – передбачає перш за все досить розвинені мовні уміння і разом з тим сприяє їхньому розвитку. Логічні уміння тут теж присутні, але вони проявляються у внутрішньому плані. Наприклад, щоб сформулювати в категоричній формі третю ознаку рівності трикутників, необхідно не тільки досконало володіти рідною мовою, але й утримувати в свідомості логічну структуру цієї теореми, яка традиційно формулюється умовно. В противному разі може бути допущена наведена вище помилка – замість категоричного формулювання прямої теореми пропонують обернену теорему: замість «Трикутники з відповідно рівними сторонами рівні між собою» одержують «У рівних трикутників відповідні сторони рівні».

Третій етап може бути виділений як самостійний, а може проходити і разом з другим. Тут викладач не тільки дає зразок правильних переформулювань, але й (і це найголовніше) наводить прийоми відповідних розумових дій. Ця робота дозволяє намітити послідовність відповідних логічних операцій і, якимось чином, алгоритмізувати цей процес.

На наступних етапах систему вправ для відпрацювання прийому (або прийомів) слід будувати по принципу ускладнення. При цьому необхідно і студентів залучати до роботи по складанню таких завдань. Найбільш важливим моментом тут є те, що дії повинні виконуватись не тільки у внутрішньому, але і у зовнішньому плані, тобто необхідно розкривати «технологію» процесу переформулювання. Нажаль математичні уміння часто розвиваються поза мовним простором. Студенти, вивчаючи теорію, розв'язуючи задачі, не вміють проговорювати засвоєний матеріал. Шукаючи необхідні слова для пояснення «вголос» своїх міркувань, студент закріплює в пам'яті теорію і термінологію, розвиває у себе здібність висловлювати думки мовними засобами. Таке проговорювання містить певні імпровізації, тому воно сприяє розвитку так званої продуктивної мови.

Слід зазначити, що навіть при умові успішного засвоєння порядку операцій, які виконуються в процесі переформулювання теорем (особливо, якщо вимагається сформулювати обернене твердження), студенти стикаються з серйозними труднощами в цій роботі. Одна з основних причин тут – недостатньо сформоване спеціальне логічне уміння, що полягає у виділенні роз'яснювальної частини в логічній структурі теореми. Студент повинен розуміти, що в словесному формулюванні теореми роз'яснювальна частина, як правило, присутня в імпліцитному вигляді. Виявити її можна, лише переформульовуючи теорему згідно до її логічної структури. В зв'язку з цим корисні деякі пояснення:

а) множина об'єктів в роз'яснювальній частині – це обсяг поняття, про яке говориться в теоремі;

б) це поняття буде родовим по відношенню до поняття, про яке йдеться в умові теореми;

в) вибираючи родове поняття по відношенню до того, про яке говорить категоричне формулювання теореми, слід перевагу віддати саме найближчому роду.

Зупинимось коротко ще на одному умінні, яке необхідне студенту під час самостійного опрацювання навчальної математичної літератури. Теореми, що пропонуються авторами підручників, як правило, мають відповідну нумерацію, яку автор використовує у подальшому викладі, посилаючись в доведеннях на ту чи іншу теорему. Зрозуміло, що запам'ятовуючи формулювання теореми, засвоюючи її доведення, студент не повинен пам'ятати номер цієї теореми у відповідному посібнику. Саме тому необхідно визначити назви для теореми. Деякі теореми курсу вищої математики мають свої (частіше традиційні) назви: теорема Кронекера – Капеллі, інтегральна ознака збіжності числового ряду та ін. Такі теореми легше запам'ятовуються студентами, оскільки назва дозволяє створити певні асоціації. В зв'язку з цим кожній теоремі, що вивчається в аудиторії чи самостійно опановується студентом, слід надавати певної назви. Уміння називати теорему не зводиться лише до загальнонавчального, в даному випадку –

комунікативного, уміння. Воно передбачає формування у студентів деяких спеціальних логічних умінь. Виконуючи цю роботу, слід враховувати такі зауваження та рекомендації:

а) назва теореми не повинна повністю розкривати її зміст (прикладом можуть служити теореми, що носять імена математиків, які вперше їх довели, або тих, що в їх роботах ці теореми дійшли до нас; контрприкладом можуть бути такі невдалі назви, як «теорема про неперервність диференційованої функції», «теорема про рівносильність двох означень групи».);

б) підбираючи назву до теореми, слід перш за все визначити вид цієї теореми за структурою і змістом; це дозволяє спростити пошуки вдалої назви (наприклад, властивості неперервної функції, ознака підгрупи, теорема, обернена до теореми Вієта та ін.);

в) значну допомогу надає виділення структури теореми (чітке визначення компонентів теореми та зв'язків між ними).

Щодо останнього зауваження слід розуміти, якщо умова і заключення теореми пов'язані еквіваленцією («тоді і лише тоді, коли», «необхідно і достатньо»), то таку теорему цілком природньо назвати «необхідною і достатньою умовою …». При виборі назви для теореми-властивості також дуже важливо виділити компоненти її логічної структури, особливо роз'яснювальну частину.

