

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

На правах рукопису

Шелевицький Ігор Володимирович

УДК 621.372

**СПЛАЙН-МЕТОДИ І ЗАСОБИ АНАЛІЗУ І СИНТЕЗУ ЦИФРОВИХ
СИГНАЛІВ**

05.12.17 - радіотехнічні та телевізійні системи

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Науковий консультант

Шутко Микола Олександрович,

доктор технічних наук, професор

Київ-2005

ЗМІСТ

| | | |
|--|--|----|
| ВСТУП | | 6 |
| 1. АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ СПЛАЙН-ОБРОБКИ ЦИФРОВИХ РАДІО-ТЕХНІЧНИХ СИГНАЛІВ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ..... | | 14 |
| 1.1 Сигнали складної форми в радіотехнічних системах та особливості їх обробки | | 19 |
| 1.2 Сплайни, їх різновиди та способи побудови..... | | 23 |
| 1.3 Точність наближення сплайнами детермінованих сигналів | | 29 |
| 1.4 Статистичні оцінки сплайн моделей сигналів | | 32 |
| 1.5 Використання сплайнів в радіотехнічних системах | | 37 |
| 1.6 Сучасні засоби обробки цифрових сигналів | | 46 |
| 1.7 Постановка задачі дослідження..... | | 49 |
| 2. МЕТОДИ ПОБУДОВИ СПЛАЙН-МОДЕЛЕЙ РАДІОТЕХНІЧНИХ СИГНАЛІВ | | 51 |
| 2.1 Постановка задачі..... | | 51 |
| 2.2 Загальний підхід до побудови локальних інтерполяційних сплайнів..... | | 53 |
| 2.3 Побудова інтерполяційних сплайнів із неперервною першою похідною на рівномірних сітках вузлів | | 61 |
| 2.4 Утворення інтерполяційних сплайнів із неперервною першою та другою похідними на рівномірній сітці вузлів. | | 66 |
| 2.5 Отримання дискретних сплайнових базисів | | 76 |
| 2.6 Синтез ермітових сплайнових базисів | | 78 |
| 2.7 Приведення сплайнових базисів до лагранжівової форми..... | | 83 |
| 2.8 Висновки | | 88 |

| | |
|--|-----|
| 3. АЛГОРИТМІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ СПЛАЙН-ОБРОБКИ РАДІОТЕХНІЧНИХ СИГНАЛІВ | 91 |
| 3.1 Постановка задачі | 91 |
| 3.2 Аналогії між математичним та технічним поняттями інтерполяції | 93 |
| 3.3 Особливості алгоритмів середньоквадратичного наближення в сплайнових базисах | 101 |
| 3.4 Алгоритми розрахунку сплайнів на необмежених регулярних сітках ... | 110 |
| 3.5 Узагальнене перетворення Фур'є у сплайнових базисах | 119 |
| 3.6 Якість алгоритмів сплайн-обробки сигналів | 126 |
| 3.7 Висновки | 136 |
| 4. СИНТЕЗ ШВИДКИХ АЛГОРИТМІВ ТА ЗАСОБІВ СПЛАЙН-АНАЛІЗУ І СИНТЕЗУ РАДІОТЕХНІЧНИХ СИГНАЛІВ | 138 |
| 4.1. Постановка задачі | 138 |
| 4.2. Швидкі алгоритми сплайн-інтерполяції сигналів | 140 |
| 4.3. Швидкі алгоритми та засоби LSS фільтрації сигналів | 149 |
| 4.4. Алгоритми та засоби сплайн-децимації сигналів | 158 |
| 4.5. Рекурентні алгоритми та засоби LSS фільтрації сигналів | 167 |
| 4.6. Висновки | 177 |
| 5. АЛГОРИТМИ ТА ЗАСОБИ АДАПТИВНОЇ ОБРОБКИ РАДІОТЕХНІЧНИХ СИГНАЛІВ | 179 |
| 5.1. Постановка задачі | 179 |
| 5.2. Загальна схема частотно-часового LSS розкладу | 180 |
| 5.3. Структура кратномасштабних пристроїв LSS аналізу та синтезу сигналів | 200 |
| 5.4. Особливості пристроїв статистичного кратномасштабного LSS аналізу сигналів | 208 |

| | |
|---|-----|
| 5.5. Структура пристроїв однократної адаптивної сплайн обробки сигналів | 2 |
| 14 | |
| 5.6. Висновки | 222 |
| 6. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РЕАЛІЗАЦІЯ СПЛАЙН-ОБРОБКИ ЦИФРОВИХ РАДІОТЕХНІЧНИХ СИГНАЛІВ | 223 |
| 6.1. Постановка задачі | 223 |
| 6.2. Сплайн-технологія обробки цифрових сигналів | 224 |
| 6.3. Експериментальне дослідження адаптивних алгоритмів фільтрації сигналів | 229 |
| 6.4. Система фільтрації та стиснення реографічних біосигналів | 246 |
| 6.5. LSS аналіз легеневих звукових сигналів в медичній діагностиці | 2 |
| 53 | |
| 6.6. Адаптивна фільтрація цифрових растрових зображень | 256 |
| 6.7. Фільтрація та стиснення цифрових растрових зображень | 260 |
| 6.8. Висновки | 271 |
| Висновки | 2 |
| 72 | |
| Список використаних джерел | 280 |
| Додатки | 3 |

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СКОРОЧЕНЬ

| | |
|--------------------|---|
| $a(\text{mod } b)$ | залишок від ділення a на b |
| $\text{int}(x)$ | ціла частина числа x |
| sup | верхня грань |
| LSS | Least Squares Spline |
| PFDD | process flow description diagrams |
| UOB | units of behavior |
| АКФ | автокореляційна функція |
| АЦП | аналоговий цифровий перетворювач |
| АЧХ | амплітудно-частотна характеристика |
| ЕОМ | електронна обчислювальна машина |
| МНК | метод найменших квадратів |
| РЕС УПР | радіоелектронні системи управління повітряним рухом |

| | |
|------|----------------------------------|
| РЛС | радіолокаційна станція |
| РМНК | рекурентний МНК |
| СКВ | середньоквадратичне відхилення |
| СЦП | спектральна щільність потужності |
| ШПФ | швидке перетворення Фур'є |
| ФНЧ | фільтр нижніх частот |
| ФВЧ | фільтр верхніх частот |

ВСТУП

Актуальність теми. Сьогодні інтенсивно розвиваються радіотехнічні системи, що обробляють сигнали, носіями важливої інформації в яких є не лише деякі середні чи локальні характеристики, а саме їх унікальна форма. Це радіолокаційні станції для контактного та дистанційного проникаючого зондування GPR (Ground Penetrating Radar), радіометричні системи, що використовують власне випромінювання тіл у радіочастотному діапазоні, расдари і содари тощо.

Алгоритми обробки сигналів у таких системах здебільшого запозичені з радіолокації і мало адекватні процесам зондування, що не дозволяє повною мірою використати потенційні можливості цих систем. У багатьох випадках сигнали в таких системах є сплайнами. Іншим важливим напрямком розвитку радіотехнічних систем є телемедицина, зокрема біорадіотелеметрія. Ефективність цих систем значною мірою залежить від наявності високих метрологічних характеристик

пристроїв підсилення, перетворення та фільтрації біосигналів, інформативності пристроїв обробки та стиснення сигналів. Біосигнали також мають складну форму та значну шумову складову, що ускладнює їх обробку. Роботи цієї тематики із застосуванням сплайнів представлені Biomedical Imaging Group (BIG, bigwww.epfl.ch)

Успішно вирішити проблему обробки сигналів у вказаних системах допоможе використання сплайн-моделі сигналів. Сплайни мають добре розвинену математичну теорію (роботи I.Schoenberg, C. de Boor, M.Unser, Стечкіна С.Б., Субботіна Ю.Н., Зав'ялова Ю.С., Василенка В.А., українських вчених Корнейчука М.П., Лигуна А.А., Попова Б.А., Марченка Б.Г., Денисюка В.П., Шутка М.О. Приставки О.П.) і відомі своїми хорошими наближуючими властивостям в поєднанні з ефективним апаратом розрахунків. Достоїнство сплайнів полягає в тому, що зростання порядку сплайнового полінома не погіршує якість обчислень, а похибка наближення залежить від похідної фіксованого порядку. Прості несплайнові моделі, що використовуються для обробки сигналів складної форми (у цій роботі неперіодичних гладких сигналів, що мають більше 4-6 екстремумів), не здатні адекватно та ефективно описати вказані сигнали в цілому. Тому такі сигнали обробляють короткими фрагментами (вікнами), в межах яких зберігається практично достатня адекватність простої моделі. За наявності випадкових шумів, для отримання якісних статистичних оцінок параметрів моделі сигналу бажано врахувати максимальну кількість даних, для чого необхідно збільшити розкриття вікна. Розширення вікна призводить до неадекватності простої моделі і потребує її ускладнення (наприклад, зростання порядку полінома), що в свою чергу призводить до погіршення статистичних оцінок та обчислювальних труднощів. Це погіршення знову необхідно компенсувати збільшенням числа даних (розширенням вікна). Не вирішеним є також питання вибору відповідного базису для наближення конкретного сигналу за методом найменших квадратів в радіотехнічних системах. Використання сплайнів, як моделі сигналу, дозволяє уникнути зазначених труднощів і суттєво підвищити

якість обробки сигналів. Наприклад, заміна кубічного полінома сплайном дозволяє, при однаковій похибці апроксимації, вдвічі збільшити ширину вікна обробки.

В області цифрової обробки сигналів сплайни інтенсивно почали використовуватись з кінця 80-х років у wavelets методах, в основі яких лежать інтерполяційні схеми з локальними базисними функціями. Сучасний стан досліджень та перспектив в області застосування сплайнів для обробки цифрових сигналів найповніше висвітлено в роботі [M. Unser, "Splines: a perfect fit for signal and image processing," IEEE Signal Processing Magazine, vol. 16, no. 6, pp. 22-38, 1999]. Використання більш складних, статистичних методів обробки, а саме, статистичної ідентифікації, оптимальної фільтрації та адаптація сплайнів до характеристик реальних сигналів дозволяє отримати значно точніші моделі та ефективніші статистичні оцінки параметрів сигналів ніж ті, що ґрунтуються на інтерполяційних схемах. Однак ряд особливостей обробки сигналів не дозволяє безпосередньо застосувати існуючий математичний апарат сплайнів і потребує нетривіальних підходів до реалізації методів і засобів сплайн-обробки та їх об'єднання в рамках спеціалізованої теорії і технології. Основні підходи до оптимізації та апаратної реалізації обчислень викладено в роботах Блейхута Р., Гольденберга Л.М., Задіраки В.К., Теслера Г.С., Кузьміна С.З., Ігнатова В.О., Білецького А.Я., Прокопенка І.Г.

Отже, виникає потреба у вдосконаленні обробки сигналів складної форми, яку потенційно дозволяє задовольнити застосування сплайн-моделей, але сплайни не можна застосувати для обробки сигналів в радіотехнічних системах у рамках існуючих методів та методик.

Викладене вище дозволяє сформулювати важливу **науково-технічну проблему вдосконалення обробки цифрових сигналів складної форми в радіотехнічних системах шляхом застосування сплайн-моделей.**

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Результати дисертаційної роботи отримано та застосовано в процесі виконання наступних науково-дослідних робіт:

036-ГБ92 “Разработка методов повышения достоверности обработки измерительной информации и контроля параметров радиоэлектронных систем” (1992-1994);

301-Х93 “Разработка, проектирование, изготовление вихревых устройств для научно-исследовательских целей “ (1993);

302-Х93 “Разработка контроллера прибора неразрушающего контроля поверхностного слоя ферромагнитных деталей (1993);

397-Х93 “Разработка технологии радиоиммунологического анализа предсердного гормона” (1993-1994);

497-ГК94 “Разработка и исследование методов и средств повышения технико-экономических показателей преобразователей параметров электроэнергии в несимметричных режимах” (1994-1996).

ГБ07-206-01 “Створення інтелектуальної системи оперативного аналізу техногенного навантаження доквілля на основі сучасних інформаційних технологій (2001).

У зазначених науково-дослідних роботах сплайн-технологія обробки даних застосовувалась для ідентифікації, моделювання, фільтрації та стиснення сигналів складної форми.

Мета роботи. Досягти суттєвого покращення результатів синтезу та аналізу цифрових сигналів складної форми в радіотехнічних системах, шляхом застосування сплайн-моделей.

Основні задачі дослідження.

1. Розробка методів адаптації сплайнів до частотних властивостей конкретних сигналів (діапазону частот, амплітудного чи енергетичного спектру) з врахуванням практичних аспектів застосування в задачах цифрової обробки сигналів в радіотехнічних та телевізійних системах.
2. Створення та дослідження методів та алгоритмів побудови сплайнів із заданими частотними властивостями.

3. Розробка і дослідження швидких алгоритмів та методики побудови пристроїв для обробки сигналів, що ґрунтуються на сплайн-інтерполяції та статистичному оцінюванню за МНК сплайнових моделей в реальному часі.
4. Синтез пристроїв та алгоритмів адаптації сплайнів до сигналів та завадової обстановки, включаючи алгоритми та пристрої частотно-часового розкладу, стійких до адитивного білого шуму.
5. Виконання експериментальної та практичної перевірки основних теоретичних положень, алгоритмів та засобів, що складають апаратне і програмне забезпечення цифрових систем сплайн-обробки радіотехнічних сигналів складної форми.

Об'єктом дослідження є цифрові сигнали, їх теорія, засоби і методи аналізу і синтезу.

Предметом досліджень є засоби і технології сплайн-методів аналізу і синтезу цифрових сигналів складної форми в радіотехнічних системах.

Методи дослідження. Для побудови сплайнових моделей застосовано методи апроксимації, лінійної алгебри, математичного аналізу. При розробці методів статистичного оцінювання параметрів сплайнів застосовано методи максимальної правдоподоби, математичної статистики та випадкових процесів. Методи лінійної фільтрації, дослідження операцій, нелінійної оптимізації використовувались при розробці прикладних методів та алгоритмів. Для моделювання даних застосовано методи статистичного моделювання та чисельні методи. В цілому у процесі роботи використовувалась теорія сигналів, теорія наближень та теорія сплайн-функцій.

Наукова новизна полягає в наступному.

1. У класі сплайнових моделей сигналів створено методи синтезу оптимальних за МНК фільтрів (фільтрів Вінера-Колмогорова).
2. Отримано та теоретично обґрунтовано згортковий метод побудови базисних сплайнів з фрагментів широкого класу неперервних на фрагментах функцій.

3. Розроблено способи трансформації чотирьохфрагментних базисних сплайнів в локальний та глобальний інтерполяційні імпульси.
4. Створено методику розрахунку LSS (Least Squares Spline) фільтрів зі сплайн-моделями, які складаються з необмеженої кількості фрагментів рівної ширини, що ґрунтується на наближеному оберненні матриці специфічної форми.
5. Виведено формули для рекурентних розрахунків оцінок МНК зі сплайновими моделями (рекурентних LSS фільтрів).
6. Отримано частотно-часові розклади сигналів в локальних сплайнових базисах за методом найменших квадратів (LSS розклад).

Практичне значення роботи полягає в тому, що:

1. Створено технологію обробки цифрових сигналів складної форми, яка ґрунтується на сплайнових моделях залежностей. Перевагою розробленої технології перед відомими є універсальність моделі, що використовується та її обчислювальна ефективність. Порівняно з іншими сплайновими технологіями, розроблену відрізняє обґрунтованість вибору конкретних сплайнових базисів з врахуванням характеру сигналів та завад
2. Розроблено методику розрахунків віконних, рекурентних, децимуючих LSS фільтрів, синтез базисів для яких обґрунтований частотними властивостями корисного сигналу і шуму.
3. Синтезовано алгоритми та пристрої адаптивної обробки сигналів однократної обробки (з адаптацією за рахунок зміни частотних властивостей базисних сплайнів) та багатократної обробки в системах оптимального частотно-часового сплайн-розкладу за МНК (LSS розклад), що є стійким до адитивного білого шуму.
4. Ефективність розробленої технології випробувано у процесі вирішення практичних задач в системах обробки реальних сигналів складної форми у медичній функціональній діагностиці, геології і геофізиці та на модельних сигналах.

5. Отримані методи, способи і методики реалізовано у вигляді алгоритмів, прикладних програм і бібліотек функцій на алгоритмічних мовах “С”, “VBA”, у середовищах математичних пакетів “MathCad”, “Reduce”, ”Derive”, “MatLab”, “Simulink” та в спеціалізованих пакетах проектування цифрових пристроїв “Altera DSP blokset”, “Quartus II”. Така реалізація потенційно дозволяє розробити системи автоматизованого схемотехнічного проектування та комп’ютерного моделювання радіотехнічних та телевізійних пристроїв та вузлів (наприклад, створення гіперфункцій для ПЛІС Altera).
6. Отримані результати дозволяють виготовляти універсальні та спеціалізовані інтегральні мікросхеми оптимальної та адаптивної сплайн-обробки цифрових сигналів складної форми в радіотехнічних та телевізійних системах в умовах реальної заводової обстановки.
7. Загалом застосування здобутих результатів в системах проникаючої радіолокації, телеметрії, телемедицини дозволяє суттєво покращити обробку сигналів, підвищити інформативність та достовірність результатів. Так, заміна кубічної моделі сплайновою в фільтрі Савицького-Голея зменшує максимальну динамічну похибку в 16 разів, або дозволяє розширити вікно обробки щонайменше вдвічі, відповідно зменшивши випадкову похибку в 1.4 рази.

Впровадження результатів роботи. Основні результати досліджень і розробок впроваджено:

- у міському діагностичному центрі 2-ї міської лікарні м.Кривий Ріг;
- на кафедрі педіатрії та клінічної лабораторної діагностики факультету післядипломної освіти Дніпропетровської державної медичної академії (м.Кривий Ріг);
- на кафедрі математичного забезпечення ЕОМ Дніпропетровського національного університету.

Особистий внесок здобувача. У наукових роботах, опублікованих у співавторстві, авторові належать: [311,320,321,322,323,325] - застосування сплайн-

моделі, [312,313,314,318,331,333, 343] - методи побудови базисів, [315, 324] – рекурентний алгоритм, [316] - метод адаптації, [319] - метод реального часу, [317, 326, 338] - постановка задачі, [327] - побудова необмежених сплайнів, [334] – застосування центральної граничної теореми, [335] - швидкий алгоритм, [337] – розв’язок МНК, [340] - сплайн-метод частотно-часового аналізу, [341] – встановлення звязку між сплайнами і вейвлетами, [344]- конструкції пристроїв.

Апробація результатів дисертації. Основні результати доповідались на таких наукових конференціях: II МНТК “Методы управления системной эффективностью функционирования электрифицированных и пилотажно-навигационных комплексов” (Київ, 1993); звітна науково-технічна конференція наукових колективів університету за 1994 рік (Київ, КМУЦА); XVI звітна науково-технічна конференція університету за 1995 рік (Київ, КМУЦА); МНТК “Проблемы совершенствования систем аэронавигационного обслуживания и управления подвижными объектами” (Київ, 1996); МНТК “Авіа-1999” (Київ, 1999); МНТК “Авіа-2000” (Київ, 2000). МНТК “Авіа-2001” (Київ, 2001), МНТК “Авіа-2002” (Київ, 2002), МНТК “Авіа-2003” (Київ, 2003), МНТК “Авіа-2004” (Київ, 2004), МНК “Теорія та методи обробки сигналів” (Київ, 2005), МНМК “Проблеми математичного моделювання” (Дніпродзержинськ, 2003), МНМК “Проблеми математичного моделювання” (Дніпродзержинськ, 2004). Результати дисертаційного дослідження доповідались на секції №1 Вченої ради ІПММС НАН України, та у відділі оптимізації чисельних методів Інституту кібернетики ім.В.М.Глушкова НАН України, де отримали позитивну оцінку. Основні результати досліджень (а також електронна версія монографії) розміщені в internet за адресою www.kdeu.dp.ua/spline і є загальнодоступними з лютого 2003 року. Частина програмного забезпечення (побудова інтерполяційних сплайнів та сплайн-інтерполяторів) розміщено на сайтах www.matlab.ru та www.exponenta.ru/journal.

Публікації. Основні оригінальні результати є підсумком наукової роботи автора, котрою він займається з 1983 року. Вони складаються з 34 наукових робіт, в

тому числі 27 статей у фахових наукових виданнях, згідно списку ВАК, та однієї монографії.

Структура роботи та її обсяг. Дисертаційна робота складається зі вступу, шести розділів, висновків, що містять основні результати роботи, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг роботи складає 308 сторінок, робота містить 147 рисунків, 6 таблиць та список джерел з 345 найменувань.

РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ СПЛАЙН-ОБРОБКИ ЦИФРОВИХ РАДІОТЕХНІЧНИХ СИГНАЛІВ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Сигнали складної форми в радіотехнічних системах та особливості їх обробки

Як зазначалося у вступній частині, обробка сигналів складної форми є актуальною у зв'язку з інтенсивним розвитком цілого ряду спеціальних радіотехнічних систем. Розглянемо приклади таких систем детальніше. Виділимо три найбільш вагомих напрямки розвитку.

Радіотехнічні системи проникаючої радіолокації. Типовими представниками є радіолокатори під поверхневого зондування, або георадари (Ground Penetrating Radar - GPR), це пристрої, призначені для електромагнітного зондування конденсованих середовищ (у тому числі ґрунту, осадочних та скелистих порід, води, льоду і т.п.). Є багато літератури з цих питань на www.prometeus.nsc.ru. Розробкою наземних георадарів займаються фірми Sensors & Software Inc. (www.sensoft.ca), Geophysical Survey Systems Inc., GeoModel Inc. (www.geomodel.com), GRORADAR (www.g-p-r.com), ОДКП ИЗМИРАН (<http://top.izmiran.rssi.ru>), ТЕХНОДАЛС (С.Петербург), ЛЭМЗ, Москва (www.georadary.ru), ЗАО Таймер (www.zaotimer.ru), VIY, Київ, (www.tvrelsat.com). В Росії георадари представлені марками „Грот”, „Гидра”, „Питон”, „ОКО-М”, ТР-ГЕО”, „МПИ-8”, „Зонд-12С”. В Україні групою ентузіастів створено прилад „Вій”. Вартість цих приладів декілька десятків тисяч доларів США, зарубіжних у три - п'ять разів більше. В зарубіжних зразках значно більше приділяється уваги системам обробки й відображення інформації. В Україні над питаннями розробки систем проникаючої радіолокації працюють у Львівській політехніці, де Чайковським І.Б. захищена дисертація присвячена аналізу методів і алгоритмів обробки сигналів у системах авіаційного зондування. Сферою застосування георадарів є геологія, будівництво, археологія, експлуатація підземних споруд та

комунікацій, військова справа (розвідка та виявлення мін). Є також відомості про застосування подібних методів зондування в медичній діагностиці пухлин. Глибина зондування коливається від декількох метрів до сотень метрів, в залежності від характеру ґрунту. Роздільна здатність порядку десятків сантиметрів. Основна відмінність GPR систем від повітряної радіолокації полягає в складній структурі середовища поширення радіохвиль в поєднанні із сильним затуханням у діелектричному, неоднорідному і дисперсному середовищі. Це призводить до складної структури відбитого сигналу, де об'єкт маскується сильними завадами. Моделі формування сигналу розроблені лише для елементарних випадків. Наприклад, пошарового середовища з різними діелектричними та магнітними властивостями (GRORADAR). Побудова реалістичного зображення зрізу за результатами зондування є складною задачею, що потребує розв'язку погано обумовлених інтегральних рівнянь, чутливих до шумів. На рис. 1.1 показано типовий вигляд результату зондування разом із сигналом вздовж однієї із вертикалей.

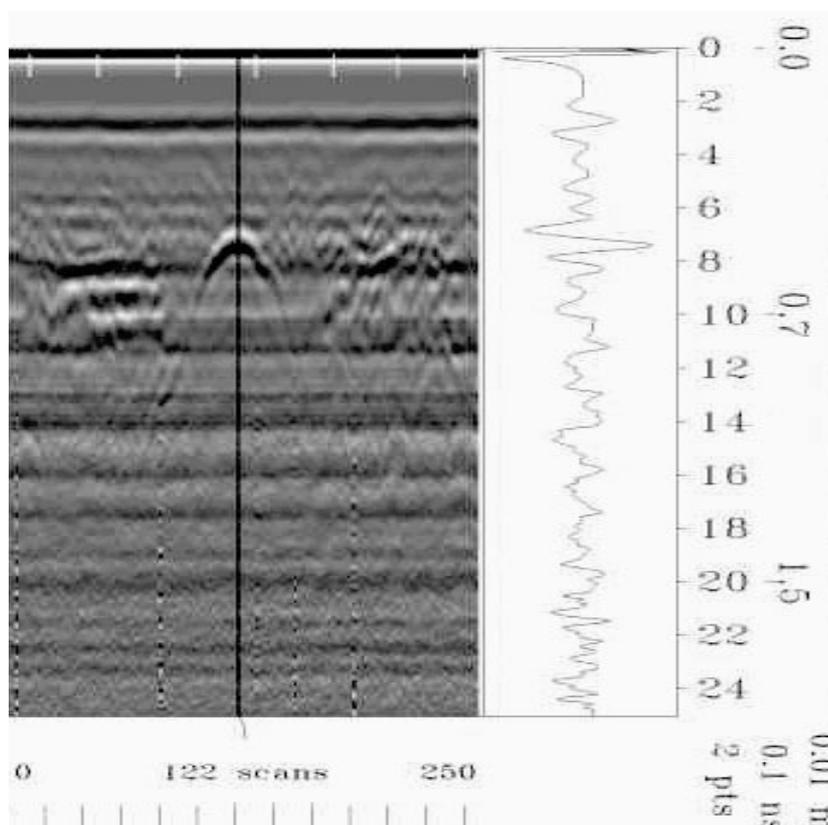


Рис. 1.1. Приклад сигналів георадару (GRORADAR)

Системи радіоакустичного та акустичного зондування атмосфери (расдари і содари) призначені для вимірювання параметрів атмосфери (температура, напрям та швидкість вітру) на висотах до 4 км. Розробкою содарів займаються фірми МЕТЕК GmbH (www.metek.de) и Scintec GmbH (Німеччина), Remtech S.A. (www.ramtechnic.com) (Франція, США), AeroVironment Inc. (www.aerovironment.com) (США), KAIJO Corp. (Японія). В Росії содар „Волна-3” розроблено в інституті оптики атмосфери СО РАН (www.iao.ru). В Україні питаннями радіоакустичного зондування займаються в ХНУРЕ (проф. Є.Г Прошкін). В 2003 році Карташовим В.М. захищена докторська дисертація „Розвиток теорії та удосконалення систем радіоакустичного й акустичного зондування атмосфери”. В роботі відмічається: „Основним фактором, що визначає недосконалість систем, є недостатнє теоретичне й методичне забезпечення діяльності інженерів, які займаються розробленням, дослідженням та експлуатацією апаратури. Наявну інформаційну прогалину компенсують використанням відповідних відомостей, методик та алгоритмів із класичної радіолокації, що розроблені для точкових розсіювальних об’єктів, або знаходять технічні рішення, спираючись на інженерну інтуїцію чи натурний експеримент. Застосовувані методи і рішення недостатньо враховують специфічні особливості даних систем, обумовлені унікальністю використовуваних локаційних об’єктів – акустичного хвильового пакету і розподілених “повсюдно” у середовищі природних турбулентних неоднорідностей”.

Карташов В.М. для расдарів розробив методи аналізу й синтезу зондувальних сигналів, що ґрунтуються на введеній двовимірній просторово-частотній взаємно кореляційній функції звукового та електромагнітного коливань – функції розсіяння.

Характер і проблеми обробки сигналів содарів і расдарів подібні до аналогічних у георадарах. Маємо складне середовище з розподіленими об’єктами та високим рівнем завад. Зображення результатів зондування атмосфери можна знайти за адресою http://apollo.lsc.vsc.edu/classes/remote/graphics/sodar_images/. На рис. 1.2

показано результати зондування. Як і у випадку георадарів мова йде про сигнали складної форми, що є наслідком взаємодії радіо (акустичних) сигналів із складним середовищем.

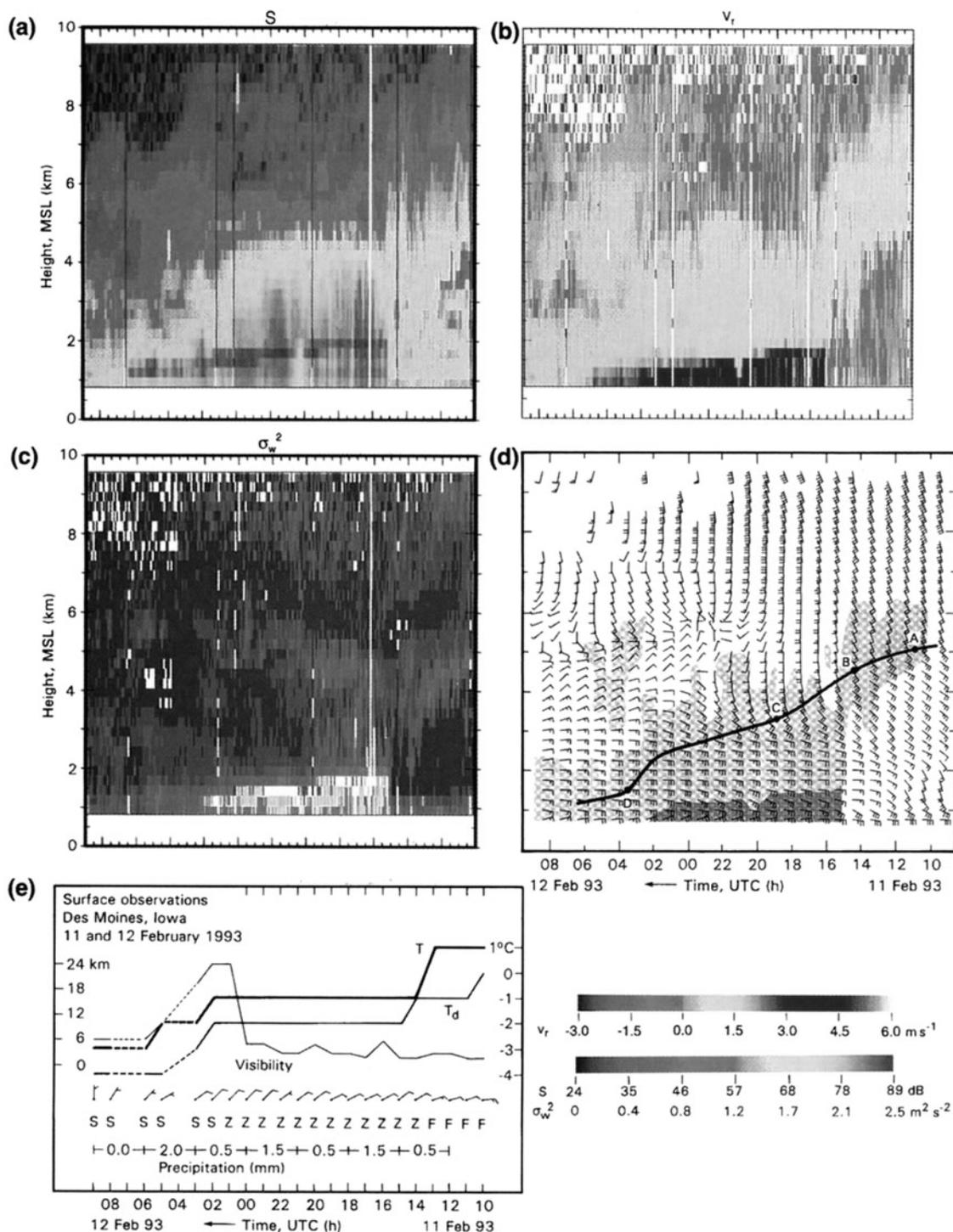


Рис. 1.2. Результати содарного зондування атмосфери.

В обох випадках результати зондування представляють у вигляді візуального зображення, що підлягає аналізу людиною-оператором. Характерною особливістю

цих систем є наявність дуже широкого арсеналу засобів обробки сигналів, що включає лінійні цифрові фільтри верхніх і нижніх частот, медіанну фільтрацію, двомірні фільтри обробки зображень, вейвлет-розклад. Очевидною причиною такого різноманіття є широке коло умов, за яких відбувається зондування, різноманіття середовищ зондування та об'єктів ідентифікації.

Телемедичні системи моніторингу і біорадіотелеметрії, зокрема, для потреб медицини катастроф та військової медицини. Цей напрямок частково можна віднести до телеметричних систем із використанням власного випромінювання об'єктів у радіочастотному діапазоні. Розвиток телемедицини тісно пов'язаний з поширенням комп'ютерних та Інтернет технологій. В Україні діє асоціація комп'ютерної медицини УАКМ (www.uacml.kharkov.ua).

Значна увага цьому питанню приділяється в Національному медичному університеті (www.srlc.nmu.kiev.ua/telemed), в Донецькому державному медичному університеті (ДонДМУ, www.telemed.org.ua), інституті проблем військової медицини МО України (м.Ірпінь, Київська область), міжнародному науково-навчальному центрі інформаційних технологій і систем НАН України та Міністерства освіти і науки України (МННЦ ІТтаС, www.dlab.kiev.ua). Фірма ПАЛЛАР Ltd (www.pallar.com.ua) надає телемедичні послуги. Але в цивільній медицині домінуючими є майже виключно комп'ютерні технології. Проте у медицині катастроф, військовій медицині, окремих сферах діяльності, пов'язаних із високим ризиком та навантаженнями, важливу роль відіграють радіосистеми. В ДонДМУ на кафедрі нормальної фізіології були розроблені радіотелеметричні системи для контролю стану шахтарів при роботі у вугільних шахтах Донбасу. Армія США розробляє ряд технологій збереження життя на полі бою. Реалістична оцінка фізіологічного стану бійців та обсягу необхідної допомоги дозволяє на 30% знизити бойові втрати. В основі технологій покладено монітор індивідуального стану. Це мініатюрний прилад, що є частиною обмундирування бійця і включає сенсори оточуючого середовища, біосенсори та засоби зв'язку. Монітор повинен працювати в автономному режимі та за запитом передавати необхідну інформацію

про стан солдата командиру. Зрозуміло, що робота таких систем моніторингу проходить у дуже жорстких умовах. При цьому прилад не повинен заважати виконанню основних функцій. Тому контактні методи зйомки сигналів, звичні в діагностичних системах в умовах клініки, є малоприматними. Переважна більшість біосигналів (електрокардіографічні, реографічні, пульсометричні, міографічні, енцефалографічні і т.п.) є сигналами складної форми, які реєструються з високим рівнем шумів, що ускладнює їх обробку.

В доповіді Б.М.Шевчука (МННЦ ІТтаС, відділ медичних систем) на симпозіумі „Телемедицина” (25-26 травня 2000 р., Київ) зазначається: „Ефективність дистанційного контролю біооб'єктів визначають такі показники систем моніторингу як портативність засобів оперативного відбору контролюючих параметрів, наявність високих метрологічних характеристик пристроїв підсилення, перетворення та фільтрації біосигналів, інформативність пристроїв обробки, стиску та передачі інформації, а також надійність доставки контролюючої й обробленої інформації на верхні рівні інформаційних систем.

Ефективність функціонування систем довготривалого дистанційного контролю за станом біооб'єктів у значній мірі визначається тими алгоритмами попередньої обробки контролюючих сигналів, які реалізуються безпосередньо в процесі зйомки біосигналів. Як правило, такі алгоритми повинні орієнтуватися на роботу в реальному часі і реалізуватися у вигляді програм для мікроконтролерів чи сигнальних процесорів. Довготривалий дистанційний контроль біооб'єктів в першу чергу передбачає виконання в темпі зйомки інформації операцій фільтрації й стиску цифрових відліків сигналів.”

Представлені три важливих напрямки розвитку радіотехнічних систем об'єднує три основних особливості сигналів у цих системах:

- складність і унікальність форми сигналу на всьому інтервалі спостереження;
- носієм корисної інформації є форма сигналу та її тонкі деталі;
- корисна складова сигналу маскується високим рівнем шумів.

Розглянемо методи обробки, що застосовуються до таких сигналів. В основі переважної більшості методів обробки є цифрова фільтрація. Оскільки для подальшого аналізу важливо отримати оцінки точності (наприклад, у вигляді довірчих інтервалів) розглядатимемо лінійні методи. Вимога мінімального спотворення форми корисного сигналу обмежує вибір трансверсальними фільтрами з лінійною фазово-частотною характеристикою. Іншими важливими властивостями трансверсальних фільтрів є наявність швидких алгоритмів їх розрахунку з можливістю реалізації АЧХ заданої форми. Відсутність проблем із стійкістю трансверсальних фільтрів дозволяє застосовувати їх в адаптивних алгоритмах.

Для досягнення вищої ефективності обробки доцільно розглядати оптимальні методи. Найбільш уживаним, простим в реалізації і застосовним до обробки сигналів із збереженням форми є середньоквадратичний критерій. Цей критерій є звичним в радіотехніці, оскільки застосовується у Фур'є розкладі з різноманітними базисами. Найбільш відомі є оптимальні фільтри Вінера. Знаходження оптимальних частотних характеристик фільтра здійснюється в частотній області за спектрами потужності. Частотний коефіцієнт передачі оптимального фільтра має дорівнювати:

$$|K(j\omega)| = \frac{W_x(\omega)}{W_x(\omega) + W_e(\omega)}, \text{ де } W_x(\omega) \text{ - спектр потужності корисного сигналу,}$$

$W_e(\omega)$ - спектр потужності шумової складової. Зрозуміло, що такий підхід враховує лише середні характеристики сигналу, як випадкового процесу.

Інший підхід опирається на оцінки значень сигналу за методом найменших квадратів із допомогою алгебраїчних поліномів у побіжному вікні. Це фільтри Савицького-Голея, які застосовують для обробки сигналів, коли важливе точне відтворення форми. Рішення МНК і знаходження оцінки значення у вікні зводиться до обробки відліків сигналу трансверсальним фільтром. Відомим є також рішення МНК за рекурентною схемою, що є окремим випадком фільтрів Калмана. Ці методи враховують форму конкретної реалізації сигналу, але вибір порядку (степені)

полінома, виду полінома, ширини вікна є досить довільним, емпіричним. Про складності цього процесу зазначалося у вступі.

Підвищити якість апроксимації функцій складного виду вдається, застосувавши локальні хвилеподібні базисні функції - вейвлети. Для цього класу базисів у цифровій обробці сигналів знайдено ряд швидких алгоритмів, що ґрунтуються на інтерполяції сигналів. На окремому етапі розкладу вейвлет алгоритми мають складність порядку $O(n)$, але двократна пірамідальна схема в цілому має обчислювальну складність $O(n \log n)$. Проте порівняно із класичним Фур'є розкладом розрахунки можна виконувати в дійсних числах і цілочисельній арифметиці. Ці алгоритми успішно застосовують для обробки сигналів із малим рівнем шумів. Однак інтерполяційна схема не забезпечує ефективності при наявності значного шуму, а особливо білого. Тому за наявності шуму у схеми вейвлет обробки включають різноманітні схеми попередньої фільтрації, фактично повертаючись до попередніх задач.

Суттєво удосконалити радіотехнічні системи GPR, телеметрії, телемедицини дозволяють сплайнові моделі сигналів. Перша публікація по сплайнах з'явилася в 1946 році (Shoenberg, I.) [34]. Слід особливо відмітити, що сплайни вперше були застосовані в балістичній лабораторії США. для розрахунку складних траєкторій снарядів в атмосфері. Широкого поширення сплайни набули разом із загальним поширенням комп'ютерної техніки з 1960 років. Основною сферою їх застосування стала комп'ютерна графіка та геометричне моделювання. За цей період Шенбергом було написано й опубліковано більше 40 статей. Підсумком цих досліджень стала монографія з питань Cardinal Spline Theory, видана в 1973 році [35]. Результатом подальшої праці Шенберга була публікація ще 56 наукових робіт. Вторгненню сплайнів в теорію наближення відбулося через задачі інтерполяції функцій і завдяки поширенню й розвитку комп'ютерної техніки. Виявилось, що в багатьох випадках сплайни мають цілий ряд переваг перед алгебраїчними та тригонометричними поліномами. Теорії та практиці сплайнів присвячені роботи К.Бора (deBoor, C) [19,163], Шумейкера (Shumaker, L.L.) [40], Альберга (Ahlberg, A.), Нільсона

(Nilson,E.), Уолша [122], Завялова Ю.С. [172,173], Квасова Б.І. [172], Корнейчука М.П. [200], Стечкина С.Б., Суботіна Ю.Н. [289]. В Інтернеті під редакцією Бора та Шумейкера функціонує електронна база даних по роботах присвячених сплайнам: Spline Bibliography Database (SBD) (www.math.auckland.ac.nz/~waldron/Splinebib/splinebib.html). Проте переважну більшість розробок та досліджень присвячених сплайнам можна віднести до сфери прикладної математики, або чисельних методів. Інженерна сфера застосування сплайнів, а особливо обробка цифрових сигналів є досить скромною в порівнянні з обсягом математичних досліджень. Поділ на математичний та інженерний напрямки в даному контексті не має характеру протиставлення. Для ясності можна навести приклад із спектральним аналізом. Математичний напрям тут представлений відповідними розділами математичного аналізу та абстрактного гармонічного аналізу, а інженерний дискретними та швидкими алгоритмами і методами та засобами спектрального оцінювання [216], а також рядом специфічних прикладних методів у різних сферах техніки: радіотехніки [137], механіки [214], акустики [273], геології та геофізики [233] і т.д.

Найбільш відомою інженерною областю використання сплайнів довгий час залишалася комп'ютерна графіка [217]. Новим поштовхом до інженерних застосувань сплайнів стали wavelet методи обробки сигналів [2,33,150]. В основу wavelet методів покладена кратна інтерполяція даних в ортогональних локальних базисах [12]. Існує досить велика різноманітність локальних базисів, включаючи і сплайни [54,305]. Проте сплайни тут не займають домінуючого положення, не зважаючи на їхні незаперечні переваги саме в інтерполяційних задачах. Однак можна сказати, що це перше серйозне вторгнення сплайнів у сферу signal processing і алгоритми реального часу. Найбільш переконливим є використання wavelet для стиснення даних із втратами [82]. Існує добре розроблена теорія і є досить алгоритмів та прикладів їх успішної роботи для стиснення зображень. Не зважаючи на це домінуючими, є не wavelet методи, а евристичні і значно складніші jpeg алгоритми зі слабким теоретичним обґрунтуванням [230]. Інші спроби

використання сплайнів в інженерній галузі обробки цифрових даних є досить локальними й епізодичними. Це моделювання нелінійних систем [221], реконструкція зображень [82], генерація сигналів складної форми [249]. Є цікава спроба замінити гармонічні функції в ДПФ їх сплайн-інтерполяцією і тим самим спростити розрахунки [90]. Отже, застосування сплайнів для обробки сигналів в радіотехнічних системах проникаючої радіолокації, телеметрії, телемедицини є актуальним, обґрунтованим і можливим.

1.2 Сплайни, їх різновиди та способи побудови

Розглянемо досить значну різноманітність функцій, що їх називають сплайнами. На даний час з одного боку маємо найбільш відомі алгебраїчні сплайни, з іншого багато інших конструкцій, що відрізняються виглядом фрагментів та особливостями побудови [28,42,48,67,94,95,96,97,165,184,225,231,249,250,269]. Тому логічним є питання вибору сплайн-функцій, що відповідають характеру конкретних даних та специфіці застосування.

Відоме класичне визначення сплайна [200]: Функція $S(t)$ визначена і неперервна на відрізку $[a,b]$ називається поліноміальним сплайном порядку m із вузлами $x_j \in (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$, якщо на кожному з відрізків $[x_{j-1}, x_j]$, $j=1, n$, $S(t)$ є алгебраїчним поліномом степені, що не перевищує m , в кожній з точок x_j деяка похідна може мати розрив. Якщо в точці x_j неперервні функції $S(t)$, ..., $S^{(m-k_i)}(t)$, а похідна $S^{(m-k_i+1)}(t)$, у точці x_j терпить розрив, число $k = \min_{0 \leq i \leq n} k_i$ називають дефектом сплайна.

Слід зауважити, що таке класичне визначення сплайна є дещо звуженими. Так К.Бор застосовує сплайни з кратними вузлами [163], де $x_j \in (a = x_0 \leq x_1, \leq \dots \leq x_n = b)$. Б.А.Попов будує сплайни, фрагменти яких не є алгебраїчними поліномами, а складаються з раціональних функцій, функцій Паде,

степеневих функцій [112]. В монографії розглянуто питання рівномірного наближення сплайнами та приведено оцінку нев'язки. Для побудованих сплайнів даються рекомендації, що до практичного застосування. Проте в роботі не наведено загального визначення таких сплайнів. Інформація, викладена в роботах [157,249,255] є хорошим довідником, що сприятиме виборові та побудові базисних сплайнів для конкретних задач.

К.де Бор дає визначення сплайна через лінійну комбінацію В-сплайнів, які у свою чергу визначаються на не спадаючій послідовності вузлів ($\dots \leq x_i \leq x_{i+1}, \leq \dots \leq x_j \leq x_{j+1} \leq \dots$) через аналітичну формулу [163]. В цьому випадку сплайн уже не є обмеженим відрізком $[a,b]$ із фіксованим числом вузлів, умова неперервності похідних не є домінуючою, але фрагменти задаються, як алгебраїчні поліноми. Бор розглядає поняття "сплайн" як особливу точку зору на кусково-многочленні функції. Шенберг також розглядав питання побудови інтерполяційних сплайнів для необмеженого числа фрагментів за умови однакової довжини фрагментів [19].

З погляду автора цієї роботи, відсутність обмежень на скінченність сітки вузлів є прийнятною і корисною. Але під сплайном будемо розуміти саме гладку функцію з неперервними щонайменше значеннями і першою похідною на фрагментах та в точках склейки.

Випадки кусково-постійної, ламаної, як і сплайна з одним фрагментом, можна розглядати, як методично корисні ілюстрації певних принципів сплайнів.

Цілком прийнятним є й використання у фрагментах не алгебраїчних поліномів, якщо вдається знайти достатньо простий спосіб забезпечити неперервність у точках стику.

Узагальнюючи поняття сплайна, слід визначитись, що саме той у даній роботі розумітимемо під поняттям "сплайн".

Визначення: сплайном називатимемо неперервну й визначену на фрагментах функцію S , яка складається із фрагментів, що є функціями одного виду і стиковані

спеціальним чином. Точки стикування фрагментів називатимемо вузлами сплайна. Основною умовою стикування фрагментів є неперервність значень і частини похідних у точках стикування.

Послідовність вузлів є зростаючою (кратність вузлів у даній роботі не розглядатимемо). Оскільки число похідних у функцій, із яких складатиметься сплайн не задається, (вони можуть мати невизначене, або нескінченне число похідних), то поняття дефекту сплайна втрачає зміст і зручніше говорити про сплайн із неперервними m -похідними в точках стикування.

Розглянемо способи побудови сплайнів. Основна проблема полягає в забезпеченні зазначених раніше спеціальних умов стикування сусідніх фрагментів. Функція, що представляє окремі фрагменти має залежати від деякого вектора параметрів, зміна яких повинна забезпечити виконання умов стикування у вузлах (рівність значень та частини похідних). Окремий фрагмент обмежений двома вузлами. Звідси слідує необхідність мати число параметрів, кратне двом, від яких лінійно залежить функція на фрагменті. Тому переважно користуються сплайнами, які складаються з відрізків прямих та кубічних парабол. Функції з непарним числом параметрів також розглядають, але доводиться задавати деякі додаткові умови для “зайвого” параметра, що є дещо неприродно. Очевидно, що значення параметрів можна однозначно визначити із системи лінійних рівнянь (за умови лінійної залежності функції від параметрів). При такій методиці виникає ряд серйозних проблем.

Сплайн визначається на обмеженому сегменті. З точки зору обробки числових даних це означає пакетний метод розрахунків. Лише задавши всю множину вузлових точок, можна отримати значення сплайна в довільній точці.

Проблема розв’язку системи лінійних інтерполяційних рівнянь для загальних застосувань не є гострою, оскільки система має специфічний діагональний вигляд, добре обумовлена й розроблені ефективні методи її розв’язку [180,181,183]. Проте для алгоритмів реального часу ця проблема є серйозною.

Труднощі з визначенням крайових умов є наслідком наявності крайніх лівого та правого вузлів, для котрих відсутні сусідні фрагменти. Отже пара параметрів залишаються вільними і їх потрібно задати деяким способом. Цих труднощів удається позбутися, користуючись періодичними сплайнами, для котрих крайні вузли відсутні (є природне продовження). В інших випадках задають певні крайові умови з деяких практичних міркувань (досить довільно). Наприклад, рівність нулю першої похідної у крайніх вузлах [172]. Крайові умови є неприємним моментом, що знижує досконалість алгоритмів ефективних розрахунків для сплайнів. Оскільки у визначенні параметрів функцій на фрагментах приймають участь всі вузли інтерполяції, то сплайни такого виду називають глобальними, або фундаментальними. Назва обґрунтована, як глибиною досліджень даних сплайнів, так і наявністю ряду оптимальних властивостей (надзвичайно приємних для математиків). Найбільш відомий представник таких сплайнів — кубічний сплайн із двома неперервними похідними. Він має властивості мінімальної гладкості та найкращого наближення. Значення першої похідної у вузлах підпорядковується умові неперервності другої похідної [155,304].

Менш поширеними є локальні сплайни. Назва походить від того, що в задоволенні умов стикування фрагментів задіяна обмежена кількість найближчих вузлів. Тому для їх побудови не потрібно розв'язувати систему лінійних рівнянь. Відмінності локальних сплайнів полягають у різних способах визначення неперервних похідних. Найбільш природнім є рівність першої похідної першій похідній інтерпольованої функції (аналогічно і для вищих похідних). Тому такі сплайни називають ермітовими. На жаль, значення першої похідної у вузлах відоме виключно рідко. Тому ці значення визначають через розділені, або центральні різниці з використанням сусідніх вузлів. Для ермітового кубічного сплайна з неперервною першою похідною значення в точці визначатимуть чотири найближчих вузли. Труднощі вибору крайових значень є менш актуальними, оскільки є декілька відносно природних шляхів їх вирішення. Можна для розрахунку похідної задіяти лише існуючі вузли, або центральні різниці замінити

розділеними. Інший підхід полягає в тому, щоб продовжити фрагменти ліворуч та праворуч. Для фрагментів однакової ширини - аналогічними. Для довільної - продовженими в нескінченність. Для ермітових кубічних сплайнів це дає хороші результати (детальніше про це в 2-му розділі).

Ермітові сплайни мають неперервних похідних менше, ніж глобальні. Так кубічний ермітові сплайн має у вузлах неперервність лише першої похідної. Вони також не мають оптимальних властивостей глобальних сплайнів. До локальних ермітових сплайнів відноситься ламана, яка є хорошою ілюстрацією їх основних переваг. Саме локальні ермітові сплайни є найкращими кандидатами на застосування в задачах обробки цифрових сигналів. Їх перевага не лише в простоті розрахунків. В більшості випадків неперервність другої похідної та оптимальні властивості не є продиктованими природою даних. Значно важливіша відповідність першої похідної характеру даних, а розрив другої похідної візуально непомітний. Слід відмітити, що аналогія глобального кубічного сплайна з реальними фізичними об'єктами є досить умовною (лише для малих величин першої похідної). Лінійка (лекало - сплайн) має бути ідеальною, інакше потрібно враховувати нелінійності зв'язані з деформацією і т.п. Практично форма глобального та локального сплайнів побудованих на одних вузлах відрізняється мало. Локальність дозволяє будувати сплайн без обмежень на число фрагментів.

Пояснимо ще декілька термінів, що часто зустрічаються.

Кардинальні сплайни - це сплайни із фрагментами рівної довжини. Іноді цей термін невірно застосовують до глобальних сплайнів, оскільки саме вони вперше розглядалися в даному контексті Шенбергом. Однак К.Бор ці поняття розділяє, застосовуючи до глобальних сплайнів термін "фундаментальні сплайни". Кардинальні сплайни є ідеальними претендентами для використання в алгоритмах реального часу. Якщо не враховувати крайові умови, то в системі інтерполяційних рівнянь матимемо Теплицеву матрицю, для якої існують ефективні методи розрахунків.

B-сплайни в літературі асоціюється з алгебраїчними сплайнами. По суті вони утворюють базис для утворення глобальних і є відповідні вирази для перерахунку. Різниця у формі представлення. Сплайн визначається, як лінійна комбінація з локальних базисних сплайнів, що розраховуються через рекурентні вирази. Це дає певні переваги в розрахунках та дослідженні їх властивостей. Сам сплайн побудований, як лінійна комбінація локальних B-сплайнів найчастіше є глобальним, оскільки для знаходження коефіцієнтів розв'язується система лінійних рівнянь, що враховує всі вузли. В даній роботі термін B-сплайни матиме дещо ширше значення і не означатиме лише алгебраїчні сплайни, а локальні сплайнові базиси широкого класу неперервних на фрагментах функцій.

Нелінійні сплайни (сплайни, що нелінійно залежать від параметрів, які їх визначають), сплайни високих порядків, та з неперервністю похідних вище другої у даній роботі не розглядатимуться. Частково тому, що вони вимагають серйозного ускладнення розрахунків і тому є поганими претендентами на роботу в реальному часі. З іншого боку, сплайни відрізняє саме простота та ефективність математичного апарату, і втрата цих переваг перед класичними методами ставить під сумнів доцільність таких побудов у сфері обробки сигналів узагалі. Цілком очевидно, що такі побудови мають мати дуже серйозне обґрунтування їх переваг перед класичними сплайнами в конкретних випадках. Зазначимо, що підвищення якості наближення сплайнами низьких порядків ефективно досягається шляхом збільшення числа фрагментів, без суттєвого ускладнення розрахунків. Тому це навряд чи може бути аргументом для зазначеного ускладнення самих сплайнів.

Отже, найбільш придатними для задач обробки сигналів у цифрових системах є сплайни утворені з локальних сплайнових базисів, та ермітові сплайни. Що стосується методики підвищення ефективності розрахунків, то ці питання розглядаються в багатьох роботах [127,137,146,174,243,175,239,245,302,308,309] і використовуються автором.

1.3 Точність наближення сплайнами детермінованих сигналів

Основні переваги сплайнів перед іншими апаратами наближення виявляються в інтерполяційних задачах. Саме інтерполяційні сплайни в багатьох випадках забезпечують мінімальну похибку наближення на класі функцій. Теорія сплайн-інтерполяції є добре розробленою, особливо для сплайнів мінімальних дефектів (глобальних). Результати досліджень похибок інтерполяції досить повно висвітлені в багатьох монографіях [148,163,172,200,249]. Історія вивчення цих питань від найдавніших часів до сучасних поглядів викладена в [23].

Типовий підхід до оцінок інтерполяції потребує віднесення інтерпольованої функції до певного класу з певними диференційними властивостями [163,200]. Оскільки інтерполяція сплайном по суті є інтерполяцією функціями, що є фрагментами сплайна, то побудова оцінок нев'язки близька до відповідних класичних теорій стосовно одного фрагмента.

Так для функцій з чотирма неперервними похідними максимальна нев'язка інтерполяції глобальними кубічними сплайнами на рівномірній сітці вузлів становить [200]

$$\|g - S\|_C \leq \frac{5}{384} |h|^4 \|g^{(4)}\|, \quad (1.1)$$

де $g \in W_\infty^4$ інтерпольована функція ;

S глобальний інтерполяційний кубічний сплайн;

h ширина фрагмента сплайна.

Для кубічного ермітового сплайна

$$\|g - S\|_C \leq \frac{1}{384} |h|^4 \|g^{(4)}\|, \quad (1.2)$$

Для ламаної нев'язка ідентична нев'язці для відрізка прямої:

$$\|g - S\|_C \leq \frac{1}{8} |h|^2 \|g''\|, \quad g \in W_\infty^2. \quad (1.3)$$

Як бачимо, похибка наближення залежить від ширини фрагмента та диференційних властивостей інтерпольованої функції. Нев'язка для кубічних сплайнів є близькою до відповідного залишкового члена в кубічній інтерполяції [155]

$$\|g - P\|_c \leq \frac{1}{24} |h|^4 \|g^{(4)}\|, \quad g \in W_\infty^4. \quad (1.4)$$

Суттєва відмінність і перевага сплайнів перед класичними методами полягає в тому, що збільшення вузлів інтерполяції (і відповідно зменшення ширини інтервалів) не пов'язано з ускладненням інтерполяційного полінома. Тому найкраще досягти зменшення невязки шляхом скорочення довжини фрагментів сплайна. Ускладнення розрахунків при цьому є незначним. Для глобальних сплайнів зростає розмірність інтерполяційних рівнянь, які, однак, є добре обумовленими. Для локальних сплайнів ця процедура практично зводиться до втрат пов'язаних із збільшенням затрат на пошук фрагмента, якому належить задана точка інтерполяції. Таким чином для сплайнів збільшення розмірності наближаючого простору не має катастрофічних наслідків, характерних для класичних методів. Саме з цих міркувань у практиці дуже рідко використовують сплайни, фрагменти яких є складними для розрахунків функціями. Для алгебраїчних поліномів обмежуються степенем не вище третього.

Іншим позитивним фактором наближення сплайнами є залежність невязки від норми похідної фіксованого порядку. Це дозволяє успішно виконувати наближення “поганих” функцій, у яких вищі похідні швидко зростають (як $n!$ і швидше), та функції з розривами похідних. Це відомий приклад Рунге $(1/(1+25x^2)^{1/2})$, $|x|$ - що має розрив першої похідної та інші [163].

Отримані оцінки точності наближення на практиці мають лише потенційне значення і можуть слугувати для визначення відносної зміни невязки при зміні сітки вузлів. З іншого боку, такі оцінки є дуже песимістичними, вони дають верхню грань похибки наближення. Априорно встановити величину невязки для конкретних даних на практиці важко, оскільки це потребує віднесення даних до

певного класу функцій, згідно диференційним властивостям. Така інформація в переважній більшості випадків відсутня, а чисельне визначення диференційних властивостей еквівалентне тій же інтерполяційній задачі.

Отже підходи, що ґрунтуються на класичних оцінках похибки наближення для певних класів функцій є малоприматними для застосування в технології цифрової обробки сигналів. По-перше, такі оцінки є надто песимістичними, по-друге, відкритим залишається питання віднесення сигналів до того чи іншого класу. Нев'язка наближення залежить від значення вищих похідних, котрі за емпіричними даними визначити важко. Отже, для оцінки якості наближення в інженерній практиці слід знайти інший підхід, можливо з евристичними алгоритмами, але більш прийнятний на практиці. В роботі для вибору конкретного сплайна та оцінки його придатності для наближення конкретних даних пропонується скористатись співвідношеннями між спектрами сплайнових базисів та даних. Дослідження в цьому напрямку можна знайти в Унсера [54]. З практики застосування наближення гармонічними функціями можна стверджувати, що практично всі сигнали вважаються такими, що відповідають умовам теореми Діріхле. З цієї точки зору можливий вибір конкретного виду сплайнового базису, спектр котрого буде узгодженим із спектром сигналу. Таким чином можна сформулювати задачу синтезу сплайнового базису, що відповідає заданим частотним характеристикам. Задача потребує специфічних методів побудови базисних сплайнів. Специфічність полягає у близькості вказаної задачі до відомих задач синтезу цифрових фільтрів. Розробка такого методу дозволить змінювати частотні характеристики базисів, не лише керуючи шириною фрагментів, але й безпосереднім вибором необхідного виду фрагментів. Це дозволить формувати сплайнові базиси з врахуванням особливостей конкретних даних та певних обмежень на якість наближення. Частотний підхід застосовується авторами, що займаються задачами обробки цифрових даних, із допомогою алгебраїчних В-сплайнів [54,55,56,62]. Проте частотний підхід застосовується в основному у зв'язку з аналізом типових інженерних конструкцій, що отримуються при застосуванні сплайнів у сфері цифрової обробки даних.

Зворотній вплив такого підходу на самі способи побудови сплайнів не є вираженим. В даній роботі цей напрямок розвивається і ставиться задача знайти способи побудови сплайнових базисів, що мають певні частотні властивості та розробити технологію їх застосування в задачах обробки сигналів. А саме, розробити методи побудови сплайнів, що зручні в першу чергу для інженерних задач обробки сигналів, а не виходячи зі зручності саме для математичних досліджень.

1.4 Статистичні оцінки сплайн-моделей сигналів

Переважає більшість емпіричних сигналів містить як детерміновану складову, так і деякий випадковий шум, котрим не можна знехтувати. Отже, задача сплайн-інтерполяції матиме зміст лише для відносно вузького кола задач, де шуми є малозначимими і кількість даних не надто велика. Це, наприклад, задачі підвищення частоти дискретизації сигналів [301].

Наявність випадкових складових в сигналах, безумовно передбачає використання статистичних методів обробки. А саме, маємо використовувати статистичне оцінювання параметрів сплайн-моделі [121,158,195,207,211].

В математичній теорії наближення сплайнами найчастіше розглядається згладжуючий сплайн (1.5) [108,163,266].

За умови, що маємо значення з адитивною похибкою деякої гладкої функції $f(x)$: $y_i = f(x_i) + E_i$ в точках x_1, \dots, x_n , та оцінку СКВ $\delta(x)$, можна з певною точністю відновити $f(x)$. Для цього будують сплайн S , який для заданого параметра $p \in [0,1]$ мінімізує функціонал

$$p \sum_i \left(\frac{y_i - S(x_i)}{S(x_i)} \right)^2 + (1-p) \int_{x_1}^{x_N} (S^{(m)}(t))^2 dt \quad (1.5)$$

по всіх фрагментах S із m – похідними. Параметр $p \in [0,1]$ – встановлює компроміс між гладкістю S та наближенням до даних.

Питання вибору параметра згладжування p є відкритим. При його виборі слід опиратися на деякі апріорні дані про $f(x)$, а практично необхідно порівнювати отриманий результат з потенційно очікуваною гладкістю $f(x)$. Проблема в тому, що апріорна інформація про гладкість має якісний характер, а параметр задає точне, кількісне співвідношення. При $p=0$ маємо чисто середньоквадратичне наближення, при $p=1$ звичайну інтерполяцію без згладжування. Ідея побудови такого згладжуючого сплайна належить Уїттекеру і розвинута Шенбергом і Рейншем [163]. Для побудови згладжуючого сплайна похідні замінюються розділеними різницями. Проблема подібних процедур полягає в складності розв'язку системи рівнянь при побудові згладжуючого сплайна, та значне погіршення обумовленості рівнянь. Подібні недоліки роблять сумнівним безпосереднє використання такого підходу в алгоритмах реального часу. З точки зору статистики модель має надмірну кількість ступенів вільності, що перевищує розмірність даних. Тому стійкість розв'язку досягається лише завдяки інтегральній складовій. Подібна модель згладжування реалізована в пакеті Statistika, для згладжування двомірної поверхні на графіках. Число наукових розробок та публікацій присвячених згладжуючим сплайнам відносно невелике і зустрічаються вони саме при розв'язковій прикладних задач [41,86,108,132,164,165,209,237,285,294].

Інший підхід застосовують у методах згладжування даних із сплайновими базисами. Ефект згладжування досягається за рахунок того, що сплайновий базис є більш гладким відносно шумової складової сигналу. Як гладкість сплайна, так і якість його статистичних оцінок визначаються шириною фрагментів та кількістю вузлових точок. В порівнянні з попереднім підходом число ступенів вільності тут не перевищує число відліків даних. У випадку рівності числа вузлів числу відліків маємо звичайний інтерполяційний сплайн. Максимальне згладжування отримаємо для сплайна, що складається з одного фрагмента. Тобто, згладжуючий сплайн є природнім продовженням класичної моделі, яка не здатна адекватно наблизити на заданому інтервалі детерміновану складову. Керування ступенем згладжування,

змінюючи ширину фрагментів відносно даних, реалізоване на регулярних сітках у wavelet методах, зокрема, в пірамідальних схемах, та методах multiresolution analysis [12,13,25,93,100,101,112]. Такий підхід має конструктивну основу, що ґрунтується на співвідношеннях спектрів даних та сплайнових базисів. Скорочення фрагментів розширює смугу пропускання wavelet фільтра і зменшує гладкість.

Питання вибору кількості та розміщення вузлів згладжуючого сплайна у загальному випадку ідентична вибору параметра в (1.5). Однак даний спосіб є більш гнучкий, оскільки дозволяє локально змінювати гладкість (задаючи фрагменти різної ширини). Задача пошуку оптимальної множини вузлів згладжуючого сплайна є задачею багатомірної оптимізації з обмеженнями. Обмеження полягає в тому, що послідовність вузлів має бути зростаючою (або неспадаючою). Для заданої кількості вузлів таким способом можна знайти таке їх розміщення, що мінімізуватиме заданий критерій. Критерієм оптимальності найчастіше обирають мінімум середньоквадратичного відхилення, або мінімум модуля відхилення. Однак досягнення вказаного мінімуму не гарантує оптимального згладжування (у тому розумінні, що сплайн адекватно опише лише детерміновану складову). Наближаючи число вузлів до числа даних, ми можемо звести значення обох критеріїв до нуля (інтерполяційний сплайн), але нічого не виграти в якості статистичних оцінок.

В роботі пропонується використовувати, як критерій, статистичну оцінку ймовірності наявності детермінованої складової у залишках наближення. Такий підхід гарантує певну якість згладжування, та кількісно обґрунтовує мінімальне число ступенів вільності. Найбільш прийнятними для вказаного застосування є непараметричні критерії серій та інверсій [134,286], які відрізняються простотою розрахунків та дають хороші практичні результати і можуть застосовуватись разом із згладжуванням за методом найменших квадратів (МНК).

Найбільш прийнятним для технології цифрової обробки емпіричних сигналів є згладжування за методом найменших квадратів, що є найкращою по нормі апроксимацією, отриманою на базі скалярного добутку. Основна проблема у даному

випадку полягає у виборі вдалого базису, в якому можна досить “добре“ наблизити $f(x)$. Для стаціонарних випадкових сигналів питання вибору базисних функцій теоретично є вирішеним. Це перетворення Карунена-Лоева, де базисні функції є власними векторами коваріаційної матриці сигналу. Але практична реалізація його дуже ускладнена великими обсягами розрахунків ($O(n^4)$) та необхідністю обміну базисними функціями.

Якщо базис є сплайном певного виду, то проблема полягає у виборі деякої оптимальної множини вузлових точок (абсцис точок склеювання) сплайна. Загальні аспекти вирішення цієї проблеми розглянуті вище. Тому надалі будемо вважати, що МНК оцінки будуються на деякій заданій множині вузлів. Саме для цієї множини вузлів ми отримаємо оптимальне за МНК наближення. Інша множина вузлів дасть інші результати. МНК можна включити в загальну процедуру пошуку оптимальної множини вузлів. Тоді МНК забезпечуватиме оптимальне значення параметрів лінійної комбінації сплайнових базисів для заданої множини вузлів, а багатомірна оптимізація близьке до оптимального розміщення вузлів.

Отже, сплайн розглядається як функція $\Phi(x, A)$, що лінійно залежить, від деяких параметрів A . Для ермітового сплайна в лагранжівській формі запису параметри A є значеннями сплайна в точках стику. Таким чином, ці параметри мають явну фізичну інтерпретацію, що співпадає зі змістом вхідних даних [164,166].

Локальність ермітового сплайна дозволяє ефективно розв'язувати системи лінійних рівнянь, що в цьому випадку є добре обумовленими. Найбільш доцільно користуватися кубічним сплайном, оскільки він має неперервну першу похідну й ефективний у розрахунках. Сплайни вищих степенів використовувати в загальному випадку недоцільно у зв'язку зі зростанням обсягів розрахунків при відносно малих виграшах якості наближення.

Серед інших методів найбільш підходящим є МНК із базисом із В-сплайнів. Проте, в цьому випадку коефіцієнти не матимуть явної фізичної інтерпретації, а

умова неперервності другої похідної у багатьох випадках не є необхідною (не підтверджується фізикою процесів).

Іноді за МНК будують глобальний кубічний сплайн, включаючи в систему нормальних рівнянь умову неперервності похідних. Однак, це знижує ефективність розрахунків, а окрім цього умовам неперервності потрібно доволі часто надавати значно більшої ваги ніж власне умовам наближення.

Статистичні властивості МНК, методика побудови довірчих інтервалів та інше, залишаються тими ж, що й для інших лінійних моделей [121,158,211]. Проте, використання сплайнової моделі дозволяє отримати якісно кращі результати. Розв'язання задач оцінювання параметрів сплайна відрізняється від МНК для класичних моделей значно кращими обчислювальними властивостями. Для сплайнів збільшення кількості оцінюваних параметрів не пов'язано з ускладненням характеру моделі й проблемою поганої обумовленості. Тим самим вдається адекватно описати дані на значних інтервалах із більшим числом відліків і відповідно отримати хороші статистичні оцінки. Детально це буде показано у 3-му розділі.

Що стосується інших статистичних методів (максимальної правдоподібності, найменших модулів [130,201]), то в даній роботі вони окремо не розглядаються, хоч безумовно, заслуговують на цілий ряд спеціальних досліджень, що виходять за рамки цієї роботи.

1.5 Використання сплайнів у радіотехнічних системах

Якісні зміни в інформаційних технологіях за останні десять років зробили можливим загальне впровадження складних методів обробки інформації у широку інженерну практику. Потужність навіть персональних комп'ютерів загального призначення дає можливість виконувати обробку в реальному часі відеосигналів за незначної вартості. Зростання потужності систем обробки цифрових даних має два напрями: зростання швидкості роботи електронних компонентів та створення

нових, потужних алгоритмів обробки даних. Ці напрямки є як конкуруючими, так і тісно взаємозв'язаними. Переважний розвиток одного напрямку неминуче висуває нові вимоги до іншого, що пов'язано з освоєнням нових сфер застосування цифрової обробки та її якісно нового рівня. Так, наприклад, інтенсивний розвиток електроніки забезпечив широкі можливості для обробки аудіо та відео даних. Це стимулювало до розробки якісно нових алгоритмів стиснення даних (JPEG, wavelet, MPEG). Результатом цього процесу є інтенсивний розвиток цифрової фотографії, відео та аудіо техніки, Інтернет телефонії, інтерактивного радіо та телебачення, тощо. Цікавим є напрям розвитку систем передачі цифрових даних із використанням солітонів в оптоволоконних лініях. Для таких систем зв'язку реальними є швидкості до 320-400 Гбіт/с при передачі даних на практично необмежені відстані з довжиною фрагментів між підсилювачами 50-100 км [277]. Солітон є окремою хвилею, яку зручно апроксимувати сплайном. Такий підхід є в багатьох роботах [29,30,39,85,98,107,159,196,244,296]. Інша ідея полягає у використанні солітонів для синтезу фільтрів [212]. Результати отримані в 2-му розділі, дозволяють будувати В-сплайни - солітони.

Процес розробки й удосконалення алгоритмів далеко не є завершеним, або таким, що досяг рівня потенційних можливостей, адекватних рівню сучасної електроніки.

Обсяг публікацій, що стосуються сплайнів на теренах СНД є досить обмеженим і, як уже зазначалося, вони носять більш математичний ніж прикладний характер. В даному випадку під прикладним характером маємо на увазі можливість безпосереднього застосування результатів для обробки цифрових сигналів. З перекладних видань маємо лише дві монографії [122,163]. Значно повніше ця тематика представлена авторами з Росії: Зав'ялов Ю.С., Квасов Б.І., Суботін Ю.Н., Стечкін С.Б., Марчук Г.І., Морозов В.А., Василенко В.А.[26,57,99,139]. Та України: Корнейчук М. П., Лігун А.А., Назаренко Н.А., Попов Б.О., Марченко Б.Г., Денисюк В.П., [165,166,200,210,249]. Прикладні роботи стосуються в переважній більшості комп'ютерних систем геометричного проектування та комп'ютерної графіки

[173,217,218,228,270,271]. В роботах [153,227] розглянуто застосування сплайнів для розв'язку інтегральних рівнянь та некоректно поставлених задач. В роботі [273] висловлювались ідеї відносно застосування сплайнів для розв'язку задач сейсмічної томографії. Згладжування сплайном виду (1.5) спектрів отриманих спектроскопами описано в [108]. Двовірні сплайни використані в пакеті "Геоформ" для моделювання поверхні геологічних об'єктів та космічних тіл. Питаннями використання сплайнів для опису законів розподілу випадкових величин та застосуванням отриманих результатів в задачах геології, геофізики та екології займається група науковців під керівництвом Приставки О.П. Результати їх досліджень представлені в роботах [258,265,266]. Цій же тематиці присвячені роботи і зарубіжних авторів [22,73]. Перераховані задачі не вимагають роботи в режимі реального часу. Навіть представлені в системах комп'ютерної графіки інтерполяційні сплайни будуються в пакетному режимі (затримка з побудовою є цілком очевидною) [252,253]. Навіть не дуже глибокий пошук застосувань сплайнів відображає очевидний контраст між обсягом математичних досліджень і обсягом інженерних застосувань.

Значним кроком у сфері застосуваннях сплайнів для обробки сигналів став розвиток wavelets методів [12,112,113,240,241,291,305,]. У вказаних методах сплайни є одним із багатьох можливих локальних wavelet базисів. Wavelets методи розроблені саме для алгоритмів реального часу і використовуються для стиснення та згладжування даних [54,114]. Методи мають надзвичайно швидкий розвиток і популярність, завдяки наявності хорошої теоретичної основи та можливості обробки складних сигналів, тому сфера їх застосування досить широка. Основні питання використання wavelet методів відображені на сайті www.mathsoft.wavelets.com [268] фірми MathSoft InC, та на сайті www.wavelet.org.

Вейвлети беруть початок із квадратурних дзеркальних фільтрів (quadrature mirror filter, QMF), котрі мають імпульсні характеристики h та g і фільтрують сигнал поділений на непарні та парні відліки відповідно. Фільтри спроектовано так, що виконується умова точної реконструкції фільтрованих сигналів:

$$H(z^{-1})H(z) + G(z^{-1})G(z) = 2,$$

$$H(z^{-1})H(-z) + G(z^{-1})G(-z) = 0.$$

Фільтр із $H(z)$ (ФНЧ) відповідає за інтерполяцію, а $G(z)$ (ФВЧ) за формування залишків інтерполяції. Частина реалізацій таких фільтрів реалізує інтерполяцію в явному вигляді. Вхідний сигнал x розкладається на дві послідовності d_2 - непарних відліків і v_1 - нев'язок інтерполяції парних відліків. Послідовно застосовуючи процедуру до d_1 - послідовностей непарних відліків отримуємо пірамідалне представлення вхідного сигналу у вигляді низькочастотної складової d_n та залишків інтерполяції v_{n-1}, \dots, v_1 . Такій процедурі відповідає інтерполяції сигналу в базисі скейлінг функцій і вейвлетів. Якщо базиси ортогональні, то маємо ортогональний багатомасштабний аналіз (ОМА). Недоліками ОМА є несиметричність фільтрів і вузький клас базисів (Хаара і поліноми Дебеші) [14,33,55,56,58,76,84,91,94]. Клас базисів розширено в біортогональному багатомасштабному аналізі (ВМА), де застосовують біортогональні вейвлети [4,5,6,14,55,56,66,81,89,92,93]. Ідея полягає у застосуванні для розкладання й відновлення різних пар фільтрів: (h, g) - основні, (\tilde{h}, \tilde{g}) - дуальні. Зміщення основних базисів ортогональні дуальним, але не ортогональні між собою. До біортогональних відносяться і вейвлети зі скейлінг функціями В-сплайнами [18,20,21,25,27]. Фільтри в біортогональних вейвлетах можуть бути симетричними. Практична реалізація вейвлет перетворень має два основних алгоритми. Алгоритм Малла (Mallat algorithm) швидкого вейвлет перетворення (WFT) і ліфтинг алгоритм [12,49,112]. Для роботи з багатоканальними сигналами розроблені мультивейвлети (multiwavelets) [102].

Сфера застосування wavelet методів дуже широка. Серед робіт із цифрової обробки сигналів слід відмітити дослідження Biomedical Imaging Group у Швейцарському федеральному інституті технологій (EPFL, bigwww.epfl.ch) під керівництвом M.Unser. Варто звернути особливу увагу на роботу [54], що містить досить повний огляд застосування сплайнів у системах обробки цифрових сигналів (Signal Processing) у зарубіжжі. Бібліографія цієї роботи нараховує 100 наукових

праць. Фактично, в ній окреслено місце, що займають сплайни в Signal Processing, та перспективні напрямки розвитку. Серед перспективних задач відмічено задачі регуляризації та згладжування емпіричних даних із значним рівнем шумів та створення цифрових сплайн-фільтрів та швидких алгоритмів. Найбільш цікавими є сфери застосування сплайнів для обробки зображень та звукових сигналів, включаючи розробки ЦАП та АЦП із застосуванням сплайнів.

Детальний огляд wavelet методів, включаючи й сплайни, міститься в роботі [113]. Ряд незалежних фахівців оцінюють стан розвитку методів, їх проблеми та перспективи. Як позитивний момент для дальшого розвитку відмічено наявність добре розвинутої теорії. Серед проблем відмітимо проблему обробки високочастотних сигналів, сигналів із шумами та побудову базисів, що враховують характер вхідних даних. Спільним є твердження про динамічний та далекий від завершення процес розвитку напряду. Відмічається відсутність усталеної термінології і навіть самого поняття wavelet функції.

На сьогодні число перекладів на українську або російську мови монографій та вітчизняних публікацій з цих питань для інженерів постійно зростає [168,193,194,240,241,291,305]. Цьому сприяє доступність internet ресурсів. Хороший підбір матеріалів по сплайнах знаходиться на сайті www.autex.spb.ru.

Що стосується безпосереднього застосування сплайнів в традиційній сфері обробки сигналів – цифровій фільтрації, то число робіт є дуже незначним. Необхідно особливо відмітити монографію [149], де розглядаються фільтри, що зберігають сплайн-функції у тому смислі, що сплайни проходять через такі фільтри незмінними. В цій же роботі розглядається апроксимація імпульсної характеристики фільтрів сплайнами, із метою підвищення точності та зручності розрахунків. На жаль, авторові не вдалося знайти подальшого розвитку цього цікавого напрямку.

Ця дисертація є результатом практичної діяльності автора по застосуванню сплайнів у задачах обробки даних та сигналів, а також узагальненням та вивченням результатів попередників. В першу чергу це роботи, розпочаті в КМУЦА в 1972

році Марченко Б.Г. та Шутко М.О., котрі створили наукову школу, послідовники котрої займаються проблемами розробки та застосування сплайн-методів в інженерних сферах. Шутко М.О. є науковим консультантом автора. Основним напрямком цих робіт є використання сплайн-функцій для обробки емпіричних цифрових даних та сигналів. Особливістю робіт є застосування в основному ермітових сплайнів у якості моделей детермінованої складової, та МНК при статистичному оцінюванні. Сплайни застосовувались в задачах обробки даних, які характеризують експлуатаційні характеристики РЕС УПР [164]. В повній мірі сплайни проявили свої переваги перед іншими, класичними поліноміальними моделями в задачах побудови аналітичних моделей характеристик точності радіолокаційних систем УПР [224]. Хороші результати отримані при використанні сплайнів у дослідженні та статистичному оцінюванні надійності систем УПР [164]. Сплайн-методи застосовувались в програмах та методиках політної перевірки систем УПР. В дослідженнях відображених у звітах брав участь і автор даної роботи. Обробка даних геофізичного та геохімічного зондування підтвердила ефективність сплайнів. Ставилась задача побудови емпіричної функції залежності відсоткового вмісту руди від каротажних даних, розподілу речовин у свердловині. Отримана залежність використовувалась для розрахунку вмісту залізної руди вздовж профілю свердловини та прогнозів. Саме в цих задачах були розроблені підходи до побудови оптимальної сітки вузів для стохастичних даних [316,336].

Цілий ряд природних явищ описуються солітонами й обробка цих сигналів із допомогою сплайнів також є перспективною [1,29,30,31,39,75,85, 98,107,132,145,26, 212,244]. Алгоритми реального часу та стиснення – відновлення даних були розроблені і апробовані для потреб функціональної діагностики в медицині. З допомогою сплайнів здійснювалась фільтрація та стиснення даних реограм та електрокардіограм [338]. Для медичної діагностики стану кровоносної системи розроблялись методи лінійної та нелінійної ідентифікації її, як динамічної системи [318].

Методи сплайн екстраполяції показали свої переваги перед поліноміальними в економічних задачах: зокрема, для оперативного прогнозування курсу валют у дилінгових операціях [323]. Для вказаних даних характерний складний характер нестационарності математичного сподівання та дисперсії [185].

Роль тонких методів аналізу сигналів та зображень в медичній діагностиці є загально зрозумілою, що підтверджується значною кількістю наукових досліджень в цій сфері із застосуванням вейвлет методів у розвинених країнах (зокрема, в Biomedical Imaging Group) [7,8,9,10,11,16,17,37,45,50,53,59,64,65, 77,78,80,82,87,106, 110,111]. Сплайн-методи використовують моделювання руху людини [218] та створення протезів. Методам аналізу електрокардіографічних та реографічних сигналів присвячено багато наукових робіт у ближньому зарубіжжі [118,143,144,147,176,177,197,238,242,246,247,267]. Застосування вейвлет методів для аналізу кардіографічних сигналів дозволило підвищити прогнозну цінність інформації у середньому на 20% [177,246].

Що стосується авіаційної та космічної техніки то роль сплайнових технологій у радіолокації, експлуатації є доведеною цілим рядом теоретичних та прикладних досліджень [222,224,249,261,284,303]. Цілий ряд наукових робіт виконаних останнім часом в Україні пов'язані із сплайн-функціями [125,189,200,201,221,232, 256,258,259,264,281,282,283,273].

Розробки по ідентифікації спектрів сигналів знайшли застосування в радіолокації: для вимірювання доплерівських сигналів [311], та картографування завад [328]. Перспективною є обробка радіолокаційних зображень з РЛС із синтезованою апертурою (synthetic aperture radar, SAR) [32,74], доплерівських сигналів від метеорологічних об'єктів [26,88,115,116,117,126,141,169,288,300,310].

Таким чином, перераховані апробовані напрями застосування сплайнів у різних сферах практичної діяльності свідчать про безпосередній зв'язок теоретичних сплайнових розробок із їх застосуванням. Саме практичні потреби в сплайнових алгоритмах стимулювали теоретичні пошуки та алгоритмічні рішення.

1.6 Сучасне апаратне забезпечення обробки сигналів

Ефективно вирішувати задачі обробки сигналів у радіотехнічних та телевізійних системах не можливо без врахування аспектів технічної реалізації.

DSP процесори мають спеціально призначену для сигнальної обробки систему команд. Як мінімум - це наявність апаратного перемноження з накопиченням суми, та наявність достатньої кількості регістрів.

Стандартні інтегральні схеми (напівзаказні) із певною функцією: ASSP (Application-specific standart products). Мають кращу продуктивність ніж DSP при меншій вартості, але зміни в алгоритмі вимагають перепроектування, оскільки вони мають незмінну внутрішню структуру.

Заказні інтегральні схеми з певною функцією: ASIC (Application-specific integrated circuits). Функція визначається користувачем і основні затрати складає етап проектування. Зниження вартості вимагає певного мінімуму продаж.

Особливо перспективним напрямком розвитку засобів обробки цифрових сигналів є програмовані логічні інтегральні схеми (ПЛІС, PLD) фірм ALTERA, XILINX, ATMEL. Ці рішення дозволяють максимально скоротити терміни реалізації проекту та здійснювати випуск дуже малими партіями. Отримані рішення в разі потреби можна застосувати для ASIC та ASSP як прототипи. Останнім часом спостерігається тенденція до зближення PLD та ASIC. При розробці пристроїв доля проектних робіт на логічному рівні скорочується (з 90% у 1990 році до 55% в 2000 році). Центр затрат переноситься на більш високі функціональний та архітектурний рівні. Такий розвиток пояснюється розвитком програмного забезпечення для проектування пристроїв. Цілий ряд продуктів QUARTUS, VisualElite, Sonar, IC Wizard, Xilinx ISE підтримують розробку на рівнях більш високих ніж VHDL, AHDL код чи елементи цифрової логіки. Ведеться активна розробка гіперфункцій певного призначення, що дозволяють отримати конкретне рішення для цілого вузла (наприклад, цифрового фільтра, PCI шини, I²S інтерфейсу). Вартість таких гіперфункцій становить від 1000\$, що пояснюється як затратами на їх розробку так і

ефективністю від застосування при новизні ринку. Це також є свідченням перспективності діяльності в цьому напрямку.

Розглянемо типових представників PLD. Це серії FLEX, MAX, APEX, ACEX APEX II, Stratix фірми Altera. Серія Stratix є найбільш новою розробкою, орієнтованою на блочне проектування. З погляду обробки сигналів слід відмітити наявність окремо виділених до 28 блоків DSP, що при тактовій частоті в 250МГц забезпечують ефективну продуктивність в 2.0 GMACS на кожний блок. Основні характеристики серії Stratix показані в таблиці 1.

Найбільш перспективною серією фірми Xilinx є серія Spartan-3. Ця серія також включає окремі блоки множення, що дозволяє ефективно реалізовувати DSP функції. Характеристики цієї серії показано в таблиці 2. Ця серія дещо програє Stratix за можливостями. Має менше число логічних елементів та відсутні спеціалізовані DSP блоки. Проте вона виграє за вартістю.

Таблиця 1.1. Основні характеристики PLD Stratix.

| | EP1S10 | EP1S20 | EP1S40 | EP1S80 | EP1S120 |
|--------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| Логічних елем. | 10570 | 18460 | 41250 | 79040 | 114140 |
| RAM (біт) | 920448 | 1669248 | 3432744 | 7427520 | 10118016 |
| DSP блоків | 6 | 10 | 14 | 22 | 28 |
| Перемножувачі в 9x9 | 48 | 80 | 112 | 176 | 224 |

Взагалі при проектуванні конкретних пристроїв необхідно враховувати не лише безпосередньо обчислювальну потужність але й наявність інтерфейсів та ряду інших допоміжних сервісів включаючи й вартість програмного забезпечення для проектування.

Таблиця 1.2. Основні характеристики PLD Spartan-3 фірми Xilinx

| | XC3S50 | XC3S1000 | XC3S2000 | XC3S4000 | XC3S5000 |
|--|---------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Логічних елементів | 1728 | 17280 | 46080 | 62208 | 74880 |
| Вентилів | 50К | 1М | 2М | 4М | 5М |
| Память (біт) Блочна+розпод. | 0+12К | 432К+120 К | 720К+320 К | 1728К+432 К | 1872К+520К |
| Перемножувачі в 18x18 | 0 | 24 | 40 | 96 | 104 |

Фірма ATMEL відомий виробник популярної серії 8-бітних AVR контролерів. Їх характерною особливістю є RISC архітектура з виконанням команди за один такт, наявність апаратного перемноження для DSP операцій та оптимізована під C код регістрова архітектура. AVR контролери займають широкий діапазон цін та потужностей, зберігаючи при цьому систему команд та архітектурні особливості. Особливої уваги заслуговує серія AT40K (FPSLIC Field Programmable System Level Integrated Circuit). В одному кристалі цієї серії розміщений AVR контролер та програмована логічна матриця обсягом 5К, 10К, 40К логічних ключів. Продуктивність контролера складає 19MIPS при тактовій частоті в 25МГц. Контролери мають 2 UART та 2-wire інтерфейси, три таймери та watchdog таймер. JTAG ICE інтерфейс спрощує програмування, відладку та експлуатацію. Така конструкція дозволяє конструювати потужні пристрої зі спеціалізованими DSP процесорами з гнучкою архітектурою за дуже низької вартості.

1.7 Постановка задачі дослідження

Поняття “сигнал”, що походить від латинського “signum” - “знак”, має загальнонаукове значення і широкий смисловий діапазон, який необхідно звузити до кола тих питань, що розглядаються в роботі. Сигналом є процес зміни в часі

(просторі) фізичного стану об'єктів, що служить для відображення, реєстрації й передачі інформації [131]. Ми розглядатимемо одновимірні сигнали $y(t)$, що є адитивною сукупністю корисної складової $f(t)$ (яку можна розглядати як реалізацію випадкового процесу) і некорельованого випадкового шуму ξ з нульовим математичним сподіванням. Сигнали представлені дискретними відліками y_i , що є дійсними числами $y_i = f(t_i) + \xi_i$. Обмежимо множину сигналів такими, що мають обмежену енергією $\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt < \infty$, що є звичним обмеженням для радіотехнічних систем.

Визначимо, що є носієм корисної інформації у сигналів у контексті даної роботи. Нас цікавитимуть сигнали, де носієм інформації є конкретна форма корисної складової сигналу. В ряді випадків загальна форма сигналів може бути відомою, проте нас цікавитимуть тонкі деталі форми, що є мінливими і встановлення їх у конкретному випадку дозволяє підвищити інформативність результатів обробки. Енергетичний спектр сигналу та частотний діапазон корисного сигналу матиме важливе, але допоміжне значення. Ці характеристики часто бувають відомі апріорно (принаймні, як характеристики реєструючого обладнання, чи каналів передачі сигналів), або їх можна оцінити. Такі сигнали є типовими для систем проникаючої радіолокації, телеметричних та телемедичних систем.

Таким чином, нас цікавитиме побудова моделі сигналу $S(t_i, \hat{A}) = \sum_{j=1}^n \hat{a}_j \varphi_j(t_i)$, $|t| \leq T$ (\hat{A} - оцінка вектора параметрів моделі, $\varphi_j(t)$ базис в $L^2(-T, T)$) з найбільш точним відтворенням форми корисної складової. Похибка встановлення цієї складової $e_i = y_i - S(t_i, \hat{A})$ обумовлена двома причинами.

Похибкою апроксимації інформативної складової $f(t)$ моделлю, котру називатимемо динамічною похибкою (її отримуємо за умови відсутності шумової складової $\xi_i = 0$).

Випадковою похибкою, що обумовлена випадковим характером оцінки параметрів моделі \hat{a}_i , внаслідок наявності шумової випадкової складової ξ_i .

Динамічна похибка залежить від вдалого вибору класу моделі (базису $\{\varphi_j(t)\}$), що має відповідати характеру складової $f(t)$, та стистичних властивостей $\{\varphi_j(t)\}$. Випадкову похибку зменшують, застосовуючи статистичні методи оцінювання параметрів моделі \hat{a}_i , що враховують характер випадкової складової. Таку класифікацію похибок застосовано в [204] Кузьминим С.З.

Побудова моделі для сигналів з інформативною складовою простої форми є тривіальною задачею, для розв'язку якої застосовують поліноми низьких порядків (алгебраїчні чи тригонометричні).

Сигнали, що мають складну форму не вдається адекватно описати простими моделями [220]. Сигналами складної форми ми вважатимемо такі, складова $f(t)$ котрих є гладкою, має більше 4-6 екстремумів в області обробки $(-T, T)$, не є періодичною. Звичайно, таке означення не є строгим, оскільки можна знайти приклади окремих сигналів, які легко обробляти, не зважаючи на вказані ознаки. Але в переважній більшості випадків для таких сигналів класичні моделі з поліномів низьких порядків дають значну динамічну похибку, а зростання порядку призводить до зростання випадкової похибки й обчислювальних труднощів. В класичних, не локальних базисах динамічна й випадкова похибки зв'язані протилежною залежністю.

Вирішити цю проблему можна з допомогою локальних базисних функцій (вейвлетів, сплайнів) $B_0(t) = 0, t \notin (-\Delta_0, \Delta_0), \Delta_0 < T$. Локальні базиси дозволяють незалежно керувати динамічною й випадковою похибками та знайти компроміс між роздільною здатністю в часовій і частотній областях. Аналіз застосування локальних базисів у задачах наближення дозволяє провести цілий ряд корисних аналогій. Зокрема, вейвлети і В-сплайни є подібними до імпульсних характеристик трансверсальних фільтрів. Вейвлет базис $\{\varphi_j(t)\}$ утворюється шляхом зміщення

материнського базису $\{\varphi_0(t - jh)\}$. Аналогічно з базисних сплайнів будуються і сплайни: $S(x) = \sum_j a_j B_j(x)$, де $B_j(x) = B_0(x - jh)$. Зміщені в часі локальні базисні сплайн-функції $\{B_j(t)\}$ мають однакові амплітудно-частотні функції і відрізняються лише фазовим зміщенням.

Наближення за МНК у таких базисах зводиться до зважування базисних функцій, що відрізняються в частотній області лише фазовим зміщенням, шляхом знаходження числових коефіцієнтів a_j . Але в постановці задачі МНК система базисних функцій $\{B_j(t)\}$ є апіорі заданою. Обґрунтована методологія вибору чи побудови базисних функцій $\{B_j(t)\}$ в МНК стосовно сигналів складної форми в радіотехнічних системах відсутня.

Для випадкових процесів знайдено оптимальний розклад Карунена-Лоева, де базисними функціями є автокореляційні функції процесу. При цьому вхідний процес розглядається як результат проходження білого шуму через стаціонарний лінійний фільтр. Такий підхід не враховує наявності адитивного шуму ξ_i і потребує значного обсягу розрахунків.

Вигляд енергетичних спектрів корисного випадкового сигналу й шуму враховано в методі синтезу оптимальних фільтрів Вінера. Цей метод враховує співвідношення між енергетичними спектрами сигналу й шуму, але не враховує фазові співвідношення. Оскільки часовим образом енергетичного спектра є автокореляційна функція, то фільтри Вінера є близькими до розкладу Карунена-Лоева і більш загальними.

Використання локальних сплайнових базисів дозволяє ефективно об'єднати ці підходи й обґрунтувати вибір базисних функцій МНК, спираючись на енергетичний чи амплітудний спектри сигналів. Розгляд обмежимо випадком коли шумова складова є білим шумом із нульовим математичним сподіванням (умови оптимальності звичайного МНК). Застосування сплайнів у якості моделі сигналів

дозволяє забезпечити неперервність значень і похідних. В ряді випадків сплайни є адекватною моделлю конденсованих середовищ. Достоїнством сплайнів є також наявність добре розробленої математичної теорії, та ефективність розрахунків. Таким чином має місце важлива задача синтезу базисних сплайнів із заданими частотними властивостями.

Основна ідея роботи полягає в тому, щоб об'єднати синтез оптимального фільтра Вінера в частотній області (за відомими середніми частотними характеристиками сигналу), і оптимальне наближення в часовій області сигналу унікальної форми за МНК. Отже слід знайти методи побудови базисного сплайну, амплітудно-частотна характеристика якого буде близькою до оптимальної АЧХ фільтра Вінера. Із синтезованого базисного сплайна слід побудувати, шляхом зміщення, сплайновий базис у якому за МНК будемо наближати конкретний сигнал.

При обробці традиційно використовують ортогональні базиси, що забезпечують простоту й швидкість розрахунків. Однак вимога ортогональності базисів ускладнить, або зробить неможливим вирішення попередньої задачі. Тому спираючись на локальність базисних функцій слід знайти ефективні методи й алгоритми розрахунків МНК та узагальненого Фур'є перетворення в локальних сплайнових базисів.

Дві попередні задачі є теоретичною основою для розробки прикладних методів, алгоритмів та засобів обробки радіотехнічних сигналів складної форми. Тому наступною групою задач є розробка методів інтерполяції, децимації, фільтрації, синтезу й аналізу сигналів в отриманих сплайнових базисах. Принципово важливою вимогою є здатність працювати в реальному часі та можливість апаратної реалізації, включаючи PLD та ASIC мікросхеми. Для цього бажано алгоритмічні рішення привести до типових радіотехнічних конструкцій: поліфазних інтерполяційних фільтрів, трансверсальних фільтрів по типу фільтрів Савицького-Голея, дециматорів та рекурентних схем.

Різноманітність сигналів складної форми в радіотехнічних системах навіть у межах одного об'єкта і короткого часу потребує розробки адаптивних методів,

алгоритмів і засобів обробки. Добре відомими адаптивними конструкціями аналізу й синтезу сигналів є вейвлет-схеми частотно-часового розкладу. В роботі ставиться задача побудови аналогічних схем, але на основі МНК сплайн-розкладу. Застосування МНК, на противагу інтерполяції, дозволить отримати стійкість розкладу до білого шуму, оптимальність оцінки та оцінку достовірності.

В роботі створюються алгоритми і пристрої, що працюють за класичними схемами адаптації з прямим і зворотнім зв'язками, де адаптація здійснюється за рахунок зміни форми базисних сплайнів.

Заключною задачею є апробація створених методів, алгоритмів та засобів шляхом обробки модельних та реальних сигналів складної форми.

В цілому комплекс сформульованих задач вирішує науково-технічну проблему створення сплайн-методів і засобів аналізу й синтезу цифрових сигналів складної форми в радіотехнічних системах. Вирішення проблеми надає розробникам радіотехнічних систем універсальний інструментарій для обробки сигналів складної форми, що забезпечує кращі ніж відомі якісні характеристики. Наприклад, заміна у фільтрах Савицького-Голея кубічного полінома кубічним ермітовим сплайном зменшує максимальну динамічну похибку принаймні в 16 разів, якщо сигнал відноситься до класу W_{∞}^4 (1.2, 1.4). Це дозволяє принаймні вдвічі розширити вікно обробки, що суттєво зменшує випадкову похибку.

Таким чином, створення теоретичного, методологічного, програмного і апаратного забезпечення комплексів цифрової обробки інформації, що ґрунтується на сплайнових моделях сигналів, дозволить суттєво удосконалити радіотехнічні системи проникаючої радіолокації, телеметрії, телемедицини тощо.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ПОБУДОВИ СПЛАЙН-МОДЕЛЕЙ СИГНАЛІВ

2.1 Постановка задачі

Основною метою даного розділу є розробка та обґрунтування методів побудови інтерполяційних сплайнів, найбільш придатних для застосування в задачах обробки сигналів за наявності емпіричної інформації про частотні властивості чи природу сигналів. В попередньому розділі було показано, що існує велика різноманітність в підходах до побудови сплайнів і до самого визначення сплайна. Домінуючим видом сплайнів є кубічний сплайн з двома неперервними похідними та відповідний B-сплайн. Це пояснюється його оптимальними властивостями та легкістю математичних побудов. Оптимальні властивості та неперервність двох похідних не є невід'ємним явищем серед даних, що описують технічні системи. Тим більше, якщо перша похідна в точках стику визначається з умови неперервності другої похідної. З цієї точки зору більш привабливими є ермітові сплайни, перша похідна яких задається незалежно. Як правило її значення задають довільно, або визначають з вхідних даних. Розрив другої похідної, що має місце в багатьох випадках, не має принципового значення. Очевидні і обчислювальні переваги ермітових сплайнів, зв'язані з локальним способом визначення похідних у вузлах. Тому в підрозділі 2.2 розглядається універсальний підхід до побудови ермітових сплайнів. Поставлена задача побудувати систему інтерполяційних рівнянь на локальному фрагменті сплайна, та привести рішення до лагранжівової форми. Вибір лагранжівової форми дозволяє виразити значення сплайна через обмежену кількість значення у вузлах. Отримавши вирази для локального фрагмента необхідно побудувати локальний базисний сплайн, та відповідну систему базисних функцій. Лінійна комбінація базисних сплайнів утворює довільний сплайн. Повернемося до іншої ознаки сплайна: вигляду його окремого фрагмента. Коли мова йде про сплайн, то майже автоматично мається на увазі алгебраїчний поліном. Проте рішенням більшості диференціальних рівнянь, котрі описують реальні технічні системи є гармонійні або експоненціальні функції. Відомі

підходи до побудови сплайнів з різноманітних фрагментів потребують індивідуального підходу до кожного випадку [249]. Це перешкоджає розробці сплайн-технології, яка потребує однозначності фаз. Тому необхідний метод який дозволять будувати сплайн з неперервних фрагментів широкого класу функцій на основі загального підходу. Отже, коли надалі мова йтиме про ермітові чи В-сплайни, то це не означатиме, що вони є алгебраїчними. Автор надалі робитиме відповідні зауваження, якщо матеріал стосуватиметься конкретного виду сплайна.

Універсальність методу пов'язана зі зниженням ефективності в порівняннях з методами пристосованими до певних особливостей. Оскільки одним із завдань даної роботи є побудова методів та алгоритмів реального часу, то їх характерною особливістю є регулярність даних. Якщо обмежитись регулярністю сітки вузлів сплайна, то виявляється можливим будувати сплайни, використовуючи згортку локальних симетричних функцій. Такий спосіб побудови відомий для алгебраїчних В-сплайнів [163]. Автор ставить задачу вивчити особливості такої побудови для неперервних відрізків широкого класу функцій. В підрозділах 2.3 та 2.4 розглядається метод побудови базисних сплайнів з однією та двома неперервними похідними на регулярних сітках вузлів [312,313]. Проте аналітичний спосіб побудови навіть для рівномірної сітки вузлів часто виявляється досить громіздким. В підрозділі 2.5 розглянуто побудову дискретних В-сплайнів для регулярної сітки вузлів та сітки даних [314]. Крок сітки вузлів та сітки даних мають бути кратними. Тобто схема розміщення даних на кожному фрагменті сплайна має бути однаковою. Отриманням сплайнового базису не завершується задача інтерполяції. Необхідно вирішити систему інтерполяційних рівнянь, щоб визначити коефіцієнти при базисних функціях. Уникнути цих розрахунків можна привівши В-сплайн до лагранжівної форми. В підрозділі 2.6 ця задача вирішується локальним способом [313]. Розглядається локальний фрагмент сплайна і для нього вирішується задача інтерполяції. Трансформований базис є ермітовим. Інший спосіб, розглянутий в підрозділі 2.7, ґрунтується на наближеному вирішенні глобальної системи інтерполяційних рівнянь [317]. В заключному підрозділі 2.8 сформульовано

висновки. Всі питання розглянуті в другому розділі стосуються виключно інтерполяційних сплайнів. Проте саме інтерполяційні сплайни є основою, на якій будуються більш складні методи обробки даних, розглянуті в наступних розділах.

2.2 Загальний підхід до побудови локальних інтерполяційних сплайнів

Розглянемо значення сплайна $S(x)$ в точці x , яка належить i -му фрагменту сплайна, обмеженому вузловими точками: x_i, x_{i+1} . Для довільного полінома n -го порядку (n -парне число) маємо

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i B_i(x), \quad (2.1)$$

де $B_i(x)$ - лінійно незалежні, неперервні функції певного виду; a_i - числові коефіцієнти. Для даного полінома знайдемо розв'язок інтерполяційної задачі на множині вузлів інтерполяції $\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$. Вважатимемо, що вузли інтерполяції співпадають з вузлами сплайна і виконується умова $x_i < x_{i+1}$.

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, m-1}, \quad (2.2)$$

де $f(x_i)$ значення інтерпольованої функції у вузлових точках (рис.2.1).

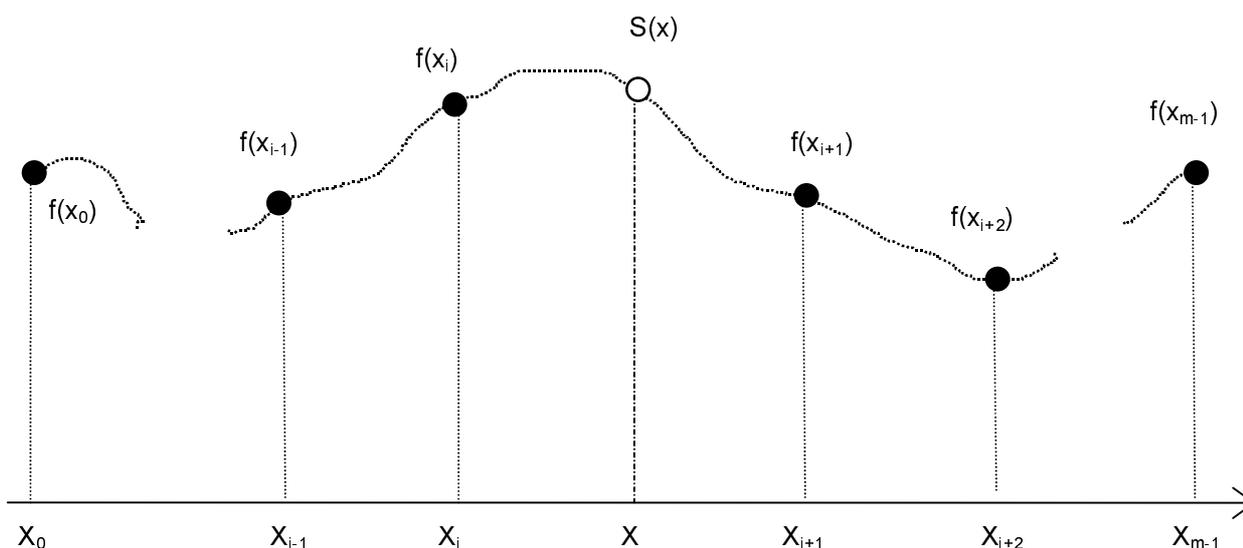


Рисунок 2.1. Схема побудови інтерполяційного сплайна.

Задача матиме однозначний розв'язок за умови наявності $m=n$ вузлів інтерполяції.

Для m вузлів система з m рівнянь має вигляд:

$$\left. \begin{array}{l} P_n(x_0) = f(x_0) \\ P_n(x_1) = f(x_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n(x_{m-1}) = f(x_{m-1}) \end{array} \right\} \cdot \quad (2.3)$$

Якщо $m=n$, маємо загальновідомий спосіб інтерполяції. Розглянемо інший випадок: $n=2m$. Для однозначного розв'язку доповнимо систему з m рівнянь m рівняннями для похідних. Тобто вимагатимемо рівності у вузлах не лише значень $f(x_i)$, але й першої похідної $f'(x_i)$. Задавши значення першої похідної у вузлах сплайна, ми задали нахил дотичної у точках стику фрагментів сплайна. В матричному вигляді отримаємо: $\mathbf{BA}=\mathbf{F}$.

$$\left. \begin{array}{l} P_n(x_0) = f(x_0) \\ P_n(x_1) = f(x_1) \\ \dots \\ P_n(x_{m-1}) = f(x_{m-1}) \\ P'_n(x_0) = f'(x_0) \\ P'_n(x_1) = f'(x_1) \\ \dots \\ P'_n(x_{m-1}) = f'(x_{m-1}) \end{array} \right\} \cdot \quad (2.4)$$

або

$$\left. \begin{array}{l} a_0 B_0(x_0) + \dots + a_i B_i(x_0) + \dots + a_{n-1} B_{n-1}(x_0) = f(x_0) \\ a_0 B_0(x_1) + \dots + a_i B_i(x_1) + \dots + a_{n-1} B_{n-1}(x_1) = f(x_1) \\ \dots \\ a_0 B_0(x_{m-1}) + \dots + a_i B_i(x_{m-1}) + \dots + a_{n-1} B_{n-1}(x_{m-1}) = f(x_{m-1}) \\ a_0 B'_0(x_0) + \dots + a_i B'_i(x_0) + \dots + a_{n-1} B'_{n-1}(x_0) = f'(x_0) \\ a_0 B'_0(x_1) + \dots + a_i B'_i(x_1) + \dots + a_{n-1} B'_{n-1}(x_1) = f'(x_1) \\ \dots \\ a_0 B'_0(x_{m-1}) + \dots + a_i B'_i(x_{m-1}) + \dots + a_{n-1} B'_{n-1}(x_{m-1}) = f'(x_{m-1}) \end{array} \right\} \cdot$$

Звідки відомим методом Крамера знаходимо

$$a_i = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta_{ki} f(x_k)}{\Delta} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta_{m+ki} f'(x_k)}{\Delta}, \quad (2.5)$$

де Δ_{ki} алгебраїчне доповнення матриці планування В; Δ детермінант матриці В.

