Міністерство освіти і науки України
Криворізький державний педагогічний університет
Кафедра математики

П.І.Ульшин
І.В.Лов'янова

Диференціальні рівняння в частинних похідних

Навчальний посібник для студентів

За редакцією професора В.В. Корольського

Кривий Ріг
2007

УДК

Рецензенти:

В.М. Серебрєніков, кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики Криворізького технічного університету.

О.В. Віхрова, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики Криворізького державного педагогічного університету.

Л.О. Черних, кандидат педагогічних наук, доцент, член науково-методичної ради Криворізького державного педагогічного університету.

Друкується за рішенням Вченої ради Криворізького державного педагогічного університету (протокол №5 від 13 грудня 2007 року).

Ульшин П.І., Лов'янова І.В. Диференціальні рівняння в частинних похідних. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. / Під заг. ред. проф. В.В. Корольського — Кривий Ріг: КДПУ, 2007. – 142 с.

У навчальному посібнику розглядається теорія і практика диференціальних рівнянь з частинними похідними призначені для вивчення студентами як на лекціях і практичних заняттях, так і підчас самостійної роботи. Дібрано зміст навчального матеріалу у відповідності з діючою навчальною програмою і вимогами до підготовки студентів з названої дисципліни.

Для викладачів і студентів математичних спеціальностей пед.вузів.

ПЕРЕДМОВА

Для розв'язання багатьох фізичних задач необхідно знайти ту чи іншу функціональну залежність. У загальному випадку будь-яке фізичне явище (процес) являє собою зміну фізичних величин у просторі і часі. Тому, взагалі кажучи, математичне поле описується функціями чотирьох незалежних змінних x, y, z, t. Задача полягає у знаходженні цих функцій. Знайти шукані функції можна розв'язуючи функціональні рівняння, які складено на основі закономірностей, які керують розглядуваними фізичними явищами. Як правило ці функціональні рівняння окрім шуканої функції багатьох змінних містять також її частинні похідні з незалежними змінними. Такі рівняння називають диференціальними рівняннями із частинними похідними. Вивченням методів складання і, головне, інтегрування рівнянь такого роду займається розділ математичної фізики, який називається теорія диференціальних рінянь з частинними похідними.

За сучасною програмою з навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння» для студентів спеціальності: 6.010100. Педагогіка і методика середньої освіти. Математика. Освітньо-кваліфікаційний рівень: бакалавр розділ « Диференціальні ріняння з частинними похідними» вивчається у сьомому навчальному семестрі. На вивчення розділу відводиться 45 годин аудиторних занять, 18 годин самостійної роботи, вид контролю: залік.

Наведемо структуру залікового кредиту з названого розділу (таблиця 1), а також зміст і вимоги до теоретичної і практичної підготовки студентів з тем , які складають розглядувані модулі.

Змістовий модуль 4.

Диференціальні рівняння в частинних похідних.

Тема 1. Поняття про рівняння з частинними похідними.

Тема 2. Канонічний вид диференціального рівняння другого порядку.

Теоретичні знання.

Студент повинен знати:

- поняття лінійного рівняння другого порядку із частинними похідними;

Таблиця 1.

Структура залікового кредиту

Тема	**Кількість годин, відведених на**			
	лекції	**практи-чні заняття**	**самост-ійну роботу**	**консуль-тативну роботу**
Змістовний модуль 4. Диференціальні рівняння в частинних похідних.				
Тема 1. Поняття про рівняння з частинними похідними.	2	4	2	
Тема 2. Канонічний вид диференціального рівняння другого порядку.	4	6	4	
Модуль-контроль № 4.	-	2	-	
Змістовний модуль 5. Застосування диференціальних рівнянь з частинними похідними до дослідження процесів реальної дійсності.				
Тема 1. Постановка задач математичної фізики. Рівняння гіперболічного типу: рівняння коливань струни.	4	6	4	
Тема 2. Рівняння параболічного типу. Рівняння теплопровідності.	4	6	4	
Тема 3. Рівняння еліптичного типу. Рівняння Лапласа. Задача Діріхле для круга. Інтеграл Пуассона.	2	4	4	
Модуль-контроль № 5.	-	2	-	
Разом:	**16**	**30**	**18**	

- типи рівнянь другого порядку із частинними похідними;
- алгоритм зведення рівняння другого порядку з частинними похідними до канонічного виду.

Практичні уміння і навички.