Сам по собі формальний запис логічної структури теореми нічого не дає для розвитку логічних та мовних умінь студентів; тому необхідно обов'язково намагатись згідно цієї структури давати словесне умовне формулювання теореми, називаючи явно її роз'яснювальну частину. Після цього легко з'ясувати, про які саму об'єкти йдеться в теоремі (про це говориться в умові теореми) і якій множині об'єктів вони належать (про це говорить роз'яснювальна частина). Як виявляється, виділяти роз'яснювальну частину, а отже, і умову теореми, можна по-різному, тому одна теорема може мати різні, але еквівалентні назви.

На закінчення зазначимо, що важливою задачею вищої школи є навчання студентів умінню самостійно здобувати знання. В основі доцільної самостійної роботи лежать загальнонавчальні уміння студентів, які формуються на основі відповідних спеціальних умінь з окремих дисциплін.

ЗАСТОСУВАННЯ ПЕОМ В САМОСТІЙНІЙ РОБОТІ СТУДЕНТІВ ПО ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИМ ДИСЦИПЛІНАМ

А.І. Шурдук, М.Г. Махно
м. Полтава, Полтавський університет споживчої кооперації України
mach@pci.poltava.ua

Фізико-математична освіта студентів технологічних спеціальностей відіграє значну роль у формуванні конкурентноздатних фахівців в ринкових умовах господарювання, оскільки вона є загальнонауковим фундаментом для засвоєння спеціальних інженерно-технологічних дисциплін. Важливе значення в підвищенні якості фізико-математичної підготовки має самостійна робота студентів, що особливо актуально в умовах зменшення кількості лекційних та практичних занять.

Під самостійною роботою студента розуміють специфічний вид діяльності навчання, головною метою якого є формування самостійності суб'єкта, що навчається, а систематизація його умінь, знань та навичок здійснюється опосередковано через зміст і методи всіх видів навчальних занять. При цьому важливу роль відіграє індивідуалізація самостійної роботи, що реалізується здебільшого шляхом видачі студентам індивідуалізованих домашніх завдань та використанням модульно-рейтингової системи контролю знань.

Сьогодні для якісної підготовки майбутніх спеціалістів широко використовуються різноманітні інноваційні технології навчання, основним елементом яких є персональний комп'ютер. Він виступає не просто як доповнення до існуючої системи освіти, а й вносить суттєві зміни в зміст навчання, його методи та організаційні форми, призводить до значних змін в діяльності як викладача, так і студента. Доцільно, на наш погляд, застосовувати інноваційні технології в самостійній роботі студентів при вивченні циклу фізико-математичних дисциплін. Застосування ПЕОМ в самостійній роботі студентів дозволяє побудувати навчальний процес, зберігаючи основні переваги навчання і контролю знань під керівництвом викладача, додаючи до цього нескінченні можливості навчання, гнучкість управління, індивідуалізації, тощо.

Значне розповсюдження ПЕОМ останнім часом, призвело до того, що на ринку програмних продуктів з'явилась велика кількість обчислювальних, навчаючих та контролюючих пакетів програм з фізико-математичних дисциплін. Серед них, наприклад, мультимедійна навчаюча програма, створена у співавторстві Донецьким державним інститутом штучного інтелекту і компанією HOUS Software "Высшая математика", електронний мультимедійний збірник задач ELZA "Только в физике соль", створений авторськими колективами провідних російських вузів.

Навчаюча програма "Высшая математика" містить 4 основних розділи дисципліни. Теоретичний матеріал, який включає короткі біографічні довідки про видатних математиків, основні поняття, аксіоми, теореми, леми, представлений у вигляді гіпертекстового електронного підручника і супроводжується динамічними демонстраціями та звуковою підтримкою. Кожний розділ має детальне рішення типових прикладів і задач, які дозволяють закріпити теоретичні відомості і оволодіти основними прийомами і методами розв'язку, а в кінці розділу містяться вправи для самоконтролю. Перевага цього програмного продукту полягає в тому, що він дозволяє здібним студентам самостійно засвоювати теоретичний матеріал дисципліни "Вища математика" і при необхідності провести самоконтроль отриманих знань. Основним недоліком програми є неможливість проконтролювати викладачем ступінь і глибину засвоєння теоретичного матеріалу при самостійній роботі студента. Цього можна частково уникнути, якщо кожний студент виконає індивідуальне домашнє завдання з тих чи інших розділів дисципліни.