Отримані значення підставимо в рівняння (2.1), та зведемо подібні:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} B_i(x) \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta_{ki} f(x_k)}{\Delta} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta_{m+ki} f'(x_k)}{\Delta} \right], \\
 P_n(x) &= \frac{1}{\Delta} \left[\sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \sum_{i=0}^{n-1} B_i(x) \Delta_{ki} + \sum_{k=0}^{m-1} f'(x_k) \sum_{i=0}^{n-1} B_i(x) \Delta_{m+ki} \right], \\
 P_n(x) &= \left[\sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \tilde{X}_k(x) + \sum_{k=0}^{m-1} f'(x_k) \tilde{\tilde{X}}_k(x) \right]. \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Таким чином ми визначили базисні функції $\tilde{X}_k(x)$ та $\tilde{\tilde{X}}_k(x)$ в лагранжівій формі запису. Проблема полягає в тому, що у виразах присутні значення похідних у вузлах інтерполяції. На практиці подібна ситуація зустрічається доволі рідко. Проте можемо визначити похідні у вузлах наближено, через розділені різниці значень функції:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}, \tag{2.7}$$

або через центральні розділені різниці, з врахуванням нерівномірності сітки:

$$f'(x_k) \approx q_k \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} + w_k \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}, \tag{2.8}$$

де $q_k = 1 - w_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1} - x_{k-1}}$.

Звівши подібні, отримаємо для $x \in [x_{m/2-1}, x_{m/2}]$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \hat{X}_k(x). \tag{2.9}$$

Фактично отримано вираз, за допомогою якого визначатиметься значення сплайна на одному фрагменті, через значення в обмеженому числі вузлових точок. Тобто ми маємо локальний ермітів сплайн (враховуючи застосування похідних).

Для сплайна, що складається з R фрагментів отримаємо

$$S(x) = \sum_{j=0}^R f(x_j) \check{X}_j(x), \quad x \in [x_0, x_R], \quad (2.10)$$

де $\check{X}_j(x)$ локальна функція форми, що є сумою відповідно зважених функцій $\hat{X}_k(x)$.

Принципова відмінність останнього виразу в тому, що x визначається на всій множині фрагментів сплайна. Значення сплайна в точці x , яка належить j -му фрагменту визначатиметься через локальні базисні сплайни за формулою:

$$S(x) = f(x_{j-m/2-1}) \check{X}_{j-m/2-1}(x) + \dots + f(x_j) \check{X}_j(x) + f(x_{j+1}) \check{X}_{j+1}(x) + \dots + f(x_{j+m/2}) \check{X}_{j+m/2}(x). \quad (2.11)$$

Врахувавши, що базисна функція складається з m фрагментів і відповідно є сумою m складових, можна записати:

$$S(x) = f(x_{j-m/2-1}) \hat{X}_{0,j-m/2-1}(x) + \dots + f(x_j) \hat{X}_{m/2-1,j}(x) + f(x_{j+1}) \hat{X}_{m/2,j+1}(x) + \dots + f(x_{j+m/2}) \hat{X}_{m-1,j+m/2}(x). \quad (2.12)$$

Подвійний індекс біля складових базисних функцій $\hat{X}_{k,j}(x)$ слід трактувати як k -та складова j -ї базисної функції.

Відмітимо ще один важливий аспект побудови сплайнів. Це крайові умови. В нашому контексті проблема виникає в розрахунках на крайніх фрагментах і пов'язана з відсутністю сусідніх фрагментів ліворуч та праворуч. Внаслідок цього розрахункові вирази, отримані для центральних фрагментів, необхідно модифікувати. Найпростіше відкинути складові суми (2.12) для відсутніх фрагментів. Однак, довжина сусідніх фрагментів часто неявно задіяна у розрахункових виразах. Тому можливе спотворення крайніх фрагментів. Інша складність - визначення похідних, вирішується для крайніх вузлів заміною центральної різниці на звичайну. При цьому втрачається точність її визначення. З погляду автора найбільш прийнятним і природнім є неявне продовження сплайна ліворуч та праворуч у нескінченість. Винесені у нескінченість крайні вузли явно не враховуються, але в розрахунках приймають участь, як граничні відношення. Практика використання такого продовження для кубічних ермітових сплайнів

показує відсутність спотворень з країв, та дає можливість вести розрахунки сплайна поза межами явних крайніх вузлів.

Для сплайнів з рівною шириною фрагментів природнім є неявне продовження фрагментами рівної довжини.

Розглянемо, як приклад, побудову кубічних ермітових сплайнів.

Базисні функції алгебраїчного полінома: $B_i(x) = x^i$, та перша похідна від них $B_i'(x) = ix^{i-1}$. Для кубічного рівняння прийнемо $m=2, n=4$:

$$P_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3. \quad (2.13)$$

Система інтерполяційних рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_1' \\ f_2' \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Знайшовши A та підставивши в (2.13) отримаємо:

$$X_0(x) = \frac{2x^3 - 3x^2(x_1 + x_2) + 6x_1x_2x - x_2^2(3x_1 - x_2)}{(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)(x_2 - x_1)}, \quad (2.15)$$

$$X_1(x) = \frac{(x - x_1)^2(2x + x_1 - 3x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)},$$

$$\tilde{X}_0(x) = \frac{(x - x_1)(x^2 - 2x_2x + x_2^2)}{(x_1 - x_2)^2},$$

$$\tilde{X}_1(x) = \frac{(x - x_1)^2(x - x_2)}{(x_1 - x_2)^2},$$

$$P_4(x) = [f(x_1)X_0(x) + f(x_2)X_1(x) + f'(x_0)\tilde{X}_0(x) + f'(x_1)\tilde{X}_1(x)]. \quad (2.16)$$

Вигляд складових отриманих базисів на окремому фрагменті, для рівномірної сітки $\{0,100,200,300,400\}$ показано на рис.2.2.

Визначимо похідні за формулами

$$f_1' = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0} \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + \left(1 - \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0}\right) \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1},$$

$$f_2' = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} + \left(1 - \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2},$$

підставимо в формулу (2.16) та зведемо подібні, аналогічно попередньому.

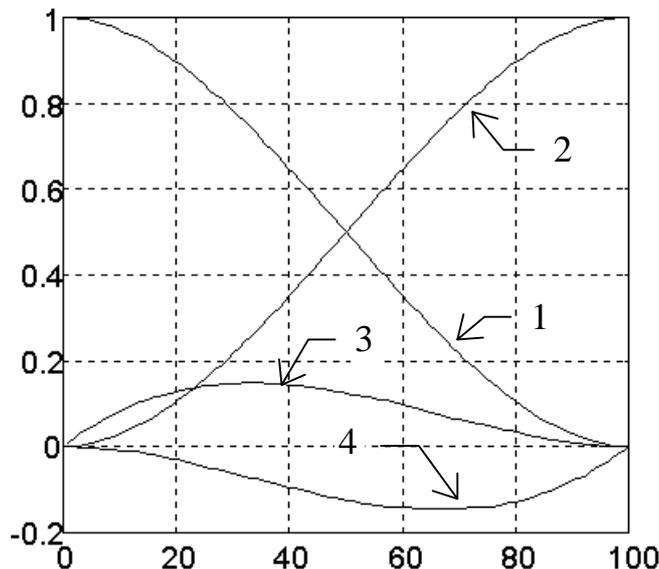


Рисунок 2.2. Складові базисних функцій (2.15). 1- \hat{X}_0 , 2- \hat{X}_1 , 3- $\tilde{\hat{X}}_0$, 4- $\tilde{\hat{X}}_1$.

Отримаємо $\hat{X}_0(x), \hat{X}_1(x), \hat{X}_2(x), \hat{X}_3(x)$. В загальному вигляді, зваживши на обсяг, вирази наводити не будемо. Відмітимо, що аналітичні вирази отримані з допомогою системи аналітичної алгебри “Derive”. Дана система безпосередньо генерує програмні коди на чотирьох алгоритмічних мовах, тому для програмної реалізації довжина виразу не є проблемою. Для вказаного базису вирази опубліковані в [164], де вони отримані дещо іншим способом. Шляхом перетворень автор отримав більш оптимальний з точки зору обчислень алгоритм ніж в [164]:

$$\hat{X}_0(x) = -p_1 p_4 b, \quad (2.17)$$

$$\hat{X}_1(x) = p_1 c - p_2 d + b,$$

$$\hat{X}_2(x) = -p_4 c - p_3 d + a,$$

$$\hat{X}_3(x) = -p_3 p_2 d$$

$$a = (x - x_j) / h_j,$$

$$b = 1 - a,$$

$$c = ab^2,$$

$$d = a^2 b,$$

$$p_1 = \frac{h_j}{h_{j-1}}, \quad p_2 = \frac{h_j}{(h_{j+1} + h_j)},$$

$$p_3 = \frac{h_j}{h_{j+1}},$$

$$p_4 = \frac{h_j}{(h_{j-1} + h_j)},$$

$$h_{j-1} = x_j - x_{j-1},$$

$$h_j = x_{j+1} - x_j,$$

$$h_{j+1} = x_{j+2} - x_{j+1},$$

Труднощі розрахунку на крайніх фрагментах розв'язуються дуже природно, якщо вважати, що сплайн доповнюється з обох країв нескінченими фрагментами. Тоді для першого фрагмента маємо $p_1 = 0$, $p_4 = 0$, для останнього $p_2 = 0$, $p_3 = 0$. Зауважимо, що якщо покласти $c = 0$, $d = 0$, то отримаємо лінійний сплайн (ламану).

В загальному вигляді, для сплайна який складається з R фрагментів маємо вираз:

$$S(x) = \sum_{j=0}^R f(x_j) \check{X}_j(x), \quad (2.18)$$

де $\check{X}_j(x)$ локальна базисна сплайн-функція, що складається з чотирьох фрагментів:

$$\check{X}_j(x) = \begin{cases} \hat{X}_{0,j-1}(x), & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ \hat{X}_{1,j}(x), & x \in [x_j, x_{j+1}) \\ \hat{X}_{2,j+1}(x), & x \in [x_{j+1}, x_{j+2}) \\ \hat{X}_{3,j+2}(x), & x \in [x_{j+2}, x_{j+3}) \\ 0, & x \notin [x_{j-1}, x_{j+3}) \end{cases} \quad (2.19)$$

Вигляд базисної функції показано на рис.2.3.

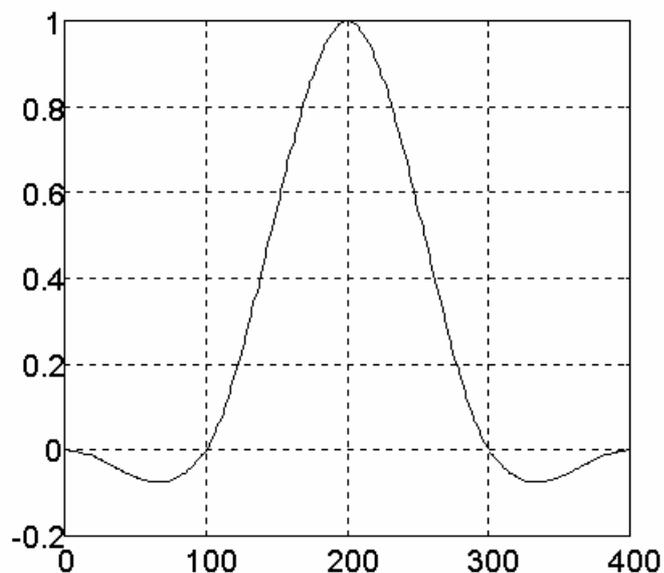


Рисунок 2.3. Базисна функція кубічного ермітового сплайна

Отже значення сплайна в довільній точці, що належить j -му фрагменту дорівнює (рис.2.4):

(2.20)

$$S(x) = f(x_{j-1})\hat{X}_{0,j-1}(x) + f(x_j)\hat{X}_{1,j}(x) + f(x_{j+1})\hat{X}_{2,j+1}(x) + f(x_{j+2})\hat{X}_{3,j+2}(x).$$

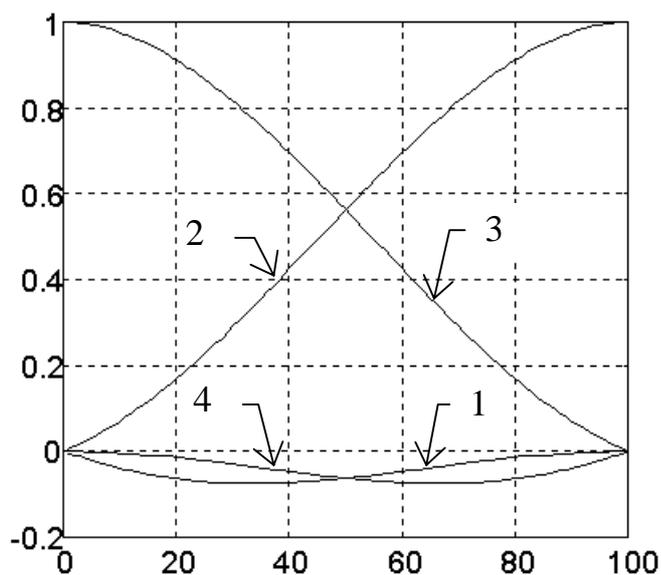


Рисунок 2.4. Складові базисних функцій на окремому фрагменті сплайна. 1- \hat{X}_0 , 2- \hat{X}_1 , 3- \hat{X}_2 , 4- \hat{X}_3 .

Якщо фрагменти сплайна однакової довжини, то індекси фрагмента в останньому виразі можна опустити (за винятком крайніх фрагментів).

Перевагою розглянутого підходу є його універсальність і відносна простота. Таким способом можлива побудова двох та n мірних ермітових сплайнів. Проте аналітичні вирази можуть бути надзвичайно громіздкими, що робить проблематичним їх використання для швидких алгоритмів. Описаним способом можна будувати сплайни лише з фрагментів поліномів з лінійною залежністю від параметрів. Тому розглянемо інший підхід до побудови сплайнових базисів.

2.3 Побудова інтерполяційних сплайнів із неперервною першою похідною на рівномірних сітках вузлів

Твердження: нехай функція $f(x)$, певного вигляду, є локальна

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, \frac{a+b}{2}) \\ f_2(x), & x \in [\frac{a+b}{2}, b], \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \quad (2.21)$$

неперервна і інтегрована на $[a, b]$, обмежена знизу $f(x) > D$ та зверху $f(x) < U$, і симетрична:

$$f_1(a+x) = f_2(b-x), \quad x \in [0, \frac{b-a}{2}], \quad (2.22)$$

а функція
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \quad (2.23)$$

тоді лінійна згортка $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)dt$ є локальним сплайном, що складається

з чотирьох фрагментів і має в точках стику неперервні значення функції та щонайменше першої похідної. Функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ називатимемо

породжуючими базисний сплайн. Вважатимемо також, що породжуючі функції та їх добуток в заданій локальній області інтегровані (рис.2.5).

Покажемо це. Для зручності позначимо $(b-a)/2=h$.

Тоді

$$F(x) = \begin{cases} \int_a^x f_1(t)dt, & x \in [a, a+h) \\ \int_a^{a+h} f_1(t)dt + \int_{a+h}^x f_2(t)dt, & x \in [a+h, b) \\ \int_a^{a+h} f_1(t)dt + \int_{a+h}^b f_2(t)dt, & x \in [b, b+h) \\ \int_{x-2h}^b f_2(t)dt, & x \in [b+h, b+2h) \\ 0, & x \notin [a, b+2h) \end{cases}, \quad (2.24)$$

або

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & x \in [a, a+h) \\ F_2(x), & x \in [a+h, b) \\ F_3(x), & x \in [b, b+h) \\ F_4(x), & x \in [b+h, b+2h) \\ 0, & x \notin [a, b+2h) \end{cases}. \quad (2.25)$$

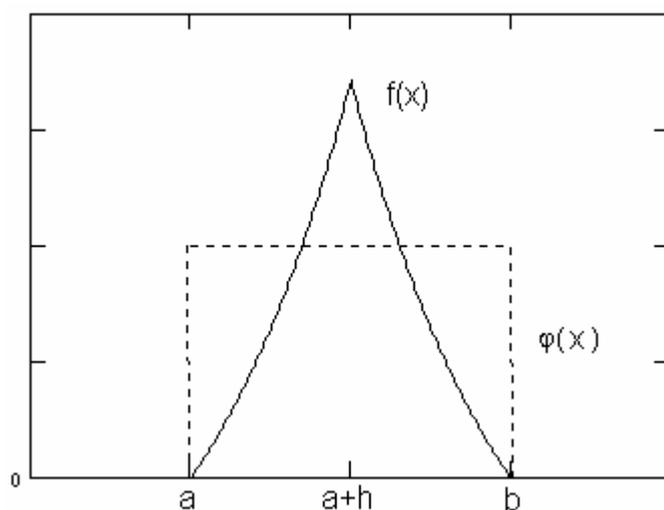


Рисунок 2.5. Функції, що породжують базисний сплайн

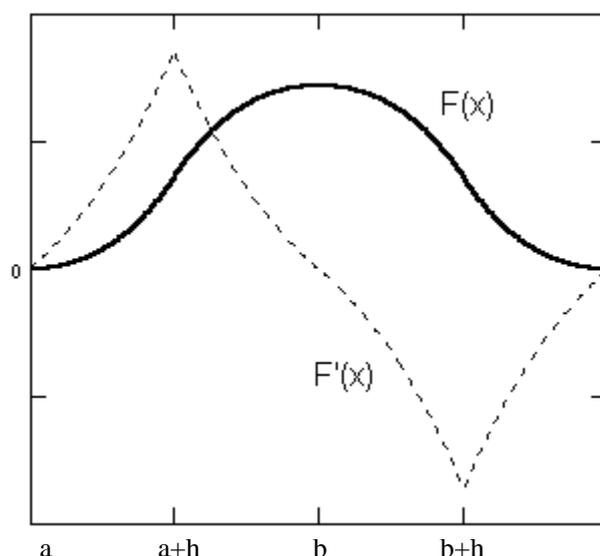


Рисунок 2.6. Базисний сплайн та його перша похідна

З (2.24, 2.25) слідує, що отримана функція складається з чотирьох фрагментів (рис.2.6). З симетричності функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ впливає симетричність функції $F(x)$. Її неперервність є очевидною, як інтегралу від добутку неперервних функцій. Отже маємо сплайн. Вияснимо неперервність похідних. Знайдемо значення першої похідної $F(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, a+h), \\ f_2(x), & x \in [a+h, a+2h], \\ -f_1(x), & x \in [a+2h, a+3h), \\ -f_2(x), & x \in [a+3h, a+4h], \\ 0, & x \notin [a, a+4h] \end{cases} \quad (2.26)$$

Таким чином, перша похідна $F(x)$ на чотирьох інтервалах є неперервною, якщо неперервні породжуючі функції. В неперервності похідної в точках стику $F(x)$ легко переконатись, розглянувши вирази та рис.2.5,2.6. Фактично перша похідна від $F(x)$ є антисиметричною відносно b копією $f(x)$ рис.2.6. Значення першої похідної в точках a , $b+2h$ рівне нулю, а в точках $a+h$, $b+h$ приймає значення рівне $f(a+h)$, $-f(a+h)$. Неперервність другої похідної не гарантується, якщо не гарантована неперервність першої похідної від $f(x)$.

Побудуємо сплайновий базис. Нехай $a=0$. Позначимо такий сплайн $H_0=F(x)$, а зміщені відносно H_0 (пропорційно h) сплайни відповідно $\dots, H_{-m}, \dots, H_{-2}, H_{-1}, H_0, H_1, H_2, \dots, H_m, \dots$. *Елементарні сплайни $\dots, H_{-m}, \dots, H_{-2}, H_{-1}, H_0, H_1, H_2, \dots, H_m, \dots$ є лінійно незалежні і складають систему лінійно незалежних базисних функцій $\{H_m\}$.*

В лінійній незалежності конкретного базису легко переконатися склавши інтерполяційне рівняння для чотирьох точок, що належать одному фрагменту.

$$\begin{bmatrix} F_1(x_1) & F_2(x_1) & F_3(x_1) & F_4(x_1) \\ F_1(x_2) & F_2(x_2) & F_3(x_2) & F_4(x_2) \\ F_1(x_3) & F_2(x_3) & F_3(x_3) & F_4(x_3) \\ F_1(x_4) & F_2(x_4) & F_3(x_4) & F_4(x_4) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Відмінність дискримінанта від нуля свідчатиме про лінійну незалежність складових на фрагменті. Для всієї області сплайна матриця буде блочно-діагональною, з дискримінантом відмінним від нуля.

Розглянемо властивості базисних функцій $\{H_m\}$. Функції сімейства $\{H_m\}$ є локальними. Відмітимо, що спочатку автор використовував термін “квазіортогональні” [312] (термін був використаний Хемінгом для позначення не зовсім ортогональних функцій, для котрих скалярний добуток $\int_{-\infty}^{\infty} f_m(x)f_n(x) \approx 0$ [298]). Проте він погано відображає особливості сплайнових базисів, які суттєво відмінні від ортогональних. В той же час саме локальність визначає ефективність обчислень. Локальні властивості проявляються в особливостях розрахунку скалярного добутку для базисних сплайнів.

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)dx = 0 \text{ при } |m - n| > 3. \quad (2.28)$$

Для кожної функції H_m :

$$\int_{-\infty}^{\infty} [H_m(x)]^2 dx = \int_0^{4h} [H_0(x)]^2 dx = k, \text{ де } k = \text{const}, k > 0, \quad (2.29)$$

отже систему $\{H_m\}$ легко нормувати, визначивши k для однієї з функцій. Тоді можна користуватись локальним нормованим сплайновим базисом $\{\bar{H}_i\}$, де $\bar{H}_i = \frac{1}{\sqrt{k}} H_i$.

Розглянемо скалярний добуток двох довільних базисних функцій:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_m(x) \bar{H}_n(x) dx = 1, \text{ при } m = n, \text{ для нормованого базису.}$$

В довільному випадку маємо (2.30)

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 2 \left[\int_{-2h}^h F_1^2(x) dx + \int_{-h}^0 F_2^2(x) dx \right], & |m - n| = 0 \\ \int_{-h}^0 F_1(x) F_2(x) dx + \int_0^h F_2(x) F_3(x) dx + \int_h^{2h} F_3(x) F_4(x) dx, & |m - n| = 1 \\ \int_{-h}^h F_1(x) F_3(x) dx + \int_h^{2h} F_2(x) F_4(x) dx, & |m - n| = 2 \\ \int_0^{2h} F_1(x) F_4(x) dx, & |m - n| = 3 \\ 0, & |m - n| > 3 \end{cases}$$

Тобто в довільній точці лише 4 базисних функції приймають ненульові значення. Зважаючи на симетричність базисних функцій та регулярність сітки вузлів сплайна в довільній точці x маємо ненульові значення $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$.

Розглянемо приклади деяких сплайнових базисів.

Експоненційний базисний сплайн на сітці вузлів 0,1,2,3,4.

$$f_1(x) = e^x - 1, \quad f_2(x) = e^{(2-x)} - 1. \quad (2.31)$$

$$F_1(x) = e^x - x - 1, \quad F_2(x) = 2e - x - 1 - e^{(2-x)},$$

$$F_3(x) = 2e + x - 5 - e^{(x-2)}, \quad F_4(x) = e^{4-x} + x - 5. \quad (2.32)$$

Породжуючі функції показано на рис.2.5, а базисний сплайн на рис.2.6.

Квадратичний базисний сплайн на сітці вузлів 0,1,2,3,4

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 2 - x. \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}
 F_1(x) &= \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}, \\
 F_2(x) &= \int_0^x t dt + \int_1^x (2-t) dt = 2x - \frac{x^2}{2} - 1, \\
 F_3(x) &= 2(4-x) - \frac{(4-x)^2}{2} - 1, \quad F_4(x) = \frac{(4-x)^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

2.4 Утворення інтерполяційних сплайнів з неперервною першою та другою похідними на рівномірній сітці вузлів

Аналогічний попередньому підхід використаємо для побудови сплайнів із двома неперервними похідними. Як і в попередньому випадку маємо деяку локальну функцію $f(x)$, неперервну на $[a, b]$ і симетричну (рис.2.7):

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{для } x \in [a, \frac{a+b}{2}) \\ f_2(x), & \text{для } x \in [\frac{a+b}{2}, b] \\ 0, & \text{для } x \notin [a, b] \end{cases}, \tag{2.35}$$

$$f_1(a+x) = f_2(b-x), \quad x \in [0, \frac{b-a}{2}],$$

Функція $\varphi(x)$ має аналогічні властивості (рис.2.7)

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & \text{для } x \in [a, \frac{a+b}{2}) \\ \varphi_2(x), & \text{для } x \in [\frac{a+b}{2}, b] \\ 0, & \text{для } x \notin [a, b] \end{cases}. \tag{2.36}$$

Лінійна згортка $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)dt$ є локальним сплайном, що складається з чотирьох фрагментів і має в точках стику неперервні значення функції і першої та другої похідних. Покажемо це. Позначимо $(b-a)/2=h$.

$$F(x) = \begin{cases} \int_a^x f_1(t)\varphi_1(x-t)dt, & x \in [a, a+h] \\ \int_{a+h}^{x-h} f_1(t)\varphi_2(x-t)dt + \int_a^{x-h} f_1(t)\varphi_1(x-t)dt + \int_{a+h}^x f_2(t)\varphi_1(x-t)dt, & x \in [a+h, a+2h] \\ \int_{a+2h}^{x-2h} f_1(t)\varphi_2(x-t)dt + \int_{a+h}^{x-h} f_2(t)\varphi_2(x-t)dt + \int_{a+2h}^{x-h} f_2(x)\varphi_1(x-t)dt, & x \in [a+2h, a+3h] \\ \int_{a+2h}^{x-2h} f_2(t)\varphi_2(x-t)dt, & x \in [a+3h, a+4h] \\ 0, & x \notin [a, a+4h] \end{cases} \quad (2.37)$$

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & x \in [a, a+h] \\ F_2(x), & x \in [a+h, a+2h] \\ F_3(x), & x \in [a+2h, a+3h] \\ F_4(x), & x \in [a+3h, a+4h] \\ 0, & x \notin [a, a+4h] \end{cases} \quad (2.38)$$

Функція $F(x)$ є сплайном, що складається з чотирьох фрагментів і має в точках стику неперервні першу та другу похідні (рис.2.8). Очевидно, що отримана функція є сплайном, оскільки складається з чотирьох фрагментів. Щоб визначити диференційні властивості побудованого сплайна, звернемося до математичного аналізу. Фрагменти сплайна є інтегралами, що залежні від параметрів, включаючи інтеграли з межами інтегрування залежними від параметрів. Тому для з'ясування властивостей наведемо відомі з курсу матаналізу основні теореми [182].

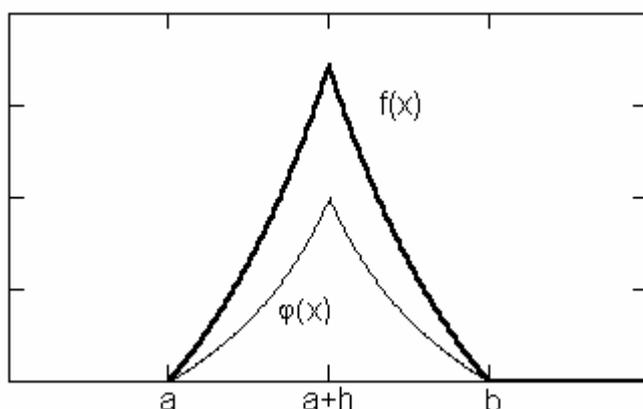


Рисунок 2.7. Функції, що породжують базисний сплайн

Позначимо підінтегральну функцію, що є добутком породжуючих функцій, $Q(x,t) = f(t)\varphi(x-t)$. $Q(x,t)$ задана в прямокутнику Π , який включає область визначену співвідношенням $\{d(x) \leq t \leq u(x), c \leq x \leq v\}$. Позначимо також інтеграл

$$I(x) = \int_{u(x)}^{d(x)} Q(x,t) dt.$$

Визначимо межі прямокутника Π для нашого випадку. Функція нижньої межі $d(x)$ та верхньої $u(x)$ є лінійними функціями. Межі зміни параметра x : $c=a$, $v=a+4h$.

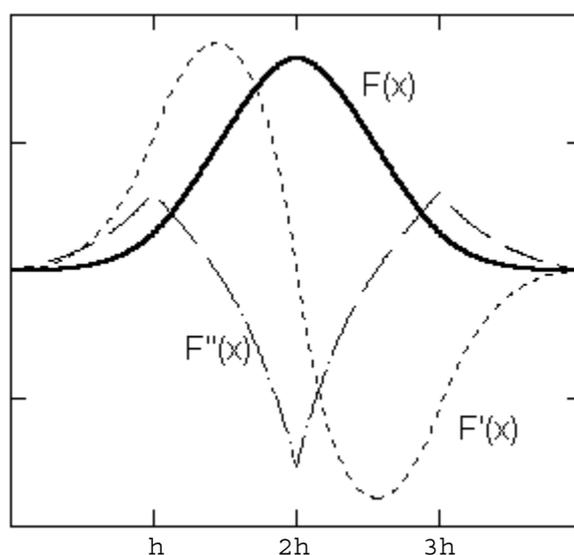


Рисунок 2.8 Базисний сплайн та його похідні

Теорема 1, [182]: Нехай $Q(x,t)$ неперервна на прямокутнику Π , а функції $u(x)$, $d(x)$ неперервні на сегменті $[c,v]$. Тоді функція $I(x)$ неперервна на сегменті $[c,v]$.

Теорема 2, [182]: Нехай функція $Q(x,t)$ і її похідна $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в прямокутнику Π . Нехай $d(x)$, $u(x)$ диференційовані на сегменті $[c,v]$. Тоді $I(x)$ диференційована на сегменті $[c,v]$ і її похідна $I'(x)$ може бути розрахована за формулою

$$I'(x) = \int_{d(x)}^{u(x)} \frac{\partial Q}{\partial x} dt + u'(x)Q(u(x),x) - d'(x)Q(d(x),x).$$

З теореми 1 слідує, що сплайн є неперервним на сегменті, оскільки $Q(x,t)$ є добутком неперервних функцій, а $u(x)$ та $d(x)$ прямі, або константи.

Розглянемо питання неперервності значень та першої і другої похідних в точках стику сплайна. Для спрощення викладення покладемо $a=0$.

Вияснимо неперервність функції в точках стику.

В точці $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \int_0^x f_1(t) \varphi_1(x-t) dt = \lim_{x \rightarrow 0-0} 0 = 0.$$

В точці $x=h$:

$$\lim_{x \rightarrow h-0} F(x) = \int_0^h f_1(t) \varphi_1(x-t) dt,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow h+0} F(x) &= \int_0^0 f_1(t) \varphi_2(x-t) dt + \int_0^h f_1(t) \varphi_1(x-t) dt + \int_h^h f_2(t) \varphi_1(x-t) dt = \\ &= \int_0^h f_1(t) \varphi_1(x-t) dt. \end{aligned}$$

В точці $x=2h$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2h-0} F(x) &= \int_0^h f_1(t) \varphi_2(x-t) dt + \int_h^h f_1(t) \varphi_1(x-t) dt + \int_h^{2h} f_2(t) \varphi_1(x-t) dt = \\ &= \int_0^h f_1(t) \varphi_1(x-t) dt + \int_h^{2h} f_2(t) \varphi_1(x-t) dt, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2h+0} F(x) = \int_0^h f_1(t) \varphi_2(x-t) dt + \int_h^{2h} f_2(t) \varphi_1(x-t) dt.$$

В точці $x=3h$:

$$\lim_{x \rightarrow 3h-0} F(x) = \int_h^{2h} f_2(t) \varphi_2(x-t) dt,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3h+0} F(x) = \int_h^{2h} f_2(t) \varphi_2(x-t) dt.$$

В точці $x=4h$:

$$\lim_{x \rightarrow 4h-0} F(x) = \int_{2h}^{2h} f_2(t) \varphi_2(x-t) dt = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4h+0} F(x) = 0.$$

Таким чином $F(x)$ є безумовно неперервною у всіх точках стику.

Скориставшись теоремою 2 визначимо першу похідну

$$F'(x) = \begin{cases} \int_0^x f_1(t) \varphi_1'(x-t) dt + f_1(x) \varphi_1(0), & x \in (0, h] \\ \int_0^{x-h} f_1(t) \varphi_2'(x-t) dt + \int_{x-h}^h f_1(t) \varphi_1'(x-t) dt + \int_h^x f_2(t) \varphi_1'(x-t) dt + \\ \quad + f_1(x-h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + f_2(x) \varphi_1(0), & x \in (h, 2h] \\ \int_{x-2h}^h f_1(t) \varphi_2'(x-t) dt + \int_h^{x-h} f_2(t) \varphi_2'(x-t) dt + \int_{x-h}^{2h} f_2(x) \varphi_1'(x-t) dt + \\ \quad + f_2(x-h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) - f_1(x-2h) \varphi_2(2h), & x \in (2h, 3h] \\ \int_{x-2h}^{2h} f_2(t) \varphi_2'(x-t) dt - f_2(x-2h) \varphi_2(2h), & x \in (3h, 4h] \\ 0, & x \notin (0, 4h] \end{cases}$$

Розглянемо неперервність першої похідної в точках стику.

Точка $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} F'(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} F'(x) = \int_0^0 f_1(t) \varphi_1'(x-t) dt + f_1(0) \varphi_1(0) = f_1(0) \varphi_1(0).$$

Для неперервності $F'(x)$ в точці $x=0$ необхідно, щоб $f_1(0) \varphi_1(0) = 0$. Тобто для неперервності першої похідної в точці $x=0$ необхідно, щоб $f_1(0) = 0$, або $\varphi_1(0) = 0$.

Точка $x=h$:

$$\lim_{x \rightarrow h-0} F'(x) = \int_0^h f_1(t) \varphi_1'(x-t) dt + f_1(h) \varphi_1(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow h+0} F'(x) = \int_0^h f_1(t) \varphi_1'(x-t) dt + f_1(0)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + f_2(h) \varphi_1(0).$$

Розглянемо можливий стрибок похідної

$$\Delta F'(h) = \lim_{x \rightarrow h+0} F'(x) - \lim_{x \rightarrow h-0} F'(x) = f_1(0)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + f_2(h)\varphi_1(0) - f_1(h)\varphi_2(0).$$

Для рівності останнього нулю необхідно, щоб функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ були неперервними в точці $x=h$. Тобто необхідно, щоб $\varphi_1(h) = \varphi_2(h)$ та $f_1(h) = f_2(h)$.

Точка $x=2h$:

$$\lim_{x \rightarrow 2h-0} F'(x) = \int_0^h f_1(t)\varphi_2'(x-t)dt + \int_h^{2h} f_2(t)\varphi_1'(x-t)dt + f_1(h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + f_2(2h)\varphi_1(0).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2h+0} F'(x) = \int_0^h f_1(t)\varphi_2'(x-t)dt + \int_h^{2h} f_2(t)\varphi_1'(x-t)dt + f_2(h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) - f_1(0)\varphi_2(2h).$$

Розглянемо можливий стрибок похідної

$$\Delta F'(2h) = \lim_{x \rightarrow 2h+0} F'(x) - \lim_{x \rightarrow 2h-0} F'(x) = (\varphi_2(h) - \varphi_1(h))(f_2(h) - f_1(h)) - f_2(2h)\varphi_1(0) - f_1(0)\varphi_2(2h).$$

Для рівності останнього нулю необхідно, щоб функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ були неперервними в точці $x=h$. Тобто необхідно, щоб $\varphi_1(h) = \varphi_2(h)$ та $f_1(h) = f_2(h)$ і $f_1(0) = \varphi_1(0) = 0$.

Точка $x=3h$:

$$\lim_{x \rightarrow 3h-0} F'(x) = \int_h^{2h} f_2(t)\varphi_2'(x-t)dt + f_2(2h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) - f_1(h)\varphi_2(2h)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3h+0} F'(x) = \int_h^{2h} f_2(t)\varphi_2'(x-t)dt - f_2(h)\varphi_2(2h)$$

$$\Delta F'(3h) = \lim_{x \rightarrow 3h+0} F'(x) - \lim_{x \rightarrow 3h-0} F'(x) = \varphi_2(2h)(f_1(h) - f_2(h)) - f_2(2h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)).$$

Для рівності останнього нулю необхідно, щоб функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ були неперервними в точці $x=h$. Тобто необхідно, щоб $\varphi_1(h) = \varphi_2(h)$ та $f_1(h) = f_2(h)$, або $f_2(2h) = \varphi_2(2h) = 0$.

В точці $x=4h$ перша похідна також неперервна, що очевидно з міркувань аналогічних для точки $x=0$.

Знайдемо значення другої похідної:

$$F''(x) = \begin{cases} \int_0^x f_1(t)\varphi_1''(x-t)dt + f_1(x)\varphi_1'(0) + f_1'(x)\varphi_1(0), & x \in (0, h] \\ \int_0^{x-h} f_1(t)\varphi_2''(x-t)dt + \int_{x-h}^h f_1(t)\varphi_1''(x-t)dt + \int_h^x f_2(t)\varphi_1''(x-t)dt + \\ + f_1(x-h)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) + f_1'(x-h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + f_2'(x)\varphi_1(0) + f_2(x)\varphi_1'(0), & x \in (h, 2h] \\ \int_{x-2h}^h f_1(t)\varphi_2''(x-t)dt + \int_h^{x-h} f_2(t)\varphi_2''(x-t)dt + \int_{x-h}^{2h} f_2(x)\varphi_1''(x-t)dt + f_2(x-h)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) + \\ + f_2'(x-h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) - f_1(x-2h)\varphi_2'(2h) - f_1'(x-2h)\varphi_2(2h), & x \in (2h, 3h] \\ \int_{x-2h}^{2h} f_2(t)\varphi_2''(x-t)dt - f_2(x-2h)\varphi_2'(2h) - f_2'(x-2h)\varphi_2(2h), & x \in (3h, 4h] \\ 0, & x \notin (0, 4h] \end{cases}$$

Вияснимо умови неперервності другої похідної в точках стику.

В точці $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} F''(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} F''(x) = f_1(0)\varphi_1'(0) + f_1'(0)\varphi_1(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} F''(x) - \lim_{x \rightarrow 0-0} F''(x) = 0, \text{ якщо } f_1(0) = 0, \varphi_1(0) = 0.$$

В точці $x=h$:

$$\lim_{x \rightarrow h-0} F''(x) = \int_0^h f_1(t)\varphi_1''(x-t)dt + f_1(h)\varphi_1'(0) + f_1'(h)\varphi_1(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow h+0} F''(x) = \int_0^h f_1(t)\varphi_1''(x-t)dt + f_1(0)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) + f_2'(h)\varphi_1(0) +$$

$$f_1'(0)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + f_2(h)\varphi_1'(0)$$

$$\Delta F''(h) = \lim_{x \rightarrow h+0} F''(x) - \lim_{x \rightarrow h-0} F''(x) = \varphi_1'(0)(f_2(h) - f_1(h)) + f_1'(0)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + \\ + f_1(0)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)).$$

Таким чином умовами неперервності є $f_1(0) = 0$ та $f_1(0) = f_2(0)$ і $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

В точці $x=2h$:

$$\lim_{x \rightarrow 2h-0} F''(x) = \int_0^h f_1(t) \varphi_2''(x-t) dt + \int_h^{2h} f_2(t) \varphi_1''(x-t) dt + f_1(h)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) + f_2(2h)\varphi_1'(0) + f_1'(h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + f_2'(2h)\varphi_1(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2h+0} F''(x) = \int_0^h f_1(t) \varphi_2''(x-t) dt + \int_h^{2h} f_2(t) \varphi_1''(x-t) dt + f_2(h)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) - f_1(0)\varphi_2'(2h) + f_2'(h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) - f_1'(0)\varphi_2(2h)$$

$$\Delta F''(2h) = (f_2(h) - f_1(h))(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) + (f_2'(h) - f_1'(h))(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) - \varphi_1'(2h)f_1(0) - f_1'(0)\varphi_2(2h) - f_2'(2h)\varphi_1(0) + f_2(2h)\varphi_1'(0).$$

Таким чином умовами неперервності є $f_2(2h) = 0$, $\varphi_2(2h) = 0$, $f_1(0) = 0$, $\varphi_1(0) = 0$ та $f_1(h) = f_2(h)$ і $\varphi_1(h) = \varphi_2(h)$.

В точці $x=3h$:

$$\lim_{x \rightarrow 3h-0} F''(x) = \int_h^{2h} f_2(t) \varphi_2''(x-t) dt + f_2(2h)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) - f_1(h)\varphi_2'(2h) + f_2'(2h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) - f_1'(h)\varphi_2(2h)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3h+0} F''(x) = \int_h^{2h} f_2(t) \varphi_2''(x-t) dt - f_2(h)\varphi_2'(2h) - f_2'(h)\varphi_2(2h)$$

$$\Delta F''(3h) = -f_2(2h)(\varphi_2'(h) - \varphi_1'(h)) - f_2'(2h)(\varphi_2(h) - \varphi_1(h)) + \varphi_2(2h)(f_1'(h) - f_2'(h)) + \varphi_1'(2h)(f_1(h) - f_2(h)).$$

Умовами неперервності є $f_2(2h) = 0$, $\varphi_2(2h) = 0$, $f_1(0) = 0$, $\varphi_1(0) = 0$ та $f_1(h) = f_2(h)$ і $\varphi_1(h) = \varphi_2(h)$.

В точці $x=4h$:

$$\lim_{x \rightarrow 4h-0} F''(x) = -f_2(h)\varphi_2'(2h) - f_2'(h)\varphi_2(2h), \quad \lim_{x \rightarrow 4h+0} F''(x) = 0.$$

Умовами неперервності є $f_2(2h) = 0$, $\varphi_2(2h) = 0$.

Отже з викладеного вище слідує, що функція $F(x)$ є неперервною, включаючи точки стику, має неперервну першу та другу похідні, якщо виконуються наступні умови:

$$f_1(0) = 0, \quad \varphi_1(0) = 0, \quad f_1(h) = f_2(h), \quad \varphi_1(h) = \varphi_2(h), \quad f_2(2h) = 0, \quad \varphi_2(2h) = 0.$$

При цьому маємо на увазі, що функції $f(x)$, $\varphi(x)$ є неперервними і інтегрованими на фрагментах.

Побудуємо зі зміщених пропорційно h сплайнів базис $\{H_m\}$, рис.2.10. Оскільки сплайн $F(x)$ і базис відрізняються від розглянутих попередньо лише нерозривністю другої похідної, то всі властивості попереднього базису залишаються вірними і для даного базису.

Виділимо випадок коли $f(x) = \varphi(x)$. Для ряду функцій це спрощує розрахунки. Так, якщо $f(x)$ є трикутником і $f(x) = \varphi(x)$, то $F(x)$ є кубічним В-сплайном із двома неперервними похідними (рис.2.9). Властивості цього базису досліджені найбільш повно. Сам базис у задачах обробки даних на регулярних сітках зустрічається найбільш часто. Приклади роботи з такими базисами розглянемо далі.

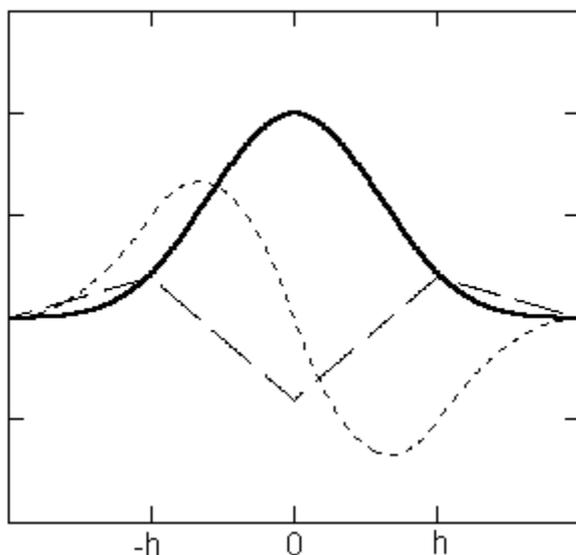


Рисунок 2.9. Кубічний В-сплайн та його похідні

Розглянемо приклади побудови базисних сплайнів.

Експоненційний базис на сітці $0,1,2,3,4$: $f_1(x) = e^x - 1$, $f_2(x) = e^{(2-x)} - 1$ (2.39)

$$F_1(x) = \int_0^x (e^t - 1)(e^{x-t} - 1) dt = x e^x - 2e^x + x + 2,$$

$$F_2(x) = \int_{x-1}^1 (e^t - 1)(e^{x-t} - 1) dt + \int_1^x (e^{2-t} - 1)(e^{x-t} - 1) dt = U1(x) + U2(x),$$

$$U1(x) = \frac{1}{e}(ee^x + e^x + e - e^2) - \frac{1}{e^{x-1}}(e^x e^{x-1}x - e^{2(x-1)} - e^x e^{x-1} + e^x + e^{x-1}x - e^{x-1}),$$

$$U2(x) = \frac{1}{2e^x}(e^2 + 2e^x + 2xe^x) + \frac{1}{2e^2}(e^2 e^x - 2e^2 e - 2e^x e - 2e^2),$$

$$F_3(x) = F_2(4-x), \quad F_4(x) = F_1(4-x). \quad (2.40)$$

Породжуючі функції показано на рис.2.7, а базис та його похідні на рис.2.8.

(2.41)

Кубічний базис на сітці 0,1,2,3,4: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 2 - x$

$$F_1(x) = \int_0^x t(x-t)dt = \frac{x^3}{6},$$

$$F_2(x) = \int_{x-1}^1 t(x-t)dt + 2 \int_1^x (2-t)(x-t)dt = -\frac{x^3}{2} + 2x^2 - 2x + \frac{2}{3}, \quad (2.42)$$

$$F_3(x) = F_2(4-x), \quad F_4(x) = F_1(4-x).$$

Породжуючі функції є трикутниками, а базис та його похідні показано на рис.2.9.

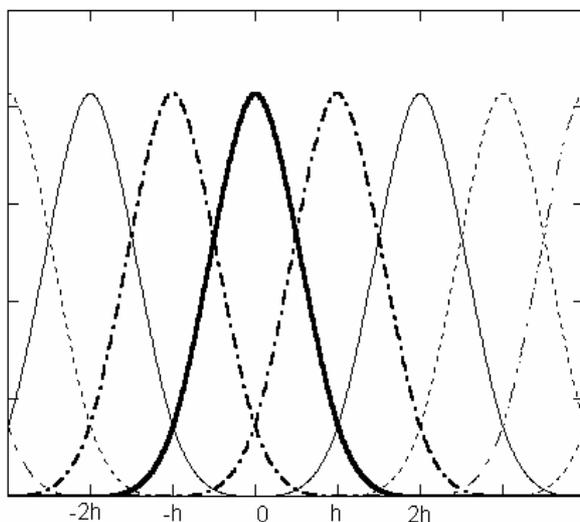


Рисунок 2.10. Сплайновий базис

Програма розрахунку базисного сплайна в MathCad показана в додатку А.

2.5 Отримання дискретних сплайнових базисів

Отримання аналітичних виразів для базисних сплайнів може виявитись досить складною справою. Інтеграли від породжуючих функцій можуть мати досить складний вигляд, або взагалі не братися аналітично. Тому розглянемо побудову таких сплайнів у дискретному варіанті.

Породжуючі функції представимо у вигляді окремих відліків на фрагменті сплайна з інтервалом Δ . Для простоти розрахунків приймемо ширину інтервалу рівною 1, а відлік починатимемо з 0 ($a=0$).

$$f_i = \begin{cases} f_1(x_i), & \text{для } i = \overline{1, N} \\ f_2(x_i), & \text{для } i = \overline{N+1, 2N} \\ 0, & \text{для } i = \overline{2N+1, 4N} \end{cases}, \quad \varphi_i = \begin{cases} \varphi_1(x_i), & \text{для } i = \overline{1, N} \\ \varphi_2(x_i), & \text{для } i = \overline{N+1, 2N} \\ 0, & \text{для } i = \overline{2N+1, 4N} \end{cases}, \quad (2.43)$$

Дискретна лінійна згортка розраховується за виразом

$$F_i = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^i f_{(i-n)} \varphi_n, \quad i = \overline{1, 4N}. \quad (2.44)$$

Сформований сплайн складатиметься з чотирьох фрагментів, які можна визначити через загальну функцію (44), як

$$\begin{aligned} F1_i &= F_i, & i &= \overline{1, N}; \\ F2_i &= F_{i+N}, & i &= \overline{1, N}; \\ F3_i &= F_{i+2N}, & i &= \overline{1, N}; \\ F4_i &= F_{i+3N}, & i &= \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Сплайновий базис складається з відліків функції F_i зміщеної пропорційно N на регулярній сітці $H_{ij} = F_i$. Наслідком цього сума всіх базисних функцій у певній точці сітки даних є сумою чотирьох фрагментів базисного сплайна:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} H_{ij} = F1_i + F2_i + F3_i + F4_i \quad (2.46)$$

Індекс “j” є номером базисної функції, а індекс “i” є номером точки на відрізку сплайна, якому ця точка належить. Ця особливість сплайнових базисів має

вирішальне значення для ефективності розрахунків кардинальних сплайнів. Сплайновий базис є локальним, що дозволяє ефективно реалізовувати розрахунки з використанням скалярного добутку базисних функцій.

$$\sum_i H_{im} H_{in} = 0, \text{ для } |m - n| > 3. \quad (2.47)$$

Оскільки базисні функції є зміщеними копіями, то номер фрагмента не має значення й індекс номера фрагмента сплайна у складових базисної функції відсутній. Звичайно мова йде про внутрішні фрагменти сплайна. Розрахунок для перших і останніх фрагментів потребує врахування відсутності сусідніх вузлів. Це легко здійснити, відкинувши відповідні суми, однак, в алгоритмах реального часу операції порівняння можуть займати суттєвий час, зважаючи на простоту наведених виразів. З огляду на регулярність сітки можна умовно продовжити послідовність вузлів у нескінченість праворуч та ліворуч і не змінювати вирази. Однак усе ж не вдасться уникнути факту відсутності даних на продовжених фрагментах. Вказані спрощення призведуть до наявності певного перехідного процесу на початку і в кінці оброблюваної послідовності даних. Такий перехід не простягатиметься далі двох сплайнових фрагментів.

Безумовною перевагою дискретних сплайнових базисів є простота їх розрахунку. Зважаючи на локальність базису (мале значення N) дискретна лінійна згортка не є проблемою. Відсутня проблема аналітичних перетворень, в зв'язку з чим розширюється множина можливих варіантів базисів. Зворотною стороною є необхідність сформулювати певні критерії побудови базису для конкретних потреб. Тобто постає запитання, як побудувати базис, що найкраще відповідатиме потребам конкретного застосування.

Побудова такого базису можлива при наявності апріорної інформації про характер процесу, що наближуватиметься (експоненційний, логарифмічний, синусоїдальний і т.п.). Це дозволяє зробити вибір породжуючої функції. Частіше є інформація про частотні властивості сигналу. Для детермінованих сигналів це частотна характеристика сигналу, для випадкових сигналів – енергетичний спектр (чи його оцінка). Зважаючи на те, що зміщені базисні сплайни, які утворюють

сплайн, відрізняються фазою, але мають однаковий амплітудний і енергетичний спектри будемо користуватися саме ними. Якщо враховувати лише максимальну похибку, то достатньо знати лише ненульовий частотний діапазон сигналу. Частотний діапазон сигналу дає можливість правильно вибрати ширину базисної функції, та оцінити похибку інтерполяції, через нерівномірність частотної характеристики базисного сплайна в області сигналу. Найбільш повною є апіорна інформація про амплітудний чи енергетичний спектр сигналу. Це дає можливість оцінити середньоквадратичну похибку наближення. За наявності білого шуму є зміст користуватися базисним сплайном з енергетичним спектром, що відповідає енергетичному спектру сигналу. В цьому випадку в якості дискретної породжуючої функції можна використати імпульсну характеристику нерекурсивного цифрового фільтра.

2.6 Синтез ермітових сплайнових базисів

Для наближення деякої залежності $Y(x)$ розраховують числові коефіцієнти a_j так, що зважена сума базисних функцій є близькою до залежності $Y(x) \approx \sum_j a_j F_j(x)$. Зазначені коефіцієнти a_j не мають явної фізичної інтерпретації, а їх розрахунок потребує значного обсягу обчислень. В даному підрозділі розглянемо побудову ермітових сплайнових базисів на регулярних сітках, що складаються з неперервних відрізків функцій довільно класу. Однією з переваг таких базисів є рівність вагових коефіцієнтів вузловим значенням інтерпольованої функції, що значно спрощує розрахунки.

Розглянемо побудову інтерполяційного сплайна на окремому фрагменті $[T_1, T_2]$, рис.2.11. Як слідує з локальності сплайнового базису на довільному фрагменті ненульовими будуть лише чотири базисні функції:

$$F_j(x) = \begin{cases} F1(x), & x \in [c, c+h) \\ F2(x), & x \in [c+h, c+2h) \\ F3(x), & x \in [c+2h, c+3h) \\ F4(x), & x \in [c+3h, c+4h) \\ 0, & x \notin [c, c+4h) \end{cases}, \quad (2.48)$$

де $h = T_2 - T_1$, -- лівий вузол базисного сплайна.

На окремому фрагменті сплайна ці базиси представлені чотирма фрагментами $F1, F2, F3, F4$, зваженими відповідно значенням коефіцієнтів a_j . Отже, значення інтерполяційного сплайна в довільній точці x на фрагменті p визначатиметься чотирма коефіцієнтами $F1(x), F2(x), F3(x), F4(x)$:

$$S(x) = \sum_j a_j F_j(x) = \sum_{j=n-1}^{n+2} a_j F_j(x) = a_{n-1} F1(x-c) + a_n F2(x-c) + a_{n+1} F3(x-c) + a_{n+2} F4(x-c), \quad (2.49)$$

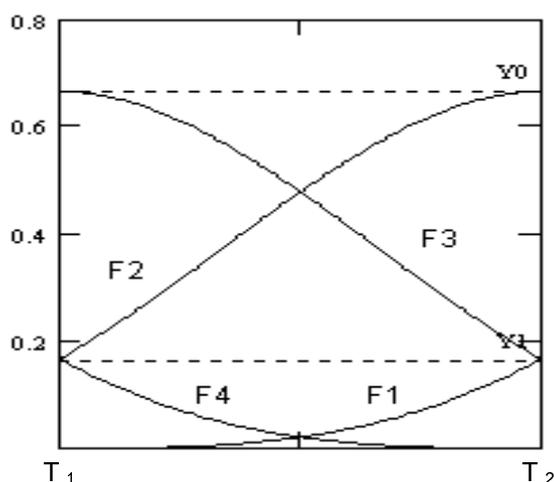


Рисунок 2.11. Складові базисних функцій на фрагменті сплайна

З іншого боку, фрагмент сплайна задано двома вузовими точками $(T_1, A_1), (T_2, A_2)$. Для встановлення однозначного взаємозв'язку між вузовими точками та чотирма коефіцієнтами сплайна потрібно ще два параметри пов'язаних із вузлами. За ці параметри приймемо значення першої похідної у вузових точках. Перша похідна базисних функцій у вузових точках легко визначається. Позначимо її z_1 . При відсутності даних про значення похідних у вузлах розрахуємо їх наближено, через центральні різниці $A_1' \approx (A_2 - A_0)/2$, $A_2' \approx (A_3 - A_1)/2$. Таким чином буде встановлена

однозначна лінійна залежність між чотирма вузлами функції, яку наближають та чотирма параметрами інтерполяційного сплайна. В матричному вигляді маємо:

$$\begin{bmatrix} 0 & Y_1 & Y_0 & Y_1 \\ Y_1 & Y_0 & Y_1 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & -z_1 \\ z_1 & 0 & -z_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ (A_2 - A_0)/2 \\ (A_3 - A_1)/2 \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Інверсна матриця має вигляд:

$$\frac{1}{z_1(Y_0^2 - 4 \cdot Y_1^2)} \begin{bmatrix} z_1 \cdot Y_0 & -2 \cdot z_1 \cdot Y_1 & Y_0 \cdot Y_1 & Y_0^2 - 2 \cdot Y_1^2 \\ -2 \cdot z_1 \cdot Y_1 & z_1 \cdot Y_0 & -2 \cdot Y_1^2 & -Y_0 \cdot Y_1 \\ z_1 \cdot Y_0 & -2 \cdot z_1 \cdot Y_1 & Y_0 \cdot Y_1 & 2 \cdot Y_1^2 \\ -2 \cdot z_1 \cdot Y_1 & z_1 \cdot Y_0 & 2Y_1^2 - Y_0^2 & -Y_0 \cdot Y_1 \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Її дискримінант дорівнює: $4z_1^2 Y_1^2 - Y_0^2 z_1^2$. Очевидно, що дискримінант рівний нулю при $Y_0 = 2 \cdot Y_1$. Це означає, що базиси побудовані, як згортка симетричної локальної функції з прямокутним вікном до лагранжівної форми привести не можна. Тоді коефіцієнти інтерполяційного сплайна визначатимуться через вузлові точки наступним чином:

$$\begin{bmatrix} \frac{-(-2Y_0 A_1 z_1 + 4Y_1 A_2 z_1 - Y_1 Y_0 A_2 + Y_1 Y_0 A_0 + 2Y_1^2 A_3 - 2Y_1^2 A_1 - Y_0^2 A_3 + Y_0^2 A_1)}{2(z_1(Y_0^2 - 4Y_1^2))} \\ \frac{(-4Y_1 A_1 z_1 + 2Y_0 A_2 z_1 - 2Y_1^2 A_2 + 2Y_1^2 A_0 - Y_1 Y_0 A_3 + Y_1 Y_0 A_1)}{2(z_1(Y_0^2 - 4Y_1^2))} \\ \frac{(2Y_0 A_1 z_1 - 4Y_1 A_2 z_1 + Y_1 Y_0 A_2 - Y_1 Y_0 A_0 + 2Y_1^2 A_3 - 2Y_1^2 A_1)}{2(z_1(Y_0^2 - 4Y_1^2))} \\ \frac{-(4Y_1 A_1 z_1 - 2Y_0 A_2 z_1 - 2Y_1^2 A_2 + 2Y_1^2 A_0 + Y_0^2 A_2 - Y_0^2 A_0 + Y_1 Y_0 A_3 - Y_1 Y_0 A_1)}{2(z_1(Y_0^2 - 4Y_1^2))} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Отриманий результат є корисним, оскільки дозволяє за вузловими значеннями розраховувати коефіцієнти інтерполяційного сплайна за досить простими аналітичними виразами. Підкреслимо, що при цьому не зроблено припущень про вигляд функцій, що породили сплайновий базис. Достатньо значень A_0, A_1 та першої похідної у двох точках стику базису (включаючи центральну) $z_1, -z_1$. Знайдені значення d_1, d_2, d_3, d_4 підставимо в інтерполяційне рівняння $S(x) = d_1 F_1(x) + d_2 F_2(x) + d_3 F_3(x) + d_4 F_4(x)$.

Зведемо подібні так, щоб відокремити вузлові значення:

$$S(x) = A_1 F_1(x) + A_2 F_2(x) + A_3 F_3(x) + A_4 F_4(x), \quad (2.53)$$

де

$$F_1 = \alpha((2Y_0 z_1 + 2Y_1^2 - Y_0^2)F_1 + (Y_1 Y_0 - 4Y_1 z_1)F_2 + (2Y_0 z_1 - 2Y_1^2)F_3 + (Y_1 Y_0 - 4Y_1 z_1)F_4)$$

$$F_2 = \alpha((2Y_0 z_1 - 2Y_1^2)F_2 + (Y_1 Y_0 - 4Y_1 z_1)F_1 + (2Y_0 z_1 + 2Y_1^2 - Y_0^2)F_3 + (Y_1 Y_0 - 4Y_1 z_1)F_4);$$

$$F_3 = \alpha[(-Y_0 Y_1)F_1 + (2Y_1^2)F_2 + (-Y_0 Y_1)F_3 + (Y_0^2 - 2Y_1^2)F_4];$$

$$F_4 = \alpha[(-Y_0 Y_1)F_4 + (2Y_1^2)F_3 + (-Y_0 Y_1)F_2 + (Y_0^2 - 2Y_1^2)F_1];$$

$$\alpha = 1/(2[z_1(Y_0^2 - 4Y_1^2)]).$$

В отриманому виразі функції біля вузлових значень $F_1(x), F_2(x), F_3(x), F_4(x)$ є фрагментами нових базисних функцій

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \tilde{F}_1(x), & x \in [c, c+h) \\ \tilde{F}_2(x), & x \in [c+h, c+2h) \\ \tilde{F}_3(x), & x \in [c+2h, c+3h) \\ \tilde{F}_4(x), & x \in [c+3h, c+4h) \\ 0, & x \notin [c, c+4h) \end{cases}, \quad (2.54)$$

Знайдені базисні функції також є локальними сплайнами, оскільки отримані, як зважена сума фрагментів локального сплайнового базису. Неперервність значень базису в точках стику є очевидною, оскільки він є лагранжівим. В центральній точці стику базис рівний одному й нулю у двох інших. Неперервність першої похідної у точках стику гарантується умовою рівності похідної сплайна похідній функції. Відповідно маємо однаковий спосіб розрахунку для першої похідної у точках стику для правого та лівого фрагмента. Неперервність другої похідної не гарантується. За аналогією з алгебраїчним ермітовим сплайном, отриманий базис називатимемо ермітовим, маючи на увазі спосіб визначення його через похідні. При цьому клас функцій, що утворюють фрагменти може бути широким.

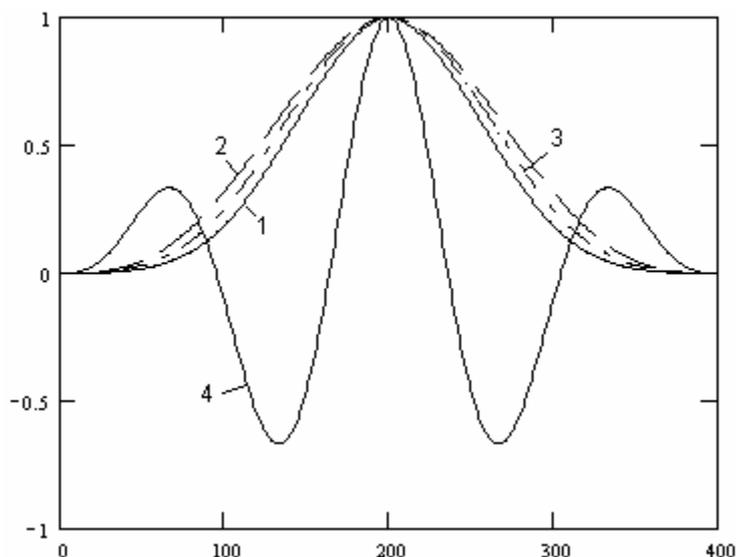


Рисунок 2.12. Приклади В-форми сплайнових базисів. 1-експоненційний, 2-кубічний, 3-синусоїдальний (четверть), 4-синусоїдальний (половина).

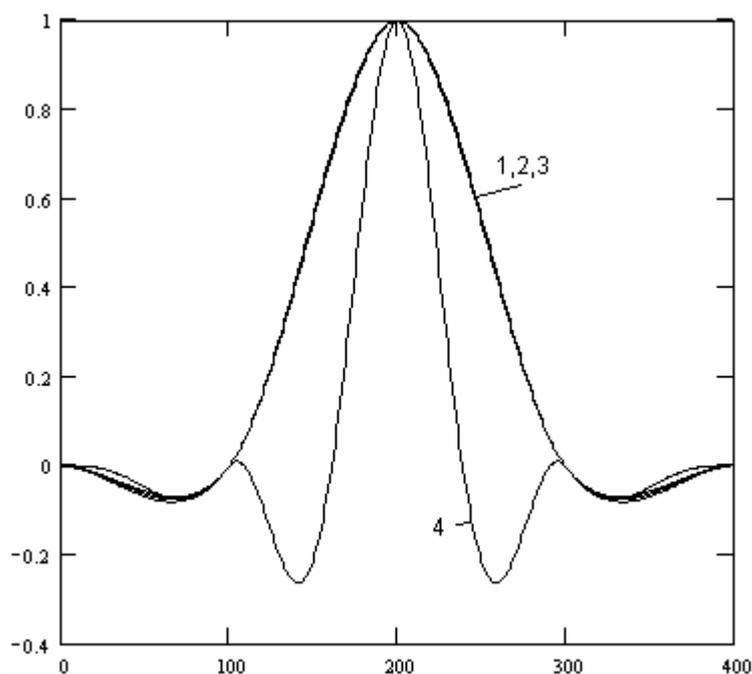


Рисунок 2.13. Ермітові базисні сплайни утворені з В-форми

На рис.2.12 показані сплайнові базиси, утворені різними породжуючими функціями, як результат згортки самих з собою. Функції 1-3 є відповідно експоненціальною, алгебраїчною та гармонійною. Ці базиси відносно схожі за формою (для порівняння вони нормовані по максимумам). Четверта базисна функція утворена половиною

відрізка синусоїди і ілюструє значну мінливість сплайнових базисів порівняно зі звичними, алгебраїчними В-сплайнами.

На рис.2.13 показані ермітові базиси утворені з попередніх базисних функцій. Ці базиси рівні 1 в центрі і 0 в інших точках стику, що відповідає лагранжівій формі. Відмінності між близькими базисами стали менш помітними внаслідок виконання попередніх умов. Проте останній базис відрізняється суттєво. Це ілюструє значну мінливість форми розглянутих базисів.

2.7 Приведення сплайнових базисів до лагранжівій форми

Наближення з допомогою базисних сплайнів з двома неперервними похідними вимагає розв'язання системи лінійних рівнянь, або певних обмежень точності та співвідношень між базисом та функцією, яку наближають [16]. Тому побудуємо базис у лагранжівій формі з неперервністю двох похідних. Перевагою такого базису буде рівність вагових коефіцієнтів вузловим значенням інтерпольованої функції. Розглянемо дещо інший підхід ніж в попередньому підрозділі.

Нехай маємо довільний сплайновий базис $\{H_m\}$, що складається з базисних функцій $H_m(x)=H_0(x-m)$. Значення базисної функції $H_0(x)$ у вузлових точках (0, 1, 2, 3, 4) рівні (0, f1, f0, f1, 0). До іншої системи вузлів легко перейти, змінивши масштаб чи початок координат. Тоді для інтерполяційного сплайна побудованого на вузлах, що співпадають із вузловими точками базисних функцій запишемо систему інтерполяційних рівнянь

$$F * A = Y, \quad (2.55)$$

де F квадратна симетрична тридіагональна матриця. Матриця повністю визначається двома ненульовими значеннями f_0 та f_1 . Розмірність матриці вважатимемо довільною, або навіть необмежено великою, проте не менше п'яти.

$$\bar{F} = \left[\begin{array}{cccc|c} f_0 & f_1 & 0 & 0 & 0 \\ f_1 & f_0 & f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_1 & f_0 & f_1 & 0 \\ 0 & 0 & f_1 & f_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & f_0 \end{array} \right] \quad (2.56)$$

Матриця - стовпець \mathbf{Y} містить значення інтерпольованої функції у вузлах інтерполяції.

Знайдемо значення елементів матриці \mathbf{A} , котрі задовольняють рівняння (55). Специфічна форма матриці F дозволяє скористатись наближеним методом визначення елементів інверсної матриці. Детально цей метод розглянуто в підрозділі 3.4. Вважатимемо, що інверсна матриця складається із семи ненульових діагоналей. Запишемо наближену матрицю:

$$\left[\begin{array}{cccc} f_0 & 2f_1 & 0 & 0 \\ f_1 & f_0 & f_1 & 0 \\ 0 & f_1 & f_0 & f_1 \\ 0 & 0 & f_1 & f_0 \end{array} \right]. \quad (2.57)$$

З останньої отримуємо аналітичний розв'язок для ненульових елементів матриці, інверсної до F :

$$\begin{aligned} d_0 &= f_0(f_0^2 - 2f_1^2)/Q, \quad d_1 = -f_1(f_0^2 - f_1^2)/Q, \\ d_2 &= f_0f_1^2/Q, \quad d_3 = -f_0^3/Q, \\ Q &= f_0^4 - 4f_0^2f_1^2 + 2f_1^4. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Для з'ясування точності порівняємо значення 6-го стовпця інверсної матриці розмірності 10 із наближеними значеннями для кубічного В-сплайна ($f_0=0.6667$, $f_1=0.16665$).

Таблиця 2.1. Порівняння точного і наближеного розв'язків.

| | d_0 | d_1 | d_2 | d_3 | d_4 |
|-------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|---------------|
| наближено | 1.731786 | -0.463791 | 0.123657 | -0.030910 | 0.0000 |
| точно 10x10 | 1.731874 | -0.463963 | 0.124254 | -0.033129 | 0.0082 |

Бачимо, що числа співпадають із точністю до сотих, що цілком прийнятно для більшості технічних застосувань.

Визначимо $A = F^{-1} * Y$.

Підставимо в інтерполяційні рівняння для довільних точок інтерполяції при прийнятій схемі вузлів $F * F^{-1} * Y = S$, де F матриця з числом стовпців, що співпадає з розмірністю матриці F й числом рядків рівним числу точок інтерполяції. Стовпці цієї матриці є значеннями базисних функцій у точках інтерполяції.

Останнє рівняння можна записати інакше: $L * Y = S$,

де L матриця планування з розмірністю, що співпадає з розмірністю матриці F .

Оскільки коефіцієнтами інтерполяційних рівнянь є значення інтерпольованої функції у вузлах інтерполяції, то маємо лагранжіву схему інтерполяції. Стовпці матриці L є базисними функціями, що мають властивості лагранжівих базисів. Позначимо такий базис $L(x)$. Знайдемо значення базисної функції у центральній точці

$$f1 * d_1 + f0 * d_0 + f1 * d_1 = (f0^2 (f0^2 - 2f1^2) - 2f1^2 (f0^2 - f1^2)) / Q = Q / Q = 1.$$

В наступних вузлах ліворуч та праворуч 0:

$$f1 * d_2 + f0 * d_1 + f1 * d_0 = (f1f0f1^2 - f0f1(f0^2 - f1^2) + f1f0(f0^2 - 2f1^2)) / Q = 0,$$

$$f1 * d_3 + f0 * d_2 + f1 * d_1 = (-f1 * f1^3 + f0f0f1^2 - f1f1(f0^2 - f1^2)) / Q = 0,$$

$$f0 * d_3 + f1 * d_2 = (-f0f1^3 + f1f0f1^2) / Q = 0,$$

$$f1 * d_3 = (-f1^4) / Q \neq 0.$$

Отже базисна функція рівна 1 у центральному вузлі і 0 в інших. За винятком четвертого вузла. В четвертому вузлі від центру значення базисної функції відмінне від нуля. Проте - це є результатом наближеного розрахунку. Розрахуємо це значення:

$$f1 * d_3 = (-f1^4) / Q = \frac{-0.000771}{0.149735} = -0.005151.$$

Відмінність від нуля є незначною, в межах точності елементів інверсної матриці.

Проте принципова проблема полягає в іншому. В результаті трансформації базису нові базисні функції значно розширили область ненульових значень. Якщо бути точними і вважати інверсну матрицю повністю заповненою, то маємо нелокальний базис. При цьому втрачаємо одну з основних переваг локальних сплайнових базисів - ефективність розрахунків.

Однак, вважаючи інверсну матрицю діагональною, можна дещо виправити ситуацію. Зрозуміло, що така заміна можлива лише з певною точністю, яка диктується умовами конкретної прикладної задачі. В розглянутому вище розрахункові елементів інверсної матриці остання вважається семидіагональною. Тоді лагранжівий базис складатиметься з 10 фрагментів (рис.2.14), котрі розраховуватимуться за формулами:

$$\begin{aligned}
 L1(x) &= B_1(x) * d_3, \\
 L2(x) &= B_2(x) * d_3 + B_1(x) * d_2, \\
 L3(x) &= B_3(x) * d_3 + B_2(x) * d_2 + B_1(x) * d_1, \\
 L4(x) &= B_4(x) * d_3 + B_3(x) * d_2 + B_2(x) * d_1 + B_1(x) * d_0, \\
 L5(x) &= B_4(x) * d_2 + B_3(x) * d_1 + B_2(x) * d_0 + B_1(x) * d_1, \\
 L6(x) &= B_4(x) * d_1 + B_3(x) * d_0 + B_2(x) * d_1 + B_1(x) * d_2, \\
 L7(x) &= B_4(x) * d_0 + B_3(x) * d_1 + B_2(x) * d_2 + B_1(x) * d_3, \\
 L8(x) &= B_4(x) * d_1 + B_3(x) * d_2 + B_2(x) * d_3, \\
 L9(x) &= B_4(x) * d_2 + B_3(x) * d_3, \\
 L10(x) &= B_4(x) * d_3,
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

де $B_1(x), B_2(x), B_3(x), B_4(x)$ складові базисної функції. Оскільки для регулярної сітки даних ці складові визначаються незалежно від зміщення базисної функції, то при одиничній довжині відрізка маємо

$$H_k(x) = \begin{cases} B_1(x-k), & x-k \in [0,1) \\ B_2(x-k), & x-k \in [1,2) \\ B_3(x-k), & x-k \in [2,3) \\ B_4(x-k), & x-k \in [3,4) \end{cases} \tag{2.60}$$

По суті лагранжівий базис отримуємо, як інтерполяцію ряду $\dots, 0, d_3, d_2, d_1, d_0, d_1, d_2, d_3, 0, \dots$ із допомогою базису $\{H_m\}$. Тому отриманий базис є також сплайном аналогічного виду з двома неперервними похідними (рис.2.15).

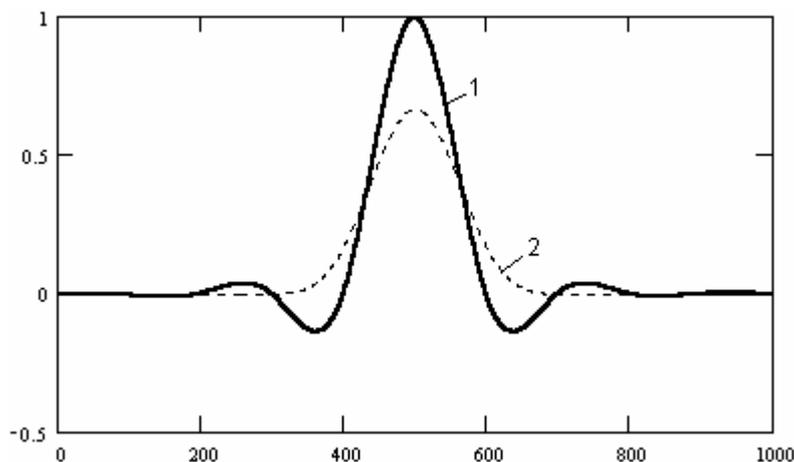


Рисунок 2.14. Кубічний В-сплайн (2) та його лагранжівіа форма (1).

Тобто приведення базису до лагранжівіа форми не призводить до значного ускладнення інтерполяційної функції. Якщо в основі перетворення є кубічний поліном, то отриманий базис також буде складатись із кубічних поліномів. Це компенсує розширення базису і відповідне зростання обсягу розрахунків. Очевидною є альтернатива: або знаходити коефіцієнти при базисних функціях із системи інтерполяційних рівнянь і економити на розрахунків значень інтерполяційного сплайна (4 множення, 3 складання), або скористатись лагранжівіа формою і тоді зросте обсяг розрахунків при інтерполяції (10 множень, 9 складань). Перше можливе лише в пакетному режимі побудови інтерполяційної функції і для обмеженої кількості вузлів. Причому обсяг обчислень зростатиме як квадрат числа вузлів. Другий варіант дозволяє виконувати інтерполяцію в реальному часі та необмежений потік даних. Платою за це є збільшення майже у три рази розрахунків на відлік і розрахунок з обмеженою точністю (до двох знаків після коми). Таку процедуру легко реалізувати у вигляді нерекурсивного числового фільтра (точніше у вигляді поліфазної структури таких фільтрів).

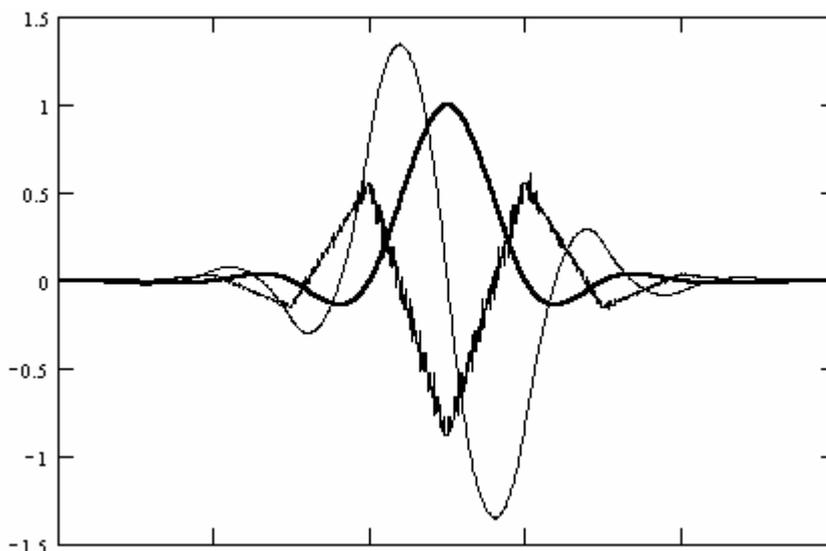


Рисунок 2.15. Лагранжівий базис і його похідні

Можна також розглядати приведення, як фільтрацію послідовності $\dots, 0, d_3, d_2, d_1, d_0, d_1, d_2, d_3, 0, \dots$ нерекурсивним фільтром, що має імпульсну характеристику $H_k(x_i)$ з підвищенням частоти дискретизації. Тоді частотна характеристика лагранжівого базису є добутком частотної характеристики початкового базису та послідовності $\dots, 0, d_3, d_2, d_1, d_0, d_1, d_2, d_3, 0, \dots$.

Розрахунки перетворень в MathCad показано в додатках Б, В.

2.8 Висновки

В розділі розроблений загальний підхід до побудови ермітових сплайнів на довільній сітці вузлів, з фрагментів функцій, форма яких лінійно залежить від деяких параметрів. Сформульована необхідна умова розв'язку даної задачі, що полягає у кратності параметрів кількості вузлів. Показана ідентичність результатів отриманих запропонованим способом з отриманими іншим, більш вузьким способом для кубічних ермітових сплайнів. Запропонований підхід принципово дозволяє автоматизувати процес побудови ермітових сплайнів з допомогою систем аналітичної алгебри.

Розглянуто специфічний спосіб побудови сплайнових базисів, як згортки локальної симетричної функції з прямокутним вікном на рівномірній сітці вузлів. Вказаний спосіб дозволяє отримати базисний сплайн, що складається з чотирьох фрагментів і має неперервну першу похідну. Зміщені пропорційно кроку вузлів базисні сплайни утворюють сплайновий базис.

Згортка двох симетричних локальних функцій на рівномірній сітці вузлів дозволяє отримати базисний сплайн з неперервними першою та другою похідними. Досліджені вимоги до породжуючих функцій, котрі гарантують неперервність першої та другої похідних. Наведені приклади побудови зазначених базисних сплайнів.

З допомогою отриманих сплайнових базисів вирішується інтерполяційна задача. Для цього необхідно знайти чисельні коефіцієнти при відповідних базисних функціях. Розроблені процедура приведення сплайнових базисів до лагранжівної форми, де коефіцієнти є значенням функції у вузлах інтерполяції.

Перший спосіб є локальним. Розглядається інтерполяція на локальному фрагменті. Необхідна інформація про значення базису та першої похідної на краях фрагмента. Шляхом алгебраїчних перетворень отримуємо лагранжівий базис. Оскільки задіяні похідні то базис називатимемо також ермітовим. Утворений базис не гарантує неперервність другої похідної.

Другий спосіб полягає в наближеному розв'язку глобальної системи інтерполяційних рівнянь. Специфічна діагональна форма інтерполяційної матриці дозволяє знайти наближений розв'язок, включаючи й аналітичні вирази. Алгебраїчні перетворення приводять до лагранжівого базису. Утворений базисний сплайн вже не є локальним, проте з певною точністю його можна вважати локальним, але область ненульових значень значно розширюється (число фрагментів також). Втрата локальності серйозно збільшує обсяг розрахунків. Проте цей базис зберігає неперервність двох похідних.

Аналітичні розрахунки при побудові сплайнових базисів на рівномірній сітці вузлів можуть бути досить складними, однак цю проблему можна обійти

скориставшись дискретним варіантом розглянутих методів. Неперервна згортка замінюється дискретною, для дискретних відліків деяких породжуючих функцій, вимоги до котрих є аналогічними неперервному варіантові.

Отримані сплайнові базиси дозволяють ефективно розв'язувати інтерполяційні задачі, що є основою розглянутих далі методів обробки цифрових сигналів. Отримана альтернатива широкого вибору сплайнових базисів одночасно ставить серйозну задачу вибору найкращого з них для вирішення конкретної задачі.

РОЗДІЛ 3. АЛГОРИТМІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА АДАПТАЦІЇ СПЛАЙН-МОДЕЛЕЙ

3.1 Постановка задачі

В попередньому розділі було розглянуто методи побудови сплайнів та довільних сплайнових базисів у різних формах. Однак розгляд обмежувався лише формальною побудовою сплайнових базисів. Поза увагою залишилось питання точності наближення та вибору найбільш придатного для цього базису. Основною задачею розділу є встановлення аналогій між загальними сплайновими методами наближення, типовими конструкціями цифрової обробки даних та розробка специфічних методів обробки нескінчених послідовностей даних на регулярних сітках. Розгляд цих питань почнемо із задач інтерполяції. Методи інтерполяції глобальними інтерполяційними сплайнами є загальновідомими [139,142,155]. Для розв'язку інтерполяційних рівнянь існують достатньо ефективні алгебраїчні методи [167,180,181]. Деяко рідше користуються алгебраїчними B-сплайнами з аналогічним математичним апаратом [163]. Питання нев'язки інтерполяції сплайнами також вивчені досить повно [163,172,200]. Однак у практиці обробки цифрових даних використання цих теоретичних розробок дозволяє робити лише висновки про потенційно можливу нев'язку, зробивши певні припущення про диференційні властивості даних. Проблема полягає в тому, що нев'язка оцінюється за диференційними властивостями сплайна та даних, які наближають. На практиці така апріорна інформація про дані в переважній більшості випадків відсутня, а чисельна оцінка не дозволяє досягти прийнятної точності. Ідея альтернативного підходу до оцінки точності інтерполяції належить, очевидно, Хемінгу [298]. Суть її у тому, що точність інтерполяції оцінюється за відмінністю амплітудних спектрів даних та інтерполяційної функції. Подібна ідея, але у статистичній постановці, була розроблена Железновим Н.А. [119]. На продуктивність такого підходу звертає увагу також М.Унсер [54,62]. Перевага такого підходу в тому, що в цифрових системах спектральне представлення даних є загальноприйнятим. З іншого боку, для

отримання цифрових даних користуються технічними засобами з відомими частотними властивостями. Отже завжди існує певний мінімум апріорної інформації про спектр даних. Поняття спектральних властивостей сплайнових базисів частково досліджені в роботах, що стосуються wavelet методів [54,62]. Однак - це питання розкривається лише для окремих видів сплайнів і стосується реалізації цифрових систем [112]. Автор розглядає це питання у тісному взаємозв'язку зі спектральними характеристиками даних, які підлягають інтерполяції. Тому в підрозділі 3.2 проводиться аналогія між математичним поняттям інтерполяції та інтерполяцією в технічному розумінні. Досліджується відмінності у спектрах звичайних В-сплайнів та ермітових [314,339]. Це дозволяє дещо інакше поглянути, як на сплайн-інтерполяцію, так і на синтез цифрових інтерполяційних фільтрів.

Задача інтерполяції є лише першим і найбільш дослідженим етапом у наближенні сплайнами. Значно цікавіші питання середньоквадратичного наближення та згладжування сплайнами [43,108,163,164]. Традиційними є два підходи. Розв'язок задачі середньоквадратичного наближення методом найменших квадратів одночасно з побудовою глобального інтерполяційного сплайна, або побудова згладжуючого сплайна, що мінімізує

$$\lambda \sum_{i=1}^N (y_i - S(x_i))^2 + (1 - \lambda) \int_a^b (S^{(m)}(x))^2 dx, \text{ де } \lambda = [0,1]. \quad (3.1)$$

Обидва способи є малоприматними для алгоритмів реального часу, зважаючи на громіздкість розрахунків. Інший підхід, що започаткований Шутко М.О. [164,224] полягає у використанні ермітових локальних сплайнів. Це дозволяє користуватися традиційним методом найменших квадратів [121,130,152,190,211,213]. Дана робота є продовженням останнього напрямку. В підрозділі 3.3 розглянемо деякі аспекти наближення сплайнами з допомогою методу найменших квадратів. Зокрема дослідимо властивості матриці планування та матриць системи нормальних рівнянь.

Враховуючи особливий інтерес у даній роботі до методів реального часу в підрозділі 3.4 розглянемо необмежені сплайни, тобто сплайни з необмеженим числом фрагментів однієї довжини. Значний досвід практичних розрахунків дозволив виявити автору специфічні особливості матриць методу найменших квадратів для сплайнів із великим числом фрагментів. Враховуючи специфічну форму матриці планування та матриць системи нормальних рівнянь ставиться задача розробити алгоритм розрахунку вказаних матриць та побудови сплайна.

Розроблені в попередньому підрозділі алгоритми розрахунку матриць необмеженої розмірності для сплайнів із регулярними сітками вузлів та даних дозволяють виконати узагальнене перетворення Фур'є у сплайнових базисах. З точки зору розрахунків таке перетворення ідентичне методу найменших квадратів. Хоча МНК із сплайновими базисами нас цікавитиме і з статистичного погляду, в даному розділі обмежимося його формальною, розрахунковою стороною. В підрозділі 3.5 розглянемо дискретне та інтегральне перетворення Фур'є в різних сплайнових базисах. В підрозділі 3.6 дослідимо питання якості алгоритмів наближення сплайнами.

3.2 Аналогії між математичним та технічним поняттями інтерполяції

Математичне поняття інтерполяції є загальновідомим [142,155]. Ставиться задача за відомими значеннями деякої функції $f(x)$ в окремих точках знайти проміжні значення. При цьому використовується інша, інтерполяційна функція $g(x)$, значення якої повинні співпадати із значеннями $f(x)$ у вузлах інтерполяції $g(x_i) = f_i, i = \overline{1, R}$. Інтерполяційна функція $g(x)$ має бути досить простою і зручною в розрахунках. В переважній більшості - це поліном виду

$$g(x) = \sum_{j=0}^{R-1} a_j \varphi_j(x).$$

Тоді задача зводиться до знаходження числових параметрів a_j

із системи інтерполяційних рівнянь:

$$\sum_{j=0}^{R-1} a_j \varphi_j(x_i) = f_i, \quad i = \overline{1, R}. \quad (3.2)$$

Питання точності наближення $g(x)$ до $f(x)$ між вузлами детально розглядається в курсі математичного аналізу, виходячи з диференційних властивостей обох функцій [199,255]. Таким чином оцінити нев'язку інтерполяції можна лише настільки, наскільки відомі диференційні властивості $f(x)$ та $g(x)$. Проблеми класичної інтерполяції загальновідомі, як і переваги сплайнів [163].

Технічне поняття інтерполяції стосується області цифрової обробки й передачі даних і під ним розуміють збільшення частоти дискретизації при виконанні певних умов, стосовно спектрів вхідного та інтерпольованого сигналів. Технічно інтерполяцію даних виконують із допомогою цифрових фільтрів. В загальному випадку такі фільтри включають експандер частоти та формуючий фільтр (рис.3.1) [301].

Експандер доповнює вхідну послідовність $\mathbf{X}^*(nt)$ із періодом T нулями до вихідної частоти (у m раз більшої):

$$\mathbf{X}^*(nt) = \{x(T \cdot n/m), n=0, m, 2m, \dots; 0, n \neq 0, m, 2m, \dots\}. \quad (3.3)$$

Спектри $\mathbf{X}(Z^m)$ - до експандера та $\mathbf{X}^*(Z)$ - після експандера однакові і періодичні з частотою дискретизації вхідної послідовності ($Z = e^{iwT}$).

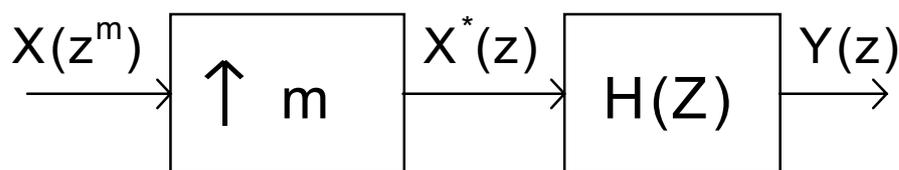


Рисунок 3.1. Узагальнена схема цифрового інтерполятора

Формуючий фільтр, із передаточною характеристикою $\mathbf{H}(Z)$, повинен затримати зайві копії корисного сигналу так, щоб спектр вихідного сигналу мав у m раз більший період: $\mathbf{Y}(Z) = \mathbf{X}^*(Z)\mathbf{H}(Z)$. Коли важливо не спотворити форму вхідного сигналу використовують нерекурсивні лінійні фільтри. Тоді сигнал на виході фільтра рівнятиметься

$$y(nT) = \sum_{j=0}^n h_j x^*(nT - jT), \quad (3.4)$$

де h_j -відліки імпульсної характеристики нерекурсивного цифрового фільтра з передаточною функцією $\mathbf{H}(Z)$.

Інтерполятор можна представити у вигляді поліфазного фільтра, який складається з

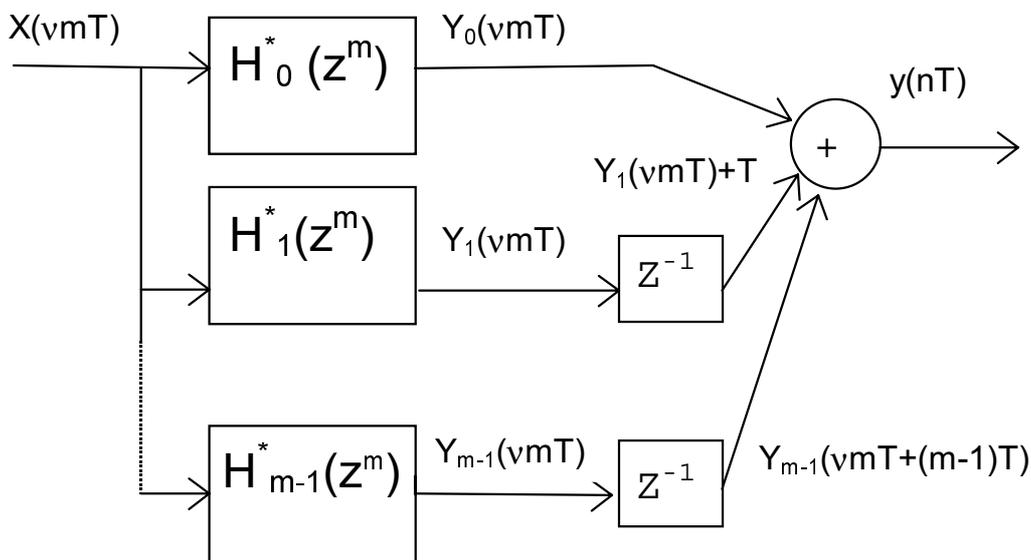


Рисунок 3.2. Поліфазна структура інтерполятора

m паралельних гілок. В кожній з гілок знаходиться цифровий фільтр, що має передаточну характеристику

$$H_k^*(z^m) = z^k \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} H(z e^{i \frac{2\pi j}{m}}) e^{i \frac{2\pi j k}{m}}, \quad (3.5)$$

а відліки імпульсної характеристики є відліками загальної, взяті зі зміщенням

$$h_{k,j}^* = h_{k+jm}, \quad k = 0, m-1; \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Сума імпульсних характеристик фільтрів у гілках поліфазної структури складають загальну імпульсну характеристику фільтра [301].

Тоді можемо записати

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{m-1} g_k \sum_{j=0}^v h_{k+jm} x((v-j)mT), \quad (3.7)$$

де $v = \text{int}(n/m)$,

$g_k = 1$ при $k=n(\text{mod } m)$, а в іншому випадку $g_k = 0$.

З останнього слідує, що базис такої інтерполяції є локальним. Форма вихідного сигналу повністю визначатиметься формуючим фільтром (h_k -відліки імпульсної характеристики фільтра).

Поглянемо на інтерполяцію сплайнами. Значення сплайна в лагранжівій формі в загальному випадку розраховується за формулою:

$$S(nT) = \sum_v x(v) F_v(nT, m), \quad (3.8)$$

де $F_v(t, m)$ - v -та функція форми.

З врахуванням локальності функції форми та регулярності сітки даних маємо наступні вирази:

$$y(nT) = h_k x(vmT) + h_{k+m} x((v-1)mT) + h_{k+2m} x((v-2)mT) + h_{k+3m} x((v-3)mT),$$

де h_i - відліки функції форми, рівні:

$$h_i = \begin{cases} i = \overline{1, m} & , h_{1_k}; \\ i = \overline{m+1, 2m} & , h_{2_k}; \\ i = \overline{2m+1, 3m} & , h_{3_k}; \\ i = \overline{3m+1, 4m} & , h_{4_k}; \end{cases} \quad \text{де } k=i(\text{mod } m), \quad (3.9)$$

Отже, маємо аналогічну, поліфазну структуру з m гілок, в кожній з яких присутній нерекурсивний цифровий фільтр з імпульсною характеристикою, що є відліками базисної функції. За умови, що базисний сплайн складається з чотирьох фрагментів, порядок кожного фільтра не перевищуватиме чотирьох.

Таким чином між інтерполяційним фільтром та математичною процедурою сплайн-інтерполяції виявляється аналогія.

З технічної точки зору локальний базисний сплайн є імпульсною характеристикою нерекурсивного цифрового інтерполяційного фільтра.

З точки зору математичної, враховуючи особливості синтезу нерекурсивних фільтрів, імпульсну характеристику фільтра можна вважати локальним сплайновим базисом.

Можна заперечити, що таке твердження не зовсім обґрунтоване з огляду на фрагментарний характер сплайнового базису. Однак завжди можна представити фільтр із заданою імпульсною характеристикою через каскадне включення двох фільтрів. В цьому випадку фрагментарний характер імпульсної характеристики буде очевидним. В аналогії між математичним та технічним представленням сплайн-інтерполяції нас цікавитиме погляд на інтерполяцію, як фільтрацію цифровим фільтром зі скінченою імпульсною характеристикою.

Під спектром сплайнового базису розумітимемо амплітудний спектр його довільної базисної функції. З огляду на властивості перетворення Фур'є спектр зміщених базисних сплайнів відрізнятиметься лише фазовим зміщенням і отже матиме однаковий амплітудний спектр. Тоді інтерполяція полягає у підборі відповідних множників для спектрів, що відрізняються фазовим зміщенням, таким чином, щоб виконувались умови інтерполяції. Це пояснює, чому при синтезі базисного сплайна має значення амплітудний або енергетичний спектр сигналу, а не повний.

Важливим підсумком аналогії є можливість представлення нев'язки інтерполяції через відмінність спектрів інтерпольованих даних та базису інтерполяції. В звичній для цифрової обробки даних термінах це буде нерівномірність амплітудно-частотної характеристики базисної функції в області ненульових значень спектра сигналу. В практиці цифрової обробки даних спектр вважають обмеженим, з певною верхньою частотою.

Однак такому спектру відповідають дані не обмежені в часі. Звичайно дані, що представляють інтерес є локалізованими в певній обмеженій часовій області. Спектр таких даних є необмеженим в частотній області. Спектр локальних базисних функцій також є необмеженим, що узгоджується з необмеженим спектром

даних. Тому критерій нерівномірності частотної характеристики в умовній області пропускання не є найкращим критерієм відповідності базису сигналу.

Поглянемо на це питання з точки зору класичної інтерполяції. Нев'язка наближення кубічним сплайном становить (1.1,1.2). Очевидно, що кубічний сплайн, який є лінійною комбінацією локальних В-сплайнів можна з нульовою невязкою наблизити аналогічним сплайном. В спектральній області інтерпольованим даним і інтерполяційному базису відповідатимуть ідентичні спектри. Отже невязка інтерполяції буде нульовою при рівності спектрів даних та інтерполяційної функції. Якщо розглядати лише амплітудні спектри, то при рівності спектрів амплітудні спектри також будуть рівні. Рівність амплітудних спектрів є необхідною умовою нульової невязки, але не достатньою, оскільки не враховуються фазові співвідношення. Встановлена аналогія між цифровою фільтрацією та математичним поняттям інтерполяції дозволяє отримати ряд практичних результатів.

Для певних сигналів виявляється можливим виконувати інтерполяцію В-сплайнами без розв'язування системи інтерполяційних рівнянь. Розглянемо інтерполяційну формулу

$$f(x) = \sum_i^N a_i B_{3,i}(x). \quad (3.10)$$

З точки зору фільтрації, вагові коефіцієнти a_i є вхідним потоком даних фільтра з імпульсною характеристикою, що є В-сплайном. Замінімо розраховані значення a_i на значення інтерпольованої функції у вузлах сплайна. Процедура інтерполяції буде задовільною за умови, що спектр вхідних даних лежить в області пропускання спектру базису. Для алгебраїчного В-сплайна легко отримати аналітичні вирази для спектра базису, оскільки В-сплайн можна отримати, як згортку прямокутних функцій. Задавши рівень нерівномірності в децибелах та нижній поріг спектру вхідного сигналу отримаємо значення допустимої верхньої частоти спектру вхідних даних, що допускає заміну коефіцієнтів при вагових функціях значеннями у вузлах інтерполяції, якщо положення вузлів інтерполяції та

сплайна співпадає.

Розглянемо приведення сплайнового базису до ермітового. Перевага ермітового базису в лагранжівій формі в тому, що вагові коефіцієнти є значеннями інтерпольованої функції у вузлах. З частотного погляду процедура приведення полягає у вирівнюванні вершини амплітудно-частотної характеристики базису. З іншого боку різницю між значеннями інтерпольованої функції у вузлах і розрахованими ваговими коефіцієнтами базисних функцій можна використати для аналізу відмінності спектрів даних та базису.

В інтерполяційних фільтрах a_i є значеннями відліків даних, що інтерполюються. Оскільки фільтр лінійний, зі скінченою імпульсною характеристикою, то вхідний сигнал зберігає форму. Фактично відбувається фільтрація вхідного сигналу ФНЧ з АЧХ [8]

$$A(\omega) = \left(\frac{\sin \pi m \omega}{\pi m \omega} \right)^4. \quad (3.11)$$

В результаті інтерполяції отримуємо кубічний сплайн з дефектом не більше одиниці. При побудові сплайна, як лінійної комбінації В-сплайнів необхідно розв'язувати систему лінійних рівнянь для визначення числових коефіцієнтів з (3.10). Такий підхід має певні труднощі з доповненням сплайна вузлами ліворуч та праворуч і інтерполяцією даних на значних відрізках. Проте в певних випадках можна обійтися без цієї процедури. Якщо розглянути інтерполяцію (3.10), як низькочастотну фільтрацію, то зрозуміло, що коефіцієнти a_i є вхідними значеннями фільтра. Отже можна безпосередньо рахувати вузлові значення інтерпольованої функції рівними a_i , якщо спотворення сигналу фільтром з АЧХ (3.11) є допустимим. Тобто інтерпольований сигнал повинен бути низькочастотним. На рис.3.3-3.5 показано, як відбувається апроксимація синусоїди з різним періодом відносно кроку вузлів інтерполяції Δ . При $\Delta=0.044\pi$ отримуємо інтерполяцію з достатньою точністю. При збільшенні Δ зростає похибка наближення, яка спочатку обумовлена зменшенням амплітуди ($\Delta=0.222\pi$). При наближенні Δ до π і далі сплайн не встигає за процесом. Коли Δ співпадає з періодом, відліки приймають

одинакові значення і сплайн стає рівний константі. Для $\Delta=1.33\pi$ результат є абсолютно незадовільним (має місце відомий ефект маскування частот).

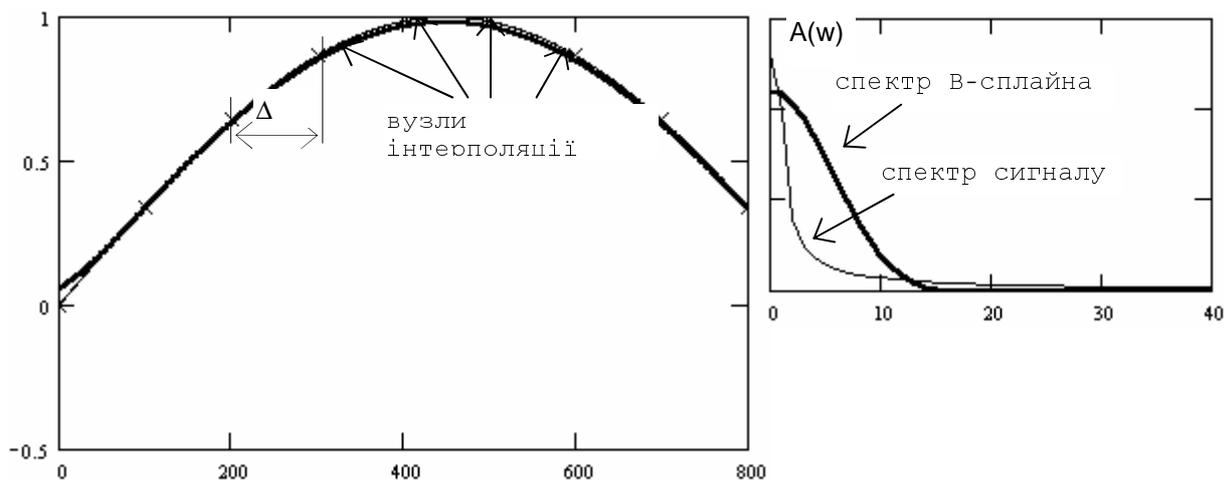


Рисунок 3.3 $\Delta=0.044\pi$

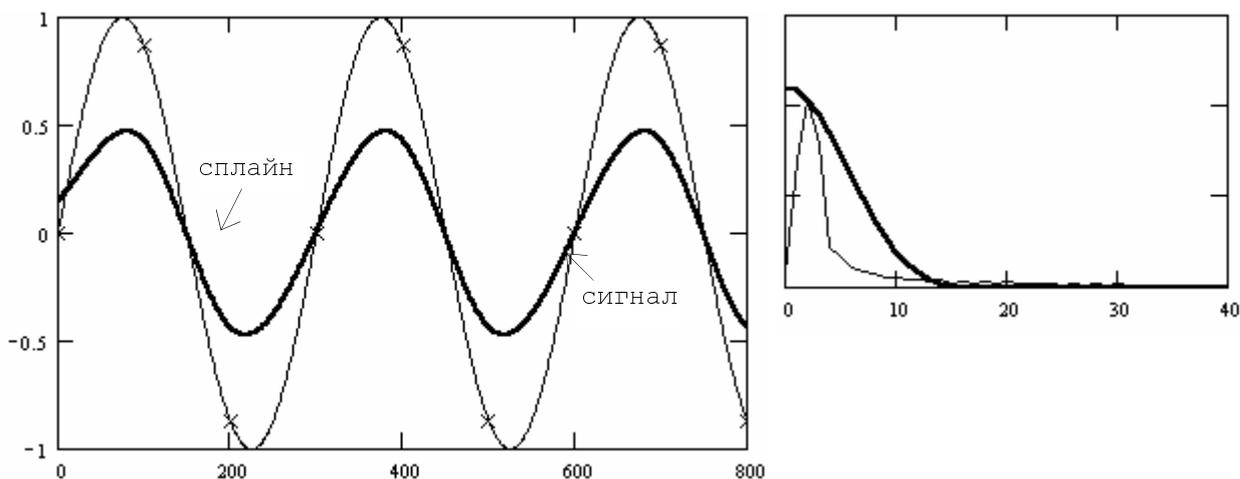


Рисунок 3.4 $\Delta=0.222\pi$

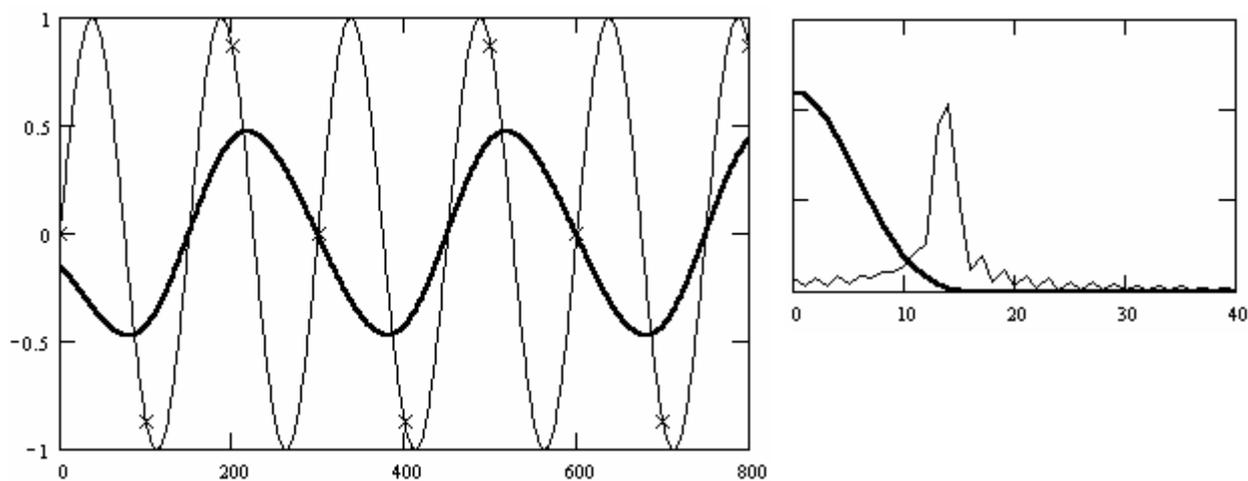


Рисунок 3.5 $\Delta=1.333\pi$

На рисунках, праворуч від зображень сигналів показані їх амплітудні спектри, отримані з допомогою дискретного перетворення Фур'є.

3.3 Особливості алгоритмів середньоквадратичного наближення в сплайнових базисах

Інтерполяція є найпростішим способом наближення, що застосовується в основному до сигналів, випадковою складовою в котрих можна знехтувати. Якщо мова йде про згладжування сигналів, або про статистичне оцінювання параметрів сигналів, то найбільш широко користуються методом середньоквадратичного наближення. В загальному випадку задачу середньоквадратичного наближення сигналів $y(t) = f(t) + \xi$, що містять корисну $f(t)$ та випадкову шумову ξ складові, для моделей $Q(t, A)$ з лінійною залежністю від вектора параметрів A , розв'язують з допомогою методу найменших квадратів (МНК). Корисна складова може бути як детермінованою так і стохастичною в залежності від конкретних особливостей прикладної задачі [130]. Достоїнством МНК є поєднання розв'язку задачі оптимального наближення детермінованих залежностей з оптимальними властивостями статистичного оцінювання, практично без зміни алгоритмів розрахунку. Теорія та практика МНК є добре розробленою, існує велика кількість варіантів алгоритмів відповідних розрахунків, включаючи рекурентні та реального часу [203,207,214,229]. Однією з найбільш актуальних проблем МНК є погана обумовленість системи нормальних рівнянь, що виникає при ускладненні моделі. Іншою проблемою є певне протиріччя між точністю наближення детермінованої складової і якістю статистичних оцінок параметрів моделі.