Студент повинен уміти:

- розв’язувати найпростіші диференціальні рівняння з частинними похідними у канонічній формі;
- визначати тип лінійного рівняння другого порядку з частинними похідними;
- визначати тип лінійного рівняння вздовж заданого розв’язку;
- визначати тип заданого рівняння на певній області, зводити рівняння кожного типу (гіперболічного, еліптичного, параболічного) до канонічного виду в тій області, де рівняння зберігає тип.

Змістовий модуль 5.

Застосування диференціальних рівнянь з частинними похідними до дослідження процесів реальної дійсності.

Тема 1. Постановка задач математичної фізики. Рівняння гіперболічного типу: рівняння коливань струни.

Тема 2. Рівняння параболічного типу. Рівняння теплопровідності.

Тема 3. Рівняння еліптичного типу. Рівняння Лапласа. Задача Діріхле для круга. Інтеграл Пуассона.

Теоретичні знання.

Студент повинен знати:

- правила виведення рівнянь: коливання струни, теплопровідності, Лапласа;
- методи Даламбера і Фур’є розв’язування рівнянь математичної фізики.

Практичні уміння і навички.

Студент повинен уміти:

- розв’язувати рівняння математичної фізики з відповідними початковими і граничними умовами.

Оскільки в діючих навчальних посібниках більш широко представлено саме рівняння математичної фізики, проте задачі на засвоєння основних теоретичних положень курсу представлено не завжди у систематизованому вигляді, розрізнено в багатьох джерелах, то в даному навчальному посібнику

“Диференціальні рівняння в частинних похідних” призначеному для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів, дібрано і систематизовано матеріал для практичних занять, самостійної роботи з теорії і практики з таких тем: «Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку», «Диференціальні рівняння з частиними похідними другого порядку», «Рівняння математичної фізики».

Навчальний посібник складається із чотирьох розділів і списку літератури.

У першому розділі подається історичний матеріал, який описує процес виникнення і розвитку теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Розповідається про принципи складання рівнянь, які описують різні явища і процеси, що відбуваються в природі і досліджуються в багатьох галузях науки і техніки. Також перший розділ розглядає вивчення диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку. В ньому розглядаються методи розв’язування лінійних, квазілінійних і нелінійних диференціальних рівнянь. Знаходяться загальні розв’язки та розв’язки задачі Коші. Матеріал цього розділу може бути використаний студентами спеціальності «Інформатика» під час виконання самостійної роботи.

Другий розділ присвячений постановці і розв’язуванню задач на методи математичної фізики. Тут розглядаються диференціальні рівняння в частинних похідних другого порядку. Вони описують різні фізичні процеси: механічні коливання струни, стержня, мембрани; коливання струму і напруги в електричних мережах; передавання теплоти, дифузію і ін. При вивченні кожного виду диференціальних рівнянь наводяться приклади їх розв’язування.

В третьому розділі розроблено зміст практичних занять у відповідності з робочою програмою дисципліни.

В четвертому розділі підібрано вправи і задачі, призначені для самостійного опрацювання під час закріплення розглянутого теоретичного матеріалу. Матеріал цього розділу стане у нагоді студентам спеціальності «Математика і інформатика» під час засвоєння тем змістовного модуля

«Диференціальні рівняння з частинними похідними», виконаня самостійної роботи та підготовки до модуль-контродю, а також студентам спеціальності «Фізика і інформатика» на заняттях дисципліни «Рівняння математичної фізики».

Згідно навчальних планів більше 30% навчального матеріалу відводиться на самостійне опрацювання. В зв’язку з цим у даному посібнику представлено майже весь теоретичний матеріал, що входить до самостійної роботи студентів. Студентам рекомендується читання та конспектування цього навчального посібника супроводжувати розв’язанням задач, які даються у тексті та в третьому і четвертому розділах.

У посібнику використані матеріали розроблені і апробовані доцентами Ульшиним П.І. та Лов’яновою І.В.

РОЗДІЛ І.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Короткі історичні відомості про диференціальні рівняння

Відкриття інтегрального і диференціального числення відноситься до другої половини XVII століття. Творцями його вважаються англійський математик І.Ньютон (1643—1727) і німецький математик Г.Лейбніц (1646—1716).

Слід відмітити, що дії інтегрування і диференціювання з'явилися не на пустому місці. Їх існування було передбачено ще в античний період. Відомо, що діленням на елементарні частини, а потім додаванням їх користувався видатний вчений Стародавньої Греції Архімед (ІІ ст. до н.е.) при визначенні площі круга, об'ємів кулі, кругового циліндра і кругового конуса. Він також застерігав, що для довільної форми тіл його методом користуватися не можна.