На кафедрі вищої математики і фізики Полтавського університету споживчої кооперації України розроблена програма для ПЕОМ (умовна назва "Математика") в середовищі Excel–97 для контролю самостійної роботи студентів при вивченні дисципліни "Вища математика" (розділ 1 – "Елементи лінійної алгебри", розділ 2 – "Елементи векторної алгебри", розділ 3 – "Елементи аналітичної геометрії"). Кожний студент отримує індивідуальне домашнє завдання з основних розділів дисципліни. Ці завдання містять 7-10 типових вправ, правильний розв'язок яких, дозволяє з певною ймовірностю стверджувати, що студент засвоїв основні теоретичні положення даного розділу дисципліни. Наприклад, при вивченні розділу "Елементи лінійної алгебри" необхідно вміти обчислювати визначники n–го порядку, знаходити ранг матриці, обернену матрицю до даної, перемножати матриці, досліджувати на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язувати системи рівнянь за формулами Крамера, матричним способом та методом Гауса. При роботі з цією програмою студент вводить дані свого завдання, маючи можливість здійснити його поетапний розв'язок. Наприклад, при розв'язуванні системи лінійних рівнянь матричним способом, необхідно знайти матрицю обернену до матриці, утвореної із коефіцієнтів при невідомих. При цьому пропонується послідовне знаходження алгебраїчних доповнень елементів даної матриці, що входять до оберненої, і якщо алгебраїчне доповнення знайдено невірно, то про це повідомляє програма. Отже, студент і викладач мають можливість не лише перевірити правильність розв'язку задачі, але й дізнатися на якому етапі допущені помилки.

Розроблена програма дозволяє швидко, якісно і достатньо об'єктивно проконтролювати самостійну роботу студентів, а також закріпити теоретичні знання, набути практичні навички розв'язування прикладів і задач, здійснити самоконтроль отриманих знань, успішно виконати семестрові індивідуальні завдання. Апробація програми проводилась на першому курсі технологічного факультету ПУСКУ і дала позитивні результати.

В самостійній роботі студентів з фізики можливе застосування електронного збірника задач ELZA, в якому міститься більше трьох тисяч задач з всіх розділів. Особливістю реалізованої в збірнику програмної оболонки ELZA є можливість перевірки теоретичних знань, отримання основних навичок розв'язування задач з уясненням змісту та суті фізичних законів. Важливим також є те, що на основі цієї оболонки можна створити новий збірник задач або електронний підручник, тестуючі програми. При цьому є можливість формувати структуру збірника, доповнювати та редагувати тексти завдань, реалізувати рейтингову систему контролю знань. Працюючи з програмою студент може вибрати рівень складності завдань, діагностувати допущені помилки в розв'язках задач, отримувати необхідну довідкову інформацію, протоколювати результати роботи на комп'ютері.

Нами розроблена електронна версія тестових завдань з фізики для поточного контролю знань студентів нефізичних спеціальностей ВНЗ. По кожній темі дисципліни приведено 20 завдань із п'ятьма відповідями на кожне завдання. Студенту потрібно вибрати найбільш повну вірну відповідь і набрати встановлену для кожної оцінки певну кількість балів. Апробація цих завдань в навчальному процесі принесла позитивні результати.

Таким чином, використання ПЕОМ в самостійній роботі студентів здатне підвищити якість їх фізико-математичної підготовки, відновлюючи при цьому зацікавленість до вивчення вищої математики та фізики.

КОМП'ЮТЕРНА ПІДТРИМКА КУРСУ "ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ"

А.І. Шурдук, О.Г. Фомкіна
м. Полтава, Полтавський університет споживчої кооперації України
mach@pci.poltava.ua

Удосконалення навчального процесу, направленість його на підвищення якості професійної підготовки спеціалістів, ставлять серйозні вимоги до математичної підготовки студентів. Тому сьогодні слід говорити про принципово нові цілі і завдання математичної освіти, які, в свою чергу, обумовлюють пошук нових форм і методів організації навчального процесу, впровадження ефективних педагогічних технологій, створення системи методичного та інформаційного забезпечення. Особливо актуальним це є в той час, коли кількість аудиторних годин на вивчення математичних дисциплін зменшується, а обсяг інформації, передбачений нормативними програмами – збільшується. В умовах такої невідповідності між збільшенням кількості елементів знань і скороченням часу, відведеним на їх вивчення, великої значущості набуває організація самостійної роботи студентів і водночас її методичне забезпечення. Саме методичне забезпечення самостійної роботи є засобом передачі студентам знань, вмінь та практичних навичок.

Нами розроблений навчально-контролюючий тренінг з розділу "Теорія ймовірностей", який спрямований на активізацію самостійної роботи студентів, перехід від інформаційної методики та простої репродукції знань до їх глибокого осмислення та творчого використання.

Організація навчального процесу взагалі і з математики, зокрема, передбачає реалізацію трьох основних складових: вивчення теоретичного матеріалу (набуття знань), застосування його до розв'язування практичних завдань (формування умінь і навичок), контроль та оцінка набутих знань, умінь і навичок.

Тому і розроблений навчально-контролюючий тренінг складається із трьох частин:

Теоретичні відомості з основних, додаткових та спеціальних питань, які подані у вигляді опорних конспектів із посиланням на джерела інформації.

Основні питання визначають базовий рівень навчання (навчальний матеріал засвоюється в обсязі обов'язкових результатів навчання).

Додаткові питання визначають підвищений рівень навчання (студенти отримують більш глибокі знання, що дає можливість застосування їх до завдань творчого характеру, проблемно-ситуаційних задач).

Спеціальні питання – це питання, що відображають прикладну спрямованість навчального матеріалу.