Оптимальність середньоквадратичного наближення безпосередньо впливає з розв'язку системи нормальних рівнянь. А саме, якщо маємо модель $Q(t, A)$, яка лінійно залежить від вектора параметрів A , то для точок спостережень $y(t_i)$ гарантується $\sum (y(t_i) - Q(t_i, A))^2 \rightarrow \min$.

Якщо $y(t_i)$ є відліками функції складної форми, то для якісного наближення модель $Q(t, A)$ доводиться ускладнювати (збільшувати порядок полінома), що пов'язано зі збільшенням розмірності вектора параметрів A .

Статистичні властивості МНК визначені в теоремі Гауса-Маркова [121].

За умови, що

$$Y = XA + \Xi, \quad (3.12)$$

де Y вектор спостережень; A вектор параметрів;

X детермінована матриця розмірності $n \times k$, що має максимальний ранг k (матриця планування);

Ξ випадкова складова з математичним сподіванням $M(\Xi) = 0$, та матрицею коваріацій $D(\Xi) = \sigma^2 I_n$.

Оцінка за МНК $\hat{A} = (X'X)^{-1} X'Y$ є найбільш ефективною (в смислі найменшої дисперсії) в класі лінійних незміщених оцінок.

В статистичному контексті матриця $\sigma^2 (X'X)^{-1}$ є матрицею коваріацій МНК оцінки. Діагональні елементи вказаної матриці характеризують дисперсію оцінки відповідних параметрів моделі. Достовірність оцінки параметрів характеризує довірчий інтервал, що визначається у випадку нормальності даних, як

$$\hat{a}_j \pm t_{\beta}(n-k) \sqrt{\frac{(Y - XA)'(Y - XA)g_{j,j}}{n-k}}, \quad (3.13)$$

де

$t_{\beta}(n-k)$ двохстороння $\beta * 100\%$ квантиль закону Стюдента з $n-k$ ступенями вільності;

$g_{j,j}$ діагональний елемент кореляційної матриці МНК $G = (X'X)^{-1}$.

Звідси очевидні негативні наслідки ускладнення моделі:

- зменшення ступенів вільності при оцінюванні параметрів моделі призводить до зростання квантиля $t_{\beta}(n-k)$;

- ускладнення моделі призводить до зростання діагональних елементів $g_{j,j}$ коваріаційної матриці.

Наслідком цього є погіршення достовірності оцінок.

З іншого боку зменшення ступенів вільності призводить до того, що модель наближує не лише детерміновану, але й випадкову складову відліків. Очевидним результатом цього є, як неточність наближення детермінованої складової $f(t)$, так і заниження оцінки дисперсії випадкової складової.

Надто проста модель, яка не здатна адекватно наблизити детерміновану складову $f(t)$ призводить до появи в залишках детермінованої складової (автокореляції). Це призводить до спотворення оцінок дисперсії оцінюваних параметрів. Таким чином, модель, що використовується в МНК має бути як можна простішою, але при цьому адекватно описувати детерміновану складову $f(t)$ представлену відліками. Для класичних поліноміальних моделей при складному вигляді детермінованої складової, або при обробці даних на значних фрагментах важко задовольнити вказані умови. Складний характер детермінованої складової вимагає ускладнення моделі (збільшення порядку полінома), це в свою чергу погіршує статистичні оцінки. Для покращання оцінок необхідно збільшити вибірку, що знову вимагає ускладнення моделі.

В таких ситуаціях віддають перевагу простим моделям (не вище третьої степені для алгебраїчних поліномів), обробляючи дані в обмеженому вікні, в рамках котрого модель здатна адекватно описати детерміновану складову.

МНК, що використовує сплайнову модель принципово не відрізняється від того, котрий застосовується для класичних моделей. Проте ряд особливостей сплайнових базисів дозволяє позбутися описаних вище проблем, та ефективно організувати обчислювальний процес. Ці особливості досліджені в роботах стосовно ермітових кубічних та лінійних сплайнів, проте не має принципових відмінностей при використанні інших ермітових сплайнів.

Розглянемо інтерполяційний сплайн, побудований на множині вузлів $T = \{t_{u_0}, \dots, t_{u_j}, \dots, t_{u_R}\}$. Знайдемо значення сплайна S на множині N точок $t = \{t_1, \dots, t_N\}$, причому $N \gg R$.

Запишемо систему рівнянь:

$$S(t_i) = \sum_{j=0}^R a_j \bar{X}(t_i) \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.14)$$

або в матричному вигляді :

$$\mathbf{S} = \mathbf{X} \mathbf{A},$$

$$\begin{bmatrix} S(t_1) \\ \dots \\ S(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} & \dots & x_{1R} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{N0} & \dots & x_{NR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_R \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

В даній системі рівнянь для нас важливе значення має матриця X , яку називають матрицею планування. Значення j -го стовпця є значеннями j -ї функції форми $\bar{x}_j(t)$ для $t = t_1 \dots t_N$. Внаслідок локальних властивостей функції форми матриця X є блочно-діагональною:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & G1_{j-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & G2_{j-1} & G1_j & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & G3_{j-1} & G2_j & G1_{j+1} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & G4_{j-1} & G3_j & G2_{j+1} & G1_{j+2} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & G4_j & G3_{j+1} & G2_{j+2} & G1_{j+3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

де $G1_j, G2_j, G3_j, G4_j$ матриці-стовпці, котрі складаються з відліків базису на відповідних суміжних фрагментах. Якщо зобразити ненульові елементи матриці планування точками, то вони матимуть характерний вигляд, що зображено на рис.3.6.

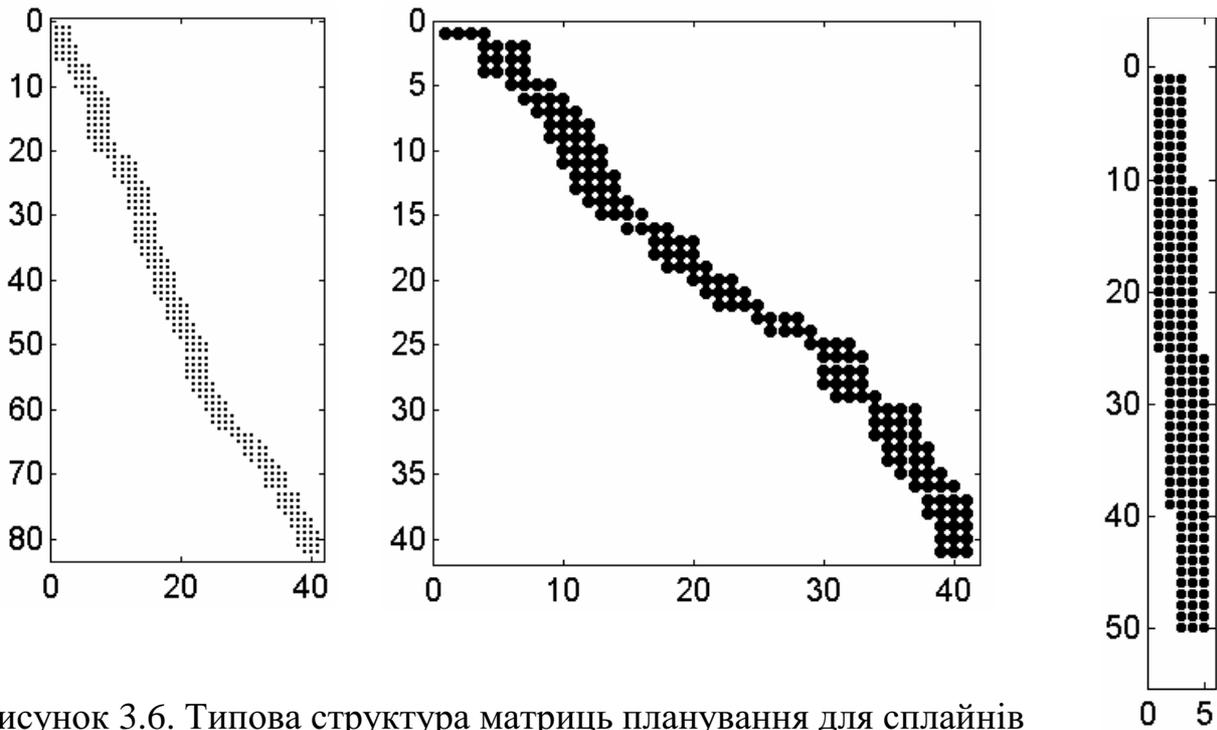


Рисунок 3.6. Типова структура матриць планування для сплайнів

Розглянемо особливості формування матриць в розв'язку системи нормальних рівнянь.

Матриця $C = X^T X$.

Наслідком локальності сплайнового базису є специфічна форма матриці C .

Ця матриця є симетричною, семидіагональною матрицею, значення елементів котрої визначаються згідно виразів:

$$\begin{aligned}
 c_{j,j} &= \sum_{t_i \in (tu_{j-1}, tu_j]} g1_j^2(t_i) + \sum_{t_i \in (tu_j, tu_{j+1}]} g2_j^2(t_i) + \sum_{t_i \in (tu_{j+1}, tu_{j+2}]} g3_j^2(t_i) + \sum_{t_i \in (tu_{j+2}, tu_{j+3}]} g4_j^2(t_i), \\
 c_{j,j+1} &= \sum_{t_i \in (tu_j, tu_{j+1}]} g1_{j+1}(t_i)g2_j(t_i) + \sum_{t_i \in (tu_{j+1}, tu_{j+2}]} g2_{j+1}(t_i)g3_j(t_i) + \sum_{t_i \in (tu_{j+2}, tu_{j+3}]} g3_{j+1}(t_i)g4_j(t_i) \\
 c_{j,j+2} &= \sum_{t_i \in (tu_{j+1}, tu_{j+2}]} g1_{j+2}(t_i)g3_j(t_i) + \sum_{t_i \in (tu_{j+2}, tu_{j+3}]} g2_{j+1}(t_i)g4_j(t_i), \\
 c_{j,j+3} &= \sum_{t_i \in (tu_{j+2}, tu_{j+3}]} g1_{j+3}(t_i)g4_j(t_i), \\
 c_{j,j+1} &= c_{j+1,j}, \quad c_{j,j+2} = c_{j+2,j}, \quad c_{j,j+3} = c_{j+3,j}, \\
 c_{j,j+k} &= c_{j+k,j} = 0, \quad k > 3.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Функції $g1_j(t), g2_j(t), g3_j(t), g4_j(t)$ є складовими відповідних базисних сплайнів G_j , що складаються з чотирьох фрагментів

$$G_j(t) = \begin{cases} g1_j(t), & t \in (tu_{j-1}, tu_j] \\ g2_j(t), & t \in (tu_j, tu_{j+1}] \\ g3_j(t), & t \in (tu_{j+1}, tu_{j+2}] \\ g4_j(t), & t \in (tu_{j+2}, tu_{j+3}] \end{cases} \quad (3.18)$$

Наведені вирази не враховують крайових умов, наслідки яких є очевидними. Для крайніх елементів будуть відсутні відповідні суми, а складові базисів для крайніх фрагментів розраховуватимуться з врахуванням цієї специфіки (див. розділ 2.3).

Для того, щоб матриця C мала інверсну до матриці планування X висуваються наступні вимоги:

1. Якщо є чотири, або більше суміжних інтервалів (виключаючи крайні), котрі не містять точок спостережень, то C вироджена.
2. Якщо є три, або більше суміжних інтервали з лівого, або правого краю сплайна без точок спостережень, то C вироджена.

Вузли сплайна та дані спостережень повинні розташовуватись таким чином, щоб уникнути ситуації, коли на трьох або більше сусідніх фрагментах сплайна були відсутні точки спостережень.

Інша особливість матриці C відрізняє її від аналогічних для класичних моделей. Збільшення числа параметрів (вузлів сплайна) не впливає суттєво на норму матриці. Це є наслідком того, що збільшення числа оцінюваних параметрів призводить до збільшення кількості блоків у матриці планування X . Елементи матриці планування для ермітового сплайна залишаються одного порядку (як точки сплайнового базису) у межах абсолютного значення одного порядку.

Оскільки зміни норми матриці C є незначними, та враховуючи хорошу початкову обумовленість системи рівнянь слід очікувати дуже незначної зміни в обумовленості розширеної системи рівнянь. Такий висновок підтверджується емпірично численними прикладами розрахунків. Аналітично довести це

твердження у загальному випадку автору не вдалося. Питання обумовленості для конкретного випадку рівномірної сітки даних розглядатимуться в розділі 4.

Проте варто особливо підкреслити, що проблеми, зв'язані з поганою обумовленістю рівнянь МНК для сплайнових моделей на практиці відсутні, а число обумовленості є порядку не вище сотень. Нижче показано число обумовленості $\text{cond}(C)$ для ермітових кубічних сплайнів із різним числом вузлів R :

Таблиця 3.1. Число обумовленості матриці планування.

| | | | |
|------------------|---------------|---------------|---------------|
| R | 5 | 20 | 25 |
| $\text{cond}(C)$ | 1.9691 | 1.8547 | 1.8300 |

Розглянемо матрицю C з точки зору цифрової обробки даних. Легко помітити, що значення елементів матриці мають зміст взаємної енергії базисних функцій. Таке наближення буде досить точним при значній кількості точок даних, та рівномірній сітці даних. Граничний перехід при необмеженій кількості даних дасть наступні вирази:

$$c_{i,j} = \sum_k G_i(t_k)G_j(t_k), \quad (3.19)$$

у загальному випадку, звідки

$$\lim_{t_{k+1}-t_k \rightarrow 0} c_{i,j} = \int_{-\infty}^{\infty} G_i(t)G_j(t)dt. \quad (3.20)$$

Внаслідок локальності базисних функцій значення матриці характеризуватимуть взаємну енергію базисних функцій не на фрагменті, а по всій області значень базисів. Очевидно, що діагональні елементи матриці C відповідають нормам $\|\cdot\|_2$ відповідних базисів. Незмінністю виду базисних функцій (за винятком зміщення та масштабування) пояснюється хороша обумовленість матриці C .

Окремої уваги заслуговує вектор $\mathbf{V}=\mathbf{X}\mathbf{Y}$ із системи рівнянь МНК. Наслідком локальності сплайнових базисів, є локальна залежність елементів вектора \mathbf{V} від вхідних даних. Елементи вектора \mathbf{V} визначаються згідно виразів:

$$\begin{aligned}
b_j = & \sum_{t_i \in (tu_{j-1}, tu_j]} g1_j(t_i)y_i + \sum_{t_i \in (tu_j, tu_{j+1}]} g2_j(t_i)y_i + \\
& + \sum_{t_i \in (tu_{j+1}, tu_{j+2}]} g3_j(t_i)y_i + \sum_{t_i \in (tu_{j+2}, tu_{j+3}]} g4_j(t_i)y_i
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Легко помітити, що елементи матриці \mathbf{B} мають зміст взаємної енергії базису та функції даних:

$$b_j = \sum_{k=0}^N G_j(t_k)y_k . \tag{3.22}$$

Якщо вважати сітку вузлів рівномірною, то можна вважати вектор \mathbf{B} лінійною згорткою вхідних даних із відповідними базисними функціями:

$$b_j = \sum_{k=0}^n B_0(t_k - jh)y_k , \tag{3.23}$$

де $B_0(t)$ “еталонна” базисна функція з нульовим зміщенням (див.2.3),

h - крок сітки вузлів.

$$\lim_{(t_{k+1}-t_k) \rightarrow 0} b_j = \int_{-\infty}^{\infty} G_j(t)y(t)dt \tag{3.24}$$

Фактично, елементи вектора можна розглядати, як результат фільтрації вхідних даних нерекурсивним лінійним фільтром із коефіцієнтами, що є відліками відповідних базисних сплайнів. З теорії оптимальної фільтрації узгодженими фільтрами відомо, що максимальне значення елементів \mathbf{B} отримаємо при вхідному сигналові, що є дзеркальним відображенням базису [287,293].

Оцінки параметрів сплайнової моделі за МНК знаходять згідно виразу:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}.$$

Для коваріаційної матриці $\mathbf{V} = \sigma^2\mathbf{C}^{-1}$ сплайнової моделі характерним є чітке діагональне переважання, що є наслідком локальності базисних функцій. Зважаючи на те, що базисний сплайн приймає ненульові значення лише на чотирьох інтервалах, слід очікувати значиму кореляцію між вузлами не далі дев'яти параметрів (вузлів сплайна). Практично малозначимими є вже елементи, що

відстоять далі чотирьох від головної діагоналі. Отже з достатньою для практики точністю можна записати:

$$a_j = d_{j,j} b_j + \sum_{i=1}^4 d_{j,j+i} (b_{j-i} + b_{j+i}), \quad (3.26)$$

де $d_{i,j}$ елемент матриці \mathbf{C}^{-1} .

Такий підхід до МНК дозволяє побудувати узагальнену схему отримання МНК оцінки параметра сплайна (значення сплайна у заданому вузлі), як послідовність лінійних фільтрів.

Розглянемо вектор прогнозних значень сплайнової моделі

$$\mathbf{S} = \mathbf{X}\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y} = \mathbf{L}\mathbf{Y}. \quad (3.27)$$

Матриця $\mathbf{L} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'$ є матрицею оператора ортогонального проектування на підпростір η , породжений сплайновими базисами. З точки зору цифрової обробки даних рядки матриці \mathbf{L} є імпульсними характеристиками нерекурсивних цифрових фільтрів нижніх частот. МНК оцінку в точці можна отримати, як результат лінійної фільтрації нерекурсивним цифровим фільтром. Така схема відповідає максимальній швидкості, але й максимальним схемним затратам.

Залишки $e = \mathbf{Y} - \mathbf{S}$ отримаємо аналогічно попередньому з допомогою матриці $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{L}$ - оператора ортогонального проектування на η^\perp - ортогональне доповнення до підпростору η в R^n . Рядки матриці \mathbf{M} також можна розглядати, як коефіцієнти нерекурсивного фільтра верхніх частот, ортогонального до попереднього. Матриці \mathbf{L} та \mathbf{M} ідемпотентні, із властивостями:

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{L}, \quad \mathbf{L}' = \mathbf{L}, \quad \mathbf{L}\mathbf{X} = \mathbf{X}, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}, \quad \mathbf{M}' = \mathbf{M}, \quad \mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{0},$$

На властивостях перетворень:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{L}\mathbf{Y}, \\ e &= \mathbf{M}\mathbf{Y}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$Y = e + S,$$

ґрунтуються wavelet методи обробки даних. Проте в wavelet методах мова йде про інтерполяційні схеми з різноманітними локальними базисами. В даній роботі будуть розглянуті подібні wavelet методам схеми, але в контексті апроксимації за МНК із сплайновими моделями.

Стосовно сплайнових моделей варто особливо підкреслити, що мова йде про довільну (але фіксовану) схему розміщення вузлів та точок спостережень, яка допускає елементарну апаратну реалізацію та роботу в реальному часі.

Викладене вище також дозволяє об'єднати два підходи до середньоквадратичного наближення. З точки зору класичного математичного аналізу й інженерного підходу, котрий ґрунтується на спектральному представленні даних та систем обробки.

3.4 Алгоритми розрахунку необмежених сплайнів

Класичне визначення дає сплайн $S(t)$, як функцію, задану на деякому обмеженому відрізку $[a, b]$, котрий розбито фіксованою системою з $R+1$ точок на R фрагментів: $\Delta_R[a, b]: a = t_0 < t_1 < \dots < t_R = b$ [82].

Однак застосування такої моделі для оптимальної (у середньоквадратичному розумінні) фільтрації даних обмежене, оскільки інформаційні потоки є необмеженими в часі: $f(x_i), -\infty < x_i < \infty$. Якщо просто використати вікно $[a, b]$, то не гарантуватиметься гладкість результату. Вихід полягає у застосуванні локальних сплайнів із регулярними сітками вузлів $h = t_{j+1} - t_j$ та даних $\alpha = x_{i+1} - x_i$. При побудові таких сплайнів використовується інформація малої частини даних на кожному фрагменті. В результаті кореляційна матриця методу найменших квадратів має мале число значимих діагоналей і апертура вікна приймається трохи більшою за інтервал кореляції. Тому у практичних розрахунках коефіцієнтів сплайн-фільтрів необмежене число R приймають достатньо великим

($R > 30$). Проте працювати з матрицями значних розмірів незручно і практично неможливо отримати аналітичне рішення.

Якщо сітка вузлів сплайна регулярна і на кожному з фрагментів сплайна N дані розміщені однаково чиним $\beta_i = t_j - x_i$, $i = \overline{1, N}$, то такий сплайн із необмеженим числом вузлів $R \rightarrow \infty$ повністю описується одним фрагментом. Покажемо що це так. Для локального сплайна значення в довільній i -й точці регулярної сітки даних дорівнює :

$$S(x_i) = A_{j-1}\varphi_{j-1}(x_i) + A_j\varphi_j(x_i) + A_{j+1}\varphi_{j+1}(x_i) + A_{j+2}\varphi_{j+2}(x_i), \quad (3.30)$$

де A_j - значення сплайна в j -му вузлі ;

φ_i - локальна функція форми.

Врахувавши характер функції форми, запишемо:

$$S_i = A_{j-1}g1_i + A_j g2_i + A_{j+1}g3_i + A_{j+2}g4_i, \quad (3.31)$$

Тоді для N точок, що належать одному фрагменту, можна записати систему з N лінійних рівнянь $\mathbf{S} = \mathbf{GA}$,

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g1_1 & g2_1 & g3_1 & g4_1 \\ g1_2 & g2_2 & g3_2 & g4_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g1_N & g2_N & g3_N & g4_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j-1} \\ A_j \\ A_{j+1} \\ A_{j+2} \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Для необмеженого числа фрагментів матриця \mathbf{G} буде блочно-діагональною і складатиметься з однакових ненульових блоків для фрагментів. Таку матрицю з необмеженими розмірами позначимо $\vec{\mathbf{G}}$, а також аналогічно $\vec{\mathbf{S}}, \vec{\mathbf{A}}$.

Щоб отримати оцінки сплайна у вузлах за методом найменших квадратів по необмеженій кількості даних $\vec{\mathbf{F}}$ запишемо систему нормальних рівнянь:

$$\vec{\mathbf{G}}'\vec{\mathbf{G}}\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{G}}'\vec{\mathbf{F}}, \quad (3.33)$$

або, позначивши інакше $\vec{\mathbf{C}}\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$.

Матриця $\vec{\mathbf{C}}$ симетрична семидіагональна матриця, яка повністю визначається чотирма ненульовими елементами довільного рядка:

$$c_{j,j}, c_{j,j+1} = c_{j+1,j}, c_{j,j+2} = c_{j+2,j}, c_{j,j+3} = c_{j+3,j}. \quad (3.34)$$

Позначимо ці елементи відповідно як c_0, c_1, c_2, c_3 , що рівняються

$$\begin{aligned} c_0 &= \sum_{i=1}^N (g1_i^2 + g2_i^2 + g3_i^2 + g4_i^2), \\ c_1 &= \sum_{i=1}^N (g1_i g2_i + g2_i g3_i + g3_i g4_i), \\ c_2 &= \sum_{i=1}^N (g1_i g3_i + g2_i g4_i), \\ c_3 &= \sum_{i=1}^N g1_i g4_i. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Елементи матриці $\vec{\mathbf{B}}$ в силу локальності функцій форми розраховуються за формулою:

$$b_j = \sum_{i=1}^N (g1_i f_{i-N} + g2_i f_i + g3_i f_{i+N} + g4_i f_{i+2N}). \quad (3.36)$$

Порівнявши з відповідними виразами з попереднього підрозділу зауважимо відсутність індексу по номеру базисної функції. Це є наслідком рівномірності сітки вузлів та даних. На всіх фрагментах відповідні відліки базисних функцій мають однакові значення, тому індекс можна опустити.

Розв'язанням системи є $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{C}}^{-1} \vec{\mathbf{B}}$. Отже проблема полягає у знаходженні інверсної матриці, яка є кореляційною матрицею похибок оцінки параметрів і за структурою - симетричною з діагональним переважанням. Така структура є наслідком локальності базисних функцій. З обмеженою точністю її можна вважати діагональною із шириною діагоналі $2m+1$. Позначимо цю наближену до $\vec{\mathbf{C}}^{-1}$ матрицю як $\vec{\mathbf{D}}$.

Остання повністю визначатиметься $m+1$ елементами $d_0, d_1, \dots, d_{m-1}, d_m$ довільного рядка (аналогічно елементам c_0, c_1, c_2, c_3). Запишемо систему рівнянь $\vec{CD} = \vec{E}$, де \vec{E} одинична матриця необмеженої розмірності:

$$\begin{array}{|cccccccc|} \hline \dots & \dots \\ \hline \dots & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \dots & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ \hline \dots & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ \hline \dots & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline \dots & 0 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 \\ \hline \dots & 0 & 0 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 \\ \hline \dots & 0 & 0 & 0 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ \hline \dots & \dots \\ \hline \end{array} = \vec{E} \quad (3.37)$$

Звідси слідує система з m рівнянь, із допомогою котрої можна знайти невідомі значення $d_0, d_1, \dots, d_{m-1}, d_m$:

$$\begin{array}{|cccccccc|} \hline c_0 & 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline c_1 & c_0 + c_2 & c_1 + c_3 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline c_2 & c_1 + c_3 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ \hline c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ \hline 0 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline 0 & 0 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline d_0 \\ \hline d_1 \\ \hline d_2 \\ \hline d_3 \\ \hline d_4 \\ \hline d_5 \\ \hline \dots \\ \hline d_m \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline \dots \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad (3.38)$$

Якщо прийняти $m=3$, то матимемо аналітичне рішення

$$\begin{aligned}
 d_0 &= (c_0^3 + c_0^2 c_2 - 2c_0 c_1^2 - 2c_0 c_1 c_3 - c_0 c_2^2 - c_0 c_3^2 + c_1^2 c_2 + 2c_1 c_2 c_3) / Q, \\
 d_1 &= -(c_0^2 c_1 - c_0 c_1 c_2 - 2c_0 c_2 c_3 - c_1^3 + c_1^2 c_3 + c_1 c_2^2 + c_1 c_3^2) / Q, \\
 d_2 &= -(c_0^2 c_2 - c_0 c_1^2 - 2c_0 c_1 c_3 - c_2^3 + c_0 c_2^2 + c_1^2 c_2 + c_2 c_3^2) / Q, \\
 d_3 &= -(c_0^2 c_3 - 2c_0 c_1 c_2 + c_0 c_2 c_3 + c_1^3 - 2c_1 c_3^2 + c_2^2 c_3 - c_3^3) / Q,
 \end{aligned} \quad (3.39)$$

де

$$Q = c_0^4 + c_0^3 c_2 - 4c_0^2 c_1^2 - 2c_0^2 c_1 c_3 - 3c_0^2 c_2^2 - 3c_0^2 c_3^2 + 5c_0 c_1^2 c_2 + 14c_0 c_1 c_2 c_3 - 2c_0 c_2^3 - 2c_0 c_2 c_3^2 + 2c_1^4 - 4c_1^3 c_3 - 4c_1^2 c_2^2 - 2c_1^2 c_3^2 + 4c_1 c_3^3 + 2c_2^4 - 4c_2^2 c_3^2 + 2c_3^4.$$

Приймати $m < 3$ недоцільно з огляду на структуру системи.

Вияснимо похибку наближеного розрахунку інверсної матриці. Якщо матриця $\tilde{\mathbf{D}}$ є інверсною до, $\tilde{\mathbf{C}}$ то мають виконуватись наступні співвідношення: $e_{j,j} = 1$ для довільного діагонального елемента, $e_{j,i} = 0, j \neq i$ для інших елементів.

З розв'язку системи рівнянь (3.38) слідує, що

$$c_3 d_3 + c_2 d_2 + c_1 d_1 + c_0 d_0 + c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 = 1, \quad (3.40)$$

$$c_3 d_2 + c_2 d_1 + c_1 d_0 + c_0 d_1 + c_1 d_2 + c_2 d_3 + c_3 d_4 = 0,$$

...

$$c_3 d_{m-3} + c_2 d_{m-2} + c_1 d_{m-1} + c_0 d_m = 0.$$

Для конкретного випадку $m=3$ у цьому легко переконатись, виконавши відповідні підстановки та перетворення.

Отримання елементів довільного рядка $\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{D}}$, починаючи з діагонального, при перемноженні матриць можна схематично представити наступним чином:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & d_m & d_{m-1} & \dots & d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \dots & d_{m-1} & d_m & 0 & \dots \\ \leftarrow i \end{array}$$

Рисунок 3.7. Схема перемноження елементів матриць

Тут елементи, котрі стоять по вертикалі - перемножуються і добутки додаються. Індекс "і" відповідає номеру елемента від діагоналі. На схемі показана ситуація розрахунку діагонального елемента ($i=0$). Для зображення ситуації при розрахунку елементів, зміщених на i від діагоналі ($e_{j,j+i} = e_{j+i,j}$) потрібно змістити другий рядок ліворуч на i елементів. Розглянемо елементи матриці $\tilde{\mathbf{E}}$,

отриманої добутком $\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{D}}$, де елементи матриці $\tilde{\mathbf{D}}$ знаходяться згідно розв'язку системи (3.37). Діагональний елемент, $e_{j,j}$ рівний одиниці, згідно розв'язку системи рівнянь (3.38). Елементи по дві сторони від діагоналі, до m включно, рівні нулю також згідно рівнянь (3.38).

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & d_m & d_{m-1} & \dots & d_{m-3} & d_{m-2} & d_{m-1} & d_m & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \leftarrow i = m \end{array}$$

Рисунок 3.8. Схема формування нульових елементів матриці $\tilde{\mathbf{E}}$

На рис.3.8 показана ситуація для $i=m$.

Рівність нулю інших елементів не впливає з рівнянь (3.38). Проте лише три з них можуть приймати ненульові значення. Це зрозуміло зі схеми рис.3.9.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & d_m & \dots & d_{m-3} & d_{m-2} & d_{m-1} & d_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \leftarrow i = m + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & d_m & \dots & d_{m-2} & d_{m-1} & d_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \leftarrow i = m + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & d_m & \dots & d_{m-1} & d_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \leftarrow i = m + 3 \end{array}$$

Рисунок 3.9. Схема формування ненульових елементів матриці $\tilde{\mathbf{E}}$

Таким чином отримана матриця $\tilde{\mathbf{E}}$ відрізнятиметься від одиничної лише трьома смугами елементів (незалежно від m)

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
 \dots & \dots \\
 \dots & e_0 & 0 & \dots & e_{m+1} & e_{m+2} & e_{m+3} & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & e_0 & 0 & \dots & e_{m+1} & e_{m+2} & e_{m+3} & \dots \\
 \dots & \dots & 0 & e_0 & 0 & \dots & e_{m+1} & e_{m+2} & \dots \\
 \dots & e_{m+1} & \dots & 0 & e_0 & 0 & \dots & e_{m+1} & \dots \\
 \dots & e_{m+2} & e_{m+1} & \dots & 0 & e_0 & 0 & \dots & \dots \\
 \dots & e_{m+3} & e_{m+2} & e_{m+1} & \dots & 0 & e_0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & e_{m+3} & e_{m+2} & e_{m+1} & \dots & 0 & e_0 & \dots \\
 \dots & \dots
 \end{array} \right], \quad (3.41)$$

де

$$e_{m+1} = c_3 d_{m-2} + c_2 d_{m-1} + c_1 d_m, \quad (3.42)$$

$$e_{m+2} = c_3 d_{m-1} + c_2 d_m,$$

$$e_{m+3} = c_3 d_m.$$

Тобто, точність наближеного розрахунку суттєвим чином залежить від того наскільки швидко зменшуються значення елементів c_0, c_1, c_2, c_3 із віддаленням від головної діагоналі. Чисельні розрахунки показали недостатнє їх зменшення для сплайнових базисів, отриманих способом показаним у розділі 2.3 (згорткою з прямокутним вікном). Для базисів із двома неперервними похідними, та отриманими з них приведенням до лагранжової форми (розділи 2.4-2.6) запропонований підхід дає хороші результати. Із зростанням m похибка швидко зменшується.

Розглянемо наслідки наближеного визначення інверсної матриці при розв'язанні лінійних рівнянь. Нехай маємо деяку систему лінійних рівнянь:

$$\mathbf{CA} = \mathbf{B}, \quad (3.43)$$

де \mathbf{A} - вектор невідомих коефіцієнтів,

\mathbf{B} - вектор значень,

\mathbf{C} - квадратна, симетрична, семидіагональна матриця коефіцієнтів.

Усі матриці вважатимемо достатньо великої (або необмеженої) розмірності й структури визначеної вище. Розв'язок знайдемо, помноживши обидві частини рівності на інверсну матрицю:

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{CA} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}. \quad (3.44)$$

Отримаємо

$$\mathbf{IA} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}, \quad (3.45)$$

де \mathbf{I} - одинична матриця.

Для наближеної до інверсної матриці отримаємо систему рівнянь:

$$\mathbf{EA} = \mathbf{DB}, \quad (3.46)$$

де \mathbf{E} - матриця наближена до одиничної.

Однак розв'язком вважатимемо систему

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{DB}. \quad (3.47)$$

Різниця між елементами $\tilde{\mathbf{A}}$ та \mathbf{A} дорівнює (3.48)

$$\Delta_j = \tilde{a}_j - a_j = e_{j+m+1}(a_{j+m+1} + a_{j-m-1}) + e_{j+m+2}(a_{j+m+2} + a_{j-m-2}) + e_{j+m+3}(a_{j+m+3} + a_{j-m-3})$$

Задамо M - модуль максимально можливого значення елемента вектора \mathbf{A} .

Зауважимо, що максимальне значення на практиці легко визначити, виходячи з фізичного змісту даних, або умов технічної чи програмної реалізації розрахунків.

Тоді максимально можлива похибка становитиме не більше:

$$\max|\tilde{a}_j - a_j| = 2M(e_{j+m+1} + e_{j+m+2} + e_{j+m+3}), \quad (3.49)$$

або інакше

$$\max|\tilde{a}_j - a_j| = 2M[c_3(d_{m-2} \cdot d_{m-1} \cdot d_m) \cdot c_2(d_{m-1} \cdot d_m) \cdot c_1 d_m]. \quad (3.50)$$

Враховуючи структуру наведених вище матриць оцінку значення сплайна в довільному вузлі розраховуємо за формулою:

$$\tilde{a}_j = d_0 b_j + \sum_{i=1}^m d_i (b_{j-i} + b_{j+1}). \quad (3.51)$$

Розглянемо приклад розрахунку оцінок значень необмеженого кубічного ермітового сплайна на регулярній сітці вузлів з $N=4$.

$$\text{Отримаємо } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.0703 & 0.8672 & 0.2266 & -0.0234 \\ -0.0625 & 0.5625 & 0.5625 & -0.0625 \\ -0.0234 & 0.2266 & 0.8672 & -0.0703 \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

$$c_0 = 3.2583, \quad c_1 = 0.5065, \quad c_2 = -0.1428, \quad c_3 = 0.0072.$$

Тоді

| m | d ₀ | d ₁ | d ₂ | d ₃ | d ₄ | d ₅ | d ₆ |
|----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 3 | 0.3270 | -0.0575 | 0.0245 | -0.0071 | - | - | - |
| 4 | 0.3270 | -0.0576 | 0.0247 | -0.0074 | 0.0024 | - | - |
| 5 | 0.3270 | -0.0576 | 0.0247 | -0.0075 | 0.0025 | -0.0008 | - |
| 30 | 0.3270 | -0.0576 | 0.0247 | -0.0075 | 0.0025 | -0.0008 | 0.0003 |

Як бачимо, наближений розрахунок достатньо точний навіть при $m=3$.

Отже отримуємо вираз для розрахунку ($m=3$):

$$a_j = 0.327b_j - 0.057(b_{j-1} + b_{j+1}) + 0.024(b_{j-2} + b_{j+2}) - 0.007(b_{j-3} + b_{j+3}). \quad (3.53)$$

Похибка за рахунок наближеного визначення інверсної матриці становитиме не більше: $0.013 \cdot M$ ($m=3$), $0.0042 \cdot M$ ($m=4$), $0.0014 \cdot M$ ($m=5$). За M можна прийняти максимальне значення при 10 бітовому представленні чисел у випадку технічної реалізації. Тоді $M=1023$ і при $m=5$ отримаємо максимально можливу похибку в межах одного розряду.

Практично дуже просто визначити збіжність процедури наближеного визначення інверсної матриці. Якщо із зростанням m знайдені коефіцієнти змінюються мало (у молодших розрядах), то припущення про малозначимість елементів коваріаційної матриці з віддаленням від основної діагоналі коректне. Якщо базис є непридатним для наближеного визначення інверсної матриці, то зміна m призводить до суттєвих змін в уже визначених коефіцієнтах (для базисів розглянутих у підрозділі 2.3).

3.5 Перетворення Фур'є у сплайнових базисах

Отримані в попередньому підрозділі результати дозволяють розглянути середньоквадратичне наближення локальними сплайнами, як узагальнене перетворення Фур'є у сплайнових базисах.

Розглянемо сплайновий базис із підрозділу 2.4. Нехай $a+h=0$. Позначимо такий сплайн H_0 , а зміщені відносно H_0 пропорційно h сплайни відповідно $\dots, H_m, \dots, H_{-2}, H_{-1}, H_0, H_1, H_2, \dots, H_m, \dots$. Тобто $H_m(x) = H_0(x - mh)$.

Елементарні сплайни $\dots, H_{-m}, \dots, H_{-2}, H_{-1}, H_0, H_1, H_2, \dots, H_m, \dots$ є лінійно незалежні і складають систему лінійно незалежних базисних функцій $\{H_m\}$.

Лінійна незалежність для конкретних базисів легко перевіряється, оскільки функції H_m є копіями H_0 зміщеними пропорційно h по ординарній осі.

Розглянемо властивості базисних функцій $\{H_m\}$. Функції сімейства $\{H_m\}$ є локальними і звідси слідує ряд їх особливостей, котрі дозволяють організувати ефективні обчислення. Зауважимо, що у статтях такі базиси автор спочатку називав квазіортогональними (термін був використаний Хемінгом для позначення не зовсім ортогональних функцій, для яких достатньою умовою ортогональності було наближене до нуля значення $\int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) f_n(x) \approx 0$ [287]). Проте сплайнові базиси

суттєво відрізняються від ортогональних. Скалярні добутки сусідніх базисних функцій не можна вважати наближено рівними нулю. В той же час скалярний добуток більш далеких базисних функцій є точно рівний нулю. Тому варто говорити саме про локальні базиси, підкреслюючи, що саме локальні властивості базисів визначають їх відмінності від ортогональних та неортогональних.

З локальності сплайнових базисів слідує:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \quad \text{при } |m - n| > 3. \quad (3.54)$$

Для кожної функції H_m :

$$\int_{-\infty}^{\infty} [H_m(x)]^2 dx = k \quad \text{де } k = \text{const}, k > 0, \quad (3.55)$$

отже, систему $\{H_m\}$ легко нормувати, визначивши k для однієї з функцій. Тоді

можна користуватись локальним нормованим базисом $\{\bar{H}_i\}$, де $\bar{H}_i = \frac{1}{\sqrt{k}} H_i$.

Розглянемо скалярний добуток двох довільних базисних функцій:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_m(x) \bar{H}_n(x) dx = 1, \quad \text{при } m = n, \quad \text{для нормованого базису.} \quad (3.56)$$

В довільному випадку маємо (3.57)

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 2 \left[\int_{-2h}^h F_1^2(x) dx + \int_{-h}^0 F_2^2(x) dx \right], & |m - n| = 0 \\ \int_{-h}^0 F_1(x) F_2(x) dx + \int_{-h}^h F_2(x) F_3(x) dx + \int_h^{2h} F_3(x) F_4(x) dx, & |m - n| = 1 \\ \int_{-h}^h F_1(x) F_3(x) dx + \int_h^{2h} F_2(x) F_4(x) dx, & |m - n| = 2 \\ \int_{2h}^0 F_1(x) F_4(x) dx, & |m - n| = 3 \\ 0, & |m - n| > 3 \end{cases}$$

Тобто в довільній точці лише 4 базисних функції приймають ненульові значення.

Зважаючи на симетричність базисних функцій та регулярність сітки вузлів сплайна в довільній точці x маємо ненульові значення $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$.

Представимо з допомогою сплайнового базису на регулярній сітці вузлів деяку функцію $Q(x)$, визначену та неперервну на проміжку $[a, b]$:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^N c_k H_k(x) \quad (3.58)$$

Розглянемо розкладення в ряд Фур'є функції $Q(x)$ по системі $\{H_m\}$. Знаходження узагальнених коефіцієнтів Фур'є є простим для ортогональних систем. Для локальної сплайнової системи на регулярній сітці вузлів також можливе досить просте визначення коефіцієнтів.

Знайдемо узагальнені коефіцієнти Фур'є функції $Q(x)$ відносно системи функцій $\{H_m\}$:

$$\int_a^b Q(x)H_n(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_a^b H_k(x)H_n(x)dx . \quad (3.59)$$

Врахувавши локальність базису, маємо

$$\int_a^b Q(x)H_n(x)dx = \sum_{k=n-3}^{n+3} c_k \int_a^b H_k(x)H_n(x)dx . \quad (3.60)$$

Звідки

$$\int_a^b Q(x)H_n(x)dx = a_3c_{n-3} + a_2c_{n-2} + a_1c_{n-1} + a_0c_n + a_1c_{n+1} + a_2c_{n+2} + a_3c_{n+3} , \quad (3.61)$$

де

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-2h}^{-h} F_1^2(x)dx + \int_{-h}^0 F_2^2(x)dx + \int_0^h F_3^2(x)dx + \int_h^{2h} F_4^2(x)dx, \\ a_1 &= \int_{-h}^0 F_1(x)F_2(x)dx + \int_0^h F_2(x)F_3(x)dx + \int_h^{2h} F_3(x)F_4(x)dx, \\ a_2 &= \int_0^h F_1(x)F_3(x)dx + \int_h^{2h} F_2(x)F_4(x)dx, \\ a_3 &= \int_h^{2h} F_1(x)F_4(x)dx, \end{aligned} \quad (3.62)$$

Ліва частина рівняння

$$\begin{aligned} \int_a^b Q(x)H_n(x)dx &= \int_{(n-2)h}^{(n-1)h} Q(x)F_1(x)dx + \int_{(n-1)h}^{nh} Q(x)F_2(x)dx + \int_{nh}^{(n+1)h} Q(x)F_3(x)dx + \\ &+ \int_{(n+1)h}^{(n+2)h} Q(x)F_4(x)dx \end{aligned} \quad (3.63)$$

або

$$\int_a^b Q(x)H_n(x)dx = q_n . \quad (3.64)$$

Тоді коефіцієнти на відрізку $[a,b]$ для обмеженого ряду з n елементів можна знайти, розв'язавши систему рівнянь

$$A * C = Q, \quad (3.65)$$

де A - семидіагональна симетрична матриця розмірності n ;

C - вектор-стовпець коефіцієнтів c ;

Q - вектор-стовпець з елементами q .

$$\begin{bmatrix} 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dots \\ c_{n-3} \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \\ c_n \\ c_{n+1} \\ c_{n+2} \\ c_{n+3} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ q_{n-1} \\ q_n \\ q_{n+1} \\ \dots \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Для побудови крайніх базисних функцій сітку вузлів продовжуємо праворуч та ліворуч. Проте нас більше цікавитиме випадок, коли дані не обмежені певним інтервалом, а надходять послідовно так, що інтервал $[a,b]$ можна вважати нескінченим. Специфічна форма системи рівнянь (3.66) дозволяє знайти наближений розв'язок за умов необмеженої розмірності матриць.

Розв'язанням системи (3.66) є $C = A^{-1}Q$. Отже проблема полягає у знаходженні інверсної матриці, яка є симетричною з діагональним переважанням. З обмеженою точністю її можна вважати симетричною діагональною із шириною діагоналі $2m+1$. Позначимо цю наближену до A^{-1} матрицю як D . Остання повністю визначатиметься $m+1$ елементами d_0, d_1, d_2, d_3 довільного рядка (аналогічно елементам a_0, a_1, a_2, a_3). Метод розрахунку зазначених коефіцієнтів та питання точності таких розрахунків розглянуто в попередньому підрозділі.

Значення довільного коефіцієнта Фур'є в локальному сплайновому базисі розраховується за формулою:

$$c_j = d_0 q_j + \sum_{i=1}^m d_i (q_{j-i} + q_{j+i}). \quad (3.67)$$

Розглянемо дискретний варіант узагальненого перетворення Фур'є в локальних сплайнових базисах. Питання формування дискретних сплайнових базисів розглянуто в підрозділі 2.5. Сформований сплайн складатиметься з чотирьох фрагментів, які можна визначити через загальну функцію, як

$$\begin{aligned} F1_i &= F_i, & i &= \overline{1, N}; \\ F2_i &= F_{i+N}, & i &= \overline{1, N}; \\ F3_i &= F_{i+2N}, & i &= \overline{1, N}; \\ F4_i &= F_{i+3N}, & i &= \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Сплайновий базис складається з відліків функції F_i зміщеної пропорційно N на регулярній сітці $H_{ij} = F_i$. Наслідком цього сума всіх базисних функцій у певній точці сітки даних є сумою чотирьох фрагментів базисного сплайна:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} H_{ij} = F1_i + F2_i + F3_i + F4_i \quad (3.69)$$

Індекс “ j ” є номером базисної функції, а індекс “ i ” є номером точки на відрізку сплайна, якому ця точка належить. Ця особливість сплайнових базисів має вирішальне значення для ефективності розрахунків кардинальних сплайнів.

$$\sum_i H_{im} H_{in} = 0, \text{ для } |m - n| > 3. \quad (3.70)$$

Розглянемо розрахунок узагальнених коефіцієнтів Фур'є в отриманому базисі для залежності представлені відліками Q_i :

$$\sum_i Q_i H_{ik} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_i H_{ik} H_{in}. \quad (3.71)$$

Наслідком локальності базису є семидіагональна форма матриці A в рівняннях $A^*C=Q$, де A - семидіагональна симетрична матриця;

C - вектор-стовпець коефіцієнтів c ; Q - вектор-стовпець з елементами q .

Елементи діагональної матриці розраховуються за формулами:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N F1_i^2 + \sum_{i=1}^N F2_i^2 + \sum_{i=1}^N F3_i^2 + \sum_{i=1}^N F4_i^2 \right), \\
 a_1 &= \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N F1_i F2_i + \sum_{i=1}^N F2_i F3_i + \sum_{i=1}^N F3_i F4_i \right), \\
 a_2 &= \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N F1_i F3_i + \sum_{i=1}^N F2_i F4_i \right), \\
 a_3 &= \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N F1_i F4_i \right).
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Оскільки базисні функції є зміщеними копіями, то номер фрагмента не має значення й індекс номера фрагмента сплайна у складових базисної функції c_j відсутній. Звичайно мова йде про внутрішні фрагменти сплайна. Розрахунок для перших і останніх фрагментів потребує врахування відсутності сусідніх вузлів. Це легко здійснити, відкинувши відповідні суми, однак, в алгоритмах реального часу операції порівняння можуть займати суттєвий час, зважаючи на простоту наведених виразів. З огляду на регулярність сітки можна умовно продовжити послідовність вузлів у нескінченість праворуч та ліворуч і не змінювати вирази. Однак усе ж не вдасться уникнути факту відсутності даних на продовжених фрагментах. Вказані спрощення призведуть до наявності певного перехідного процесу на початку і в кінці оброблюваної послідовності даних. Такий перехід не простягатиметься далі двох сплайнових фрагментів.

Розрахуємо значення елементів правої частини рівняння 3.71

$$q_j = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N F1_i Y_{i,j-2} + \sum_{i=1}^N F2_i Y_{i,j-1} + \sum_{i=1}^N F3_i Y_{i,j} + \sum_{i=1}^N F4_i Y_{i,j+1} \right), \quad j = \overline{1, R}. \tag{3.73}$$

Тут $Y_{i,j}$ є відліками залежності, яку наближають. Індекс j означає належність відліку до j -го фрагмента сплайна. Як і в попередніх виразах відсутність сусідніх фрагментів на краях легко врахувати відкиданням відповідних сум. Можна вважати, що відліки та сітка сплайна продовжуються з нульовими значеннями. Наявність

необмеженої послідовності сплайнових фрагментів $j = \overline{-\infty, \infty}$ не змінює вираз, оскільки базис локальний.

Узагальнені коефіцієнти Фур'є знайдемо із системи рівнянь 3.74:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dots \\ c_{j-3} \\ c_{j-2} \\ c_{j-1} \\ c_j \\ c_{j+1} \\ c_{j+2} \\ c_{j+3} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ q_{j-1} \\ q_j \\ q_{j+1} \\ \dots \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Оскільки матриця \mathbf{A} симетрична, семидіагональна з діагональним переважанням, то інверсна матриця $\mathbf{D}=\mathbf{A}^{-1}$ має елементи, які швидко зменшуються з віддаленням від діагоналі. Довільний рядок інверсної матриці (за виключенням крайніх) повністю представляє інші. Таким чином, якщо вважати нульовими значення елементів $d_{j\pm k}$, для $k>m$, то коефіцієнти c_j визначатимуться за формулою:

$$c_j = d_0 q_j + \sum_{k=1}^m d_k (q_{j+k} + q_{j-k}) . \quad (3.75)$$

Зважаючи на те, що інверсна матриця не залежить від відліків $Y_{i,j}$ її елементи можна розрахувати попередньо, якщо задати характеристики сітки вузлів та даних. Остання формула є ключовою для реалізації алгоритмів реального часу, для розрахунку узагальнених коефіцієнтів Фур'є по сплайнових базисах.

Практично для більшості сплайнових базисів із точністю до 1% d_m можна вважати рівним нулю для $m>3$.

3.6 Якість алгоритмів наближення сплайнами

В попередніх розділах розроблено методику побудови сплайнів із фрагментів неперервних функцій та їх використання в алгоритмах інтерполяції та оцінювання. Проте залишається відкритим питання критеріїв вибору сплайна певного виду. Для цього розглянемо якісні характеристики створених алгоритмів. Скористаємось формалізацією оцінки характеристик обчислювальних алгоритмів із [302].

Позначимо функції: $P(D)$ - задача, $A(U)$ - алгоритм, $C(K)$ - пристрій для розрахунків. D, U, K множини параметрів, від яких суттєво залежить розв'язок задачі P на пристрої C із допомогою алгоритму A .

Прийmemo наступні основні характеристики алгоритмів: $E(D, U, K)$ повна похибка розв'язку; $T(D, U, K)$ час розв'язку; $M(D, U, K)$ розмір пам'яті необхідної для розв'язку. Задача полягає у розкритті змісту характеристик та параметрів. Вектор D включає апріорну інформацію про сигнал. Важливими є характер сигналу (експоненційний, гармонійний, гладкий), верхня частота сигналу, амплітудний чи енергетичний спектр сигналу, характер шумової складової, закон розподілу шуму. Параметрами алгоритму є вид сплайна, вид сітки вузлів сплайна, ширина фрагментів сплайна, амплітудний чи енергетичний спектр сплайна. Параметрами пристрою є тактова частота, розрядність, обсяг пам'яті.

Розглянемо похибку розв'язку. Вона складається з похибки у вхідних даних, похибки метода, похибки округлення.

Похибка методу в задачах інтерполяції і апроксимації за МНК розглядається за умови відсутності похибки (шуму) у вхідних даних і достатньо високої точності розрахунків (подвійна точність дійсного типу даних) і в основному зводиться до оцінок нев'язки наближення. У класичному підході з точки зору теорії наближення отримують верхні оцінки похибки, віднісши дані до певного класу функцій з певними диференційними властивостями. Такі оцінки отримані для окремих видів сплайнів. Для алгебраїчних B -сплайнів порядку k , мінімального дефекту, на сітці вузлів t маємо [200]:

$$\sup_{f \in C^m[a,b]} \|f - S_{k,t}\|_c \leq \text{const}_{k,m} |t|^m \omega(f^{(m)}; |t|), \quad (3.78)$$

де $m = 0, \dots, k-1$, $\omega(f; h) = \max\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq h, x, y \in [a, b]\}$,

$$|t| = h = \max_i (t_{i+1} - t_i) = \max_i h_i.$$

Якщо f має k неперервних похідних ($m=k-1$):

$$\sup_{f \in C^m[a,b]} \|f - S_{k,t}\|_c \leq \text{const}_k |t|^k \|f^{(k)}\|. \quad (3.79)$$

Для ермітових сплайнів непарної степені $2n-1$ при $a=0$, $b=1$ маємо [200]:

$$\sup_{f \in W_\infty^{2n}[a,b]} \|f - S_{2n-1,t}\|_c = \frac{|t|^{2n}}{(2n)! 2^{2n}}, \quad (3.80)$$

$$\sup_{f \in W_\infty^{2n}[a,b]} \|f - S_{2n-1,t}\|_p = \frac{M_{n,p}}{(2n)!} \left(\sum_{i=1}^N h_i^{2np+1} \right)^{1/p}, \quad (3.81)$$

$$\sup_{f \in W_1^{2n}[a,b]} \|f - S_{2n-1,t}\|_1 = \frac{|t|^{2n}}{(2n)! 2^{2n}}, \quad (3.82)$$

$$\sup_{f \in W_p^{2n}[a,b]} \|f - S_{2n-1,t}\|_p = \frac{M_{n,p'}}{(2n)!} \left(\sum_{i=1}^N h_i^{2np'+1} \right)^{1/p'}, \quad (3.83)$$

де $M_{n,p} = \left[\frac{\Gamma^2(np+1)}{\Gamma(2np+2)} \right]^{1/p}$, $1 < p \leq \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$.

Для рівномірної сітки з N вузлів на інтервалі $[a, b] = [0, 1]$:

$$\sup_{f \in W_\infty^{2n}[a,b]} \|f - S_{2n-1,t}\|_c = \frac{1}{(2n)! 2N^{2n}}, \quad (3.84)$$

$$\sup_{f \in W_\infty^{2n}[a,b]} \|f - S_{2n-1,t}\|_p = \frac{M_{n,p}}{(2n)! N^{2n}}, \quad (3.85)$$

$$\sup_{f \in W_p^{2n}[a,b]} \|f - S_{2n-1,t}\|_p = \frac{M_{n,p'}}{(2n)! N^{2n}}. \quad (3.86)$$

Для ермітового кубічного сплайна похибка наближення становить

$$\sup_{f \in W_{\infty}^4[a,b]} \|f - S_{3,t}\|_c = \frac{|t|^4}{386}, \quad (3.87)$$

$$\sup_{f \in W_{\infty}^4[a,b]} \|f - S_{3,t}\|_2 = \frac{1}{600} \left(\sum_{i=1}^N h_i^9 \right)^{1/2}. \quad (3.88)$$

Аналогічні оцінки похибок для рівномірного наближення сплайнами з різноманітними фрагментами можна знайти в роботі [249]. На практиці апріорно оцінити диференційні властивості реальних сигналів важко. Практичне значення цих результатів у можливості порівняння потенційних можливостей різних сплайнів та у цілеспрямованому пошуку способів оптимізації алгоритмів.

Оцінимо можливості впливу параметрів сплайнів на якість алгоритмів. В наближенні сплайнами є ряд суттєвих особливостей, котрі відрізняють їх від класичних поліномів. Основна особливість полягає у локальності базисних функцій. Традиційні базисні функції мають ненульові значення на всьому інтервалі наближення. При цьому зростання розмірності простору базисних функцій пов'язано зі зміною їхнього вигляду і як правило, призводить до суттєвого росту розрахунків. На визначення параметрів впливає вся множина вхідних відліків.

В сплайнах базисні функції є локальними (навіть у глобальних сплайнах вони швидко зменшуються до нуля). Завдяки цьому з'являється можливість додаткової адаптації сплайна до сигналу з допомогою операцій масштабування та зміщення локальної базисної функції. Саме цей прийом застосовується у вейвлет технологіях. Теоретичні та прикладні аспекти вейвлетів описані досить повно в багатьох роботах [168,240,291]. Варто особливо відмітити, що вейвлет технологія образно кажучи побудувала міст між математичною теорією наближення й практикою обробки сигналів [241] і є результатом перетину чистої математики, обчислювальної математики і обробки сигналів. У вейвлетах похибка наближення розглядається не лише через диференційні властивості функцій, але й у звичних для інженерів термінах спектрів сигналів і базисів. На практиці важливо оцінити похибку наближення конкретного сигналу, що представлений вектором відліків. Складність

задачі точної оцінки похибки наближення сплайнами за вектором інформації індивідуальної функції відзначає зокрема М.П.Корнейчук [200]. Проблема полягає в, тому, що оцінки верхньої грані похибки по класу функцій є песимістичними, оскільки розглядається випадок “найгіршої” функції з класу. Задача оптимального відновлення функції за вектором значень формулюється наступним чином [200]. Максимально використовуючи наявну апіорну інформацію про функцію, відновить її за окремими відліками з мінімально можливою похибкою. Такою апіорною інформацією є частотні властивості сигналу.

Розглянемо в цьому аспекті похибку інтерполяції сплайнами. Якщо прийняти модель сигналу з обмеженою верхньою частотою, то достатньо лише знати верхню частоту сигналу ω_h . В процесі інтерполяції відбувається подавлення “зайвих” копій періодичного спектра. Тому найбільш прийнятною для інженерної практики оцінкою похибки є нерівномірність амплітудної характеристики спектра базисного сплайна в смузі частот $[0, \omega_h]$ ΔH_s , та мінімальна глибина подавлення в області “зайвих копій” спектра сигналу H_z , чи нерівномірність АЧХ в області затримки ΔH_z (рис.3.10).

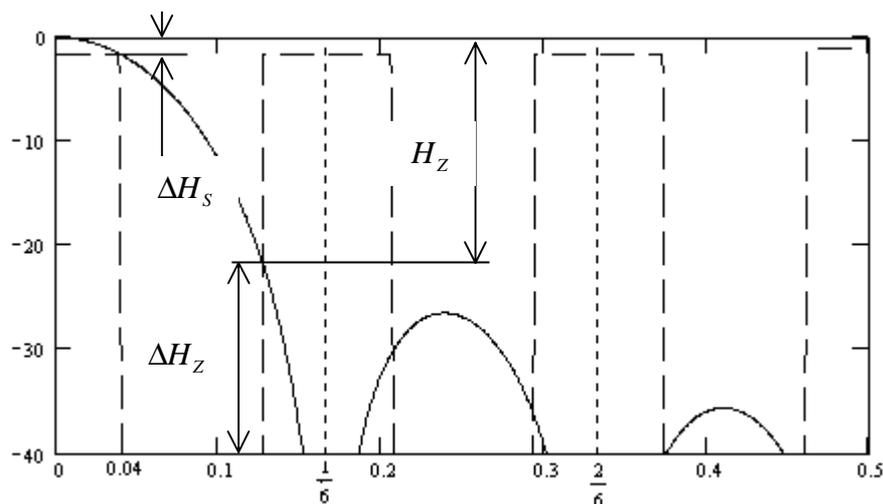


Рис.3.10 Частотні показники якості інтерполяції

Звідси зрозуміло, що вибираючи масштаб базисної функції по відношенню до сигналу можна керувати цими параметрами для заданого базису. Похибка

інтерполяції з цього погляду має дві складові. Похибка нерівномірності АЧХ в області пропускання сигналу, що має низькочастотний характер, та похибка пропускання “зайвих спектрів”, що має високочастотний характер. Скорочення базису покращує першу складову, але може суттєво погіршити другу (рис.3.11). З іншого боку, скорочення ширини базису обмежене шириною сітки даних, що є вузлами інтерполяції, та технічними умовами задачі (коефіцієнтом інтерполяції та періодом вхідних даних).

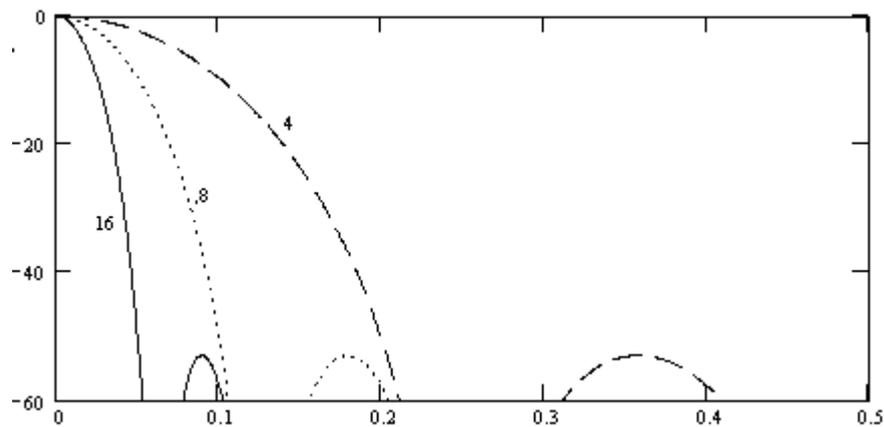


Рис. 3.11. Зміна спектра базису при зміні його відносної ширини (4, 8, 16)

За цих умов подальше зменшення похибки можливе за рахунок вибору виду базисного сплайна. Традиційним підходом є підвищення порядку базисних функцій. Довільні алгебраїчні сплайни розраховуються на сітці вузлів $\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$ згідно рекурентних виразів [49]:

$$B_{i,1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in]t_i, t_{i+1}] \\ 0, & x \notin]t_i, t_{i+1}] \end{cases},$$

$$B_{i,k}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x). \quad (3.76)$$

З іншого боку, алгебраїчні B-сплайни на рівномірній сітці вузлів можна отримати з допомогою згортки прямокутних функцій $B_{i,1}(x)$:

$$B_{i,k}(x) = \underbrace{B_{i,1}(x) * B_{i,1}(x) * \dots * B_{i,1}(x)}_k, \quad (3.77)$$

де * - операція згортки.

Кубічний В-сплайн у підрозділі 2.4 отримано згорткою двох трикутних симетричних функцій, котрі у свою чергу можна отримати згорткою двох прямокутників.

Вигляд В-сплайнів показано на рис.3.12, а АЧХ на рис.3.13.

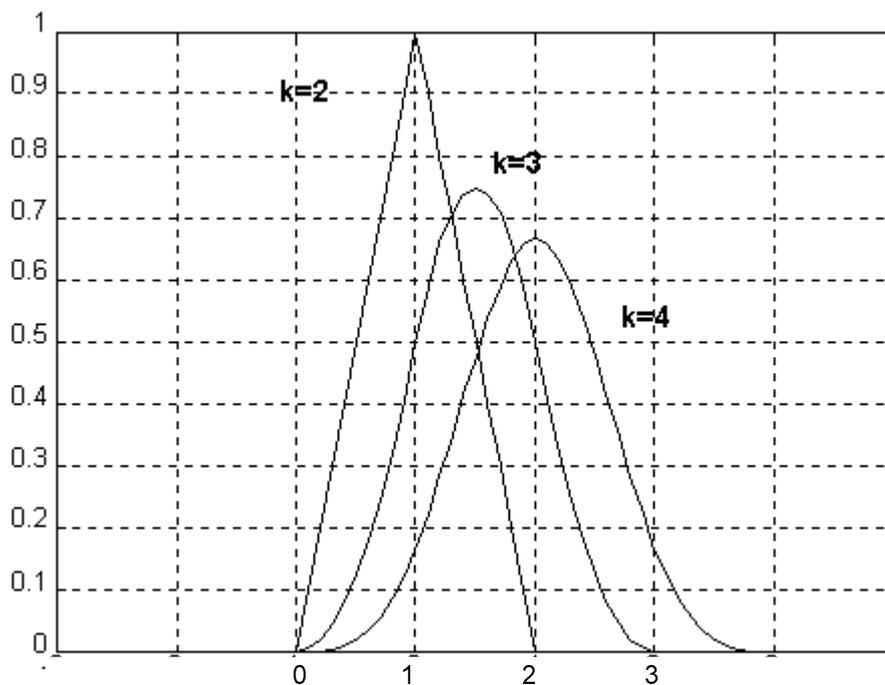


Рисунок 3.12. Алгебраїчні базисні сплайни 2,3,4 порядків

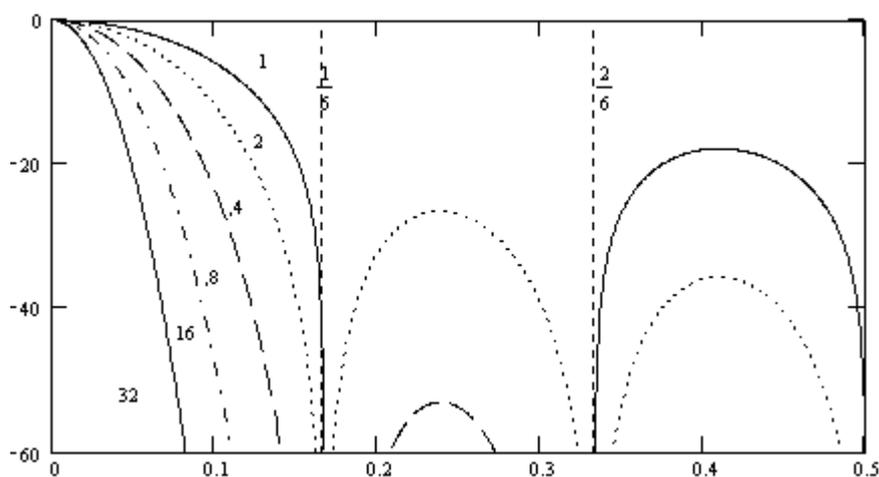


Рис. 3.13. АЧХ алгебраїчних В-сплайнів різних порядків

З рисунків видно, що зростання порядку базисного сплайна призводить до його розширення й зростання числа фрагментів. В частотній області це призводить до звуження області пропускання і відповідно погіршення ΔH_s . Водночас зменшується високочастотна складова похибки за рахунок покращення H_z . Однак зростання порядку супроводжується тим, що базисні сплайни високих порядків усе менше відрізняються за формою. Це пояснюється тим, що за умовами побудови, породжуючі функції формально відповідають вимогам центральної граничної теореми [152] і мають такий самий алгоритм формування, що й закони розподілу. Отже при зростанні порядку базисних сплайнів вони наближаються до кривої Гауса. Практично вже при порядках більше 6-10 отримуємо базисний сплайн близький до кривої Гауса (рис.3.14). Це стосується базисних сплайнів, що утворені згорткою взагалі, а не лише алгебраїчних.

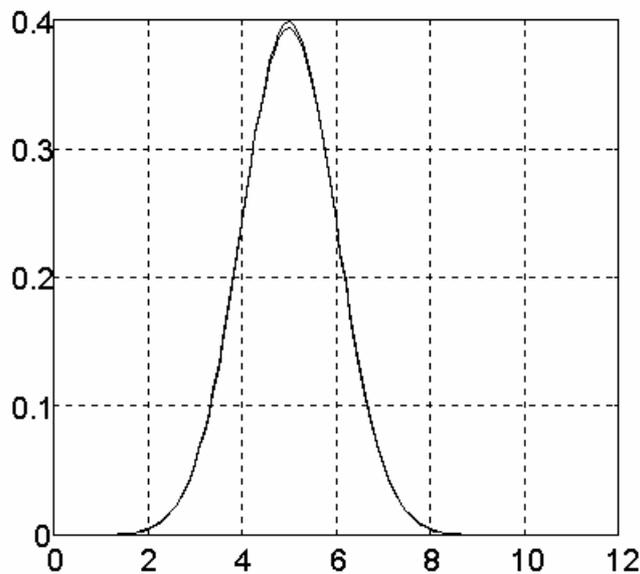


Рис.3.14 B-сплайн 12 порядку та крива Гауса

Від порядку базисних сплайнів суттєво залежать інші характеристики алгоритмів: $T(D,U,K)$ - час розв'язку та $M(D,U,K)$ - розмір пам'яті. Абстрагувавшись від конкретної технічної реалізації, зафіксуємо час операцій додавання та множення й розрядність розрахунків. Очевидно, що розрахунок інтерпольованого значення потребує принаймні одного множення й одного додавання на кожен базисний

сплайн, що приймає ненульові значення на фрагменті. Таким чином маємо наступну оцінку часових затрат. Для послідовного виконання операцій з одним суматором і одним перемножувачем: $T = kT_M + (k-1)T_A + 2kT_V$, де k - порядок базису (число фрагментів базисного сплайна), T_M - час на операцію множення, T_A - час на операцію додавання, T_V - час на пересилання коефіцієнта в пам'яті. Затрати пам'яті $M = k + (k * n)$, де n - коефіцієнт інтерполяції. Друга складова є обсягом постійної пам'яті.

Алгоритм дозволяє виконувати розрахунок паралельно. Для цього необхідно k перемножувачів і k суматорів. Тоді затрати часу складуть $T = T_M + T_A + T_V$. Затрати пам'яті аналогічні попередньому, хоча без постійної пам'яті в явному вигляді можна обійтися (замінивши комутаційною схемою).

Таким чином зростання порядку базисних сплайнів призводить до зростання часових витрат або схемних ресурсів, що суттєво для алгоритмів реального часу.

Розглянемо інший аспект зростання порядку базисних сплайнів – розв'язок інтерполяційних рівнянь та гладкість. Базисний сплайн першого порядку складається з одного фрагмента і не забезпечує навіть неперервність значень. Базисний сплайн другого порядку складається з двох фрагментів і забезпечує неперервність значень у точках стику, але не гарантує неперервності похідних. Методики розрахунку, викладені в другому розділі для базисних сплайнів четвертого порядку, очевидним чином можна застосувати і для них у спрощеному вигляді. Базисні сплайни третього порядку здатні забезпечити неперервність значення та першої похідної в точках стикування, але для них властиві труднощі з інтерполяцією оскільки число ненульових фрагментів на відрізок не кратне двом. Тому отримати ермітів базисний сплайн із допомогою методики описаної в 2.6 не вдасться. Тому найбільш прийнятним для використання є базисний сплайн четвертого порядку. Він забезпечує неперервність двох перших похідних в В формі й неперервність першої похідної для ермітового базисного сплайна. При необхідності виконання цих умов базисний сплайн третього порядку забезпечує мінімальне число розрахунків або схемних ресурсів. Використання сплайнів вищих

порядків може бути доцільним, якщо цього безпосередньо потребують умови конкретної задачі, або необхідні властивості не вдається досягнути більш простими засобами.

Більш ефективним методом досягнення заданих характеристик є зміна вигляду базисного сплайна третього порядку. Якщо повернутися до рис.3.10, то очевидно, що задача синтезу базисного сплайна із заданими частотними властивостями ідентична задачі синтезу нерекурсивного цифрового фільтра з лінійною фазовою характеристикою. При цьому базисний сплайн можна отримати, вважаючи імпульсну характеристику породжуючою функцією, за методикою, викладеною в другому розділі.

Розглянемо похибку обумовлену наявністю похибки у вхідних даних. В роботі розглядається некорельована похибка, обумовлена адитивною шумовою складовою. За таких умов застосування інтерполяційних схем забезпечує незначне зниження рівня шумів у результаті інтерполяції, як наслідок низькочастотної фільтрації. Для ермітових базисів досить просто можна порахувати дисперсію шуму. Вона зміниться пропорційно сумі квадратів чотирьох базисних функцій. Для кубічного ермітового сплайна на рівномірній сітці максимальне зниження дисперсії у середині фрагмента становитиме 0.64 від дисперсії у вузлах. Але така фільтрація не має оптимальних властивостей і дисперсія не рівномірна на фрагменті.

Тому, як зазначалося вище, доцільніше використовувати метод найменших квадратів. Сплайнова модель в МНК фактично є інтерполяційною в тому сенсі, що оцінювані параметри моделі є інтерполяційними коефіцієнтами при розрахунку модельних значень у точках спостережень. Для ермітового сплайна оцінювані параметри є значеннями інтерполяційного сплайна у вузлах. Априорно в МНК вважається, що модель достатньо точно відповідає детермінованій складовій. Практично це означає, що за відсутності шумової складової похибка середньоквадратичного наближення є практично малозначимою. Оскільки $\|f(x) - S(x)\|_2 \leq \|f(x) - S(x)\|_c$ [304], то априорні оцінки похибки інтерполяції є хорошими орієнтирами для оцінки похибки середньоквадратичного наближення і

вибору параметрів моделі. Тому вважатимемо, що параметри сплайнової моделі вибрані таким чином, що за відсутності шумів похибка є практично малозначимою. Тоді при наявності шумів вихідна похибка МНК буде обумовлена саме ними. Оцінку цієї похибки дає статистична теорія. Діагональні елементи коваріаційної матриці МНК (3.13) показують степінь зниження дисперсії вхідного шуму у вихідних оцінках і можуть розраховуватись апріорно.

Розглянемо як впливають параметри сплайнової моделі на діагональні елементи коваріаційної матриці. Розширення базисних функцій призводить до збільшення числа вхідних відліків на фрагменті сплайна і покращення оцінок (зменшення довірчого інтервалу). Формула для наближеного розрахунку цих елементів наведена вище (3.39). Практично ширина фрагментів обмежена зростанням динамічної похибки.

Зростання порядку сплайнової моделі в МНК призводить до декількох негативних моментів. Внаслідок розширення базисних функцій зростає обсяг розрахунків, ширина діагоналі матриці C зростає і погіршується обумовленість системи нормальних рівнянь. Якість статистичних оцінок (ширина довірчого інтервалу) погіршується, як внаслідок зростання діагональних елементів коваріаційної матриці так і за рахунок зменшення ступенів вільності. З огляду на це бажано мати базисний сплайн мінімального порядку.

Міркування стосовно вибору форми базисного сплайна для застосування в МНК відрізняються від інтерполяційної задачі, оскільки мова йде про виділення корисного сигналу на фоні білого шуму. В цьому контексті для забезпечення мінімуму дисперсії сигналу похибки, модуль частотного коефіцієнта передачі МНК фільтра має бути близьким за формою до спектральної потужності корисного сигналу. В наступних розділах буде показано, що можна так побудувати МНК алгоритм, у вигляді фільтра, щоб його модуль АЧХ був близький до АЧХ базисного сплайна. Тоді слід синтезувати базисний сплайн з АЧХ близькою до корисного сигналу. Це також слідує з досліджень Железнова по оптимальній дискретизації, де

знайдено, що базисні функції мають бути близькими до автокореляційної функції процесу.

Похибки округлення практично мало залежать від виду сплайна і методика їх оцінки не відрізняється від добре висвітленої у роботах [175,301,302,304]. Зауважимо лише, що дана похибка може мати значення в основному при апаратній реалізації з низькою розрядністю. Проте мале число операцій при відсутності зворотних зв'язків не призводить до значного накопичення похибки. Легко порахувати, максимальну похибку інтерполяції внаслідок округлення в розрахунках. Прийmemo крок квантування рівним Q . Тоді абсолютна похибка при квантуванні з округленням становить $\Delta = 0.5Q$. Для інтерполяційного сплайна k -го

порядку можна записати:
$$\sum_{j=1}^k (a_j + \Delta)(B_j(x) + \Delta) = S(x) + \Delta \sum_{j=1}^k (a_j + B_j(x)) + k\Delta^2 .$$

Прийнявши максимальні значення a_j та $B_j(x)$ не більшими за одиницю отримаємо максимальну похибку $E_o = 2k\Delta + k\Delta^2 \approx 2k\Delta$.

Для реалізації МНК алгоритму у вигляді нерекурсивного цифрового фільтра m порядку та вважаючи модуль вхідного сигналу не більшим одиниці отримаємо максимально можливу похибку [301]
$$E_o = \Delta \sum_{i=0}^m |h_i| .$$

Реальна похибка буде значно меншою, оскільки максимально несприятливе складання похибок мало ймовірне. Більш реалістичною є ймовірнісна оцінка [301]

через дисперсію шуму квантування σ_Δ^2 :
$$\sigma_o^2 = \sigma_\Delta^2 \sum_{j=1}^k (B_j(x))^2$$
 для інтерполяції;

$$\sigma_o^2 = \sigma_\Delta^2 \sum_{i=0}^m (h_i)^2$$
 для МНК фільтрації (σ_o^2 - дисперсія шуму квантування на виході).

3.7 Висновки

1. Між математичним поняттям інтерполяції та технічним, що ґрунтується на низькочастотній фільтрації існує безпосередній взаємозв'язок. Встановлено, що базисну функцію кардинального сплайна можна вважати імпульсною

характеристикою нерекурсивного фільтра нижніх частот в інтерполяційному фільтрі. Запропонована технічна реалізація інтерполяційного сплайн-фільтра у вигляді поліфазної структури з фільтрами четвертого порядку у гілках, коефіцієнти котрих є відліками локального сплайнового базису.

2. Базисний сплайн можна розглядати як імпульсну характеристику деякого фільтра. Коефіцієнти при базисних функціях розглядаються як вхідна послідовність даних фільтра. Якщо спектр вхідних даних потрапляє в область пропускання фільтра з малою нерівномірністю характеристики, то похибка інтерполяції є малою.

3. У практичних випадках точність наближення сплайнами доцільно виражати через відмінності спектрів базисних сплайнів і функції, котру наближають. Це ґрунтується на наявності апріорної інформації про спектри в цифрових системах.

4. Метод найменших квадратів із сплайновою моделлю має ряд особливостей не характерних для класичних поліноміальних моделей. Ускладнення сплайнової моделі не зв'язано з ускладненням базисних функцій, тому зростання числа оцінюваних параметрів не призводить до погіршення обумовленості нормальних рівнянь.

5. Отримано метод наближеного розрахунку інверсної матриці МНК для локального сплайна необмеженої розмірності, та вирази для оцінки похибки наближення та похибки визначення МНК оцінок. Це дозволяє будувати згладжуючі сплайни для необмеженої послідовності даних.

6. Підвищення порядку сплайнових базисів отриманих згорткою призводить до отримання базисних сплайнів близьких за формою до кривої Гауса.

7. Зменшення нев'язки наближення сплайнами шляхом підвищення порядку базисних сплайнів є недоцільним внаслідок подібності базисів високих порядків, втрати локальних властивостей, зростання обсягів розрахунків. Оптимальним є використання сплайнових базисів не вище четвертого порядку. Найбільш доцільним є зменшення нев'язки шляхом скорочення фрагментів сплайна та синтезу базисних сплайнів із заданими АЧХ.

РОЗДІЛ 4. СИНТЕЗ ШВИДКИХ АЛГОРИТМІВ ТА ЗАСОБІВ СПЛАЙН-ОБРОБКИ СИГНАЛІВ В РАДІОТЕХНІЧНИХ ТА ТЕЛЕВІЗІЙНИХ СИСТЕМАХ

4.1. Постановка задачі

Основною метою розділу є розробка прикладних алгоритмів та структурних схем пристроїв для швидких розрахунків.

Розглянуті в попередніх розділах сплайн-методи є досить загальними для того, щоб їх можна було використати для обробки сигналів у реальному часі чи реалізувати апаратно. Користуючись термінологією R.Vlahut [137] можна сказати, що в попередніх розділах задані алгоритми, котрі встановлюють співвідношення між входом та виходом. Ці алгоритми, описані математичними виразами і розраховуються у відповідності з ними. Таку реалізацію називатимемо прямою. Пряма реалізація більше відповідає математичній сутності процедури обробки сигналів, ніж ефективній реалізації розрахунків. Під швидким алгоритмом розумітимемо детальний опис процедури розрахунку, що не є очевидною і в котрій досягнуто зростання швидкості обчислень. Як правило, у швидких алгоритмах концептуальна ясність розрахунків приноситься в жертву ефективності. Завданням даного розділу є створення на підставі загальних методів та алгоритмів швидких, тобто таких, котрі здатні працювати в реальному часі та допускають апаратну реалізацію. Слід відмітити, що більшість швидких алгоритмів можна представити через операції з матрицями специфічної, діагональної структури [140,243]. Сплайн-методи якраз і оперують із такими матрицями, котрі для сплайнів є природними і відображають внутрішню структуру сплайнів. Отже, цим пояснюється обчислювальна ефективність сплайнів і відкривається потенційна перспектива дальшого удосконалення ефективності.

У другому підрозділі розглянемо схеми швидкої сплайн-інтерполяції та методику побудови таких систем. Основний обсяг розрахунків при сплайн-

інтерполяції у загальному вигляді доводиться виконувати, розв'язуючи систему інтерполяційних рівнянь. Можливі три шляхи вирішення цієї проблеми.

Застосовувати сплайнові базиси в лагранжівій формі. Тоді для ермітових сплайнів втрачаємо неперервність другої похідної, інакше маємо ускладнення розрахунків за рахунок розширення базису.

Уникнути розв'язку системи інтерполяційних рівнянь, використавши базис, узгоджений за спектральними характеристиками з даними.

Внести попередню корекцію у вхідні дані з метою узгодження частотних характеристик даних та базису. Даний підхід для кубічних В-сплайнів розглянуто в [54], де корекцію виконує рекурсивний фільтр низьких частот. Однак, таке поєднання є малопродуктивним, оскільки в такій парі втрачаються переваги обох фільтрів: рекурсивного й нерекурсивного. Тому в даній роботі розроблено варіант корекції з допомогою нерекурсивного фільтра.

Інший спосіб підвищення ефективності розрахунків полягає у виборі спеціальних схем вузлів сплайна та сітки даних. Найпростіше рішення - вибір сітки вузлів та даних з однаковим кроком та фіксація сітки вузлів та даних. Розрахункові вирази при цьому значно спрощуються [335,339].

У третьому підрозділі розглянуто реалізацію оцінок за МНК у реальному часі у вигляді нерекурсивних цифрових фільтрів. Пряма реалізація МНК оцінки полягає у використанні проєкційних матриць, із допомогою котрих можна отримати МНК оцінку й нев'язку (аналоги фільтрів Савицького-Голея). Проте особливості сплайнових моделей дозволяють реалізувати процедуру оцінки більш компактно. Аналогічно випадку інтерполяції для цього вводяться обмеження на сітку вузлів сплайна та даних. Оскільки мова йде про статистичне оцінювання, за наявності випадкової складової, таких спектральних характеристик базису, як нерівномірність АЧХ при виборі базису недостатньо. Враховуючи наявність у структурі МНК узгодженого фільтра необхідно будувати базис з урахуванням енергетичних характеристик спектру даних. Алгоритми базуватимуться на результатах, викладених в третьому та четвертому розділах [320,323].

В четвертому підрозділі розглянемо реалізації МНК оцінок із врахуванням особливостей структури МНК для сплайнів. Зокрема розглядаючи МНК алгоритм, як оптимальну фільтрацію з використанням узгоджених із сигналом фільтрів (імпульсні характеристики котрих є базисними сплайнами) [334].

В п'ятому підрозділі розглянемо рекурсивні схеми МНК оцінок для сплайнових моделей [316,329]. Особливістю рекурентної побудови сплайна є нарощування фрагментів і відповідне зростання числа оцінюваних параметрів. Необхідно отримати відповідні вирази для побудови обчислювальних алгоритмів. Локальність сплайнових базисів дозволяє ефективно організувати обчислювальну процедуру. Нарощування фрагментів сплайна призводить до значного зростання обсягів розрахунків. В той же час локальність базису обмежує вплив наступних відліків на раніше отримані оцінки. Тому рекурсивну процедуру слід обмежити певним вікном. З іншого боку, є сенс використати рекурсивну процедуру для отримання оцінок в алгоритмах обробки даних у вікні.

Шостий підрозділ містить основні висновки.

4.2. Швидкі алгоритми сплайн-інтерполяції

Розглянемо сплайн-інтерполяцію з точки зору максимальної ефективності розрахунків. Пряма реалізація інтерполятора у вигляді цифрового поліфазного фільтра [301] показана на рис.4.1. Побудова можлива за умови, що фрагменти сплайна мають однакову ширину і на кожному з фрагментів розміщено n точок інтерполяції. Фільтр складається з n гілок, в кожній з котрих розміщений цифровий фільтр 4-го порядку з коефіцієнтами, що є відліками з чотирьох фрагментів базисної функції. Фільтри в гілках працюють на частоті вхідних відліків. Схеми затримки, котрі працюють на вихідній частоті можна замінити комутаційною схемою.

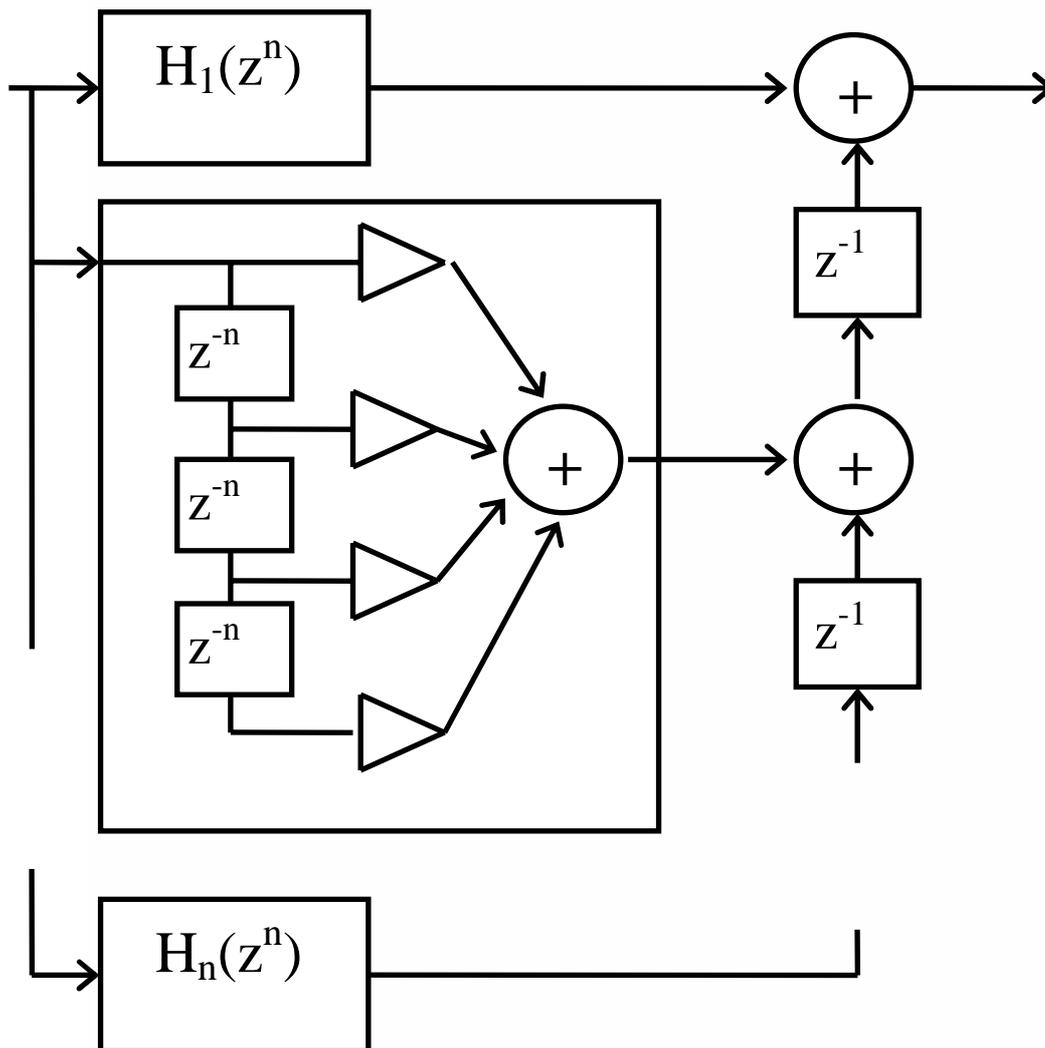


Рисунок 4.1. Реалізація сплайн-інтерполятора у вигляді поліфазного цифрового фільтра

Така схема реалізації сплайн-інтерполятора є найбільш швидкою і концептуально ясною з точки зору цифрової обробки даних. Зміна базису відбувається шляхом заміни коефіцієнтів у фільтрах, котрі розміщені в гілках. Похибку інтерполяції легко охарактеризувати нерівномірністю амплітудно-частотної характеристики базисного сплайна, що є імпульсною характеристикою фільтра (розділ 3.6). На рис.4.2 показані приклади ермітових сплайнових базисів - імпульсних характеристик, а на рис.4.3 їх АЧХ.

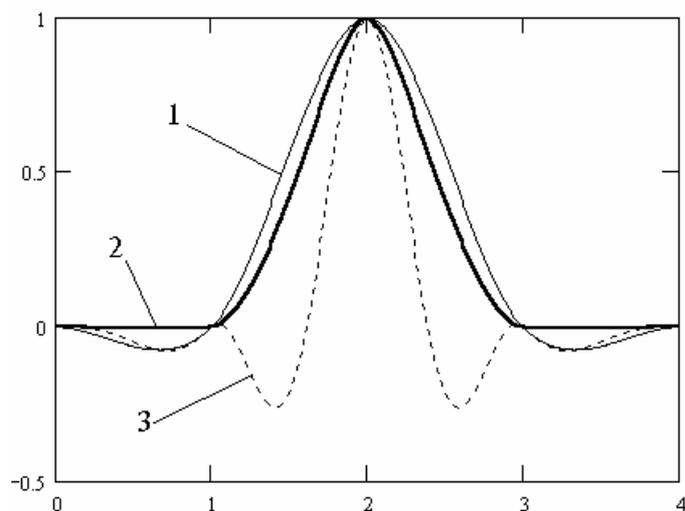


Рисунок 4.2. Ермітові базисні сплайни. 1-кубічний, 2-експоненційний, 3-синусоподібний.

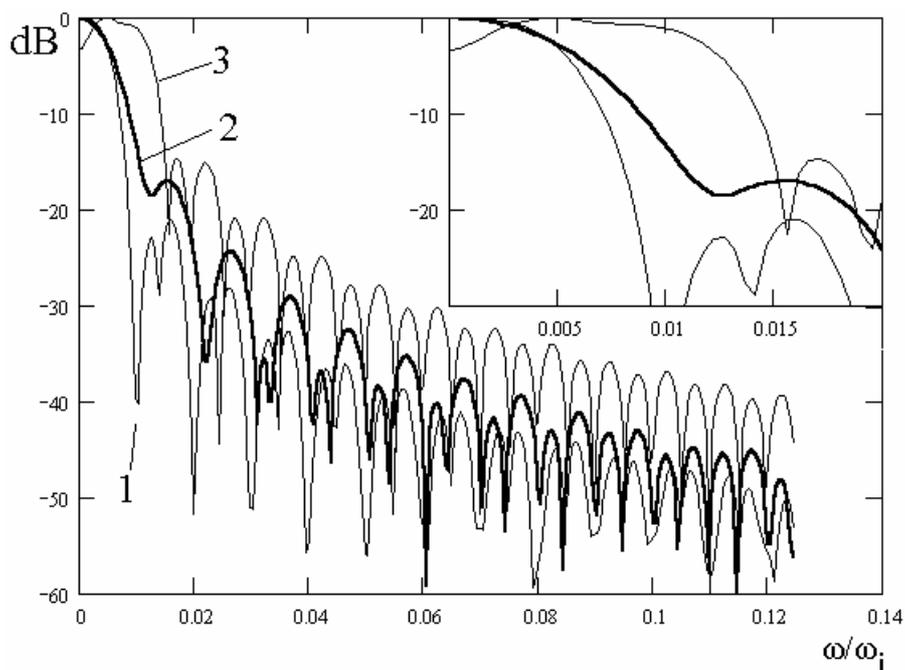


Рисунок 4.3. Нормовані амплітудні характеристики ермітових базисних сплайнів із рис.4.2 (ω_1 частота інтерпольованих даних)

Найбільш простий у розрахунках базисних функцій є кубічний ермітів сплайн (рис.4.2,4.3 -1), алгоритм розрахунку котрого наведено в підрозділі 2.2. Базис утворюється згорткою двох рівносторонніх трикутників і відповідним приведенням до ермітової форми. АЧХ відповідає низькочастотному фільтру.

Можливості змінювати частотні властивості обмежені співвідношенням між частотою вхідних даних та частотою інтерпольованих відліків.

Наступний базис - експоненційний, утворений згортою фрагментів експонент. Породжуюча функція має вигляд

$$f(x) = (e^{ax} - 1)e^{-a}, \quad (4.1)$$

де $a \geq 1$ числовий параметр, що в даному прикладі рівний трьом.

Вирази для розрахунку фрагментів базису досить складні. Простіше отримати відліки чисельним розрахунком інтегралу згортки. Частотні властивості при $a = 1$ близькі до алгебраїчного базису. Зі зростанням значення параметра a область пропускання розширюється. Таким чином є додаткова можливість керувати частотними властивостями базису. Базис, зручний для інтерполяції даних із широким амплітудним діапазоном.

Третій представлений на рис.4.2,4.3 базис породжений згортою відрізків синусоїди

$$f(x) = -\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right). \quad (4.2)$$

Базис має широку смугу пропускання, що за характером наближається до віконного фільтра. Базиси, побудовані таким чином дозволяють виконувати інтерполяцію не лише низькочастотних сигналів і мають широкі можливості для керування частотними властивостями.

Розглянуту поліфазну структуру інтерполятора можна спростити, зменшивши число елементів схеми. Звичайно, це призведе до певного ускладнення елементів управління схемою. Розглянемо це на прикладі кубічного ермітового базису. Рівномірна дискретизація дозволяє користуватися регулярними сітками як вузлів, так і значень інтерполяції. Якраз у цьому випадку яскраво виявляються обчислювальні переваги сплайнів і значно спрощується загальний алгоритм із розділу 2.3. Враховуючи властивості функції форми, отримаємо наступний алгоритм розрахунку для інтерполяційного сплайна.

Позначимо:

N - кількість точок інтерполяції на фрагменті сплайна;

$tu_1 = 0$, $tu_2 = 1$, $tu_3 = 2$, $tu_4 = 3$ - ординати вузлових точок сплайна ;

$A_1 = f_{j-2}$, $A_2 = f_{j-1}$, $A_3 = f_j$, $A_4 = f_{j+1}$ - абсциси вузлових точок сплайна.

Значення сплайна в точці i , яка належить j -му фрагменту, розраховується за спрощеним алгоритмом :

Усі фрагменти сплайна мають однакову довжину:

$h_n = 1$, (довжина фрагмента, якому належить точка інтерполяції)

$h_r = 1$, (довжина фрагмента ліворуч)

$h_b = 1$. (довжина фрагмента праворуч)

Отже

$p_1 = 1$, $p_4 = 1/2$, $p_2 = 1/2$, $p_3 = 1$.

Крайові умови не враховуватимемо, прийнявши до уваги необмежену кількість вузлів.

Значення $a = i/N$, $b = (N-i)/N$, $c = i^2(N-i)^2/N^3$, $d = i^2(N-i)/N^3$, $i=0, N-1$.

Складові функції форми

$$x_1 = -i^2(N-i)^2, \quad x_2 = 2i^2(N-i)^2 - i^2(N-i) + 2(N-i)^3N^2,$$

$$x_3 = -i^2(N-i)^2 + 2i^2(N-i) + 2i^3N^2,$$

$$x_4 = -i^2(N-i).$$

$$S_{ij} = (A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4)/(2N^3).$$

Таке спрощення алгоритму дозволяє ефективно реалізувати його, як комп'ютерну програму або апаратно. При цьому можна досягнути максимальної швидкості роботи, попередньо розрахувавши та записавши в пам'ять значення складових функції форми. Процедура інтерполяції зведеться до вибірки 4-х коефіцієнтів, 4-х перемножень із значеннями у вузлах і трьох-чотирьох додавань. Ділення на $2N^3$ можна в більшості випадків опустити. Схематично процедура розрахунків показана на рис.4.4. Така схема є вірною для довільного базису, що складається з чотирьох фрагментів.

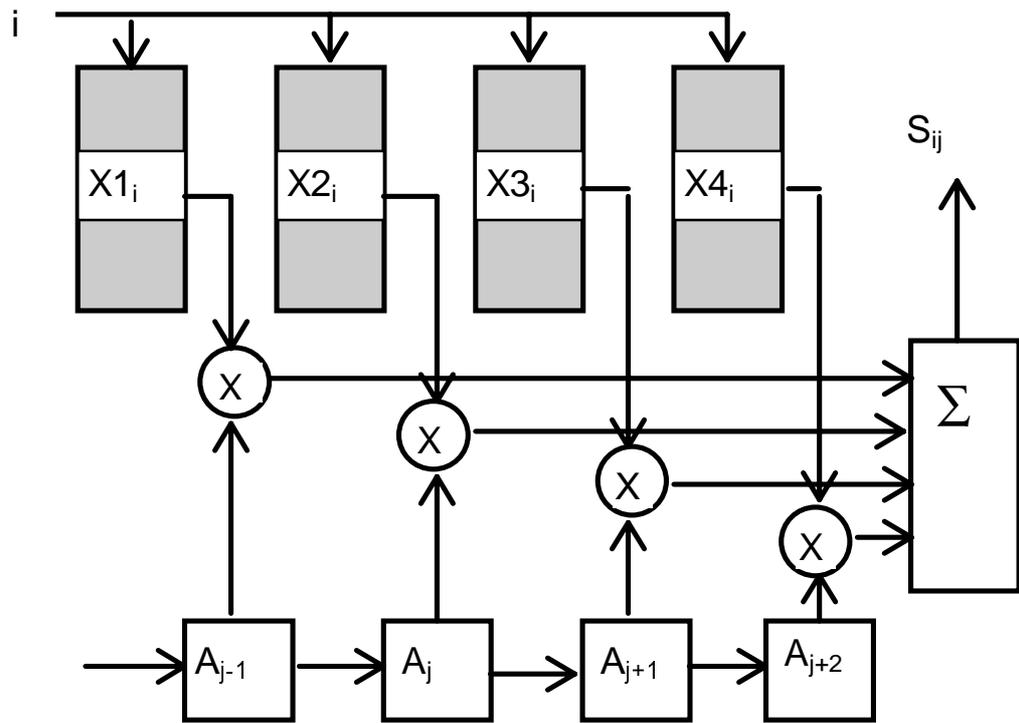


Рисунок 4.4. Сплайн-інтерполятор із розрахованими коефіцієнтами

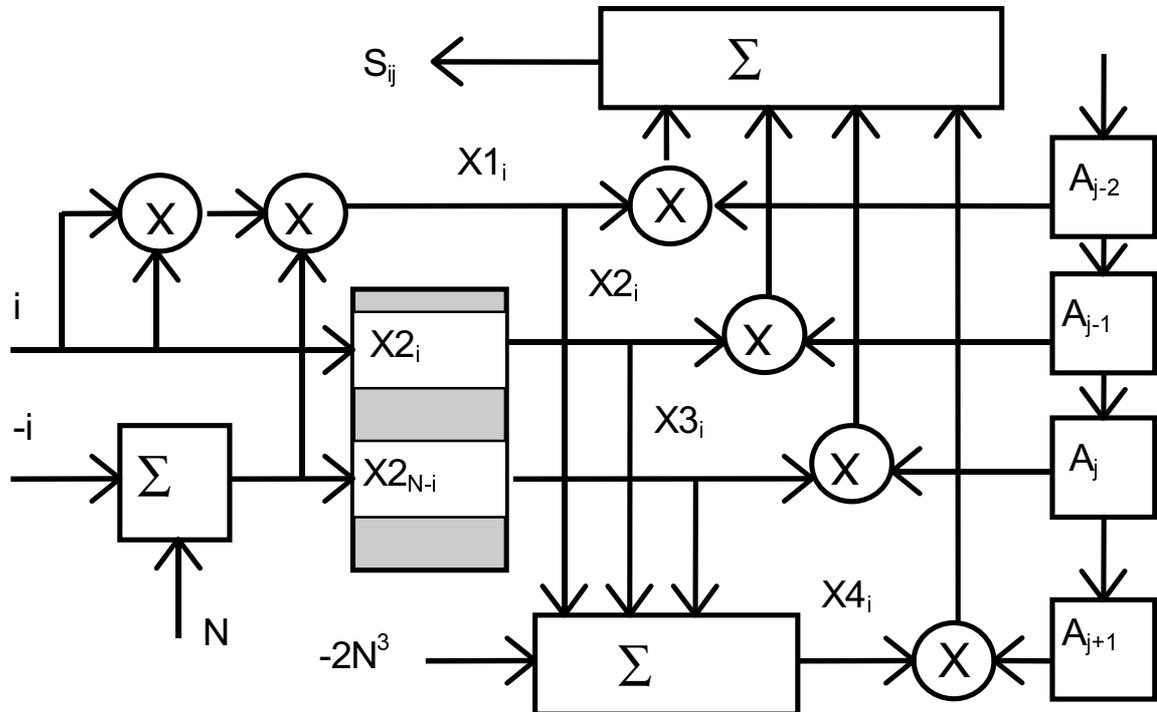


Рисунок 4.5. Сплайн-інтерполятор із частковим розрахунком коефіцієнтів

Якщо важливо економити пам'ять, то значення коефіцієнтів необхідно розраховувати. Це дещо ускладнює апаратну реалізацію. Компромісним є варіант, у якому лише частина значень розраховується попередньо і записується в пам'ять, а інші розраховуються в процесі роботи.

Зокрема використавши властивості симетричності та розкладення одиниці (для кубічного ермітового сплайна), із таблиці значень двох коефіцієнтів легко отримати два інші. Схема розрахунків показана на рис 4.5.

Найбільш загальним пристроєм є сплайн-інтерполятор, структурна схема котрого показана на рис.4.6.

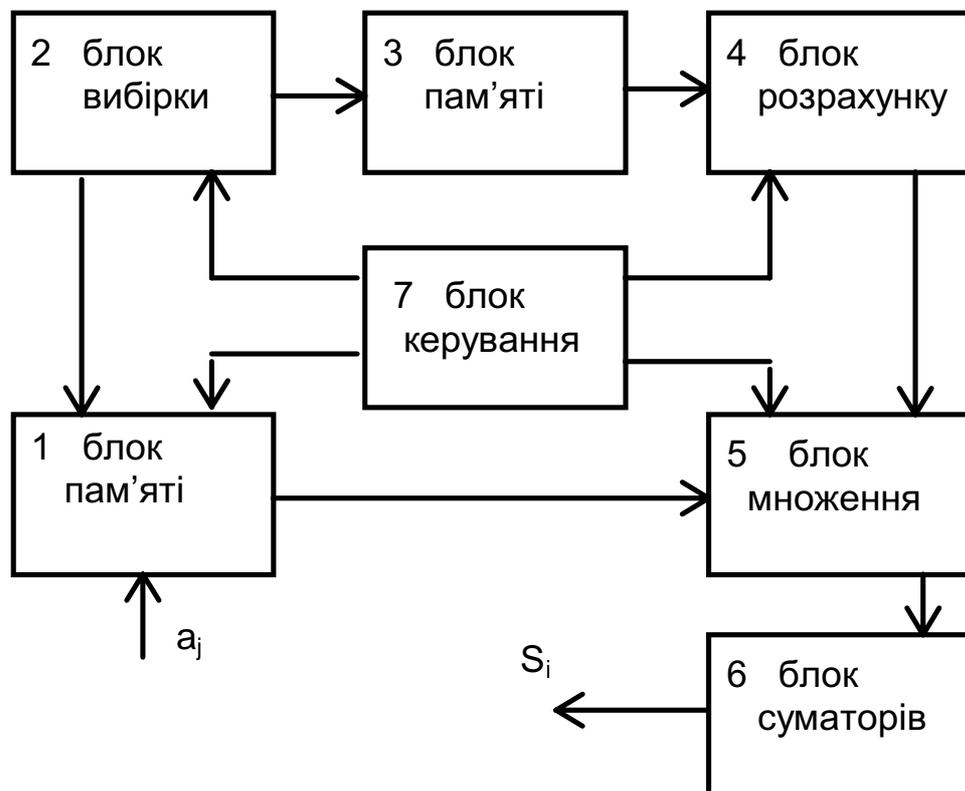


Рисунок 4.6. Узагальнена структурна схема сплайн-інтерполятора

Пристрій складається з блока пам'яті - 3 із коефіцієнтами функції форми; блока розрахунку функцій форми X_{1_i}, \dots, X_{4_i} - 4; блока пам'яті для вузлів інтерполяції a_j - 1; блока вибірки - 2, що керує вибіркою значень a_j та коефіцієнтів функції форми; блока перемножень - 5; блока суматорів - 6 та блока керування - 7.

Працює інтерполятор наступним чином. У блок пам'яті 1 записуються значення a_j інтерпольованої функції. За командами блока вибірки 2 із блоків пам'яті 1 та 3 вибираються відповідні значення. На виході блока розрахунків функцій форми 4 маємо значення X_{1_i}, \dots, X_{4_i} , котрі у блоці множення 5 перемножуються зі значеннями a_{j-1}, \dots, a_{j+2} . Сформовані добутки складаються у блоці суматорів 6 і на виході пристрою матимемо потрібне значення сплайна S_i .

Процедуру розв'язку інтерполяційних рівнянь можна звести до попередньої фільтрації вхідних даних. Система інтерполяційних рівнянь для В-сплайнів має дуже специфічну тридіагональну форму, із двома ненульовими значеннями: $C_0=0.6667$ (головна діагональ), $C_1=0.1667$ (бокові діагоналі). Числа наведені для кубічного В-сплайна. Завдяки цьому можна наближено отримати значення значимих елементів інверсної матриці. Приймаючи, що інверсна матриця семидіагональна, із системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} c_0 & 2c_1 & 0 & 0 \\ c_1 & c_0 & c_1 & 0 \\ 0 & c_1 & c_0 & c_1 \\ 0 & 0 & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

отримаємо наступні вирази для значимих елементів:

$$d_0 = c_0(c_0^2 - 2c_1^2) / q, \quad d_1 = -c_1(c_0^2 - c_1^2) / q, \quad d_2 = c_0c_1^2 / q, \quad d_3 = -c_1^3 / q,$$

$$q = c_0^4 - 4c_1^2c_0^2 + 2c_1^4.$$

Для кубічного В-сплайна $d_0=1.732$ (діагональ), $d_1=-0.464$, $d_2=0.124$, $d_3=-0.031$. Похибка, внаслідок наближеного розрахунку, становитиме не більше $2Mc_1d_3$ ($0.01M$), де M - максимальне вхідне значення.

Тоді розв'язок інтерполяційної системи рівнянь полягає у попередній фільтрації вхідних відліків (вузлів інтерполяції) з допомогою фільтра (корегуючого префільтра) з імпульсною характеристикою $\{d_3, d_2, d_1, d_0, d_1, d_2, d_3\}$, що є фільтром верхніх частот з АЧХ зображеною на рис.4.7.

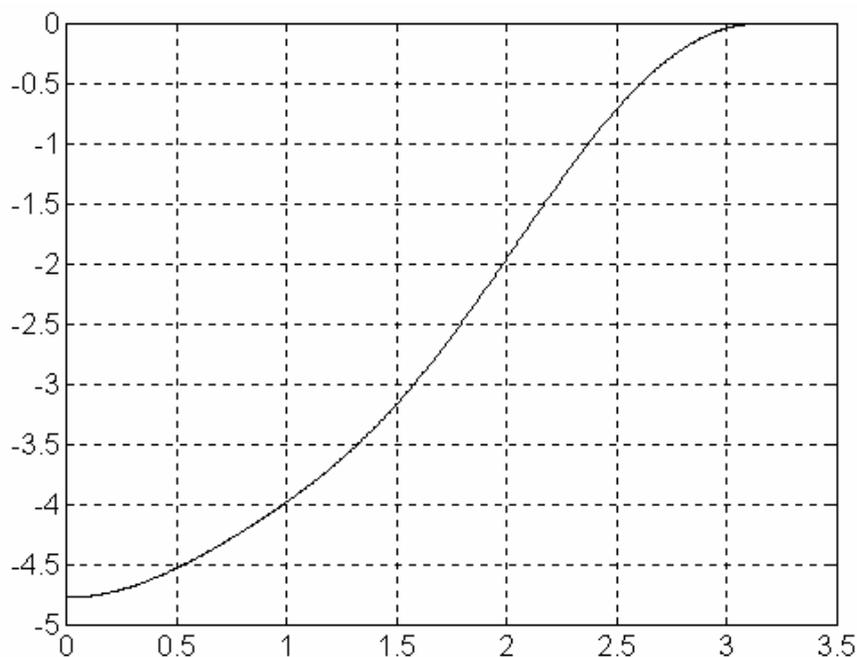


Рисунок 4.7. Нормована АЧХ корегуючого префільтра

Аналогічну побудову можна виконати не лише для алгебраїчного В-сплайна, а й для широкого класу інших, побудованих із різноманітних породжуючих функцій.

Розглянемо інші можливості оптимізації сплайн-інтерполяції. Очевидно, що основні резерви прискорення розрахунків слід шукати в особливостях побудови сплайнів.

Характерною особливістю є кусковий характер сплайн-функцій. З означення сплайна, та розглянутих раніше алгоритмів зрозуміло, що для розрахунку значення інтерполяційного сплайна в конкретній точці слід визначити номер фрагмента, котрому належить задана точка. Якщо сітка довільна і точки інтерполяції задають випадковим чином, то пошук фрагмента займає значний час, або потребує складного схемного рішення. Прискорити процес пошуку можна наступним чином:

скориставшись оптимальними алгоритмами пошуку (дихотомія, золотий перетин);

врахувавши характер надходження точок інтерполяції (послідовно, за певним законом).

4.3. Швидкі алгоритми оцінювання параметрів сплайн-моделі за МНК

Апроксимація даних за МНК нас цікавить в основному у статистичному контексті. Тобто, як деяка процедура, що дозволяє зменшити вхідну дисперсію, згладивши дані. В якості лінійної моделі використаємо сплайни виду (3.10), де оцінюваними параметрами є деякі числові коефіцієнти при базисних сплайнах. У випадку ермітових сплайнів оцінюваними параметрами є значення сплайна в точках стикування. Цей вибір значно спрощує оцінку ефективності статистичних оцінок та інтерпретацію результатів. Методи реалізації МНК процедур для поліноміальних моделей до 3-ї степені детально викладені в [203], вони ґрунтуються на особливостях розрахунку алгебраїчних поліномів. Розглянемо більш загальний підхід до реалізації МНК розрахунків як процедури цифрової фільтрації нерекурсивним фільтром. Розглянемо вектор прогнозних значень сплайнової моделі:

$$\mathbf{S} = \mathbf{X}\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y} = \mathbf{L}\mathbf{Y} \quad (4.3)$$

Кожне прогнозне значення, отримане згорткою рядка проекційної матриці $\mathbf{L} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'$ з вектором даних. З точки зору цифрової обробки даних рядки матриці \mathbf{L} є імпульсними характеристиками нерекурсивних цифрових фільтрів. Проекційна матриця для сплайнових моделей має ряд характерних особливостей, котрі ми розглянемо на прикладі двох характерних базисів: кубічного ермітового та синусоподібного ермітового. У принципі, використавши довільний рядок проекційної матриці як імпульсну характеристику нерекурсивного фільтра можна застосовувати довільні схеми розміщення вузлів сплайна та даних. Проте в довільному випадку можливий лише прямий аналіз властивостей отриманого фільтра через стандартні процедури побудови частотних характеристик [262]. Вибір оптимальних схем вузлів, як показано у попередньому розділі, тісно пов'язаний з конкретним набором даних і має характер пакетної обробки. Тому

розглянемо сплайн, що складається з досить великої або й необмеженої кількості вузлів. На кожному з фрагментів однакової довжини однаковим чином розміщено n точок вхідних даних. Точки на фрагменті можуть розміщуватись довільно, проте в реальних ситуаціях їхній крок однаковий. Для простоти розглянемо саме таку схему. Методи розрахунку для сплайнів із необмеженим числом фрагментів викладено у 3 розділі. Тому розрахувати проєкційні матриці для зазначених вище сплайнів не важко. Очевидно, що наслідком локальності базисів буде наявність лише обмеженого діапазону відмінних від нуля елементів проєкційних матриць. На рис.4.8 та 4.10 показано фрагменти довільного рядка проєкційних матриць, що з достатньою точністю відмінні від нуля.

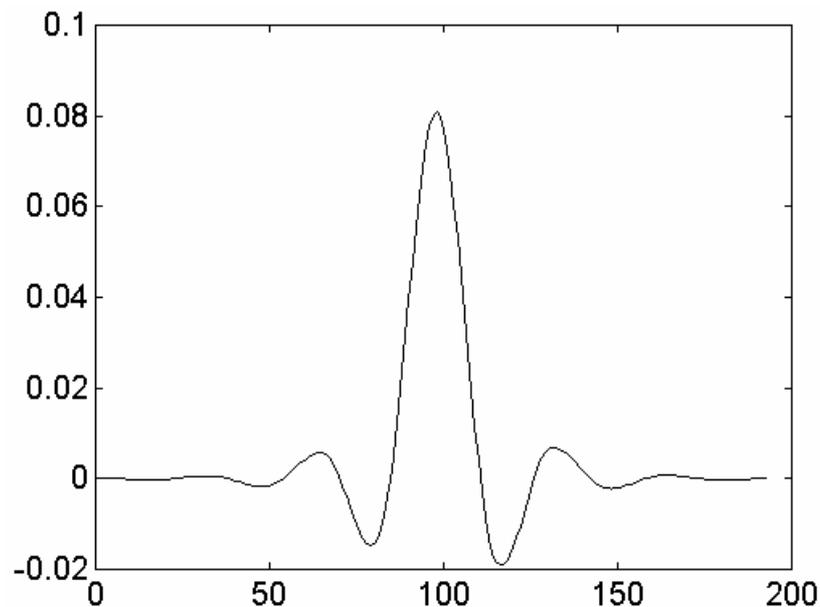


Рисунок 4.8. Фрагмент рядка проєкційної матриці МНК для кубічного ермітового базису

На рис.4.9 та 4.11 показано АЧХ цифрових фільтрів з імпульсними характеристиками - рядками проєкційних матриць із рис.4.8 та 4.10. Для порівняння показано АЧХ відповідних сплайнових базисів (позначені 1). Амплітуда показана в децибелах, частота відносна. Відмітимо, що МНК фільтри мають АЧХ дуже подібні до АЧХ базисних функцій відповідних інтерполяторів. Але на відміну від них нерівномірність в області пропускання має дещо інший характер.

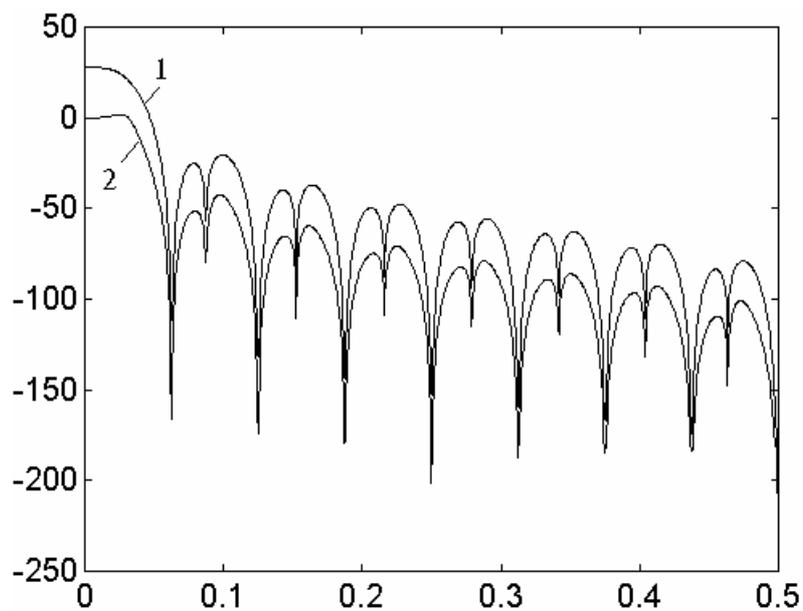


Рисунок 4.9. АЧХ кубічного ермітового базису інтерполяційного фільтра -1 та рядка проекційної матриці МНК з аналогічним базисом -2.

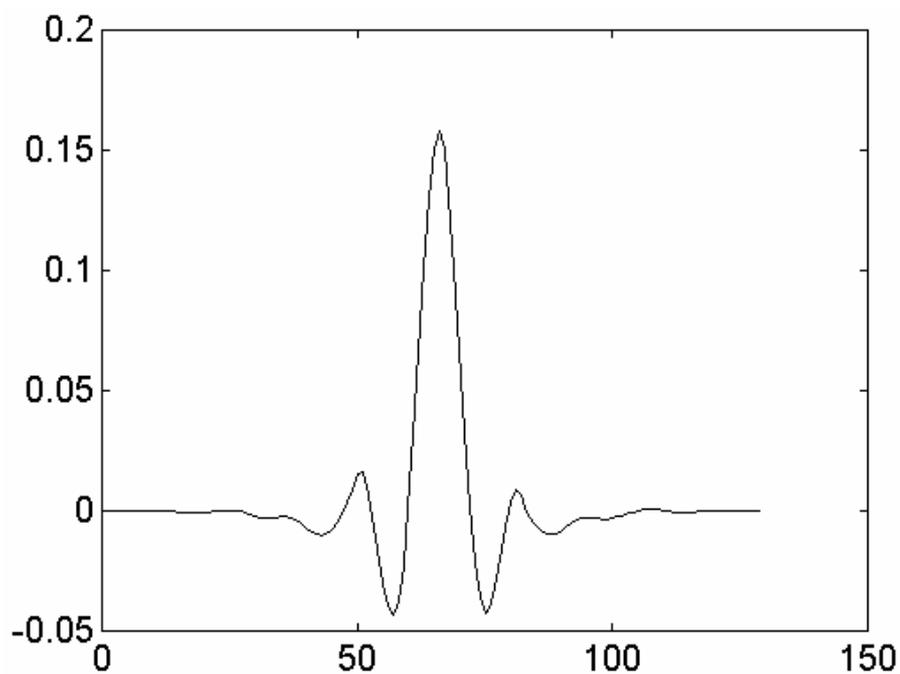


Рисунок 4.10. Фрагмент рядка проекційної матриці МНК для синусоподібного сплайнового базису.

Проте ми взяли рядок досить довільно. Розглянемо ряд рядків проекційної матриці, що включатиме декілька інтервалів. Результати показано на рис.4.12 та 4.13.

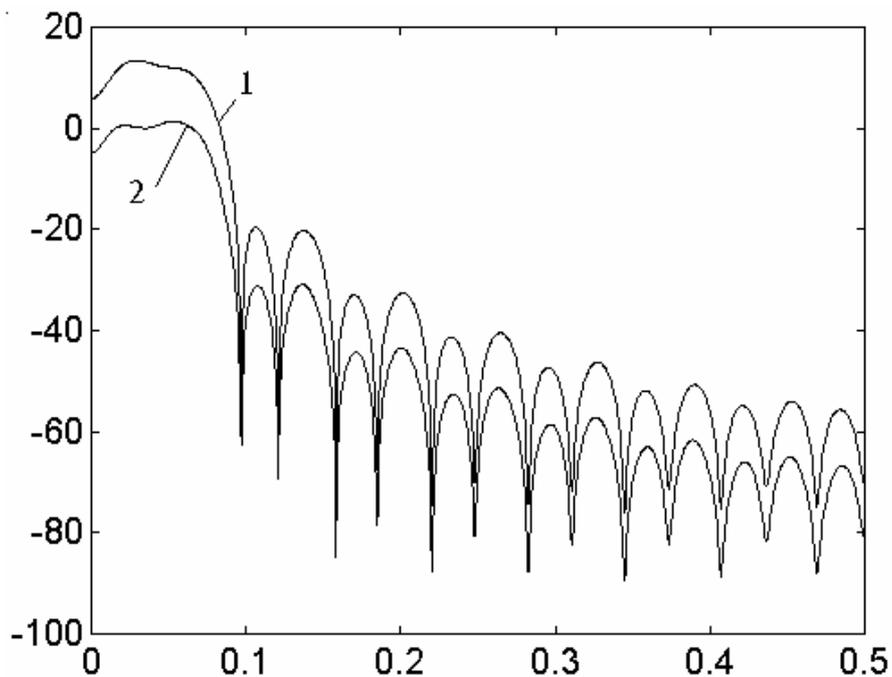


Рисунок 4.11. АЧХ синусоподібного ермітового базису інтерполяційного фільтра -1 та рядка проекційної матриці МНК з аналогічним базисом -2.

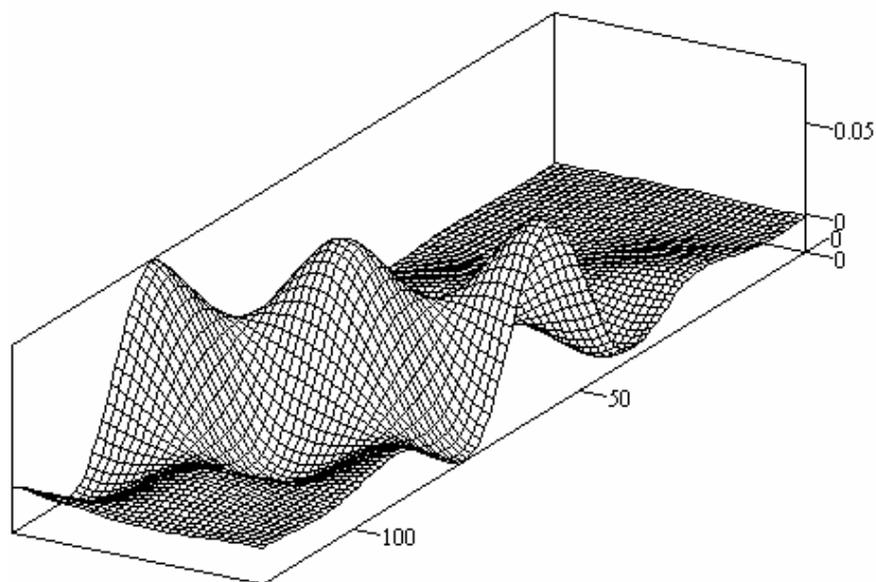


Рисунок 4.12. Зображення фрагмента проекційної матриці МНК для кубічного ермітового сплайна ($n=16$)

Як бачимо характер імпульсної характеристики суттєво змінюється в залежності від положення точки на фрагменті сплайна. Детальніше цю залежність можна проаналізувати на графіках в ізолініях рис.4.14 та 4.15. Пікові значення спостерігаються в точках (рядках), що співпадають із вузлами сплайна.

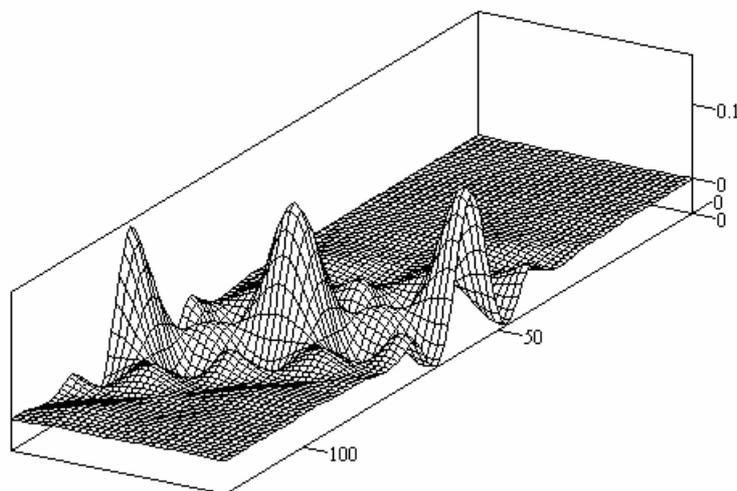


Рисунок 4.13. Зображення фрагмента проекційної матриці МНК для синусоподібного ермітового сплайна ($n=16$)

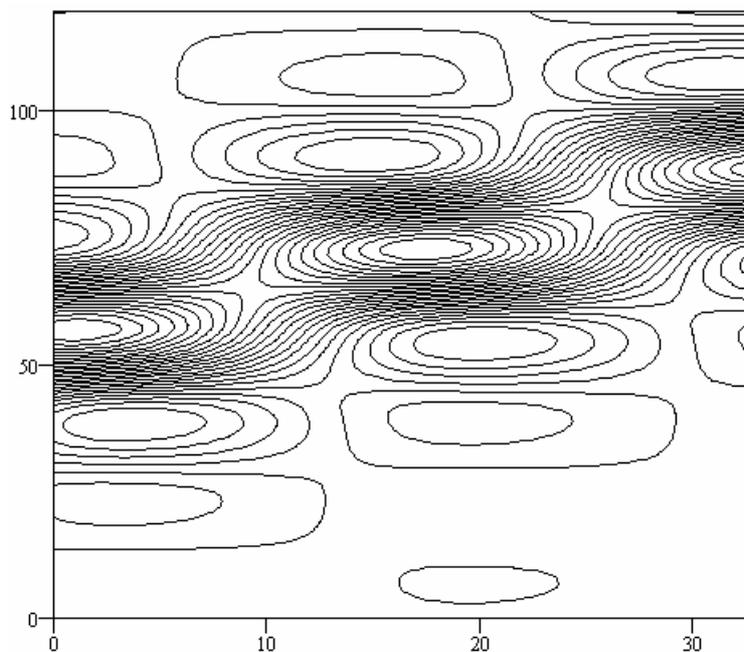


Рисунок 4.14. Зображення в ізолініях фрагмента проекційної матриці МНК для кубічного ермітового сплайна ($n=16$)

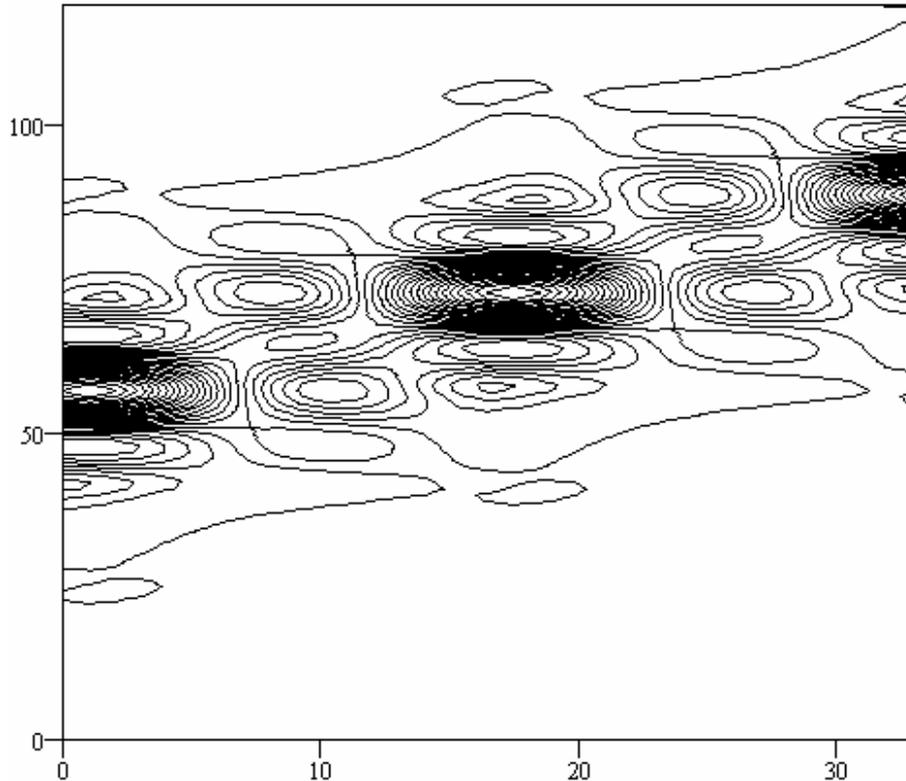


Рисунок 4.15. Зображення в ізолініях фрагмента проекційної матриці МНК для синусоподібного ермітового сплайна ($n=16$)

Симетрія спостерігається в точках, котрі співпадають із положенням вузлів, або знаходяться на середині фрагментів. На рис.4.16-4.17 показано характер цих змін із віддаленням від вузла (на графіках ліворуч від вузла). Очевидно, що рядки проекційної матриці з точки зору цифрової фільтрації далеко не рівнозначні. Отже, які з них є найбільш придатними для цифрової реалізації. Першою хорошою ознакою є симетричність імпульсної характеристики, що гарантує лінійність фазової характеристики. Таким чином кандидатами є рядки, що відповідають положенню вузлів на середині інтервалів. Розглянемо АЧХ характеристик зображених на рис.4.16-4.17 див. рис.4.18-4.19. Очевидно, що рядки близькі до вузлів мають АЧХ близькі до АЧХ базисних функцій, що спрощує синтез фільтрів.

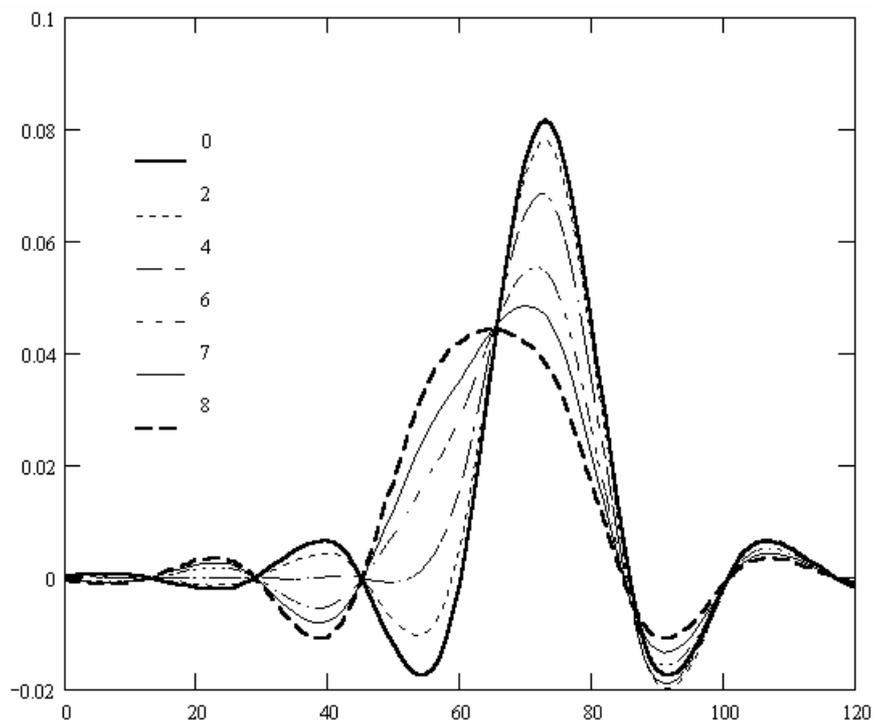


Рисунок 4.16. Рядки проекційної матриці МНК із кубічним ермітовим базисом зміщені відносно вузлового рядка (числа)

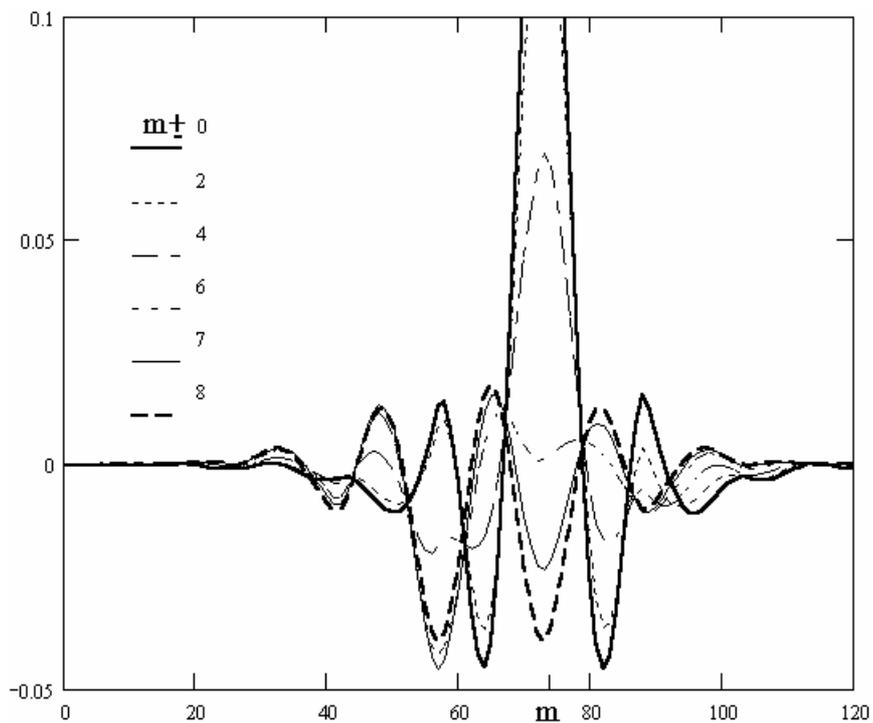


Рисунок 4.17. Рядки проекційної матриці МНК із синусоподібним ермітовим базисом, зміщені відносно вузлового рядка (числа)

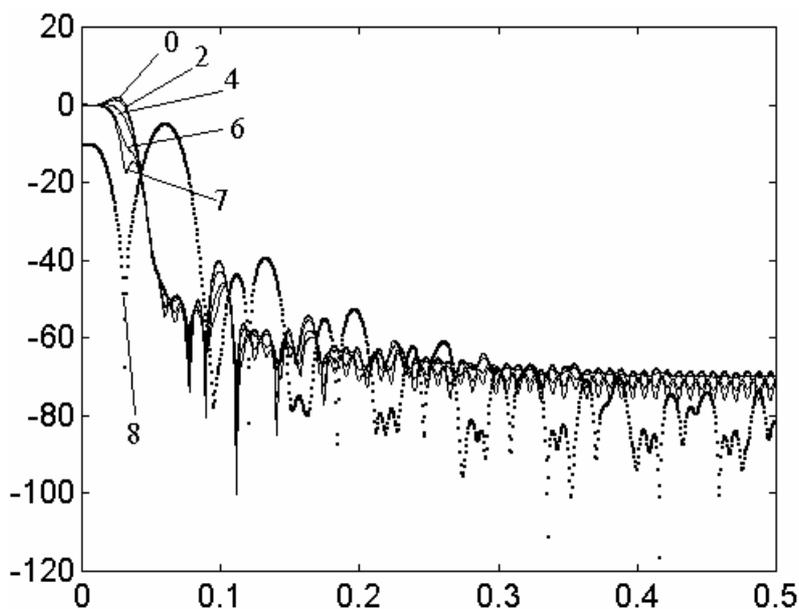


Рисунок 4.18. АЧХ функцій, що є імпульсними характеристиками цифрових фільтрів із рис.4.16

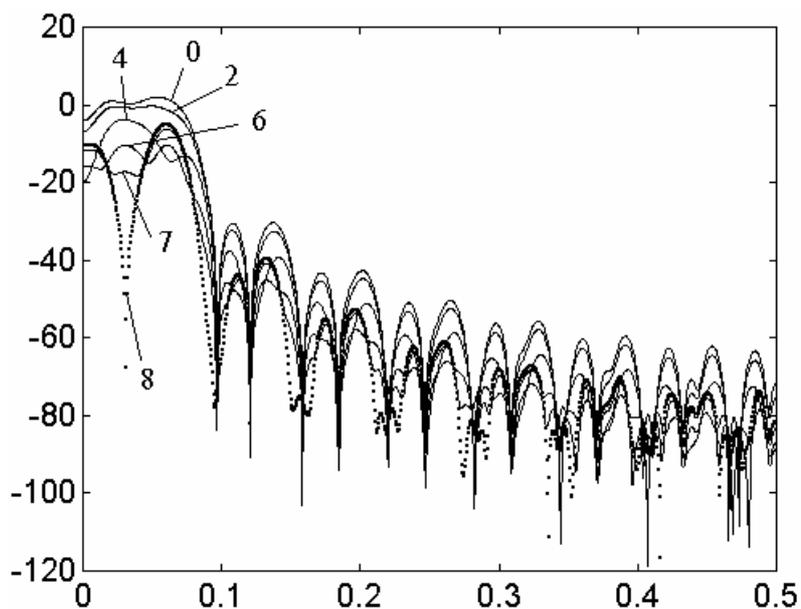


Рисунок 4.19. АЧХ функцій, що є імпульсними характеристиками цифрових фільтрів із рис.4.17

Отже рекомендуємо для реалізації МНК фільтра використовувати рядки проекційної матриці, що відповідають положенню вузлів сплайна. Окрім зазначених переваг отримані значення мають змістовну інтерпретацію. Це значення сплайна у вузлі, що за змістом аналогічне змісту вхідних даних. Легко також

оцінити ефективність такого фільтра. Ефективність фільтрації визначатимемо, як величину зменшення дисперсії вхідних даних. Для оцінюваних параметрів, що є значеннями сплайна в точках стику, зменшення дисперсії показують діагональні елементи коваріаційної матриці. На рис.4.20 показано, як зменшується дисперсія вихідних даних із зростанням числа точок на інтервалі сплайна.

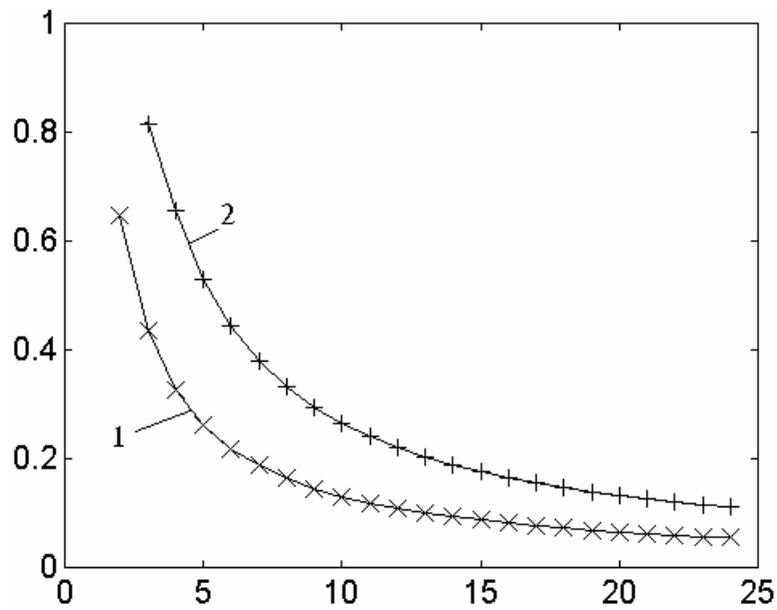


Рисунок 4.20. Ефективність МНК оцінок у вузлах у залежності від числа даних на фрагменті сплайна. 1 кубічний ермітів сплайн, 2 синусоподібний ермітів сплайн.

Для 16 точок маємо 0.0818 для кубічного ермітового сплайна і 0.6631 для синусоподібного ермітового сплайна. Фільтр з ермітовим кубічним сплайном є ефективнішим і може виникнути думка, про доцільність використання саме таких фільтрів. Однак потенційна ефективність досягається у припущенні, що модельна функція МНК фільтра достатньо точно описує детерміновану основу вхідного процесу. Звернувшись до частотної області можна стверджувати, що в цьому випадку маємо близькість спектрів базису та детермінованої складової вхідних даних. Якщо спектр базису ширший за спектр даних, то потенційна точність не буде досягнута, оскільки фільтр буде пропускати шуми в області пропускання за відсутності вхідного сигналу. В часовій області це проявиться наближенням не лише детермінованої, але і випадкової складової. З іншого боку, базис із спектром

вужчим ніж у сигналу спотворить вхідний сигнал. Похибка наближення сплайном буде значною, а оцінка зміщеною. Таким чином спектри базису та вхідних даних мають бути узгоджені, як мінімум за шириною області пропускання.

Залишки (різницю між вхідними й вихідними даними фільтра) $e = Y - S$ можна отримати з допомогою матриці $M = I - L$ - оператора ортогонального проектування. Рядки матриці M також можна розглядати, як коефіцієнти нерекурсивного фільтра верхніх частот, ортогонального до попереднього. Сума сигналів цих двох фільтрів утворює вхідний процес. В контексті виділення детермінованої складової з вхідних даних останній фільтр практичного значення немає. Проте він відіграє певну роль у системах стиснення даних з утратами та у вейвлет аналізі. Це прикладне питання буде детально розглянуте в наступному розділі.

4.4. Реалізація децимуючих МНК сплайн-фільтрів

Реалізація МНК сплайн-фільтрів розглянута в попередньому підрозділі є концептуально дуже простою, але вимагає максимальних схемних затрат. Врахувавши структуру розрахунків можна побудувати більш економні рішення. Розглянемо оцінку параметрів сплайна в дещо іншому порядку $S = X\hat{A} = X(X'X)^{-1}X'Y = XGB$.

Звернемо увагу на добуток $B = X'Y$. Врахувавши, що стовпці матриці планування є базисними функціями можна стверджувати, що отриманий вектор-стовпець складається з елементів, що є згорткою базисних функцій і вхідних даних. Для нелокальних базисів розрахунок потребує значних затрат, але для локальних базисних сплайнів ситуація зовсім інша. Обсяг розрахунків на кожний елемент матриці B не більше $4n$ операцій множення і $4n-1$ додавання. З точки зору теорії фільтрації ці операції відповідають фільтрації узгодженими фільтрами, що налаштовані на сигнал-базисну функцію.

В результаті перемноження коваріаційної матриці і **B** отримаємо вектор оцінюваних параметрів. Як показано у розділі 3, коваріаційна матриця є симетричною діагональною матрицею. Якщо прийняти фрагменти сплайна однаковими, то коваріаційна матриця визначатиметься ненульовими елементами довільного рядка. Практично, для розглянутих базисів матрицю визначатимуть 4-8 значущих елементів. Відповідно для отримання елемента вектора оцінок необхідно 4-8 операцій множення. Множення на матрицю планування можна не враховувати, якщо прийняти для оцінки точку, що співпадає з вузлом сплайна (для ермітових базисів). Для підрахунку загальної кількості операцій необхідно врахувати множення в кореляторах, що становитиме $4n [2(d-1)+1]$, де $d=4\div 8$. Зрозуміло, що отримані значення є більшими ніж для реалізації з попереднього підрозділу. Схема розрахунків показана на рис.4.21. Схема є ілюстративною з точки зору цифрової обробки даних і показує яке місце у МНК займають корелятори (узгоджені фільтри). Представивши МНК у вигляді комбінації фільтрів з імпульсними характеристиками - базисними ермітовими сплайнами можна обґрунтувати вибір певних базисів. А саме можна розглядати фільтри як оптимальні. Наприклад узгоджені з відомим сигналом. Звичайно, мова йде про формальну аналогію, оскільки узгоджені фільтри застосовують в задачах виявлення сигналів. Зрозуміло, що такий сигнал мусить бути сплайном, або достатньо точно наближатися сплайном. Оптимальним фільтр буде у випадку, якщо вузли базисних функцій та сигналу-сплайна співпадуть. В інших випадках можна говорити про квазіоптимальність. При довільній схемі розміщення вузлів, спробувавши аналізувати ефективність фільтрації, отримаємо комбінаторну задачу. Отже, для загальних умов можна говорити лише про середні характеристики. Якщо прийняти, що базисні функції сигналу й фільтра однакові, вхідний сплайн-сигнал має фрагменти рівної довжини, що співпадають із довжиною фрагментів базису, то можна оцінити можливі максимальні втрати оптимальності.

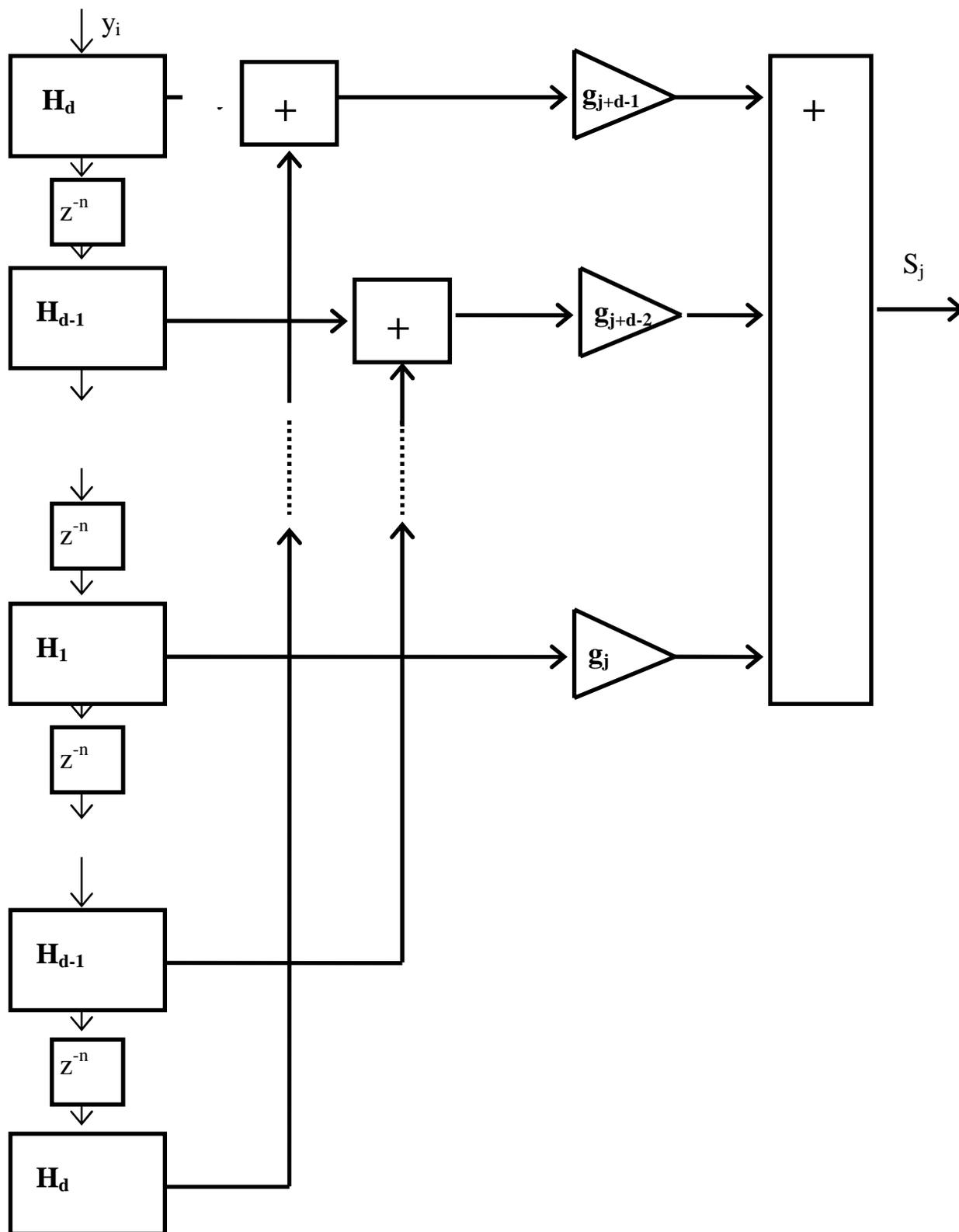


Рисунок 4.21. Схема МНК сплайн-фільтра

Вони становитимуть мінімум функції згортки базисних функцій на проміжку від нуля до половини довжини фрагмента сплайна. За найбільш песимістичних умов

максимум мінімального сигналу на виході фільтрів становитиме 69%, 63%, 21% від максимуму, відповідно для алгебраїчного, експоненційного та синусоподібного базисів, котрі розглянуто раніше. Проте вказані вище умови є практично мало реалістичними.

Результат усереднення з вагою g_j елементів кореляційної матриці легко проаналізувати, якщо вважати, що дисперсія на виході оптимальних фільтрів однакова й рівна σ^2 . Тоді очевидно, що результуюча дисперсія рівна

$$\sigma^2 \left(g^2_j + 2 \sum_{i=1}^{d-1} g^2_{j+i} \right), |g_{j+1}| \leq 1, i = \overline{0, d-1}. \quad (4.4)$$

Це дозволяє порівнювати загальну ефективність системи з ефективністю окремого фільтра. Якщо потрібна лише загальна оцінка ефективності, краще скористатися стандартним підходом МНК, через коваріаційну матрицю. Зокрема для кубічного ермітового сплайна наближену оцінку ефективності за умов однаковості фрагментів сплайна можна отримати аналітично.

Вузли сплайна розміщені на регулярній сітці $t_{j+1} = t_j + h$. Спостереження також утворюють регулярну сітку, кратну сітці вузлів $t_1 = t_j$, $t_{i+1} = t_i + q$, $q = h/N$. Значення сплайна в i -й точці на відрізку сплайна розраховується як

$$S(x_i) = A_{j-1} \varphi_{j-1}(x_i) + A_j \varphi_j(x_i) + A_{j+1} \varphi_{j+1}(x_i) + A_{j+2} \varphi_{j+2}(x_i), \quad (4.5)$$

де A_j - значення сплайна в j -му вузлі; φ_i - локальна функція форми.

З врахуванням характеру функції форми запишемо:

$$S_i = A_{j-1} h1_i + A_j h2_i + A_{j+1} h3_i + A_{j+2} h4_i, \quad (4.6)$$

В точках t_i спостерігаємо значення вхідного процесу y_i . Оцінюватимемо по цим даним параметри сплайн-моделі за методом найменших квадратів. Задача зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь $\mathbf{A} = (\mathbf{P}'\mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}'\mathbf{Y}$.

Матриця планування \mathbf{P} є блочно - діагональною з однаковими блоками розмірності $4 \times N$. Елементи матриці рівні:

$$h1_i = -\frac{1}{2N^3} (i^3 - (2N + 3)i^2 + (N^2 + 4N + 3)i - N^2 - 2N - 1), \quad (4.7)$$

$$h2_i = \frac{1}{2N^3}(3i^3 - (5N + 9)i^2 + (10N + 9)i - 2N^2 - 5N - 3),$$

$$h4_i = \frac{1}{2N^3}(i^3 - (N + 3)i^2 + (2N + 3)i - N - 1),$$

$$h3_i = 1 - h1_i - h2_i - h4_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & 0 & h1_N & h2_N & h3_N & h4_N & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & h1_1 & h2_1 & h3_1 & h4_1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & h1_2 & h2_2 & h3_2 & h4_2 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & h1_N & h2_N & h3_N & h4_N & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & h1_1 & h2_1 & h3_1 & h4_1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & h1_2 & h2_2 & h3_2 & h4_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Матриця $\mathbf{C} = \mathbf{P}'\mathbf{P}$ симетрична, семидіагональна, що повністю визначається 4-ма елементами. Врахувавши [142]

$$\sum_{k=1}^N k^N = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N C_{N+1}^k (n+1)^{N+1-k} B_k, \quad \text{де } B_k \text{ - числа Бернуллі,} \quad (4.9)$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{171N^6 + 14N^2 + 25}{210N^5}, \\ c_1 &= \frac{71N^6 - 21N^2 - 50}{560N^5}, \\ c_2 &= -\frac{N^6 - 1}{28N^5}, \\ c_3 &= \frac{3N^6 + 7N^2 - 10}{1680N^5}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Обернена матриця \mathbf{C}^{-1} є кореляційною матрицею похибок оцінки параметрів моделі при дисперсії вхідних даних рівній одиниці. \mathbf{C}^{-1} симетрична матриця, діагональні елементи якої є дисперсією оцінок у відповідних вузлах, а інші елементи характеризують попарну кореляцію похибок в оцінках. Оскільки сплайн є

локальною функцією, то значна кореляція спостерігатиметься між чотирма найближчими вузлами. Тоді матрицю з достатньою для технічних застосувань точністю вважатимемо семидіагональною. Позначимо симетричну семидіагональну матрицю $G \approx C^{-1}$

$$G = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & 0 & g_3 & g_2 & g_1 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & g_3 & g_2 & g_1 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & g_3 & g_2 & g_1 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & g_3 & g_2 & g_1 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Елементи матриці рівні: (4.12)

$$\begin{aligned} g_0 &= 3360 * N^5 (192850731 * N^{18} + 55913802 * N^{14} + 115162185 * N^{12} + \\ & 3878203 * N^{10} + 14380030 * N^8 + 12237164 * N^6 + 243285 * N^4 + 338100 * N^2 + 132500) / Q; \\ g_1 &= -(5880 * (19420479 * N^{18} - 2218407 * N^{14} - 8370390 * N^{12} - 936523 * N^{10} - \\ & 3897820 * N^8 - 3646849 * N^6 - 118790 * N^4 - 166700 * N^2 - 65000)) / Q; \\ g_2 &= (94080 * (516906 * N^{18} - 34383 * N^{14} - 480300 * N^{12} + 7448 * N^{10} - 100 * N^8 - \\ & 23671 * N^6 + 4900 * N^4 + 6700 * N^2 + 2500)) / Q; \\ g_3 &= - (6720 * (2083527 * N^{18} - 109221 * N^{14} - 3790200 * N^{12} + 158711 * N^{10} + \\ & 730100 * N^8 + 1005733 * N^6 - 29400 * N^4 - 36750 * N^2 - 12500)) / Q; \\ Q &= 495160052859 * N^{24} + 208167799644 * N^{20} + 432054656280 * N^{18} + \\ & 23505750114 * N^{16} + 87252201960 * N^{14} + 73245219604 * N^{12} + 2902503240 * N^{10} + \\ & 3923029579 * N^8 + 1433754520 * N^6 + 7438200 * N^4 + 4004000 * N^2 + 550000. \end{aligned}$$

Отже, $g_0(N)$ характеризує ефективність методу при заданій кількості спостережень на одному фрагменті сплайна. Залежність показана на рис.4.22. Порівняйте з рис.4.20.

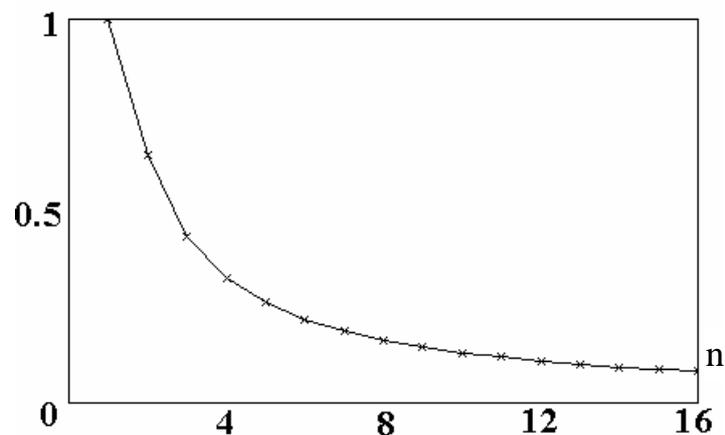


Рисунок 4.22. Ефективність кубічного ермітового МНК сплайн-фільтра

При заданій ширині ненульових елементів кореляційної матриці (7 діагоналей) для оцінки у вузлі використовуються вхідні дані з 6 фрагментів сплайна. Отже загальна кількість даних, що враховуються при розрахунку оцінки становитиме $6 \cdot N$. При оцінюванні загальної ефективності потрібно брати до уваги не лише зменшення дисперсії стохастичної складової у вхідних даних, але й динамічну похибку. Нев'язка інтерполяції кубічним ермітовим сплайном становить

$$\frac{\max |f^{(4)}(t)|}{384} h^4, \text{ де } f - \text{детермінована основа вхідного процесу.}$$

Отже в порівнянні з оцінюванням із використанням одного фрагмента кубічного полінома отримаємо в 16 разів меншу динамічну похибку для рівної кількості спостережень.

Надмірність схемної реалізації обчислень зображених на рис.4.21 можна значно зменшити, якщо немає необхідності в отриманні нової оцінки з кожним надходженням нового відліку. Указана ситуація є типовою для систем із пониженням частоти дискретизації (децимація). Природним є зниження частоти дискретизації у n раз (число відліків на фрагменті сплайна). Наступне підвищення

частоти дискретизації легко виконати з допомогою сплайн-інтерполятора з аналогічними базисами.

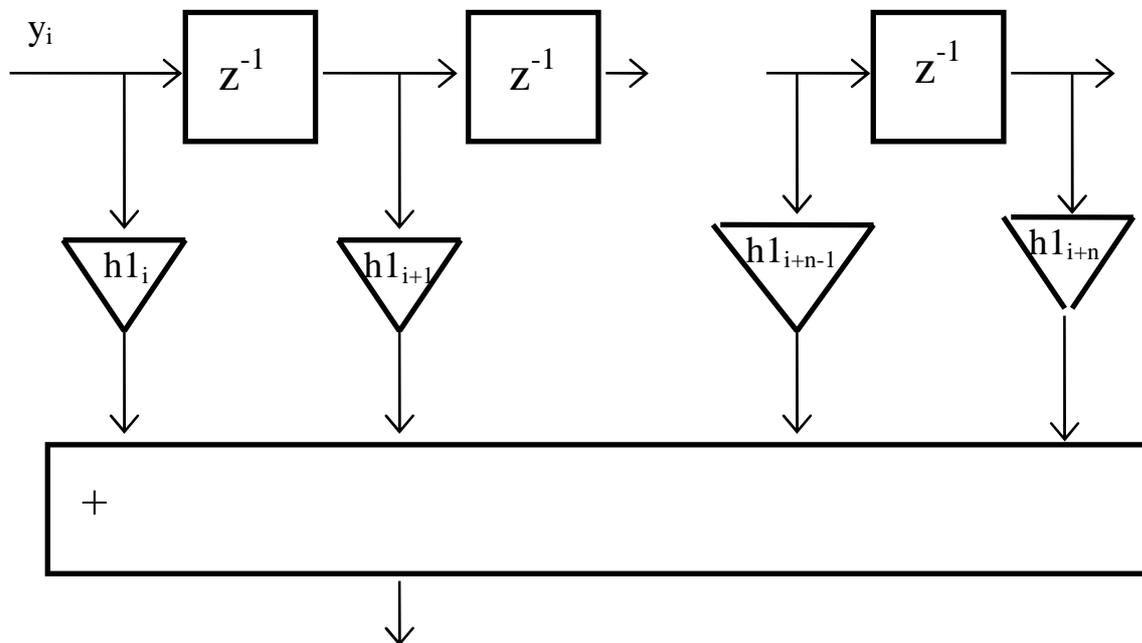


Рисунок 4.23. Один з фрагментів корелятора ($h1$)

Оскільки всі корелятори мають однакові імпульсні характеристики, можна обійтися лише одним. Корелятор ділиться на чотири фрагменти відповідно до числа фрагментів базису. Схема фрагмента показана на рис.4.23, а повна схема розрахунків на рис.4.24.

Представлена схема містить мінімальну кількість елементів і її можна легко реалізувати програмно або апаратно. Перехідний процес у такій схемі є аналогічний попереднім схемам. Платою за скорочення елементів є отримання вихідних даних лише на кожний n -й відлік. Тобто фільтр є децимуючим із пониженням частоти дискретизації в число відліків на фрагменті сплайна. При відсутності або досить низькому рівні шумів, якість фільтра слід оцінювати за методикою саме для децимуючих фільтрів [301]. Особливу увагу слід звернути на глибину ослаблення сигналу, щоб мінімізувати явище накладення частот (елайзінг) [291].

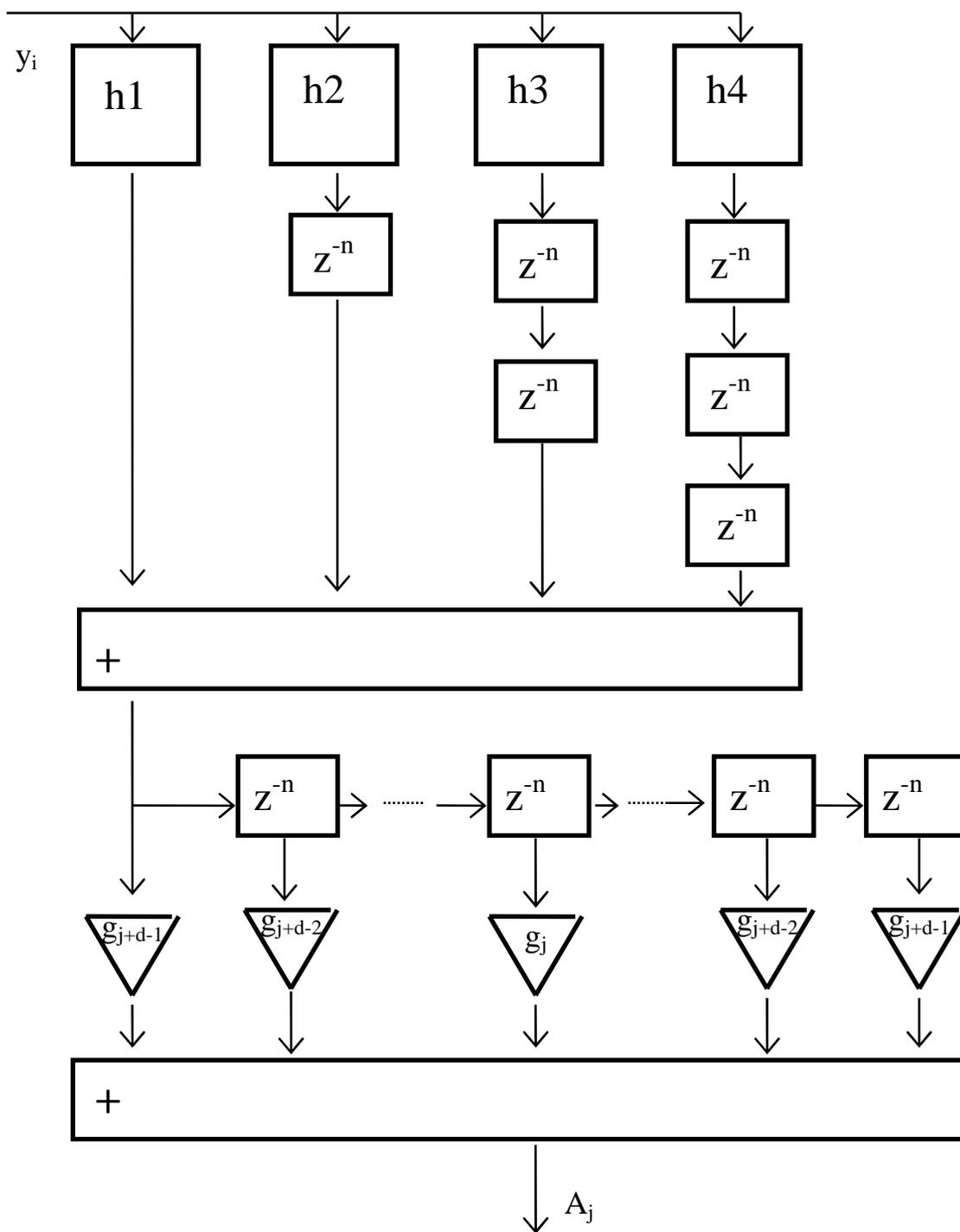


Рисунок 4.24. Сплайн-фільтр зі стисненням даних в n разів

При необхідності отримання вхідної частоти її відновлюють з допомогою сплайн-інтерполятора. Алгоритмічна реалізація МНК сплайн-фільтрів показана в додатку Е.

4.5. Рекурентні алгоритми та засоби отримання МНК оцінок

Розглянемо іншу групу алгоритмів, що дозволяють скоротити обсяги розрахунків. Це рекурентні схеми. Рекурентний МНК (РМНК) алгоритм є загальновідомим [214]. Проте, як і в попередніх випадках, використання сплайнової моделі вносить суттєві особливості в загальну схему розрахунків.

Реалізація класичного РМНК можлива за умови наперед заданої й фіксованої схеми вузлів сплайна. Це диктується фіксованим числом оцінюваних параметрів у класичному РМНК. Умовою початку розрахунків є наявність щонайменше одного відліку на кожному фрагменті сплайна, так щоб число даних було не менше кількості оцінюваних параметрів. Ці умови є досить жорсткими для реалізації у реальному часі, де дані, як правило, надходять послідовно. Однак навіть за цих умов ефективність розрахунків для локальної сплайнової моделі буде вищою, ніж для класичних поліноміальних.

Нехай задані абсциси сітки вузлів сплайна

$$tu_1 < tu_2 < \dots < tu_r.$$

На деякому n -му етапі (маємо n відліків даних) розрахунків маємо матриці МНК

X_n - матриця планування ;

$$C_n = X_n^* X_n ; B_n = X_n^* Y_n ; \quad (4.13)$$

$G_n = C_n^{-1}$ - коваріаційна матриця;

$A_n = C_n^{-1} B_n$ - вектор оцінок.

Доцільно розрахунок починати з матриць ($n=r$):

$$X_r = C_r = G_r = I_r, B_r = Y_r, A_r = Y_r, \quad (4.14)$$

що відповідає точкам даних, абсциси котрих співпадають з абсцисами вузлів сплайна.

Тоді при надходженні наступного відліку даних, уточнені МНК оцінки рівнятимуться

$$A_{n+1} = A_n + sG_n T_{n+1} e \quad (4.15)$$

де

$$e = y_{n+1} - T_{n+1}^* A_n \text{ похибка екстраполяції,} \quad (4.16)$$

$$s = [1 + T_{n+1}^* G_n T_{n+1}]^{-1} \text{ спільний коефіцієнт пропорційності,} \quad (4.17)$$

$$G_{n+1} = G_n - G_n T_{n+1} s T_{n+1}^* G_n, \quad (4.18)$$

$$B_{n+1} = B_n + T_{n+1} y_{n+1}, \quad (4.19)$$

T_{n+1}^* новий рядок матриці планування.

Наслідком локальності базису буде скорочення розрахунків указаних вище матриць. Якщо відлік належить j -му фрагменту сплайна, то розрахунки зведуться до наступного.

$$e = y_{n+1} - (x1_{j-1,n+1} a_{j-1} + x2_{j,n+1} a_j + x3_{j+1,n+1} a_{j+1} + x4_{j+2,n+1} a_{j+2}), \quad (4.20)$$

$$s = \frac{1}{(1+u)}, \quad (4.22)$$

де

$$\begin{aligned} u = & x1_{j-1} (x1_{j-1} g_{j-1,j-1} + x2_j g_{j-1,j} + x3_{j+1} g_{j-1,j+1} + x4_{j+2} g_{j-1,j+2}) + \\ & + x2_j (x1_{j-1} g_{j,j-1} + x2_j g_{j,j} + x3_{j+1} g_{j,j+1} + x4_{j+2} g_{j,j+2}) + \\ & + x3_{j+1} (x1_{j-1} g_{j+1,j-1} + x2_j g_{j+1,j} + x3_{j+1} g_{j+1,j+1} + x4_{j+2} g_{j+1,j+2}) + \\ & + x4_{j+2} (x1_{j-1} g_{j+2,j-1} + x2_j g_{j+2,j} + x3_{j+1} g_{j+2,j+1} + x4_{j+2} g_{j+2,j+2}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

В останньому виразі і далі опущено індекс $n+1$ біля складових функції форми. У векторі оцінок корективи вносяться лише в чотири елементи

$$a_{j-1} = a_{j-1} + s \cdot e \cdot x1_{j-1} \sum_{i=1}^r g_{j-1,i}, \quad (4.24)$$

$$a_j = a_j + s \cdot e \cdot x 2_j \sum_{i=1}^r g_{j,i} ,$$

$$a_{j+1} = a_{j+1} + s \cdot e \cdot x 3_{j+1} \sum_{i=1}^r g_{j+1,i} ,$$

$$a_{j+2} = a_{j+2} + s \cdot e \cdot x 4_{j+2} \sum_{i=1}^r g_{j+2,i} .$$

Обсяг зазначених розрахунків можна зменшити, якщо коваріаційну матрицю наближено вважати діагональною (зменшення складових у сумах).

Розглянемо оновлення коваріаційної матриці. Позначимо

$W = G_n T_{n+1}$ матриця - стовпець із чотирма ненульовими елементами,

тоді

$$W^* = T_{n+1}^* G_n , \quad (4.25)$$

$$w_{j-1} = (x 1_{j-1} g_{j-1,j-1} + x 2_j g_{j-1,j} + x 3_{j+1} g_{j-1,j+1} + x 4_{j+2} g_{j-1,j+2}) ,$$

$$w_j = (x 1_{j-1} g_{j,j-1} + x 2_j g_{j,j} + x 3_{j+1} g_{j,j+1} + x 4_{j+2} g_{j,j+2}) ,$$

$$w_{j+1} = (x 1_{j-1} g_{j+1,j-1} + x 2_j g_{j+1,j} + x 3_{j+1} g_{j+1,j+1} + x 4_{j+2} g_{j+1,j+2}) ,$$

$$w_{j+2} = (x 1_{j-1} g_{j+2,j-1} + x 2_j g_{j+2,j} + x 3_{j+1} g_{j+2,j+1} + x 4_{j+2} g_{j+2,j+2}) .$$

$$g_{i,k} = \overline{g_{i,k}} - s \cdot w_i \cdot w_k , \quad i = \overline{j-1, j+2}, \quad k = \overline{j-1, j+2} . \quad (4.26)$$

В наведених виразах не враховано відсутність елементів для першого та останнього фрагментів. В зазначених випадках відсутні елементи просто відкидаються (вважаємо їх нульовими).

Звернемо увагу на той факт, що зі значенням відліку безпосередньо зв'язане лише значення похибки екстраполяції. Це дає можливість для фіксованої схеми надходження даних та фіксованої сітки вузлів користуватися попередньо розрахованими значеннями, окрім e . У цьому випадку загальна схема розрахунків матиме вигляд, показаний на рис.4.25. В регістрах зберігаються значення оцінюваних параметрів сплайна, ці значення використовуються в інтерполяторі

SplInt для розрахунку екстрапольованого значення сплайна. У блок пам'яті Мемо записані значення s та сум із виразів (4.24). Їх значення вибираються за значенням, або номером відліку.

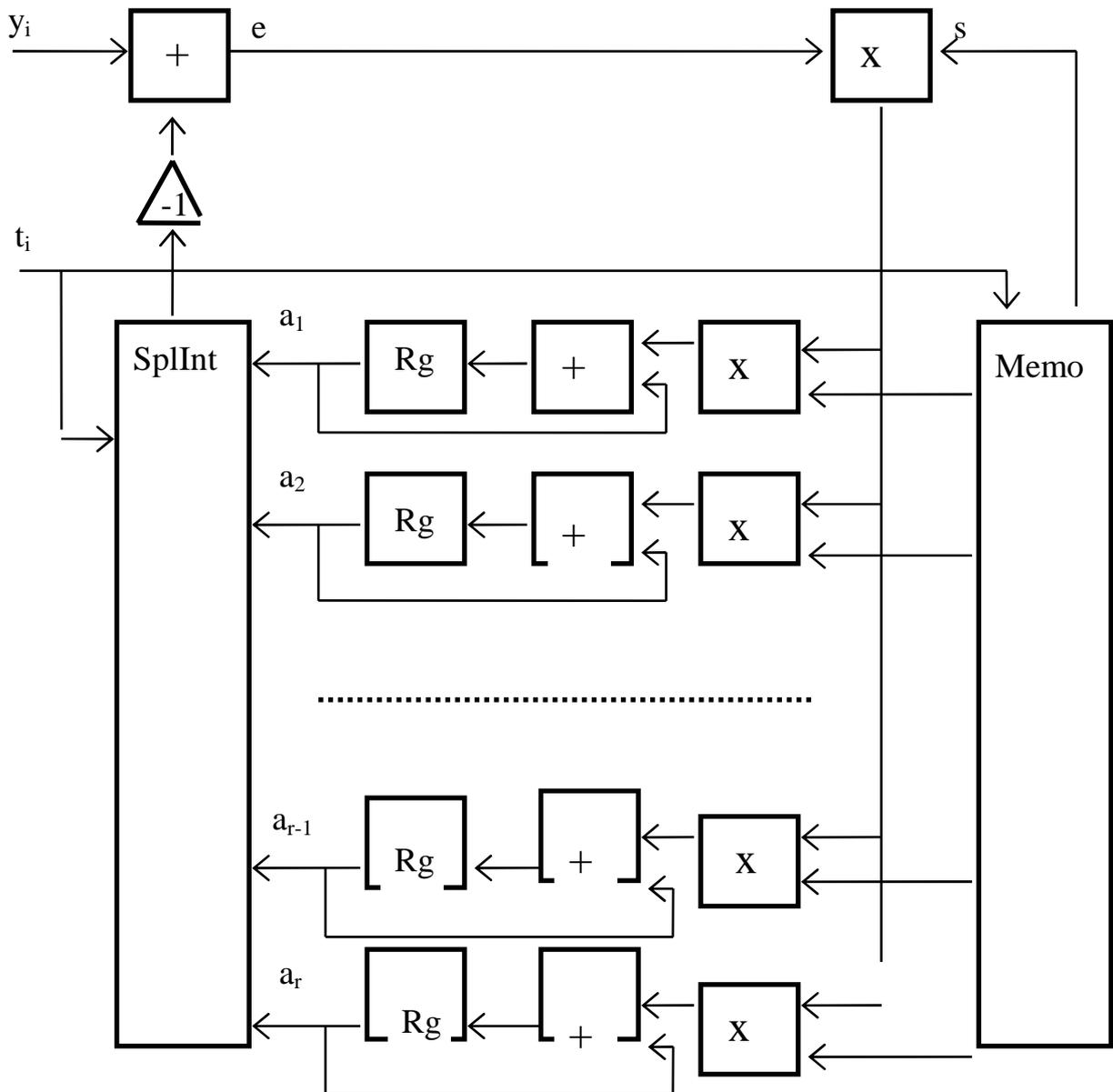


Рисунок 4.25. Схема отримання рекурентних МНК оцінок

Модифікуємо класичний РМНК із врахуванням збільшення числа оцінюваних параметрів у процесі роботи. Розглянемо схему розміщення вузлів та

даних при котрій останній фрагмент є інтервалом екстраполяції і не містить даних. Якщо надходить відлік, що належить останньому фрагменту до сплайна праворуч (або ліворуч) додаватимемо новий фрагмент і відповідно оцінюваний параметр. При додаванні чергового параметра - вузла сплайна матриця планування доповнюється не лише черговим рядком, але і стовпцем так, що має місце

$$X_{n+1} \tilde{A}_{n+1} \approx Y_{n+1}, \quad (4.27)$$

$$\begin{bmatrix} X_n & Z \\ T_{n+1}^* & p_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ a_{r+1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} Y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

де

\tilde{A}_{n+1} розширений (із більшою на 1 розмірністю) вектор параметрів (далі з хвилиною позначимо й інші відповідні матриці);

T_{n+1}^* останній рядок матриці планування без останнього елемента (шириною r);

Z нульовий стовпець відповідної розмірності (n);

p_{n+1} останній (правий) елемент матриці планування.

Оскільки базис є локальним, то можна економно реалізувати малорангову модифікацію коваріаційної матриці МНК.

Для

$$C_{n+1} = X_{n+1}^* X_{n+1} = \begin{bmatrix} X_n^* X_n + T_{n+1}^* T_{n+1} & T_{n+1}^* p_{n+1} \\ T_{n+1}^* p_{n+1} & p_{n+1} p_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{n+1} & V^* \\ V & m \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

маємо

$$G_{n+1} = C_{n+1}^{-1} = \begin{bmatrix} C_{n+1} & V^* \\ V & m \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} G_{n+1} d + G_{n+1} V^* V G_{n+1} & -G_{n+1} V^* \\ -V G_{n+1} & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

де

$$d = m - V G_{n+1} V^*. \quad (4.31)$$

Розглянемо матрицю - стовпець

$$B_{n+1} = X_{n+1}^* Y_{n+1} = \begin{bmatrix} X_n^* Y_n + T_{n+1} y_{n+1} \\ p_{n+1} y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{n+1} \\ b_{r+1} \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Тоді

$$\tilde{A}_{n+1} = \tilde{G}_{n+1} B_{n+1} = \begin{bmatrix} G_{n+1} B_{n+1} + G_{n+1} V^* V G_{n+1} B_{n+1} d^{-1} - V^* G_{n+1} p_{n+1} y_{n+1} d^{-1} \\ p_{n+1} y_{n+1} d^{-1} - V G_{n+1} B_{n+1} d^{-1} \end{bmatrix},$$

або

$$\tilde{A}_{n+1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} A_{n+1} d - p_{n+1}^2 y_{n+1} G_{n+1} T_{n+1} + p_{n+1}^2 G_{n+1} T_{n+1} T_n^* A_{n+1} \\ p_{n+1} (y_{n+1} - T_{n+1}^* A_{n+1}) \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

інакше

$$\tilde{A}_{n+1} = \begin{bmatrix} A_{n+1} - p_{n+1} G_{n+1} T_{n+1} \frac{p_{n+1}}{d} (y_{n+1} - T_n^* A_{n+1}) \\ \frac{p_{n+1}}{d} (y_{n+1} - T_{n+1}^* A_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n+1} - L a_{r+1} \\ a_{r+1} \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Розкриємо детальніше розрахунки в наведених вище виразах.

$$L = p_{n+1} G_{n+1} T_{n+1} \quad (4.35)$$

$$l_r = x4_{n+1} x3_{n+1} \sum_{j=1}^r g_{r,j}$$

$$l_{r-1} = x4_{n+1} x2_{n+1} \sum_{j=1}^r g_{r-1,j}$$

$$l_{r-2} = x4_{n+1} x3_{n+1} \sum_{j=1}^r g_{r-2,j}$$

$$l_{r-k} = 0, \quad k = \overline{3, r-1}.$$

$$d = x4_{n+1}^2 - x4_{n+1} (x1_{n+1} l_{r-2} + x2_{n+1} l_{r-1} + x3_{n+1} l_r). \quad (4.36)$$

$$a_{r+1} = \frac{x4_{n+1}}{d} [x3_{n+1} a_{r(n+1)} + x2_{n+1} a_{r-1(n+1)} + x1_{n+1} a_{r-2(n+1)}]. \quad (4.37)$$

$$\tilde{G}_{n+1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} G_{n+1}d + LL^* & -L \\ -L^* & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Стосовно розрахунку матриць G_{n+1}, A_{n+1} останні розраховуються за виразами (4.15, 4.18), прийнявши $x_{n+1} = 0$.

В розглянутому варіанті інтервал екстраполяції необхідний для того, щоб уникнути врахування крайових умов (інакше вектор Z буде не нульовим). В деяких застосуваннях таке обмеження є прийнятним. Тим більше, що обмеження на ширину останнього фрагмента не накладаються.

Однак існує й інша ефективна схема, котру доцільно застосовувати у схемах з однаковою шириною фрагментів. В даному випадку необхідно, щоб відлік, котрий розпочинає наступний фрагмент потрапив в останній вузол сплайна (у лівий вузол останнього фрагменту). Тоді маємо

$$X_{n+1} \tilde{A}_{n+1} \approx Y_{n+1},$$

$$\begin{bmatrix} X_n & W \\ T_{n+1}^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ a_{r+1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} Y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

де

\tilde{A}_{n+1} розширений (із більшою на 1 розмірністю) вектор параметрів;

T_{n+1}^* останній рядок матриці планування, елементи котрого рівні 0 окрім $r-1$ го, що рівний 1;

W стовпець, що містить k останніх ненульових елементів за числом відліків на останньому фрагменті;

Отже

$$\tilde{C}_{n+1} = X_{n+1}^* X_{n+1} = \begin{bmatrix} X_n^* X_n + T_{n+1}^* T_{n+1} & X_n^* W \\ W^* X_n & W^* W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{n+1} & Q^* \\ Q & h \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

$$\tilde{G}_{n+1} = \tilde{C}_{n+1}^{-1} = \begin{bmatrix} C_{n+1} & Q^* \\ Q & h \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} G_{n+1}d + G_{n+1}Q^*QG_{n+1} & -G_{n+1}Q^* \\ -QG_{n+1} & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

де

$$d = h - QG_{n+1}Q^*. \quad (4.42)$$

Розглянемо матрицю - стовпець

$$B_{n+1} = X_{n+1}^* Y_{n+1} = \begin{bmatrix} X_n^* Y_n + T_{n+1} y_{n+1} \\ W^* Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{n+1} \\ b_{r+1} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\tilde{A}_{n+1} = \tilde{G}_{n+1} B_{n+1} = \begin{bmatrix} G_{n+1}B_{n+1} + G_{n+1}Q^*QG_{n+1}B_{n+1}d^{-1} - G_{n+1}Q^*W^*Y_n d^{-1} \\ -QG_{n+1}B_{n+1}d^{-1} + W^*Y_n d^{-1} \end{bmatrix},$$

або

$$\tilde{A}_{n+1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} A_{n+1}d + G_{n+1}Q^*QA_{n+1} - G_{n+1}Q^*W^*Y_n \\ W^*Y_n - QA_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Враховуючи особливості структури матриць розрахунки зводяться до наступного.

$$q_j = 0, \quad j = \overline{1, r-3}, \quad (4.44)$$

$$q_{r-2} = \sum_k x4_k x3_k,$$

$$q_{r-1} = \sum_k x4_k x2_k,$$

$$q_r = \sum_k x4_k x1_k,$$

$$h = \sum_k x4_k^2. \quad (4.45)$$

Тут підсумок по k відноситься до точок, котрі належать останньому фрагменту (r).

Позначимо матрицю - стовпець

$M = G_{n+1}Q^*$, її елементи рівняються

$$m_j = q_{r-2}g_{r-2,j} + q_{r-1}g_{r-1,j} + q_r g_{r,j}, \quad j = \overline{1, r}. \quad (4.46)$$

Розрахуємо числові значення

$$u = W^*Y = \sum_k x_4 y_k, \quad (4.47)$$

$$v = QA_{n+1} = q_{r-2}a_{r-2} + q_{r-1}a_{r-1} + q_r a_r, \quad (4.48)$$

$$d = h - QM = h - q_{r-2}m_{r-2} - q_{r-1}m_{r-1} - q_r m_r. \quad (4.49)$$

Тоді оцінки при додаванні відліку, що співпадає з останнім вузлом рівні

$$\tilde{A}_{n+1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} A_{n+1}d + M(v - u) \\ u - v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n+1} - M a_{r+1} \\ a_{r+1} \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

Розглянемо вирази за котрими розраховуються матриці без врахування розширення розмірності

$$s = [1 + g_{r,r}]^{-1}, \quad (4.51)$$

$$e = y_{n+1} - a_r, \quad (4.52)$$

$$a_{j(n+1)} = \frac{(y_{n+1} - a_{r(n)})g_{r,j}}{1 - g_{r,r}}, \quad j = \overline{1, r}, \quad (4.53)$$

$$g_{i,j(n+1)} = g_{i,j(n)} - \frac{g_{i,r}g_{r,j}}{1 - g_{r,r}}, \quad i = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, r}. \quad (4.54)$$

Тут індекси в дужках означають (n) попереднє значення, (n+1) наступне значення.

Більш загальний варіант довільного розміщення спостереження на новому фрагменті є очевидним, проте ефективність розрахунків буде нижчою.

Основною проблемою РМНК із нарощуванням числа фрагментів сплайна є зростання у процесі роботи розмірності матриць. Взагалі для подібних алгоритмів існує проблема адекватності моделі при збільшенні числа даних, оскільки це пов'язано з розширенням інтервалу наближення. Тому користуються

рекурентними алгоритмами з обмеженою пам'яттю, котрі враховують лише обмежену кількість останніх відліків. Для сплайнових моделей ця проблема не є актуальною, проте приходиться рахуватися зі зростанням обсягів розрахунків. Однак локальність сплайнових базисів дозволяє вирішити цю проблему досить природнім чином. З аналізу розрахункових виразів та спостережень за модифікацією вектора оцінюваних параметрів та коваріаційної матриці слідує, що нові відліки значимо впливають лише на 6-8 останніх параметрів та відповідний правий нижній блок коваріаційної матриці. Тому починаючи з певного числа оцінюваних параметрів (8-10) рядки та стовпці матриць угорі та ліворуч відкидаються, а інші зміщуються. Таким чином рекурентний метод при додаванні вузла працюватиме, як віконний. Комбінований метод частково поєднує переваги віконного й рекурентного методів. Перехідний процес для вікна зменшується до двох відліків (для отримання оцінки у двох вузлах), значення оцінок уточнюються з кожним новим відліком, сітка вузлів може бути довільною. Проте зауважимо, що віконно-рекурентний алгоритм не еквівалентний прямій реалізації з використанням проекційної матриці. Основна відмінність у тому, що у віконній реалізації коваріаційна матриця є незмінною й відповідні оцінки однаково ефективні. В рекурентній схемі коваріаційна матриця й ефективність оцінок дещо змінюється. Фактично для чисто віконної схеми з надходженням кожного відліку зміщується фіксована сітка вузлів, для рекурентної при надходженні відліків усередині фрагмента сітка є фіксованою. Комбінований алгоритм є дещо складнішим у реалізації ніж окремі методи. Однак окремі випадки реалізації також є достатньо ефективними. Так, якщо сітка вузлів і даних є рівномірною, то коваріаційна матриця міститиме однакові рядки і стовпці за винятком нижнього краю праворуч. В наслідок цього відпадає необхідність у переміщенні елементів коваріаційної матриці.

Узагалі кінцева ефективність реалізації визначатиметься конкретними умовами застосування, котрі визначатимуть вагу таких характеристик як швидкість, обсяг пам'яті, вартість. Розглянуті вище алгоритми є основою, котра відкриває

потенційну можливість для ефективного інженерного рішення конкретних задач обробки сигналів.

4.6. Висновки

1. Використання ермітових сплайнів дозволяє уникнути проблем з розв'язком інтерполяційних рівнянь для неортогональних базисів. Тому ермітові сплайни найбільше підходять для швидких алгоритмів сплайн-інтерполяції.

2. Сплайн-інтерполятор можна представити у вигляді цифрового фільтра поліфазної структури з імпульсною характеристикою, що є базисним сплайном. З цієї аналогії слідує можливість описувати властивості базисних сплайнів в термінах частотних властивостей цифрових фільтрів.

3. Швидкі алгоритми сплайн-ітерполяції, котрі можна реалізувати апаратурно, працюють з рівномірними сітками даних та вузлів сплайна, де інтерполяція зводиться до 4 множень і 3 додавань на точку інтерполяції, що можуть виконуватись паралельно.

4. Процедуру МНК оцінки параметрів сплайна можна розглядати, як лінійне відображення простору даних в простір параметрів з допомогою проекційної матриці, котра є ідемпотентною.

5. Оцінку за МНК сплайнової моделі можна реалізувати у вигляді нерекурсивного цифрового фільтра з імпульсною характеристикою, що є рядком проекційної матриці порядку $n \times m$ (n -число даних на фрагменті, m -число значимих елементів в рядку коваріаційної матриці МНК).

6. Щоб зберегти лінійність фазочастотної характеристики МНК сплайн-фільтра доцільно користуватися рядками проекційної матриці, котрі відповідають вузловим точкам сплайна. Такі фільтри мають частотні характеристики близькі до частотних характеристик відповідних сплайнових базисів.

7. Процедуру оцінювання за МНК можна розглядати, як лінійну комбінацію узгоджених з сигналом нерекурсивних фільтрів. Для оптимальної фільтрації сигнал

має розкладатися за сплайновими базисами. З цього слідує, що сплайнові базиси слід вибирати з врахуванням вимог оптимальної фільтрації, спираючись на частотні характеристики вхідного сигналу.

8. МНК фільтр можна ефективно реалізувати у вигляді віконного алгоритму за умови, що сітки даних і вузлів сплайна рівномірні і кратні. Такий фільтр виконує стиснення даних в число відліків на фрагменті сплайна.

9. Для МНК оцінок кубічного ермітового сплайна у вікні отримані наближені аналітичні оцінки ефективності, що добре узгоджуються з емпіричними даними.

10. Рекурентний МНК для сплайнової моделі дозволяє отримати ефективні розрахункові вирази, і може бути реалізований апаратно. Однак у класичному вигляді він потребує апіорно заданої сітки вузлів сплайна, що обмежує його застосування.

11. Для сплайнової моделі розроблено рекурентний МНК з нарощуванням фрагментів сплайна в процесі надходження даних, що не потребує апіорного задавання сітки вузлів. Розглянуто два основних варіанти його реалізації. З останнім інтервалом (екстраполяції), що не містить даних, та варіант в котрому абсциса першої точки нового фрагменту співпадає з абсцисою останнього вузла. Отримані вирази свідчать про високу ефективність обчислень.

12. Особливістю рекурентного МНК з нарощуванням фрагментів сплайна є зростання числа оцінюваних параметрів і розмірностей матриць. Цього недоліку можна позбутись врахувавши локальний характер оцінок. Отриманий алгоритм є віконно-рекурентним і поєднує переваги обох підходів.

13. Перевагою локальних сплайнових базисів перед подібними не сплайновими віконними алгоритмами є природне встановлення вікна у часовій області, що впливає з локальних властивостей базисних сплайнів.

РОЗДІЛ 5. АДАПТИВНА ОБРОБКА ТА ЧАСТОТНО-ЧАСОВИЙ МНК СПЛАЙН-РОЗКЛАД І СИНТЕЗ СИГНАЛІВ

5.1. Постановка задачі

Основною метою розділу є розробка прикладних алгоритмів та структурних схем пристроїв для частотно-часового аналізу і синтезу сигналів за допомогою сплайнів побудованих за методом найменших квадратів.

Розглянуті в попередніх розділах сплайн-інтерполятори та сплайн-апроксиматори є складовими елементами пристроїв частотно-часового аналізу і синтезу. Частотно-часовий розклад доцільно застосовувати у випадках, коли частотні властивості корисного сигналу є невизначеними, або не стаціонарними. Відомо багато пристроїв, що здійснюють частотно-часовий розклад за допомогою вейвлетів. Однак в основі вейвлет розкладу є інтерполяція сигналу, що не дає ефективних оцінок за наявності адитивного білого шуму. В протиположності інтерполяції метод найменших квадратів за цих умов якраз і забезпечує максимальну ефективність в класі лінійних незміщених оцінок.

У другому підрозділі розглянемо принципову можливість такого розкладу, його відмінність від відомих схем вейвлет розкладу. Розглянемо приклад розкладу у сплайнових базисах за методом найменших квадратів добре відомої функції Хевісайда. Розклад виконаємо в аналітичному вигляді. Особливу увагу звернено на можливі значення параметрів розкладу та потенційні шляхи реалізації.

Задачою третього підрозділу є знаходження структури пристроїв для вирішення задачі аналізу і синтезу сигналів. Відомі схеми вейвлет-аналізу реалізовано у вигляді банків фільтрів. Така схема забезпечує достатню простоту і ефективність реалізації. Тому цілком логічною є задача побудови подібних структур для МНК сплайн-розкладу.

В четвертому підрозділі розглянуто питання статистичної обробки сигналів в частотно-часовому розкладі. Оскільки метод найменших квадратів дозволяє отримати оцінки достовірності коефіцієнтів розкладу, можливою стає перевірка ряду статистичних гіпотез. Цікавою також є перевірка наявності в залишках наближення детермінованої складової. Це дозволяє припинити подальший розклад, якщо сигнал не містить детермінованої складової. Для реалізації перевірки застосуємо непераметричні критерії.

В п'ятому підрозділі розглянемо структуру адаптивних пристроїв однократної обробки сигналів.

Шостий підрозділ містить основні висновки.

5.2. Загальні принципи частотно-часового МНК сплайн-розкладу

Як зазначалося в прешому підрозділі сплайни можна розглядати як окремий різновид вейвлет функцій. Біортогональні вейвлети якраз і утворюють з алгебраїчних базисних сплайн-функцій. Імпульсні характеристики нерекурсивних цифрових фільтрів також можна вважати близькими до вейвлетів. Розроблені алгоритми розрахунку біортогональних (зеркальних) вейвлет-фільтрів при частотному підході з допомогою нерекурсивних цифрових фільтрів. В другому підрозділі даної роботи показано, що значну кількість базисних сплайнів можна отримати шляхом згортки різноманітних імпульсних характеристик нерекурсивних цифрових фільтрів. Керуючись частотними властивостями фільтрів можна отримувати базисні сплайни із заданими частотними властивостями і таким чином адаптувати сплайни до частотних властивостей сигналів і завад, але для цього слід апріорі знати частотні характеристики сигналів і завад. Достоїнством вейвлет алгоритмів є природна адаптивність, що обумовлена різними масштабами та зміщенням базисних функцій. Такий підхід дозволяє виконувати обробку сигналів при мінімумі апріорної інформації. Використавши ідею мультимасштабності та

пірамідальної схеми розкладу вейвлетів розглянемо розклад, що здійснюється за допомогою методу найменших квадратів.

Позначимо базисний сплайн певного виду, що складається з чотирьох фрагментів як $B_{\tau,v}(t)$, де τ - зміщення базису відносно початкового (материнського) базисного сплайна, v - масштабний коефіцієнт базису відносно базисного. Отже можна записати:

$$B_{\tau,v}(t) = B_0\left(\frac{t-\tau}{v}\right), v \in R^+, \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.1)$$

Позначимо як **LS** оператор отримання оцінок МНК функції $f(t)$ в системі вектора базисних функцій \mathbf{B}_v . Вектор \mathbf{B}_v складається із базисних сплайнів, що утворений з материнського базисного сплайна зміщеннями кратними ширині фрагменту сплайна $\tau = nh$. Вектор оцінок (коефіцієнтів розкладу) в масштабі v запишемо наступним чином:

$$\mathbf{A}_v = \mathbf{LS}[f(t), \mathbf{B}_v]. \quad (5.2)$$

Вектор \mathbf{A}_v однозначно визначає сплайн-функцію $S_v(t)$ утворену з базисних сплайнів \mathbf{B}_v . Якщо розглядати $f(t)$ як випадкову функцію з нестационарним математичним сподіванням то $S_v(t)$ є його оцінкою з різною степенінню деталізації (в залежності від масштабу v). Такий погляд дає змістовне пояснення коефіцієнтам розкладу.

Встановимо межі зміни масштабу. Розглянемо функцію $f(t)$ на обмеженому фрагменті $f(t) \in [a, b]$. Значення масштабу v має нижню межу. Нехай материнський базисний сплайн ненульовий на фрагменті $[-2h, 2h)$:

$B_0(t) \neq 0, t \in [-2h, 2h)$. Тоді нижнє значення рівне $v_{\min} = \frac{b-a}{h}$. В цьому

випадку сплайн перетворюється у звичайний відрізок функції з якої складається сплайн і отримаємо класичний випадок МНК оцінювання. Звичайно, ця межа є відносною, тому що в принципі можливе і подальше зменшення ν .

Якщо $f(t)$ є необмеженою, або фрагмент достатньо великим, нижня межа ν визначатиметься виходячи з роздільної здатності в частотній області, а саме в області низьких частот. Роздільна здатність по частоті буде пропорційною ν (обернено пропорційною ширині базисного сплайна на заданому масштабі).

Можна встановити і верхню межу ν , якщо функція $f(t)$ представлена дискретними відліками з кроком Δ . Верхня межа рівна $\nu_{\max} = \frac{\Delta}{h}$. В цьому випадку ширина окремого фрагмента сплайна буде рівна кроку дискретизації, а довжина вектора \mathbf{A}_ν буде рівнятися числу відліків функції. Тобто МНК зведеться до інтерполяційної задачі. Подальше збільшення масштабу для дискретного варіанту не можливе, оскільки система лінійних рівнянь МНК не вирішується. Для неперервного варіанту потенційно можливо отримати перехід $\nu_{\max} \rightarrow +\infty$, якщо базисний сплайн є швидкопадаючою функцією. Тоді базисний сплайн наближається до дельта функції. Практично ж у неперервному випадку ν_{\max} обмежується необхідною роздільною здатністю в часі.

Отримання сплайна $S_\nu(t)$ позначимо оператором $\mathbb{I}\mathbb{N}$, що по своїй суті є оператором інтерполяції. Нагадаємо, що коефіцієнти розкладу \mathbf{A}_ν для ермітових сплайнів є значеннями сплайна у вузлових точках, а для інших пропорційні цим точкам. Запишемо

$$\mathbf{S}_\nu = \mathbb{I}\mathbb{N}[\mathbf{A}_\nu, \mathbf{B}_\nu], \quad (5.3)$$

звідки отримаємо залишки наближення (нев'язку МНК апроксимації)

$$\mathbf{E}_\nu = f(t) - \mathbb{I}\mathbb{N}[\mathbf{A}_\nu, \mathbf{B}_\nu], \quad (5.4)$$

або інакше
$$\mathbf{E}_v = f(t) - \text{IN}[\text{LS}[f(t), \mathbf{B}_v], \mathbf{B}_v]. \quad (5.5)$$

Позначимо окремим оператором **RS** процес отримання залишків від МНК наближення:

$$\mathbf{E}_v = \text{RS}[f(t), \mathbf{B}_v]. \quad (5.6)$$

Очевидно, що $\mathbf{E}_v + \mathbf{S}_v = f(t)$. Тобто має місце реконструкція розкладу. Отже маємо два оператори розкладу сигналу $f(t)$ на дві складові. Низькочастотну складову (тренд) \mathbf{A}_v , що має розмірність від двох до половини числа вхідних відліків. Високочастотну складову \mathbf{E}_v , розмірність якої завжди рівняється числу вхідних даних. Обидва оператори є лінійними і якщо знехтувати похибками розрахунків реконструкція є точною. Схема розкладу і реконструкції показана на рис.5.1. Як слідує з результатів підрозділу 3.5 вектор коефіцієнтів \mathbf{A}_v є коефіцієнтами узагальненого перетворення Фур'є у сплайновому базисі \mathbf{B}_v . Важливо, що розклад можна знаходити не лише в дискретному варіанті (що має місце у вейвлет розкладі), але й для неперервних базисних сплайнів і функцій.

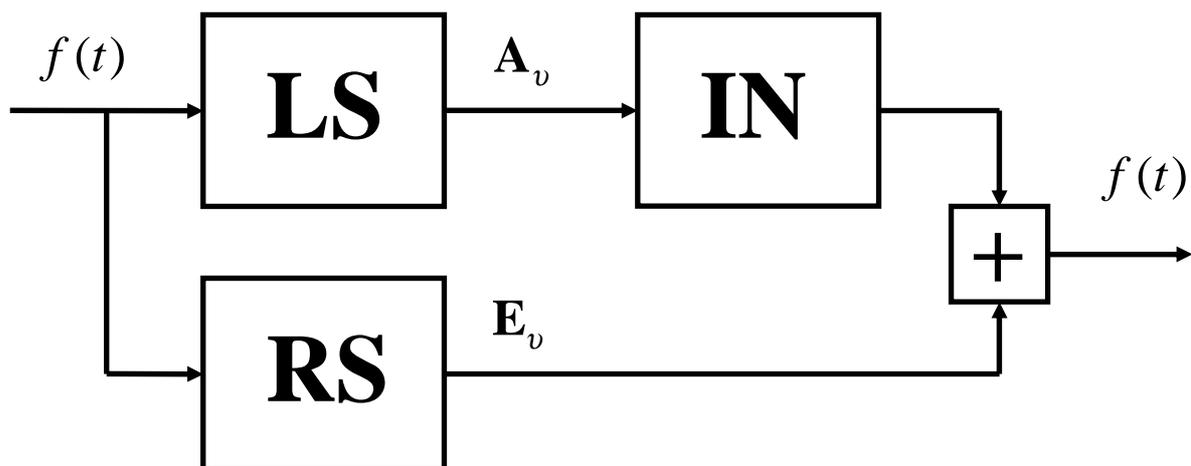


Рис.5.1. Загальна схема розкладу і реконструкції.

По аналогії із вейвлет розкладом легко побудувати пірамідальну схему розкладу за методом найменших квадратів. Називатимемо далі такий розклад LSS розкладом (Least Squares Spline). На відміну від вейвлетів подальшому розкладу

підлягає не низькочастотна, а високочастотна складова. На початку розкладу отримаємо найбільш грубу, загальну часову тенденцію в сигналі. В частотній області цьому відповідатиме область нижніх частот, де для багатьох сигналів і міститься інформативна складова. Кожний наступний розклад буде давати все більшу деталізацію в часовій області.

В загальному операторному вигляді розклад можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{v_0} &= \mathbf{LS}[f(t), \mathbf{B}_{v_0}], \quad \mathbf{E}_{v_0} = \mathbf{RS}[f(t), \mathbf{B}_{v_0}], \\ \mathbf{A}_{v_n} &= \mathbf{LS}[\mathbf{E}_{v_{n-1}}, \mathbf{B}_{v_n}], \quad \mathbf{E}_{v_n} = \mathbf{RS}[\mathbf{E}_{v_{n-1}}, \mathbf{B}_{v_n}], \quad n = \overline{1, n_{\max}}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Результатом розкладу є вектори МНК оцінок та вектор залишків наближення на останньому етапі розкладу:

$$\Omega = \{\mathbf{A}_{v_0}, \mathbf{A}_{v_1}, \dots, \mathbf{A}_{v_{n_{\max}}}, \mathbf{E}\}, \quad \text{де } \mathbf{E} = \mathbf{E}_{v_{n_{\max}}}. \quad (5.8)$$

Реконструкція полягає в наступній послідовності операцій:

$$f(t) = \mathbf{E} + \sum_{n=0}^{n_{\max}} \mathbf{IN}[\mathbf{A}_{v_n}, \mathbf{B}_{v_n}]. \quad (5.9)$$

В цілому операцію розкладу та синтезу позначатимемо операторами:

$$\Omega = \underset{n}{\mathbf{LSS}}[f(t), \mathbf{B}_0, \Upsilon], \quad n\text{-етапний розклад функції } f(t) \text{ в базисі}$$

утвореному з материнського базисного сплайна \mathbf{B}_0 за допомогою масштабування згідно вектора масштабів Υ (зміщення на всіх масштабах здійснюється пропорційно ширині фрагмента сплайна);

$$f(x) = \underset{n}{\mathbf{LSS}}^{-1}[\Omega, \mathbf{B}_0, \Upsilon], \quad \text{реконструкція функції } f(t) \text{ з коефіцієнтів}$$

описаного вище розкладу.

Процес поетапного розкладу і синтезу схематично зображено на рис.5.2.

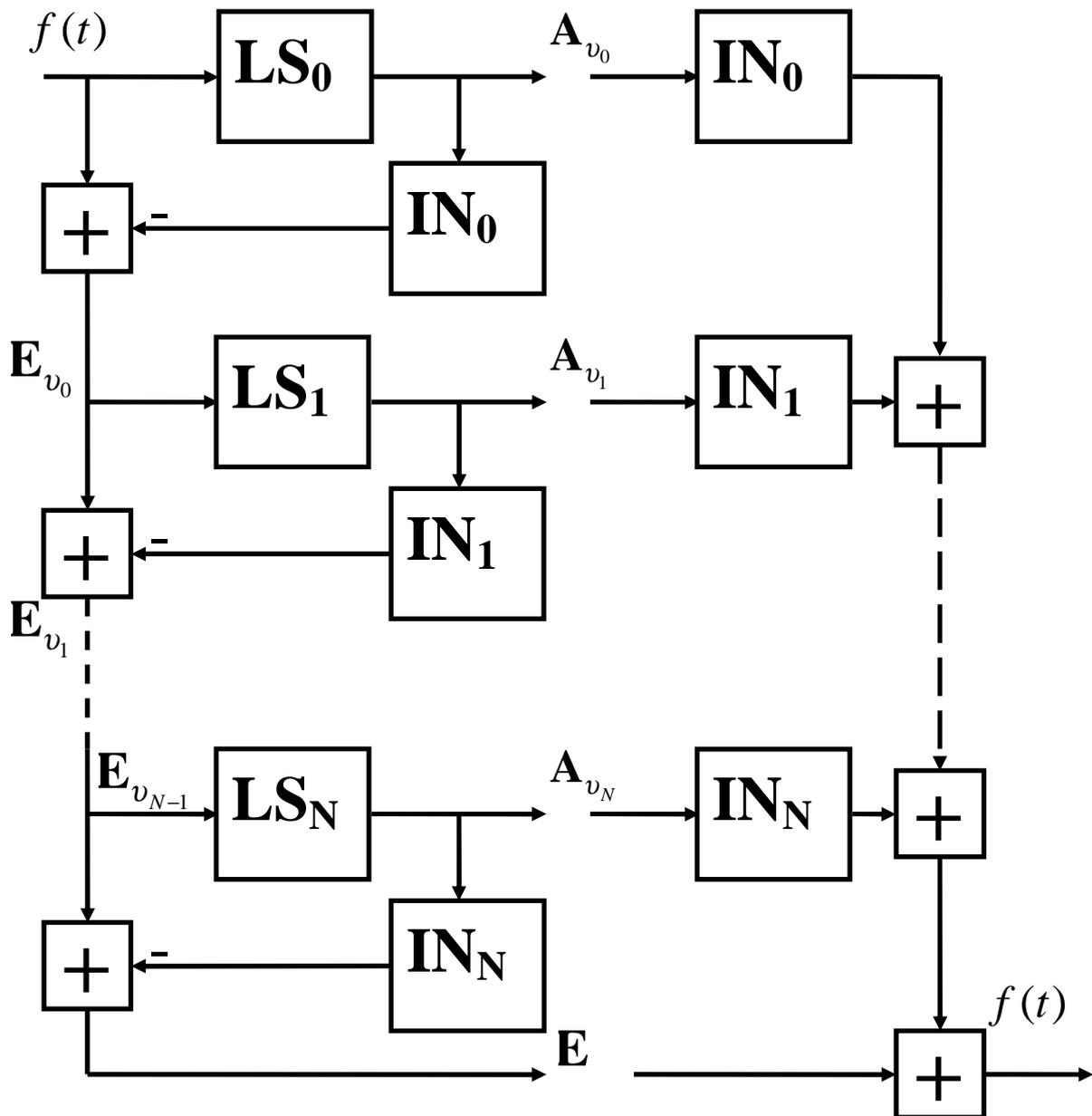


Рис.5.2. Схема поетапного LSS розкладу.

Для детальнішого пояснення LSS розкладу перейдемо до більш детального розгляду процесу. В основі розкладу вирази 3.60-3.66. Ключовим є наступне рівняння:

$$\int_a^b f(t) B_{\tau_i, v}(t) dt = \sum_{k=i-3}^{i+3} a_{\tau_k, v} \int_a^b B_{\tau_k, v}(t) B_{\tau_i, v}(t) dt, \text{ тут } \tau_i = ih_v. \quad (5.10)$$

Для знаходження коефіцієнтів розкладу в заданому базисі необхідно визначити величину інтегралів з правої частини рівняння 5.13:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} B_{0,v}(t) B_{0,v}(t) dt, \\
 c_1 &= \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} B_{0,v}(t) B_{h,v}(t) dt, \\
 c_2 &= \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} B_{0,v}(t) B_{2h,v}(t) dt, \\
 c_3 &= \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} B_{0,v}(t) B_{2h,v}(t) dt.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Масштабний коефіцієнт введений для незмінності цих величин при зміні масштабу. Результати в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1. Значення інтегралів 5.11.

| Базис\коэф. | c_0 | c_1 | c_2 | c_3 |
|----------------|-------|--------|-------|----------|
| кубічний | 0.479 | 0.236 | 0.024 | 0.198E-3 |
| Ермітів куб. | 57/70 | 71/560 | -1/28 | 1/560 |
| експоненційний | 2.216 | 0.955 | 0.067 | 0.332E-3 |
| синусоїдальний | 1.173 | 0.640 | 0.087 | 1.981E-3 |

У відповідності із системою 3.66 знайдемо елементи інверсної матриці. Враховуючи локальність базисів для розрахунків побудуємо матрицю розмірності 41x41 і знайдемо значимі елементи центрального рядка симетричної інверсної матриці. Результати розрахунків для трьох видів базисних сплайнів представлені в таблиці 5.1 і 5.2.

Таблиця 5.2. Величина значимих елементів інверсної матриці (q_i).

| Індекс\базис | кубічний | Ермітів | Експоненційний | Синусоїд. |
|--------------|----------|---------|----------------|-----------|
| 0 | 4.9647 | 1.3088 | 0.7897 | 3.0958 |
| 1 | -3.0910 | -0.2309 | -0.4057 | -2.2529 |
| 2 | 1.7079 | 0.0990 | 0.1859 | 1.4614 |
| 3 | -0.2908 | -0.0301 | -0.0836 | -0.9201 |
| 4 | 0.4937 | 0.0101 | 0.0375 | 0.5745 |
| 5 | -0.2643 | -0.0033 | -0.0168 | -0.3578 |
| 6 | 0.1415 | 0.0011 | 0.0075 | 0.2227 |
| 7 | -0.0757 | -0.0004 | -0.0034 | -0.1386 |
| 8 | 0.0405 | 0.0001 | 0.0015 | 0.0863 |
| 9 | -0.0217 | 0.0000 | -0.0007 | -0.0537 |
| 10 | 0.0116 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0334 |
| 11 | -0.0062 | 0.0000 | -0.0001 | -0.0208 |
| 12 | 0.0033 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0129 |
| 13 | -0.0018 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0080 |

Як приклад розглянемо розклад сигналу виду $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ (одиничний

стрибок, або функція Хевісайда). Розглянемо в якості материнського базисного сплайну кубічний В-сплайн та кубічний ермітовий сплайном (де необхідно розрізняти позначатимемо $H_{0,v}(t)$) з центром в нульовій точці (рис.5.3). Ермітовий базис має найбільш швидко спадаючі коефіцієнти інверсної матриці. Він задається наступним виразом (поліноміальна форма прийнята для зручності аналітичних розрахунків):

$$H_0(t) = \begin{cases} (1+t/h)(2+t/h)^2, & t \in [-2h, -h) \\ -\frac{5}{2}(t/h)^2 - \frac{3}{2}(t/h)^3 + 1, & t \in [-h, 0) \\ -\frac{5}{2}(t/h)^2 + \frac{3}{2}(t/h)^3 + 1, & t \in [0, h) \\ -(t/h-1)(t/h-2)^2, & t \in [h, 2h) \\ 0, & t \notin [-2h, 2h) \end{cases} \quad (5.12)$$

Для В-сплайна маємо:

$$B_0(t) = \frac{1}{48} \begin{cases} (4+2t/h)^3, & t \in [-2h, -h) \\ -3(2t/h)^3 - 12(2t/h)^2 + 32, & t \in [-h, 0) \\ 3(2t/h)^3 - 12(2t/h)^2 + 32, & t \in [0, h) \\ (4-2t/h)^3, & t \in [h, 2h) \\ 0, & t \notin [-2h, 2h) \end{cases} \quad (5.13)$$

Прийmemo для материнського сплайна $h=1$.

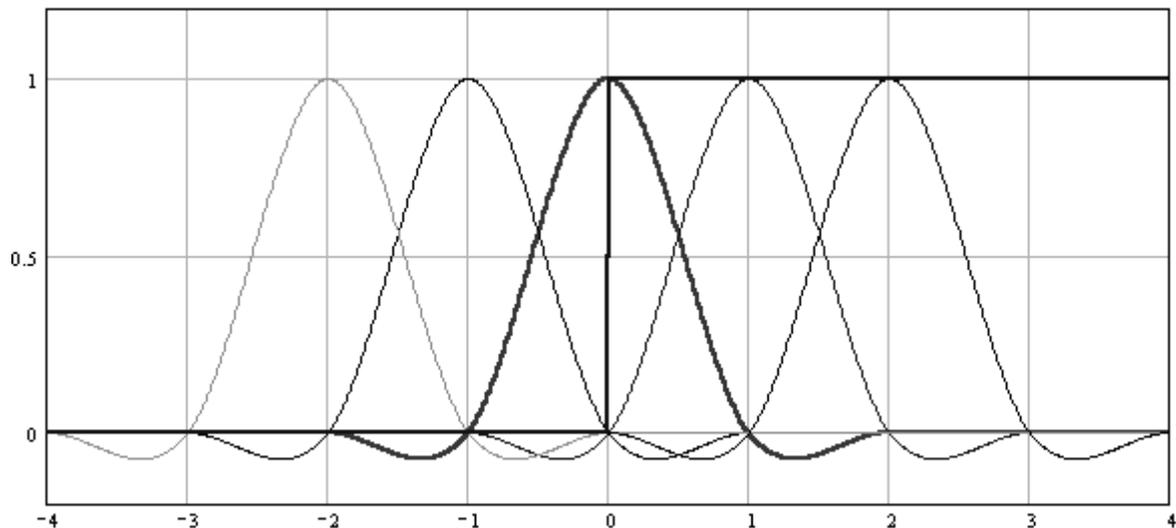


Рис.5.3. Функція Хевісайда та частина ермітового сплайнового базису.

Для визначення лівої частини рівняння 5.13 знайдемо значення наступних інтегралів:

$$\int_{-2h}^{-h} H_{0,1}(x) dx = -\frac{1}{12}h, \quad \int_{-2h}^{-h} B_{0,1}(x) dx = \frac{1}{24}h;$$

$$\int_{-h}^0 H_{0,1}(x)dx = 13/24 h, \quad \int_{-h}^0 B_{0,1}(x)dx = 11/24 h; \quad (5.14)$$

$$\int_0^h H_{0,1}(x)dx = 13/24 h, \quad \int_0^h B_{0,1}(x)dx = 11/24 h;$$

$$\int_h^{2h} H_{0,1}(x)dx = -1/12 h, \quad \int_h^{2h} B_{0,1}(x)dx = 1/24 h.$$

Назвемо проміжними коефіцієнтами розкладу значення $b_i = \int_a^b f(t)B_{ih,v}(t)dt$. Для заданої функції Хевісайда при $v = 1$ отримаємо наступні проміжні коефіцієнти для ермітового сплайна:

$$\dots, b_{-2} = 0, b_{-1} = -1/24, b_0 = 1/2, b_1 = 25/24, b_2 = 1, \dots;$$

для кубічного:

$$\dots, b_{-2} = 0, b_{-1} = 1/24 = 0.042, b_0 = 12/24 = 0.5, b_1 = 23/24 = 0.968, b_2 = 1, \dots.$$

Для отримання коефіцієнтів на етапі розкладу слід виконати операції згідно виразу:

$$a_j = q_0 b_0 + \sum_{k=1}^m q_k (b_{j+k} + b_{j-k}). \quad (5.15)$$

Отримаємо вектори коефіцієнтів розкладу для ермітового базису

$$\mathbf{A}_1 = \{ \dots, 0.0004, -0.0012, 0.0037, -0.0111, 0.0354, -0.0894, \underline{\mathbf{0.5}}, 1.0894, 0.9646, 1.0112, 0.9963, 1.0012, \dots \};$$

для кубічного базису

$$\mathbf{A}_1 = \{ \dots, 0.0168, -0.0197, 0.0485, -0.0789, 0.1584, -0.2789, \underline{\mathbf{0.4731}}, 1.3538, 0.8096, 1.1090, 0.9478, 1.0342, 0.9879, 1.0127, 0.9994, \dots \}.$$

Виділене значення відповідає базисному сплайну з нульовим зміщенням $B_{0,v}(t)$. Побудуємо ароксимууючий сплайн $S_1(t)$ (оператор \mathbf{IN}). Для цього базисні

функції необхідно домножити на відповідні коефіцієнти розкладу. Вигляд зважених базисних функцій та апроксимуючого сплайна показано на рис.5.4.