Навчальний тренінг з елементами самоконтролю призначений для самостійної роботи студентів по практичному закріпленню теоретичного матеріалу шляхом розв'язування задач. Передбачені методичні рекомендації та посилання на літературу; контролюється правильність не тільки кінцевого результату, а і основних дій в процесі розв'язування завдання.

Стандартизований контроль знань студентів, що базується на тестовій методиці з множинним вибором відповідей. Складається із семи модулів по 15 завдань в кожному і охоплює весь розділ "Теорія ймовірностей". Для зменшення можливості вгадування правильної відповіді важливим було вирішення проблеми правдоподібностей неправильних відповідей. Використовувалась наступна структура відповідей: один або два варіанта – правильні, інші – неправильні, а також обов'язкова наявність варіанта "правильної відповіді немає".

Реалізація тренінгу здійснювалася в стандартній офісній оболонці Excel та за допомогою тестового процесора Subject.

Ми переконані в тому, що використання в навчальному процесі запропонованого навчально-контролюючого тренінгу сприятиме глибокому засвоєнню теоретичних та практичних знань з теорії ймовірностей, оволодінню ймовірнісним мисленням студентами, що в свою чергу сформує особливу точку зору на проблеми, які можуть виникнути в практичній діяльності майбутніх спеціалістів і особливий підхід до їх розв'язання.

КОМБИНАТОРНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СОБЫТИЙ

Т.А. Ярхо
г. Харьков, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

Теория вероятностей используется во всех достаточно развитых областях науки, техники и производства. Она предоставляет исследователю набор математических моделей, предназначенных для описания закономерностей в поведении реальных явлений или систем, функционирование которых происходит под влиянием большого числа взаимодействующих случайных факторов. Работа по изучению реальных явлений требует большой теоретической подготовки, которую естественно начинать с решения более простых задач с целью уяснения основных вероятностных закономерностей.

В курсе теории вероятностей, излагаемом в высшей технической школе, формирование вероятностного мышления студентов начинается с рассмотрения классической модели случайных событий, в рамках которой студенты знакомятся со спецификой постановки и решения вероятностных задач. Значительная часть этих задач исторически носит игровой характер. Их решение предполагает применение подходов комбинаторики, развивавшейся одновременно с теорией вероятностей.

Указанные задачи традиционно вызывают трудности у студентов. Причиной этого является, по-видимому, недостаточно глубокое изучение элементов комбинаторики в школьном курсе элементарной математики, а также слишком сжатое изложение основных комбинаторных формул в соответствующих разделах известных вузовских учебников по теории вероятностей и математической статистике [1, 2].

Данная работа содержит систематическое изложение элементов комбинаторики, являющееся фундаментом решения вероятностных задач в классической модели событий. В работе приведены основы теории соединений без повторений и разбиений. Сформулированы классические задачи о числе размещений, перестановок, сочетаний и разбиений в общей постановке, после чего рассмотрены конкретные примеры. Разобрано решение вероятностных задач в условиях соответствующего случайного выбора элементов с использованием выведенных комбинаторных формул. Решение комбинаторных и вероятностных задач сопровождено наглядными схемами, иллюстрирующими рассуждения.

Элементы комбинаторики

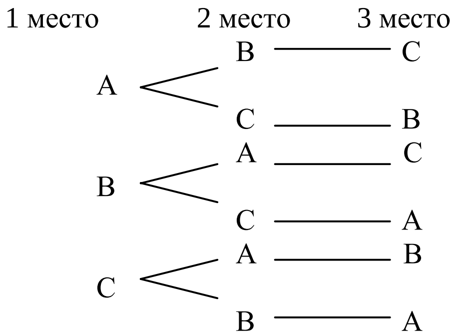
1. Основной принцип комбинаторики

Комбинаторные задачи бывают различных типов. Большинство из них решается с помощью основного принципа комбинаторики – правила умножения. Прежде, чем его сформулировать, обратимся к следующей задаче.

Задача 1

Сколькими способами можно расставить на полке три различные книги (А, В, С)?

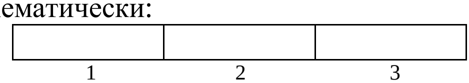
Решение. Выпишем все возможные варианты расстановки книг и пересчитаем их. Чтобы ни один из вариантов не был пропущен, изобразим так называемое “дерево”.



Получено шесть способов расстановки. Возможные варианты: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Когда число книг велико, трудно таким образом перечислить и сосчитать все варианты их перестановок. В этом случае удобен следующий метод рассуждения.

В задаче требуется заполнить три места на полке. Их можно изобразить схематически:



Первое место можно заполнить 3 способами (поместить либо А, либо В, либо С). Для **каждого** из трех способов заполнения первого места существует 2 варианта заполнения второго места (можно использовать любую из двух оставшихся книг).

3	2	
1	2	3

Следовательно, первые два места можно заполнить

$$3 \cdot 2 = 6 \text{ (способами).}$$

Для каждого из шести вариантов заполнения первых двух мест остается только один вариант заполнения третьего места.

3	2	1
1	2	3

Таким образом, все три места на полке можно заполнить.

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ (способами).}$$

Общее число способов найдено умножением.

Приведенное рассуждение допускает обобщение, которое может быть сформулировано в виде следующего общего правила.

Правило умножения. Пусть необходимо последовательно выполнить какие-либо **к** действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, после чего второе – n_2 способами, потом третье – n_3 способами и так далее до к-го действия, которое можно выполнить $n_к$ способами, то все к действий вместе могут быть выполнены

$$\boxed{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_к}$$

способами.

Задача 2

Пять студентов следует распределить по трем параллельным группам потока. Сколькими способами можно это сделать?

Решение. Каждого из пяти студентов, независимо от остальных, можно распределить в одну из трех параллельных групп. Указанное распределение представляет собой последовательность из 5 действий, каждое из которых можно выполнить 3 способами:

3	3	3	3	3
1	2	3	4	5

По правилу умножения, число возможных способов распределения составит

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243.$$

Задача 3

Номер автомобиля состоит из двух букв, за которыми следует трехзначное число. Сколько существует различных автомобильных номеров? Использован латинский алфавит. Повторение букв разрешается.

Решение. Номер автомобиля можно представить в виде 5 позиций, первые две из которых заполнены буквами, а следующие три – цифрами:

б	б	ц	ц	ц

По условию, первую позицию можно заполнить любой из 26 букв латинского алфавита (то есть 26-ю способами).

Вторую позицию можно также заполнить 26-способами (поскольку разрешено повторение букв).

Третью позицию можно заполнить одной из 9 цифр (1, 2, 3, ..., 9), так как, по условию, стоящее за буквами число является трехзначным (откуда следует, что в данной позиции не может находиться 0).

Каждую из двух оставшихся позиций (четвертую и пятую) можно заполнить 10 способами (одной из цифр 0, 1, 2, ..., 9).

Укажем на схеме число возможных способов заполнения каждой позиции:

26	26	9	10	10
б	б	ц	ц	ц

По правилу умножения, число различных автомобильных номеров составит

$$26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10^2 = 608400.$$

С помощью правила умножения можно решать различные комбинаторные задачи. Однако, для числа элементов наиболее часто встречающихся комбинаций существуют готовые формулы, выведенные с применением этого правила. Этими формулами удобно сразу пользоваться при решении задач. Комбинации, о которых идет речь, называются соединениями. К ним относятся *размещения*, *перестановки* и *сочетания*. Будем рассматривать соединения без повторений, предполагая, что в каждом данном соединении элементы существуют в “единственном экземпляре”.

2. Размещения

Определение. Конечное множество, состоящее из n элементов, называется *упорядоченным*, если его элементы каким-либо образом занумерованы числами 1, 2, 3, ..., n.

Упорядоченные множества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов и занумерованы одинаковым образом.

Определение. Пусть дано конечное множество, состоящее из n элементов.

Размещением из n элементов по к элементов называется всякое его *упорядоченное* подмножество, содержащее к элементов (к ≤ n).

Пример. Выпишем все возможные размещения по 2 элемента данного множества {1, 2, 3, 4}:

(1, 2); (2, 1); (1, 3); (3, 1); (1, 4); (4, 1);
(2, 3); (3, 2); (2, 4); (4, 2); (3, 4); (4, 3).

Всего получили 12 различных размещений.

Различные размещения отличаются друг от друга составом элементов или порядком их расположения.

Число различных размещений из n элементов по k элементов принято обозначать символом A_n^k.

Теорема. Число различных размещений из n элементов по к элементов равно произведению k последовательных натуральных чисел от n до n-k+1 включительно:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \qquad (1)$$

Доказательство. Число размещений из n элементов по k элементов равно числу всех k-элементных упорядоченных подмножеств множества, содержащего n элементов. Первый элемент подмножества можно, очевидно, выбрать n способами. Второй элемент можно выбрать n-1 способом, так как в качестве второго элемента можно взять любой элемент множества, кроме уже выбранного первым. После выбора первых двух элементов остаются n-2 возможности для выбора третьего элемента и так далее. Последний k-ый элемент подмножества может быть выбран n-k+1 способом, так как к моменту его выбора осталось n-(k-1) элементов. Укажем на схеме число возможных способов выбора каждого элемента:

n	n-1	n-2	…	n-k+1
1	2	3	…	k

По правилу умножения число различных размещений из n элементов по k элементов выражается формулой

$$A_n^k = n(n - 1)(n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1).$$

Приведем содержание классической задачи о числе размещений.

Сколькими способами можно выбрать и разместить по k различным местам k из n различных предметов.

Рассмотрим конкретные примеры.

Задача 4

Сколько разных билетов с указанием станции отправления и станции назначения можно отпечатать для железной дороги, на которой 50 станций?

Решение. Необходимо найти число различных упорядоченных подмножеств, содержащих по 2 элемента (названия станций отправления и назначения), которые можно составить из множества, содержащего 50 элементов:

$$A_{50}^2 = 50 \cdot 49 = 2450\,.$$

Подчеркнем, что рассматриваются *упорядоченные* подмножества по 2 элемента, поскольку любые 2 билета, в которых указаны одни и те же названия станций в различном порядке, являются разными.