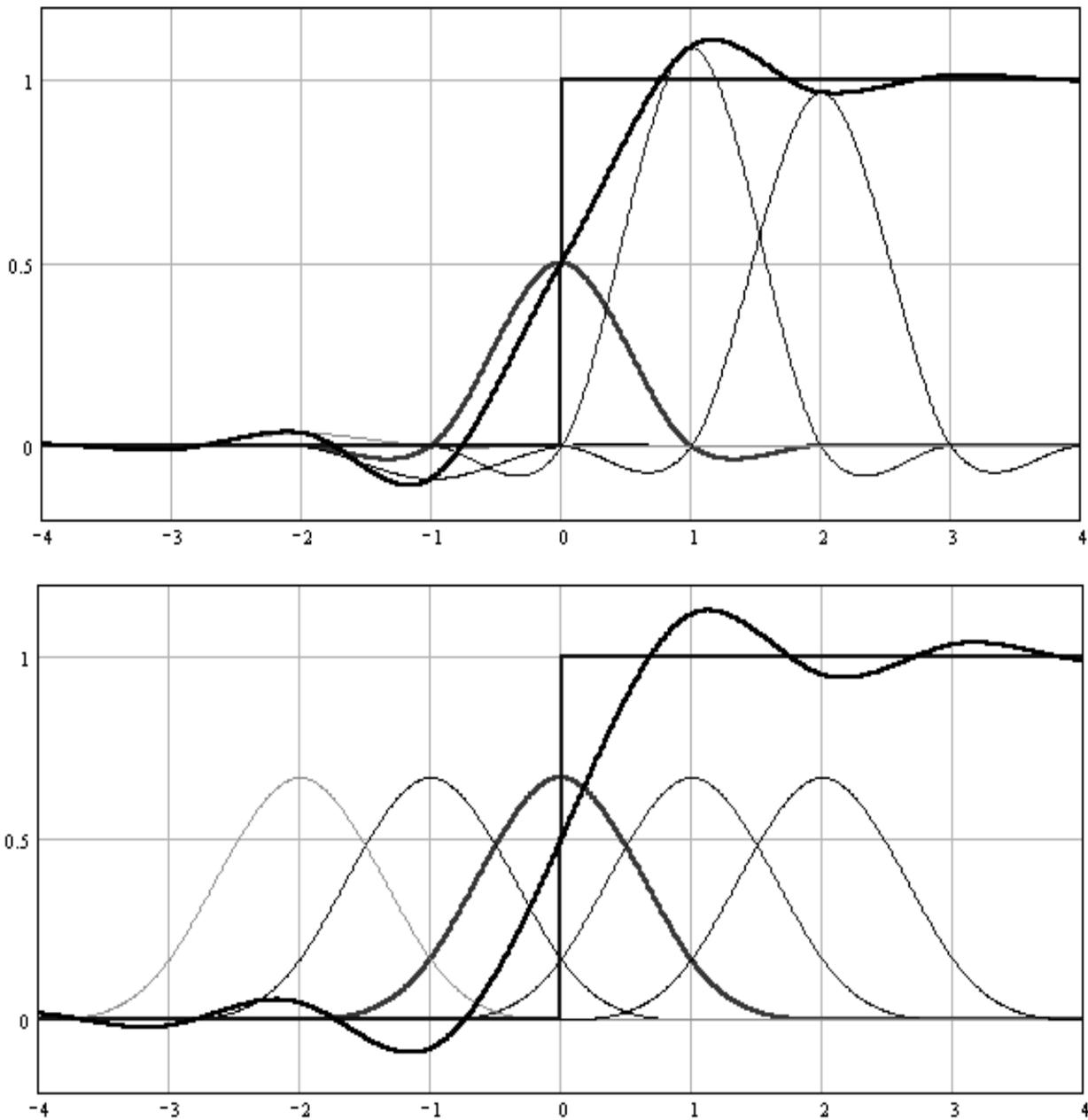


Рис.5.4. Утворення апроксимуючого сплайна $S_1(t)$ з коефіцієнтів розкладу (ермітів –верхній рис., кубічний –нижній).

Віднявши $S_1(t)$ від функції $f(t)$ отримаємо залишки розкладу (оператор **RS**). Коефіцієнти розкладу та функцію залишків показано на рис.5.5.

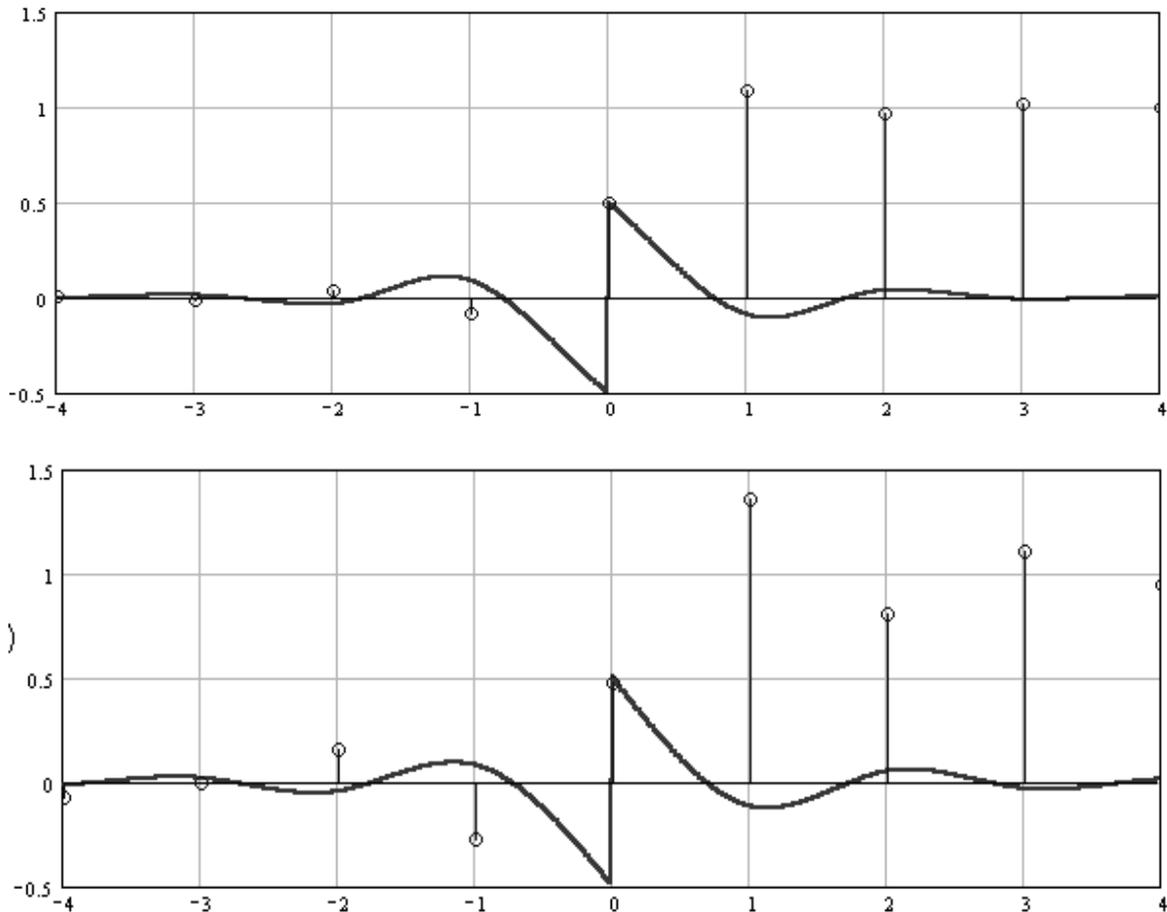


Рис.5.5. Коефіцієнти розкладу \mathbf{A}_1 та функція залишків наближення \mathbf{E}_1 .

Апроксимуючий сплайн $S_1(t)$ можна представити у вигляді фрагментів кубічного полінома з індивідуальними коефіцієнтами $w_{0,i}, w_{1,i}, w_{2,i}, w_{3,i}$:

$$S_{1,i}(x) = w_{0,i} + w_{1,i}x + w_{2,i}x^2 + w_{3,i}x^3, \quad x \in [0,1). \quad (5.16)$$

Значення коефіцієнтів полінома визначаються через коефіцієнти розкладу згідно наступних виразів (при подальшому розкладі слід враховувати приведення аргументу до відрізка $[0,1)$).

Ермітів сплайн: $w_{0,i} = a_{i-1}, \quad w_{1,i} = \frac{(a_i - a_{i-2})}{2h},$

$$w_{2,i} = \frac{(4a_i - a_{i+1} + 2a_{i-2} - 5a_{i-1})}{2h^2}, \quad w_{3,i} = \frac{(a_{i+1} - 3a_i + 3a_{i-1} - a_{i-2})}{2h^3}.$$

$$\text{Кубічний сплайн: } w_{0,i} = \frac{(a_i + 4a_{i-1} + a_{i-2})}{6}, \quad w_{1,i} = \frac{-(a_{i-2} - a_i)}{2h},$$

$$w_{2,i} = \frac{-(2a_i - a_{i-1} - a_{i-2})}{2h^2}, \quad w_{3,i} = \frac{(a_{i+1} - 3a_i + 3a_{i-1} - a_{i-2})}{6h^3}.$$

Значення коефіцієнтів для окремих фрагментів показано в таблиці 5.3. Очевидно, що функція залишків є двома сплайнами з розривом в точці 0, коефіцієнти поліномів яких відрізняється від вказаних в таблиці 5.3 знаком (ліворуч від нуля) і знаком та константою (праворуч від нуля).

Таблиця 5.3. Коефіцієнти поліномів на фрагментах сплайна $S_1(t)$

| i | Ермітів сплайн | | | | Кубічний сплайн | | | |
|-----|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------------|-----------|-----------|-----------|
| | $w_{0,i}$ | $w_{1,i}$ | $w_{2,i}$ | $w_{3,i}$ | $w_{0,i}$ | $w_{1,i}$ | $w_{2,i}$ | $w_{3,i}$ |
| -6 | 0.0004 | -0.0005 | -0.0054 | 0.0043 | 0.0074 | -0.0085 | -0.0280 | 0.0268 |
| -5 | -0.0012 | 0.0016 | 0.0164 | -0.0131 | -0.0023 | 0.0159 | 0.0524 | -0.0501 |
| -4 | 0.0037 | -0.0050 | -0.0504 | 0.0405 | 0.0159 | -0.0296 | -0.0978 | 0.0934 |
| -3 | -0.0111 | 0.0158 | 0.1469 | -0.1163 | -0.0181 | 0.0549 | 0.1823 | -0.1732 |
| -2 | 0.0354 | -0.0391 | -0.5283 | 0.4426 | 0.0460 | -0.1000 | -0.3373 | 0.3107 |
| -1 | -0.0894 | 0.2323 | 0.7141 | -0.3570 | -0.0807 | 0.1574 | 0.5947 | -0.1768 |
| 0 | 0.5000 | 0.5894 | 0.3570 | -0.3570 | 0.4946 | 0.8163 | 0.0643 | -0.2589 |
| 1 | 1.0894 | 0.2323 | -0.7997 | 0.4426 | 1.1163 | 0.1682 | -0.7124 | 0.3781 |
| 2 | 0.9646 | -0.0391 | 0.2019 | -0.1163 | 0.9502 | -0.1224 | 0.4218 | -0.2174 |
| 3 | 1.0112 | 0.0158 | -0.0712 | 0.0405 | 1.0322 | 0.0691 | -0.2303 | 0.1181 |
| 4 | 0.9963 | -0.0050 | 0.0230 | -0.0131 | 0.9890 | -0.0374 | 0.1239 | -0.0634 |
| 5 | 1.0012 | 0.0016 | -0.0076 | 0.0043 | 1.0121 | 0.0201 | -0.0664 | 0.0340 |
| 6 | 0.9996 | -0.0005 | 0.0025 | -0.0014 | 0.9998 | -0.0108 | 0.0355 | -0.0182 |

Функція залишків E_1 також є сплайном розірваним в точці $t = 0$, що співпадає з вузлом. Коефіцієнти поліномів функції залишків $e_{0,i}, e_{1,i}, e_{2,i}, e_{3,i}$ очевидним чином отримаємо з таблиці 5.3:

$$e_{0,i} = -w_{0,i}, e_{1,i} = -w_{1,i}, e_{2,i} = -w_{2,i}, e_{3,i} = -w_{3,i}, \text{ для } i < 0, \quad (5.17)$$

$$e_{0,i} = 1 - w_{0,i}, e_{1,i} = -w_{1,i}, e_{2,i} = -w_{2,i}, e_{3,i} = -w_{3,i}, \text{ для } i \geq 0.$$

Для наступного етапу розкладу зменшимо ширину фрагмента базисного сплайна у два рази: $\nu = 0.5$. Знайдемо коефіцієнти розкладу для другого етапу. Для цього знайдемо значення інтегралів лівої частини рівняння 5.13 розглянувши їх на відрізку $[0,1)$. Знайдемо значення інтегралів для кожного з 8 фрагментів сплайна (по 4 на ліву і праву половину фрагменту базисного сплайну попереднього етапу).

Для кубічного ермітового сплайну:

$$\begin{aligned} \Sigma_{1L} &= 7.440 \cdot 10^{-4} w_3 + 2.083 \cdot 10^{-3} w_2 + 6.250 \cdot 10^{-3} w_1 + 2.083 \cdot 10^{-2} w_0 - 2.083 \cdot 10^{-2}, \\ \Sigma_{2L} &= -1.369 \cdot 10^{-2} w_3 - 3.438 \cdot 10^{-2} w_2 - 9.167 \cdot 10^{-2} w_1 - 0.271 w_0 + 0.271, \\ \Sigma_{3L} &= -2.976 \cdot 10^{-3} w_3 - 1.042 \cdot 10^{-2} w_2 - 4.375 \cdot 10^{-2} w_1 - 0.271 w_0 + 0.271, \\ \Sigma_{4L} &= 2.976 \cdot 10^{-4} w_3 - 1.042 \cdot 10^{-3} w_2 + 4.167 \cdot 10^{-3} w_1 + 2.083 \cdot 10^{-2} w_0 - 2.083 \cdot 10^{-2}. \\ \Sigma_{1R} &= 0.01(1.116 w_3 + 1.354 w_2 + 1.667 w_1 + 2.083 w_0 - 2.083), \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\Sigma_{2R} = -0.168 w_3 - 0.194 w_2 - 0.227 w_1 - 0.271 w_0 + 0.271,$$

$$\Sigma_{3R} = -8.527 \cdot 10^{-2} w_3 - 0.122 w_2 - 0.179 w_1 - 0.271 w_0 + 0.271,$$

$$\Sigma_{4R} = 7.589 \cdot 10^{-3} w_3 + 1.042 \cdot 10^{-3} w_2 + 1.458 \cdot 10^{-2} w_1 + 2.083 \cdot 10^{-2} w_0 - 2.083 \cdot 10^{-2}.$$

Для кубічного В-сплайна:

$$\Sigma_{1L} = -0.001(1.488 w_3 + 3.472 w_2 + 8.333 w_1 + 20.83 w_0 - 20.83),$$

$$\Sigma_{2L} = -9.598 \cdot 10^{-3} w_3 - 2.465 \cdot 10^{-2} w_2 - 6.875 \cdot 10^{-2} w_1 - 0.229 w_0 + 0.229,$$

$$\Sigma_{3L} = -4.464 \cdot 10^{-3} w_3 - 1.319 \cdot 10^{-2} w_2 - 4.583 \cdot 10^{-2} w_1 - 0.229 w_0 + 0.229,$$

$$\Sigma_{4L} = -7.440 \cdot 10^{-5} w_3 - 3.472 \cdot 10^{-4} w_2 - 2.083 \cdot 10^{-3} w_1 - 2.083 \cdot 10^{-2} w_0 + 2.083 \cdot 10^{-2}.$$

$$\Sigma_{1R} = -0.01(1.555w_3 + 1.701w_2 + 1.875w_1 + 2.083w_0 - 2.083), \quad (5.19)$$

$$\Sigma_{2R} = -0.1268w_3 - 0.1507w_2 - 0.1833w_1 - 0.2292w_0 + 0.2292,$$

$$\Sigma_{3R} = -8.728 \cdot 10^{-2} w_3 - 0.11632w_2 - 0.16042w_1 - 0.2292w_0 + 0.2292,$$

$$\Sigma_{4R} = -4.7619 \cdot 10^{-3} w_3 - 7.6388 \cdot 10^{-3} w_2 - 1.250 \cdot 10^{-2} w_1 - 2.083 \cdot 10^{-2} w_0 + 2.083 \cdot 10^{-2}.$$

Наведені вирази відповідають фрагменту праворуч від нуля. Для фрагментів ліворуч слід відкинути останній доданок. Проміжні коефіцієнти розкладу отримуємо згідно наступних виразів:

$$b_{2i} = \Sigma_{1L,i-1} + \Sigma_{2R,i-1} + \Sigma_{3L,i} + \Sigma_{4R,i}, \quad (5.20)$$

$$b_{2i+1} = \Sigma_{1R,i-1} + \Sigma_{2L,i} + \Sigma_{3R,i} + \Sigma_{4L,i+1}.$$

Вектор коефіцієнтів розкладу отримуємо згідно виразу 5.17. Зміну масштабу враховуємо множенням результату на 2. Отримаємо вектори розкладу.

Для ермітового сплайна:

$$\mathbf{A}_2 = \{ \dots, 0.0120, -0.0184, -0.0350, 0.0484, 0.1306, -0.2538, \mathbf{0.0000}, 0.2538, -0.1306, -0.0484, 0.0350, 0.0184, -0.0120, \dots \}.$$

Для кубічного сплайна:

$$\mathbf{A}_2 = \{ \dots, 0.0470, -0.0651, -0.0269, -0.0281, 0.2946, -0.3984, \mathbf{0.0110}, 0.3876, -0.3397, 0.0062, 0.0383, 0.0649, -0.0631, \dots \}.$$

Коефіцієнти поліномів фрагментів сплайна розраховані згідно 5.19 показані в таблиці 5.4. Вигляд апроксимуючого сплайна показано на рис.5.6. Коефіцієнти другого етапу розкладу разом із функцією залишків показано на рис.5.7.

Таблиця 5.4. Коефіцієнти поліномів на фрагментах сплайна $S_{0,5}(t)$

| i | Ермітів сплайн | | | | Кубічний сплайн | | | |
|-----|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------------|-----------|-----------|-----------|
| | $w_{0,i}$ | $w_{1,i}$ | $w_{2,i}$ | $w_{3,i}$ | $w_{0,i}$ | $w_{1,i}$ | $w_{2,i}$ | $w_{3,i}$ |
| -6 | 0.0120 | -0.0121 | -0.0435 | 0.0252 | 0.0218 | 0.0366 | -0.0756 | 0.0270 |
| -5 | -0.0184 | -0.0235 | -0.0362 | 0.0431 | -0.0401 | 0.0370 | 0.0752 | -0.0503 |
| -4 | -0.0350 | 0.0334 | 0.1006 | -0.0506 | -0.0334 | -0.0185 | -0.0197 | 0.0317 |
| -3 | 0.0484 | 0.0828 | 0.2321 | -0.2327 | 0.0259 | -0.1607 | 0.1619 | -0.0606 |
| -2 | 0.1306 | -0.1511 | -0.7856 | 0.5523 | 0.1253 | 0.1852 | -0.5078 | 0.2232 |
| -1 | -0.2538 | -0.0653 | 0.6381 | -0.3191 | -0.2147 | 0.1418 | 0.5512 | -0.3530 |
| 0 | -0.0000 | 0.2538 | 0.3191 | -0.3191 | 0.0055 | -0.3930 | -0.0164 | 0.1892 |
| 1 | 0.2538 | -0.0653 | -0.8714 | 0.5523 | 0.2036 | 0.1754 | -0.5519 | 0.1785 |
| 2 | -0.1306 | -0.1511 | 0.4660 | -0.2327 | -0.1609 | 0.1907 | 0.5366 | -0.3628 |
| 3 | -0.0484 | 0.0828 | 0.0512 | -0.0506 | -0.0461 | -0.1890 | -0.1569 | 0.2312 |
| 4 | 0.0350 | 0.0334 | -0.0931 | 0.0431 | 0.0374 | -0.0294 | -0.0027 | -0.0514 |
| 5 | 0.0184 | -0.0235 | -0.0321 | 0.0252 | 0.0392 | 0.0507 | -0.0773 | 0.0249 |
| 6 | -0.0120 | -0.0121 | 0.0347 | -0.0164 | -0.0354 | 0.0450 | 0.0830 | -0.0534 |

Розклад відрізнятиметься від першого етапу дещо складнішим способом отримання коефіцієнтів полінома для функції залишків. Функція залишків попереднього етапу також є сплайном із фрагментами-поліномами (на відміну від функції Хевісайда на першому етапі). Отже кожному фрагменту попереднього розкладу можна співставити два фрагменти наступного розкладу. Позначимо $\tilde{e}_{0,i}, \tilde{e}_{1,i}, \tilde{e}_{2,i}, \tilde{e}_{3,i}$ значення коефіцієнтів полінома залишків на попередньому етапі. Тоді врахувавши масштабні зміни та зміщення, коефіцієнти поліномів функції залишків даного етапу будуть визначатися за формулами:

$$e_{0,2i} = \tilde{e}_{0,i} - w_{0,2i}, \quad e_{0,2i+1} = \tilde{e}_{0,i} - (w_{0,2i+1} - w_{1,2i+1} + w_{2,2i+1} - w_{3,2i+1}),$$

$$\begin{aligned}
 e_{1,2i} &= \tilde{e}_{1,i} - 2w_{1,2i}, & e_{1,2i+1} &= \tilde{e}_{1,i} - (2w_{1,2i+1} - 4w_{2,2i+1} + 6w_{3,2i+1}), \\
 e_{2,2i} &= \tilde{e}_{2,i} - 8w_{2,2i}, & e_{2,2i+1} &= \tilde{e}_{2,i} - (4w_{2,2i+1} - 12w_{3,2i+1}), \\
 e_{3,2i} &= \tilde{e}_{3,i} - 16w_{3,2i}, & e_{3,2i+1} &= \tilde{e}_{3,i} - 8w_{3,2i+1}.
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

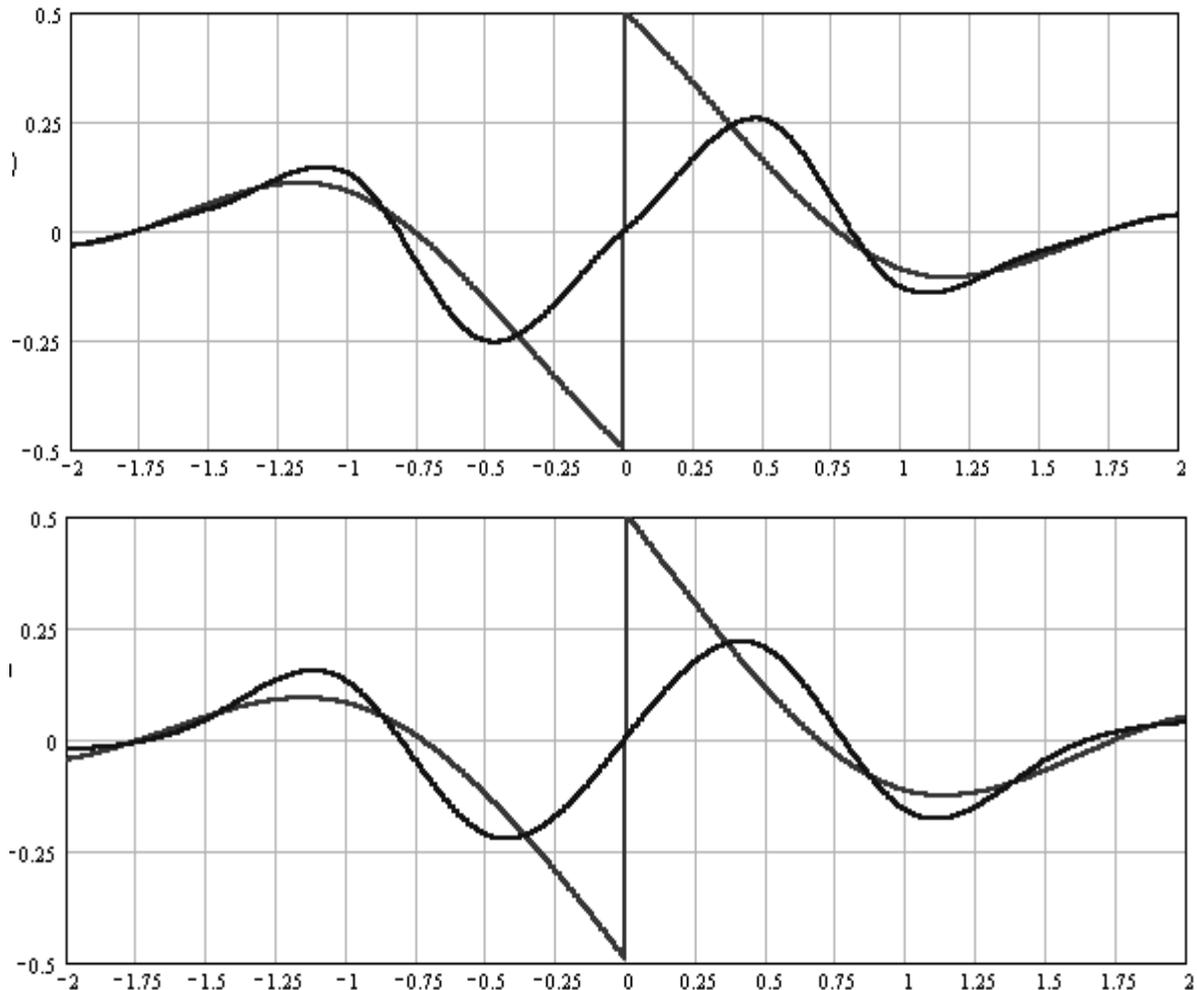


Рис.5.6. Апроксимуючий сплайн $S_{0.5}(t)$ на другому етапі розкладу.

Розклад можна продовжити аналогічно останньому етапу. Для цього слід коефіцієнти поліномів функції залишків привести до масштабу одиничного відрізка $[0,1)$. Складові інтеграла в лівій частині рівняння 5.13 відрізнятимуться від 5.20 знаками і відсутністю вільного доданка. Для кубічного базису вони матимуть наступний вигляд (індекси фрагментів опущено):

$$\Sigma_{1L} = 0.001(1.488e_3 + 3.472e_2 + 8.333e_1 + 20.83e_0), \tag{5.22}$$

$$\Sigma_{2L} = 9.598 \cdot 10^{-3} e_3 + 2.465 \cdot 10^{-2} e_2 + 6.875 \cdot 10^{-2} e_1 + 0.229 e_0,$$

$$\Sigma_{3L} = 4.464 \cdot 10^{-3} e_3 + 1.319 \cdot 10^{-2} e_2 + 4.583 \cdot 10^{-2} e_1 + 0.229 e_0,$$

$$\Sigma_{4L} = 7.440 \cdot 10^{-5} e_3 + 3.472 \cdot 10^{-4} e_2 + 2.083 \cdot 10^{-3} e_1 + 2.083 \cdot 10^{-2} e_0.$$

$$\Sigma_{1R} = 0.01(1.555 e_3 + 1.701 e_2 + 1.875 e_1 + 2.083 e_0),$$

$$\Sigma_{2R} = 0.1268 e_3 + 0.1507 e_2 + 0.1833 e_1 + 0.2292 e_0,$$

$$\Sigma_{3R} = 8.728 \cdot 10^{-2} e_3 + 0.11632 e_2 + 0.16042 e_1 + 0.2292 e_0,$$

$$\Sigma_{4R} = 4.7619 \cdot 10^{-3} e_3 + 7.6388 \cdot 10^{-3} e_2 + 1.250 \cdot 10^{-2} e_1 + 2.083 \cdot 10^{-2} e_0.$$

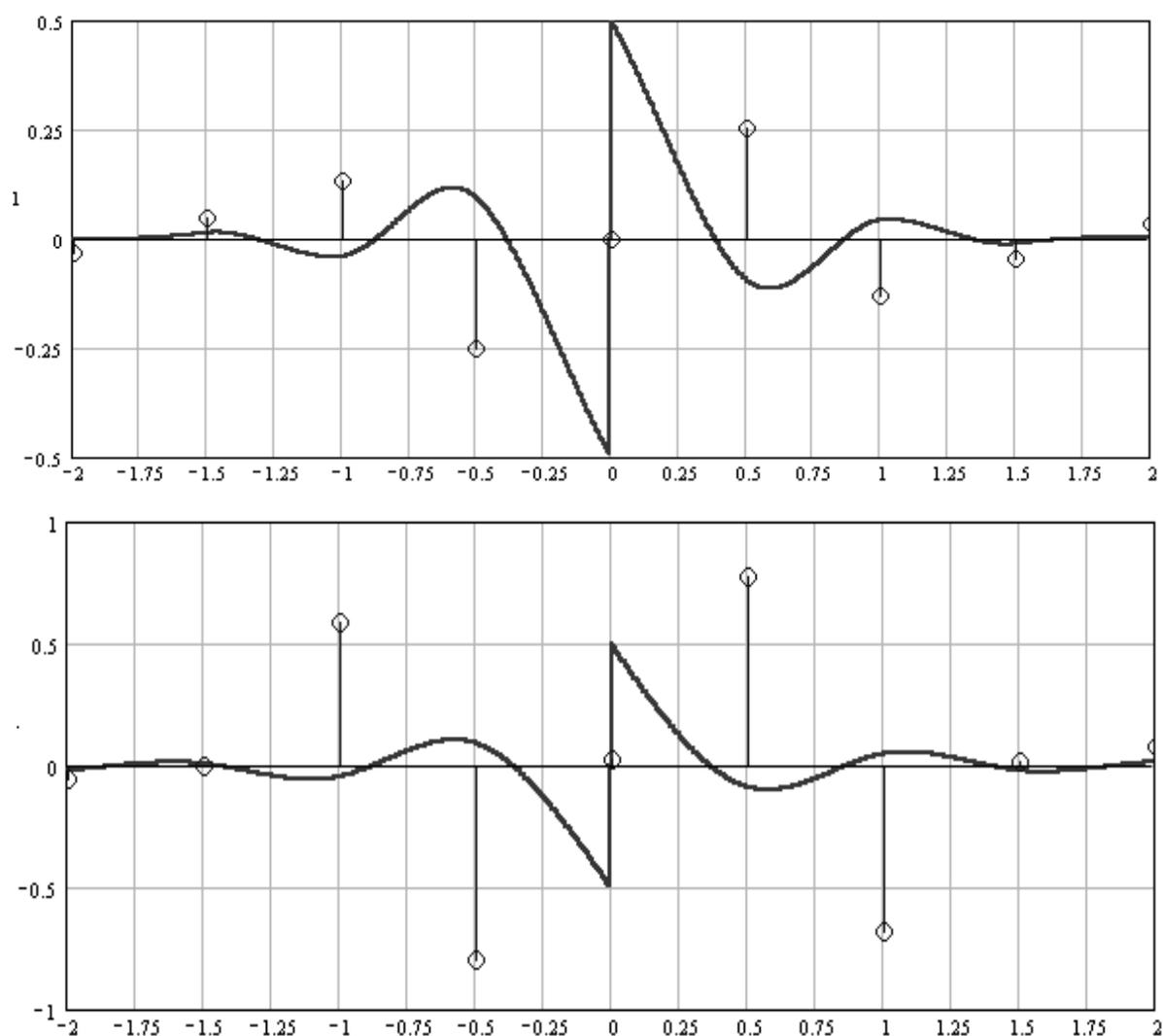


Рис.5.7. Коефіцієнти $A_{0.5}$ та функція залишків $E_{0.5}$ на другому етапі розкладу.

Складність розрахунків при продовженні буде того ж порядку. Такий спосіб розкладу по суті є аналітичним, де означені інтеграли розраховувалися згідно формул. Однак при цьому не слід забувати, що чисельні коефіцієнти та розв'язок системи рівнянь виконувалися чисельно з обмеженою точністю. Аналітичний спосіб можна застосувати до відносно простих функцій і базисів, що дозволяють отримати компактні вирази для інтегралів. Не зважаючи на це суттєве обмеження аналітичний підхід корисний з методичної точки зору для розуміння процесу розкладу. Другим позитивним моментом є можливість застосування добре відомого теоретичного апарату наближення з допомогою методу найменших квадратів до певних класів функцій. Також аналітичний спосіб може служити основою для порівняння із числовими аналогами.

Результати дискретного варіанту LSS розкладу в базисі кубічних ермітових сплайнів показано на рис.5.8. Застосовано масштаби (зверху вниз) 64,32,16,8,4,2.

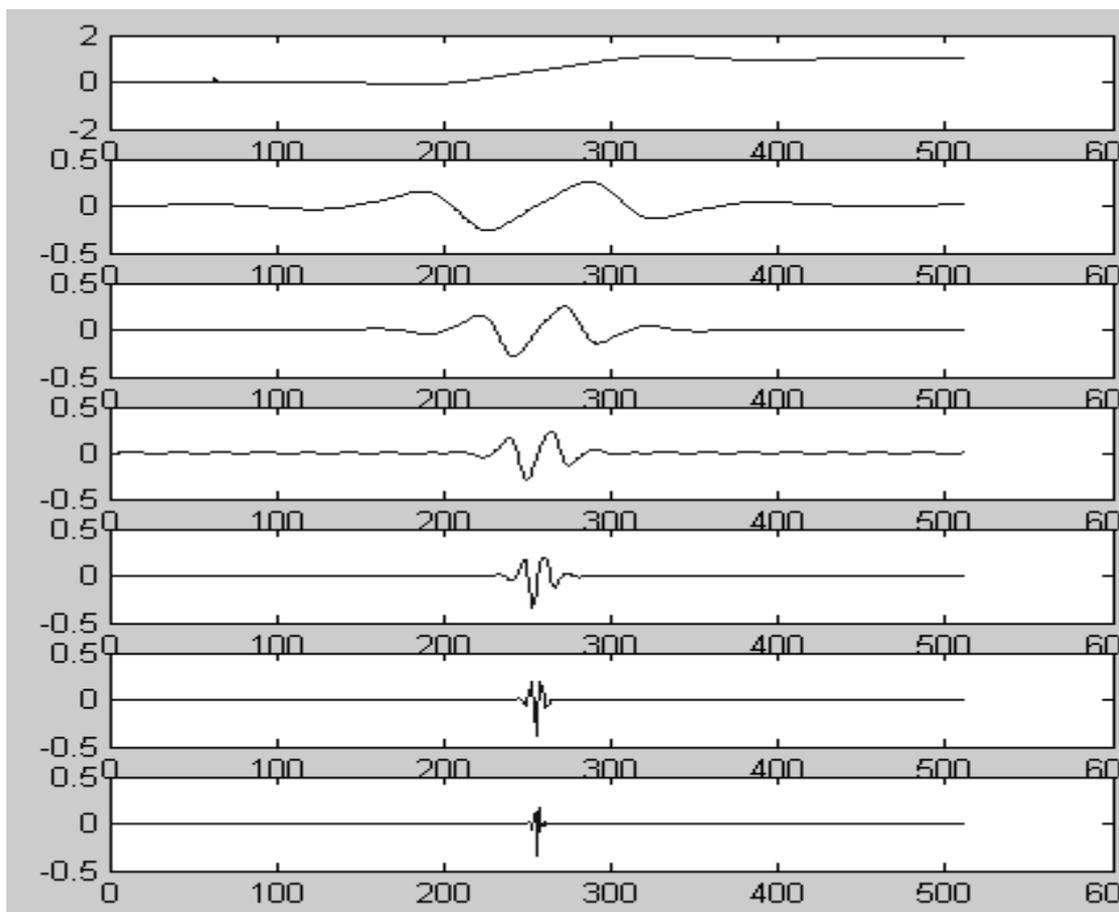


Рис.5.8. Сплайни LSS розкладу функції Хевісайда в ермітовому базисі

У вейвлет розкладі є прийнятим зображувати візуальні картини розкладу рис.5.10. Аналогічним чином відобразимо результати LSS розкладу. Для відображення використано прийняте у таких випадках відображення абсолютних значень та нормування в рядках. Результат показано на рис. 5.9.

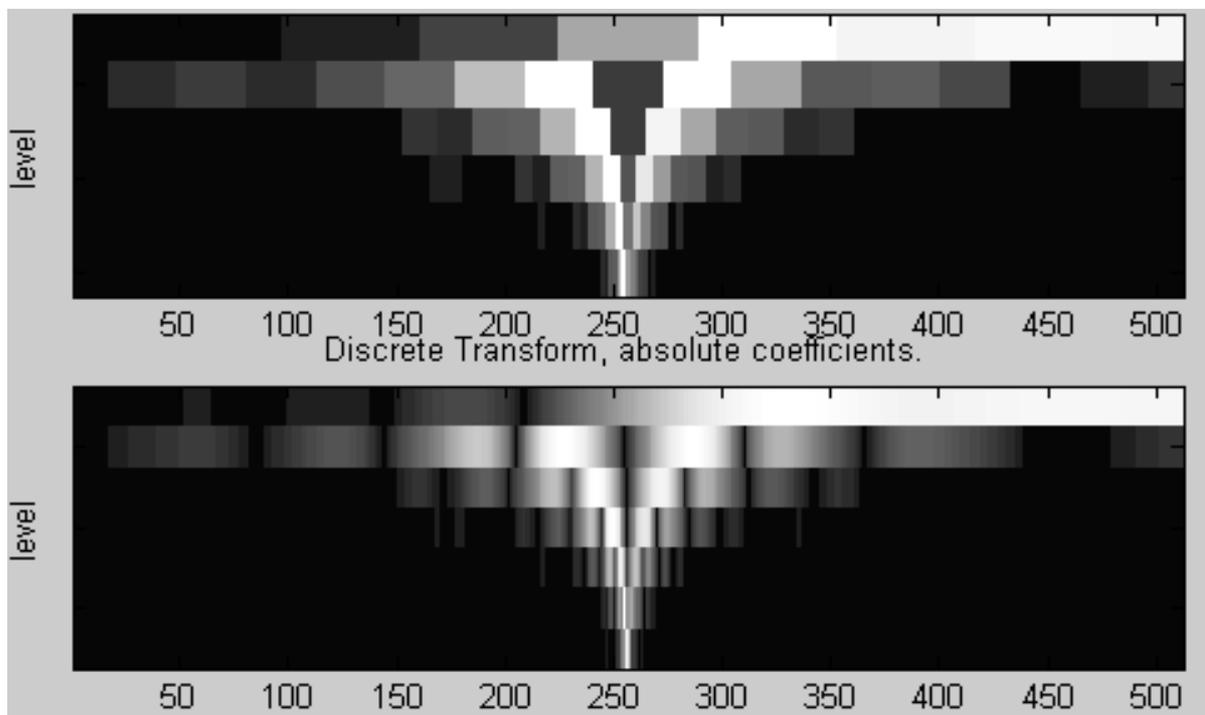


Рис.5.9. Візуальне відображення результатів кратномасштабного LSS розкладу

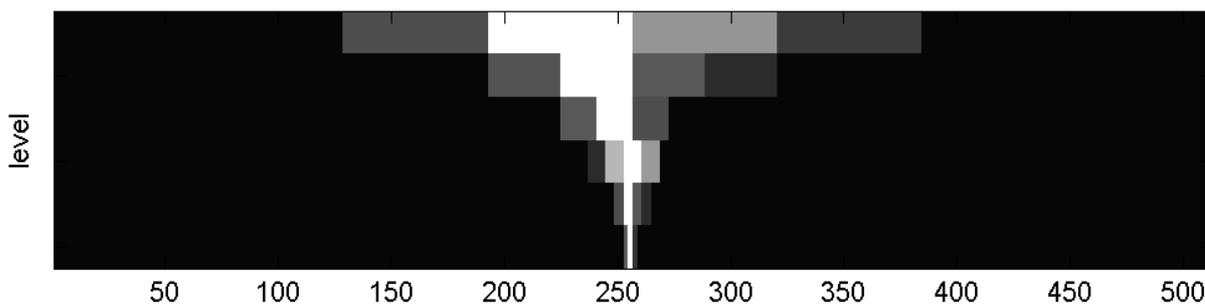


Рис.5.10. Візуальне представлення результату вейвлет розкладу в біортогональному сплайновому базисі 'bior4.4'

На верхній частині картинки (рис.5.9) представлено дискретні рівні коефіцієнтів розкладу. На нижньому, коефіцієнти апроксимовані ермітовим сплайном. Останню картинку у вейвлет аналізі називають неперервним розкладом, проте очевидно, що це не зовсім точно.

5.3. Структура кратномасштабних пристроїв аналізу та синтезу сигналів

В попередньому розділі була показана математична суть LSS розкладу, де основну роль відігравали прийоми і конструкції прикладної математики. Тепер розглянемо LSS розклад з точки зору теорії і практики цифрової обробки сигналів, враховуючи ресурсні обмеження та типові технічні рішення.

Будемо розглядати наближення за МНК як задачу обернену до інтерполяції. В інтерполяційній задачі за вузловими значеннями сигналу $\{ \dots, x(t_i), x(t_i + n\Delta t), x(t_i + 2n\Delta t), \dots \}$ необхідно розрахувати проміжні значення $\{ \dots, x(t_i), x(t_i + \Delta t), x(t_i + 2\Delta t), \dots, x(t_i + n\Delta t), \dots \}$. При МНК оцінюванні навпаки, за проміжними значеннями слід оцінити значення у вузлах $\{ \dots, \tilde{x}(t_i), \tilde{x}(t_i + n\Delta t), \tilde{x}(t_i + 2n\Delta t), \dots \}$.

Отримання МНК оцінок в найбільш загальному вигляді можна записати наступним чином:

$$a(\tau, \nu) = \int_{d_\tau}^{u_\tau} x(t) L_{\tau, \nu}(t - \tau) dt, \quad (5.23)$$

де $a(\tau, \nu)$ - коефіцієнти перетворення, що для ермітових базисів мають зміст МНК оцінок значень сплайна у вузлах; $L_{\tau, \nu}(t)$ - локальна базисна функція, що утворена з допомогою базисних сплайнів і яку також можна вважати вейвлетом. Розрахунок таких функцій описано в підрозділі 4.3.

В попередньому розділі описано алгоритм та особливості розрахунку проєкційних матриць МНК. В цілому процес оцінювання можна записати у вигляді системи рівнянь: $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{L}\mathbf{X}$ (низькочастотна складова – сплайн). Залишки наближення запишемо у вигляді: $\mathbf{E} = \mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}} = (\mathbf{I} - \mathbf{L})\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{X}$.

Як було показано в попередньому розділі рядок матриці \mathbf{L} можна взяти в якості імпульсної характеристики нерекурсивного цифрового фільтра, який є фільтром нижніх частот (ФНЧ). Рядок матриці \mathbf{M} є імпульсною характеристикою нерекурсивного фільтра верхніх частот (ФВЧ). З допомогою ФВЧ отримуємо залишки МНК наближення. ФНЧ і ФВЧ є дзеркальною парою, сума їх вихідних сигналів утворює вхідний сигнал розкладу (з точністю до округлень розрахунків). На рис.5.11 показано розклад вхідного сигналу $x(z)$ на низькочастотну апроксимаційну складову $s(z)$ і високочастотну складову $e(z)$. $L(z)$ - передаточна функція фільтра нижніх частот, $M(z)$ - передаточна функція фільтра верхніх частот. Хоча їх сума відтворює вхідний сигнал, але слід врахувати, що обробка відбувається в козькому вікні і вихідні відліки є послідовністю оцінок сплайна в одному вузлі, але в різні моменти часу. Аналогічно і високочастотна складова є різницею між вхідним відліком і значенням сплайна у вузлі. Подальшому розкладу підлягає високочастотна складова. При такому підході картина розкладу є комбінацією n – розкладів на кожному з етапів, що відрізнятимуться фазою вхідного сигналу. При цьому варіанті розкладу слід враховувати обмеження пов'язані із перекриттям частот.

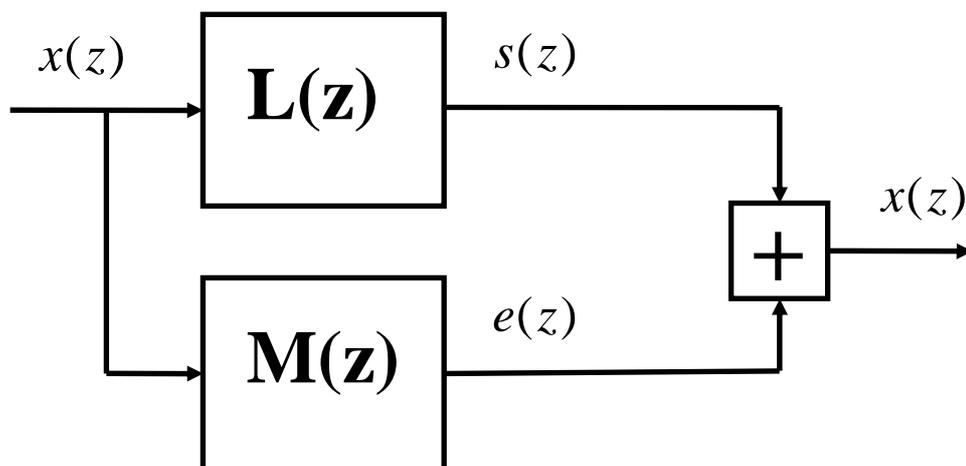


Рис.5.11. Схема LSS розкладу з допомогою пари нерекурсивних фільтрів.

Вихідна послідовність ФНЧ фактично є множиною вузлів n сплайнів, побудованих із послідовно зміщених на один такт даних. Тому для отримання на виході низькочастотної частини розкладу послідовності вузлів одного сплайна на виході ФНЧ встановимо n -кратний компресор частоти дискретизації. Таке рішення також дозволяє знизити часові вимоги до конструктивних елементів ФНЧ, або конструктивно його спростити (можна обійтися одним перемножувачем).

Конструктивних змін потребує і високочастотний канал. Можна застосувати n каналний банк фільтрів, з характеристиками, що відповідають за формування n проміжних значень рис.5.12.

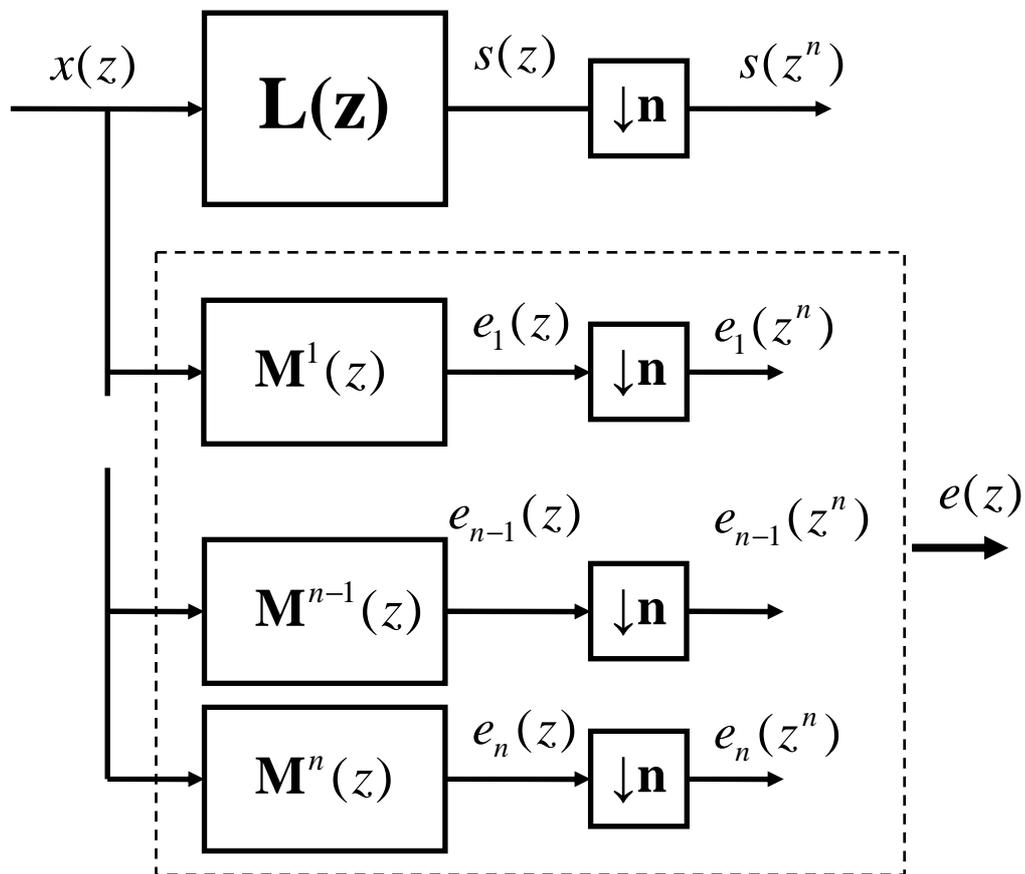


Рис.5.12. LSS розклад з децимацією та банком ФВЧ.

Перевагою такого рішення є концептуальна єдність пристрою в поєднанні із зниженням часових вимог до конструктивних елементів. Що стосується спрощення

конструкції, то її можна реалізувати лише в конструкції окремого каналу. Таким чином в цілому можна обійтися початковим рівнем складності. Інший підхід полягає у використанні для розрахунку залишків наближення сплайн-інтерполятора рис.5.13. Інтерполятор може мати різну конструкцію, що дозволяє вибирати між швидкістю та складністю. Конструкції інтерполяторів описані в попередньому розділі.

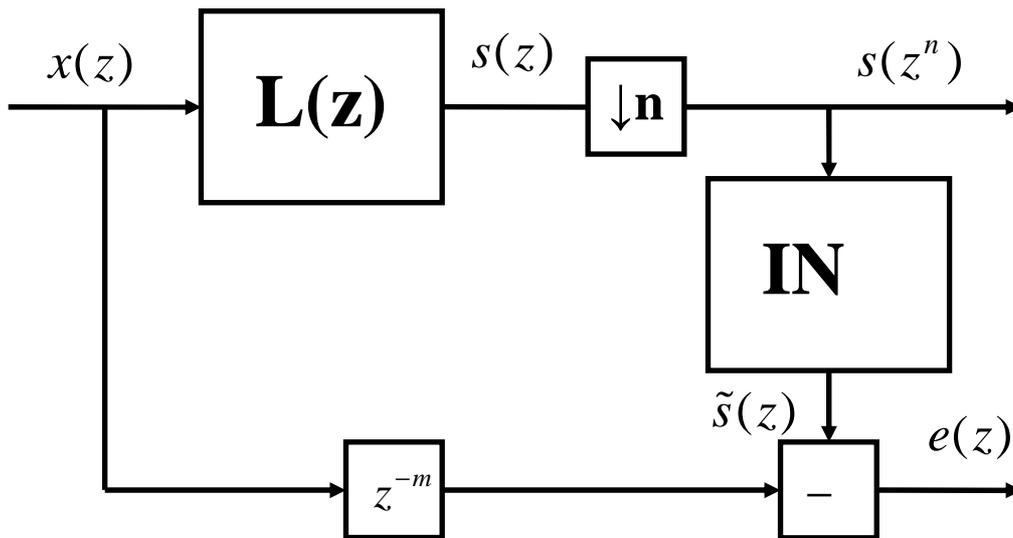


Рис.5.13. LSS розклад з децимацією та інтерполяцією.

Можливий і альтернативний варіант конструкції, суть його у подальшому використанні кожного з n сплайнів окремо рис.5.14. Тобто отримаємо n -варіантів розкладу сигналу, що відрізнятимуться фазою вхідного сигналу в межах фрагмента сплайна. Однак реалізація розкладу з допомогою фільтрації в ковзному вікні нерекурсивними цифровими фільтрами безпосередньо є неефективною з точки зору реалізації. Порядок фільтрів на кожному етапі розкладу становить $(7-9)n$.

Значно економніша схема з використанням сплайн-апроксиматора рис.5.15. По суті він виконує операції аналогічні фільтру, але конструктивно значно економніший. Виграш отриманий за рахунок врахування в конструкції зниження частоти. Фактично сплайн-апроксиматор виконує децимацію вхідного сигналу.

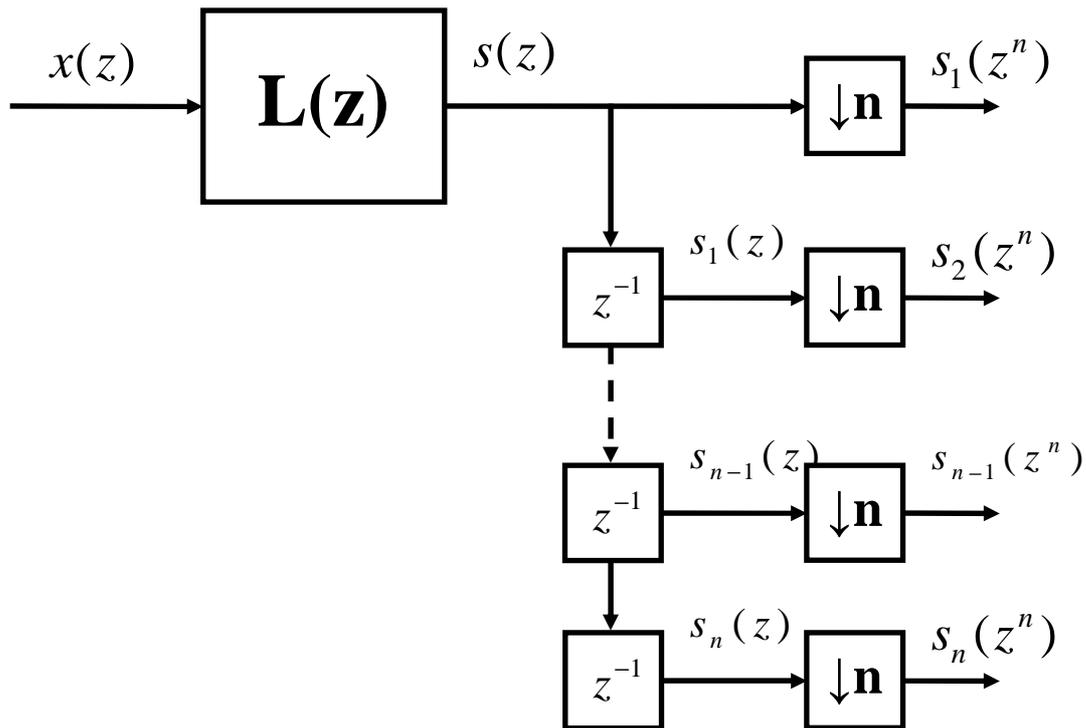


Рис. 5.14. Отримання n-фазних низькочастотних складових LSS розкладу.

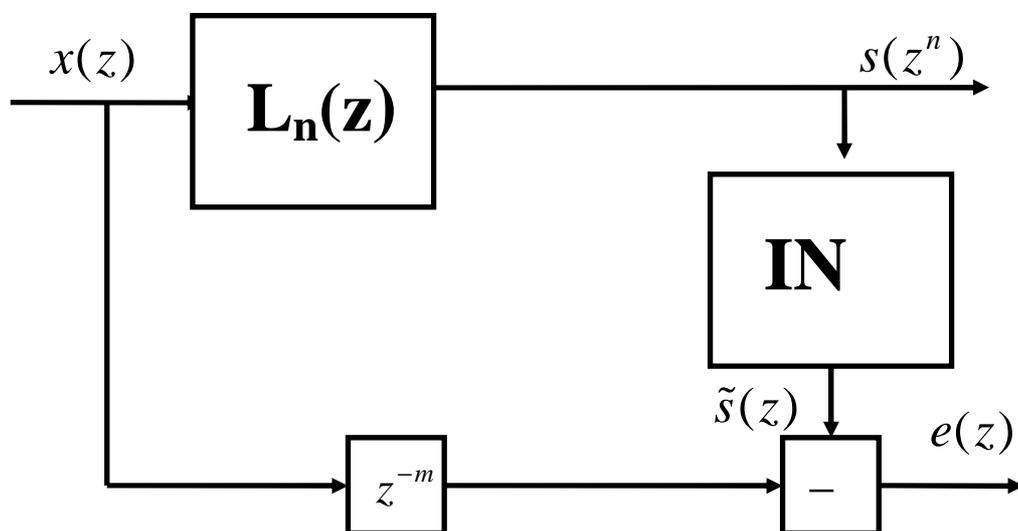


Рис.5.15. Схема етапу LSS розкладу зі сплайн-апроксиматором.

Пристрої LSS розкладу можна ефективно реалізувати на програмованих логічних інтегральних схемах. На рис.5.16 показано фрагмент структури 10 розрядного пристрою розкладу, реалізований в пакеті Matlab (Altera DSP Builder). На рис.5.17 показано структуру 10 розрядного пристрою синтезу. В основі конструкції пристроїв сплайн-апроксиматори та сплайн-інтерполятори.

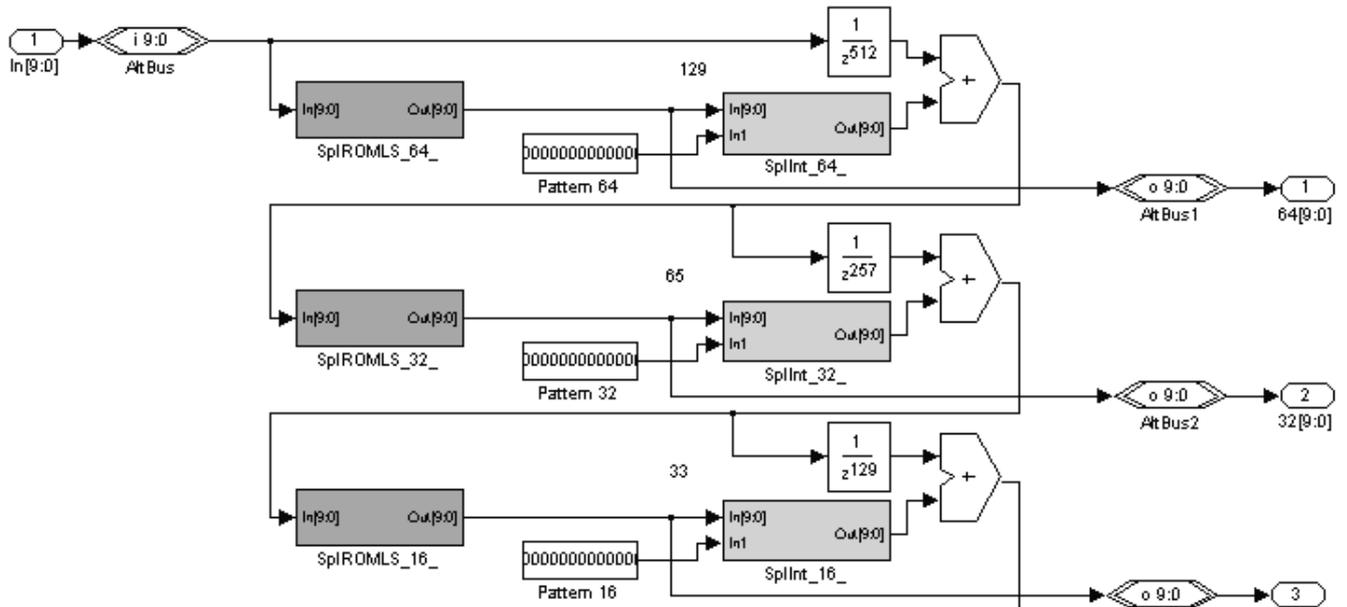


Рис.5.16. Частина загальної структури пристрою 10 розрядного LSS розкладу в Altera DSP Builder (Matlab, Simulink).

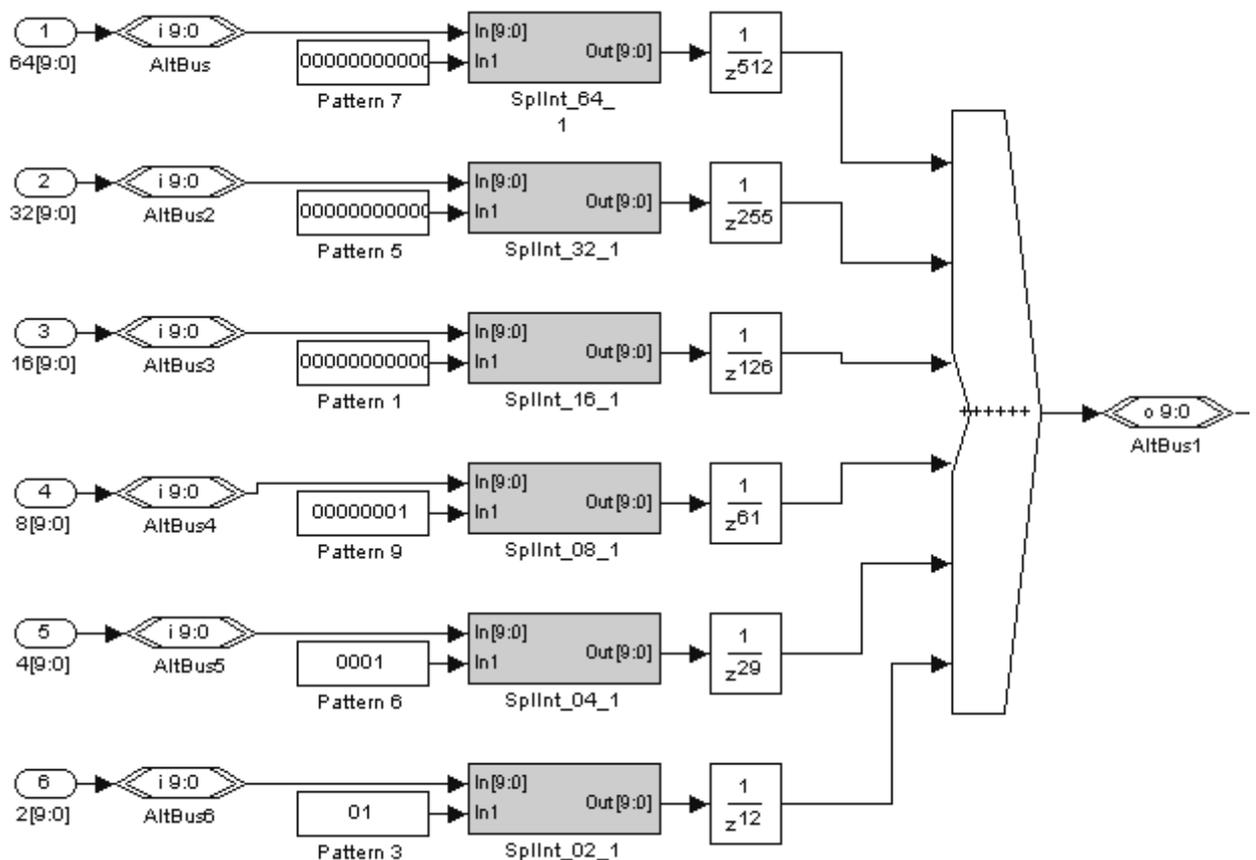


Рис.5.17. Загальна структура пристрою синтезу 10 розрядного LSS розкладу.

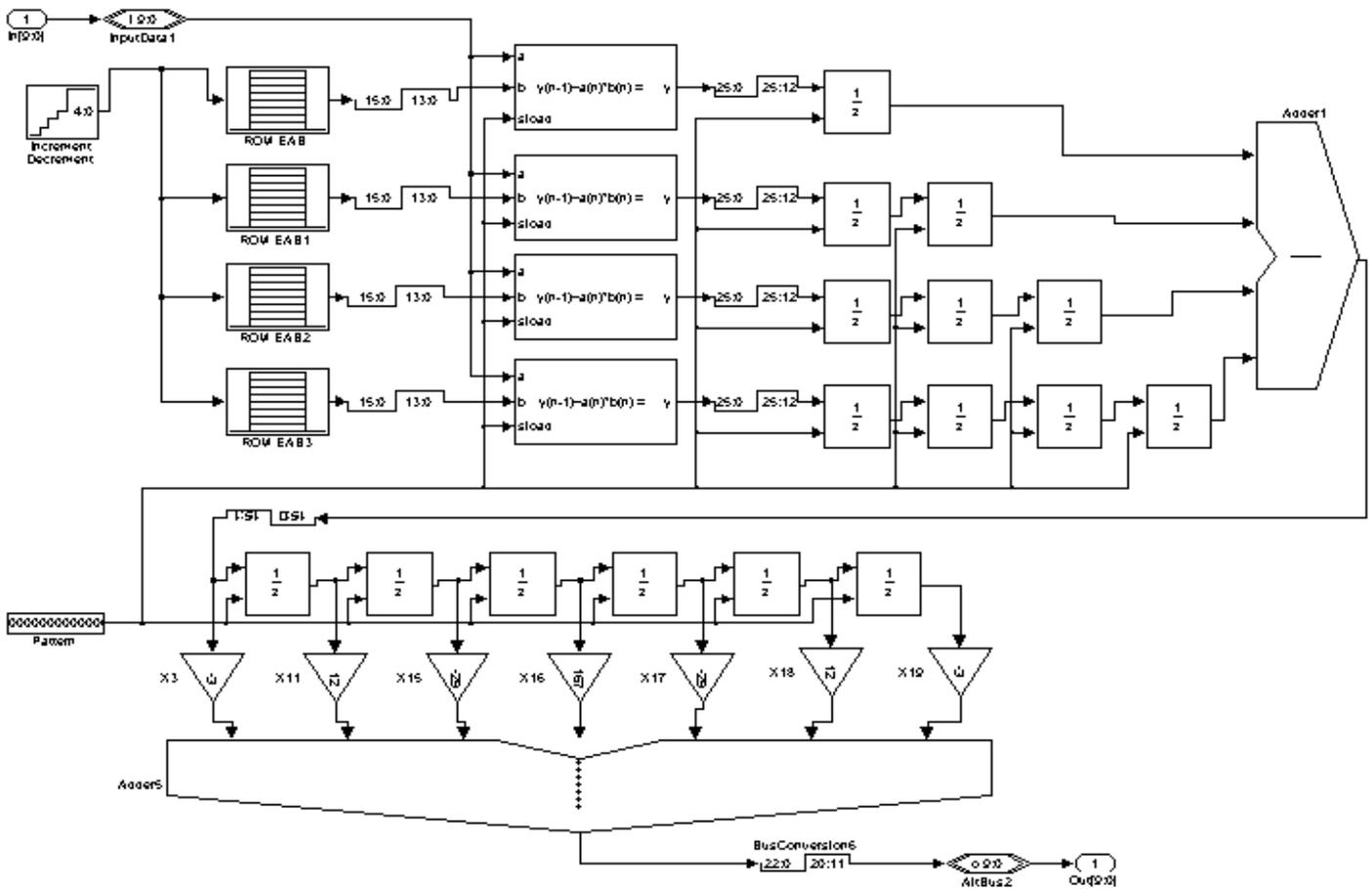


Рис.5.18. Структура 10 разрядного сплайн-аппроксиматора в Altera DSP Builder.

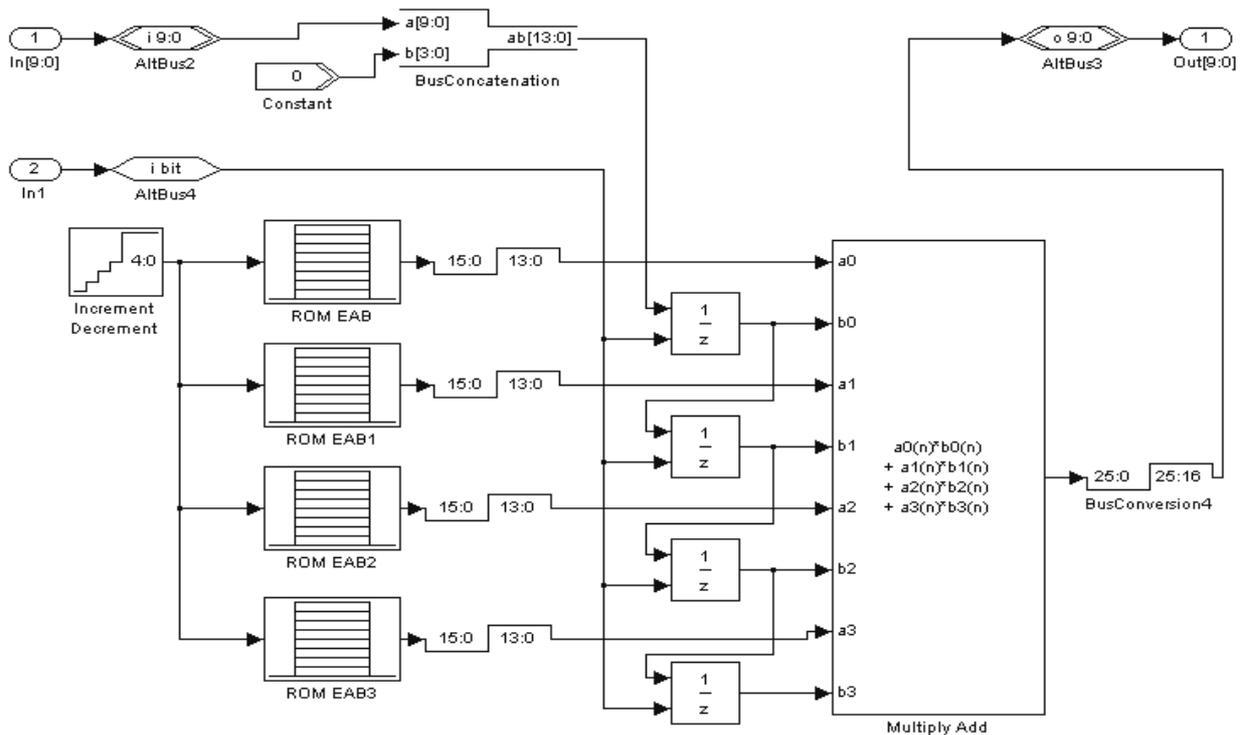


Рис.5.19. Структура 10 разрядного сплайн-интерполятора в Altera DSP Builder.

Спроектована конструкція є діючою. На рис.5.20 показано результати роботи пристрою. На графіках показано: вхідний полігармонічний сигнал з адитивним білим шумом, сигнали етапів розкладу з масштабами 64,32,16,8,4,2 відліки на фрагмент сплайна, залишок розкладу. Виконано також проєтування інтерполятора та апроксиматора в системі Quartus II. Реалізація 10 розрядного інтерполятора зображеної вище конструкції потребує 15-20 тис.вентилів, для апроксиматора необхідно 30-40 тис.вентилів.

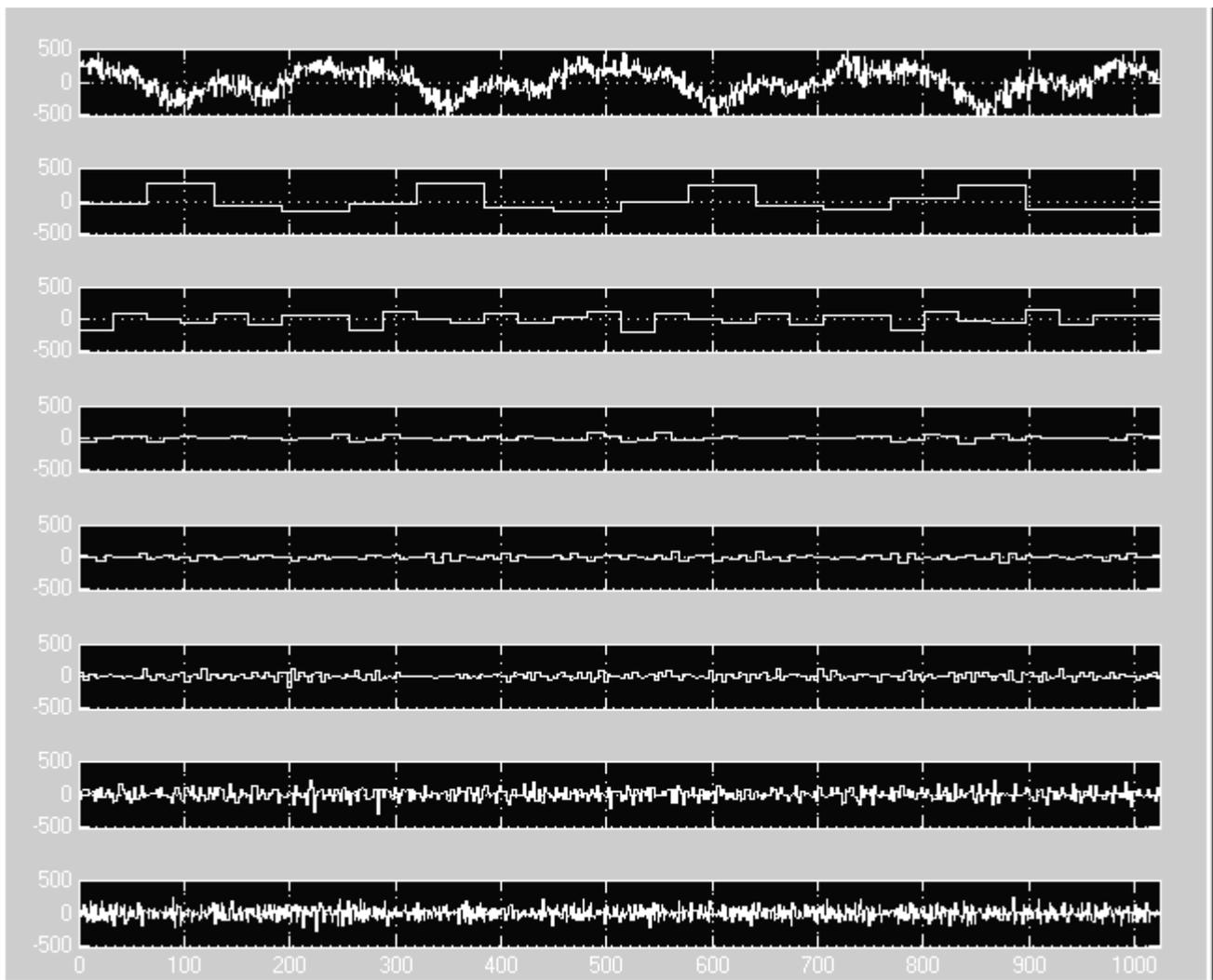


Рис.5.20. Приклад роботи приладу 10 розрядного LSS розкладу.

Синтез сигналів з коефіцієнтів розкладу полягає в підсумовуванні інтерпольованих за коефіцієнтами розкладу сплайнів та кінцевого залишку наближення.

5.4. Особливості пристроїв статистичного кратномасштабного аналізу сигналів

Найбільший інтерес LSS розклад має стосовно випадкових сигналів та сигналів, що містять адитивний білий (чи близький до нього) шум. Саме за цих умов найбільше проявляються переваги розкладу перед вейвлетами (інтерполяційні схеми розкладу). Типовий прийом, що застосовується у вейвлет обробці зашумлених та випадкових сигналів називають трешголдингом. Його суть у тому, що значення вейвлет коефіцієнтів менших певного значення приймають рівними нулю, або застосовують інші схеми нелінійної дискретизації. Вибір тієї чи іншої схеми трешголдингу є евристичним. Застосування нелінійностей значно ускладнює ситуацію із оцінкою достовірності коефіцієнтів розкладу.

В протизагу цьому LSS розклад, в основі якого лежить метод найменших квадратів, забезпечує як оптимальність оцінок так і можливість оцінки достовірності коефіцієнтів розкладу та застосування добре відомого статистичного апарату перевірки гіпотез. Однак оцінювання коефіцієнтів LSS розкладу має ряд особливостей. Якщо МНК відносно мало чутливий до порушень вхідних умов оптимальності (нормальності, гомоскедастичності, некорельованості), то погана якість моделі призводить до значимої похибки в оцінці достовірності (зміщення та заниження довірчих інтервалів). Погана якість моделі проявляється наявністю автокореляції в залишках наближення. Але для етапів LSS розкладу така ситуація є нормальним режимом роботи. Вирішити цю особливість можна розділивши (в наближеному або статистичному розумінні) детерміновану і випадкову складові. Тобто відтворивши апостеріорі вхідні умови оптимальності МНК.

Зупинимося детальніше на питанні оцінки якості моделі регресії. Це поняття інтуїтивно близьке до поняття точності виділення детермінованої складової. Питання правильного вибору параметрів алгоритму потребує вибору певного критерію якості моделі регресії. В класичних методах користуються коефіцієнтом детермінації та виправленим коефіцієнтом детермінації [121]. Недоліки коефіцієнта

детермінації загальновідомі і його застосування скоріше традиція ніж необхідність, оскільки він формально показує співвідношення між дисперсією вхідних даних і залишків, реальне значення котрого апріорно невідоме. Дещо кращим є тест Дарбіна-Вотсона на наявність в залишках автокореляції першого порядку [121]. Основним недоліком тесту є наявність області невизначеності і складність апаратної реалізації.

Розглянемо дещо інший підхід, що ґрунтується на статистичній оцінці якості моделі. При наявності значної випадкової складової в даних аналіз якості моделі пов'язаний з аналізом залишків:

$$e_i = y_i - S(t_i, A), \quad i = \overline{1, N}. \quad (5.24)$$

За умови некорельованості випадкової складової (умови теореми Гауса-Маркова) залишки якісної моделі також мають бути некорельованими. Якісна модель мусить адекватно наближати лише детерміновану складову даних. Розділити дані на детерміновану (низькочастотну) та випадкову (високочастотну) складові можна керуючись гладкістю сплайнової моделі, котра залежить від ширини фрагментів. Відсутність детермінованої складової в залишках слід розуміти в статистичному сенсі. Тобто має гарантуватися заданий рівень помилки першого роду при перевірці нульової гіпотези про випадковий характер залишків. Відомі статистичні критерії для перевірки випадкового характеру даних (або стаціонарності випадкового процесу за математичним сподіванням). Найбільш прийнятними, з погляду автора, є непараметричні критерії серій та інверсій [134,287]. Ці критерії потребують мінімуму апріорної інформації і допускають ефективну реалізацію. Зупинимось на простішому в реалізації критерії інверсій. Він більш потужний в порівнянні з критерієм серій при виявленні монотонного тренда. Критерій розраховують у відповідності з наступним виразом [134]:

$$I = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \eta_{i,j}, \quad \eta_{i,j} = \begin{cases} 1, & y_i > y_j; \\ 0, & y_i \leq y_j. \end{cases} \quad (5.25)$$

За умови стаціонарності і випадковості даних критерій має близький до нормального закон розподілу з математичним сподіванням:

$$M[I] = \frac{N(N-1)}{4}, \quad (5.26)$$

і дисперсією:

$$D[I] = \frac{N(2N+5)(N-1)}{72}. \quad (5.27)$$

Тоді для заданої послідовності з N даних розраховуємо значення критерію I . Для заданого рівня помилки першого роду α і обсягу даних N знаходимо відповідні квантили нормального закону, що обмежують область прийняття гіпотези про відсутність детермінованої складової:

$$I_{N,1-\alpha/2} \leq I \leq I_{N,\alpha/2}. \quad (5.28)$$

З погляду автора, хорошою альтернативою вказаним критеріям є ймовірність p , визначена по повній вибірці (умовно її можна назвати ймовірністю випадковості залишків).

Такий критерій є зручним в силу наступних причин.

Застосування критерію до вхідних даних дає можливість до обробки визначити доцільність подальшого аналізу (лише якщо дані є не випадковими).

При надмірному зростанні числа оцінюваних параметрів (наближенні до інтерполяції) критерій показує погіршення моделі.

Критерій відноситься до непараметричних і потребує мінімуму апріорної інформації.

Критерій простий в розрахунках і у визначенні критичних значень.

Критерій виявив хорошу кореляцію з тестом Дарбіна-Вотсона.

Таким чином будемо застосовувати критерій інверсій для виявлення детермінованої складової в залишках наближення МНК.

Отже для оцінки достовірності коефіцієнтів розкладу слід контролювати наявність детермінованої складової в залишках розкладу. Якщо гіпотезу про випадковість залишків відкинути не можна, то залишок вважаємо випадковим і

подальший розклад припиняємо. Оцінку дисперсії випадкового залишку приймемо за дисперсію адитивної випадкової складової.

Розглянемо, яким чином вирішуються статистичні задачі з коефіцієнтами розкладу. Для цього представимо k -етапний LSS розклад у вигляді однієї еквівалентної процедури МНК оцінювання. Запишемо вираз для реконструйованого за коефіцієнтами розкладу сигналу, виразивши його через систему базисних функцій розкладу:

$$S(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_k} a_{j,i} B_{\tau_j, v_i}(t). \quad (5.29)$$

Матриця планування МНК для моделі виду (5.29) є матрицею, що складається із матриць планування окремих етапів розкладу (доповнених нулями):

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \dots \mathbf{P}_k]. \quad (5.30)$$

Вектор коефіцієнтів розкладу запишемо у вигляді:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \dots \mathbf{A}_k], \quad \mathbf{A}_i = [a_{1,i} \ a_{2,i} \ a_{3,i} \ \dots \ a_{n_i,i}]. \quad (5.31)$$

Значення сплайна в матричному вигляді знаходяться згідно виразу:

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}\mathbf{A}. \quad (5.32)$$

Тоді оцінки МНК отримуємо наступним чином:

$$\hat{\mathbf{A}} = (\mathbf{P}'\mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}'\mathbf{Y} = \mathbf{G}\mathbf{P}'\mathbf{Y}. \quad (5.33)$$

Звідси легко отримати коваріаційну матрицю МНК і статистичні задачі вирішуються добре відомими методами. Найбільш практично важливими задачами є перевірка гіпотези про рівність нулю коефіцієнтів розкладу та рівність коефіцієнтів різних розкладів.

З врахуванням викладеного структура пристрою для LSS розкладу-синтезу із статистичною обробкою має включати блоки перевірки залишків розкладу на випадковість (INV), перевірки коефіцієнтів на рівність нулю (ZE), перевірки рівності з коефіцієнтами іншого розкладу (EQ) рис.5.21. Блок INV виробляє сигнал

r_i , що свідчить про наявність чи відсутність детермінованої складової. По вихідному сигналу залишків розраховується оцінка дисперсії випадкової складової. Оцінка дисперсії випадкових залишків є вхідною до блоків ZE та EQ. Підтвердження нулового значення коефіцієнтів розкладу робить нуловими значення з виходу ZE на вхід інтерполятора синтезу. Вихідним сигналом блоку EQ є сигнал eq_i підтвердження еквівалентності коефіцієнта значенню w_i .

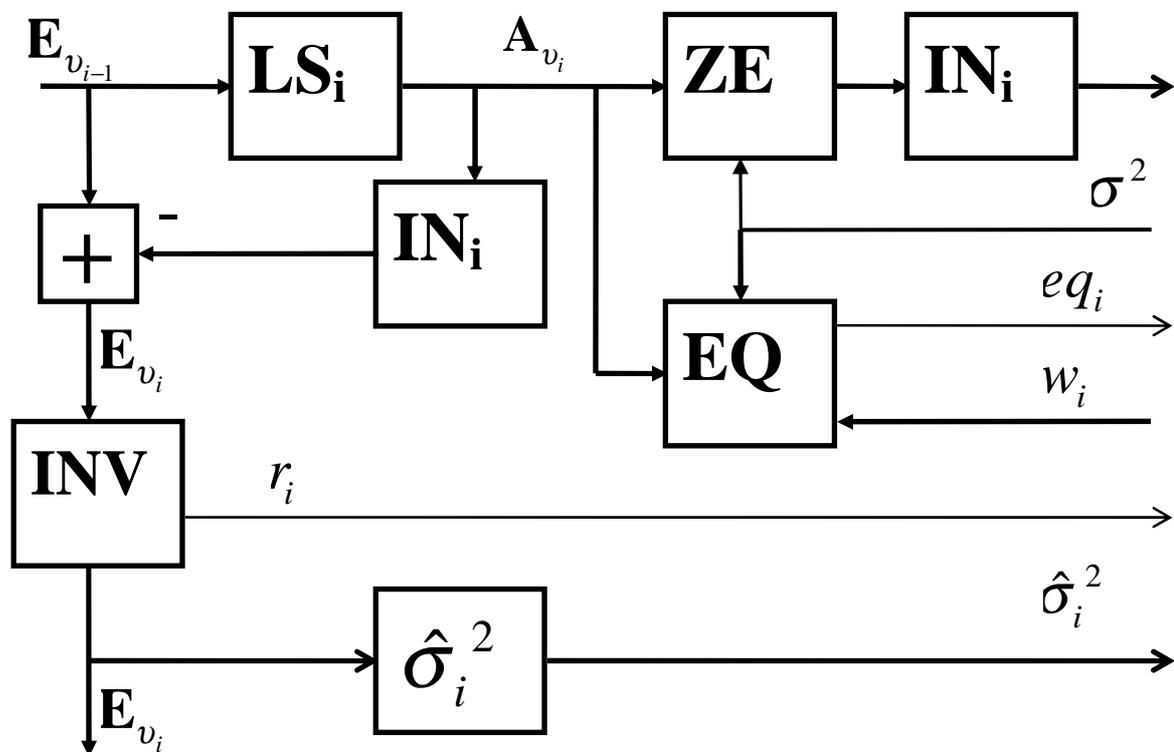


Рис.5.21. Структура етапу LSS розкладу із статистичною обробкою

Така конструкція пристрою розкладу є досить універсальною для вирішення широкого кола прикладних задач. Додаткові елементи легко реалізувати апаратно, інтегрувавши їх в пристрій розкладу.

Сам LSS розклад є принципово стійким до дії шумів. На рис. 5.22 показано результати вейвлет та LSS розкладу гармонійного сигналу.

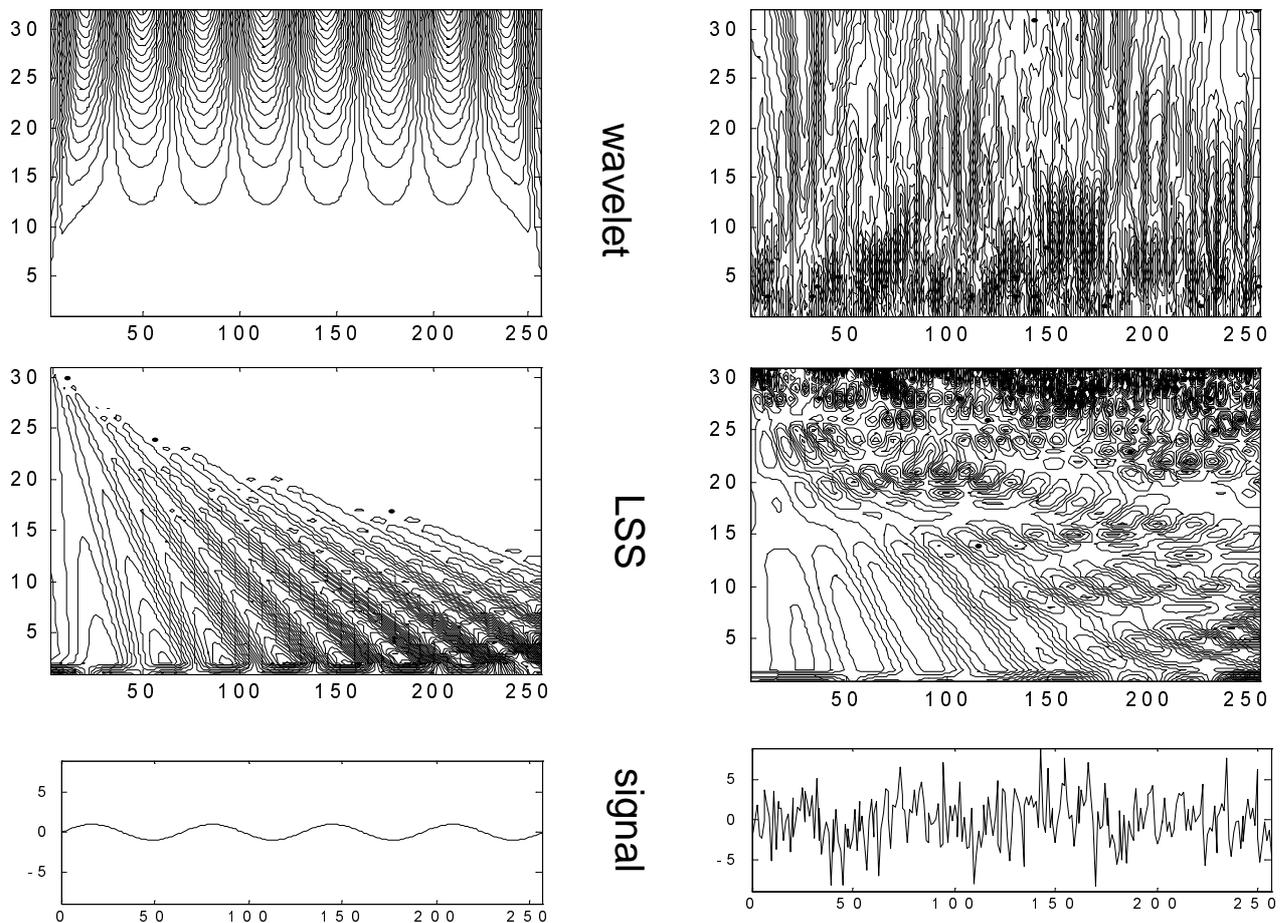


Рис.5.22. Вплив білого шуму на результати вейвлет та LSS розкладу

Ліворуч результати розкладу без шумів, праворуч з адитивним гаусовим білим шумом. Розклад виконувався з масштабами від 32 до 2. Для LSS розкладу використано базис з кубічних ермітових сплайнів. Для вейвлет розкладу біортогональний базис з кубічних сплайнів (найбільш близький до базису LSS розкладу). Наявність шуму призводить до значного спотворення вейвлет картини і втрати характерної для сигналу картини розкладу. Це є природнім для вейвлет розкладу, адже його на його картину виноситься деталізація сигналу (власне шум). LSS розклад суттєво менше чутливий до шумів, його зображення зберігає характерні для сигналу риси. Картина LSS розкладу відображає не деталі а основні тенденції.

5.5. Структура пристроїв однократної адаптивної обробки сигналів

Систему частотно-часового розкладу в принципі можна розглядати як адаптивну систему обробки сигналів. Особливо це стосується останнього варіанту з блоками статистичної обробки. В ньому адаптивно змінюються як алгоритм синтезу (припинення подальшого розкладу) так і алгоритм аналізу сигналу (встановлення нульових значень). Але слід відмітити суттєвий недолік таких систем, що застосовують багатократну обробку. Це значна затримка, як остаточного результату власне розкладу так і сигналу на виході блоку синтезу. Окрім того така система потребує значних ресурсів.

Отримані в попередніх розділах результати потенційно дозволяють будувати значно економніші і з меншою затримкою адаптивні пристрої. Розглянемо два основні способи адаптації: зміна форми базисного сплайна і зміна масштабу базисного сплайна.

Можливість зміни форми базисного сплайна ґрунтується на результатах отриманих в 3-4 розділах. Це можливість синтезу базисного сплайна із заданими частотними властивостями шляхом згортки імпульсних характеристик нерекурсивних фільтрів та специфічні методи розв'язку інтерполяційних та МНК рівнянь.

Розглянемо схему адаптації без зворотного зв'язку рис.5.23. За цих умов система повинна отримувати інформацію про частотні властивості корисного сигналу, рівень шумів. Як мінімум це верхня частота сигналу, виходячи з якої можна синтезувати базисний сплайн $B(t)$ та розрахувати імпульсну характеристику LSS фільтра L , або коефіцієнти апроксиматора G . Альтернативним варіантом є ідентифікація частотних властивостей сигналу (блок Ident). Для цього можна використати досить грубі методи (періодограмний, Велча), що будуть давати оцінку спектру сигналу в середньому $\hat{F}(\omega)$ та точність оцінки $\Delta\hat{F}(\omega)$, тоді як сплайн-

фільтр буде виконувати тонку обробку, що враховує форму сигналу. Для аналізу також можна застосувати і багаточастотний сплайн аналіз, або вейвлет аналіз. Конкретний вибір залежить від певних цілей та обмежень реалізації. Вектор Q задає параметри ідентифікації та апіорні дані стосовно спектру. Безпосередню фільтрацію вхідного сигналу $x(t)$ здійснює сплайн-апроксиматор (в цьому випадку одночасно виконується і стиснення сигналу), або класичний нерекурсивний фільтр з коефіцієнтами – рядками прекційної матриці МНК. Блок управління приймає рішення про необхідність адаптації виходячи із суттєвості змін у спектрі та керуючись заданими параметрами якості у векторі U . Структура пристрою залишається незмінною. Змінюються лише числові коефіцієнти в перемножувачах та блоках па'мяті. Вектор параметрів фільтра H надходить з блоку управління.

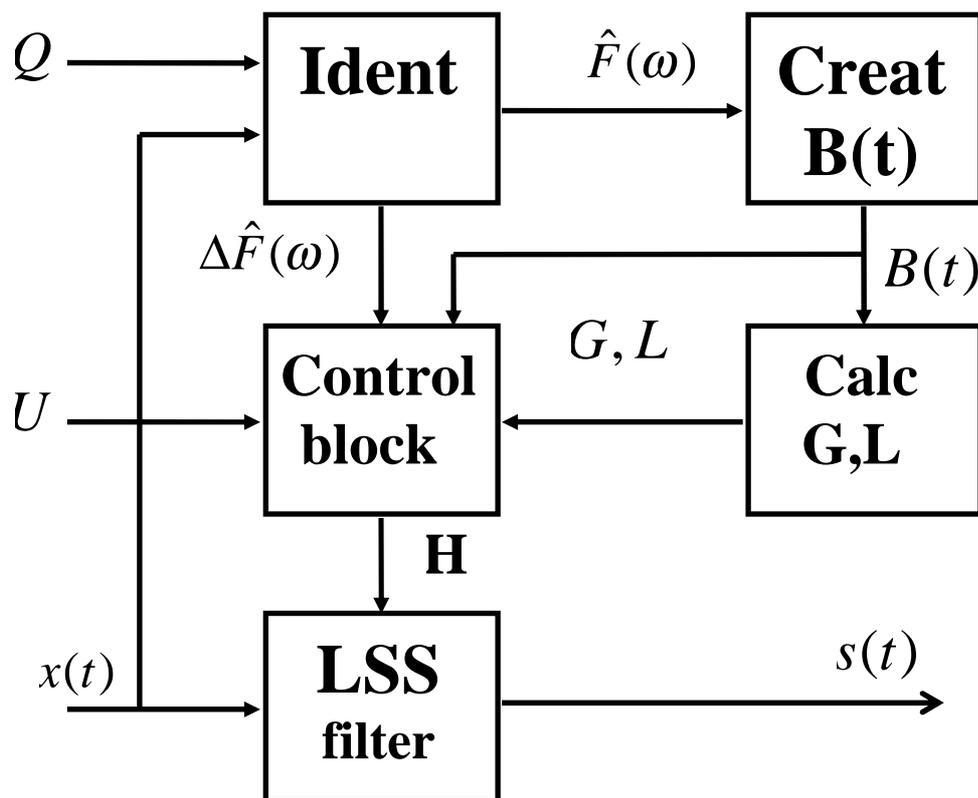


Рис.5.23. Структура пристрою прямої адаптивної фільтрації

Якщо здійснювати адаптацію за рахунок зміни масштабу базисних сплайнів з кратністю рівною певному цілому числу (найкраще двійці), то обсяги змін в апроксиматорі та інтерполяторі будуть мінімальними. Зміниться лише пристрій

вибірки коефіцієнтів із пам'яті. Таку адаптацію можна цілком поєднувати із LSS розкладом. Це дасть скорочення часу затримки вихідного сигналу. Однак слід враховувати, що зміна масштабу призводить до значної зміни достовірності результатів.

Системи із зворотнім зв'язком також можуть використовувати наявну апріорну інформацію і такі схеми є загально відомими [120, 257, 295]. Розглянемо дещо іншу конструкцію, яка потребує мінімуму апріорної інформації Рис.5.24. Ключовим елементом такої конструкції є блок перевірки залишків на випадковість (INV). Ідея полягає в тому, що система має підтримувати ймовірність випадковості залишків в заданих межах.

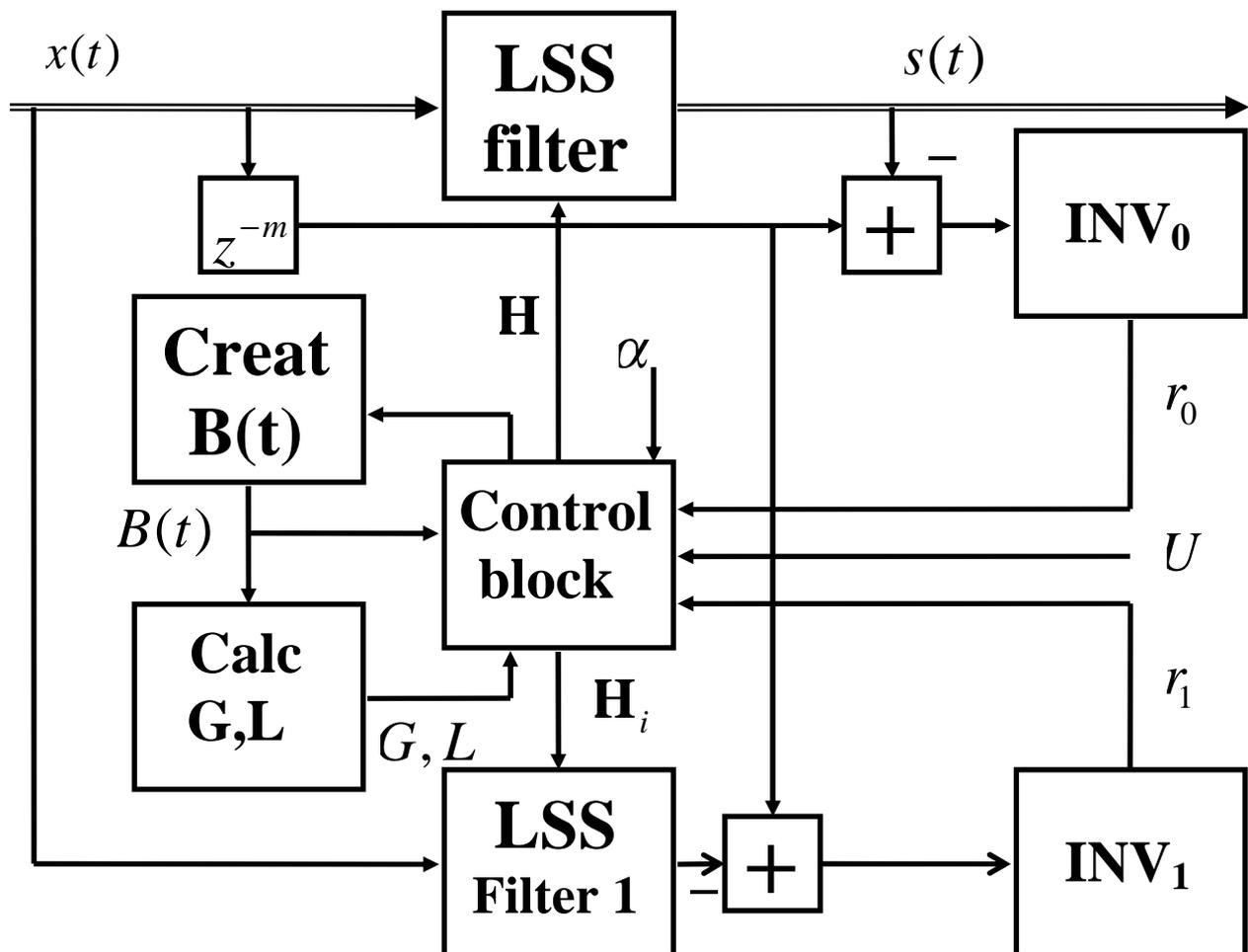


Рис.5.24. Структура адаптивного фільтра із зворотнім зв'язком

Якщо ймовірність випадковості залишків (критичне r для заданої помилки першого роду α) зменшується, слід звужувати спектр базисного сплайна. Якщо

ймовірність збільшується слід розширювати спектр. Зрозуміло, що під верхньою частотою спектру мова йде про певний умовний рівень модуля спектру базисного сплайна.

Таку систему доцільно виконати в двоканальному варіанті. Де один канал є робочим, а інший вимірювальним (LSS filter 1). Вихідний сигнал фільтра вимірювального каналу вираховується із затриманого вхідного сигналу. Сформований сигнал залишків надходить до блока перевірки залишків на випадковість (INV_1). Блок розраховує число інверсій r_1 і передає до блоку управління. Блок управління періодично робить спроби знизити верхню частоту базису, аж до появи детермінованої складової в залишках (завантажуючи параметри \mathbf{H}_i у LSS фільтр вимірювального каналу). Успішність спроб дає підстави внести зміни в основний канал (змінивши параметри \mathbf{H}). Розширення спектру сигналу виявляє блок INV_0 , який передає число інверсій r_0 в блок управління, що призводить до завантаження параметрів \mathbf{H} для базису із більшою шириною спектру.

Структура конкретних конструктивних рішень звісно буде визначатися необхідними технічними та економічними вимогами. Так само будуть відрізнятися і алгоритми роботи блоку управління. Широке коло таких алгоритмів розглянуте в [295]. Тому розглядати їх в даній роботі має потреби.

Необхідно відмітити, що можлива побудова схем, що поєднують прямий та зворотній зв'язки, а також більш складні способи адаптації сплайна до частотних властивостей сигналу і шуму (враховуючи форму спектру сигналу).

Розглянемо суть та можливості процесу адаптації на модельних прикладах. Для цього розроблено програми, що дозволяють проводити чисельні експерименти, та моделювати адаптивні системи сплайн-фільтрації в системі MatLab, Simulink.

Розглянемо рис.5.25. Корисний випадковий сигнал (верхній графік) формується з білого шуму шляхом проходження через нерекурсивний ФНЧ

високого порядку (1024) із заданою частотою зрізу (0.05). Сигнал нормується до одиничної дисперсії. До корисного сигналу додається білий гаусів шум із заданим СКВ (0.1). Цей сигнал, зображений на середньому графікові надходить на вхід сплайн-фільтра. Вихідний сигнал на нижньому графікові.

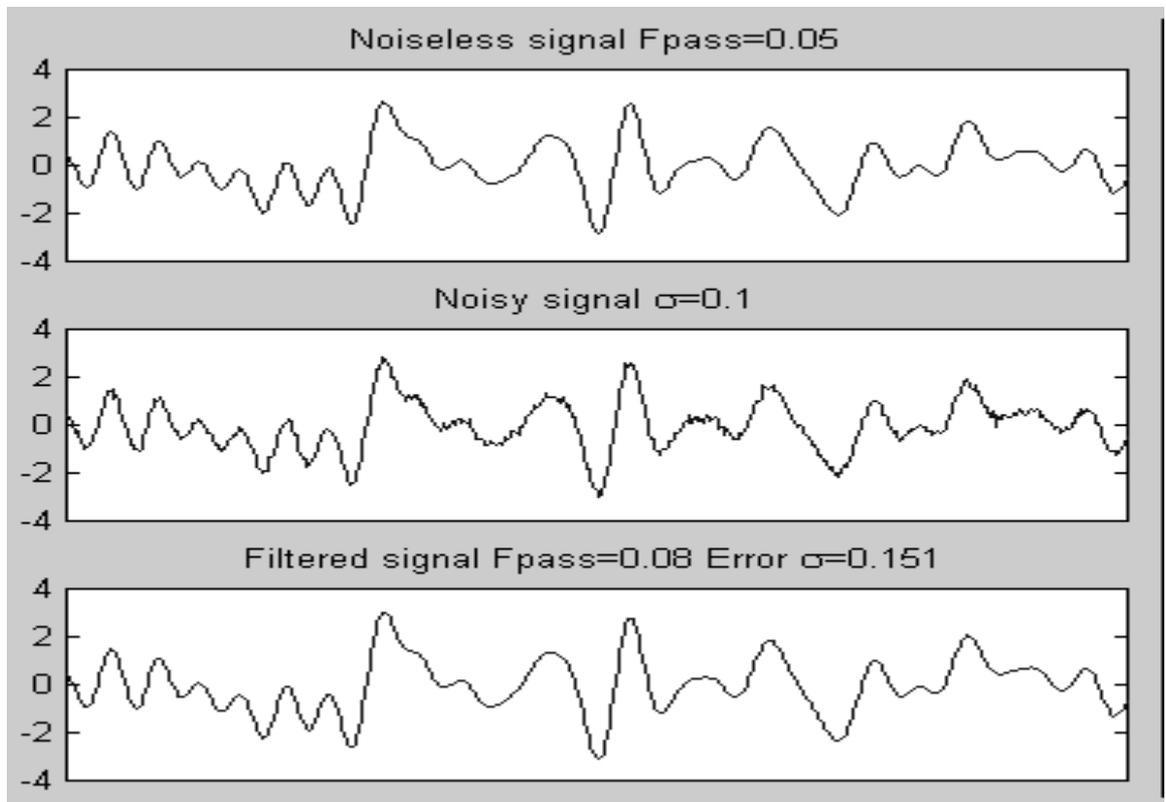


Рис.5.25. Корисний, вхідний та вихідний сигнали сплайн-фільтра

Сплайн-фільтр має імпульсну характеристику – рядок прецизійної матриці МНК. Базисний сплайн побудований згорткою імпульсної характеристики нерекурсивного цифрового ФНЧ 32 порядку із заданою частотою зрізу. Отже маємо 64 відліки на фрагменті сплайна. Синтез цифрових фільтрів здійснювався шляхом інверсного перетворення Фурє ідеальної АЧХ та домноження на часове вікно Хемінга (функція `fir1` Matlab). Вихідний сигнал показано на нижньому графікові. Оскільки верхня частота базисного сплайна на третину вища за верхню частоту сигналу фільтр приймає шуми і мало спотворює форму сигналу.

Розглянемо ситуацію, коли верхня частота сигналу на третину вища за частоту базисного сплайна рис.5.26. Спектри показано на рис.5.27. Корисний сигнал значною мірою спотворений, згладжений.

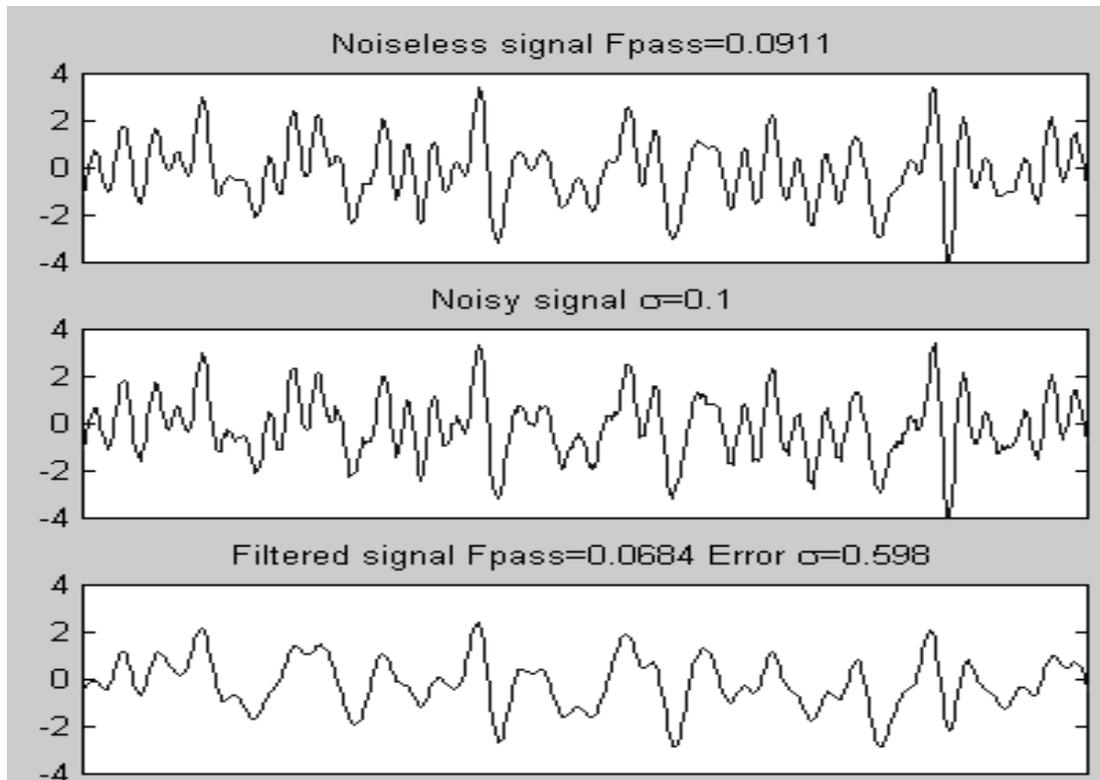


Рис.5.26. Результат розширення спектру корисного сигналу.

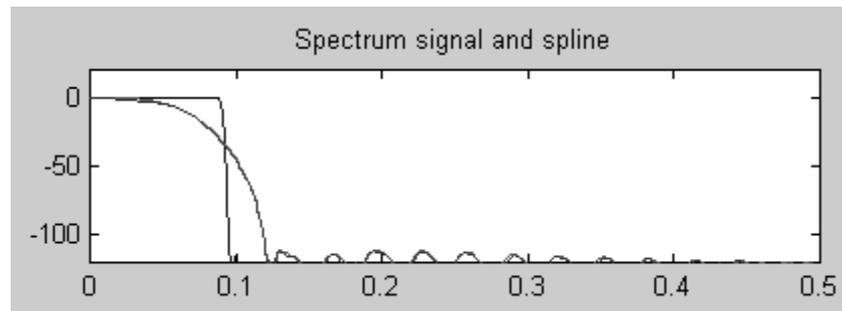


Рис.5.27. Спектри сигналу та сплайнового базису

В залишках присутня значна детермінована складова. Компенсація полягає в підвищенні частоти базису. На рис.5.28, 5.29 показано результати в часовій та спектральній області. Розширення верхньої частоти базисного сплайна компенсувало розширення спектра сигналу.

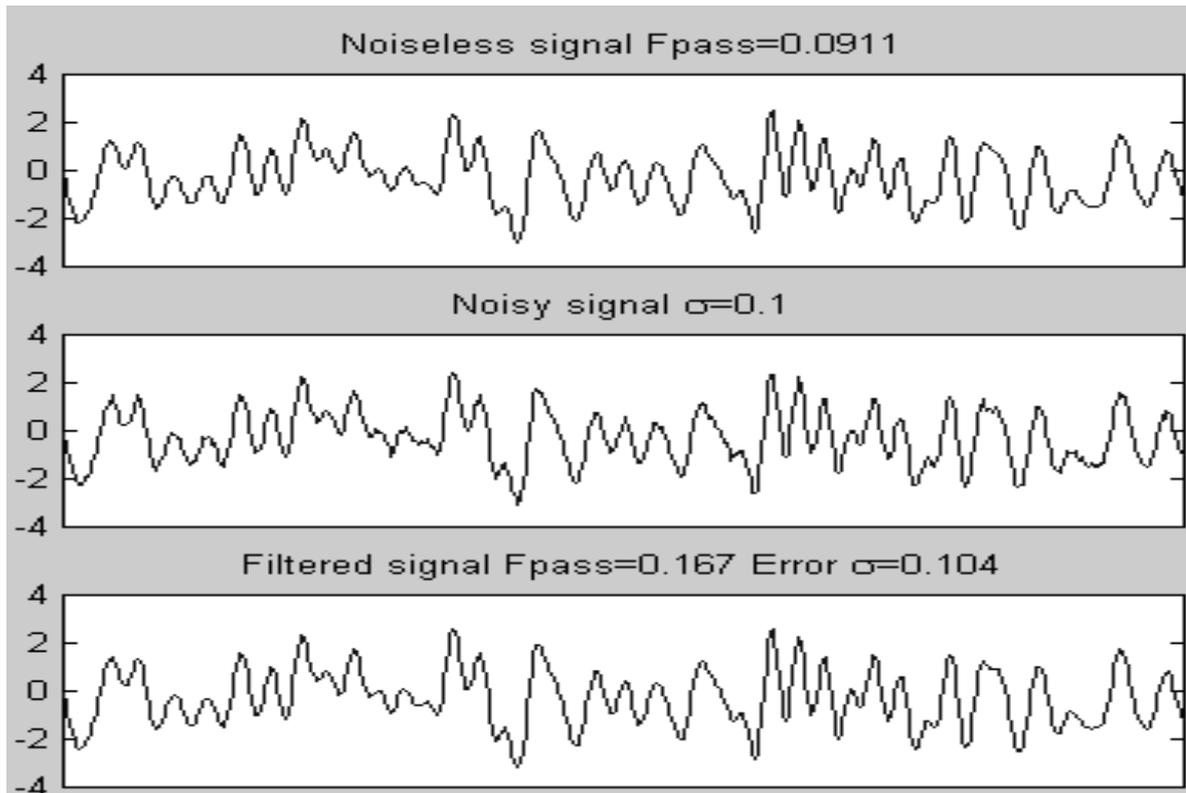


Рис.5.28. Адаптація до розширення спектру корисного сигналу.

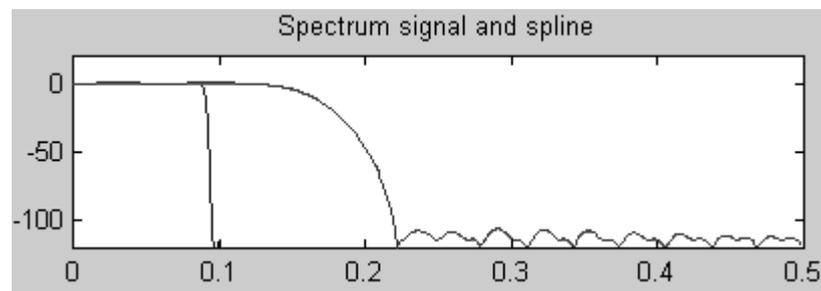


Рис.5.29. Спектри сигналу та сплайнового базису після адаптації

Як відомо, на якість фільтрації впливає також рівень шумів. Підвищення дисперсії шуму потребує звуження смуги пропускання і певного компромісу між спотворенням сигналу за рахунок звуження смуги і за рахунок власне шуму. На рис.5.30 показано вплив зростання дисперсії шуму на сигнали. Фільтр пропускає значну шумову складову. Адаптація полягає у зменшенні верхньої частоти базисного сплайна. Спектри показано на рис.5.31, а сигнали на рис.5.32. Рівень шумів значно знизився, а корисний сигнал має не великі спотворення, обумовлені нерівномірністю АЧХ фільтра в сигнальній області.

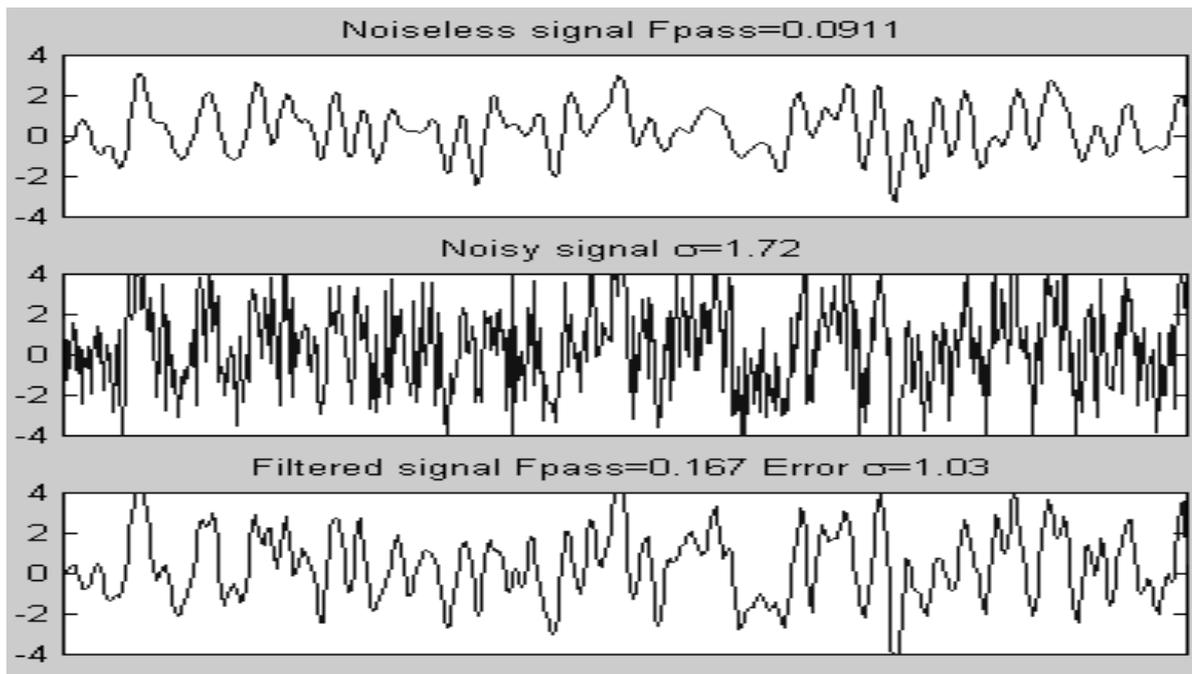


Рис.5.30. Наслідки зростання дисперсії шуму

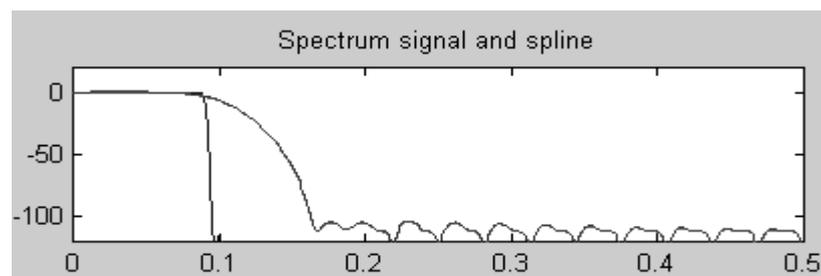


Рис.5.31. Результат адаптації до зростання дисперсії шуму в частотній області

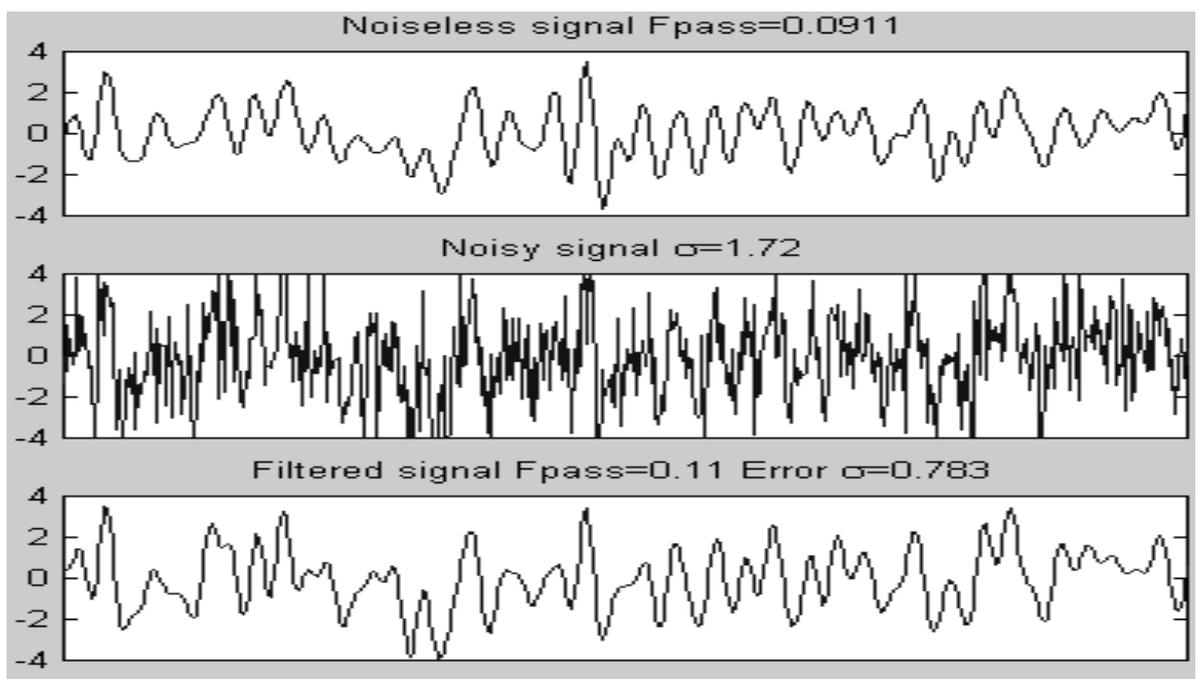


Рис.5.32. Результат адаптації до зростання шуму в часовій області

Розроблене програмне забезпечення дозволяє оперативно змінювати верхню частоту сигналу та базисного сплайну і рівень шумів, спостерігаючи за змінами в сигналах та спектрах.

Якщо необхідно одночасно з фільтрацією сигналу виконувати його стиснення тоді слід враховувати ефекти перекриття частот. Верхня частота базисного сплайна не може бути більшою за $0.5/n$, де n - коефіцієнт стиснення (число відліків на фрагменті сплайна).

5.6. Висновки

1. Отриманий LSS розклад сигналу є схожим до вейвлет розкладу, але на відміну від нього коефіцієнти розкладу є оптимальними в середньоквадратичному розумінні, а розклад відбувається від нижніх частот до верхніх, що є більш природнім і дає змогу припинити розклад при достатній деталізації.

2. LSS розклад потенційно дозволяє здійснювати аналітичний розклад ряду сигналів, що дозволяє співставляти чисельні і аналітичні результати.

3. LSS розклад дозволяє отримувати статистичні оцінки достовірності коефіцієнтів та користуватися статистичними методами перевірки гіпотез стосовно коефіцієнтів розкладу.

4. LSS розклад можна ефективно реалізовувати апаратно в цілочисельній арифметиці та в комплексі із статистичною обробкою, зокрема в поєднанні із контролем залишків на випадковість.

5. LSS фільтри дозволяють будувати адаптивні пристрої обробки сигналів з адаптацією без або зі зворотним зв'язком та їх комбінацією. Суть адаптації полягає в зміні частотних властивостей базису. Такі фільтри простіші за пристрої частотно-часового розкладу і мають менший час затримки.

РОЗДІЛ 6. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РЕАЛІЗАЦІЯ АДАПТИВНОЇ, ОПТИМАЛЬНОЇ СПЛАЙН-ОБРОБКИ ЦИФРОВИХ СИГНАЛІВ

6.1. Постановка задачі

Основним завданням заключного розділу є опис реалізації сплайн-обробки як технології та приклади її застосування для обробки конкретних сигналів, а також порівняння результатів з отриманими wavelet методами.

В другому підрозділі описано засоби та технологія сплайн-обробки цифрових сигналів. Вказано структуру та особливості реалізацій розроблених методів та алгоритмів, та послідовність їх застосування.

В третьому підрозділі ставиться завдання створити модельні сигнали з заданими спектральними властивостями і на цих даних практично продемонструвати особливості застосування сплайнових базисів та алгоритмів фільтрації та стиснення даних [332]. Тестову послідовність утворюємо фільтрацією гаусового білого шуму та додаванням некорельованих випадкових даних з гаусовим законом розподілу. Оскільки в даному випадку відома дисперсія випадкової складової, то якість фільтрації характеризуватиме дисперсія залишків, котра повинна бути близькою до заданої. Відома також і детермінована складова. Якість наближення до неї характеризуватиме максимальна нев'язка. Якість відновлення детермінованої складової оцінюватимемо і візуально.

В четвертому підрозділі розглянемо приклад реалізації сплайнових методів фільтрації та стиснення в медичній функціональній діагностиці [320]. Тут особливу увагу звернемо на особливості алгоритмічної реалізації в контексті певного програмного та апаратного середовища.

В п'ятому підрозділі розглянемо застосування LSS розкладу до аналізу акустичних легеневих сигналів в медичній діагностиці.

В шостому підрозділі розглянемо фільтрацію зашумлених растрових відеозображень. Метою обробки є зниження впливу шуму при мінімальному спотворенні корисного зображення. Адаптація здійснюється шляхом зміни верхньої частоти базисного сплайну.

В сьомому підрозділі розглянемо застосування розроблених методів в задачах стиснення цифрових зображень. Мова йтиме про стиснення з певним рівнем втрат. Тому запропонований підхід порівняємо з відомими wavelets методами та JPEG алгоритмом. Для тестування використаємо широко прийняте в подібних роботах зображення “Lena”.

Восьмий підрозділ містить основні висновки до розділу.

6.2. Сплайн-технологія обробки цифрових сигналів

Сплайнова технологія обробки сигналів є сукупністю способів, знань та відомостей про послідовність операцій в процесі обробки цифрових сигналів. Її особливістю є застосування математичного апарату сплайн-функцій, адаптованого до специфічних вимог цифрової обробки сигналів.

Основним середовищем в котрому реалізовано ключові алгоритми технології та концептуальні положення є MatLab та MathCad. Частина програм виконана в алгоритмічній мові “С”, та в середовищі Excel на VBA. Відмітимо, що реалізація алгоритмів на мові пакету MatLab є майже ідентичним реалізації на мовах “С”, “С++”, “Fortran”, ”Ada”, “Java” принаймні в трьох реалізаціях компіляторів. Останнє обумовлено наявністю транслятора кодів пакету у вказані мови. Іншою перевагою такої реалізації є наявність в пакетах інших засобів обробки цифрових сигналів (синтез цифрових фільтрів, оптимізація, частотний аналіз, статистичні функції). Структурно комплекс програм розміщено у наступних розділах (каталогах).

BASES - призначений для синтезу сплайнових базисів із заданими частотними характеристиками на рівномірних сітках. Реалізований в середовищі

MatCad і включає приклади синтезу алгебраїчних, тригонометричних, експоненційних, логарифмічних базисів та їх приведення до лагранжівної форми. Включає приклади інтерполяції та апроксимації за МНК. Ілюстрації другого та третього розділів отримані за допомогою реалізованих в ньому можливостей.

BFSPL - призначений для синтезу інтерполяційних та МНК сплайн-фільтрів (в тому числі зі стисненням). Реалізований у вигляді *.m файлів. Функції описані у п'ятому розділі, а отримані з їх допомогою результати представлено в підрозділі 6.3.

CDF - призначений для ідентифікації законів розподілу і включає функції побудови сплайна на сітках близьких до оптимальних. Реалізований у вигляді *.m файлів.

COMPRESS - призначений для ілюстрації та дослідження сплайнових алгоритмів стиснення зображень. Реалізований у вигляді *.m файлів та окремого exe модуля для проведення експериментів зі стисненням зображень. Опис методу та результати показано в підрозділі 6.7.

GEOLOG - приклад застосування технології для ідентифікації геологічних та геофізичних сигналів. Реалізований у вигляді *.m файлів.

MODEL - приклад застосування результатів ідентифікації вольт-амперної характеристики тунельного діода для моделювання роботи релаксаційного генератора. Реалізований у вигляді *.m файлів.

SFFIR - генератор текстів програм на "C", що реалізують фільтрацію одномірних даних за МНК зі стисненням в задане число раз. Застосовані кубічні ермітові сплайни. В основі реалізації матеріал викладений в підрозділах 3.3, 3.4, 5.2, 5.3.

SPL - бібліотека функцій обробки сигналів та демонстраційні програми, що стосуються сплайн-методів. Реалізовано у вигляді *.m файлів.

SPLL - бібліотека функцій на "C" для реалізації сплайн методів інтерполяції та згладжування.

LSS - комплекс програм та структурних моделей пристроїв частотно-часового розкладу сигналів, включаючи приклади застосування. Реалізований у вигляді *.m файлів, *.mdl файлів структурних моделей пакету Simulink та сервісних програм. В основі функцій методи описані в п'ятому розділі.

POLIGR - приклад реалізації технічної системи обробки цифрових сигналів в медичній діагностиці. Сплайни використані для фільтрації - стиснення - інтерполяції. Реалізований у вигляді програми, написаної на "С" та асемблері.

EXCEL - прикладний пакет в середовищі Excel, реалізований на "VBA". Включає задачі інтерполяції та згладжування, в тому числі з пошуком сітки вузлів близької до оптимальної.

Технологія призначена для роботи із гладкими, неперервними сигналами складної форми, відліки яких можуть включати адитивний некорельований шум. В рамках технології вирішуються питання синтезу алгоритмів та засобів (цифрових фільтрів) для інтерполяції, фільтрації, згладжування, оцінювання параметрів сигналів.

Інформаційна сплайн-технологія описана в стандарті IDEF3 [36,68,69,70,71,72], що призначений для моделювання технологічних процесів. Діаграма опису послідовності етапів верхнього рівня показана на рис.6.1.

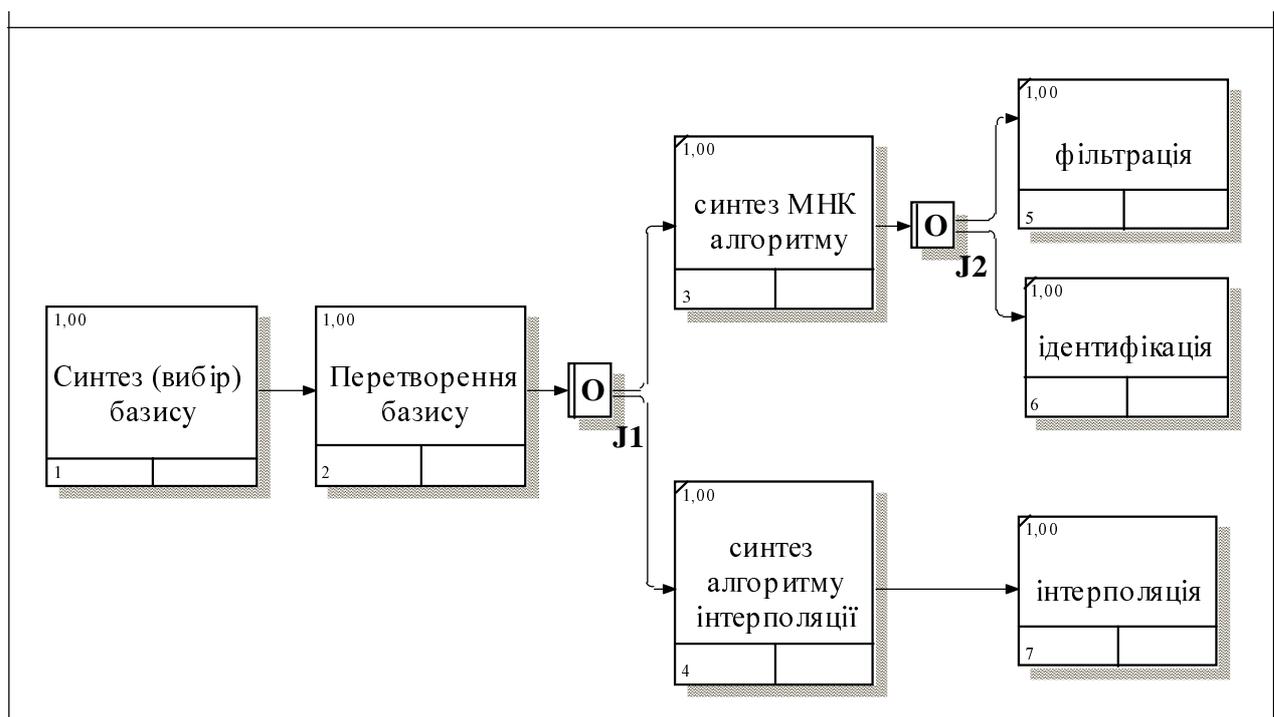


Рис.6.1. PFDD діаграма інформаційної сплайн-технології

Маємо наступний технологічний цикл (в дужках позначатимемо номери блоків на діаграмах). Синтез (або вибір) базисного сплайна (1). Декомпозиція етапу показано на рис.6.2. Необхідно виконати детальний аналіз апріорної інформації про сигнал (9). Це інформація про частотні властивості корисної складової та характер шумової складової. Важливою також є інформація про форму корисної складової та її мінливість. Так у випадку реографічних та кардіографічних сигналів досить точно відома форма у нормальному випадку та її зміни при певних патологіях. Отже можна врахувати особливості сигналу в часовій області. У інших випадках корисна складова носить переважно випадковий характер (електроенцефалографічні сигнали, фонографія, геофізичні сигнали) і не має певної апріорно відомої форми. В даному випадку краще скористатися частотними властивостями амплітудного чи енергетичного спектрів. Вибір базисного сплайна визначається також конкретними

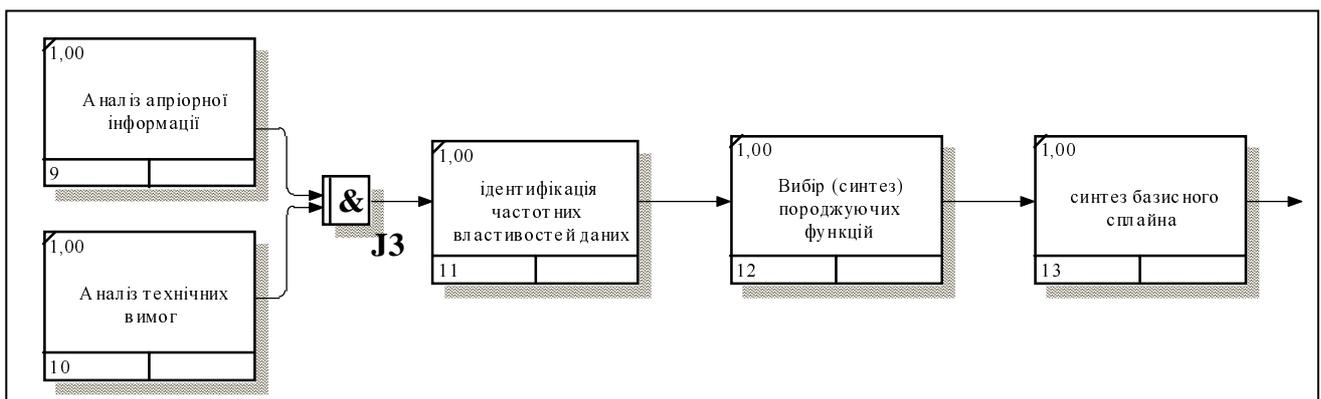


Рис.6.2. Декомпозиція UOV блоку синтезу базису

технічними вимогами до системи обробки даних (10). Вимоги стосуються як власне частини обробки даних так і вимог до підсистеми збору даних. Зокрема важливою є можливість зміни частоти дискретизації. Основною метою етапів 9,10 є формулювання характеристик якості алгоритмів обробки (підрозділ 2.6) та виявлення суттєвої апріорної інформації про сигнал. Якщо наявної апріорної інформації про частотні властивості сигналу не достатньо, слід виконати ідентифікацію сигналу за наявними вибірками (11) [311,318,326,334]. При цьому можна застосувати алгоритми описані в розділі 3. Для синтезу базисного сплайна необхідно вибрати породжуючі функції (12) у відповідності з характером сигналу

(експоненційний, гармонійний, логарифмічний) та або за відповідністю спектральних характеристик. В останньому випадку задача може зводиться до синтезу імпульсних характеристик відповідних фільтрів. Розрахунок базисного сплайна (13) виконується в аналітичному вигляді (якщо розрахункові вирази досить прості) або чисельно, згідно виразів викладених в другому розділі [312,313,314].

Наступним етапом є перетворення базису (2) [313,317,329]. Цей етап є важливим для задач інтерполяції та у випадках, коли оцінки МНК мають мати той самий зміст що і вхідні дані. В результаті отримуємо ермітів або лагранжів базис за алгоритмами підрозділів 2.6 та 2.7. Для отриманих базисів будуємо МНК алгоритм з врахуванням обмежень реалізації (3) [314,320,332,333,336,338,339]. Можливі варіанти вибору: віконний по типу Савицького-Голея, віконний зі стисненням, рекурентний, частотно-часовий. Паралельно розробляється алгоритм інтерполяції (4) з аналогічними базисами. Отримані алгоритми застосовуються для обробки сигналів. Блоки (5-7) включають оцінку характеристик сконструйованих алгоритмів та засобів їх реалізації за важливими для конкретної задачі параметрами на типових вибірках даних. Процес створення алгоритмів та засобів для конкретного практичного застосування може вимагати декількох ітерацій з поверненням до попередніх етапів для задоволення технічних вимог.

Останні кроки є в принципі не залежними і їх набір диктується завданнями обробки сигналів. Типовими є наступні задачі.

Фільтрація сигналів. Мова йде про виділення детермінованої складової з адитивної суміші [320,321,331,335,336,338,339]. Відліки надходять з постійним кроком і є необмеженими по кількості. Паралельно може вирішуватись задача стиснення даних та перетворення вхідної частоти з допомогою інтерполяції.

Ідентифікація сигналів. Основним завданням є встановлення конкретного вигляду детермінованої складової. Тобто отримання оцінок параметрів сплайн-моделі детермінованої складової [316,319,323,324,325,328,330]. Ключове значення для даних задач мають алгоритми побудови сплайна на сітках близьких до оптимальних.

Близькою до попередньої є задача ідентифікації законів розподілу випадкових величин [337,321,322]. В контексті попереднього це може бути встановлення закону розподілу залишків наближення з попередньої задачі, або закон розподілу може мати окремий інтерес. Встановлений закон розподілу застосовується для оцінки достовірності сплайнових моделей (з допомогою бутстреп методу) чи перевірки статистичних гіпотез, що стосуються законів розподілу.

Задача інтерполяції є допоміжною і в тому чи іншому вигляді присутня у всіх попередніх задачах. Спосіб реалізації залежить від вимог прикладної задачі. У вигляді цифрового фільтра чи алгоритмічна, у загальному вигляді.

Технологія побудови системи обробки сигналів є ітераційним процесом, де задоволення вимог конкретного застосування може досягатися за декілька циклів, або не повним циклом. Основною перевагою технології перед традиційною є обґрунтованість вибору базису, що дозволяє формалізувати і автоматизувати цей процес. На всіх етапах обробки застосовується єдиний математичний апарат сплайн-функцій. Особливістю сплайнових алгоритмів є їх швидкісні характеристики та оптимальність сітки вузлів. Нижче показані приклади реалізації технології.

6.3. Експериментальне дослідження адаптивних алгоритмів фільтрації сигналів

Для дослідження алгоритмів фільтрації формуватимемо тестові сигнали, що є сумою корисного сигналу та випадкової складової. Моделювання [226] виконаємо в середовищі Matlab. Для моделювання корисної складової псевдовипадкові дані ξ_i , розподілені за нормальним законом (нульове математичне сподівання, одинична дисперсія) фільтруватимемо нерекурсивним фільтром з імпульсною характеристикою h_f , що є базисним сплайном в В-формі. В результаті отримаємо корельовану послідовність даних f_i із амплітудним спектром, близьким до спектру

відповідного базисного сплайна. Тестову послідовність y_i отримаємо додавши до корельованих даних некорельовані дані ζ_i з нормальним законом розподілу та нульовим математичним сподіванням і заданою дисперсією σ^2 : $y_i = f_i + \zeta_i$. Отриману послідовність фільтруємо сплайн-фільтрами і отримуємо вихідну послідовність сплайнових оцінок s_i .

Для оцінки якості фільтрації аналізуватимемо залишки фільтрації $e_i = y_i - s_i$. Якісний фільтр має виділити лише корисну складову f_i , а залишки міститимуть лише випадкову складову ζ_i . Оскільки σ^2 відома, то залишки якісної фільтрації матимуть близьке до σ^2 значення дисперсії.

Більш тонким показником якості відновлення детермінованого сигналу за наявності шуму є максимальне значення модуля нев'язки наближення $d = \max_i |f_i - s_i|$. Звичайно, користуватися вказаними показниками можна лише в умовах моделювання даних, коли відома корисна складова і статистичні характеристики шуму.

Для дослідження візьмемо експоненційний, кубічний, синусоподібний базиси. Експоненційний і кубічний мають близькі частотні характеристики (рис.5.3,5.10). Синусоподібний базис має не характерний для класичних сплайнових базисів вигляд і його частотна характеристика є в області вищих частот (рис.5.3,5.12). Модельний сплайн складатиметься з фрагментів однакової довжини з 32 даними на фрагменті. Досліджуватимемо експоненційний і синусоподібний базиси в класичній В-формі і ермітовій формі. Кубічний розглянемо лише в ермітовій формі. Застосуємо два алгоритми фільтрації. Прямий, з імпульсною характеристикою - рядком проекційної матриці і алгоритм зі стисненням в 32 рази і наступною інтерполяцією. Сформуємо детерміновану складову з амплітудним спектром, ідентичним спектру експоненційного В-сплайна. На рис.6.3-6.12 показані

результати фільтрації однієї з реалізацій різними фільтрами. На рисунках показані детермінована складова f_i (точки) і відновлена функція s_i (неперервна лінія).

На рис.6.3-6.7 результати фільтрації нерекурсивним цифровим фільтром з імпульсною характеристикою, що є рядком проекційної МНК матриці (5.3). На рис.6.3 використана В-форма експоненційного базису, на рис.6.4 ермітова форма. Різниця в наближенні візуально практично не помітна. Це є наслідком близькості амплітудно-частотних характеристик. На рис.6.5 результат застосування кубічного ермітового базису. Результат близький до попередніх, що зрозуміло з форми АЧХ (рис.5.3). Відмінним від попередніх є результат використання синусоподібного базису, для якого існує суттєва невідповідність між АЧХ сигналу та базису (рис.5.4).

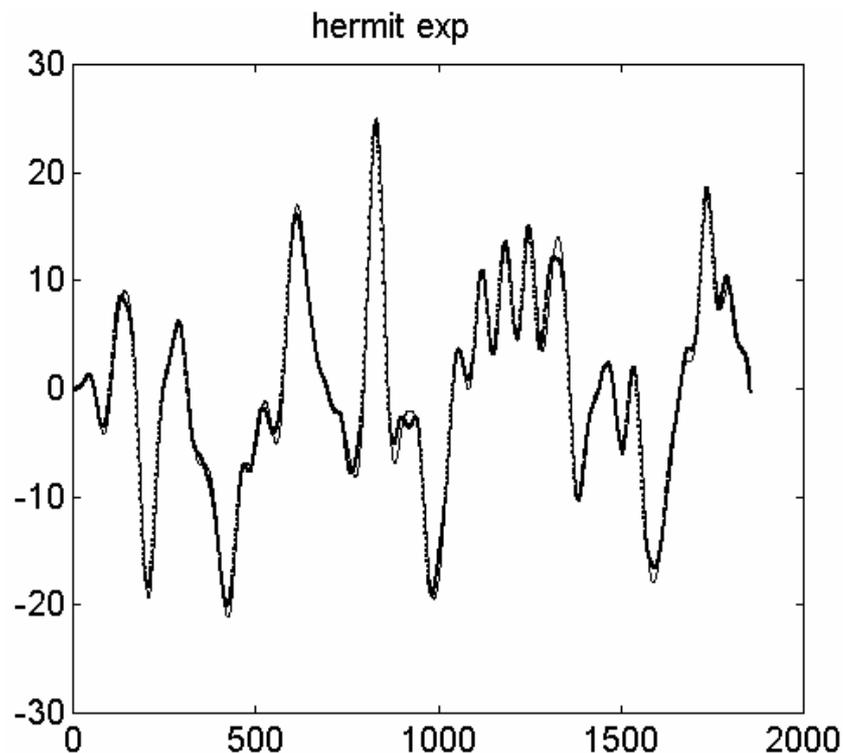


Рисунок 6.3. Ермітів експон. сплайн, експоненційний сигнал

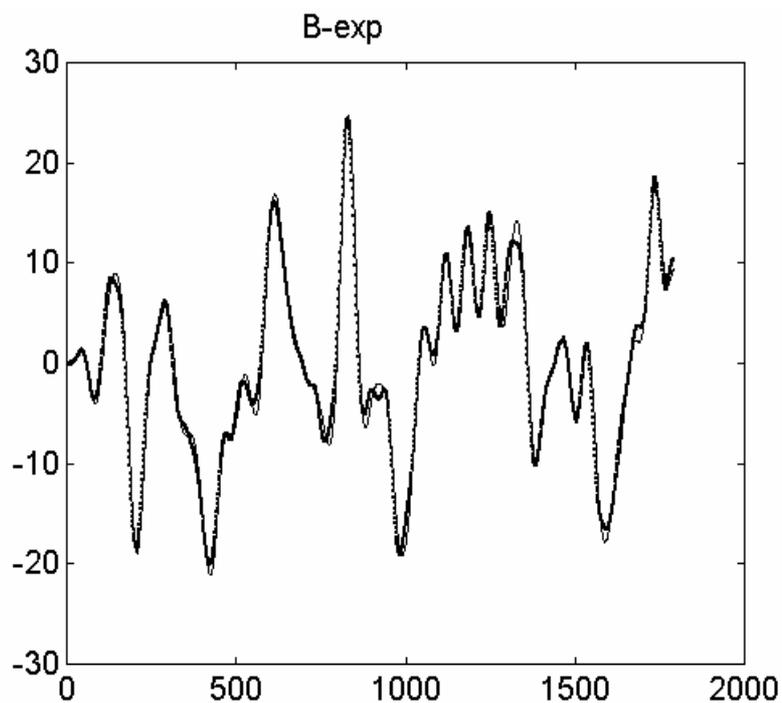


Рисунок 6.4. Експоненційний сплайн, експоненційний сигнал

Результат фільтрації рис.6.7 є явно не задовільним, що є наслідком зазначеної невідповідності характеру даних та моделі - В-форми синусоподібного сплайна.

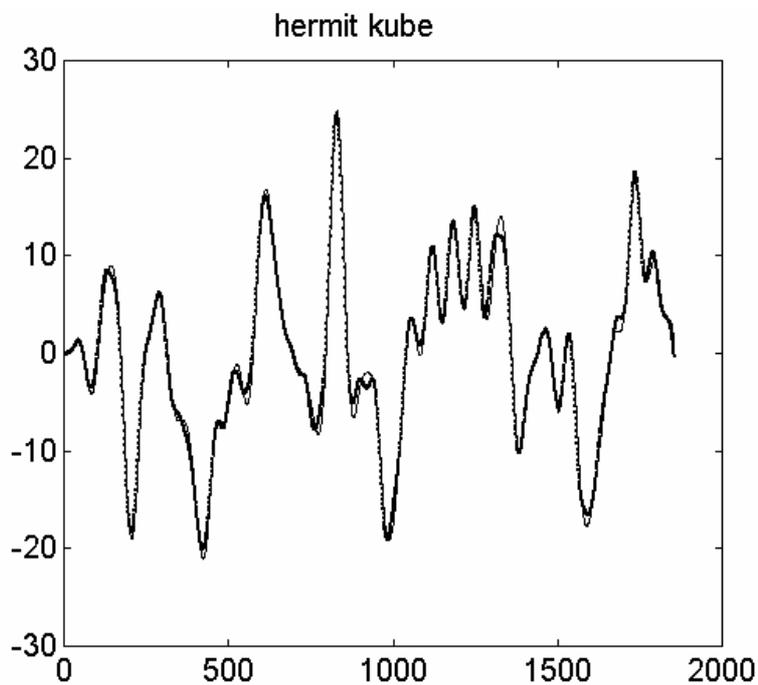


Рисунок 6.5. Ермітів кубічний сплайн, експоненц.сигнал

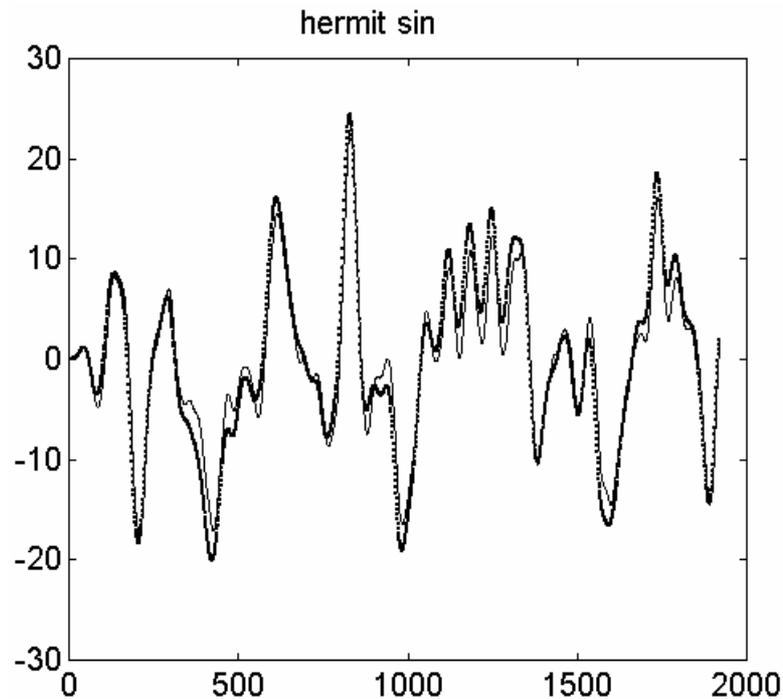


Рисунок 6.6. Ермітів синусоподібний сплайн експон.сигнал

Застосування ермітової форми дає більш прийнятний результат. Це є наслідком розширення спектру в низькочастотну область (рис.4.3). Результати фільтрації показані на рис.6.3-6.7, це МНК оцінки, отримані в припущенні про сплайновий характер даних.

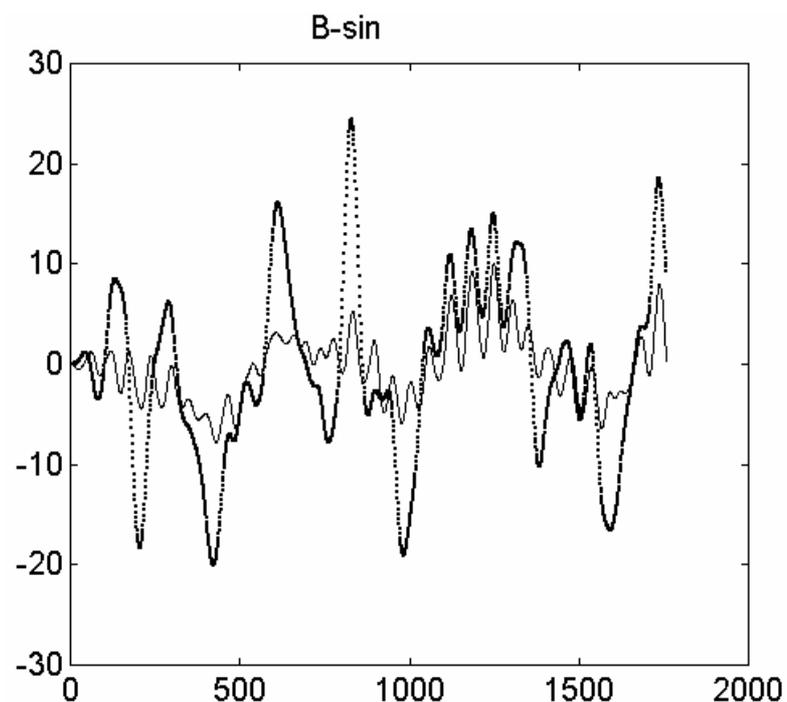


Рисунок 6.7. Синусоподібний сплайн, експоненційний сигнал

На рис.6.8-6.12 показані результати фільтрації іншою групою алгоритмів, що використовують стиснення та наступну інтерполяції 31 відліку. Результатом фільтрації є сплайн-функції, отримані з допомогою МНК оцінок. Тобто результатом фільтрації є оцінки вузлів сплайна в кожному 32-му відліку, а проміжні 31 значення між вузлами отримуємо сплайн-інтерполяцією.

Як бачимо, застосування експоненційного (рис.6.8,6.9) та кубічного (рис.6.10) базисів дають результати близькі між собою та до результатів отриманих з допомогою проекційної матриці (рис.6.3,6.4 та рис.6.5). Зовсім інша ситуація з синусоподібним базисом. Як для ермітової, так і для В-форми результати є неприйнятними (рис 6.11,6.12). Хоча для ермітової форми (рис.6.11) оцінки у вузлах є близькими до отриманих з допомогою проекційної матриці (рис.6.6), але подальша інтерполяція призводить до високочастотного заповнення між вузлами. Отже алгоритм є відносно прийнятним, якщо користуватися лише оцінками у вузлах. Застосування В-форми дає однозначно неприйнятну якість відновлення сигналу.

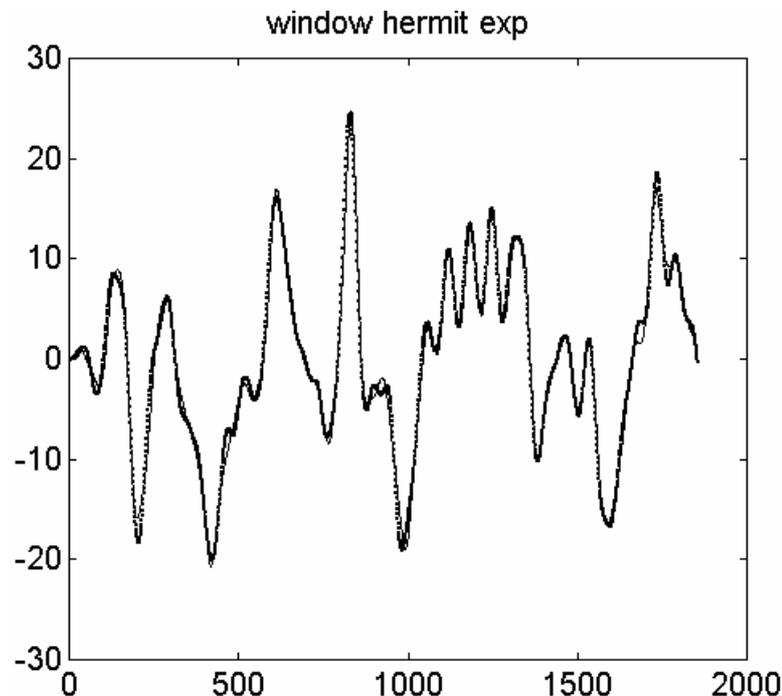


Рисунок 6.8. Ермітів експоненційний сплайн (стиснення), експ.сигнал

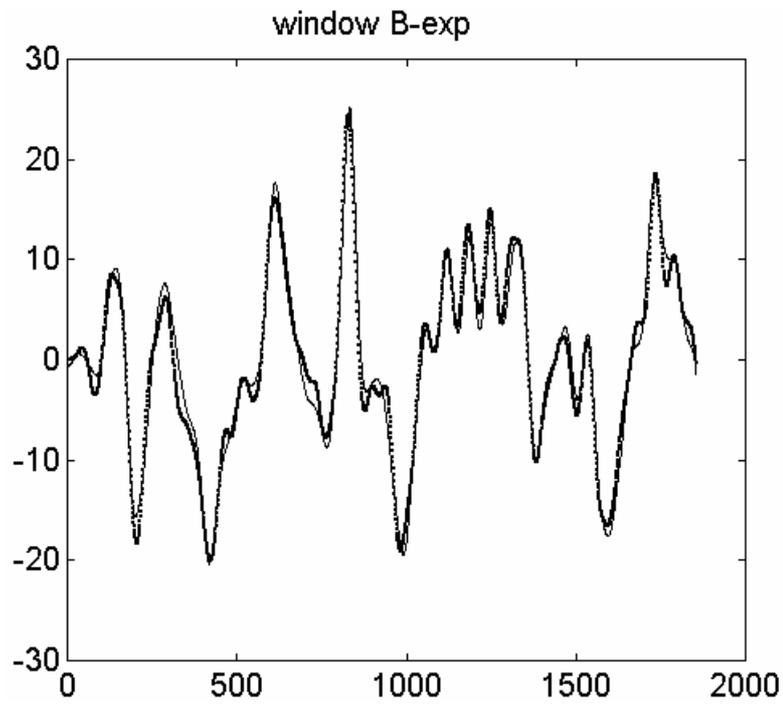


Рисунок 6.9. Експоненційний сплайн (стиснення), експ.сигнал

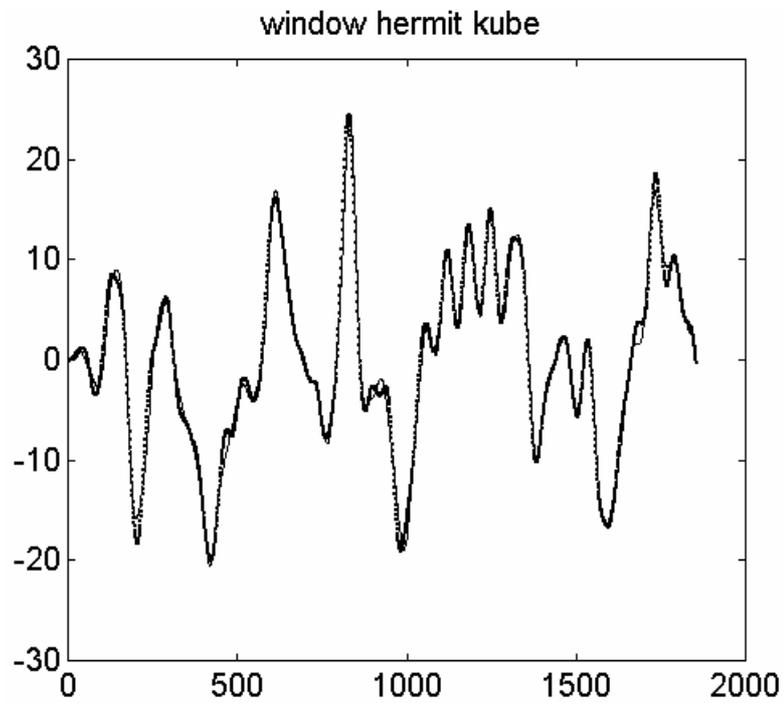


Рисунок 6.10. Ермітів кубічний сплайн (стиснення), експ.сигнал

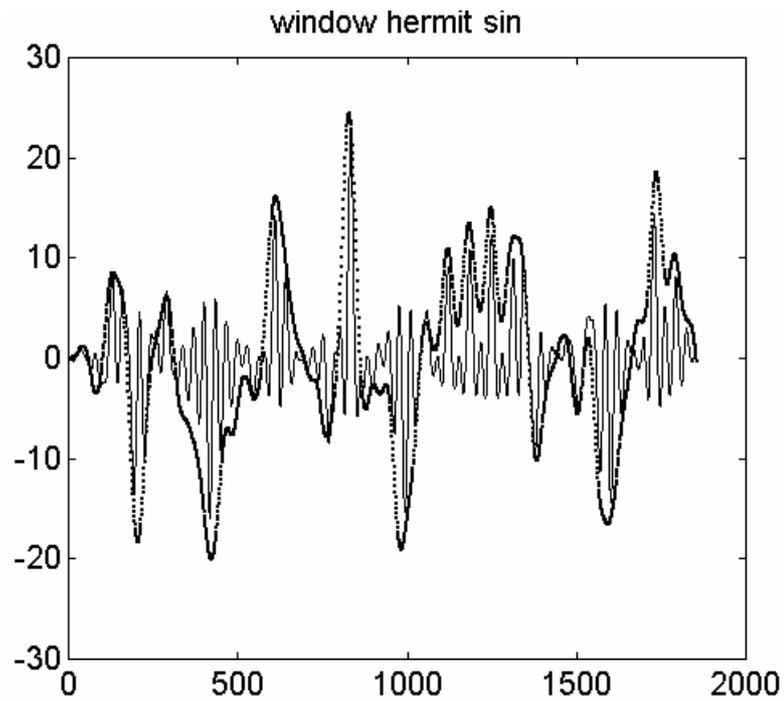


Рисунок 6.11 Ермітів синусоподібний сплайн (стиснення), експ.сигнал

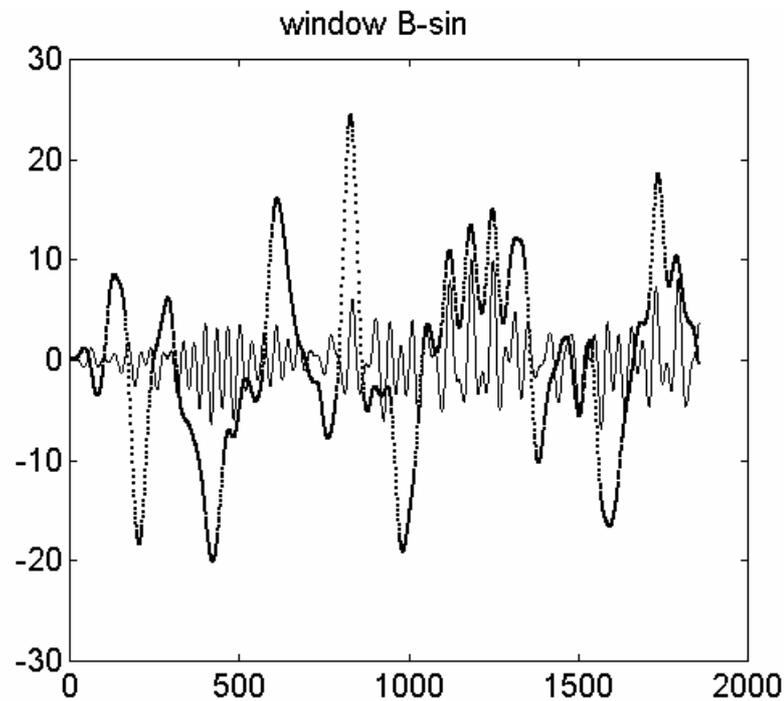


Рисунок 6.12. Синусоподібний сплайн (стиснення), експ.сигнал

Сформуємо іншу корисну складову, з амплітудним спектром, ідентичним спектру синусоподібного В-сплайна. Детермінована основа в цьому випадку є не характерною для класичних сплайнів, сигнал є швидко осцилюючим,

полігармонійним, подібним до звукових сигналів. За таких умов класичні сплайни з низькочастотним спектром неспроможні відновити сигнал. Типовими для кубічних та ермітових сплайнів є результати показані на рис.6.13 та 6.17 (інші є аналогічними, тому демонструвати їх немає змісту).

Зовсім інші результати застосування синусоподібних сплайнів. Алгоритми з застосуванням проекційної матриці дають хороші результати для ермітової (рис.6.15) та В-форми (рис.6.14). Віконний алгоритм зі стисненням і наступною інтерполяцією дає непоганий результат для В-форми (рис.6.18), і дещо гірший для ермітової форми (рис.6.17).

В цілому чітко спостерігається якісна залежність результатів фільтрації від відповідності спектрів детермінованого сигналу та сплайнового базису. Слід особливо відмітити, що в жодному випадку мова не йде про точну відповідність між амплітудно-частотними характеристиками детермінованого сигналу та алгоритму обробки в термінах вхід-вихід, а лише про якісну.

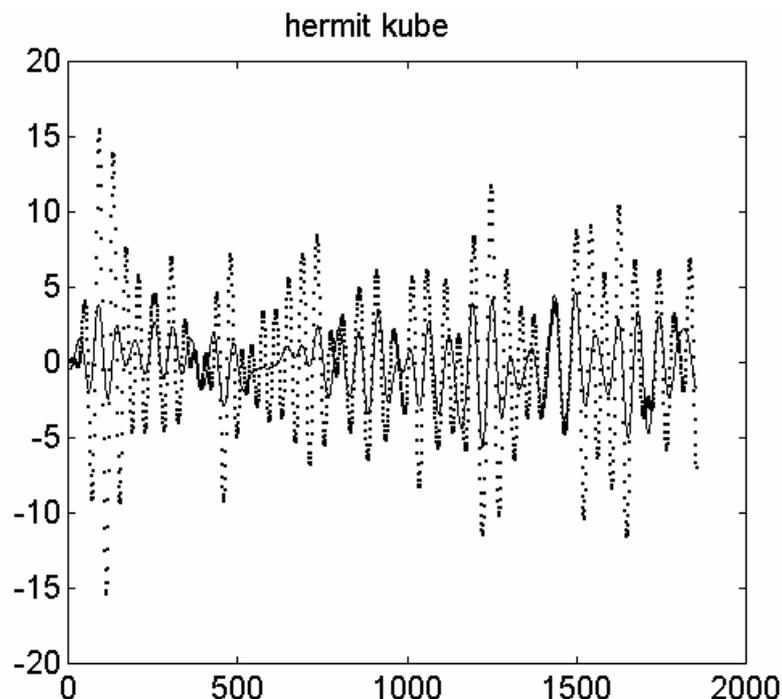


Рисунок 6.13. Ермітів кубічний сплайн, синусоподібний сигнал

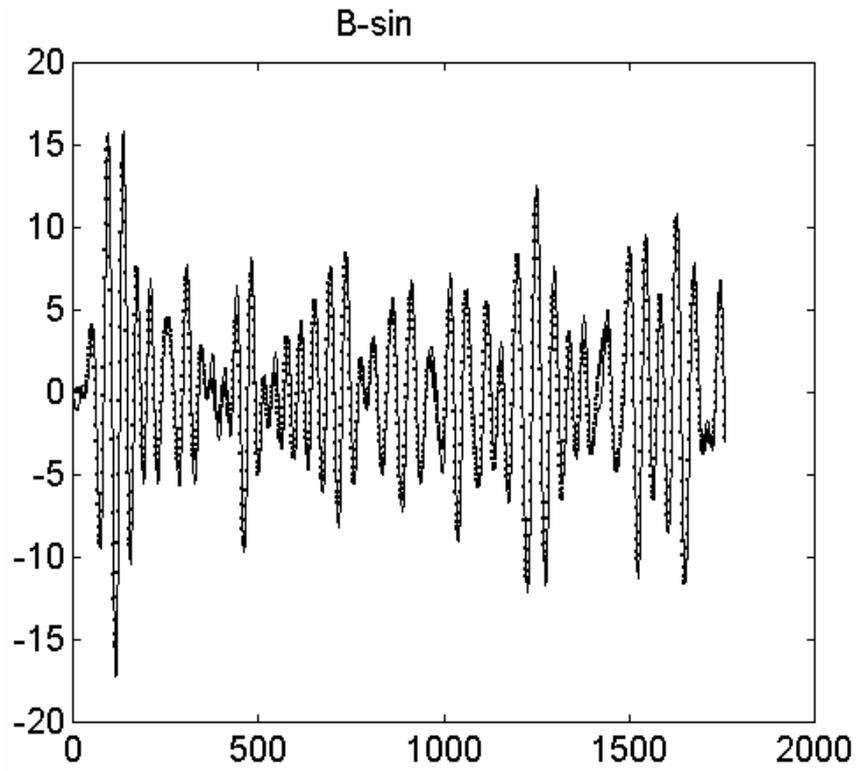


Рисунок 6.14. Синусоподібний сплайн, синусоподібний сигнал

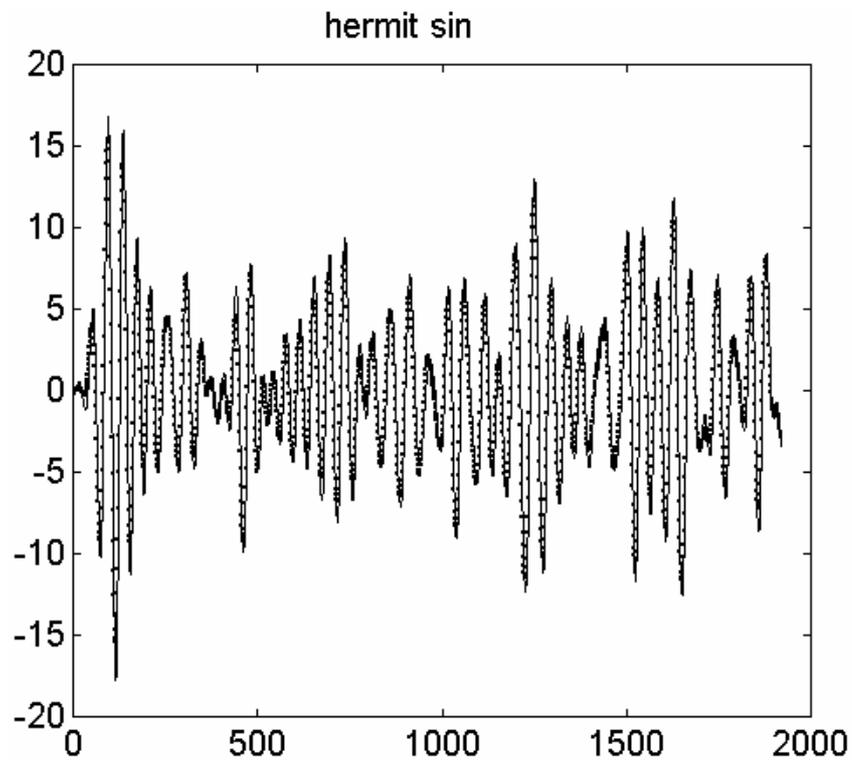


Рисунок 6.15. Ермітів синусоподібний сплайн, синусоподібний сигнал

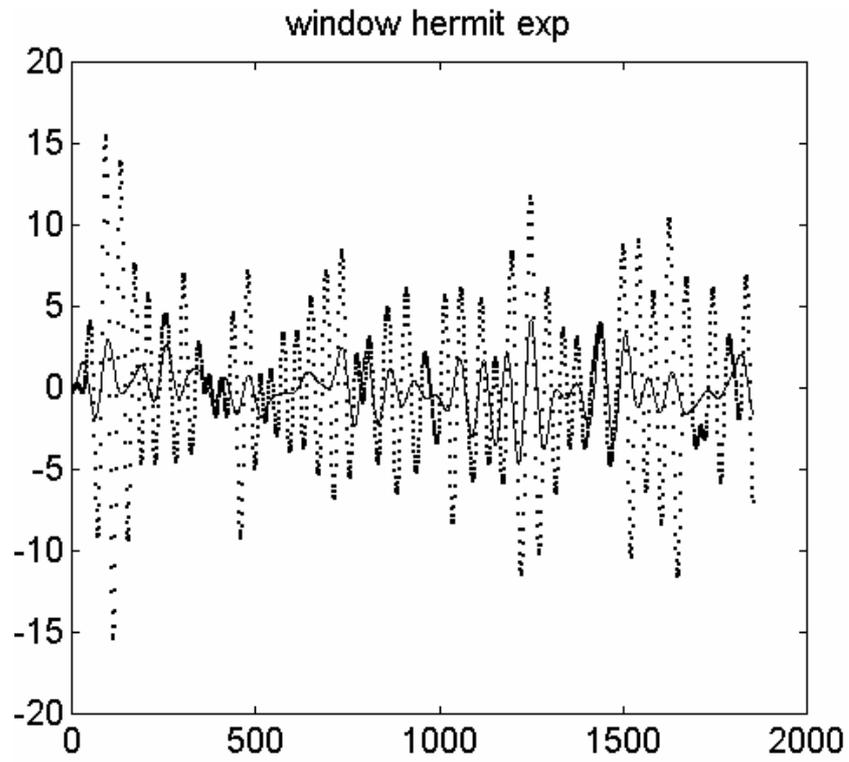


Рисунок 6.16. Ермітів експон.сплайн (стиснення), синусоп. сигнал

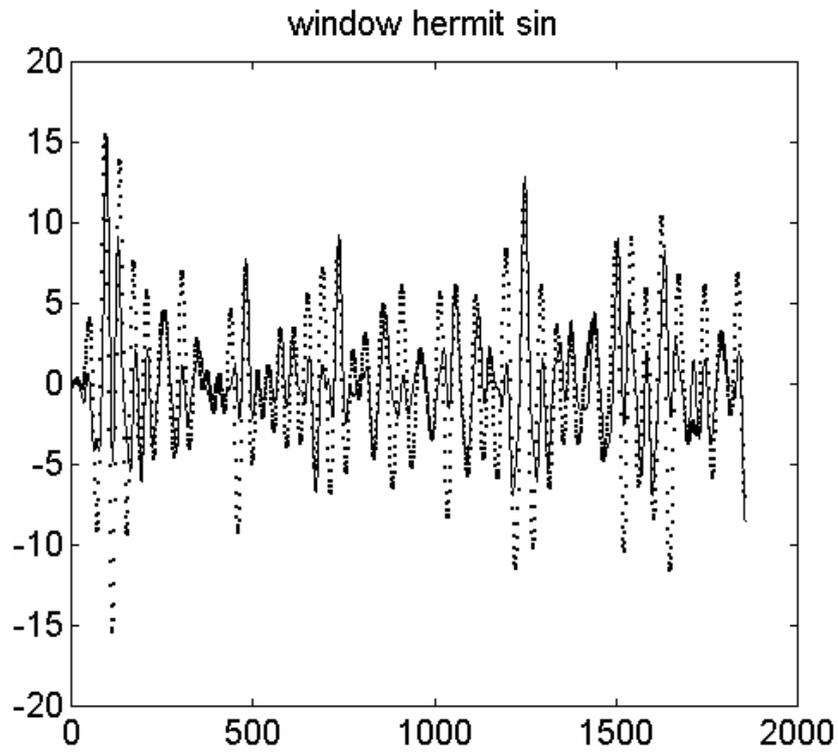


Рисунок 6.17. Ермітів синусоп.сплайн (стиснення), синусоп.сигнал

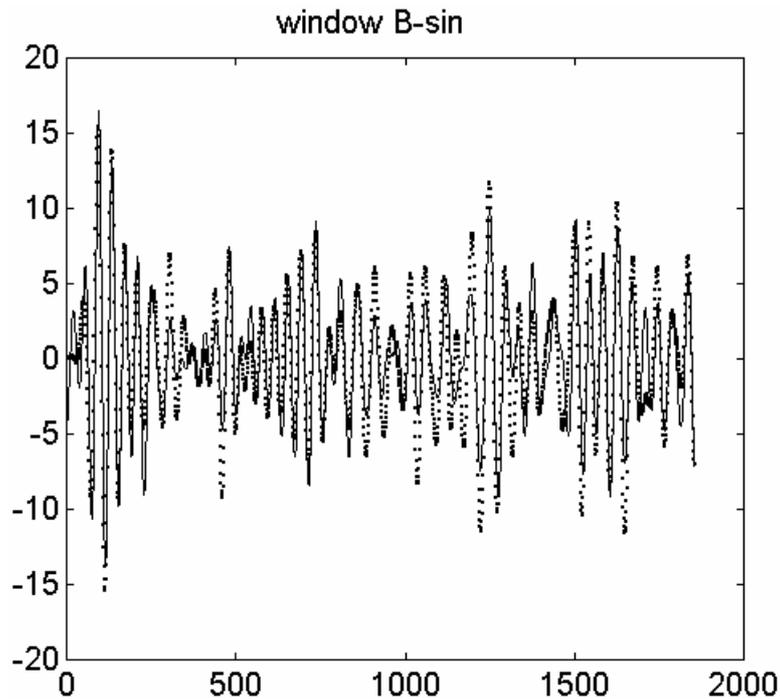


Рисунок 6.18. Синусопод. сплайн, синусоподібний сигнал

В попередніх ілюстраціях показано якісний характер результатів фільтрації на прикладі двох реалізацій. Для більш тонкого, чисельного аналізу виконаємо серії експериментів з різними значеннями СКВ випадкової складової. Кількість експериментів в серії 20 для експоненційної детермінованої складової і 15 для синусоподібної. Випадкова некорельована складова в серіях приймала значення СКВ 1,2,3,4, (число пар рядків таблиць 4) закон розподілу нормальний з нульовим математичним сподіванням. Для чисельної оцінки якості фільтрації розраховувались оцінки значення СКВ в залишках та максимального відхилення від детермінованого сигналу. При розрахунках враховувались зміщення між вхідним та вихідним сигналами. Результати зведені в таблиці 6.3-6.6. В таблицях також показано оцінку СКВ модельної випадкової складової (підкреслено) та СКВ цієї оцінки. Біля номерів стовпців вказано номер ілюстративного рисунка. В таблицях жирним шрифтом виділено випадки незадовільних результатів фільтрації, а курсивом прийнятні. В таблицях зі значеннями СКВ результат вважався якісним, якщо значення оцінки СКВ залишків мало відрізнялось від оцінки СКВ випадкової складової.

Таблиця 6.1. Оцінка СКВ залишків фільтрації (h_f - експон. сплайновий базис)

| Алгор. → | | Проекційна матриця | | | | |
|-----------------|---------------|--------------------|--------|--------|---------------|--------|
| Базис → | | Експонента | | Куб | Синус | |
| Форма → | | В | ерміта | ерміта | В | Ерміта |
| (рис.) → | вип.складова↓ | (6.3) | (6.4) | (6.5) | (6.6) | (6.7) |
| $M[\sigma_e^*]$ | <u>0.9955</u> | 1.4007 | 1.1529 | 1.1289 | 5.9586 | 1.8103 |
| σ_M^* | 0.0128 | 0.0279 | 0.0364 | 0.0345 | 0.5612 | 0.2351 |
| $M[\sigma_e^*]$ | <u>1.9963</u> | 1.9609 | 1.9819 | 1.9689 | 5.8074 | 2.3984 |
| σ_M^* | 0.0328 | 0.0369 | 0.0362 | 0.0358 | 0.6349 | 0.1903 |
| $M[\sigma_e^*]$ | <u>2.9777</u> | 2.8225 | 2.8621 | 2.8529 | 6.5026 | 3.1713 |
| σ_M^* | 0.0438 | 0.0469 | 0.0472 | 0.0466 | 0.5260 | 0.1088 |
| $M[\sigma_e^*]$ | <u>3.9929</u> | 3.7327 | 3.7905 | 3.7829 | 6.9643 | 4.0206 |
| σ_M^* | 0.0629 | 0.0608 | 0.0578 | 0.0574 | 0.5820 | 0.1150 |

Продовження таблиці 6.1.

| алгор. → | Віконний алгоритм зі стисненням-відновл. | | | | |
|-----------------|--|---------|---------|---------------|---------------|
| базис → | експонента | | куб | синус | |
| форма → | В-форма | ермітів | Ермітів | В-форма | ермітів |
| (рис.) → | (6.9) | (6.8) | (6.10) | (6.12) | (6.11) |
| $M[\sigma_e^*]$ | 1.5219 | 1.7048 | 1.5081 | 6.5242 | 7.4890 |
| σ_M^* | 0.1138 | 0.1105 | 0.1126 | 0.7032 | 0.7420 |
| $M[\sigma_e^*]$ | 2.2446 | 2.3574 | 2.2354 | 6.5066 | 7.3947 |
| σ_M^* | 0.0895 | 0.0993 | 0.0886 | 0.7728 | 0.8476 |
| $M[\sigma_e^*]$ | 3.0225 | 3.1238 | 3.0158 | 7.0669 | 8.0061 |
| σ_M^* | 0.0699 | 0.0736 | 0.0688 | 0.5605 | 0.5980 |
| $M[\sigma_e^*]$ | 3.9483 | 4.0215 | 3.9421 | 7.4829 | 8.4016 |
| σ_M^* | 0.0812 | 0.0816 | 0.0806 | 0.7328 | 0.8078 |

Це означає, що алгоритм виконав виділення тренда з випадкової складової близько до заданої моделі В таблицях з оцінками максимального відхилення результат порівнювався з мінімальними значеннями максимального відхилення для всіх алгоритмів представлених в таблиці. Зауважимо, що останній показник не є узгоджений з критерієм оптимальності МНК.

Таблиця 6.2. Оцінка СКВ залишків фільтрації (h_f - синусоподібний базис)

| алгор. → | | Проекційна матриця | | | | |
|-----------------|---------------|--------------------|---------------|---------------|--------|--------|
| базис → | | Експонента | | Куб | синус | |
| форма → | | В | ерміта | Ерміта | В | Ерміта |
| (рис.) → | вип.скл.↓ | - | - | (6.13) | (6.14) | (6.15) |
| $M[\sigma_e^*]$ | <u>0.9979</u> | 3.8062 | 3.6797 | 3.7011 | 1.3628 | 1.3015 |
| σ_M^* | 0.0159 | 0.4140 | 0.3966 | 0.4004 | 0.0572 | 0.0695 |
| $M[\sigma_e^*]$ | <u>1.9963</u> | 4.1295 | 4.0294 | 4.0491 | 2.0658 | 2.0716 |
| σ_M^* | 0.0328 | 0.3880 | 0.3744 | 0.3788 | 0.0500 | 0.0539 |
| $M[\sigma_e^*]$ | <u>2.9777</u> | 4.5080 | 4.4560 | 4.4729 | 2.8769 | 2.9118 |
| σ_M^* | 0.0438 | 0.4450 | 0.4068 | 0.4109 | 0.0492 | 0.0532 |
| $M[\sigma_e^*]$ | <u>3.9929</u> | 5.2519 | 5.2004 | 5.2170 | 3.7553 | 3.8235 |
| σ_M^* | 0.0629 | 0.2232 | 0.2115 | 0.2141 | 0.0624 | 0.0612 |

Таблиця 6.2 продовження

| алгор. → | Віконний алгоритм зі стисненням-відновленням | | | | |
|-----------------|--|---------------|---------------|---------------|---------|
| базис → | експонента | | куб | синус | |
| форма → | В-форма | ермітів | ермітів | В-форма | ермітів |
| (рис.) → | - | (6.16) | - | (6.18) | (6.17) |
| $M[\sigma_e^*]$ | 4.3616 | 4.3994 | 4.3661 | 3.3601 | 2.4386 |
| σ_M^* | 0.4467 | 0.4512 | 0.4474 | 0.3091 | 0.1831 |
| $M[\sigma_e^*]$ | 4.6703 | 4.7055 | 4.6745 | 3.7413 | 2.8949 |
| σ_M^* | 0.3891 | 0.3878 | 0.3892 | 0.2716 | 0.1640 |
| $M[\sigma_e^*]$ | 4.9826 | 5.0135 | 4.9862 | 4.1832 | 3.5328 |
| σ_M^* | 0.4694 | 0.4732 | 0.4699 | 0.3029 | 0.1471 |
| $M[\sigma_e^*]$ | 5.7169 | 5.7442 | 5.7202 | 4.9773 | 4.4018 |
| σ_M^* | 0.2518 | 0.2579 | 0.2527 | 0.1508 | 0.1054 |

Таблиця 6.3. Оцінка максимуму нев'язки (h_f - експоненційний базис)

| алгор. → | Проекційна матриця | | | | |
|--------------|--------------------|--------|--------|----------------|--------|
| базис → | експонента | | куб | Синус | |
| форма → | В | ерміта | ерміта | В | Ерміта |
| (рис.) → | (6.3) | (6.4) | (6.5) | (6.6) | (6.7) |
| d^* | - | 2.3053 | 2.2069 | 16.5576 | 4.4978 |
| σ_d^* | - | 0.3216 | 0.3038 | 2.6165 | 0.8580 |
| d^* | 2.5412 | 2.5600 | 2.5011 | 15.9445 | 4.7247 |
| σ_d^* | 0.3868 | 0.3897 | 0.4019 | 2.5458 | 0.9654 |
| d^* | 2.8037 | 2.7238 | 2.6677 | 17.0270 | 5.5113 |
| σ_d^* | 0.3763 | 0.3385 | 0.2864 | 2.2326 | 0.6875 |
| d^* | 3.1769 | 3.2345 | 3.1195 | 18.2075 | 6.0245 |
| σ_d^* | 0.4122 | 0.5132 | 0.5445 | 2.4034 | 0.9164 |

Продовження таблиці 6.3.

| алгор. → | Віконний алгоритм зі стисненням-відновленням | | | | |
|--------------|--|---------|---------|----------------|----------------|
| базис → | експонента | | куб | Синус | |
| форма → | В-форма | ермітів | ермітів | В-форма | Ермітів |
| (рис.) → | (6.9) | (6.8) | (6.10) | (6.12) | (6.11) |
| d^* | 4.0307 | 4.5349 | 3.9201 | 25.7583 | 23.0963 |
| σ_d^* | 0.5832 | 0.5617 | 0.5581 | 4.3247 | 3.8252 |
| d^* | 4.2734 | 4.7042 | 4.1597 | 24.1233 | 21.7303 |
| σ_d^* | 0.5611 | 0.6297 | 0.5461 | 4.9724 | 4.4812 |
| d^* | 4.0210 | 4.7373 | 3.9638 | 26.7219 | 23.9926 |
| σ_d^* | 0.5818 | 0.5663 | 0.5885 | 2.7630 | 2.4420 |
| d^* | 4.7501 | 5.1135 | 4.6891 | 28.1210 | 25.0467 |
| σ_d^* | 0.5969 | 0.5116 | 0.5937 | 3.9045 | 3.4041 |

Таблиця 6.4. Оцінка максимуму нев'язки (h_f - синусоподібний базис)

| алгор. → | Проекційна матриця | | | | |
|--------------|--------------------|----------------|----------------|--------|--------|
| базис → | експонента | | куб | Синус | |
| форма → | В | ерміта | ерміта | В | Ерміта |
| (рис.) → | - | - | (6.13) | (6.14) | (6.15) |
| d^* | 11.7111 | 11.0755 | 11.1418 | 3.3971 | 2.9361 |
| σ_d^* | 1.6793 | 1.5761 | 1.5235 | 0.3850 | 0.3575 |
| d^* | 11.8755 | 11.2540 | 11.2116 | 3.7150 | 3.5273 |
| σ_d^* | 1.7043 | 1.7119 | 1.7437 | 0.4904 | 0.5038 |
| d^* | 11.3576 | 10.9994 | 11.0421 | 3.9589 | 3.8784 |
| σ_d^* | 1.6211 | 1.6545 | 1.6389 | 0.4481 | 0.5451 |
| d^* | 12.1315 | 11.5615 | 11.6535 | 4.2232 | 4.5938 |
| σ_d^* | 1.7533 | 1.6500 | 1.6174 | 0.4092 | 0.5350 |

Продовження таблиці 6.4.

| алгор.→ | Віконний алгоритм зі стисненням-відновленням | | | | |
|--------------|--|----------------|----------------|----------------|---------|
| базис → | експонента | | куб | Синус | |
| форма → | В-форма | ермітів | ермітів | В-форма | Ермітів |
| (рис.) → | - | (6.16) | - | (6.18) | (6.7) |
| d^* | 14.0083 | 13.8603 | 13.9779 | 10.9820 | 7.1017 |
| σ_d^* | 2.0115 | 1.9910 | 2.0084 | 1.6959 | 0.9406 |
| d^* | 13.6101 | 13.5731 | 13.5777 | 11.1605 | 7.2258 |
| σ_d^* | 1.5531 | 1.5540 | 1.5513 | 1.2778 | 1.0401 |
| d^* | 13.7201 | 13.6328 | 13.7048 | 10.7937 | 7.2517 |
| σ_d^* | 1.7271 | 1.6658 | 1.7168 | 1.2470 | 0.9586 |
| d^* | 14.0230 | 13.8922 | 13.9963 | 11.1644 | 7.4625 |
| σ_d^* | 1.9859 | 1.9787 | 1.9846 | 1.6329 | 0.8403 |

Отримані результати показують, що при фільтрації даних з метою відновлення детермінованої складової важливе значення має відповідність АЧХ детермінованої складової та сплайнового базису навіть на якісному рівні.

Як і очікувалось, результати фільтрації у вікні зі стисненням-відновленням вхідної частоти дещо гірші ніж у фільтрів реалізованих з допомогою проекційної матриці. Це пояснюється зростанням дисперсії при інтерполяції з використанням оцінених за МНК значень.

Сплайни можна успішно застосовувати для фільтрації та стиснення не лише низькочастотних (з малим числом осциляцій) функцій, але й для полігармонійних сигналів.

6.4. Система фільтрації та стиснення реографічних сигналів

Одним з методів функціональної діагностики в медицині є реографічні дослідження кровоносної системи [176]. Суть методу в тому, що вимірюється імпеданс певних фрагментів тіла, що змінюється в залежності від кровонаповнення. Імпеданс вимірюється тетраполярним методом двома каналами з частотами 40 та 70 кілогерц. У вимірюваннях застосовувались реограф та поліграфи П4Ч-02 та П6Ч-02. Реосигнал має складну форму, тонкі деталі якої є інформативними. Умови вимірювання характеризуються наявністю значної кількості перешкод (наведення від електричних приладів, фізіологічні особливості тіла і т.п.) [280]. Для аналізу необхідно отримати похідну від реосигналу, та виявити характерні точки екстремумів та перегину. Паралельно з реосигналом вимірюється електрокардіографічна крива. Завдання полягало в перетворенні даних електронних приладів в цифрову форму та подальшу автоматизацію вимірювання та аналізу з допомогою комп'ютера.

Для занесення даних в комп'ютер використано 10 розрядний 12 каналний АЦП (з аналоговим мультиплексором на вході) з часом перетворення до 40 мікросекунд. Вхідний діапазон перетворення $-1.25 - +1.25$ вольт. Враховуючи особливості відображення та друку, а також частотний діапазон сигналів частота дискретизації встановлена рівною 1088 Гц. Частотний діапазон корисного сигналу не перевищує 60Гц.

Для зберігання та оперативного відображення даних виділено буфер з 32000 відліків на канал (2 байти на відлік). Таким чином загальний обсяг даних з 4-х каналів становить 256К.

В процесі розробки виявилось три основні проблеми.

1. Необхідність високоякісного згладжування даних з незначними спотвореннями корисного сигналу;
2. Потреба у достатньо зручній та адекватній моделі корисного сигналу для подальшої обробки (диференціювання та аналізу);

3. Необхідність стиснення даних для подальшого зберігання.

Спроби вирішити ці проблеми в рамках класичних підходів виявились безуспішними.

Використання рекурсивних цифрових фільтрів виключалось через спотворення форми корисного сигналу. Нерекурсивні фільтри для задовільного згладжування потребували високих порядків і відповідно значних обчислень.

Вибір прийнятної моделі для апроксимації реограми окрім складної форми ускладнювався значними обсягами даних та мінливістю форми. Безпосереднє диференціювання даних не вдавалося через наявність шумів. Використання аналогового диференціатора з комплекту поліграфа значно знижувало потенційну точність вимірювань.

Застосування для стиснення стандартних архіваторів не дало значимих результатів.

Перерахований комплекс проблем було вирішено із застосування сплайн-функцій. Для фільтрації, апроксимації та стиснення даних був використаний віконний алгоритм описаний в розділі 5.3.

Проведені експерименти із фільтрації та стиснення даних виявили прийнятний коефіцієнт стиснення. Критерій якості в даному випадку був суб'єктивним - враховувалась думка фахівців з аналізу реограм. Стиснення (із відповідною фільтрацією) в 8 разів є недостатнім (рис.6.19), стиснення в 64 рази згладжує важливі для аналізу деталі (рис.6.19). Прийнятними є значення 16-32 раз (рис.6.20). В представленій системі використане стиснення в 16 разів. При цьому враховувалось згладжування також кардіосигналу.

При програмній реалізації алгоритму стиснення довелося враховувати певні технічні особливості розрахунків. Зокрема обмежену розрядність цілих типів даних та виконання алгоритму в цілочисельній арифметиці.

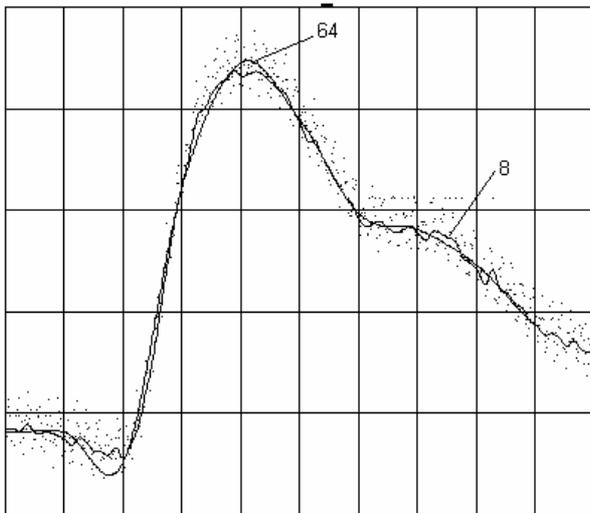


Рисунок 6.19. Реосигнал

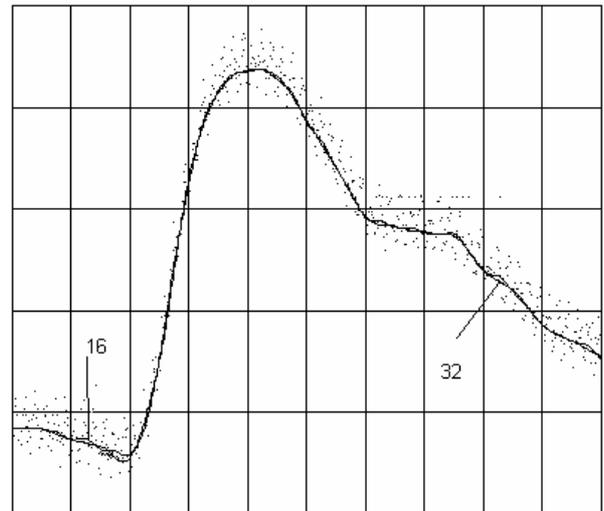


Рисунок 6.20. Реосигнал

В процесі розробки програмного забезпечення вказаної задачі розроблена програма, що генерує текст програми на “С” для фільтрації та стиснення даних в задане число раз з допомогою ермітових кубічних сплайнів. Програма легко модифікується до довільних сплайнових базисів, що складаються з чотирьох фрагментів. Вибір базису відповідно до спектру даних не застосовувався, оскільки сигнал є низькочастотним і застосування ермітового кубічного базису дає хороші результати, прийнятні для практичних цілей.

Особливістю системи є наявність високого рівня імпульсних перешкод (рис.6.21). Тому перед сплайн-фільтрацією застосовувалась медіанна фільтрація по трьох точках. Результати обробки типової вхідної послідовності (рис.6.21) показано на рис.6.22.

На рис.6.22 показано дані з відновленою частотою дискретизації. Відновлення здійснювалося одночасно з фільтрацією. Для зберігання даних з повної послідовності вибирається кожен 16-й відлік, що є вузлом сплайна. Тоді обсяг файла скорочується в 16 разів і становить 64К (повний 256К).

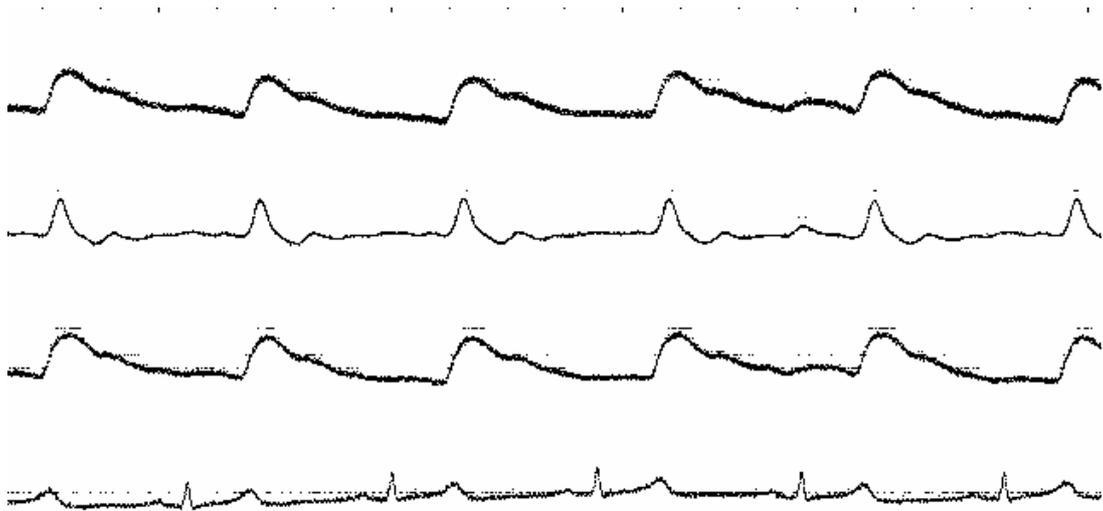


Рисунок 6.21. Вхідні, зашумлені рео та кардіо сигнали

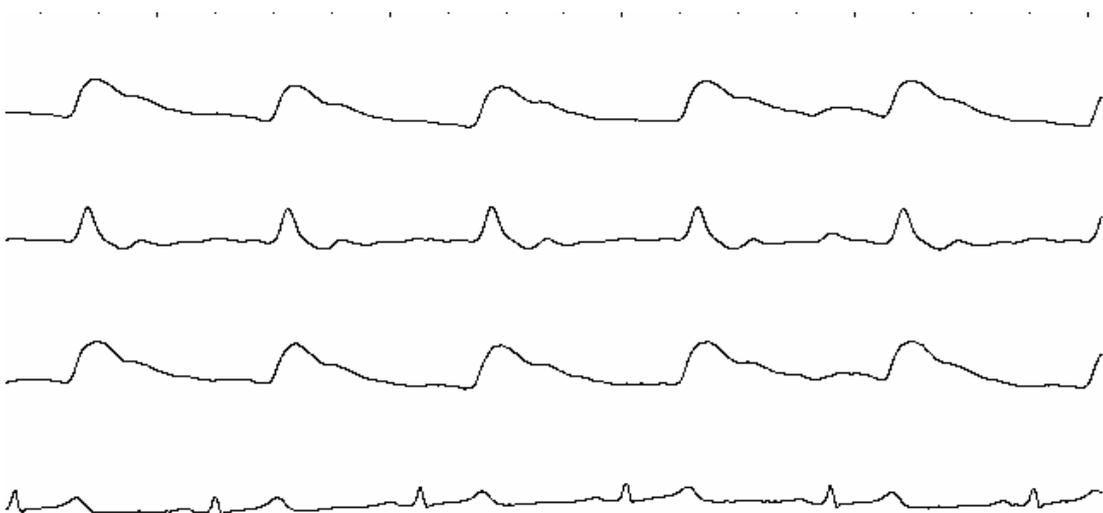


Рисунок 6.22. Відфільтровані сигнали з рис.6.21

При зчитуванні стиснутих даних відбувається відновлення повного обсягу шляхом сплайн-інтерполяції. Операції фільтрації, інтерполяції займають декілька секунд на PC286 з тактовою частотою 16МГц. Текст програми стиснення наведено в додатку. Для порівняння ефективності сплайнових МНК фільтрів виконаємо стиснення і фільтрацію з допомогою wavelet пірамідальної технології

(багатомасштабний аналіз). Для обробки сигналів використано пакет програм в середовищі MatLab з info.msc.anl.gov (pub/W-transform: wtransf1.ps, wtransf2.ps, wtransf.tar.z).

Вхідний реосигнал показано на рис.6.23. Очевидна наявність значної шумової складової. Для вейвлет перетворення застосовано базис з квадратних В-сплайнів (QS-wavelet). Суть обробки полягає у поділі вхідної послідовності на парні і непарні відліки. Непарні відліки складають низькочастотну складову вхідного сигналу H_1 .

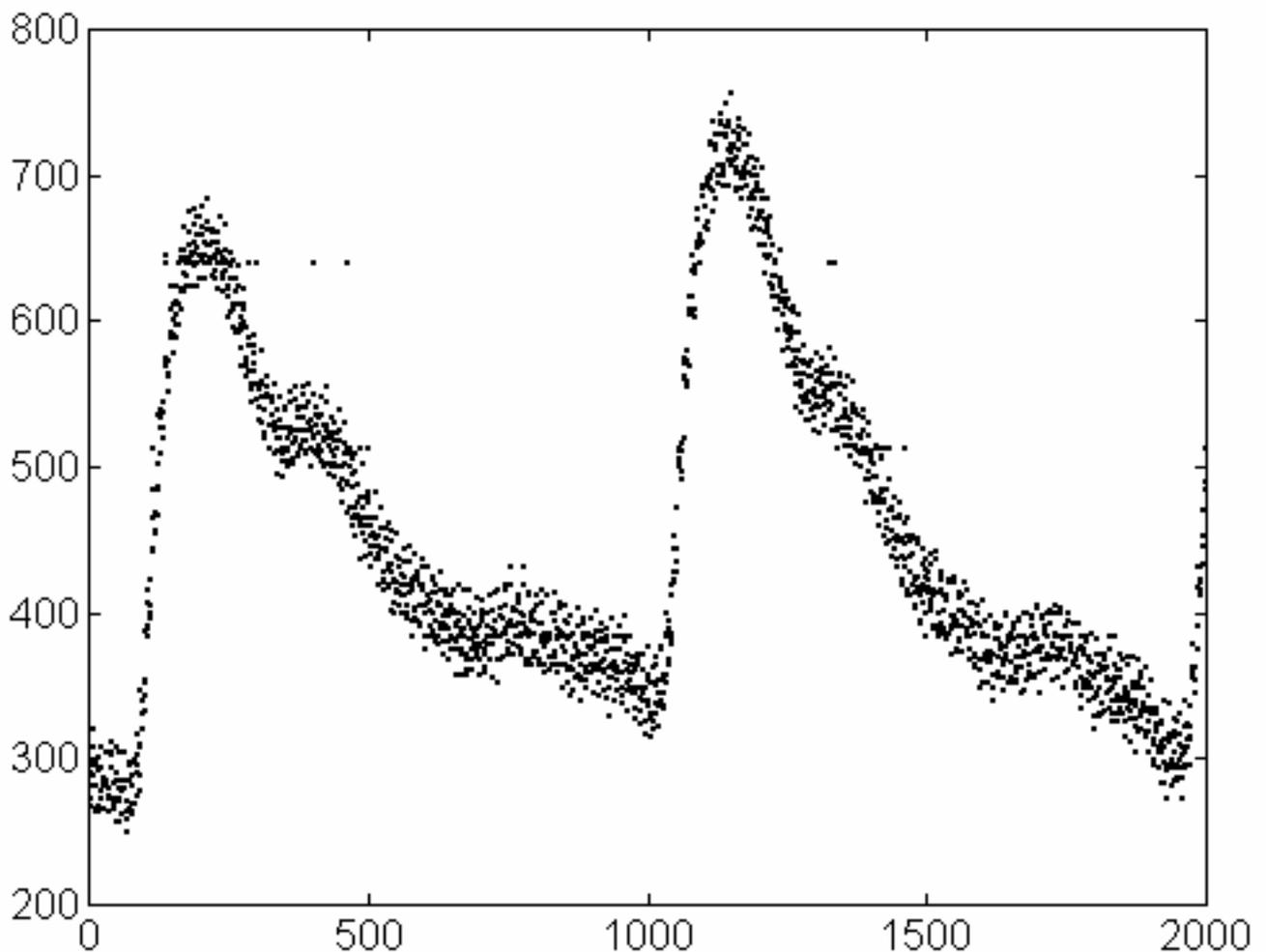


Рисунок 6.23. Вхідний реографічний сигнал

Парні замінюються різницею між оригінальним значенням і інтерпольованим. Таким чином отримуємо вектор G_1 з високочастотною складовою сигналу, що фактично є нев'язкою інтерполяції. Процедуру повторюємо відносно H_1 і отримуємо вектори H_2 і G_2 . Аналогічно H_3 і G_3 та H_4 і G_4 . Вектори H_4, G_4, G_3, G_2, G_1 є

результатом декомпозиції рис.6.25 .

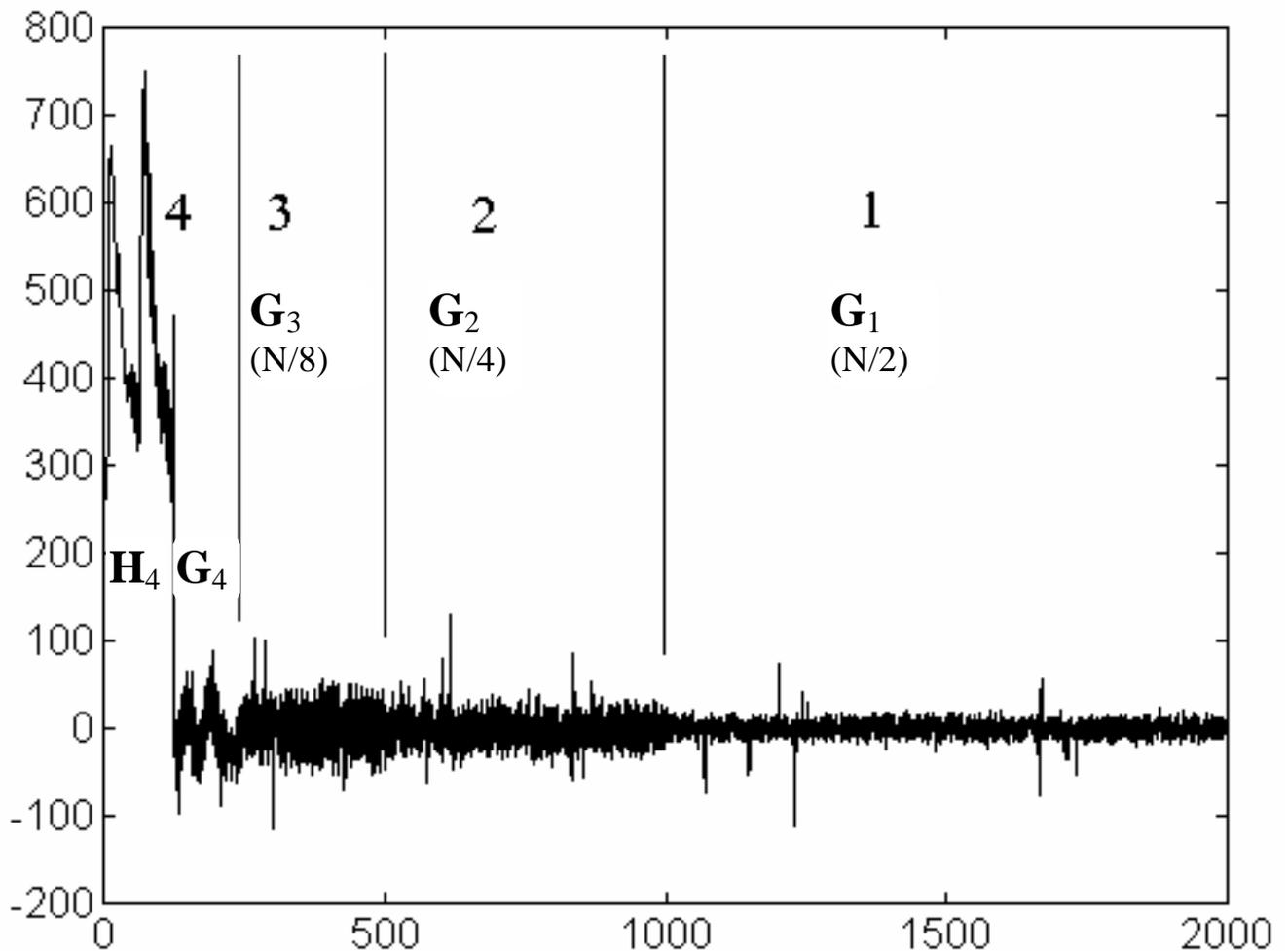


Рисунок 6.24. Wavelet декомпозиція реосигналу

На рис.6.24 показано розмірність векторів декомпозиції. Загальний розмір відповідає вхідному. Ефект стиснення досягається, якщо високочастотні складові містять багато близьких до нуля значень, а отже їх можна стиснути методами кодування. Наявність значного високочастотного шуму сильно знижує ефективність стиснення. В даній задачі високочастотний шум не є інформативною складовою реосигналу. Тому значення у векторах G_4, G_3, G_2, G_1 замінюємо нулями. Таким чином отримуємо стиснутий у 16 разів реосигнал з відфільтрованою високочастотною складовою. В принципі результат тривіальний - результуючий вектор H_4 містить кожен 16-й відлік вхідних даних. Реконструкція отримується послідовною

двократною інтерполяцією даних вектора H_4 . Результат реконструкції показано на рис.6.25.

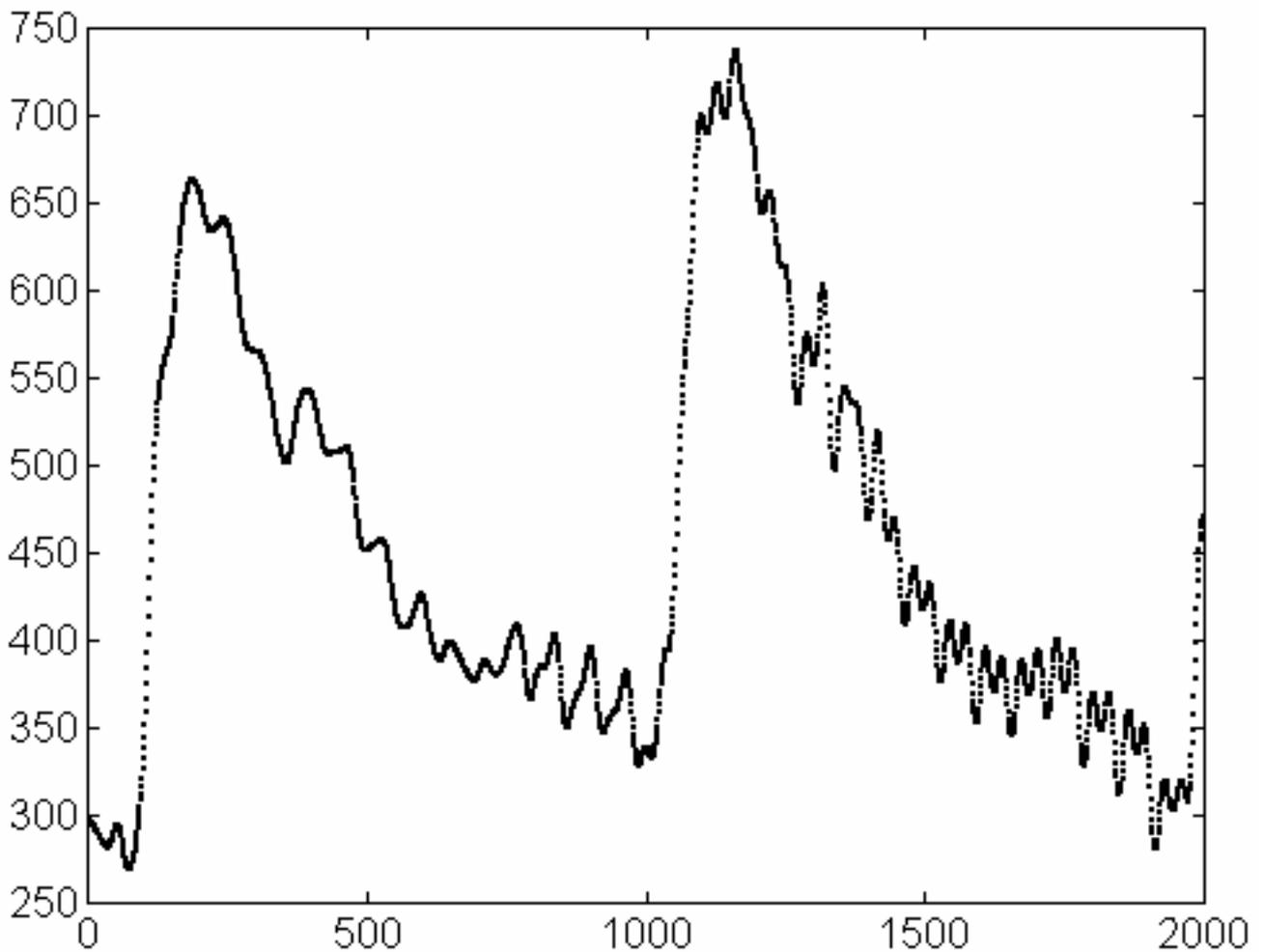


Рисунок 6.25. Реконструкція реограми (QS Wavelet)

Як бачимо, результат є незадовільний. Шуми залишаються надто значними. Диференціювання такого сигналу дасть абсолютно неприйнятний результат. Врахування високочастотних складових при реконструкції збільшує рівень шумів. Стиснутий і реконструйований сигнали не мають аналітичного представлення, що ускладнює подальший аналіз.

Таким чином алгоритми фільтрації та стиснення сплайнами за МНК мають значну перевагу перед вейвлет алгоритмами, що ґрунтуються на інтерполяційних схемах. Ця перевага особливо вагома при наявності значної шумової складової. Результуюча дисперсія оцінок сплайна (дисперсія у стиснутому сигналі) становить 0.082 вхідної дисперсії (рис.5.22). Алгоритмічна реалізація запропонованого

алгоритму значно простіша за реалізацію вейвлет методу, що використовувалась. Якщо навіть врахувати ліфтову реалізацію вейвлет перетворень, реалізація МНК фільтрів не є складнішою.

6.5. LSS аналіз легеневих сигналів в медичній діагностиці

Вислуховування легень за допомогою стетоскопа (аускультация) - важливий і простий діагностичний метод. Він несе безпосередню інформацію про структуру і функції легеневих тканин і є простим, дешевим та атравматичним методом. Зміни у легеневих звуках часто є наслідком патологічних змін. Вислуховування усе ще розглядається як золотий стандарт (серед бронхоскопії і рентгену) у практичній медицині. Акустичний метод дозволяє досвідченим лікарям виявити патологію перш ніж ознаки патології покажуть інші методи. Тому дуже важливо знати і розуміти мову легеневих звуків. Але оцінка звуку лікарем на власний слух є дуже суб'єктивним. Сучасний технічний рівень дозволяє досить просто записувати легеневі звуки. Роботи в цьому напрямку ведуться в багатьох країнах (International Lung Sound Association (ILSA), European Respiratory Society (ERS), American Thoracic Society (ATS), Signal Processing and Biomedical Technology Unit of Aristotle University of Thessaloniki (Greece), R.A.L.E. Repository (Educational Programs on Lung- and Heart-Sounds)), включаючи і Україну (академік В.Т.Грінченко, Інститут гідромеханіки НАНУ). Міжнародна асоціація легеневих звуків (ILSA) склала класифікацію міжнародного еталона легеневих звуків (<http://www.ilsa.cc>). Сучасна концепція формування легеневих звуків розглядає легені як фільтр нижніх частот, що формує сигнал із шуму [154, 162]. Для аналізу звуків застосовують два основні методи. Фур'є аналіз у часових вікнах з перекриттям (виявляє неперервні хрипи) та вейвлет перетворення (виявляє перервний тріск). Необхідно зазначити, що прогрес в питанні автоматичної діагностики та класифікації легеневих звуків дуже незначний. Навіть Фур'є та вейвлет аналіз не реалізовано у вигляді компактних і доступних лікарям приладах. Фірма Medi-Wave Inc. (Канада) розробила програмне

забезпечення R.A.L.E.® View software, що дозволяє прослуховувати та аналізувати легеневі звуки із навчальної бази. Програма доступна в демонстраційній версії. В цьому підрозділі на прикладі типових легневих звуків з демонстраційної бази буде продемонстровано, що LSS розклад дає стійкі і виразні картини, доступні для візуальної інтерпретації та документальної реєстрації.

Для LSS розкладу використано кубічний ермітів сплайн, масштаби від 64 до 2. В рядках виконано нормування амплітуди прийняте відображенні вейвлет розкладу. На рис.6.26 показано результат LSS розкладу нормального дихання (файл normal). По вертикальній осі масштаби (частота). Масштаб 64 зверху.