Задача 5.

Сколько всего существует телефонных номеров, состоящих из 5 различных цифр?

Решение. Число таких номеров равно числу способов выбора и размещения по пяти местам 5 из 10 различных цифр:

$$A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240.$$

3. Перестановки

Определение. *Перестановкой* данного множества называется любое упорядоченное множество, образованное из всех его элементов.

Пример. Выпишем все возможные перестановки множества {1, 2, 3}: {1, 2, 3}; {1, 3, 2}; {2, 1, 3}; {2, 3, 1}; {3, 1, 2}; {3, 2, 1}. Всего получили 6 различных перестановок.

Различные перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов.

Число различных перестановок из n элементов обозначают

P_n.

Теорема. Число различных перестановок множества из n элементов равно произведению всех последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n! \qquad (2)$$

Доказательство теоремы оказывается излишним, поскольку перестановки являются частным случаем размещений при k = n. Поэтому, согласно формуле (1)

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Выразим число размещений через число перестановок. Для этого правую часть формулы (1) умножим и разделим на (n – k)!. Получим

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{P_n}{P_{n-k}} \qquad (3)$$

Приведем содержание классической задачи о числе перестановок.

Сколькими способами можно переставить n различных предметов, расположенных на n различных местах.

Рассмотрим конкретные примеры.

<u>Задача 6</u>

Сколько различных слов можно образовать из всех букв слова «гипербола»?

<u>Решение.</u> Так как все буквы в данном слове различны, то любое изменение порядка следования букв соответствует новому слову.

Поскольку 9 букв можно переставить числом способов P_9, то можно образовать различных слов

$$P_9 = 9! = 362880.$$

<u>Задача 7</u>

На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить так, чтобы первый и второй том стояли рядом?

<u>Решение.</u> n томов можно разместить на книжной полке

$$P_n = n!$$

различными способами.

Если 1-ый и 2-ой том стоят рядом, их условно можно считать одним томом:

12 либо 21

и решать задачу о размещении на полке 29 различных книг.

Для каждого из двух указанных вариантов объединения 1-го и 2-го тома в один существует

$$P_{29} = 29!$$

различных способов расположения книг. Следовательно, всего существует $2 \cdot 29!$ различных способов расстановки 30 томов на полке, при условии, что 1-ый и 2-ой том стоят рядом.

4. Сочетания

Определение. Пусть дано конечное множество, состоящее из n элементов.

Сочетанием из n элементов по к элементов называется любое подмножество этого множества, содержащее к элементов (к $\le$ n).

Пример. Выпишем все возможные сочетания по 2 элемента данного множества {1, 2, 3, 4}:

[1, 2]; [1, 3]; [1, 4]; [2, 3]; [2, 4]; [3, 4].

Всего получили 6 различных сочетаний.

Сочетания являются неупорядочными подмножествами.

Различные сочетания отличаются между собой только составом элементов.

Число различных сочетаний из n элементов по к элементов принято обозначать символом C_n^k.

Теорема. Число различных сочетаний из n элементов по к элементов равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!} \tag{4}$$

Доказательство. Каждое сочетание порождает столько соответствующих размещений, сколько возможно различных перестановок его элементов. Поэтому

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k ,$$

откуда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} \tag{5}$$

Подставляя формулу (3) в выражение (5), получим

$$C_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k} \cdot P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\ ,$$

что и требовалось доказать.

Приведем содержание к классической задаче о числе сочетаний.

Сколькими способами можно выбрать k из n различных предметов.

Рассмотрим конкретные примеры.

Задача 8

Из вазы, где стоят 10 красных и 4 розовые гвоздики, выбирают один красный и два розовых цветка. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Одну красную гвоздику из десяти можно выбрать C_{10}^1 способами, а две розовые гвоздики из четырех можно выбрать C_4^2 способами. По правилу умножения, букет можно составить

$$C_{10}^1 \cdot C_4^2 = \frac{10!}{1!9!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = \frac{10 \cdot 4!}{2!2!} = 60 \text{ (способами).}$$

Задача 9

Каким числом способов можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в первый и второй пачке было по 2 туза?

Решение. В колоде из 36 карт половину колоды составляют 18 карт. Изобразим схематически состав колоды и выборки, содержащей 18 карт.

Общее количество (36 карт) — 4 туза, 32 «не туза»

Выборка (18 карт) — 2 туза, 16 «не тузов»

При формировании выборки 2 туза из 4-х, имеющихся в колоде, выбираются C_4^2 способами.

16 «не тузов» из 32 «не тузов», имеющихся в колоде, выби-

раются C_{32}^{16} способами.

Так как любое извлечение 2-х тузов можно скомбинировать с любым извлечением 16 «не тузов», в соответствии с правилом умножения, получаем общее число способов раздела колоды:

$$C_4^2 \cdot C_{32}^{16} = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{32!}{16!16!}.$$

Заметим, что классическую задачу о числе сочетаний можно сформулировать в следующей эквивалентной форме.