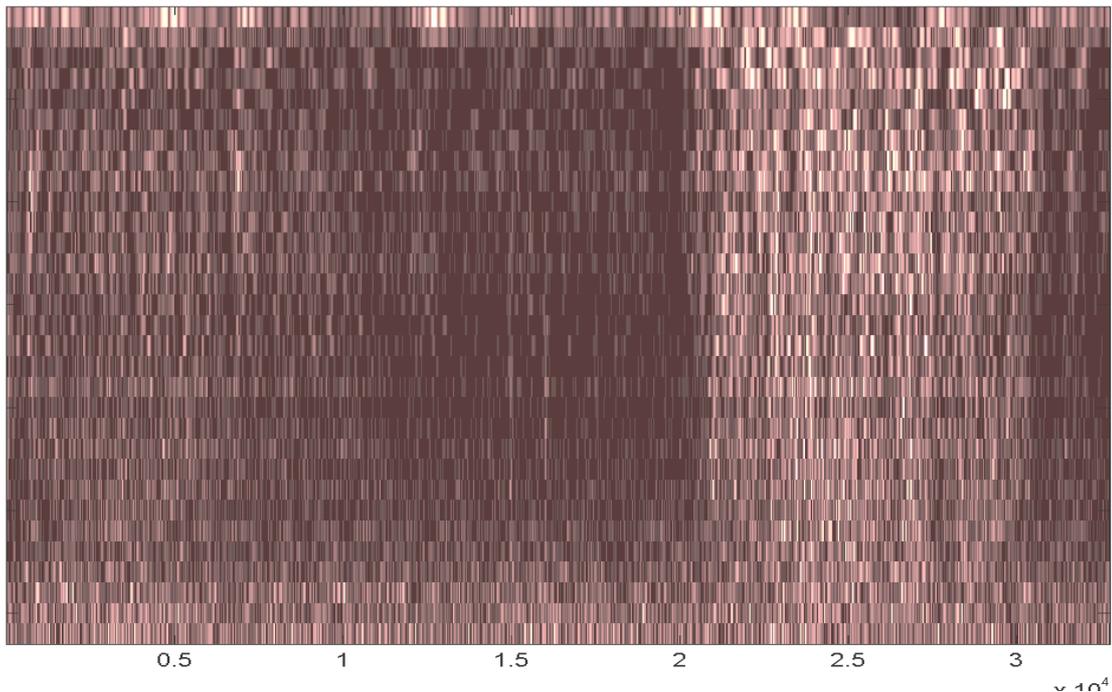


Рис.6.26. LSS розклад звуку нормального дихання.

На рис. 6.27 показано результат розкладу дихання із вологими хрипами, а на рис.6.28 дихання із сухими свистячими хрипами. Представлені звуки є найбільш

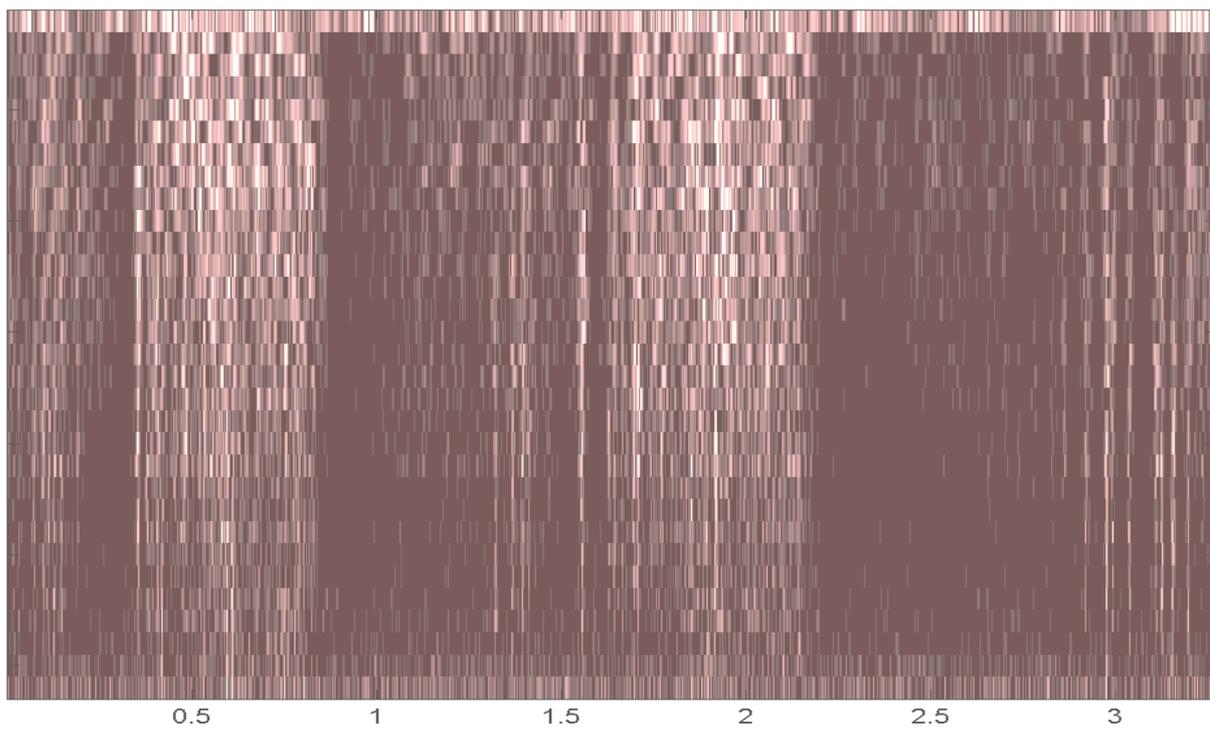


Рис.6.28. LSS розклад звуків дихання із вологими хрипами (crackle1)

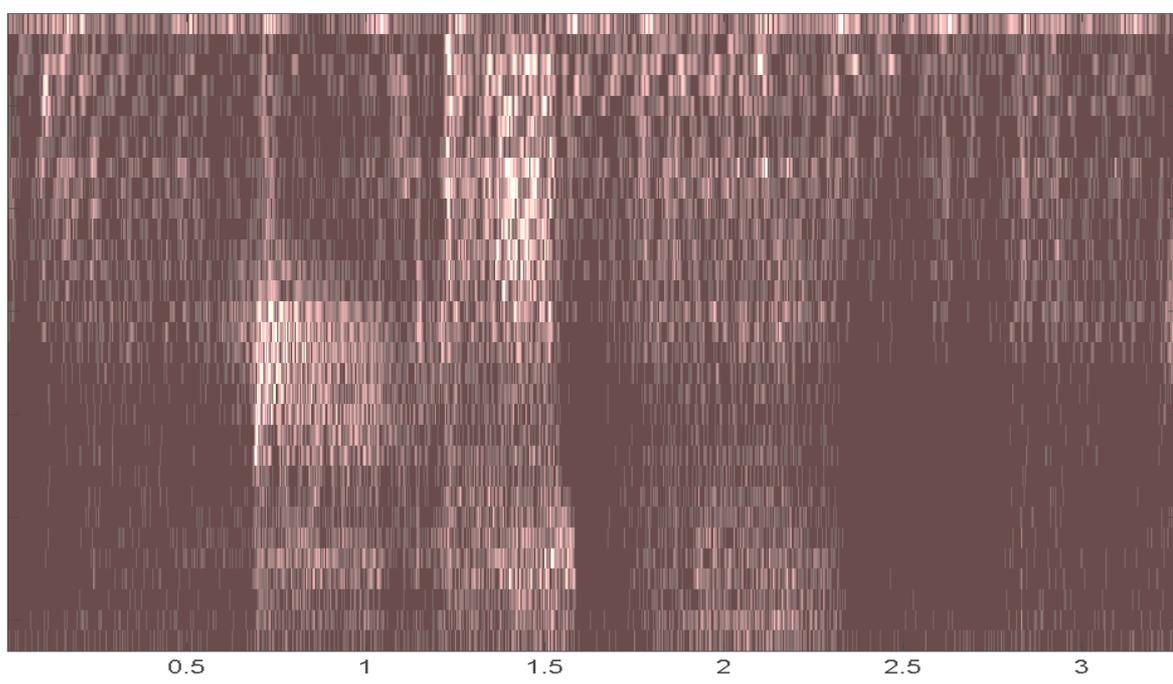


Рис.6.29. LSS розклад звуків дихання із сухими свистячими хрипами (wheeze1).

типовими випадками. Рисунки розкладу дають характерні обриси. Нормальне дихання дає рівномірно заповнені вертикальні смуги на вдихові та видихові. Смуга,

що відповідає видихові має більшу інтенсивність. Вологі хрипи дають смуги близької інтенсивності на вдихові та видихові і помітні вертикальні області в переходах. Смуги затухають в нижній частині рисунка. Сухі свистячі хрипи дають на зображеннях характерні горизонтальні смуги.

Звичайно, представлені матеріали носять лише ілюстративний характер. Детальна розробка цих питань виходить за рамки даної дисертаційної роботи. Необхідно зібрати навчальну базу звуків, що відповідають клінічно та лабораторно підтвердженим діагнозам за якими можна як мінімум створити атлас відповідних зображень розкладу і дати фахову медичну інтерпретацію.

Важливою перевагою візуального представлення легеневих звуків як результату LSS розкладу є доступність його інтерпретації медичними працівниками, що, як правило, не володіють апаратом спектрального аналізу. LSS розклад також значно простіший і швидший ніж швидке перетворення Фур'є.

6.6. Адаптивна фільтрація цифрових растрових зображень

Найбільш типовим випадковим сигналом складної форми є відеосигнал. Для відеосигналів важливим також є мінімальне спотворення їх форми. Характерною особливістю відеозображень є значна мінливість їхніх середніх характеристик. Навіть в межах одного зображення часто важливо отримати як загальне, фонове зображення так і деталізацію окремих областей зображення. Хоча за своєю природою відеозображення є двовимірним сигналом, проте практично завжди він розкладається на одномірні фрагменти, формуючи матрицю растру. Це дозволяє застосувати для його обробки розроблені вище одномірні сплайн-фільтри. Розроблено інтерактивну програму в середовищі MatLab, що дозволяє виконувати фільтрацію растрових зображень в сірій шкалі з восьмирозрядним кодуванням пікселів (PCX формат). Програма дозволяє виконувати фільтрацію зображень використовуючи кубічний ермітів сплайн та сплайни із заданою верхньою частотою, та отримувати зображення результату. Оператор має можливість

додавати до зображення білий нормальний шум із заданим СКВ, змінювати верхню частоту сплайна, розмір фрагмента (число даних на фрагменті), вікно при синтезі імпульсної характеристики нерекурсивного фільтра, що застосовується для синтезу базисного сплайна. Фільтрація зображення здійснюється послідовно по рядках та стовпцях фільтром з імпульсною характеристикою, що є рядком проекційної матриці МНК зі сплайновою моделлю. Вигляд вікна програми показано на рис.6.30.

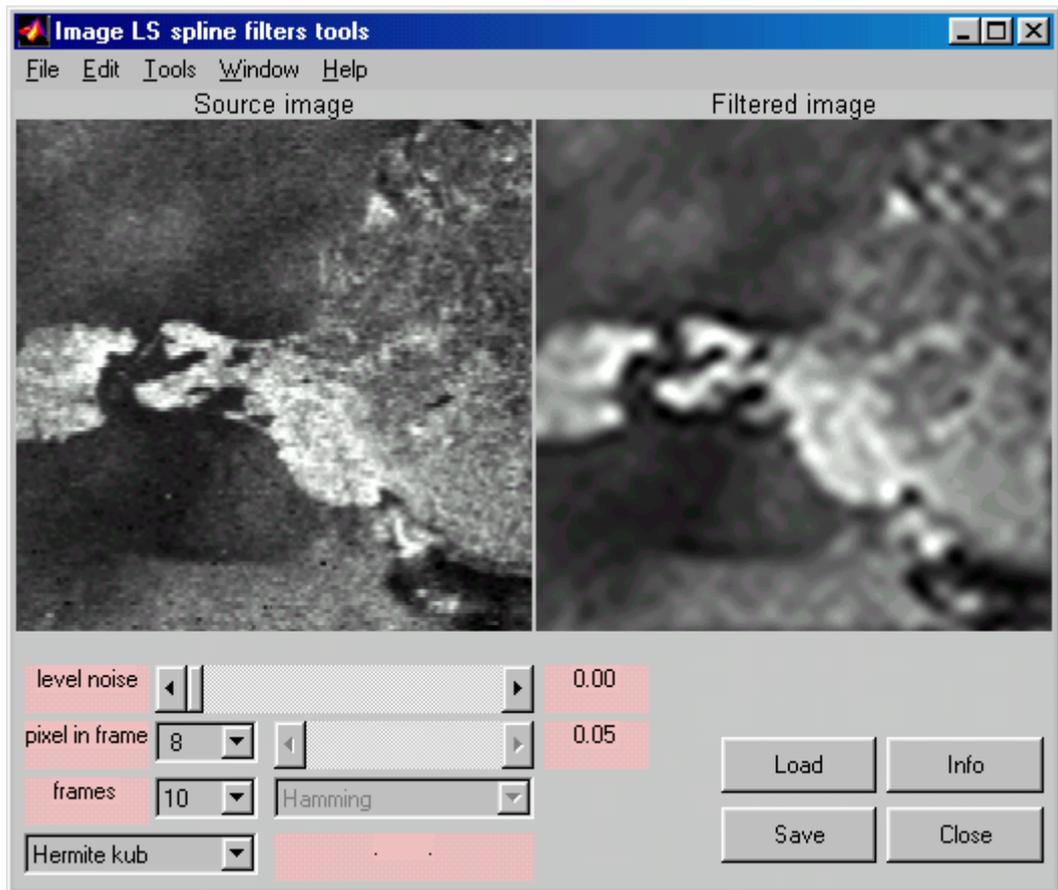


Рис.6.30 Вікно програми для сплайн-фільтрації зображень.

На рисунку показано фільтрацію космічного знімку району Керчинської протоки. Вікно розміром у 8 пікселів занадто сильно згладжує зображення. Максимально прийнятним є лише 4 піксели, що не дозволяє достатньо знизити рівень шуму (шум можна задати повзунком level noise).

Вихід полягає у адаптації шляхом зміни верхньої частоти базисного сплайна.. На рис.6.31 показано результат адаптації при наявності шуму з вікном у 12 пікселів.

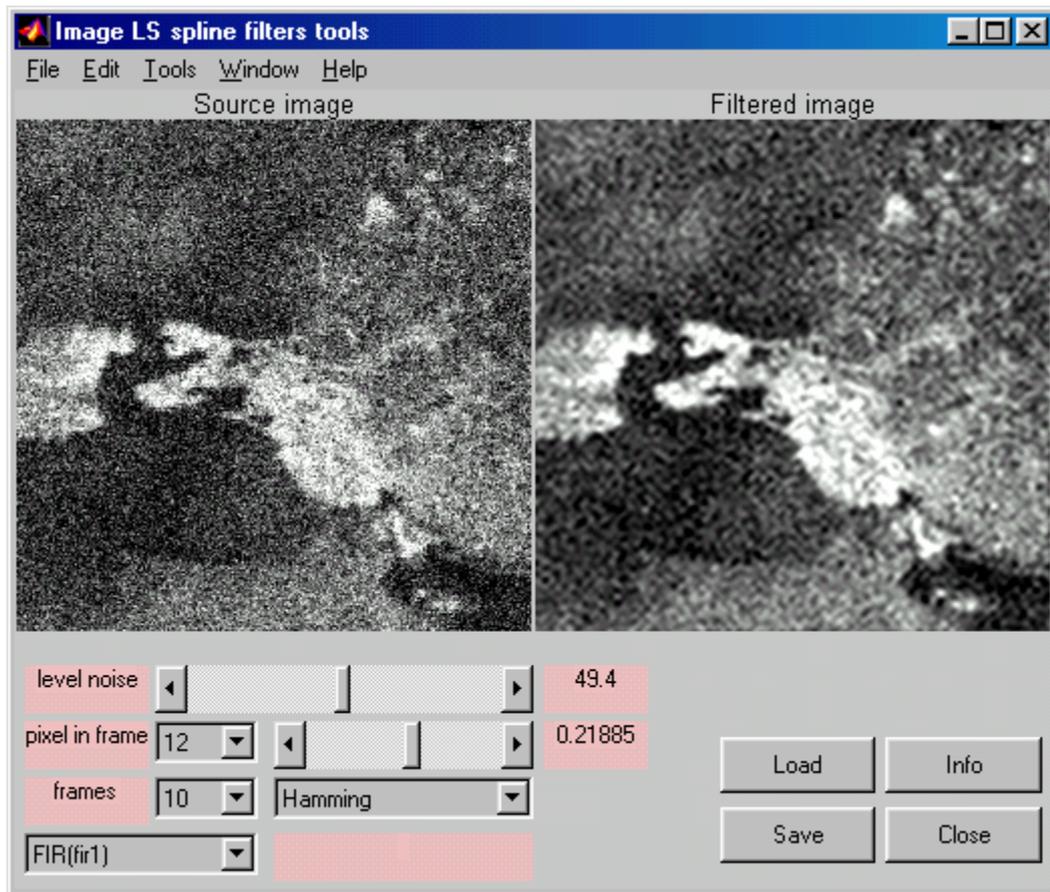


Рис.6.31. Результат адаптації базисного сплайна до зображення.

Алгоритм дозволив знизити рівень шуму при мінімальних спотвореннях. Бібліотека програми містить ряд різноманітних космічних та аерофотознімків районів з різними сюжетами. На рис.6.32 показано результат обробки густозабудованого району аеропорту.

Кількісне порівняння результатів обробки зображень із різним сюжетом має серйозні труднощі. Більшість норм (наприклад середньоквадратична) погано корелюють з суб'єктивною якістю сприйняття зображення. Існує досить обширний перелік чисельних критеріїв якості зображень, але при цьому цілком слушно відмічається їхня недосконалість. Середньоквадратичне відхилення між оригіналом і результатом фільтрації для складних зображень очевидно не зв'язане з суб'єктивною якістю. В роботах Лигуна, Шумейка відмічено, що найбільш близько якості людського сприйняття відповідає метрика Хаусдорфа. Тому в процесі автоматичної, чи автоматизованої адаптації можна орієнтуватися на норму в цій

метриці. Основною ж задачею МНК алгоритму є мінімізація впливу випадкового, адитивного шуму.

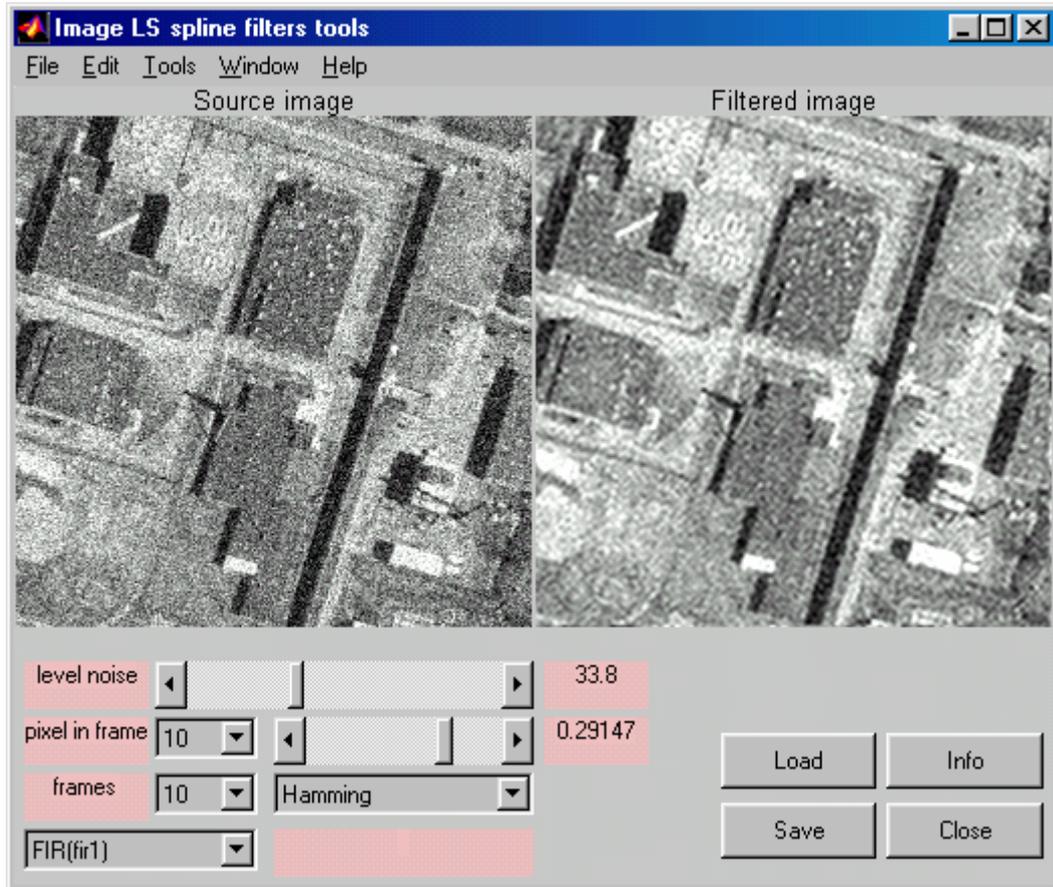


Рис.6.32. Фільтрація аерофотознімку району аеропорту.

Важливим досягненням запропонованого підходу до фільтрації зображень, є простота та ефективність алгоритму, який може бути реалізований програмно на DSP процесорах або ПЛІС схемах. Реалізований варіант програми дозволяє виконувати адаптацію в основному за двома параметрами: розміром фрагмента сплайна та верхньою частотою базисного сплайна. Очевидним вдосконаленням є застосування більш складних методів формування АЧХ базисного сплайна, що враховують не лише верхню частоту, але й форму спектру корисного сигналу в цілому. Проте це серйозно ускладнить процес адаптації.

6.7. Стиснення цифрових растрових зображень

Стиснення даних є надзвичайно важливою і актуальною практичною задачею, в зв'язку із інтенсивним розвитком комп'ютерних засобів комунікацій. Найбільш вражаючими є успіх в технології стиснення цифрових зображень. Принципово зберігання та передача цифрових зображень майже нероздільна з задачами стиснення. Методи стиснення можна розділити на дві основні великі групи [230]:

стиснення з точним відновленням інформації;

стиснення з певним рівнем втрат (lossy).

Стиснення в першій групі ґрунтується на оптимальних способах кодування, зокрема груповому кодуванні (RLE), словниковий метод Лампела-Зіва-Велча (LZW), кодування Хафмена (CCITT). Типовими представниками є формати TIFF, GIF, PCX. При цьому досягається коефіцієнт стиснення в 1.5-4 рази.

Друга група методів з'явилася дещо пізніше і ґрунтується на методах апроксимації даних, адаптивній дискретизації та певних фізіологічних особливостях сприйняття зображень людиною. Стиснення сягає 10-20 раз з прийнятною якістю зображень. Нас цікавитиме якраз остання група. В ній можна в свою чергу виділити два основні напрями:

wavelets методи, що мають прекрасне теоретичне обґрунтування, масу ілюстративних прикладів і мало практичних програмних реалізацій ;

евристичні методи, що практично не мають теоретичного обґрунтування, спираються на фізіологічні особливості людського сприйняття і фактично стали алгоритмічним стандартом (JPEG алгоритм).

Розглянемо основи роботи зазначених алгоритмів.

Wavelets методи ґрунтуються на інтерполяції локальними функціями. Принцип стиснення легко зрозуміти розглянувши рис.6.33 [112]. Повний вхідний сигнал (а) розділяється на парні та непарні (b) відліки. Непарні відліки (b) залишаються і становлять низькочастотну частину вхідних даних, їх число вдвічі менше початкового. Парні відліки замінюються інтерпольованими (c), де роль

вузлів інтерполяції виконують непарні відліки. Проте інтерес являють не самі інтерпольовані значення, а нев'язка інтерпольованих і оригінальних парних відліків (d).

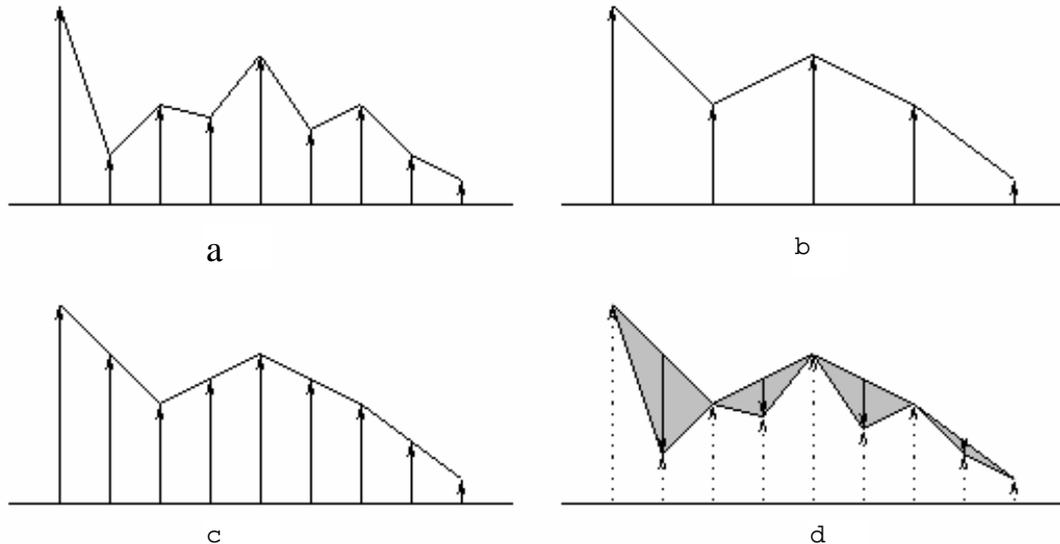


Рисунок 6.33. Wavelet стиснення даних

Нев'язка є фактично іншою, високочастотною складовою вхідних даних. Маючи непарні відліки (низькочастотна частина) та нев'язку для парних відліків (високочастотна частина) можна точно відновити вхідні дані. За умови відсутності втрат точності - стиснення відсутнє. Проте за певних умов високочастотна складова містить значну кількість нульових, або малозначимих чисел, котрі можна замінити нулями. Останню послідовність можна суттєво стиснути методом оптимального кодування. Послідовно застосовуючи цю схему, можна добитися значного стиснення, це так звана ліфтова схема (lifting scheme). Добрі ілюстрації цього підходу містяться в розділі Wavelet Toolbox пакету MatLab [252]. Зображення стискають, застосовуючи вказану процедуру до рядків та стовпців зображення (пірамідальна схема) рис.6.34 [54].

Ефективність процесу суттєво залежить від співвідношення спектрів сигналу та базисних функцій інтерполяції. Від цього залежить кількість малозначимих відліків нев'язки.

Wavelet методи застосовують в системах апаратного стиснення з відносно низькими вимогами до якості зображень (www.analog.com). Вейвлет алгоритми реалізовано в графічному стандарті JPEG2000, аналіз їх математичних властивостей розглянуто в [60].

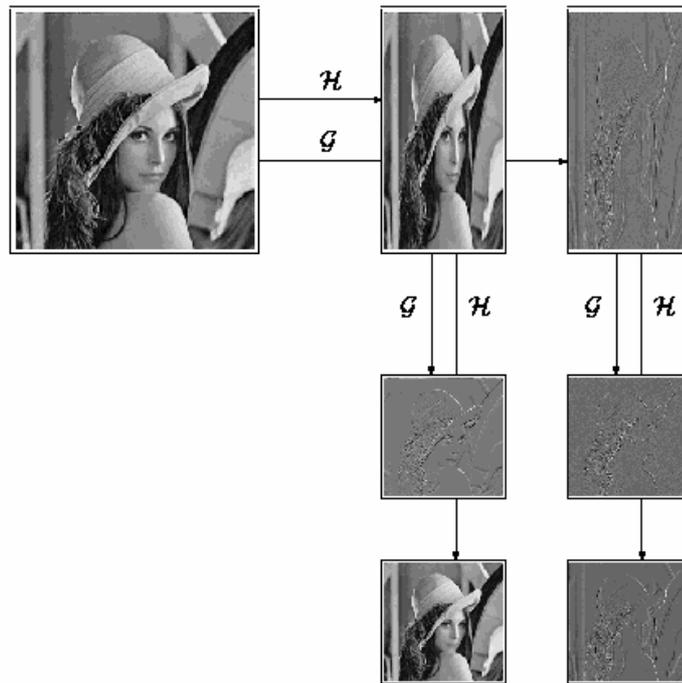


Рисунок 6.34. Пірамідальна wavelet декомпозиція зображень

Ідея JPEG алгоритмів полягає в тому, що людський зір більш чутливий до змін в яскравості ніж змін кольору, а також менше чутливий до змін у мілких (високочастотних) деталях зображення. Ідея стиснення полягає в спектральному розподілі зображення і застосуванні різних рівнів дискретизації для різних гармонік. Загальна схема практичної реалізації алгоритму для кольорового зображення показана на рис.6.35 [230].

Процес починається з перетворень стандартів кольорових зображень, зниження числа пікселів для кольорових складових, поділу зображення на клітини 8x8 пікселів та дискретного косинус перетворення. Отримані гармоніки

дискретизують за певною схемою з різними рівнями і отримані дані стискають методом Хофмана. Декодування відбувається в зворотному порядку.

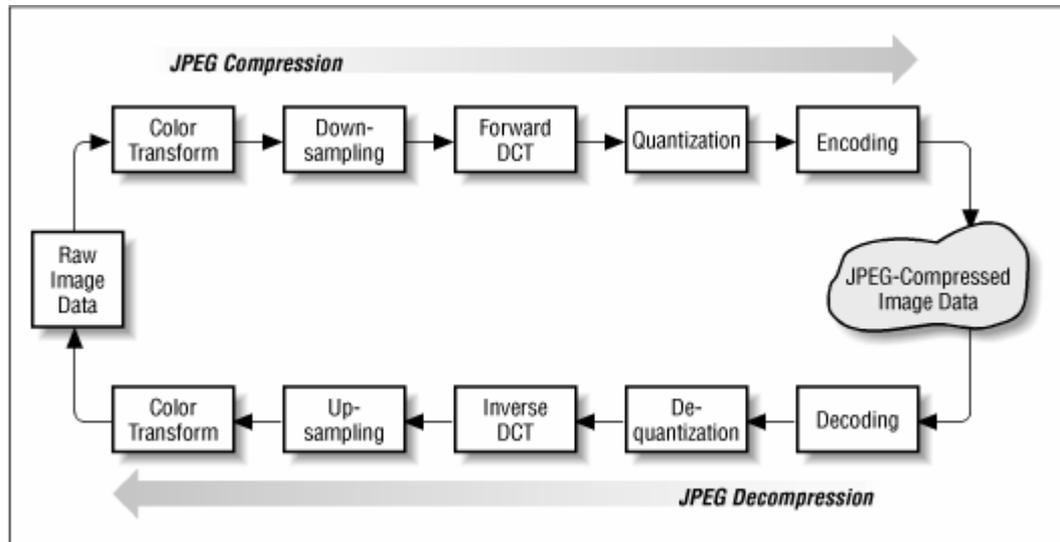


Рисунок 6.35. JPEG технологія стиснення зображень

JPEG алгоритм на сьогоднішній час є абсолютно домінуючим серед програмних реалізацій, очевидно завдяки досить універсальному характерові (слабкій залежності від характеру зображень), хоча розрахунки є досить складними з застосуванням арифметики з плаваючою точкою.

В даній роботі пропонується для стиснення зображень використати розроблені в попередніх розділах алгоритми. Очевидно, що ідея стиснення та сам підхід близький до wavelet методів, однак є ряд суттєвих відмінностей.

Однократна інтерполяція при компресії замінюється апроксимацією за МНК. Це дозволяє збільшити стиснення низькочастотної складової на окремому етапі не в 2 рази, а значно більше (8-32). Практично відпадає необхідність в поетапному стисненні. МНК забезпечує мінімум середніх квадратів високочастотної складової для заданого базису, що робить максимальним число малозначимих відліків. МНК забезпечує оптимальність з точки зору статистичних характеристик, що дозволяє алгоритму працювати при наявності шумів.

Розглянемо процес стиснення зображення. Тестовим об'єктом стиснення буде типове зображення "Lena" розмірності 512x512 пікселів з 256 градаціями сірого (рис.6.36).

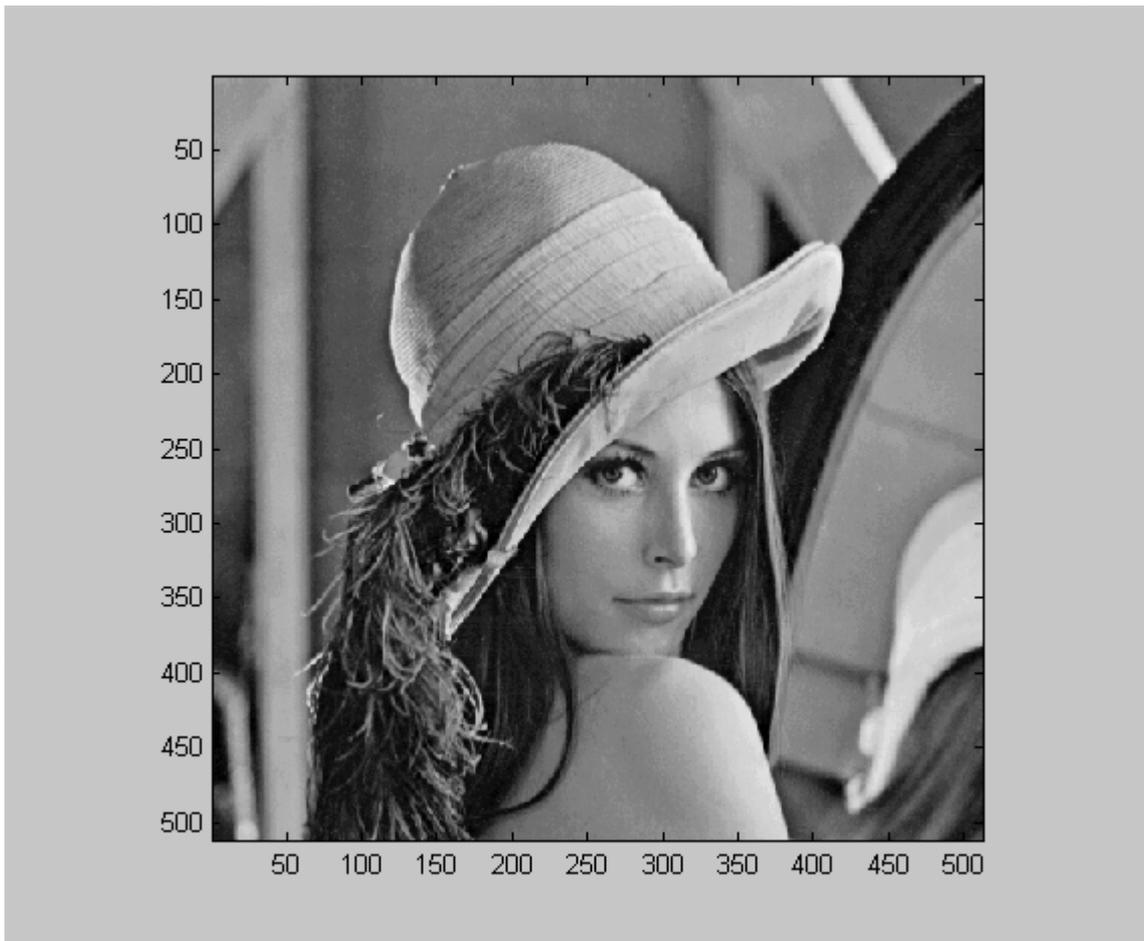


Рисунок 6.36. Тестове зображення “Lena”

Для стиснення використаємо алгоритми з розділу 4 (віконний алгоритм зі стисненням). Зображення стискуватимемо послідовно по рядках та стовпцях зображення. Якщо стиснення по рядках становитиме n (n відліків на фрагменті сплайна) і по стовпцях m , то загальне стиснення високочастотної частини зображення становитиме $n \cdot m$. Високочастотна частина зображення (різниця між оригіналом та низькочастотною частиною) міститиме значну кількість малозначимих чисел, котрі можна замінити нулями. Заміна нулями значень, менших певного порога λ , обумовлює втрати якості відновленого зображення. Оскільки високочастотна частина має розмірність оригіналу, то її також потрібно стиснути. Наявність значної кількості нульових значень дозволяє ефективно здійснити цю процедуру.

Для тестового зображення на рис.6.37 схематично показано процедуру стиснення (хід відновлення є очевидним).

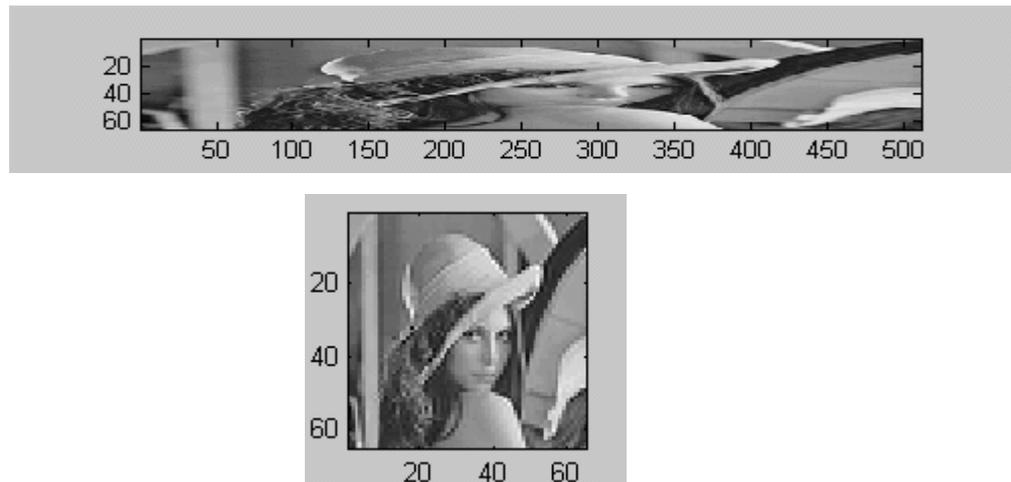


Рисунок 6.37. Стиснення зображення по вертикалі та горизонталі

Величина стиснення та якість зображення залежать від n та m і порога λ . На рис.6.38 показано гістограми залишків при $n=m=8$ і $n=m=16$, відповідно.

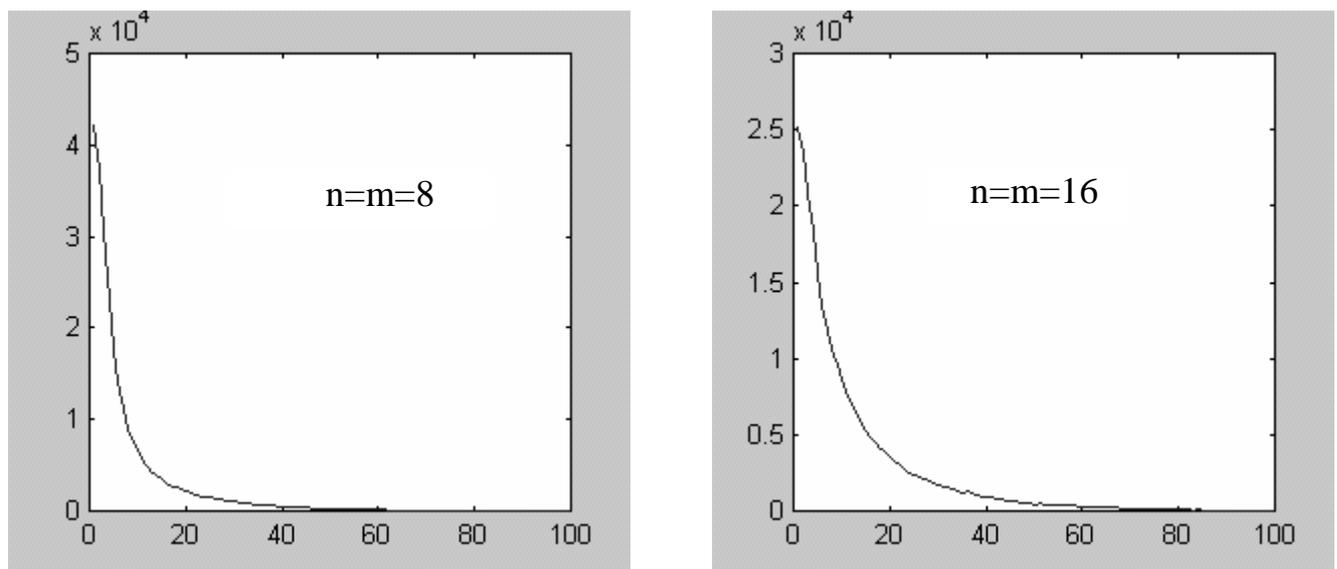


Рисунок 6.38. Гістограми значень залишків

На рис.6.39, 6.40 показані відновлені зображення з порогами $\lambda=8$ і $\lambda=32$, відповідно ($n=m=8$). Інший спосіб стиснення полягає у зменшенні рівнів дискретизації залишкового сигналу. Експерименти із застосуванням різних схем дискретизації показали, що число нульових елементів у залишках наближається до отриманого з допомогою вейвлет методів. В експериментах застосовувалось програмне забезпечення з 6.5. Однак у вейвлетах на кожному етапі застосовувалась окрема схема дискретизації, а сам алгоритм стиснення є результатом тривалих

досліджень в цій області. Запропонований МНК алгоритм має багато можливостей по удосконаленню обчислювальних схем і параметрів. Це вибір відповідних базисів, поетапне стиснення, адаптивне стиснення із врахуванням характеру окремих областей, застосування двомірних сплайнових базисів, тощо. Такі детальні дослідження і розробка конкретних програмних реалізацій виходять за рамки даної роботи, поза як потребують окремої уваги, значного обсягу досліджень та витрат.

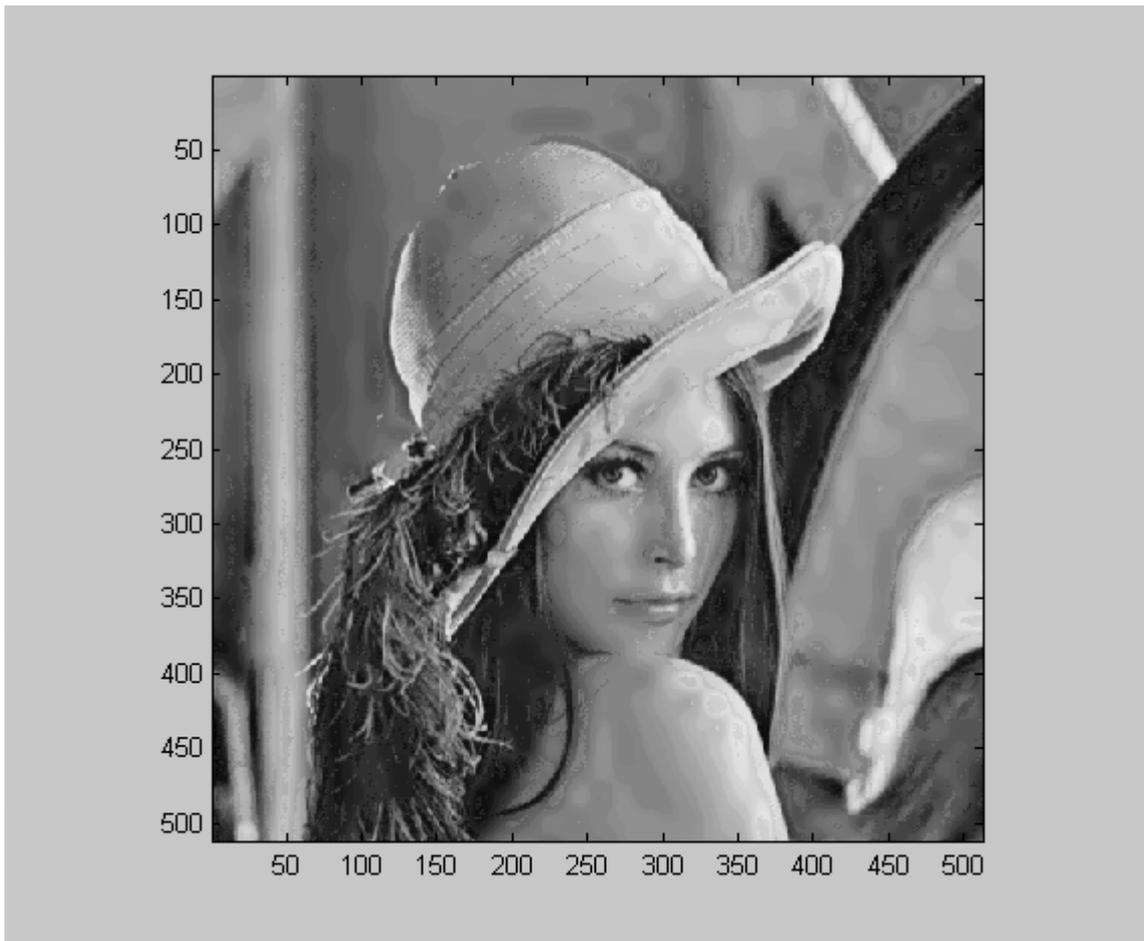


Рисунок 6.39. Відновлене з порогом 8 зображення ($n=m=8$)

Автор мав на меті лише розробку основного принципу застосування створених в цій роботі алгоритмів і підходів до розв'язку зазначеної практичної задачі та виявлення потенційних можливостей підходу. Суттєвою перевагою запропонованого методу є обробка і стиснення зображень при наявності шумів. За таких умов вейвлет алгоритми суттєво втрачають як в ефективності стиснення так і в якості реконструйованого зображення. Такі зображення є типовими в радіолокаторах із синтетезованою апертурою (SAR - synthetic aperture radar).

Вейвлет алгоритми для роботи з такими сигналами розглянуті в роботах [32,74]. Як уже відмічалось раніше, вейвлети певним чином відфільтровують шуми, оскільки розкладають сигнал на низькочастотну і високочастотну складові. Але ефективність такої фільтрації для нормального некорельованого шуму є невисокою. Наявність в запропонованому алгоритмі МНК, якраз гарантує ефективність отриманих оцінок.

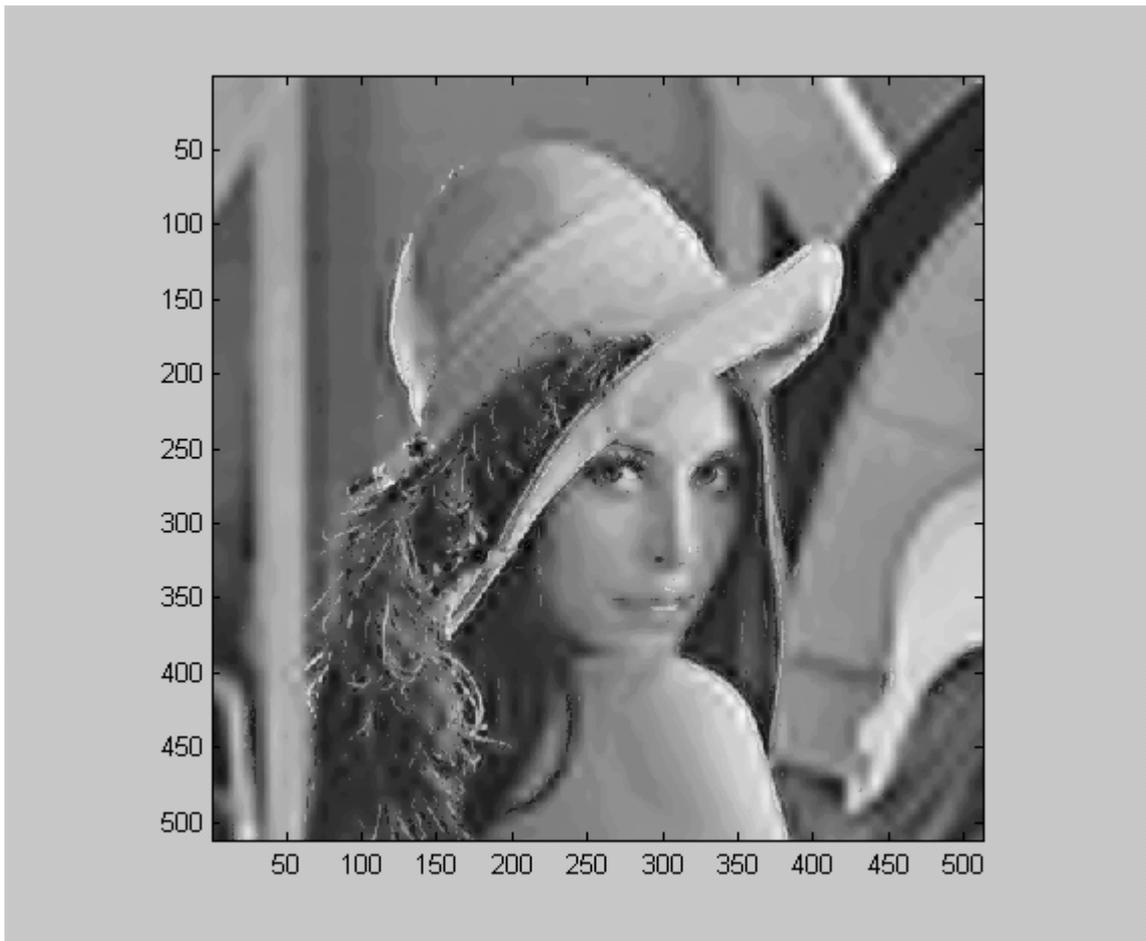


Рисунок 6.40. Відновлене з порогом 32 зображення ($n=m=8$)



Рисунок 6.41. Зашумлене тестове зображення



Рисунок 6.42. Реконструйоване з допомогою wavelet методу зображення

Продемонструємо це на нашому тестовому прикладі. Для цього додамо до зображення на рис.6.36 нормальний шум з нульовим математичним сподіванням і СКВ 16. Результат показано на рис.6.41.

Стиснуте і реконструйоване вейвлет методом зображення показано на рис.6.42. Використано квадратні сплайнові вейвлети (QS) з двома етапами стиснення. Високочастотні складові при реконструкції відкинуті.

На рис.6.43 показано реконструйоване з допомогою запропонованого МНК алгоритму зображення, що було стиснуте до аналогічного попередньому розміру. Очевидно, що запропонований метод дає значно кращий результат. Тут також при реконструкції не враховувались високочастотні залишки.



Рисунок 6.43. Реконструйоване сплайн-МНК методом зображення

Чисельно результати оцінювалися за СКВ різниці між оригінальним, незашумленим зображенням і реконструйованим. Для вейвлет отримано СКВ 13.3, для МНК 9.2. При цьому слід врахувати, що різниця містить не лише випадкову похибку але і динамічну. Очікуване значення СКВ для МНК (чотири спостереження на фрагменті) має складати щонайбільше 8.8 ($\sqrt{0.3} * 16$), що не надто сильно відрізняється від отриманого.

Стосовно вейвлет методу, знову слід зауважити, що стиснуте зображення є його низькочастотною частиною, що складається з одного відліку з квадрату 4x4. Тому інтерполяція при реконструкції лише “розмазує” вхідний шум. Якщо частково

врахувати високочастотну складову, то це лише підвищить рівень шумової складової.

Відмітимо основні особливості, відмінності та переваги запропонованого підходу.

Значною перевагою є можливість реалізації в цілочисельній арифметиці, що дозволяє виконувати операції апаратно. Метод є більш стійким відносно шумів ніж інтерполяційні схеми і може застосовуватись для обробки синтезованих зображень в радіо та гідролокації, тощо.

Запропонований підхід дозволяє оптимізувати процедуру стиснення змінюючи основні параметри:

- число даних на фрагменті сплайна (n, m);
- рівень нуля у високочастотній частині (λ);
- вид сплайнового базису.

Оптимізація останнього параметра потребує спектрального аналізу зображення, включаючи й методи розроблені в розділі 4, й дозволяє враховувати специфічний характер зображення.

Низькочастотна частина зображення є по суті повноцінним зменшеним зображенням, що полегшує попередній перегляд зображення.

Оскільки процедура відновлення зображення є інтерполяцією, то легко виконувати зміни масштабу зображення.

Як недолік, що може обмежити застосування, слід відмітити несиметричність алгоритму. Процедура стиснення потребує більших затрат ніж відновлення. Проте затрати на відновлення практично не залежать від складності чи попередніх затрат на етапі стиснення.

6.8. Висновки

1. Розроблено технологію обробки сигналів, що ґрунтується на МНК зі сплайновими моделями, що відрізняються від класичних моделей універсальністю, та ефективністю розрахунків.

2. Ефективність фільтрації та стиснення суттєво залежить від співвідношення спектрів даних та сплайнового базису. При відповідному узгодженні спектрів сплайни можна застосовувати для обробки не лише низькочастотних (гладких) сигналів, але й осцилюючих, полігармонійних.

3. При узгодженні спектрів (як мінімум за смугою пропускання сигналу та базису) алгоритми, що ґрунтуються на використанні проекційної матриці та зі стисненням дають близькі результати.

4. Застосування ермітових кубічних сплайнів для фільтрації та стиснення біометричних даних дозволило розв'язати проблеми з фільтрацією, стисненням та подальшим аналізом, котрі не вдавалося подолати з допомогою класичних підходів та вейвлетів.

5. Використання LSS розкладу до легневих звуків показало можливість отримання стійких характерних картин розкладу для характерних сигналів. Розклад має перспективу для застосування у компактних пристроях аналізу та документування результатів, а також в системах автоматизованої діагностики.

6. Розроблені алгоритми адаптації базису до частотних властивостей сигналу продемонстрували ефективність при фільтрації візуальних зображень. Адаптація легко виконується для різнопланових зображень із шумом.

7. Запропоновано метод стиснення зображень, що базується на розроблених МНК сплайн алгоритмах і має ряд переваг. Зокрема це простота алгоритму, що зводиться до цілочисельних операцій, стійкість до шумів, широкі можливості що до оптимізації стиснення.

ВИСНОВКИ

Сутність, наукова новизна, прикладне спрямування і практична значимість основних результатів виконаних досліджень полягає в наступному.

Сформульована, досліджена і розв'язана проблема суть якої полягає у вдосконаленні обробки цифрових сигналів складної форми в радіотехнічних системах шляхом застосування сплайн-моделей.

Вирішення сформульованої проблеми представлено розв'язаними в роботі науковими та практичними підпроблемами в наступних аспектах:

1. Розроблено та теоретично обґрунтовано методи синтезу сплайнів із заданими частотними властивостями, придатних для застосування в алгоритмах реального часу.

Досліджено наукові основи використання сплайнових моделей сигналів складної форми в радіотехнічних і телевізійних системах. Застосування сплайнових моделей найбільш доцільне в рамках сигнальної концепції вивчення складних систем. Складні системи є джерелом сигналів складної форми, для моделювання яких і застосовуються сплайни. Сигнали в радіотехнічних системах мають характерні особливості, які необхідно враховувати при розробці систем обробки. Для цього теоретично обґрунтовано методи побудови сплайнових базисів з відрізків неперервних на фрагменті функцій на рівномірній сітці вузлів. Сформульовані і доведені умови неперервності першої та другої похідних у вузлових точках отриманих базисних сплайнів. Отримано розрахункові співвідношення необхідні для побудови локальних сплайнових базисів, що складаються з чотирьох фрагментів (включаючи й дискретний варіант побудови). Основи вказаного підходу були відомі лише для окремих В-сплайнів. Розроблений в роботі підхід є узагальненням, що розширює можливі різновиди базисних сплайнів і дає практичний підхід до їх розрахунків. Розроблено математичний апарат для приведення базисних сплайнів до ермітової та лагранжевої форм. Ці форми дозволяють уникнути розв'язання лінійних рівнянь при інтерполяції. Отримані

результати дозволили звести задачу синтезу сплайнів до відомих задач синтезу нерекурсивних цифрових фільтрів із заданими амплітудно-частотними характеристиками.

2. Створення та теоретичне обґрунтування методики побудови пристроїв для сплайн-аналізу та синтезу радіотехнічних сигналів. Розробка методологічних основ побудови алгоритмів реального часу для сплайн-обробки та оптимальної фільтрації.

Із знайдених методів синтезу сплайнів слідує, що в інтерполяційних фільтрах базисні сплайни на рівномірних сітках ідентичні імпульсним характеристикам нерекурсивних цифрових фільтрів. В результаті похибка наближення оцінюється як в часовій так і в частотній областях.

В роботі МНК розглянуто з погляду цифрової обробки сигналів. Розроблено універсальний підхід до побудови нерекурсивних цифрових фільтрів, що реалізують згладжування за МНК зі сплайновими моделями з використанням проекційної матриці. Розроблено рекомендації що до вибору імпульсних характеристик таких фільтрів. Даний підхід є узагальненням відомих фільтрів Савицького-Голлея для сплайнових моделей.

Отримано процедури для розрахунків МНК оцінок параметрів сплайнів з необмеженим числом фрагментів на рівномірних сітках. Зокрема розроблено спосіб наближеного обернення семидіагональної симетричної матриці необмеженої розмірності специфічного для сплайнових моделей вигляду. Отримано розрахункові вирази, оцінку похибки та проаналізовано вплив неточності обернення на МНК оцінки. З допомогою зазначеного методу отримано вирази для приведення сплайнових базисів до лагранжівової форми та розрахунку корегуючого нерекурсивного префільтра для інтерполяції В-сплайнами. Відомі способи потребують ортогоналізації базисних функцій. Розроблено структуру МНК сплайн-фільтрів зі стисненням даних. Для кубічних ермітових сплайнів отримані наближені аналітичні оцінки ефективності МНК фільтрів, що добре узгоджуються з чисельними розрахунками.

Розроблено рекурентні алгоритми отримання МНК оцінок, що враховують специфічну структуру сплайнових базисів і ефективніші в обчисленнях за відомі.

В цілому отримані конструкції фільтрів можна розглядати, як реалізацію оптимальних фільтрів Вінера в класі сплайн-функцій.

3. Знайдено метод частотно-часового розкладу сигналів в сплайнових базисах за методом найменших квадратів (LSS розкладу), що має оптимальні та адаптивні властивості. Розроблено структуру пристроїв та самі пристрої LSS розкладу та адаптивної обробки сигналів.

Давно відомі схеми частотно-часового розкладу з допомогою банків фільтрів. Особливу популярність частотно-часовий розклад здобув у зв'язку з розвитком вейвлет-методів. Поетапні пірамідальні схеми вейвлет розкладу природнім чином є адаптивними структурами, що здатні виконувати обробку широких класів сигналів (звукові, відеосигнали). Однак вейвлет методи ґрунтуються на інтерполяції і за наявності білого шуму їх характеристики значно погіршуються. За цих умов якраз МНК гарантує статистичну стійкість та оптимальність оцінок. Авторіві вдалося знайти метод частотно-часового розкладу за МНК в сплайнових базисах, розробити структуру пристроїв розкладу та створити самі пристрої. На відміну від вейвлет картин розкладу картини LSS розкладу є стійкими до білого шуму, дозволяють отримувати оцінку достовірності та перевіряти статистичні гіпотези. LSS розклад вдало поєднує простоту реалізації та статистичну обробку, що дозволяє реалізувати цілий ряд схем адаптивної обробки сигналів.

4. Створена сплайн-технологія обробки сигналів складної форми в радіотехнічних системах та виконана її апробація шляхом проведення модельних експериментів та впровадження в інженерну практику.

Розроблена технологія дозволяє будувати програмні та апаратні комплекси оптимальної адаптивної обробки радіотехнічних сигналів складної форми. При цьому використовуються всі три можливості адаптації. За рахунок оптимального зважування базисних сплайнів за МНК, за рахунок зміни ширини базисних сплайнів, за рахунок зміни форми та частотних властивостей базисних сплайнів.

Якщо перші два підходи є добре відомими, то останній є новим для сплайнів, оскільки існувала можливість лише вибору певного виду сплайну з множини відомих. Отримані результати дозволяють цілеспрямовано синтезувати базисний сплайн, а знайдені ефективні рішення дозволяють здійснювати цей процес в реальному часі.

Розроблена система фільтрації та стиснення реографічних даних (медична функціональна діагностика). Система є перспективною для застосування в телемедичних комплексах. Виконано порівняння з вейвлет методом обробки реограм. Результат показав якісно гірші результати вейвлет обробки.

Розроблене програмне забезпечення для адаптивної фільтрації растрових відеозображень. Адаптація здійснюється шляхом зміни ширини фрагментів сплайна та змінюючи верхню частоту базисного сплайна, а також вікна в процесі синтезу імпульсної характеристики нерекурсивного цифрового фільтра, що утворює базисний сплайн.

Розроблено алгоритм стиснення зображень в основу котрого покладено поєднання алгоритмів фільтрації та стиснення. Проаналізовано якості алгоритму в порівнянні з wavelet методами та JPEG алгоритмом. Основними перевагами є простота алгоритму, що зводиться до цілочисельних розрахунків, багатократне стиснення за один цикл і оптимальність наближення (за МНК), можливість широкої оптимізації процесу та адаптації до даних. Перевага запропонованих методів перед вейвлетами проявляється за умов наявності некорельованого адитивного шуму.

Сформульовані підпроблеми утворюють в комплексі проблему закінченого в роботі дослідження. А саме: вдосконалення обробки цифрових сигналів складної форми в радіотехнічних системах шляхом застосування сплайн-моделей.

Наукова новизна та оригінальність розв'язку проблеми обґрунтовано у викладеному вище, де показане теоретичне значення отриманих результатів та їхнє місце в порівнянні з отриманими раніше результатами, що відомі з літературних

джерел, а також технічними та програмними рішеннями теоретичних розробок, моделей та алгоритмів.

Практична значимість основних результатів полягає в тому, що досягнуто суттєвого покращення результатів синтезу та аналізу цифрових сигналів складної форми в радіотехнічних системах, шляхом застосування сплайн-моделей. Одержані результати дозволяють приблизно вдвічі розширити вікно обробки та отримати стійкі до білого шуму і оптимальні частотно-часові розклади, будувати схеми адаптивної обробки з адаптацією за рахунок зміни амплітуди, масштабу та форми базисних сплайнів. Значимість підтверджена їх успішним застосуванням при вирішенні реальних задач, що зустрічалися в інженерних розробках. Виконані дослідження дозволяють використати отримані методи та алгоритми в задачах обробки і аналізу сигналів, що характеризуються складним характером сигналів за наявності шуму, високими вимогами до ефективності розрахунків, достовірністю статистичних оцінок. Переважна більшість способів та алгоритмів реалізована програмно у середовищах VBA, MathCad, MatLab. Функціонування пристроїв змодельовано в системі Simulink. Це дає можливість їх безпосереднього застосування на практиці. Базові конструкції пристроїв сплайн-обробки доступні для виготовлення у вигляді універсальних заказних, напівзаказних інтегральних схем та програмованих логічних інтегральних мікросхем.

Проблемні питання та перспективи подальших досліджень, що слідують з виконаних досліджень, на думку автора, полягають в наступному:

1. Створення математичної теорії сплайн-фільтрації, котра встановлює кількісні співвідношення між якістю сплайнових фільтрів і спектрами даних та сплайнових базисів, з урахуванням наявності випадкових складових. Практичне значення має розробка методів, котрі за спектральними оцінками вхідних даних дозволяють б точно синтезувати відповідні базисні сплайни. Таким чином можна реалізувати цілий ряд алгоритмів адаптивної фільтрації нестационарних даних.

2. Розробка методів отримання оцінок сплайнових моделей за умови наявності в даних корельованого та не нормального шуму. Зокрема це застосування

Калманівської фільтрації зі сплайновими моделями, та методу максимальної вірогідності.

3. Дослідження та розвиток методів фільтрації та стиснення даних з допомогою сплайн-апроксимації для відеоданих та аудіоданих, включаючи застосування двох та трьох вимірних сплайнів.

4. Розробка придатних для ефективного застосування на практиці методів та алгоритмів обробки сигналів, що ґрунтуються на двох та трьох вимірних сплайнах. Такі моделі в багатьох випадках є більш адекватними природі процесів, котрі породжують дані, що підлягають аналізу (метеорології, відеозображеннях).

5. Розвиток прикладних сфер застосування сплайн-методів обробки цифрових сигналів в телебаченні, телемедицині, радіозв'язку, телекеруванні, радіолокації.

Вказані напрями далеко не вичерпують всіх актуальних задач, зміст яких є близьким до виконаних в роботі досліджень. Автор обмежився лише тими, котрі є предметом подальших досліджень, або дослідження з яких в деяких обсягах уже виконані, як самим автором так і його колегами.

Список використаних джерел

1. A Semi-implicit Semi-Lagrangian Finite-Element Shallow-Water Ocean Model. D.Roux, C.Lin, A.Staniforth. Monthly weater review, 1384-1401,vol.128, may 2000.
2. Aldroubi, A.F. Laine, M.A. Unser, Eds., Mathematical Imaging: Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII, Proceedings of SPIE 4119, 2000.
3. Aldroubi, M.A. Unser, Eds., Wavelets in Medicine and Biology, CRC Press, 1996.
4. Aldroubi, P. Abry, M. Unser, "Construction of Biorthogonal Wavelets Starting from Any Two Multiresolutions," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 46, no. 4, pp. 1130-1133, April 1998.
5. A.Cohen, Biorthogonal wavelets, Wavelets -- A Tutorial in Theory and Applications (C. K. Chui, ed.) Academic Press, Boston, 1992, 123-152.
6. A.Cohen, Ondelettes, Analyses Multir'esolutions et Traitement Num'erique du Signal, Doctoral Thesis, Univ. Paris-Dauphine, 1990. 20.
7. A.Muñoz Barrutia, T. Blu, M. Unser, "Least-Squares Image Resizing Using Finite Differences," IEEE Transactions on Image Processing, vol. 10, no. 9, pp. 1365-1378, September 2001.
8. A.F. Laine, M.A. Unser, A. Aldroubi, Eds., Mathematical Imaging: Wavelet Applications in Signal and Image Processing VI, Proceedings of SPIE 3458, 1998.
9. A.F. Laine, M.A. Unser, A. Aldroubi, Eds., Mathematical Imaging: Wavelet Applications in Signal and Image Processing IX, Proceedings of SPIE 4478, 2001.
- 10.A.F. Laine, M.A. Unser, Eds., Mathematical Imaging: Wavelet Applications in Signal and Image Processing II, Proceedings of SPIE 2303, 1994.
- 11.A.F. Laine, M.A. Unser, M.V. Wickerhauser, Eds., Mathematical Imaging: Wavelet Applications in Signal and Image Processing III, Proceedings of SPIE 2569, 1995.
- 12.B.Vidakovic, P.Mueller. Wavelets for kids: a Tutorial Introduction. Duke University,1991.

- 13.C.K. Chui and J. Z. Wang, A cardinal spline approach to wavelets, Proc. Amer. Math. Soc. 113 (1991), 785-793.
- 14.C.K. Chui, An Introduction to Wavelets, Academic Press, Boston, 1992.
- 15.C.Lee, M. Eden, M. Unser, "High-Quality Image Resizing Using Oblique Projection Operators," IEEE Transactions on Image Processing, vol. 7, no. 5, pp. 679-692, May 1998.
- 16.C.Lee, S. Huh, T.A. Ketter, M. Unser, "Automated Segmentation of the Corpus Callosum in Midsagittal Brain Magnetic Resonance Images," Optical Engineering, vol. 39, no. 4, pp. 924-935, April 2000.
- 17.C.Lee, S. Huh, T.A. Ketter, M. Unser, "Unsupervised Connectivity-Based Thresholding Segmentation of Midsagittal Brain MR Images," Computers in Biology and Medicine, vol. 28, no. 3, pp. 309-338, May 1998.
- 18.Chui, Charles K.; Wang, Jian-Zhong An analysis of cardinal spline-wavelets. J. Approx. Theory 72 (1993), no. 1, 54--68.
- 19.De Boor C. Box splines/ De Boor C., Hollig K., Riemenschneider S.. -New York et al.: Springer, 1993. -XVII,200 p.: ill.Applied mathematical sciences;Vol.98.
- 20.Debao Chen, Cardinal Spline Wavelets, Doctoral Thesis, the University of Texas at ustin, 1994.
- 21.Debao Chen, Extended families of cardinal spline wavelets, Appl. Comp. Harmonic Anal. 1 (1994), 194-208.
- 22.D.Van De Ville, T. Blu, M. Unser, "On the Multidimensional Extension of the Quincunx Subsampling Matrix," IEEE Signal Processing Letters, vol. 12, no. 2, pp. 112-115, February 2005.
- 23.E.Meijering, "A Chronology of Interpolation: From Ancient Astronomy to Modern Signal and Image Processing," Proceedings of the IEEE, vol. 90, no. 3, pp. 319-342, March 2002.
- 24.E.Meijering, M. Unser, "A Note on Cubic Convolution Interpolation," IEEE Transactions on Image Processing, vol. 12, no. 4, pp. 477-479, April 2003.

25. F. Müller, P. Brigger, K. Illgner, M. Unser, "Multiresolution Approximation Using Shifted Splines," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 9, pp. 2555-2558, September 1998.
26. Felix J. Yanovsky, Model of the relationship between Doppler and polarization parameters of the radar signal from precipitation. Report IRCTR-S-002-98. TU-Delft, The Netherlands, 1998, 108 pp.
27. G. Battle, Cardinal spline interpolation and block spin construction of wavelets, *Wavelets -- A Tutorial in Theory and Applications* (C. K. Chui, ed.), Academic Press, Boston, 1992, 73-90.
28. G¹ Continuous Conditions of Bicubic B-spline Surfaces, X. Shi and Y. Zhao (China) *CAGD/Computational Geometry The 4th Asian Symposium on Computer Mathematics* Chiang Mai, Thailand, December 17-21, 2000.
29. GARDNER, L.R.T., GARDNER, G.A. & ABDULLAH, M.F. Simulations of Boussinesq solitons. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 08, 1997.
30. GARDNER, L.R.T., GARDNER, G.A., AYOUB, F.A. & AMEIN, N.K. Approximations of solitary waves of the MRLW equation by B-spline finite elements. *The Arabian Journal for Science and Engineering* 22 (1997) 183-193.
31. Grimshaw R., Pelinovsky E., Tian X. Interaction of a solitary wave with an external force // *Physica D*. 1994. V. 77. P. 405-413.
32. Guo H., Odegard J.E., Lang M., Gopinath R.A., Selesnick I., and Burus C.S. Speckle reduction via wavelet soft-thresholding with application to SAR based ATD/R. In *SPIE*, vol. 2303, San Diego, CA, 1994.
33. I. Daubechies, Ten lectures on wavelets. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
34. I.J. Schoenberg, Cardinal spline interpolation. Philadelphia, PA: Society of Industrial and Applied Mathematics, 1973.
35. I. Schoenberg, Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, *Quart. Appl. Math.*, 4 (1946), pp. 45-99 and 112-141.

36. IDEF Users Group. (1990). IDEF: framework, draft report (IDEF-U.S.-0001). Dayton, OH: IDEF Users Group.
37. J. Kybic, P. Thévenaz, A. Nirkko, M. Unser, "Unwarping of Unidirectionally Distorted EPI Images," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 19, no. 2, pp. 80-93, February 2000.
38. L. Zeng, C.P. Jansen, S. Marsch, M. Unser, P.R. Hunziker, "Four-Dimensional Wavelet Compression of Arbitrarily Sized Echocardiographic Data," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 21, no. 9, pp. 1179-1187, September 2002.
39. L.-E. Andersson: Constrained Spline Approximation, Second Annual Meeting of SIAM NORDIC SECTION, Espoo, Finland, August 28--29 1989.
40. L.L. Schumaker, *Spline functions: basic theory*. New York: Wiley, 1981.
41. Least-squares quadratic B-spline finite element method for the regularised long wave equation. Idris Dag *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 182 (2000) 205-215.
42. Lee, Daniel A simple approach to cardinal Lagrange and periodic Lagrange splines. *J. Approx. Theory* 47 (1986), no. 2, 93—100
43. Lu, Chien Ke Error analysis for interpolating complex cubic splines with deficiency 2. *J. Approx. Theory* 36 (1982), no. 3, 183—196.
44. M. Arigovindan, M. Söhling, P. Hunziker, M. Unser, "Variational Image Reconstruction from Arbitrarily Spaced Samples: A Fast Multiresolution Spline Solution," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 14, no. 4, pp. 450-460, April 2005.
45. M. Jacob, T. Blu, M. Unser, "An Exact Method for Computing the Area Moments of Wavelet and Spline Curves," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 23, no. 6, pp. 633-642, June 2001.
46. M. Jacob, T. Blu, M. Unser, "Sampling of Periodic Signals: A Quantitative Error Analysis," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 5, pp. 1153-1159, May 2002.

- 47.M. Sühling, M. Arigovindan, P. Hunziker, M. Unser, "Multiresolution Moment Filters: Theory and Applications," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 13, no. 4, pp. 484-495, April 2004.
- 48.M. Unser and T. Blu, "Fractional splines and wavelets," *SIAM Review*, in press. Vol.42,No.1,pp.43 –67 March 2000.
- 49.M. Unser, "A Practical Guide to the Implementation of the Wavelet Transform," *Wavelets in Medicine and Biology*, A. Aldroubi, M.A. Unser, Eds., CRC Press, Boca Raton FL, USA, pp. 37-73, 1996.
- 50.M. Unser, "Sampling: Beyond the Myth of a Perfect Reconstruction," Plenary talk, Fourth International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA'01), Orlando FL, USA, May 13-17, 2001, pp. 15.
- 51.M. Unser, "Sampling--50 Years After Shannon," *Proceedings of the IEEE*, vol. 88, no. 4, pp. 569-587, April 2000.
- 52.M. Unser, "Splines and Wavelets for Biomedical Imaging," Series of Invited Lectures, Workshop on Fractals and Wavelets in Medical Imaging, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, Montréal QC, Canada, February 23-24, 2001.
- 53.M. Unser, "Splines and Wavelets for Medical Imaging," *Proceedings of the Fourth IEEE EMBS Berder International Summer School on Biomedical Imaging*, June 17-24, 2000, Ile de Berder, France.
- 54.M. Unser, "Splines: a perfect fit for signal and image processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 16, no. 6, pp. 22-38, 1999.
- 55.M. Unser, A. Aldroubi and M. Eden, "B-spline signal processing: Part II—efficient design and applications," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, no. 2, pp. 834-848, 1993.
- 56.M. Unser, A. Aldroubi and M. Eden, "B-spline signal processing: Part I—theory," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, no. 2, pp. 821-833, 1993.
- 57.M. Unser, J. Zerubia, "A Generalized Sampling Theory Without Band-Limiting Constraints," *IEEE Transactions on Circuits and Systems--II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 45, no. 8, pp. 959-969, August 1998.

- 58.M. Unser, P. Thřvenaz, A. Aldroubi, "Shift-Orthogonal Wavelet Bases," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 7, pp. 1827-1836, July 1998.
- 59.M. Unser, T. Blu, "Fractional Splines and Wavelets: From Theory to Applications," *Joint IDR-IMA Workshop: Ideal Data Representation*, Minneapolis MN, USA, April 9-13, 2001.
- 60.M. Unser, T. Blu, "Mathematical Properties of the JPEG2000 Wavelet Filters," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 12, no. 9, pp. 1080-1090, September 2003.
- 61.M. Unser, T. Blu, "Wavelet Theory Demystified," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, no. 2, pp. 470-483, February 2003.
- 62.M. Unser. Sampling—50 years after shannon. *Proceedings of the IEEE*, vol. 88, no. 4, pp. 569-587, April 2000.
- 63.M. Vetterli, P. Marziliano, T. Blu, "Sampling Signals with Finite Rate of Innovation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 6, pp. 1417-1428, June 2002.
- 64.M.A. Unser, A. Aldroubi, A.F. Laine, Eds., *Mathematical Imaging: Wavelet Applications in Signal and Image Processing VII*, *Proceedings of SPIE 3813*, 1999.
- 65.M.A. Unser, A. Aldroubi, A.F. Laine, Eds., *Mathematical Imaging: Wavelet Applications in Signal and Image Processing IV*, *Proceedings of SPIE 2825*, Part I and II, 1996.
- 66.M.J. Vrhel, M. Unser, "Multichannel Restoration with Limited A Priori Information," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 8, no. 4, pp. 527-536, April 1999.
- 67.Madych, W. R.; Nelson, S. A. Polyharmonic cardinal splines: a minimization property. *J. Approx. Theory* 63 (1990), no. 3, 303--320.
- 68.Mayer, R. J. (Ed.). (1990). *IDEFIII function modeling: A reconstruction of the original Air Force report*. College Station, TX: Knowledge Based Systems, Inc.
- 69.Mayer, R. J., Menzel, C. P, & Mayer, P. S. (1991). *IDEF3: A methodology for process description*, WPAFB, OH: AL/HRGA.
- 70.Mayer, R. J., Menzel, C. P., & deWitte, P. S. (1991). *IDEF3 technical report*. WPAFB, OH: AL/HRGA.

71. Menzel, C. P., & Mayer, R. J. (1990). IDEF3 formalization report. WPAFB, OH: AL/HRGA.
72. Menzel, C., Mayer, R. J., & Edwards, D. (1994). IDEF3 process descriptions and their semantics. In A. Kuziak, & C. Dagli (Eds.), *Intelligent systems in design and manufacturing*. New York: ASME Press.
73. Neuman, E. Quadratic splines and histospline projections. *J. Approx. Theory* 29 (1980), no. 4, 297--304.
74. Odegard J.E., Lang M., Guo H., Gopinath R.A., Burus C.S. Nonlinear wavelet processing for enhancement of images, Submitted to: IEEE SP, 1994. Odegard@rice.edu.
75. P. Blanc, T. Blu, T. Ranchin, L. Wald, R. Aloisi, "Using Iterated Rational Filter Banks Within the ARSIS Concept for Producing 10 m Landsat Multispectral Images," *International Journal of Remote Sensing*, vol. 19, no. 12, pp. 2331-2343, August 1998.
76. P. Brigger, F. Müller, K. Illgner, M. Unser, "Centered Pyramids," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 8, no. 9, pp. 1254-1264, September 1999.
77. P. Brigger, J. Hoeg, M. Unser, "B-Spline Snakes: A Flexible Tool for Parametric Contour Detection," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 9, no. 9, pp. 1484-1496, September 2000.
78. P. Brigger, S.L. Bacharach, G. Srinivasan, K.A. Nour, J.A. Carson, V. Dilsizian, A. Aldroubi, M. Unser, "Segmentation of Gated TI-SPECT Images and Computation of Ejection Fraction: A Different Approach," *Journal of Nuclear Cardiology*, vol. 6, no. 3, pp. 286-297, May-June 1999.
79. P. Thévenaz, T. Blu, M. Unser, "Interpolation Revisited," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 19, no. 7, pp. 739-758, July 2000.
80. P. Thévenaz, M. Unser, "Geometric Aspects in 3D Biomedical Image Processing," *Association suisse de microtechnique (schweizerische Gesellschaft für Mikrotechnik), Bulletin ASMT/SGMT no. 22, Microvision et capteurs optiques, Journées de microtechnique, Lausanne, Switzerland, October 1-2, 1998, pp. 5-10.*

- 81.P. Th̃venaz, M. Unser, "Optimization of Mutual Information for Multiresolution Image Registration," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 9, no. 12, pp. 2083-2099, December 2000.
- 82.P. Th̃venaz, T. Blu and M. Unser, "Image interpolation and resampling," *Handbook of Medical Imaging, Processing and Analysis*, I.N. Bankman, Ed., Academic Press, San Diego Ca, USA, pp. 393-420, 2000.
- 83.P. Th̃venaz, T. Blu, M. Unser, "Interpolation Revisited," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 19, no. 7, pp. 739-758, July 2000.
- 84.P. Th̃venaz, U.E. Ruttimann, M. Unser, "A Pyramid Approach to Subpixel Registration Based on Intensity," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 7, no. 1, pp. 27-41, January 1998.
- 85.Pelinovsky E., Choi H. A mathematical model for nonlinear waves due to moving disturbances in a basin of variable depth //J. Korean Soc. Coastal and Ocean Engn. 1993. V. 5. P. 191-197.
- 86.Rice, John; Rosenblatt, Murray Integrated mean squared error of a smoothing spline. *J. Approx. Theory* 33 (1981), no. 4, 353—369
- 87.Robust Regularized Learning Using Distributed Approximating Functional Networks. Z.Shi, D.S.Zhang, D.J.Kouri, D.K.Hoffman. University of Houston, 1999, zshi@bayou.uh.edu p.4 .
- 88.Russchenberg, H.J.W., Bimodal Doppler spectra from clouds and precipitation. *IEEE Trans. Geoscience and remote sensing*, v. 35, No. 4, May 1997.
- 89.Ruttimann, M. Unser, P. Th̃venaz, C. Lee, D. Rio, D.W. Hommer, "Statistical Analysis of Image Differences by Wavelet Decomposition," *Wavelets in Medicine and Biology*, A. Aldroubi, M.A. Unser, Eds., CRC Press, Boca Raton FL, USA, pp. 115-144, 1996.
- 90.Rutuparna Panda, B.N. Chatterji. B-spline signal processing using harmonic basis function. *Signal Processing* 72(1999) 147-166.
- 91.S. G. Mallat, Multiresolution approximations and orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$, *Trans. Amer. Math. Soc.* 315 (1989), 69-87.

92. S. M. Gomes and E. Cortina and I. M. Moroz (1995), 'Characterisation of Biorthogonal spline wavelets by means of derivatives and primitives'. In `Approx. Theory VIII no. 2: Wavelets and Multilevel Approximation', eds. C.K. Chui and L.L. Schumaker.
93. S. Mallat, A wavelet tour of signal processing. San Diego: Academic Press, 1998.
94. Sablonniere, Paul Positive spline operators and orthogonal splines. *J. Approx. Theory* 52 (1988), no. 1, 28--42.
95. Schempp, Walter Cardinal logarithmic splines and Mellin transform. *J. Approx. Theory* 31 (1981), no. 3, 279--287.
96. Schempp, Walter On cardinal exponential splines of higher order. *J. Approx. Theory* 31 (1981), no. 3, 288--297.
97. Schumaker, Larry L. On hyperbolic splines. *J. Approx. Theory* 38 (1983), no. 2, 144--166.
98. Silitary Waves in the Critical Surface Tension Model. Yi.A.Li, B.Nguyen, P.J.Olver., 1998. <http://www.math.umn.edu/~olver>.
99. T. Blu and M. Unser, "Quantitative Fourier analysis of approximation techniques: Part I—interpolators and projectors," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 10, pp. 2783-2795, 1999.
100. T. Blu and M. Unser, "Quantitative Fourier analysis of approximation techniques: Part II—wavelets," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 10, pp. 2796-2806, 1999.
101. T. Blu, "A New Design Algorithm for Two-Band Orthonormal Rational Filter Banks and Orthonormal Rational Wavelets," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 6, pp. 1494-1504, June 1998.
102. T. Blu, M. Unser, "Approximation Error for Quasi-Interpolators and (Multi-) Wavelet Expansions," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 6, no. 2, pp. 219-251, March 1999.
103. T. Blu, M. Unser, "Wavelets, Fractals, and Radial Basis Functions," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 3, pp. 543-553, March 2002.

104. T. Blu, P. Thévenaz, M. Unser, "Complete Parameterization of Piecewise-Polynomial Interpolation Kernels," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 12, no. 11, pp. 1297-1309, November 2003.
105. T. Blu, P. Thévenaz, M. Unser, "Linear Interpolation Revitalized," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 13, no. 5, pp. 710-719, May 2004.
106. T. Blu, P. Thévenaz, M. Unser, "MOMS: Maximal-Order Interpolation of Minimal Support," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 10, no. 7, pp. 1069-1080, July 2001.
107. Talipova T., Pelinovsky E., Kit E. Numerical simulation of wind waves in the coastal zone //Int. Conf. "Coastal Dynamics'95". Gdansk (Poland), 1995. P. 211-212.
108. Thomas Fuch. (1999). Optimal Smoothing Splines. [Http://www.applied-spectroscopy.com/spline.html](http://www.applied-spectroscopy.com/spline.html).
109. Tunik A.A., Lee S.J., Klim J.C. The Nonlinear State Estimation of the Aircraft Using Adaptive Extended Kalman filter. –*Journal of Control. Automation & System Engineering*. – Seoul. – v.5. – No.2. – Feb. 1999. – pp. 158-165.
110. U.E. Ruttimann, M. Unser, R.R. Rawlings, D. Rio, N.F. Ramsey, V.S. Mattay, D.W. Hommer, J.A. Frank, D.R. Weinberger, "Statistical Analysis of Functional MRI Data in the Wavelet Domain," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 17, no. 2, pp. 142-154, April 1998.
111. V.R. Zschorlich, "Digital filtering of EMG-signals", *Electromyogr. Clin. Neurophysiol.*, Vol.29, pp. 81-86, 1986.
112. W.Sweldens, P.Schroder, Building Your Own Wavelets at Home. <http://cm.bell-labs.com/who/wim/papers/index.html>.
113. W.Sweldens. Wavelets: What Next? <http://cm.bell-labs.com/who/wim/papers/index.html>
114. Xuming He, Pin Ng. Quantile splines with several covariates. *Journal of Statistical Planning and Inference* 75(1999) 343-352.
115. Yanovski F.J., Ligthart L.P., Russchenberg H.W.J., Fomochov V.S., "Comparison of

- Modeled and Measured Doppler-Polarimetric Parameters of Radar Signal Reflected from Rain", (invited), Proc. 2000 International Symposium on Antennas and Propagation (ISAP2000) vol 3, pp 951-955, ISBN 4-88552-171-8 C3055, Fukuoka, Japan, 2000
116. Yanovsky F.J., Russchenberg H.W.J., Ligthart L.P. Doppler and polarization parameters of radar signal from rain IEEE Trans. on GRS, 2001 (in publication)
117. Yanovsky, F.J., H.W.J. Russchenberg, L.P. Ligthart and V.S. Fomichev, Microwave Doppler-Polarimetric Technique for Study of Turbulence in Precipitation. IEEE 2000 International Geoscience and Remote Sensing Symposium. Hilton Hawaiian Village Honolulu, Hawaii, 24-28 July 2000, Volume V, pp. 2296-2298.
118. Z. Shi, Z. Bao, L.C. Jiao, "Nonlinear ECG filtering by group normalized wavelet packets", IEEE International Symposium on Information Theory, Ulm, Germany, 1997.
119. Адаптивные системы сбора и передачи аналоговой информации. Основы теории / А.Н. Дядюнов, Ю.А. Онищенко, А.И. Сенин. - М.: Машиностроение, 1988. - 288 с.
120. Адаптивные фильтры: Пер. с англ. / Под ред. К. Коуэна и П. Гранта. - М.: Мир, 1988. - 392 с.
121. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. - М.: ЮНИТИ, 1998. - 1022 с.
122. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. - М.: Мир, 1972. - 316 с.
123. Алгоритмизация в АСУ / Г. А. Козлик. — Киев : о-во "Знание" УССР, 1980. — 23 с.
124. Аппроксимация с ограничениями / Н. П. Корнейчук, А. А. Лигун, В. Г. Доронин. - Киев : Наук. думка, 1982. - 250 с.
125. Апроксимація функцій дискретного аргументу: Автореф. дис... канд. фіз.- мат. наук: 01.01.01 / Ю.В. Великіна / НАН України. Ін-т математики. — К., 1999. — 15 с.

126. Атлас Д. Успехи радарной метеорологии.- Л.: Гидрометеиздат, 1967.- 198 с.
127. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов.- М.: Мир, 1979. - 536 с.
128. Бабак В. П., Хандецький В. С., Шрюфер Е. Обробка сигналів — К.:Либідь, 1999. — 496с.
129. Бабич М.Д., Задірака В.К.. Питання оптимізації обчислень (1969-2001) (симпозіуми, конференції, школи, семінари) : Наук.-метод. та навч.-організаційні матеріали / НАН України; Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова; Наукова рада НАН України з проблеми "Кібернетика". — К., 2001. — 107с.
130. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана.- М.: Мир, 1988. - 168 с.
131. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. -М.:Высш.шк., 1988 -488с.
132. Безуглов Д.А., Скляр А.В. Алгоритм восстановления волнового фронта на базе двумерных сглаживающих кубических нормализованных В-сплайнов // журнал "Оптика атмосферы и океана" ,том 13, 2000г., № 08, стр.770-774
133. Беляевский Л.С., Новиков В.С., Олянюк П.В. Обработка и отображение радионавигационной информации.- М.: Радио и связь, 1990. - 232 с.
134. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989. - 540с.
135. Березовский А.И., Кондратенко О.С. О выявлении и уточнении априорной информации. УСиМ, №6, Киев, 1997. - С.17-22.
136. Березовский А.И., Кондратенко О.С. До побудови ϵ -наближень функцій однієї змінної. //Теорія обчислень. Зб.наук.праць. –Київ:ІК НАНУ, 1999. С.325-329.
137. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989. - 448 с.
138. Блохін Л.М. Модернизированный многомерный винеровский фильтр // Кибернетика и вычислительная техника. – 2002. – вып. 136. – С. 77-88.
139. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. М.:Высш.школа, 1990. - 544 с.
140. Боревич З.И. Определители и матрицы.- М.: Наука, 1988. 184 с.

141. Бортовые метеонавигационные радиолокаторы // Ф. И. Яновский; Киев. ин-т гражд. авиации им. 60-летия СССР. - Киев : КИИГА, 1987. - 71 с.
142. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. -М.: Наука, 1986. -544 с.
143. В.Ю. Новокшенов."Математические модели в естествознании. Введение в теорию солитонов" Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, 1999 г.
144. Вайсман М.В., Прилуцкий Д.А., Селищев С.В. "Алгоритм синтеза имитационных электрокардиосигналов для испытания цифровых электрокардиографов". Московский Институт Электронной Техники, Москва, Зеленоград, 2000 год <http://www.ecg.ru>
145. Вайсман М.В., Прилуцкий Д.А., Селищев С.В. "Программируемый имитатор электрокардиосигналов". Московский Институт Электронной Техники, Москва, Зеленоград 2000 г. <http://www.ecg.ru>
146. Валях Е. Последовательно-паралельные вычисления.- М.: Мир, 1985. - 456с.
147. Вариабельность сердечного ритма. Стандарты измерения, физиологической интерпретации и клинического использования. Рекомендации. Русский перевод. <http://www.ecg.ru>
148. Василенко В.А. Сплайн-функции:теория, алгоритмы, программы.- Новосибирск: Наука, 1983. - 212 с.
149. Василенко В.А., Зюзин М.В., Ковалков А.В. Сплайн-функции и цифровые фильтры. Под ред. А.С.Алексеева. –Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984. 154с.
150. Введение в вейвлет преобразование. Robi Polikar, Iowa State University /Перевод ГРИБУНИН В.Г. www.autex.spb.ru
151. Введение в цифровую фильтрацию. Под.ред. Р.Богнера, А.Константинидиса. – М.: Мир, 1976. 216с.
152. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.- М.: Физматгиз, 1962. - 564 с.
153. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы.- Киев: Наукова думка, 1986. - 543 с.

154. Вовк И.В., Дахнов С.Л., Крижановский В.В., Олійник В.Н. Возможности и перспективы диагностики легочных патологий с помощью компьютерной регистрации и обработки шумов дыхания // Акуст вісн - 1998 - 1, N 2 - С 3-16
155. Волков Е.А. Численные методы.- М.: Наука, 1987. - 248 с.
156. Вопросы когнитивно-информационной поддержки постановки и решения новых научных проблем : Сб. науч. тр. / НАН Украины; Институт кибернетики им. В.М.Глушкова / А.В. Палагин (отв.ред.). - К., 1995. - 170с.
157. Вычисление функций на ЭВМ : Справочник / Б. А. Попов, Г. С. Теслер. - Киев : Наук. думка, 1984. - 599 с.
158. Горбань И.И. Справочник по теории случайных функций и математической статистике для научных работников и инженеров / НАН Украины; Институт проблем математических машин и систем. - К. : Изд-во Ин-та кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 1998. - 149с.
159. Гримшоу Р., Пелиновский Е. Н. Взаимодействие уединенных поверхностных и внутренних волн с бегущими возмущениями //ДАН. 1995. Т. 344. С. 394-396.
160. Давлет'янц О.І., Коломієць О.В. Стиснення мовних сигналів після дельта та імпульсно-кодової модуляцій // Вісник НАУ. –2000. – с 10-15
161. Данильченко Л.С., Задирака В.К., Кондратенко О.С., Людвиченко В.А., Мельникова С.С. Пакет программ решения задач цифровой обработки сигналов (ЦОС-1) //Кибернетика. – 1992. -№2. С.128-131.
162. Дахнов С. Л. Акустичні властивості респіраторного тракту людини (рукопис).Дисертація на здобуття ученого ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.06 - акустика, Ін-т гідромеханіки НАН України - Київ, 2000.
163. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам.- М.: Радио и связь, 1985. - 304 с.
164. Денисюк В.П., Марченко Б.Г., Шутко Н.А. Применение сплайн функций в задачах статистического анализа информационных сигналов.- Киев: Знание, 1981. - 20 с.

165. Денисюк В.П., Марченко Б.Г. Сплаины и их приложения в задачах моделирования и обработки измерительных сигналов / Национальный технический ун-т Украины "Киевский политехнический ин-т". — К., 1995. — 245с.
166. Денисюк В.П., Марченко Б.Г., Шутко Н.А. Применение эрмитовых сплайнов для восстановления информационных сигналов по дискретным наблюдениям.- Киев: Знание, 1983. - 24 с.
167. Дж Ортега. Введение в паралельные и векторные методы решения линейных систем.- М.:Мир, 1991. - 367 с.
168. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.:РХД, 2001.
169. Довиак Р., Зрнич Д. Доплеровские радиолокаторы и метеорологические наблюдения. Л.: Гидрометеиздат, 1988, 512 с.
170. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. –СПб.:Питер, 2002. –608с.
171. Ерохин В.Ф., Демодуляция конфликтующих цифровых сигналов. / Киевский военный институт управления и связи. –К., 1993. -134с.
172. Завялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.П. Методы сплайн функций.- М.: Наука, 1980. - 352 с.
173. Завялов Ю.С., Леус В.А. Сплаины в инженерной геометрии.- М.:Машиностроение, 1985. - 224 с.
174. Задирака В. К., Иванов В. В. Вопросы оптимизации вычислений : (Числен. интегрирование и дифференцирование). - Киев : о-во "Знание" УССР, 1979. - 29, [5] с.; 20 см. - (Кибернетика / О-во "Знание" УССР).
175. Задирака В.К. Теория вычисления преобразования Фурье. –Киев. Наукова думка. –1983. –215с.
176. Зенков Л.Р., Ронкин М.А. Функциональная диагностика нервных болезней. - М.:Медицина -1991, 640 с.
177. Иванов Г.Г. "Электрокардиография высокого разрешения" , Москва, 1999 год. <http://www.ecg.ru/books/index.html>

178. Игнатов В.А. Теория информации и передачи сигналов.- М.: Радио и связь, 1991. - 280 с.
179. Игнатов В.А., Маньшин Г.Г., Трайнев В.А. Статистическая оптимизация качества функционирования электронных систем.- М.:Энергия, 1974. - 264 с.
180. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений.- М.:Наука, 1988. - 160 с.
181. Икрамов Х.Д. Численные методы для симметричных линейных систем.- М.: Наука, 1988. - 160 с.
182. Ильин В.А., Позняк Э.Г.. Основы математического анализа. Часть 2. М.:Наука, 1973. - 448 с.
183. Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трехдиагональные матрицы и их приложения.- М.: Наука, 1985. - 208 с.
184. Интерполяция и аппроксимация сплайнами: Сб.науч.тр./ Науч.ред.:Ю.С.Завьялов,В.Л.Мирошниченко. -Новосибирск, 1992. -102 с.
185. Исследование динамики социально- экономических систем : Сб. науч. тр. / НАН Украины; Институт кибернетики им. В.М.Глушкова / Н.И. Костина (ред.), Г.А. Козлик (ред.). — К., 1995. — 70с.
186. Иванов В.О. Диаграммы направленности некоторых типов несимметричных излучателей // КМУГА Проблемы моделирования и цифровой обработки сигналов. – К.: КМУГА. – 1999. – с. 64-73
187. Ігнатов В.О. Синтез стаціонарних поліноміальних фільтрів негаусівських сигналів // Вісник НАУ. – К: НАУ. – 2002. – С. 42-52.
188. Ільницький Л.Я. Методика льотної перевірки доопрацьованих курсових радіоприймачів на їх відповідність вимогам ІСАО із завадостійкості. // Вісник НАУ. – 2001. – №4. – с. 138-141
189. Ільницький Л.Я., Применение дробно-рациональных аппроксимаций в теории функциональных преобразователей. -Киев:Наук.думка, 1971, - 244с.
190. Каленанпур Г. Стохастическая теория фильтрации.- М.: Наука, 1987. - 320с.

191. Каплан А.И. Практические занятия по высшей математике. Харьков: Из-во Харьковского университета, 1972. - 412 с.
192. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике.- М.: Наука, 1976. - 568 с.
193. Кобелев В.Ю. - Адаптивное вейвлет-преобразование сигналов. Доклады 3-й Международной Конференции (DSPA-2000). Санкт-Петербург, 2000. //www.autex.spb.ru -5с.
194. Кобелев В.Ю., Ласточкин А.В. Выбор оптимальных вейвлетов для обработки сигналов и изображений. // докл. 2-й международной конф. и выставки "Цифровая обработка сигналов и ее применения" (DSPA'99). Москва, 1999. Т.2. с.514-518.
195. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М.:Высшая школа, 1973. - 368 с.
196. Колобов А.Г. Метод сплайн-коллокации для решения уравнения вихря в динамике океана: Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд.физ.-мат.наук:01.01.07. -Новосибирск, 1991. -12 с
197. Колтун В.М., Трусков Ю.С. Портативный прибор для измерения характеристик электрокардиографов. Медицинская техника, №4, 1989.-М:Медицина, ст.55-58.
198. Компьютерные методы в задачах прикладной математики и механики: Сб. науч. тр. / НАН Украины. Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова / Ред.: В.И. Моссаковский. — К., 1998. — 126 с. — рус.
199. Корн Г.,Корн Т. Справочник по математике.- М.: Наука, 1973. - 832 с.
200. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения.- М.: Наука, 1984. - 352с.
201. Корнильев Э.А., Прокопенко И.Г. Устойчивые алгоритмы обработки сигналов в информационных системах.- Киев: Техніка, 1989. - 224 с.
202. Кошовий А.А., Вагущенко Л.Л. Особенности обработки данных в судовых радиолокационных станциях. // ОБМА. – Одесса, - 1998. – 86 с.
203. Кузьмин С.З. Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации.- М.: Сов.радио, 1974. - 432 с.

204. Кузьмин С.З. Цифровая радиолокация, введение в теорию. -Киев: и-во "ВВіЦ", 2000. -426 с.
205. Кульбак С. Теория информации и статистика.- М.: Наука, 1967. - 408 с.
206. Кунченко Ю.П. Метод максимизации полинома и его применение в радиотехнике. // Радіоелектроніка і інформатика, №2 – Харків - 2000 – с.14-23
207. Купер Дж., Макгиллем К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем.- М.: Мир, 1989. - 376 с.
208. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая.- М.: Сов.радио, 1974. - 552 с.
209. Лившиц К.И. Сглаживание экспериментальных данных сплайнами/ Лившиц К.И.; Под ред.А.Ф.Терпугова. -Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. -180с.
210. Лигун А. А., Шумейко А. А. Асимптотические методы восстановления кривых. — К., 1997. - 358с.
211. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений.- М.: Физматгиз, 1962. - 352 с.
212. Логинов В.М. Солитоны и диагностика случайных шумовом // журнал "Оптика атмосферы и океана", том 8, 1995 год Институт Оптики Атмосферы СО РАН, стр.484.
213. Лоуссон, Хенсон. Численное решение задач метода наименьших квадратов.- М.:Мир, 1988. - 225 с.
214. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.:Наука, 1991. - 432 с.
215. Маликов В.Т, Кветный Р.Н. Вычислительные методы и применение ЭВМ.- Киев: Вища школа, 1989. - 213 с.
216. Марпл.-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. - М.:Мир,1990. -584 с.
217. Математика и САПР / Жермен-Лакур П., и др.- М.: Мир, 1989 264 с.

218. Математичне моделювання ходи людини на основі оптимізації керованих процесів біодинамічних систем / В.Є. Бербюк, Б.А. Литвин // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 1998. — 41, N 3. — С. 153-161. — укр.
219. Медведев В.П. Алгоритмы обработки сигналов в адаптивных системах спутниковой навигации // *Зб. праць НАУ - К.: НАУ – 2003 – с. 18-21*
220. Метод фрактальной классификации сложных сигналов. Ю.Н.Кликушин. // *"Журнал радиоэлектроники" № 4 , 2000.*
221. Методи розв'язку рівнянь теорії нелінійних коливань /В.І.Зінченко /Дніпродзерж. держ. техн. ун-т. — К., 1999. — 123 с.
222. Методи та алгоритми виявлення-вимірювання інформаційних сигналів із застосуванням сплайн-перетворень: Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.13.06 /В.М. Шутко / Київ. міжнар. ун-т цив. авіації. — К., 1998. — 20 с. — укр.
223. Методы и алгоритмы оптимизации программного и технического обеспечения АСУ промышленного назначения : Сб. науч. тр. / Киев. ин-т автоматики; Под ред. Г. А. Козлика. — Киев : КИА, 1990. — 156 с.
224. Методы и средства повышения достоверности обработки измерительной информации и контроля параметров радиоэлектронных систем управления воздушным движением: Автореф. дис. докт. техн. наук: 05.22.14 / Н.А.Шутко / Киевский институт инженеров гражданской авиации — К.,1991. — 30 с.
225. Методы сплайн-функций,сибирская конф.(2001;Новосибирск). Сибирская конференция "Методы сплайн-функций", посвященная памяти Ю.С.Завьялова (1931-1998): Тез. докл., Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2001. -80 с.: ил..
226. Моделирование на цифровых, аналоговых и гибридных ЭВМ. Ажогин В.В., Згуровский М.З. –Киев: Вища школа, 1983. –280с.
227. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач.- М.: Наука, 1987. - 240 с.
228. Мохамад Абдулбаки Ибрагим Применение сплайн-функции при реконструкции автомобильных дорог в условиях САР: Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд.техн.наук:05.23.11. -М., 1994. -20 с.

229. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль.- Томск: МП"Раско", 1991.- 272 с.
230. Мюррей Д., У.ван Райнер. Энциклопедия форматов графических файлов. - К.:ВНУ,1997. -678 с.
231. Натуральные сплайны многих переменных/ Игнатов М.И., Певный А.Б.; Отв.ред.В.Н.Прохоров. -Л.: Наука, 1991. -125 с.: ил..
232. Начала математического моделирования: Спец. курс "Стационар. и нестационар. задачи теории колебаний" для студ. техн. вузов. Ч. 2 / Т.В. Крылова. — К.: Выща школа, 1998. — 177 с. — Библиогр.: 98 назв. — рус.
233. Некорректные задачи естествознания / под ред. А.Н.Тихонова, А.В.Гончарского.- М.: Из-во Московского университета, 1987. 299 с.
234. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений.- Л.:Энергоатомиздат, 1991. - 304 с.
235. Новіков В.С. Повышение качества идентификации состояния сложных систем. // Проблемы информатизации и управления – Киев - 2002 – с. 47-56.
236. Ньюэлл А. Солитоны в физике и математике -М.:Мир 1987.
237. О реализации сглаживающих полиномиальных сплайнов методом матричной прогонки/ Смелов В.В., Кучинский К.И.. -Новосибирск, 1996. -14с.
238. Одинец Г.С. Алгоритм автоматизированной обработки реосигналов. Медицинская техника, №2, 1988.-М:Медицина, ст.29-32.
239. Оптимизация обработки информации в системах управления / Г. А. Козлик, Ю. В. Бондарь, И. А. Кириллов. — Киев : Техника, 1989. — 156
240. Основные конструкции всплесков. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Фундаментальная и прикладная математика. 1997. 3.4. с.999-1028.
241. Основы теории всплесков. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. - Успехи математических наук, 1996. 87с.
242. П л о т н и к о в В. А., П р и л у ц к и й Д. А., С е л и щ е в С. В. "Стандарт SCP-ECG в программных системах для электрокардиографии". Московский Институт Электронной Техники, Москва, Зеленоград, 1999 г. <http://www.ecg.ru>

243. Параллельные вычисления / под ред. Г.Родрига. М.: Наука, 1986. - 376 с.
244. Пелиновский Е. Н., Талипова Т. Г., Степанянц Ю. А. Моделирование распространения нелинейной внутренней волны в горизонтально неоднородном океане //Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1994. Т. 30. С. 79-85.
245. Петренко П. А., Теслер Г. С. Обработка данных в вычислительных системах и сетях. - Киев : Техніка, 1980. - 232 с.
246. Плотников А.В. Волновое преобразование (wavelet) в электрокардиографии. Секция 9. Компьютерные системы сбора и математической обработки ЭКГ информации. Международный симпозиум КОМПЬЮТЕРНАЯ ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАФИЯ НА РУБЕЖЕ СТОЛЕТИЙ, Россия, Москва 27 - 30 апреля 1999 г. <http://www.ecg.ru>
247. Плотников А.В., Прилуцкий Д.А., Селищев С.В. Стандарт DICOM в компьютерных медицинских технологиях./ Москва: "Медицинская техника", 1997, №2, с.18–24.
248. Побудова кусково-гладких наближених розв'язків жорсткої задачі Коші / В.С.Абрамчук, І.В.Абрамчук // Вісн. Вінниц. політехн. ін-ту. — 1998. — N 3. — С. 69-72. — укр.
249. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами.- Киев:Наук.думка, 1989. - 372 с.
250. Попов Я. Б. Математичне моделювання первинних перетворювачів фізичних величин на основі апроксимаційних методів : Автореф. дис. канд. техн. наук (01.05.02) / Державний ун-т "Львівська політехніка". - Л., 1998. - 18с.
251. Построение автоматизированных систем обработки экспериментальных данных : [Сб. статей] / АН УССР, Науч. совет по пробл. "Кибернетика", Ин-т кибернетики; [Редкол.: Г. С. Теслер (отв. ред.) и др.]. - Киев : ИК, 1981. - 73 с.
252. Потемкин В.Г. Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.x: - В 2-х т. Том 1. -М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999 - 366 с.
253. Потемкин В.Г. Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.x: - В 2-х т. Том 2. -М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999 - 304 с.