Сколькими способами можно разбить n предметов на 2 группы так, чтобы в первой группе было k предметов, а во второй (n – k) предметов (k + (n – k) = n).

Обобщим постановку этой задачи на случай нескольких групп.

5. Разбиения

Приведем содержание классической задачи о числе разбиений на несколько групп.

Сколькими способами можно разбить n различных предметов на k групп по $n_1, n_2, ..., n_k$ предметов в каждой группе ($n_1 + n_2 + ... + n_k = n$).

Число всех способов разбиений будем обозначать $C_n^{n_1, n_2, ..., n_k}$.

Теорема. Пусть дано множество A, содержащее n элементов. Пусть $n_1, n_2, ..., n_k$ – целые неотрицательные числа, причем

$$n_1 + n_2 + ... + n_k = n.$$

Число способов, с помощью которых можно представить множество A в виде объединения

$$A = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k$$

подмножеств, содержащих, соответственно, $n_1, n_2, ..., n_k$ элементов, равно

$$C_n^{n_1, n_2, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!} \qquad (6)$$

<u>*Доказательство.*</u> Пусть множество A, состоящее из n элементов, разбито на k подмножеств, содержащих, соответственно, $n_1, n_2, ..., n_k$ элементов.

Любая перестановка элементов внутри каждого множества

B_i ($i=1,2,\ldots,k$) не меняет сути разбиения. Всего таких перестановок $n_i!$. Применяя правило умножения, получим, что

$$n_1!\, n_2! \ldots n_k!$$

перестановок не меняют сути разбиения. Следовательно, каждое указанное разбиение n элементов на группы порождает $n_1!\, n_2! \ldots n_k!$ их перестановок. Поэтому общее число перестановок множества из n элементов равно

$$P_n = C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}\, n_1!\, n_2! \ldots n_k!,$$

откуда

$$C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

Задача 10

При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?

Решение. Искомое число способов равно числу всех разбиений множества из 28 элементов на 4 группы. При этом $n = 28$; $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 7$.

$$C_{28}^{7,7,7,7} = \frac{28!}{(7!)^4} \approx 4{,}7 \cdot 10^5.$$

Задача 11

Сколько всего существует различных сдач карт при игре в преферанс, где 32 карты делятся между тремя игроками по 10 карт каждому, а 2 карты кладутся в прикуп?

Решение. Число различных сдач карт равно числу разбиений множества из 32 элементов на 4 группы, по 10, 10, 10 и 2 элемента, соответственно:

$$C_{32}^{10,10,10,2} = \frac{32!}{(10!)^3 \cdot 2!} \approx 2{,}7 \cdot 10^{15}.$$

Классическое определение вероятности случайного события

Будем считать фиксированным некоторый опыт. Свяжем с рассматриваемым опытом некоторую систему событий.

Определение. Система случайных событий называется *классической моделью*, если каждое случайное событие в ней можно представить в виде суммы нескольких событий, называемых *элементарными событиями* или *случаями*, обладающими следующими свойствами:

1. Число случаев конечно.
2. Случаи являются попарно несовместными событиями.
3. Случаи образуют полную группу событий.
4. Случаи являются равновозможными событиями.

Определение. Случаи, на которые подразделяется некоторое событие классической модели, называются *благоприятствующими* этому событию.

Определение. В классической модели вероятность любого события A определяется как отношение числа m случаев, благоприятствующих этому событию к общему числу n всех случаев:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Решение вероятностных задач по классическому определению часто облегчается использованием комбинаторных формул. Каждая из этих формул определяет число случаев в некотором опыте, состоящем в выборе наудачу k из n различных элементов исходного множества. При этом в постановке каждого такого опыта строго оговорено, каким способом производится выбор и что понимается под различными выборками.

Задача 12

Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово КНИГА. Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем снова собрал их в ряд. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово КНИГА.

Решение. Введем в рассмотрение событие

A = {сложено слово КНИГА}.

Так как все буквы в слове КНИГА различны, то любая перестановка букв соответствует новому слову. Поэтому общее число случаев равно числу перестановок из 5 элементов:

$$n = P_5 = 5!$$

Число случаев, благоприятствующих указанному событию:

m = 1 (соответствует слову КНИГА).

Имеем

$$P(A)=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120.}.$$

Задача 13

В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что из 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. Изобразим схематический состав общего количества деталей и состав выборки:

Общее количество 10 деталей		Выборка 6 деталей	
7 стандарт.	3 нестандарт.	4 стандарт.	2 нестандарт.

Общее число случаев равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из общего количества 10 (без учета порядка следования):

$$n = C_{10}^{6}.$$

Определим число случаев, благоприятствующих появлению данного события. 4 стандартные детали можно выбрать из имеющихся 7 стандартных деталей C_7^4 способами. При этом оставшиеся 2 детали являются нестандартными. Их можно выбрать из имеющихся 3-х нестандартных деталей C_3^2 способами. По правилу умножения

$$m = C_7^4 \cdot C_3^2.$$

Имеем,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{7!\,3!\,6!\,4!}{4!\,3!\,2!\,1!\,10!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{8 \cdot 9 \cdot 10} = 0{,}5.$$

Задача 14

В лифт 7-этажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них, с одинаковой вероятностью, выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:

а) A = {все пассажиры выйдут на 6-ом этаже};

б) B = {все пассажиры выйдут на одном этаже};

в) C = {все пассажиры выйдут на разных этажах}.

Решение.

Найдем общее число случаев n в рассматриваемом опыте.

Каждому пассажиру, независимо от других, предоставлена возможность выйти на любом из шести этажей (2, 3, 4, 5, 6 или 7). Укажем на схеме количество способов выхода каждого из трех пассажиров:

6	6	6
1	2	3

По правилу умножения, у всех трех пассажиров имеется

$n = 6^3$ способов выхода.

Для каждого из перечисленных событий A, B и C найдем соответствующее число благоприятствующих случаев и вычислим вероятности событий.

а) A = {все пассажиры выйдут на 6-ом этаже}.

$$m_A = 1;\ P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}.$$

б) B = {все пассажиры выйдут на одном этаже}.

Так как все пассажиры могут выйти на одном из шести этажей, то

$$m_B = 6;\ P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}.$$

в) C = {все пассажиры выйдут на разных этажах}.

Поскольку имеет значение, какой именно из пассажиров на каком этаже выходит, число способов их выхода равно числу способов извлечения упорядоченного подмножества, содержащего 3 элемента, из общего числа 6 элементов, то есть

$$m_c = A_6^3;\ P(C) = \frac{m_c}{n} = \frac{A_6^3}{6^3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}.$$

Задача 15

9 пассажиров наудачу рассаживаются в трех вагонах. Найти вероятность того, что в один вагон сядут 4, в другой – 3, а в третий – 2 пассажира.

Решение. Поскольку каждый из 9 пассажиров, независимо от других, имеет возможность выбрать один из трех вагонов:

3	3	3	3	3	3	3	3	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9

то общее число случаев, равное числу различных способов выбора всех 9 пассажиров, определится как

$$n = 3^9.$$

Число случаев, благоприятствующих указанному в условии событию, определится как число разбиений множества из 9 элементов (9 пассажиров) на 3 группы (3 вагона) по 4, 3 и 2 элемента в каждой группе:

$$m = C_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4!\,3!\,2!}.$$

В результате

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9!}{4!\,3!\,2!\,3^9}.$$

<u>Задача 16</u>

Группа, состоящая из N человек, занимает места за круглым столом в случайном порядке. Какова вероятность того, что при этом два определенных лица окажутся рядом?

<u>Решение.</u> Общее число случаев равно числу различных перестановок из N элементов:

$$n = N!$$

Определим m. Двух лиц A и B можно посадить рядом двумя способами

AB и BA.

Пусть A и B заняли некоторые 2 места одним из двух указанных способов. При этом остальные (N-2) человека могут занять места (N-2)! способами. С учетом того, что за круглым столом A и B могут занять места (1,2); (2,3); ... (N, 1) (N способами), по правилу умножения находим

$$m = 2 \cdot (N - 2)! \cdot N.$$

Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2 \cdot (N-2)! \cdot N}{N!} = \frac{2(N-2)!}{(N-1)!} = \frac{2}{N-1}.$$

<u>Задача 17</u>

Группа, состоящая из N человек, занимает места с одной стороны прямоугольного стола в случайном порядке. Какова вероятность того, что при этом два определенных лица окажутся рядом?

<u>Решение.</u> Общее число случаев равно

$$n = N!$$

Определим m. Двух лиц A и B можно посадить рядом 2 способами

AB и BA.

При этом остальные (N-2) человека могут занять места (N-2)! способами. С учетом того, что за прямоугольным столом A и B могут занять места (1,2); (2,3); ..., (N-1, N) (N-1 способом), по правилу умножения находим

$$m = 2 \cdot (N-2)!(N-1).$$

Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2(N-2)!(N-1)}{N!} = \frac{2(N-2)!(N-1)}{(N-2)!(N-1)\cdot N} = \frac{2}{N}.$$

Литература

1. Вентцель Е.С., Овчаров А.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1988.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1999.
3. Савельев Л.Я. Комбинаторика и вероятность. – Новосибирск: Наука, 1975.
4. Дороговцев А.Я., Сильвестров Д.С., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей. Сборник задач. – Киев: Вища школа, 1980.
5. Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. – Ленинград, Изд-во Ленинградского университета, 1967.

Зміст

Наукове видання

Теорія та методика навчання

математики, фізики, інформатики

Випуск 3

В 3-х томах

Том 2

Підп. до друку 24.02.2003 Формат 80x84 1/16.
Бумага офсетна №1 Зам. №2-2401
Ум. друк. арк. 16,50 Наклад 500 прим.

Видавничий відділ Національної металургійної академії України
50006, м. Кривий Ріг-6, вул. Революційна, 5

E-mail: cc@kpi.dp.ua