254. Представлення функцій у системах керування / Б.О. Попов // Косм. наука і технологія. — 1998. — 4, N 4. — С. 151-155. — укр.
255. Приближение функций для технических приложений / Б. А. Попов, Г. С. Теслер. - Киев : Наук. думка, 1980. - 350 с.
256. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности: С.А.Айвазян и др.- М.: Финансы и статистика, 1989. - 607 с.
257. Применение цифровой обработки сигналов. Под.ред.Э.Оппенгейма. –М.: Мир, 1980. 550с.
258. Приставка А.Ф., Райко О.В. Гистослайны. -Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1991. -136 с.
259. Про побудову і застосування тензорних ермітових сплайнів у теорії пружності твердих тіл / О.І. Хвищун // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1998. N4. — С. 150-154. — укр.
260. Прокопенко І.Г. Методи і засоби обробки сигналів: оцінювання, виявлення, фільтрація // К.: Видавництво НАУ – 2003 – 200 с.
261. Пронин А.И. Применение динамического программирования и решение уравнения Беллмана с помощью сплайнов полуограниченной кривизны: Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд.физ.-мат.наук:01.01.11. -М., 1993. -11 с
262. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. - М.:Мир, 1978. - 848 с.
263. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение.- М.:Мир, 1984. - 264 с.
264. Розв'язування крайової задачі для нелінійних диференціальних рівнянь нейтрального типу методом сплайн-функцій / І.М. Черевко, Н.П. Настасьєва // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. — 1998. — Вип.3. - С. 156-165. — укр.
265. Розробка інформаційних технологій оперативного аналізу і прогнозування параметрів моніторингу складних систем: Автореф. дис... канд. техн. наук:

- 05.13.06 / Б.Є. Неділько / Київ. міжнар. ун-т цив. авіації. — К., 1999. — 18 с. — укр.
266. Розробка інформаційної технології нелінійної робастної сплайн-обробки даних в системі моніторингу: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.13.06 /В.М.Остропицький / Київ. міжнар. ун-т цив. авіації. — К., 1999. — 17 с. — укр.
267. Роль векторкардиографии в ранней диагностике гипертрофии левого желудочка у больных гипертонической болезнью Маколкин В.И., Подзолков В.И., Самойленко В.В., Хасбулатова С.Р., Буфарах М.С. Московская медицинская Академия им. И.М. Сеченова. Кафедра внутренних болезней №1 лечебного факультета, Москва. http://www.ecg.ru/conf/simp_xxi/text/s2t04.htm
268. Рудаков П.И., Сафонов И.В., Обработка сигналов и изображений. MATLAB 5.x. -М.:ДИАЛОГ-МИФИ, 2000. -416с.
269. Русаков С.В. Разностные сплайн-схемы и их приложения: Автореферат диссертации на соискание ученой степени д-ра физ.-мат.наук:01.01.07. -М., 1992. -32 с.: ил. - В надзаг.: МГУ им.М.В.Ломоносова.
270. Рыбалка С.А. Математическое и программное обеспечение генерирования векторных сплайн-изображений с оценкой качества в метрике Хаусдорфа: Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн. науке: 05.13.11. -Томск, 1997. -22 с.. - Библиогр.:с. 22(7 назв.)
271. Сабоннадьер Ж.К. Кулон Ж.Л. Метод конечных элементов и САПР.- М.:Мир, 1989. - 190 с.
272. Сейдж Э., Мелса Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
273. Сейсмическая томография. С приложениями в глобальной сейсмологии и разведочной геофизике / под ред. Г.Нолета.- М.:Мир, 1990. - 416 с.
274. Синеглазов В.М., Мельниченко А.В. Використання багатокритеріальної оптимізації в задачі проектування ліній зв'язку повітряних суден // Вісник КМУЦА. – 1999 – №2. – с.42-51

275. Сібрук Л.В., Алексеев В.М., Харченко В.П. Вплив стохастичних збурень на якість функціонування систем посадки повітряних кораблів // Вісник НАУ. – 2001. – №8. – с. 82-86
276. Сібрук Л.В., Ільницький Л.Я., Савченко О.Я. Антени та пристрої надвисоких частот – К.: Укртелеком, 2003. – 496 с.
277. Слепов Н. Солитонные сети // “СЕТИ” №03, 1999 И-во “Открытые системы”.
278. Смеркло Л.М. Принципи побудови основних компонентів САПР для потужних МОН ПТ // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”, серія Радіoeлектроніка та телекомунікації, №443 – 2002 – с.91-99.
279. Свенсон А.Н., Руденко В.В., Тынная Н.Т. Системы дискретной передачи квазистационарного сигнала. –Киев: Наук.думка, 1974. -128с.
280. Соколова И.В. Система автоматизированной диагностической оценки функционального состояния сосудов головного мозга по реоэнцефалограмме. Медицинская техника, №2, 1986.-М:Медицина, ст.9-13.
281. Сплайн-аппроксимация бианалитических функций равномерно внутри квазикруга / Е.Ю. Орфиняк // Доп. НАН України. — 1999. — N 1. — С. 40-43. — рус.
282. Сплайн-идентификация в обратных задачах теплопроводности / Е.Н. Бут // Электрон. моделирование. — 1999. — 21, N 2. — С. 86-95. — рус.
283. Сплайн-інтерполяція загальними експоненціальними функціями багатьох змінних / І.В. Абрамчук // Вісн. Вінниц. політехн. ін-ту. — 1998. — N 4. — С.96-100. — укр.
284. Сплайн-обробка вимірювальної інформації та її застосування в задачах ідентифікації технічних систем: Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.13.06 /В.В.Турчак / Київ. міжнар. ун-т цив. авіації. — К., 1998. — 20 с. — укр.
285. Сплайн-функции и их приложения: Сб. науч.тр./ Науч.ред.:Ю.С.Завьялов, В.Л.Мирошниченко. -Новосибирск, 1997. -228 с.
286. Справочник по прикладной статистике. В 2-х т. Т1./ под ред. Э.Ллойда и др.- М.:Финансы и статистика, 1989. - 510 с.

287. Справочник по прикладной статистике. В 2-х т. Т2./ под ред. Э.Ллойда и др.- М.:Финансы и статистика, 1989. - 526 с.
288. Степаненко В.Д. Радиолокация в метеорологии. Л.: Гидрометеиздат, 1973, 344 с.
289. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике.- М.:Наука, 1976. - 248 с.
290. Стратонович Р.Л. Принципы адаптивного приема. –М.: Сов.радио, 1973. - 144с.
291. Теория и практика вейвлет-преобразования. ВОРОБЬЕВ В.И., ГРИБУНИН В.Г. ВУС, Типография ВУС, СПб.,1999. С.204.
292. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач.- М.: Наука, 1990. 232 с.
293. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника.- М.:Радио и связь, 1982. - 624с.
294. Ткачева О.Е. Разработка и исследование свойств метода обработки экспериментальных данных усреднением аппроксимирующих сплайнов: Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд.техн.наук: 05.13.16. -Л., 1991. -16 с. - В надзаг.: Ленингр.электротехн.ин-т им.В.И.Ульянова(Ленина).
295. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов: -М.:Радио и связь, 1989.- 440 с.
296. Фабриков А.В., Алдошина О.И., Мамаева А.В. Оценивание времен запаздывания сигналов методом адаптивной фильтрации с применением сглаживающих сплайнов// журнал "Оптика атмосферы и океана" том 8, 1995г., № 08, стр.1213
297. Фабрічев В.А. Питання побудови уніфікованого комплексу технічних та програмних засобів для створення автоматизованих систем управління // Зб. наук. праць “Сучасні засоби комп’ютерних технологій” – К.: Вид. НАНУ Інститут кібернетики – 2001 – с.58-64.
298. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. - М.:Наука, 1972. - 400с.

299. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ.- М.:Мир, 1989. 655 с.
300. Храисат Я.С.Х., Яновський Ф.Й. Зв'язок інтервалу кореляції обвідної ехо-сигналу з інтенсивністю турбулентності у відбивному об'ємі. Проблеми інформації і управління. Збірник наукових праць, вип. 3, Київ: КМУЦА, 1998, с. 296-299.
301. Цифровая обработка сигналов: Справочник / Гольденберг Л.М. и др.- М.:Радио и связь, 1985. - 312с.
302. Цифровая обработка сигналов. Задирака В.К., Мельникова С.С. Киев:Наукова думка, 1993. С.294
303. Чжоу Гуйхуа Применение методов интерполяции и сплайн-аппроксимации для синтеза субоптимальных стратегий стабилизации движения летательных аппаратов: Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд.физ.-мат.наук:01.01.11. -М., 1994. -18 с.: ил. - В надзаг.: Моск.гос.авиационн-т (техн.ун-т),МАИ.
304. Численные методы. Н.Н.Калиткин. -М.:Наука, 1978. 512 с.
305. Чуи Ч. Введение в вэйлеты. М.:Мир, 2001. С.412.
306. Шагхильдян В.В., Лохвицкий М.С. Методы адаптивного приема сигналов. – М.: Связь, 1974. 159с.
307. Штейнберг Ш.Е. Идентификация в системах управления.- М.:Энергоатомиздат, 1987. -80с.
308. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975.
309. Эффективные алгоритмы и программы решения некоторых задач цифровой обработки сигналов для микроЭВМ / В. К. Задирака, Н. А. Маслова. — Киев : ИК, 1990. — 27 с.
310. Яновский Ф.И. Моделирование процессов взаимодействия радиолокационного сигнала с турбулизированным метеорологическим объектом. Вісник КМУЦА, вип.1,1998, с. 125-136.

311. Белецкий А.Я., Шелевицкий И.В., Шутко В.Н.. Спектральный анализ сверхмалых выборок наблюдений. Защита информации (сборник научных трудов), КМУГА, Киев, 1998.
312. Білецький А.Я., Матіборський В.В., Сенін А.О., Шелевицький І.В., Шутко В.М.. Побудова квазіортогональних сплайнових базисів з неперервною першою похідною. Вісник центрального наукового центру транспортної Академії України. Вип.2, травень 1999, Київ.
313. Білецький А.Я., Матіборський В.В., Шелевицький І.В., Шутко В.М. побудова ермітових сплайнових базисів у лагранжівій формі. Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій: збірник наукових праць. Том 2. - Дніпропетровськ. -“Навчальна книга”, 1999
314. Білецький А.Я., Шелевицький І.В., Шутко В.М. Наближення залежностей за допомогою дискретних сплайнових базисів. Вісник КМУЦА (№1, 1999), Київ. с.85-89.
315. Білецький А.Я., Шелевицький І.В., Шутко В.М. Рекурентний сплайн-метод спектрального оцінювання. Вісник КМУЦА (№2, 1999), Київ. с.138-141.
316. Білецький А.Я., Шелевицький І.В., Шутко В.М., Юрко Ю.В. Адаптивна обробка геохімічних аналізів з допомогою сплайнової моделі. Вісник КМУЦА (№1-2, 2000), Київ. с.89-93.
317. Білецький А.Я., Шелевицький І.В., Шутко В.М., Юрко Ю.В. Побудова тривимірних ермітових інтерполяційних сплайнів. // Вісник НАУ. –К.:НАУ, 2001, №1(8). – с.150-153.
318. Білецький А.Я., Шелевицький І.В., Шутко В.М.. Приведення сплайнових базисів до лагранжівіої форми. Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій: збірник наукових праць. Том 4. - Дніпропетровськ. - “Навчальна книга”, 2000.
319. Бойко И.Ф., Шутко В.Н., Шелевицкий И.В., Турчак В.В.. Метод и алгоритм оптимальной фильтрации потока измерительной информации в реальном

времени. Проблемы моделирования и цифровой обработки сигналов: Сборник научных трудов.-Киев:КМУГА, 1996. (стр.125-136).

320. Доровской В.А., Миначева А.В., Сенин А.А., Шелевицкий И.В. Анализ данных в экспертных системах антикризисного управления // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій: збірник наукових праць. - Том 3. - Дніпропетровськ. - “Навчальна книга”, 2000.- С.45-54.
321. Доровской В.А., Шелевицкий И.В. Моделирование дихотомических тестов. Придніпровський науковий вісник. (№131, 1998), Дніпропетровськ. с.14-24.
322. Доровской В.А., Шелевицкий И.В. Оперативный сплайн прогноз валютных курсов. Придніпровський науковий вісник. (№129, 1998), Дніпропетровськ. с.2-9.
323. Доровской В.А., Шелевицкий И.В. Прогнозирование кризисного состояния эргатических систем. Придніпровський науковий вісник. (№123, 1998), Дніпропетровськ. с.72-83.
324. Сенін А.О., Сольонов В.І., Шелевицький І.В., Шутко В.М.. Рекуррентний сегментний сплайн-метод спектрального оцінювання. Защита информации (сборник научных трудов), КМУГА, Киев,1999.
325. Сенін А.О., Сольонов В.І., Шелевицький І.В., Юрко Ю.В. Сплайнова модель релаксаційного генератора. Вісник центрального наукового центру транспортної Академії України. Вип.2, травень 1999, Київ.
326. Турчак В.В., Шелевицкий И.В., Шутко Н.А.. Приближение функции двух переменных с помощью двумерных кубических сплайнов. Проблеми авіоніки. Збірник наукових праць. КМУЦА, Київ, 1997.(ст.131-135).
327. Турчак В.В., Шелевицький І.В., Шутко В.М. Необмежені сплайни в задачах фільтрації та стиснення даних Вісник КМУЦА (№1, 1998), Київ. С.275-279.
328. Шелевицкий И.В. Метод адаптивного сжатия данных с помощью сплайнов. Защита информации (сборник научных трудов), КМУГА, Киев,1998.
329. Шелевицкий И.В.. Рекуррентный алгоритм построения сплайнов методом наименьших квадратов. Статистические методы обработки сигналов в

авиационных радиоэлектронных системах: Сборник научных трудов. - Киев:КМУГА, 1995.

330. Шелевицький І.В. Ефективність оцінок методу найменших квадратів для сплайнової моделі. // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій: збірник наукових праць. - Том 1. - Дніпропетровськ. - “Навчальна книга”, 1999.- С.129-135
331. Шелевицький І.В., Шутко В.М. Вибір сплайнових базисів у задачах оптимальної лінійної фільтрації. Захист інформації. (№2, 2000), Київ. с.40-44.
332. Шелевицький І.В. Побудова цифрового сплайн-інтерполяційного фільтра. // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій: збірник наукових праць. - Том 5. - Дніпропетровськ. - “Видавництво ДНУ”, 2001.- С.24-30.
333. Шелевицький І.В., Шутко В.М., Ткаченко Є.В. Сплайнові базиси в задачах стиснення числових даних. Вісник КМУЦА (№7, 2000), Київ. (ст.119-124).
334. Шелевицький І.В., Шутко В.М., Юрко Ю.В. Базисні сплайни та їх зв'язок із законами розподілу. Захист інформації. (№1, 2000), Київ. с.28-32.
335. Шелевицький І.В., Шутко В.М.. Швидкий алгоритм оптимальної сплайн-фільтрації даних. Проблеми авіоніки. Збірник наукових праць. КМУЦА, Київ, 1997.(ст.136-143).
336. Шелевицький І.В. Сплайновий характер інтерполяційних фільтрів. Защита информации (сборник научных трудов), КМУГА, Киев,1999.
337. В.О.Касьянов, В.М.Шутко, І.В.Шелевицький. Сплайн-апроксимація аналітично зв'язаних часових послідовностей. Вісник НАУ №4, Київ, НАУ, 2001. с 117-120.
338. Білецький А.Я., Рашевський М.О., Шелевицький І.В., Шутко В.М. Умови неперервності двох похідних в сплайнових безисах, отриманих згорткою. – „Вісник НАУ” №2(9). –К.:НАУ, 2001. –с.177-181.

339. Шелевицький І.В. Методи та засоби сплайн-технології обробки сигналів складної форми. /Під ред. Шутка М.О. –Кривий Ріг: Європейський університет, 2002 р. -304 с.
340. Робастний частотно-часовий аналіз з допомогою методу найменших квадратів та сплайнів. М.О.Шутко, І.В.Шелевицький, Ю.В.Юрко. Матеріали V Міжнародної науково-технічної конференції „АВІА-2003”. Том.1.Інформаційно-діагностичні системи. Київ: НАУ. 2003 р. С.13.67-13.70.
341. Сплайни в частотній області і вейвлети: зв'язок і застосування. І.В.Шелевицький, В.М.Шутко, В.Й.Лукашенко, В.І.Сольонов. Матеріали V Міжнародної науково-технічної конференції „АВІА-2003”. Том1.Інформаційно-діагностичні системи. Київ: НАУ. 2003 р. С.13.28-13.30.
342. Шелевицкий И.В. Интерполяционные сплайны в задачах цифровой обработки сигналов. // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2003. -№4 –С. 42 -53.
343. Синтез сплайнів із заданими частотними властивостями. І.В.Шелевицький, Ю.В.Юрко. Матеріали Міждержавної науково-методичної конференції „Проблеми математичного моделювання”. Дніпродзержинськ, ДДТУ. 2003.
344. Швидкі алгоритми і пристрої для частотно-часового розкладу сигналів з допомогою сплайнів і методу найменших квадратів. І.В.Шелевицький, В.М.Шутко, А.П.Нікітін, В.І.Сольонов. Матеріали VI Міжнародної науково-технічної конференції „АВІА-2004”. Том 2. Аерокосмічні системи моніторингу та керування. Київ: НАУ. 2004 р. С.22.16 4.с.
345. Адаптивні сплайн-фільтри в обробці сигналів складної форми. І.В.Шелевицький. Матеріали Міждержавної науково-методичної конференції „Проблеми математичного моделювання”. Дніпродзержинськ, ДДТУ. 2004. с.26-27.

ДОДАТКИ

Додатки містять найбільш важливі фрагменти реалізацій розрахунків сплайнів. Повний пакет програм можна отримати через електронну пошту, звернувшись за адресою Shelev@yahoo.com.

Додаток А. Реалізація розрахунків сплайнових базисів в системі MathCad на прикладі кубічного сплайна.

Додаток Б. Розрахунок ермітової форми базисного сплайна в системі MathCad

Додаток В. Розрахунок лагранжівної форми базисного сплайна в системі MathCad

Додаток Д. Програми для оцінки спектральної функції з оптимізацією сітки вузлів та програма послідовної побудови сплайна на сітці вузлів близькій до оптимальної.

Додаток Е. Програми МНК сплайн-фільтрів.

Побудова алгебраїчних сплайнових базисів

Представлені нижче розрахунки демонструють побудову сплайнових базисів з алгебраїчних породжуючих функцій. Основна вимога до породжуючих функцій: симетричність та локальність. Базисний сплайн отримуємо, як лінійну згортку породжуючої функції та прямокутного вікна ідентичної ширини та як згортку двох ідентичних породжуючих функцій. Результуючий сплайновий базис складається з чотирьох фрагментів і в першому випадку має гарантовано неперервність першої, а в другому першої та другої похідних. В розрахунках інтеграли замінено відповідними сумами. Слід також мати на увазі, що розрахунки інтегралів, що зустрічаються нижче є числовими. Породжуючі функції легко замінити іншими. Проте в розрахунках потрібно буде виконати деяку ручну правку. Відповідні помітки про це є в документі.

$N := 100$ число дискретних відліків на фрагменті сплайна

$f1(x) := x$ $f2(x) := (2 - x)$ алгебраїчні функції, що формують сплайн

$g1(x) := 1$ $g2(x) := 1$ прямокутне часове вікно

Підготовка числової послідовності до лінійної згортки

$i := 0..N$ $j := 0..4 \cdot N - 1$ $f(x) := \text{if}(x > 0, \text{if}(x \leq 1, f1(x), \text{if}(x \leq 2, f2(x), 0)), 0)$

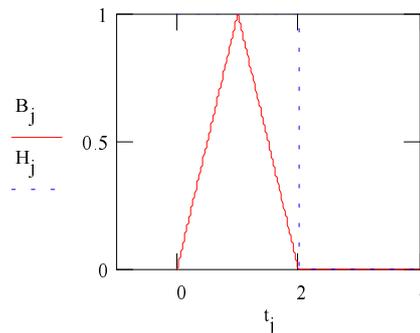
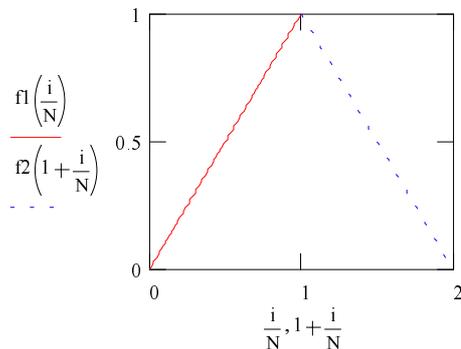
$t_j := \frac{j}{N}$ $B_j := f(t_j)$ алгебраїчна породжуюча функція

$h(x) := \text{if}(x \geq 0, \text{if}(x \leq 1, g1(x), \text{if}(x \leq 2, g2(x), 0)), 0)$

$H_j := h(t_j)$ прямокутне вікно

алгебраїчна породжуюча функція

алгебраїчна породжуюча функція та прямокутне вікно



Дискретна лінійна згортка для побудови сплайнових базисів з породжуючих функцій

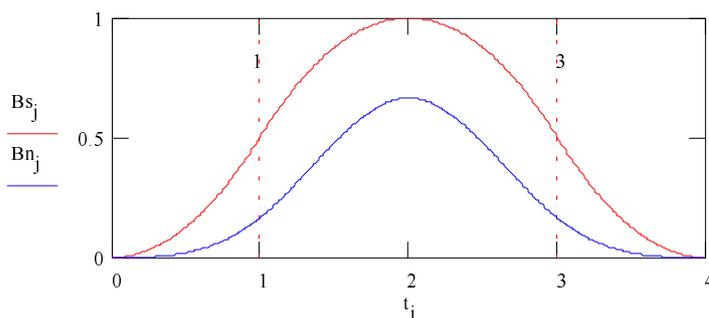
$$B1(n) := \sum_{k=0}^n B_{(n-k)} \cdot H_k$$

$$B2(n) := \sum_{k=0}^n B_{(n-k)} \cdot B_k$$

формування базисних сплайнів

$$Bs_j := \frac{B1(j)}{N}$$

$$Bn_j := \frac{B2(j)}{N}$$



вигляд сформованих базисних сплайнів

Аналітичні вирази для фрагментів сплайна отримуємо з допомогою системи символьних обчислень. При зміні породжуючих функцій підінтегральні вирази та в лівій частині аналітичних виводів слід замінити вручну. Якщо інтеграл не розраховується потрібно звернутись до повної системи аналітичної алгебри Maple, знайти інтеграл самостійно, або обійтись без аналітичних виразів, наявність яких в подальших викладах не є обов'язковим.

Базис експонента-прямокутне вікно: Bs

перший лівий фрагмент на відрізку 0,1

$$\int_0^x t dt \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot x^2$$

другий лівий фрагмент на відрізку 1,2

$$\int_0^1 t dt + \int_1^x (2-t) dt \Rightarrow -1 + 2 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2$$

Задаємо функції для розрахунків

$$F1(x) := \frac{x^2}{2}$$

$$F2(x) := 2 \cdot x - \frac{x^2}{2} - 1$$

з умов симетрії

$$F4(x) := \frac{(4-x)^2}{2}$$

$$F3(x) := 2 \cdot (4-x) - \frac{(4-x)^2}{2} - 1$$

Повний вираз для базису

$$Hs(x) := \text{if}(x < 0, 0, \text{if}(x < 1, F1(x), \text{if}(x < 2, F2(x), \text{if}(x < 3, F3(x), \text{if}(x < 4, F4(x), 0))))))$$

Аналітичні вирази для похідних базису
перша похідна

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Rightarrow x$$

$$\frac{d}{dx} (x) \Rightarrow 1$$

$$\frac{d}{dx} \left[2 \cdot (4-x) - \frac{(4-x)^2}{2} - 1 \right] \Rightarrow 2-x$$

$$\frac{d}{dx} (2-x) \Rightarrow -2$$

друга похідна

$$\frac{d}{dx} \left(2 \cdot x - \frac{x^2}{2} - 1 \right) \Rightarrow 2-x$$

$$\frac{d}{dx} (2-x) \Rightarrow -1$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{(4-x)^2}{2} \right] \Rightarrow -4+x$$

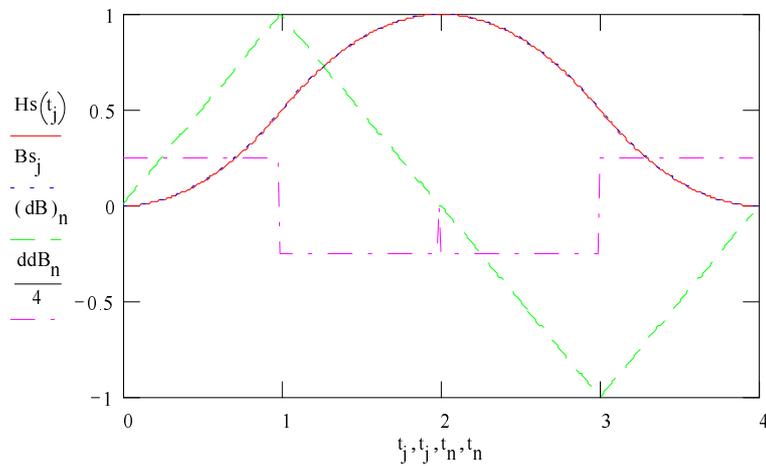
$$\frac{d}{dx} (x-4) \Rightarrow 1$$

Чисельне визначення похідних знайдемо також через розділені різниці. Легко пересвідчитись в неперервності першої похідної і розривності другої. Цілком очевидно, що перша похідна є симетричною копією породжуючої функції. Друга похідна є розривною, оскільки до цього призводить симетричність породжуючої функції. Зліва вона є зростаючою, а справа спадаючою. На графіку вона зменшена. На графіку показані аналітичні і числові значення для базису, щоб порівняти їх. Для аналітичних виразів похідних легко побудувати відповідні графіки записавши загальний вираз аналогічно Hs для базису. Проте зважаючи на простоту функцій з графіків легко пересвідчитись, що аналітика та числовий результат співпадають. Зверніть увагу на характерну особливість базисів отриманих згортокою з прямокутним вікном. Значення в середині базису (точка 2) рівне подвоєному значенню в сусідніх точках стику (точки 1 та 3). $Bs(3)=2 \cdot Bs(1)=2 \cdot Bs(3)$. Це слідує з виразів для фрагментів.

$$k := 0 .. 4 \cdot N - 2$$

$$n := 0 .. 4 \cdot N - 4$$

$$dB_k := N \cdot (Bs_{k+1} - Bs_k) \quad ddB_n := N \cdot (dB_{n+1} - dB_n)$$



вигляд
сформованого
базисного
сплайна Bs та
його двох
похідних

Базис трикутник-трикутник: Bn

перший лівий фрагмент на відріжку 0,1

$$\int_0^x (t) \cdot (x-t) dt \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot x^3$$

другий лівий фрагмент на відріжку 1,2

$$\int_{x-1}^1 (t) \cdot (x-t) dt \Rightarrow \frac{-2}{3} + x - \frac{1}{6} \cdot x^3$$

$$U1(x) := \frac{-2}{3} + x - \frac{1}{6} \cdot x^3$$

$$\int_1^x (2-t) \cdot (x-t) dt \Rightarrow \frac{-1}{6} \cdot x^3 + x^2 + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \cdot x$$

$$U2(x) := \frac{-1}{6} \cdot x^3 + x^2 + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \cdot x$$

$$2 \cdot \left(\frac{-1}{6} \cdot x^3 + x^2 + \frac{2}{3} \right) - \frac{6}{2} \cdot x + \left(\frac{-2}{3} + x - \frac{1}{6} \cdot x^3 \right) \Rightarrow \frac{-1}{2} \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + \frac{2}{3} - 2 \cdot x$$

Вирази для фрагментів даного базису є значно складнішими і при друкуванні не входять повністю в сторінку. Тому потрібне певне редагування тексту, обо частина формул залишаться не надрукованою. Проте при наявності пакету Mathcad це не так суттєво. Складність аналітичних виразів є вагомим аргументом для застосування саме дискретного варіанту розрахунків. Аналітичні вирази включені для загальності викладу, а також для порівняння аналітичних і дискретних результатів.

Задаємо функції для розрахунків

$$F1n(x) := \left(\frac{1}{6} \cdot x^3\right)$$

$$F2n(x) := \frac{-1}{2} \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + \frac{2}{3} - 2 \cdot x$$

з умов симетрії

$$F3n(x) := F2n(4 - x)$$

$$F4n(x) := F1n(4 - x)$$

Повний вираз для базису

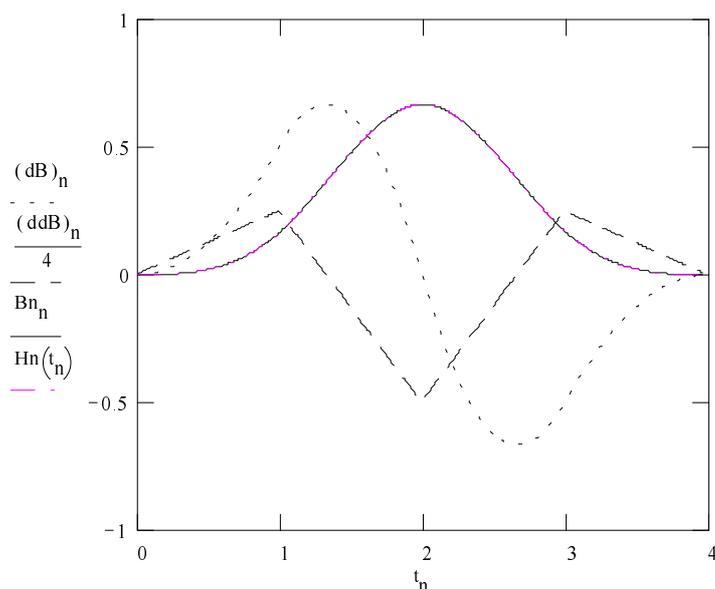
$$Hn(x) := \text{if}(x < 0, 0, \text{if}(x < 1, F1n(x), \text{if}(x < 2, F2n(x), \text{if}(x < 3, F2n(4 - x), \text{if}(x < 4, F1n(4 - x), 0))))))$$

Чисельно визначимо похідні. Аналітичні вирази знаходити не будемо, хоча їх знаходження не є проблемою. При бажанні похідні легко знайти аналогічно попередньому базису. На графіку друга похідна зменшена в чотири рази.

$$k := 0 .. 4 \cdot N - 2$$

$$n := 0 .. 4 \cdot N - 4$$

$$dB_k := N \cdot (Bn_{k+1} - Bn_k) \quad ddB_n := N \cdot (dB_{n+1} - dB_n)$$



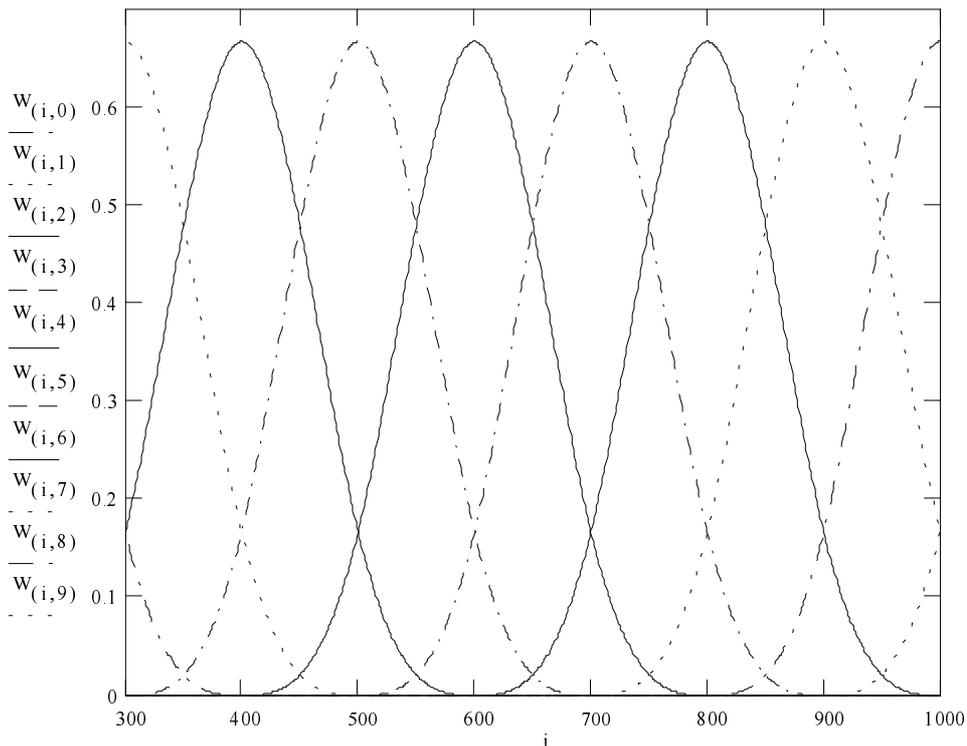
вигляд
сформованого
базисного
сплайна B_n та
його двох
похідних

Базис, що є згортою двох ідентичних породжуючих функцій (в нашому конкретному випадку породжуюча функція складається з відрізків двох прямих) має дві неперервні похідні. Сам базис і його похідні є симетричними функціями. Середина базиса є точкою максимума. Це впливає з властивостей інтеграла згортки.

Побудуємо систему базисних функцій з допомогою зміщених пропорційно довжині фрагмента базисних сплайнів. В цьому випадку лінійна незалежність такого базису є очевидною. Нижче на графіку зображені базисні функції базису з V_n .

$$i := 0..10 \cdot N \quad k := 0..9$$

$$W_{(i,k)} := 0 \quad W_{(i,k)} := \text{if}(i > k \cdot 100, \text{if}(i < k \cdot 100 + 400, V_n_{i-k \cdot 100}, 0), 0)$$



З допомогою побудованого базису наблизитимемо функцію $\sin(x)$. Для інтерполяції в загальному випадку необхідно розв'язавши систему інтерполяційних рівнянь знайти вагу кожної базисної функції, щоб сумарна функція пройшла через вузли інтерполяції. Ми діятимемо

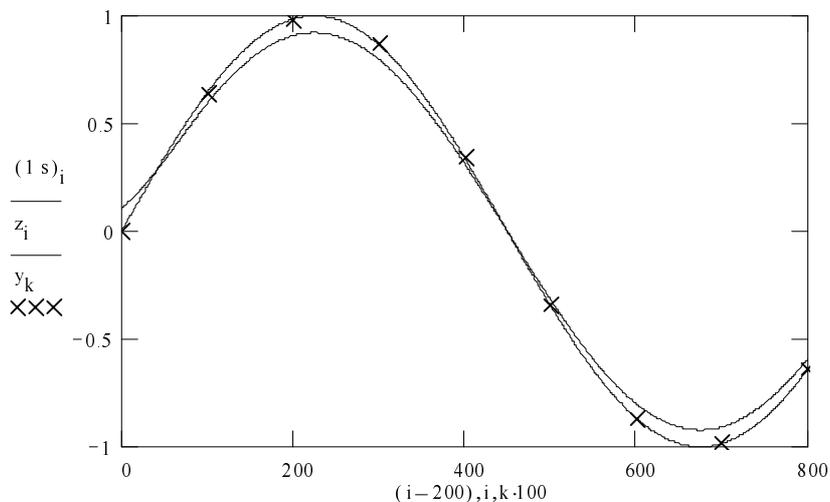
дещо інакше. Нехай сітка вузлів інтерполяції співпадає з сіткою вузлів сплайна. Вагу базисних функцій визначатимемо не з системи рівнянь, а приймемо рівною вузловим значенням інтерпольованої функції. Змінюватимемо частоту синусоїди (з допомогою параметра q) відносно сітки сплайна та вузлів інтерполяції. При малих значеннях частоти ($q=1-3$) маємо практично випадок інтерполяції. Тобто результуючий сплайн проходить через вузли інтерполяції і добре наближає відрізок синусоїди. Зі збільшенням частоти ($q=5$) якість наближення погіршується і сплайн віддаляється від вузлів інтерполяції. Тобто процес наближення вже не є інтерполяційним. Хоча варто відмітити, що в числовій обробці даних під інтерполяцією сигналу розуміють підвищення частоти дискретизації, за певних обмежень на спотворення спектру вхідного сигналу. В цьому розрізі інтерполяція розглядається, як низькочастотна фільтрація. Імпульсна характеристика такого інтерполяційного фільтра є базисною функцією інтерполяційного полінома. Подальше збільшення частоти синусоїди призведе до видимого процесу низькочастотної фільтрації (згладжування) вхідних даних. Значення сплайна у вузлах буде суттєво відрізнятися від вузлових значень синусоїди. Розв'язок інтерполяційних рівнянь не здатний покращити наближення, оскільки зміна ваги окремих базисних функцій в їх лінійній комбінації не змінює частотних властивостей базису. Нижче показані спектри базису та фрагменту синусоїди. Змінюючи частоту ($q=0.2, \dots, 10$) спостерігайте за змінами в картині наближення.

$q := 1$ параметр, який керує частотою

$y_k := \sin\left(\frac{2 \cdot q \cdot \pi \cdot k}{9}\right)$ значення у вузлах інтерполяції

$z_i := \sin\left(\frac{2 \cdot q \cdot \pi \cdot i}{900}\right)$ значення синусоїди

$s_i := \sum_{k=0}^9 y_k \cdot W_{(i,k)}$ інтерполяційний поліном - сплайн



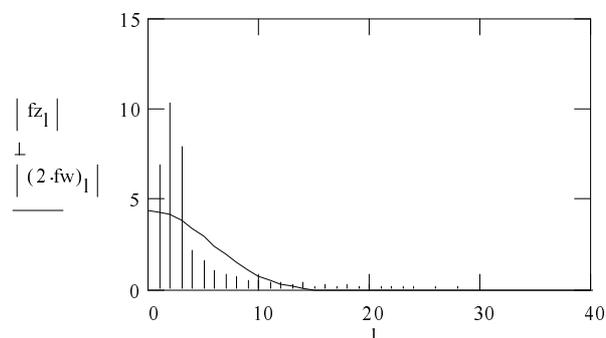
$j := 0..2047$ відліки базисної функції та відрізка синусоїди

$z_{s_j} := 0$ $z_{s_i} := z_i$ $z_{w_j} := 0$ $z_{w_i} := W_{i,6}$

перетворення Фур'є

$fz := \text{fft}(zs)$ $l := 0..511$ $fw := \text{fft}(zw)$

амплітудні спектри базису та синусоїди



Інтерполяція є найпростішим наближенням, основною умовою якого є проходження інтерполяційної функції через вузли інтерполяції. Інший підхід полягає в середньоквадратичному наближенні. Для цього необхідно знайти розкладення даної функції за узагальненим рядом Фур'є в сплайновому базисі. Узагальнені коефіцієнти Фур'є дозволяють знайти такі коефіцієнтами при базисних функціях, які гарантують найкраще в середньоквадратичному розумінні наближення. Сплайновий базис є

неортогональним, що дещо ускладнює задачу в порівнянні з ортогональними базисами. Слід звернути увагу, що продовження ряду Фур'є для сплайнового базису має дещо інший ніж звичайно зміст. Для фіксованого відрізка це означає збільшення фрагментів сплайна і відповідно скорочення інтервалу між вузлами сплайна. Внаслідок локальності базису і регулярності вузлів сплайна узагальнені коефіцієнти Фур'є є рівними:

$$a_0 := \int_0^1 F_{1n}(x)^2 dx + \int_1^2 F_{2n}(x)^2 dx + \int_2^3 F_{3n}(x)^2 dx + \int_3^4 F_{4n}(x)^2 dx$$

$$a_1 := \int_1^2 (F_{1n}(x-1) \cdot F_{2n}(x)) dx + \int_2^3 F_{2n}(x-1) \cdot F_{3n}(x) dx + \int_3^4 F_{3n}(x-1) \cdot F_{4n}(x) dx$$

$$a_2 := \int_2^3 (F_{1n}(x-2) \cdot F_{3n}(x)) dx + \int_3^4 F_{2n}(x-2) \cdot F_{4n}(x) dx$$

$$a_3 := \int_3^4 (F_{1n}(x-3) \cdot F_{4n}(x)) dx$$

$$a_0 = 0.479365 \quad a_1 = 0.23631 \quad a_2 = 0.02381 \quad a_3 = 0.000198$$

Розрахуємо дискретний еквівалент попередніх інтегралів, хоча потрібно сказати, що насправді і інтеграли розраховані чисельно. Отже в термінах базисів для двох довільних базисних функцій маємо:

$$V(a, b) := \left(\frac{1}{N}\right) \cdot \sum_{i=0}^{10 \cdot N} W_{(i, a)} \cdot W_{(i, b)}$$

$$V(1, 4) = 0.000198 \quad V(2, 4) = 0.023803 \quad V(3, 4) = 0.236305 \quad V(4, 4) = 0.479387$$

$$a_3 := V(1, 4) \quad a_2 := V(2, 4) \quad a_1 := V(3, 4) \quad a_0 := V(4, 4)$$

Розраховані значення з точністю до трьох знаків співпадають з попередніми, отже з достатньою для технічних застосувань точністю можна користуватись дискретним варіантом.

$$H_b(m, x) := H_n(x + m - 2)$$

З допомогою узагальненого ряду Фур'є в сплайновому базисі виконаємо наближення синусоїди з попереднього прикладу. Знайдемо відповідні коефіцієнти:

$$f(k) := \left(\frac{1}{N}\right) \cdot \sum_{n=0}^{10 \cdot N} W_{(n, k)} \cdot Z_n$$

$$f_n := f(k)$$

Запишемо матрицю з узагальнених коефіцієнтів Фур'є. Для сплайнового базису необхідно враховувати крайові умови. Їх суть полягає в тому, що зліва і справа відсутні фрагменти необхідні для побудови крайніх базисних сплайнів. Тому такі інтервали додають штучно, або згоджуються на певне спотворення країв, якщо це не має принципового значення. В даному випадку ми не зважатимемо на крайові умови і тому вважатимемо характерним наближення саме в середині

інтервалу. Матриця має характерну симетричну семидіагональну форму. Рядки та стовпці матриці містять однакові елементи, які мають лише різне відносне зміщення. В даному прикладі розмірність обмежена 10 10, проте розмірність може бути значною, або і взагалі не обмеженою. В останньому випадку матриця в повній мірі представляється ненульовими елементами довільного рядка. Інверсна матриця також є симетричною, з діагональним переважанням. Для необмеженої розмірності інверсної матриці можна скористатись швидким зменшенням до нуля елементів при віддаленні від діагоналі. Вважаючи ненульовими лише, наприклад 3 елементи від діагоналі можна наближено знайти ці елементи, які представлятимуть всю інверсну матрицю необмеженої розмірності

$$A := \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad V := A^{-1} \quad \text{інверсна матриця}$$

Знаходження ненульових елементів інверсної матриці (перший стовпець матриці інверсної до D) наближеним методом

$$D := \begin{bmatrix} a_0 & 2 \cdot a_1 & 2 \cdot a_2 & 2 \cdot a_3 \\ a_1 & a_2 + a_0 & a_3 + a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 + a_1 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 4.865136 & -5.943761 & 3.045766 & -1.210253 \\ -2.971881 & 6.38715 & -3.567722 & 1.443962 \\ 1.522883 & -3.567722 & 4.766312 & -2.17358 \\ -0.605127 & 1.443962 & -2.17358 & 3.086227 \end{bmatrix}$$

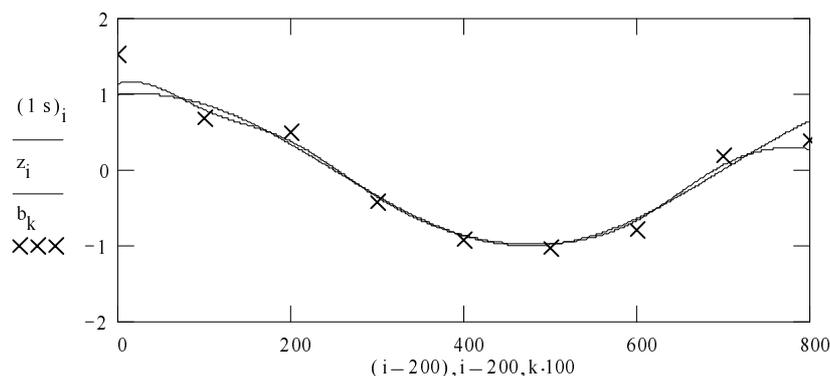
Порівняйте перший стовпець з ненульовими елементами з середини попередньої матриці

$$V_{6,6} = 4.912834 \quad V_{6,7} = -2.996893 \quad V_{6,8} = 1.535294 \quad V_{6,9} = -0.610022$$

Успішність та точність такої заміни суттєво залежить від того наскільки швидко зменшуються елементи матриці при віддаленні від діагоналі. В даному випадку процес цілком успішний.

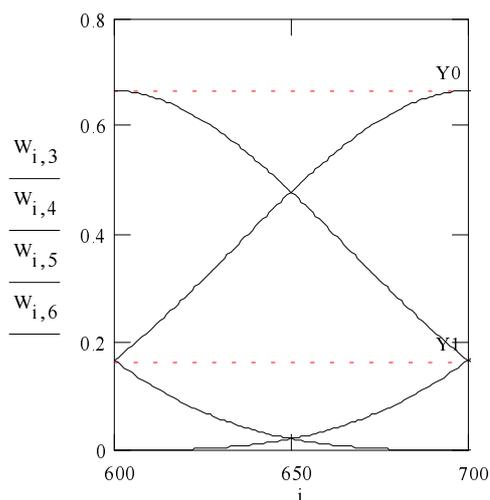
$b := A^{-1} \cdot fn$ коефіцієнти Фур'є в сплайновому базисі

$$s_i := \sum_{k=0}^9 b_k \cdot W_{(i,k)} \quad \text{середньоквадратичне наближення сплайном} \quad q = 1$$



Розглянуті вище базиси є не дуже зручними, в тому розумінні, що для наближення з їх допомогою потрібно попередньо виконувати певні розрахунки. Спробуємо спираючись на сплайновий базис отримати базис подібний Лагранжевому, де коефіцієнти є значеннями функції у вузлах. Враховуючи, що інтерполяційний сплайн на довільному фрагменті є сумою чотирьох зважених базисних функцій потрібно скласти систему з чотирьох рівнянь. Два рівняння отримаємо виразивши значення в двох сусідніх вузлах через зважені значення базисів. Два інші - виразивши похідні в сусідніх вузлах через похідні базисних функцій. З врахуванням особливостей сплайнових базисів отримаємо:

$$Y1 := Bn_{100} \quad Y0 := (Bn_{200})$$



$$\begin{bmatrix} 0 & Y1 & Y0 & Y1 \\ Y1 & Y0 & Y1 & 0 \\ 0 & z1 & 0 & -z1 \\ z1 & 0 & -z1 & 0 \end{bmatrix}$$

де $z1$ - значення похідної базисної функції в лівому вузлі
(в правому з протилежним знаком)

інверсна матриця

$$\begin{bmatrix} \frac{Y0}{(-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)} & -2 \cdot \frac{Y1}{(-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)} & Y0 \cdot \frac{Y1}{[z1 \cdot (-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)]} & \frac{1}{z1} \cdot \frac{(-2 \cdot Y1^2 + Y0^2)}{(-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)} \\ -2 \cdot \frac{Y1}{(-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)} & \frac{Y0}{(-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)} & -2 \cdot \frac{Y1^2}{[z1 \cdot (-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)]} & -Y0 \cdot \frac{Y1}{[z1 \cdot (-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)]} \\ \frac{Y0}{(-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)} & -2 \cdot \frac{Y1}{(-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)} & Y0 \cdot \frac{Y1}{[z1 \cdot (-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)]} & 2 \cdot \frac{Y1^2}{[z1 \cdot (-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)]} \\ -2 \cdot \frac{Y1}{(-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)} & \frac{Y0}{(-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)} & \frac{-1}{z1} \cdot \frac{(-2 \cdot Y1^2 + Y0^2)}{(-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)} & -Y0 \cdot \frac{Y1}{[z1 \cdot (-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)]} \end{bmatrix}$$

дискримінант матриці рівний

$$4 \cdot z1^2 \cdot Y1^2 - Y0^2 \cdot z1^2$$

це означає, що побудова можлива лише для базисів для яких $Y0$ відмінне від $2Y1$.
А це означає неможливість побудови для базисів отриманих з допомогою прямокутного вікна.
В інших випадках замінимо похідну центральною різницею і отримаємо систему рівнянь.

$$\begin{bmatrix} 0 & Y1 & Y0 & Y1 \\ Y1 & Y0 & Y1 & 0 \\ 0 & z1 & 0 & -z1 \\ z1 & 0 & -z1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A1 \\ A2 \\ \frac{(A2 - A0)}{2} \\ \frac{(A3 - A1)}{2} \end{bmatrix} \quad \text{аналітичний розв'язок:}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \cdot \frac{(-2 \cdot Y0 \cdot A1 \cdot z1 + 4 \cdot Y1 \cdot A2 \cdot z1 - Y1 \cdot Y0 \cdot A2 + Y1 \cdot Y0 \cdot A0 + 2 \cdot Y1^2 \cdot A3 - 2 \cdot Y1^2 \cdot A1 - Y0^2 \cdot A3 + Y0^2 \cdot A1)}{[z1 \cdot (-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)]} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{(-4 \cdot Y1 \cdot A1 \cdot z1 + 2 \cdot Y0 \cdot A2 \cdot z1 - 2 \cdot Y1^2 \cdot A2 + 2 \cdot Y1^2 \cdot A0 - Y1 \cdot Y0 \cdot A3 + Y1 \cdot Y0 \cdot A1)}{[z1 \cdot (-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)]} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{(2 \cdot Y0 \cdot A1 \cdot z1 - 4 \cdot Y1 \cdot A2 \cdot z1 + Y1 \cdot Y0 \cdot A2 - Y1 \cdot Y0 \cdot A0 + 2 \cdot Y1^2 \cdot A3 - 2 \cdot Y1^2 \cdot A1)}{[z1 \cdot (-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)]} \\ \frac{-1}{2} \cdot \frac{(4 \cdot Y1 \cdot A1 \cdot z1 - 2 \cdot Y0 \cdot A2 \cdot z1 - 2 \cdot Y1^2 \cdot A2 + 2 \cdot Y1^2 \cdot A0 + Y0^2 \cdot A2 - Y0^2 \cdot A0 + Y1 \cdot Y0 \cdot A3 - Y1 \cdot Y0 \cdot A1)}{[z1 \cdot (-4 \cdot Y1^2 + Y0^2)]} \end{bmatrix}$$

Підставимо числові значення попереднього базису

$$Y0 = 0.6667 \quad Y1 = 0.16665$$

Похідну визначимо через розділену різницю

$$z1 := \frac{(Bn_{101} - Y0)}{0.01} \quad z1 := dB_{100} \quad z0 := -z1 \quad z0 = -0.505$$

Отримаємо числові значення матриці

$$A := \begin{bmatrix} 0 & Y1 & Y0 & Y1 \\ Y1 & Y0 & Y1 & 0 \\ 0 & z1 & 0 & -z1 \\ z1 & 0 & -z1 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0.16665 & 0.6667 & 0.16665 \\ 0.16665 & 0.6667 & 0.16665 & 0 \\ 0 & 0.505 & 0 & -0.505 \\ 0.505 & 0 & -0.505 & 0 \end{bmatrix}$$

дискримінант відмінний від нуля

$$|A| = -0.085025$$

та інверсна матриця

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.9997 & -0.9997 & 0.659901 & 2.310099 \\ -0.9997 & 1.9997 & -0.329901 & -0.659901 \\ 1.9997 & -0.9997 & 0.659901 & 0.329901 \\ -0.9997 & 1.9997 & -2.310099 & -0.659901 \end{bmatrix}$$

Розрахунки виконано з підвищеною точністю, здатною знешкодити похибки округлень помітні на графіках.

Чисельно-аналітичний розв'язок:

$$\begin{bmatrix} 1.9997 & -0.9997 & 0.659901 & 2.310099 \\ -0.9997 & 1.9997 & -0.329901 & -0.659901 \\ 1.9997 & -0.9997 & 0.659901 & 0.329901 \\ -0.9997 & 1.9997 & -2.310099 & -0.659901 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A1 \\ A2 \\ \frac{(A2 - A0)}{2} \\ \frac{(A3 - A1)}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} .8446505 \cdot A1 - .6697495 \cdot A2 - .3299505 \cdot A0 + 1.1550495 \cdot A3 \\ -.6697495 \cdot A1 + 1.8347495 \cdot A2 + .1649505 \cdot A0 - .3299505 \cdot A3 \\ 1.8347495 \cdot A1 - .6697495 \cdot A2 - .3299505 \cdot A0 + .1649505 \cdot A3 \\ -.6697495 \cdot A1 + .8446505 \cdot A2 + 1.1550495 \cdot A0 - .3299505 \cdot A3 \end{bmatrix}$$

коефіцієнти виражені через вузлові значення

$$\begin{bmatrix} .8446505 \cdot A1 - .6697495 \cdot A2 - .3299505 \cdot A0 + 1.1550495 \cdot A3 \\ -.6697495 \cdot A1 + 1.8347495 \cdot A2 + .1649505 \cdot A0 - .3299505 \cdot A3 \\ 1.8347495 \cdot A1 - .6697495 \cdot A2 - .3299505 \cdot A0 + .1649505 \cdot A3 \\ -.6697495 \cdot A1 + .8446505 \cdot A2 + 1.1550495 \cdot A0 - .3299505 \cdot A3 \end{bmatrix}$$

згрупуємо біля значень у вузлах відповідні складові сплайнового базису і таким чином отримаємо інший базисний сплайн і базисні функції.

$$i := 0..N-1 \quad j := 0..4 \cdot N - 1$$

$$F1_i := Bn_i \quad F2_i := Bn_{(i+N)} \quad F3_i := Bn_{(i+2 \cdot N)} \quad F4_i := Bn_{(i+3 \cdot N)}$$

чисельні вирази

$$S3_i := 0.8446505 \cdot F1_i - 0.6697495 \cdot F2_i + 1.8345495 \cdot F3_i - 0.6697495 \cdot F4_i$$

$$S2_i := -0.6697495 \cdot F1_i + 1.8347495 \cdot F2_i - 0.6697495 \cdot F3_i + 0.8446505 \cdot F4_i$$

$$S4_i := -0.3299505 \cdot F1_i + 0.1649505 \cdot F2_i - 0.3299505 \cdot F3_i + 1.1550495 \cdot F4_i$$

$$S1_i := 1.1550495 \cdot F1_i - 0.3299505 \cdot F2_i + 0.1649505 \cdot F3_i - 0.3299505 \cdot F4_i$$

аналітичні вирази

$$Se3(x) := 0.8446505 \cdot F1n(x-2) - 0.6697495 \cdot F2n(x-1) + 1.8345495 \cdot F3n(x) - 0.6697495 \cdot F4n(x+1)$$

$$Se2(x) := -0.6697495 \cdot F1n(x-1) + 1.8347495 \cdot F2n(x) - 0.6697495 \cdot F3n(x+1) + 0.8446505 \cdot F4n(x+2)$$

$$Se4(x) := -0.3299505 \cdot F1n(x-3) + 0.1649505 \cdot F2n(x-2) - 0.3299505 \cdot F3n(x-1) + 1.1550495 \cdot F4n(x)$$

$$Se1(x) := 1.1550495 \cdot F1n(x) - 0.3299505 \cdot F2n(x+1) + 0.1649505 \cdot F3n(x+2) - 0.3299505 \cdot F4n(x+3)$$

повний вираз для сформованого базису

$$Bq(x) := \text{if}(x < 1, Se1(x), \text{if}(x < 2, Se2(x), \text{if}(x < 3, Se3(x), Se4(x))))$$

$$Be(j) := \text{if}[j < N, S1_j, \text{if}[j < 2 \cdot N, S2_{(j-N)}, \text{if}[j < 3 \cdot N, S3_{(j-2 \cdot N)}, S4_{(j-3 \cdot N)}]]]$$

розрахуємо значення базису та його першої та другої похідних

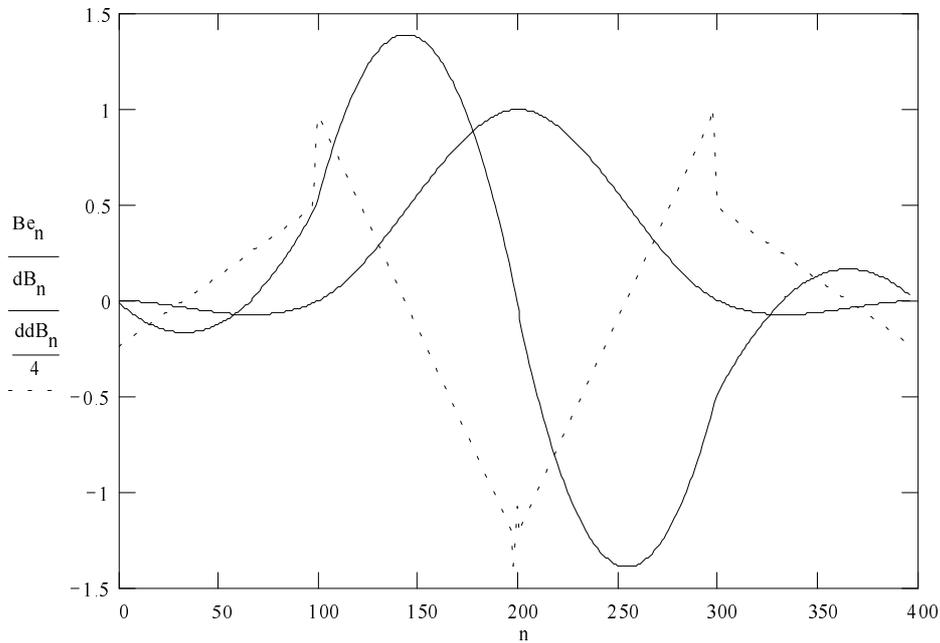
$$j := 0..4 \cdot N - 1$$

$$k := 0..4 \cdot N - 3 \quad n := 0..4 \cdot N - 4$$

$$Be_j := Be\left(\left(\frac{j}{1}\right)\right)$$

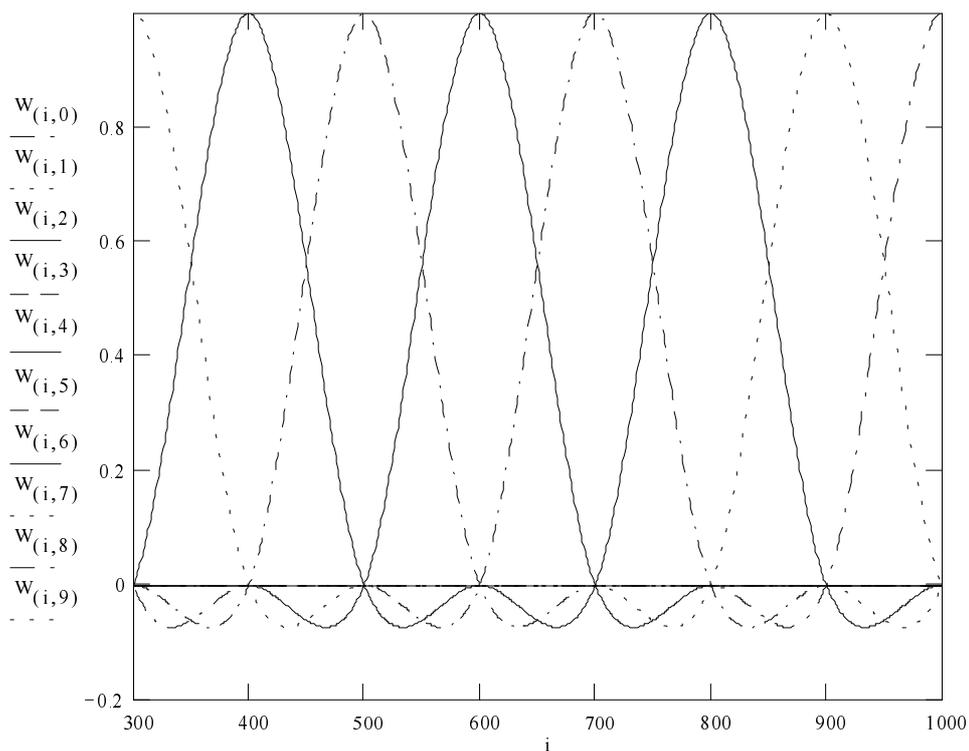
$$dB_k := \frac{N}{2} \cdot (Be_{k+2} - Be_k) \quad ddB_n := \frac{N}{1} \cdot (dB_{n+1} - dB_n)$$

WRITEPRN("g:\matem\bases\bekube.prn") := Be



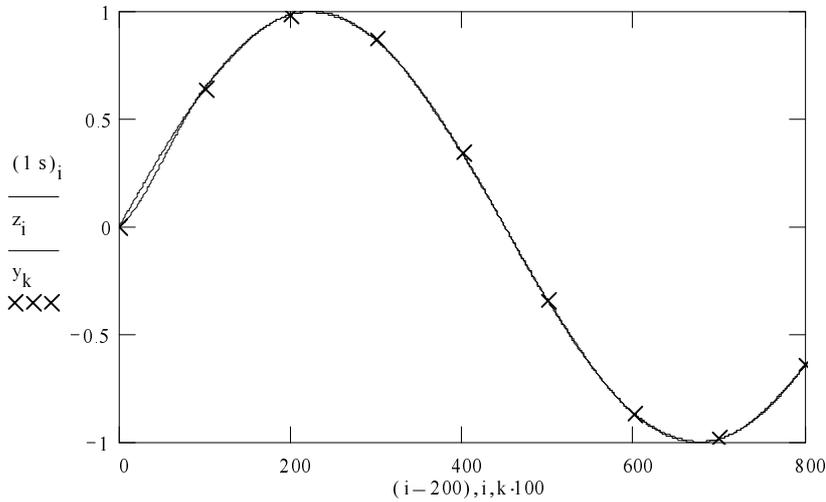
Нова базисна функція також є сплайном, але має розрив другої похідної. Перша похідна є неперервною. Її неперервність задана умовою рівності першої похідної у вузлі значенню першої похідної інтерпольованої функції. Таким чином сплайн є ермітовим. Іншою характерною особливістю сплайна є рівність його нулю у вузлових точках, окрім середньої. В середній точці базисна функція приймає значення рівне одиниці. Такі властивості характерні для лагранжевої форми. Сформуємо базис

$$i := 0..10 \cdot N \quad k := 0..9 \quad W_{(i,k)} := 0 \quad W_{(i,k)} := \text{if}(i > k \cdot 100, \text{if}(i < k \cdot 100 + 400, Be_{i-k \cdot 100}, 0), 0)$$



Виконаємо інтерполяцію синусоїди, аналогічно попередньому базису

$$y_k := \sin\left(\frac{2 \cdot q \cdot \pi \cdot k}{9}\right) \quad s_i := \sum_{k=0}^9 y_k \cdot W_{(i,k)} \quad z_i := \sin\left(\frac{2 \cdot q \cdot \pi \cdot i}{900}\right) \quad q = 1$$

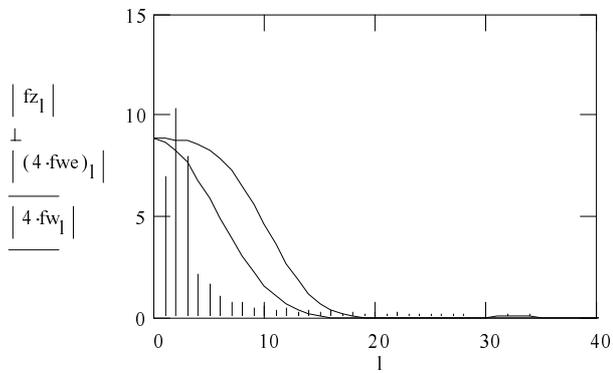


j := 0..2047

zw_j := 0 zw_i := W_{i,6}

fwe := fft(zw)

розглянемо амплітудні спектри синусоїди, отриманого базису та попереднього базису. Отриманий базис має спектральні властивості відмінні від попереднього. Зокрема його спектр є більш широким і рівномірним.



$$vs := \left(\frac{1}{N}\right) \cdot \sum_{i=0}^{4 \cdot N - 1} Be_i \cdot Be_i \quad vs = 0.813351$$

$$V(a,b) := \left(\frac{1}{N}\right) \cdot \sum_{i=0}^{10 \cdot N} W_{(i,a)} \cdot W_{(i,b)}$$

V(1,4) = 0.001751 V(2,4) = -0.035313 V(3,4) = 0.126795 V(4,4) = 0.813351

Узагальнені коефіцієнти Фур'є

$$a_0 := \left(\frac{1}{N} \right) \cdot \left[\sum_{i=0}^{N-1} (S1_i)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} (S2_i)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} (S3_i)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} (S4_i)^2 \right] \quad a_0 = 0.813351$$

$$a_1 := \left(\frac{1}{N} \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{N-1} S1_i \cdot S2_i + \sum_{i=0}^{N-1} S2_i \cdot S3_i + \sum_{i=0}^{N-1} S3_i \cdot S4_i \right) \quad a_1 = 0.126795$$

$$a_2 := \left(\frac{1}{N} \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{N-1} S1_i \cdot S3_i + \sum_{i=0}^{N-1} S2_i \cdot S4_i \right) \quad a_2 = -0.035313$$

$$a_3 := \left(\frac{1}{N} \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{N-1} S1_i \cdot S4_i \right) \quad a_3 = 0.001751$$

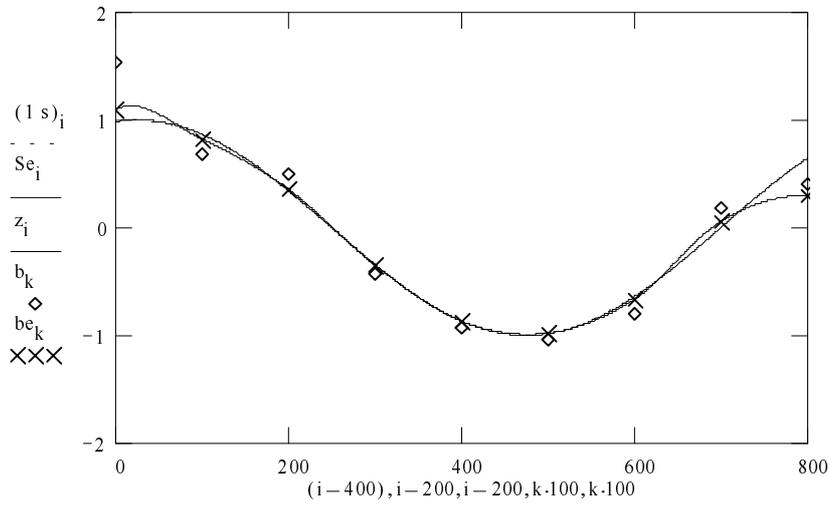
$$f(k) := \left(\frac{1}{N} \right) \cdot \sum_{n=0}^{10 \cdot N} W_{(n,k)} \cdot z_n$$

$$fn_k := f(k)$$

$$A := \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$be := A^{-1} \cdot fn$$

$$Se_i := \sum_{k=0}^9 be_k \cdot W_{(i,k)} \quad \text{інтерполяційний поліном - сплайн} \quad q = 1$$



ПРИВЕДЕННЯ БАЗИСУ ДО ЛАГРАНЖІВОЇ ФОРМИ на прикладі кубічного В-сплайна

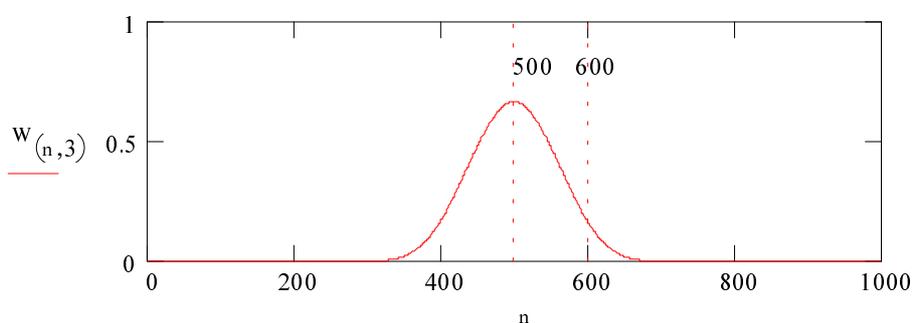
читаємо базисний сплайн (матрицю планування)

```
W := READPRN("g:\matem\bases\bspline")
```

```
N := rows(W)  N = 1.001 * 103  n := 0..N - 1  i := 0..99
```

```
R := cols(W)  R = 10  j := 0..R - 1
```

зображення базисного сплайна



параметри ключових точок базисного сплайна

```
Bn := W(n,3)          B1i := B300+i    B2i := B400+i
```

```
a0 := B500    a1 := B600    B3i := B500+i    B4i := B600+i
```

матриця 2.56 (по максимуму розмірності пакета) в ідеалі нескінченна

$$u := \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 0.6667$$

$$a_1 = 0.1666$$

$$a := a_0 \quad b := a_1$$

наближена інверсія матриці 2.56 (матриця 2.57)

$$a = 0.6667$$

$$b = 0.1666$$

аналітичний розв'язок 2.58

$$U := \begin{bmatrix} a & 2 \cdot b & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 \\ 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

$$Q := a^4 - 4 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2 \cdot b^4 \quad Q = 0.149763$$

$$d0 := \frac{[a \cdot (a^2 - 2 \cdot b^2)]}{Q} \quad d0 = 1.731613$$

$$d1 := \frac{[-b \cdot (a^2 - b^2)]}{Q} \quad d1 = -0.463584$$

$$d2 := \frac{(a \cdot b^2)}{Q} \quad d2 = 0.123559$$

$$d3 := \frac{-b^3}{Q} \quad d3 = -0.030876$$

точний розв'язок приведення сплайна

$$Lb := W \cdot u^{-1} \quad L_n := Lb_{n,3}$$

формування лагранжівної форми (наближений розв'язок) 2.59

$$Lq_n := 0$$

$$Lz_n := W_{n,0} \cdot d3 + W_{n,1} \cdot d2 + W_{n,2} \cdot d1 + W_{n,3} \cdot d0 + W_{n,4} \cdot d1 + W_{n,5} \cdot d2 + W_{n,6} \cdot d3$$

$$L_{-3}_i := B1_i \cdot d3 \quad Lq_i := L_{-3}_i$$

$$L_{-2}_i := B2_i \cdot d3 + B1_i \cdot d2 \quad Lq_{100+i} := L_{-2}_i$$

$$L_{-1}_i := B3_i \cdot d3 + B2_i \cdot d2 + B1_i \cdot d1 \quad Lq_{200+i} := L_{-1}_i$$

$$L_{-0}_i := B4_i \cdot d3 + B3_i \cdot d2 + B2_i \cdot d1 + B1_i \cdot d0 \quad Lq_{300+i} := L_{-0}_i$$

$$L1_i := B4_i \cdot d2 + B3_i \cdot d1 + B2_i \cdot d0 + B1_i \cdot d1 \quad Lq_{400+i} := L1_i$$

$$L2_i := B4_i \cdot d1 + B3_i \cdot d0 + B2_i \cdot d1 + B1_i \cdot d2 \quad Lq_{500+i} := L2_i$$

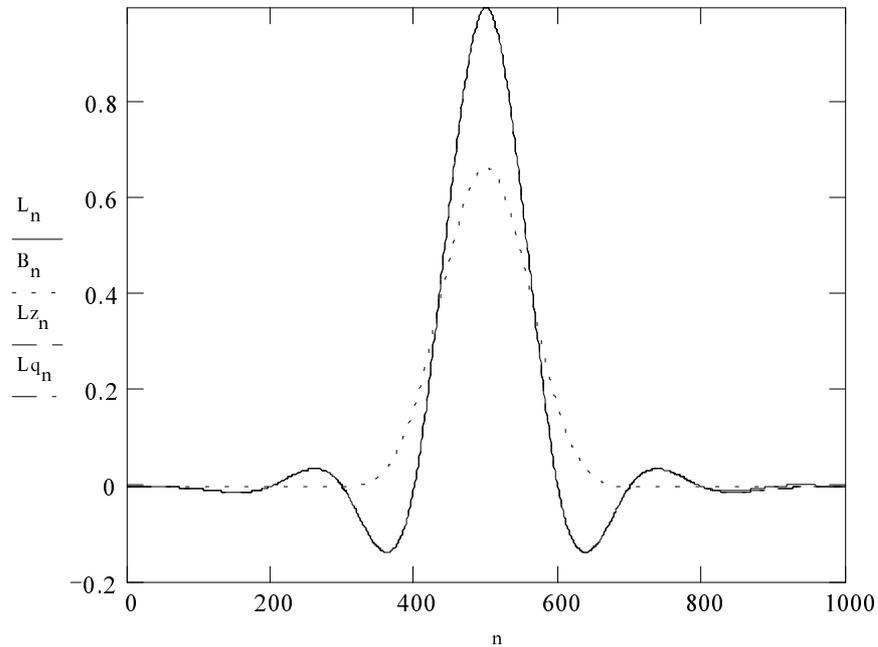
$$L3_i := B4_i \cdot d0 + B3_i \cdot d1 + B2_i \cdot d2 + B1_i \cdot d3 \quad Lq_{600+i} := L3_i$$

$$L4_i := B4_i \cdot d1 + B3_i \cdot d2 + B2_i \cdot d3 \quad Lq_{700+i} := L4_i$$

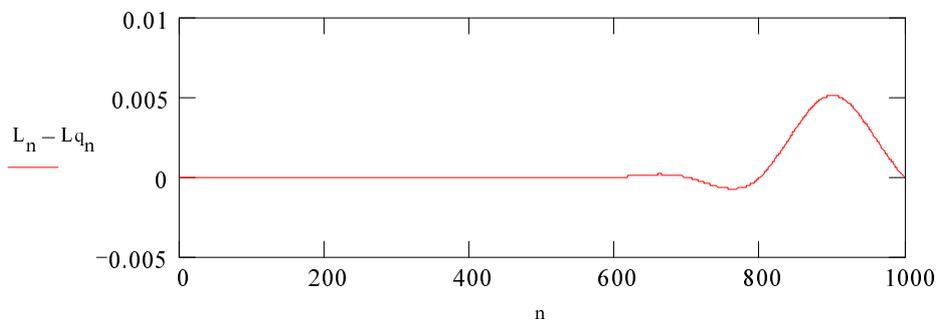
$$L5_i := B4_i \cdot d2 + B3_i \cdot d3 \quad Lq_{800+i} := L5_i$$

$$L6_i := B4_i \cdot d3 \quad Lq_{900+i} := L6_i$$

зображення базисного сплайна та лагранжівної форми
(точний та наближений варіанти)



різниця між точним і наближеним варіантами



розрахунок двох похідних базисного сплайна в лагранжівній формі

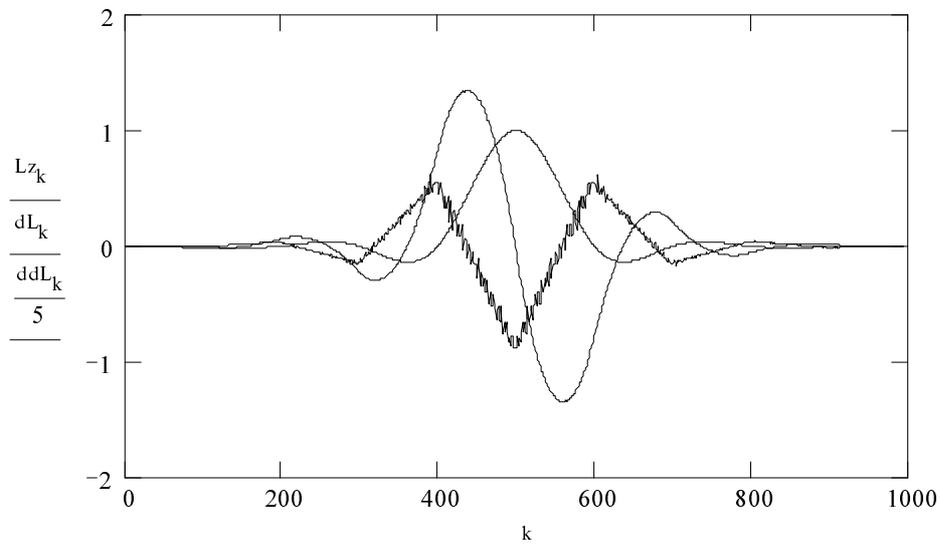
$k := 0..N - 3$ $K := 100$

$dL_k := \frac{K}{2} \cdot (L_{k+2} - L_k)$ перша похідна

$k := 0..N - 6$

$ddL_k := \frac{K}{2} \cdot (dL_{k+2} - dL_k)$ друга похідна

зображення базисного сплайна в лагранжівій формі та двох похідних



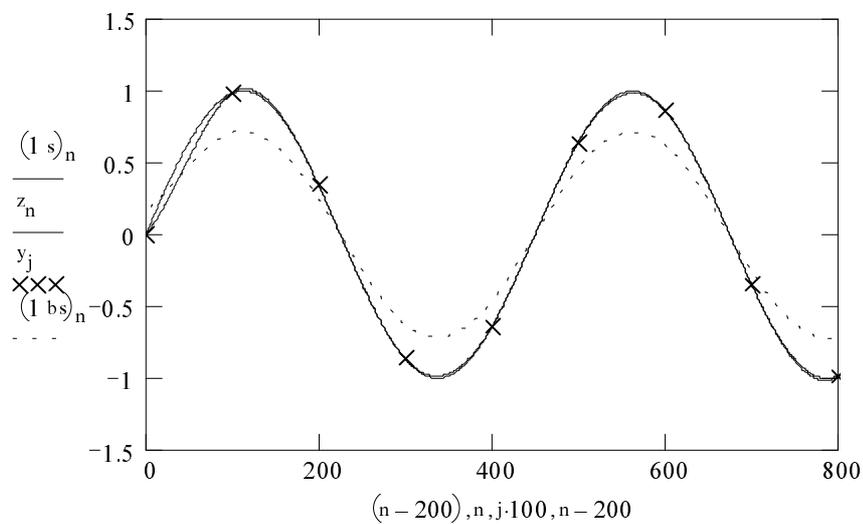
приклад інтерполяції сплайном в лагранжівій та В формах

$q := 2$ параметр, який керує частотою

$$y_j := \sin\left(\frac{2 \cdot q \cdot \pi \cdot j}{9}\right) \quad \text{значення синусоїди} \quad z_n := \sin\left(\frac{2 \cdot q \cdot \pi \cdot n}{900}\right)$$

$$s_n := \sum_{k=0}^9 y_k \cdot Lb_{(n,k)} \quad \text{інтерполяційний поліном - сплайн у лагранжівій формі}$$

$$bs_n := \sum_{k=0}^9 y_k \cdot W_{(n,k)} \quad \text{інтерполяційний поліном - В сплайн}$$



частотна ілюстрація: співвідношення амплітудних спектрів

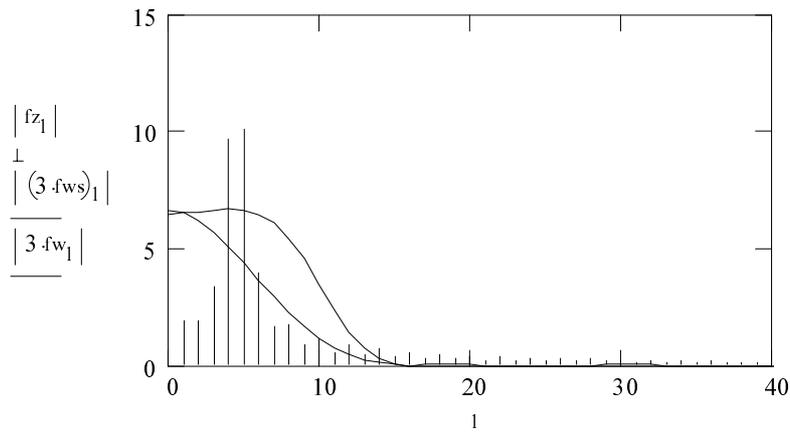
$j := 0..2047$ відліки базисної функції та відрізка синусоїди

$zs_j := 0$ $zs_n := z_n$ $zw_j := 0$ $zw_n := Lb_{n,6}$ $zb_j := 0$ $zb_n := W_{n,6}$

перетворення Фур'є

$fz := \text{fft}(zs)$ $f_1 := 0..511$ $fws := \text{fft}(zw)$ $fw := \text{fft}(zb)$

амплітудні спектри базисів та відрізка синусоїди



Додаток Д

Програми для оцінки спектральної функції з оптимізацією сітки вузлів та програма послідовної побудови сплайна на сітці вузлів близькій до оптимальної (до розділу 4).

function [wu,sd,sy,wi]=coordfc(wu,y,norm)

```
% оцінка спектра з апроксимацією спектральної функції кубічним емітовим  
% сплайном та покоординатним пошуком оптимального розміщення вузлів  
% комплексні вхідні дані  
% wu  число вузлів (рівномірна сітка) або заданий вектор вузлів початкового  
%     пошуку  
% y   комплексний вектор вхідних даних  
% norm норма оптимальності  
%     0 L2  
%     1 sum abs  
%     2 min max  
% wu  знайдена сітка  
% sd  оцінка спектру  
% sy  оцінка спектру  
% wi  матриця руху вузлів
```

```
[m,n]=size(y);  
if m>n  
    n=m;  
    y=y';  
end  
[nill,r]=size(wu);  
if r==1  
    r=wu;  
    wu=[-0.5:1/(r-1):0.5];  
end  
if wu(r)~=0.5  
    wu(r)=0.5;  
end  
if wu(1)~-0.5  
    wu(1)=-0.5;  
end  
t=[1:n];  
h=1/(n-1);  
nr=2;  
ni=1;  
nmax=20;  
wi=[wu];  
  
while 1  
    while 1  
        if nr==2  
            xl=wu(nr-1)+h/10;
```

```

else
    xl=wu(nr-1)+h;
end
xr=wu(nr+1)-h;
if xl>=xr
    nr=nr+1;
    if nr>=r
        nr=2;
    end
else
    break
end
end
x=fmin('fSplpsdc',xl,xr,[0,1/(4*n)],nr,wu,y,norm);
wu(nr)=x;
wi=[wi;wu];
figure(1);
plot(wi);
pause(0);
if nr==2
    [sd,wu,psd,sy]=splcpsd(wu,y);
    figure(2);
    plot(t,y,t,real(sy));
    pause(0)
    key=input('exit 0 ');
    if key==0
        break;
    end
end
nr=nr+1;
if nr>=r
    nr=2;
end
if ni>nmax
    break;
end
end
end

```

function s=fsplpsd(x,P1,P2,P3,P4)

```

nr=P1;
wu=P2;
y=P3;
wu(nr)=x;
[sd,wu,psd,sy]=splcpsd(wu,y);
e=y-(sy');
if P4==0
    s=e*(e)';
end
if P4==1
    s=sum(abs(e));
end
end

```

```

if P4==2
    s=max(abs(e));
end

```

```

function [sd,wu,psd,sy,di,d,dev]=splcpsd(wu,y)

```

```

% Сплайновий метод оцінки спектральної функції
% [sd,wu,psd,sy]=splcpsd(wu,y)
% wu частоти вузлів сплайна в частотній області [-0.5,...,0.5],
% або кількість вузлів з рівномірним кроком;
% y масив комплексних відліків в часі з рівномірним кроком;
%
% psd спектральна функція в точках wu;
%
% See also creat_ss, spl1xss
%
```

```

[m,n]=size(y);
if m>n
    n=m;
    y=y';
end
[nill,r]=size(wu);
if r==1
    r=wu;
    wu=[-0.5:1/(r-1):0.5];
end
if wu(r)~=0.5
    wu(r)=0.5;
end
if wu(1)~-0.5
    wu(1)=-0.5;
end

```

```

t=[wu(1):1/(n-1):wu(r)];
p=creat_ss(wu,t,n,r,2); % матриця планування сплайна
W=ifft(p); % ifft матриці планування
C=W'*W; % нормальні рівняння
B=W'*y';

```

```

COB=inv(C); % обернення матриці
d=real(diag(COB));
sd=COB*B; % оцінка спектра
psd=sd.*conj(sd);
sy=W*sd;
dev=(std(y'-sy))^2; % дисперсія невязки
di=((dev*d)/(n-r-1)).^(1/2); % довірчі інтервали (без коеф.стюдента)

```

```

function [tu,A,Am,Ap,PInv,PYInv]=sersplm(dx,dy,ext,alfa,nf,optplot,aalfa)
% послідовна побудова сплайна з врахуванням стаціонарності залишків
% [tu,A]=sersplm(dx,dy,ext,alfa,nf,optplot,aalfa)
% dx абсциси даних
% dy ординати даних
% опціонально
% ext інтервал екстраполяції (0)
% alfa рівень помилки першого роду для гіпотези про випадковість залишків (0.1)
% nf максимальне число даних для розрахунку критерія інверсій (20)
% optplot 0 - не відображати побудову 1 - графік побудови (1)
% aalfa довірча ймовірність для інтервальних оцінок параметрів A (0.95)
% результат
% tu абсциси вузлів
% A оцінки ординат вузлів
% Am нижня межа довірчого інтервалу для A
% Ap верхня межа довірчого інтервалу для A
% PInv ймовірність випадковості залишків
% PYInv ймовірність випадковості даних
% See also creat_ps, spl1xu
%

% визначити розмірність даних
[Nt,i]=size(dx);
if Nt<i
    Nt=i;
    dx=dx';
    dy=dy';
end
if nargin<3
    ext=0;
end
if nargin<4
    alfa=0.10;
end
if nargin<5
    nf=20;
end
if nargin<6
    optplot=1;
end
if nargin<7
    aalfa=0.95;
end
if alfa>=1
    alfa=0.15;
end
if aalfa>=1
    aalfa=0.95;
end
if nf<1
    nf=1;

```

```

end
if ext<0
    ext=dx(2)-dx(1);
end

N=4;          % почнемо з 4 точок
r=2;
tu=[dx(1),dx(4)+ext];

Ok=1;
while N<Nt,

ed=dx(N);
t=dx(1:N);
Y=dy(1:N);

if Ok==0    % add fragment (додати фрагмент)
    tu=[tu(1:r-1),t(N-1),ed+ext];
    r=r+1;
else      % continue fragment (продовжити фрагмент)
    tu=[tu(1:r-1),ed+ext];
end

% calculation spline (розрахунок сплайна)
p=creat_ps(tu,t,N,r,2);
c=p*p;
cob=c^(-1);
b=p*Y;
A=cob*b;
z=p*A;
e=diag(cob);

% remainder (залишки)
q=(Y-z);
% Перевірка випадковості залишків
% на останньому інтервалі
S=0;
sn=0;
x=[];
if r>2
    lr=1;
else
    lr=1;
end
for i=1:N
    if t(i)>tu(r-lr)
        sn=sn+1;
        x(sn)=q(i);
    end
end
end
if sn>nf

```

```

    sn=nf;
    x=q(N-sn:N);
end
for i=1:sn-1,
    for j=i+1:sn,
        if x(i)>x(j)
            S=S+1;
        end
    end
end
end

ms=sn*(sn-1)/4;
ss=sqrt(sn*(2*sn+5)*(sn-1)/72);
L=ceil(norminv(alfa/2,ms,ss));
R=fix(norminv(1-alfa/2,ms,ss));

Ok=0;
if sn<5
    Ok=1;
else
if (S>L)&(S<R)
    Ok=1;    % залишки випадкові
else
    Ok=0;    % залишки містять не випадкову складову
end
end

% довірчі інтервали
v=q'*q;
w=e*v;
w=w/(N-r-1);
w=w.^(1/2);
ts=tinv(1-(1-alfa)/2,N-r-1); % коефіцієнт Стюдента для ...
g=ts*w;
Ap=A+g;
Am=A-g;
if optplot>0
    plot(dx,dy,'.w',tu,A,'+w',tu,Ap,'ow',tu,Am,'ow',t,z,'w');
    str=sprintf('Inverse %g for %g/%g',S,L,R);
    str=[str,' %g : %g : %g '];
    title(sprintf(str,Am(r),A(r),Ap(r)));
    grid;
    pause(0);
end

% наступна точка
N=N+1;
end

% ймовірність випадковості даних і залишків
S=0;

```

```
SY=0;
sn=N-1;
for i=1:sn-1,
    for j=i+1:sn,
        if q(i)>q(j)
            S=S+1;
        end
        if dy(i)>dy(j)
            SY=SY+1;
        end
    end
end
end
```

```
% ймовірність випадковості залишків
ms=sn*(sn-1)/4;
ss=sqrt(sn*(2*sn+5)*(sn-1)/72);
PInv=normcdf(S,ms,ss);
if S>ms
    PInv=2*(1-PInv);
else
    PInv=2*PInv;
end
PYInv=normcdf(SY,ms,ss);
if SY>ms
    PYInv=2*(1-PYInv);
else
    PYInv=2*PYInv;
end
```

Додаток Е
Програми МНК сплайн-фільтрів (до розділів 5,6).

```
function [s,m]=toHermit(b,y0,y1,z1)
% [s,m]=toHermit(b[,y0,y1,z1])
% перетворення сплайнового базису в ермітову лагранжеву форму
% b - відліки симетричного сплайнового базису в кількості кратній 4
%   сплайн складається з чотирьох фрагментів
% y0 - значення сплайна в центральному вузлі
% y1 - значення сплайна в правому(лівому) вузлі
% z1 - значення похідної сплайна в лівому вузлі
% s - новий базис
% m - матриця перетворення

n = length(b);
N=round(n/4);
if N*4~=n
    error('size incorrect !')
end
if nargin == 1
    y0 = b(2*N);
    y1 = b(N+1);
    z1 = (b(N+1)-b(N))/(1/N);
end

d=2*(z1*(y0*y0-4*y1*y1));
if abs(d)<0.00000001
    error('bad base !')
end

m=zeros(4,4);
s=zeros(1,n);

m(3,1)=2*y0*z1+2*y1*y1-y0*y0;
m(3,2)=-4*y1*z1+y1*y0;
m(3,3)=2*y0*z1-2*y1*y1;
m(3,4)=-4*y1*z1+y1*y0;

m(2,1)=-4*y1*z1+y1*y0;
m(2,2)=2*y0*z1-2*y1*y1;
m(2,3)=-4*y1*z1+y1*y0;
m(2,4)=2*y1*y1+2*y0*z1-y0*y0;

m(4,1)=-y1*y0;
m(4,2)=2*y1*y1;
m(4,3)=-y1*y0;
m(4,4)=y0*y0-2*y1*y1;

m(1,1)=y0*y0-2*y1*y1;
m(1,2)=-y1*y0;
```

```
m(1,3)=2*y1*y1;  
m(1,4)=-y1*y0;
```

```
m=m/d;
```

```
for i=1:N,
```

```
    s(i) =m(1,1)*b(i)+m(1,2)*b(i+N)+m(1,3)*b(i+2*N)+m(1,4)*b(i+3*N);  
    s(i+N) =m(2,1)*b(i)+m(2,2)*b(i+N)+m(2,3)*b(i+2*N)+m(2,4)*b(i+3*N);  
    s(i+2*N)=m(3,1)*b(i)+m(3,2)*b(i+N)+m(3,3)*b(i+2*N)+m(3,4)*b(i+3*N);  
    s(i+3*N)=m(4,1)*b(i)+m(4,2)*b(i+N)+m(4,3)*b(i+2*N)+m(4,4)*b(i+3*N);
```

```
end
```

```
function y=wspls32(x)
```

```
% y=wspls32(x)
```

```
% МНК фільтрація синусоподібним ермітовим сплайном з 32 даними на фрагмент
```

```
D( 1,1:4)=[ -2.6123622e-004, 1.0115174e+000, 2.7023215e-003,-5.5636921e-005];  
D( 2,1:4)=[ -1.5613151e-002, 9.9942447e-001, 1.3172065e-002, 5.5636921e-005];  
D( 3,1:4)=[ -2.9631524e-002, 9.6500957e-001, 1.3058208e-002, 2.3215850e-004];  
D( 4,1:4)=[ -4.2078179e-002, 9.1063485e-001, 3.0384686e-003, 3.1377695e-004];  
D( 5,1:4)=[ -5.2769098e-002, 8.3907437e-001,-1.5786689e-002, 1.4434138e-004];  
D( 6,1:4)=[ -6.1576559e-002, 7.5341950e-001,-4.1937003e-002,-4.2157703e-004];  
D( 7,1:4)=[ -6.8429655e-002, 6.5697864e-001,-7.3607678e-002,-1.5123094e-003];  
D( 8,1:4)=[ -7.3313238e-002, 5.5317411e-001,-1.0873527e-001,-3.2332681e-003];  
D( 9,1:4)=[ -7.6265362e-002, 4.4543916e-001,-1.4507218e-001,-5.6618718e-003];  
D(10,1:4)=[ -7.7373347e-002, 3.3711803e-001,-1.8026750e-001,-8.8433873e-003];  
D(11,1:4)=[ -7.6768615e-002, 2.3137157e-001,-2.1195176e-001,-1.2787832e-002];  
D(12,1:4)=[ -7.4620484e-002, 1.3109121e-001,-2.3782304e-001,-1.7468048e-002];  
D(13,1:4)=[ -7.1129117e-002, 3.8823312e-002,-2.5573176e-001,-2.2819033e-002];  
D(14,1:4)=[ -6.6517865e-002,-4.3294091e-002,-2.6376162e-001,-2.8738557e-002];  
D(15,1:4)=[ -6.1025233e-002,-1.1358061e-001,-2.6030419e-001,-3.5089084e-002];  
D(16,1:4)=[ -5.4896714e-002,-1.7084776e-001,-2.4412479e-001,-4.1700950e-002];  
D(17,1:4)=[ -4.8376736e-002,-2.1441751e-001,-2.1441751e-001,-4.8376736e-002];  
D(18,1:4)=[ -4.1700950e-002,-2.4412479e-001,-1.7084776e-001,-5.4896714e-002];  
D(19,1:4)=[ -3.5089084e-002,-2.6030419e-001,-1.1358061e-001,-6.1025233e-002];  
D(20,1:4)=[ -2.8738557e-002,-2.6376162e-001,-4.3294091e-002,-6.6517865e-002];  
D(21,1:4)=[ -2.2819033e-002,-2.5573176e-001, 3.8823312e-002,-7.1129117e-002];  
D(22,1:4)=[ -1.7468048e-002,-2.3782304e-001, 1.3109121e-001,-7.4620484e-002];  
D(23,1:4)=[ -1.2787832e-002,-2.1195176e-001, 2.3137157e-001,-7.6768615e-002];  
D(24,1:4)=[ -8.8433873e-003,-1.8026750e-001, 3.3711803e-001,-7.7373347e-002];  
D(25,1:4)=[ -5.6618718e-003,-1.4507218e-001, 4.4543916e-001,-7.6265362e-002];  
D(26,1:4)=[ -3.2332681e-003,-1.0873527e-001, 5.5317411e-001,-7.3313238e-002];  
D(27,1:4)=[ -1.5123094e-003,-7.3607678e-002, 6.5697864e-001,-6.8429655e-002];  
D(28,1:4)=[ -4.2157703e-004,-4.1937003e-002, 7.5341950e-001,-6.1576559e-002];  
D(29,1:4)=[ 1.4434138e-004,-1.5786689e-002, 8.3907437e-001,-5.2769098e-002];  
D(30,1:4)=[ 3.1377695e-004, 3.0384686e-003, 9.1063485e-001,-4.2078179e-002];  
D(31,1:4)=[ 2.3215850e-004, 1.3058208e-002, 9.6500957e-001,-2.9631524e-002];  
D(32,1:4)=[ 5.5636921e-005, 1.3172065e-002, 9.9942447e-001,-1.5613151e-002];
```

```
[N,m]=size(x);
```

```

if N<m
    N=m;
end

y=[];
i=0;
B=zeros(1,7);
A=zeros(1,4);
sm12=0;
sm23=0;
sm13=0;
sm34=0;
sm24=0;
sm14=0;
sm01=0;
sm02=0;
sm03=0;
sm04=0;

for n=1:N
    i=i+1;
    xx=D(i,:);
    sm01=sm01+x(n)*xx(1);
    sm02=sm02+x(n)*xx(2);
    sm03=sm03+x(n)*xx(3);
    sm04=sm04+x(n)*xx(4);

    if i==32,
        i=0;
        for j=1:6
            B(j)=B(j+1);
        end
        B(7)=(sm34+sm23+sm12+sm01);

        sm12=sm02;

        sm23=sm13;
        sm13=sm03;

        sm34=sm24;
        sm24=sm14;
        sm14=sm04;

        sm01=0;
        sm02=0;
        sm03=0;
        sm04=0;

        A(1)=A(2);
        A(2)=A(3);
        A(3)=A(4);
    end
end

```

$A(4)=-0.0004*(B(1)+B(7))-0.0015*(B(2)+B(6))+0.0064*(B(3)+B(5))+0.0810*B(4);$

```
for k=1:32
    xx=D(k,:);
    y=[y,A(1)*xx(1)+A(2)*xx(2)+A(3)*xx(3)+A(4)*xx(4)];
end
end
end
y=y';
```

% s0002.m

```
% апроксимація МНК в сплайнових базисах
% синусоподібному: отриманому згорткою породжуючих функцій
% виду  $\cos(t)$   $t=[\pi/2,(3/2)\pi]$ 
% кубічному
% програма демонструє залежність якості наближення сплайнами за МНК
% від частотних властивостей сплайнових базисів
% нормальні не корельовані дані фільтруються нерекурсивним фільтром
% з імпульсною характеристикою - сплайновим базисом або породжуючою
% функцією сплайнового базису
% отримана послідовність наближається ідентичним сплайновим базисом
% та більш низькочастотним кубічним сплайновим базисом
% при відповідності базиса спектру даних отримуємо хороше наближення
```

```
N=1024; % число відліків даних
n=32; % коеф стиснення число точок на фрагменті сплайна
[b,f]=sinspl(n); % згенерувати синусоподібний базис
t=[1:N]; % ранги відліків
plot(f) % зобразити породжуючу функцію
pause
plot(b) % зобразити синусоподібний сплайновий базис
pause
[h,w]=freqz(b,1,64); % частотна характеристика сплайнового базису
semilogy(w,abs(h))
pause
plot(w,abs(h))
pause
rand('normal'); % встановити нормальний генератор
x=rand(N,1); % згенерувати нормальну послідовність даних
y=filter(b,1,x); % фільтрувати вхідну послідовність фільтром
% з імпульсною характеристикою-сплайновим базисом
% або породжуючою функцією
plot(y) % зобразити профільтровані дані
pause %
r=N/n; % число вузлів сплайна
P=creat_ss(n,r); % матриця планування для синусоподібного базису
X=creat_ps(1:n:N,1:N,N,r,2); % матриця планування для кубічного базису
C=P'*P; % розв'язок МНК для синусоподібного базису
B=P'*y; %
A=inv(C)*B; %
CX=X*X; % розв'язок МНК для кубічного базису
```

```

BX=X'*y;
AX=inv(CX)*BX;    %

s=P*A;            % відліки сплайна в синусоподібному базисі
sx=X*AX;          % відліки сплайна в кубічному базисі
plot(t,y,'w.',t,s,'w',t,sx,'w')    % зобразити сплайни

% I0001.m
% дослідження сплайнових фільтрів
%

% завантаження імпульсних характеристик МНК фільтрів
% (через проекційну матрицю)
load Hee.txt -ascii;    %ермітів експоненційний
load H3.txt -ascii;    %ермітів кубічний
load Hes.txt -ascii;    %ермітів синусоподібний
load He.txt -ascii;    %експоненційний В-форма
load Hs.txt -ascii;    %синусоподібний В-форма
%[be,f]=expspl(32);    %формуєча сигнал функція (експоненційна В-форма)
[be,f]=sinspl(32);    %формуєча сигнал функція (синусоподібна В-форма)

s=[];
m=[];
%формування вибірки даних
for ds=2:4,
for nv=1:20,
nv
N=2*1024;            %обсяг вхідних даних
n=32;                %число даних на фрагменті
d=randn(N,1);        %нормальний білий шум
xe=filter(be(1:32*4),1,d);    %отримання вихідного сигналу
ye=xe+randn(N,1)*ds;    %додавання адитивного шуму
t=[1:N];
plot(t,xe,t,ye);
pause(2);

%фільтрація пряма реалізація ермітова форма
se=filter(Hee,1,ye);
s3=filter(H3,1,ye);
ss=filter(Hes,1,ye);

%фільтрація пряма реалізація В-форма
sbe=filter(He,1,ye);
sbs=filter(Hs,1,ye);

%фільтрація у вікні ермітова форма
we=wsple32(ye);
w3=wspl332(ye);
ws=wspls32(ye);

```

%фільтрація у вікні В-форма

wbe=wsplbe32(ye);

wbs=wsplbs32(ye);

% статистика

% залишки

e(1:N-8*32,1)=ye(1:N-8*32)-sbe(8*32+1:N);

e(1:N-6*32,2)=ye(1:N-6*32)-se(6*32+1:N);

e(1:N-6*32,3)=ye(1:N-6*32)-s3(6*32+1:N);

e(1:N-9*32,4)=ye(1:N-9*32)-sbs(9*32+1:N);

e(1:N-4*32,5)=ye(1:N-4*32)-ss(4*32+1:N);

e(1:N-6*32,6)=ye(1:N-6*32)-we(6*32+1:N);

e(1:N-6*32,7)=ye(1:N-6*32)-wbe(6*32+1:N);

e(1:N-6*32,8)=ye(1:N-6*32)-w3(6*32+1:N);

e(1:N-6*32,9)=ye(1:N-6*32)-ws(6*32+1:N);

e(1:N-6*32,10)=ye(1:N-6*32)-wbs(6*32+1:N);

e(1:N,11)=ye-xe;

e(1:N,12)=xe;

e(1:N,13)=ye;

%

s=[s;std(e)];

%

u(1:N-8*32,1)=xe(1:N-8*32)-sbe(8*32+1:N);

u(1:N-6*32,2)=xe(1:N-6*32)-se(6*32+1:N);

u(1:N-6*32,3)=xe(1:N-6*32)-s3(6*32+1:N);

u(1:N-9*32,4)=xe(1:N-9*32)-sbs(9*32+1:N);

u(1:N-4*32,5)=xe(1:N-4*32)-ss(4*32+1:N);

u(1:N-6*32,6)=xe(1:N-6*32)-we(6*32+1:N);

u(1:N-6*32,7)=xe(1:N-6*32)-wbe(6*32+1:N);

u(1:N-6*32,8)=xe(1:N-6*32)-w3(6*32+1:N);

u(1:N-6*32,9)=xe(1:N-6*32)-ws(6*32+1:N);

u(1:N-6*32,10)=xe(1:N-6*32)-wbs(6*32+1:N);

t=1:N-6*32;

wt=5;

plot(1:N-8*32,xe(1:N-8*32),1:N-8*32,sbe(8*32+1:N)); title('1'); pause(wt);

plot(t,xe(1:N-6*32),t,se(6*32+1:N)); title('2'); pause(wt);

plot(t,xe(1:N-6*32),t,s3(6*32+1:N)); title('3'); pause(wt);

plot(1:N-9*32,xe(1:N-9*32),1:N-9*32,sbs(9*32+1:N)); title('4'); pause(wt);

plot(1:N-4*32,xe(1:N-4*32),1:N-4*32,ss(4*32+1:N)); title('5'); pause(wt);

plot(t,xe(1:N-6*32),t,we(6*32+1:N)); title('6'); pause(wt);

plot(t,xe(1:N-6*32),t,wbe(6*32+1:N)); title('7'); pause(wt);

plot(t,xe(1:N-6*32),t,w3(6*32+1:N)); title('8'); pause(wt);

plot(t,xe(1:N-6*32),t,ws(6*32+1:N)); title('9'); pause(wt);

plot(t,xe(1:N-6*32),t,wbs(6*32+1:N)); title('10'); pause(wt);

%

m=[m;max(abs(u))];

save ssss s m

end

end

Функція на “С” згенерована генератором МНК сплайн-фільтрів разом з основним модулем для тестування функції.

/* fir8.c

Кубічний ермітів сплайн n=8 mas=10000

елементи функції форми x1 x2 x3 x4

| | | | |
|------|--------|-------|------|
| +0 | +10000 | +0 | +0 |
| -478 | +9638 | +908 | -68 |
| -703 | +8671 | +2265 | -233 |
| -732 | +7275 | +3896 | -439 |
| -625 | +5625 | +5625 | -625 |
| -439 | +3896 | +7275 | -732 |
| -234 | +2265 | +8671 | -702 |
| -68 | +908 | +9638 | -478 |

Ненульові елементи коваріаційної матриці МНК

-35 122 -288 1635 -288 122 -35

*/

int *spline_fir(unsigned int *x, int *y, int n, int add)

/* x - вхідні дані ; y - вихідні дані ; n - кількість відліків */

/* add 0 - стиснення; 1 - вхідна частота */

{

int i, j ;

long int x1[8]={ +0, \
-478, -703, -732, -625, -439, -234, \
-68 } ;

long int x2[8]={ +10000, \
+9638, +8671, +7275, +5625, +3896, +2265, \
+908 } ;

long int x3[8]={ +0, \
+908, +2265, +3896, +5625, +7275, +8671, \
+9638 } ;

long int x4[8]={ +0, \
-68, -233, -439, -625, -732, -702, \
-478 } ;

int long sm01=0l, sm02=0l, sm03=0l, sm04=0l ;

int long sm12=0l, sm13=0l, sm14=0l;

int long sm23=0l, sm24=0l;

int long sm34=0l;

int long B[7] ;

int long A[4] ;

int long dot ;

int dt=0 ;

/* для зменшення перехідного процесу */

dot=(int long)x[0] ;

for (j=0 ; j<8 ; j++) {

sm01=sm01+x1[j]*dot;

sm02=sm02+x2[j]*dot;

sm03=sm03+x3[j]*dot;

sm04=sm04+x4[j]*dot; }

```

sm12=sm02; sm13=sm03; sm14=sm04;
    sm23=sm03; sm24=sm04;
        sm34=sm04;
    B[6]=(sm34+sm23+sm12+sm01)/10000;
for ( j=0 ; j<7 ; j++ ) B[j]=B[6] ;
A[0]=dot ; sm01=0l;
A[1]=dot ; sm02=0l;
A[2]=dot ; sm03=0l;
A[3]=dot ; sm04=0l;

/* фільтрація */
for ( i=0 ; i<n ; i++ ) {
    dot=(int long)x[i] ; /* отримання вхідних даних */
    sm01=sm01+x1[dt]*dot;
    sm02=sm02+x2[dt]*dot;
    sm03=sm03+x3[dt]*dot;
    sm04=sm04+x4[dt]*dot;
    dt++ ;

if ( dt==8 ) { dt=0 ;
for ( j=0 ; j<7 ; j++ ) B[j]=B[j+1] ;

B[6]=(sm34+sm23+sm12+sm01)/10000l ;
sm12=sm02;

sm23=sm13;
sm13=sm03;

sm34=sm24;
sm24=sm14;
sm14=sm04;

sm01=0l;
sm02=0l;
sm03=0l;
sm04=0l;

A[0]=A[1]; A[1]=A[2]; A[2]=A[3];
A[3]=-35*(B[0]+B[6])+122*(B[1]+B[5])-288*(B[2]+B[4])+1635*B[3] ;
A[3]=A[3]/10000l ;
if (add) {
    /* відновити вхідну послідовність */
for ( j=0 ; j<8 ; j++ )
y[i-7+j]=(int)((A[0]*x1[j]+A[1]*x2[j]+A[2]*x3[j]+A[3]*x4[j])/10000l);
    }
else
/* альтернативно без відновлення (стиснення у 8 раз ) */
y[i/8]=(int)A[3];
    } }
return y;
}

```

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
int main(int argv, char *argc[])
{
FILE *f = stdin ;
char str[81];
int i=0,n=0;
unsigned int *d;
int *y, add=1 ;

if (argv>=2) f=fopen(argc[1],"rt");
if (argv>=3) add=atoi(argc[2]);

d=(unsigned int *)calloc(32000,sizeof(unsigned int));
if ( d==NULL ) return -1;
y=(int *)calloc(32000,sizeof(int));
if ( y==NULL ) return -2;

while (1) {
    if (fgets(str,80,f)==NULL) break;
    d[n]=(int)atoi(str);
    n++;
    if (n>32000) break ;
    }
    n--;

y=spline_fir( d, y, n, add );

if (add<1) n=n/8+1;
for ( i=0; i<n; i++ )
    printf("%d\n",y[i]);

return 0;
}

```