На початку XVII ст. швидкими темпами почали розвиватися наука і техніка, які вимагали точних розрахунків. В цей період над створенням нових методів обчислення працювали видатні вчені: Й.Кеплер (1571—1630), Б.Паскаль (1623—1662), П.Ферма (1601—1665), Х.Гюйгенс (1629—1695), І.Барроу (1630—1677). Наукові роботи цих вчених прискорили створення інтегрального і диференціального числення.

У XVIII і XIX століттях ці нові методи обчислення були обґрунтовані і знайшли широке застосування у наукових роботах вчених: О.Коші (1789—1857), Г.Монжа (1746—1818), Ж.Лагранжа (1736—1813), Ж.Даламбера (1717—1783), Л.Ейлера (1707—1783), Д.Бернулі (1700—1782), У.Гамільтона (1805—1865), К.Вейерштраса (1815—1879), Д.Максвелла (1831—1879) і ін.

В кінці XIX ст. у математиці з'явився новий розділ: "Диференціальні рівняння". Він складається з двох частин: "Звичайні диференціальні рівняння" і “Диференціальні рівняння у частинних похідних”. Цей розділ математики має прикладний характер, оскільки за допомогою диференціальних рівнянь можна найбільш точно записати будь-які явища чи процеси, які відбуваються у природі і техніці. Методи розв’язування диференціальних рівнянь розробляли у своїх працях: А.Клеро (1713—1765), Ж.Фурь’є (1768—1830), Д.Гільберт (1862—1943), Б.Г.Гальоркін (1871—1945), Д.О.Граве (1863—1939), М.М.Крилов (1879—1955), М.В.Остроградський (1801—1862) і багато інших вчених.

1.2. Поняття про диференціальні рівняння та їх розв’язки

Диференціальним рівнянням називається таке рівняння, яке містить в собі незалежні змінні, невідомі функції та їх диференціали (або похідні).

Порядок найвищої похідної, що входить у диференціальне рівняння, зветься порядком цього рівняння.

Якщо невідома функція, яка входить у рівняння, залежить від одного аргументу, то рівняння називається звичайним диференціальним рівнянням. Якщо ж невідома функція залежить від двох або більше незалежних змінних, то рівняння називається диференціальним рівнянням з частинними похідними.

Розв’язком диференціального рівняння називається функція, яка при підстановці в диференціальне рівняння перетворює його в тотожність. Сімейство розв’язків, в яке входять всі без винятку розв’язки диференціального рівняння, називається загальним розв’язком. Процес знаходження розв’язків диференціального рівняння називається інтегруванням. диференціальне рівняння називається зінтегрованим , якщо його розв’язки знайдено в явному вигляді, або визначаються певним рівнянням. Рівняння, яке визначає розв’язок диференціального рівняння, називається інтегралом диференціального рівняння.

Звичайне диференціальне рівняння n-ого порядку має такий загальний вигляд

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

Загальний розв'язок рівняння (1) записується так

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right), \qquad (2)$$

а загальний інтеграл —

$$\Phi\left(x, y, C_1, C_2, ..., C_n\right) = 0\,, \qquad (3)$$

де x – незалежна змінна, y – функція, C_1 , C_2 ,... C_n – довільні сталі.

При певних значеннях довільних сталих загальний розв'язок перетворюється у частинний розв'язок.

Загальний вигляд диференціального рівняння з частинними похідними можна записати так

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}; ... \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = 0\,, \qquad (4)$$

де x_1, x_2 ,..., x_n – незалежні змінні, $u = u\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ – невідома функція, n – кількість змінних, m – порядок диференціювання.

Загальний інтеграл диференціального рівняння (4) містить незалежні змінні і довільні функції

$$\Phi\left(x_1, x_2, ..., x_n, \varphi_{1,}, \varphi_2, ..., \varphi_m\right) = 0\,. \qquad (5)$$

Надалі будемо вивчати теорію і практику пов'язану з диференціальними рівняннями в частинних похідних. Спочатку розглянемо найпростіші рівняння такого виду і їх розв'язування; потім рівняння першого порядку, а далі — другого порядку.

Розглянемо приклади розв'язування найпростіших диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Приклад №1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y\,.$$

Розв'язання. Припустимо, що $y = const$. В цьому випадку функція u залежить лише від однієї змінної x, тому $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx}$. Зінтегруємо дане рівняння по dx:

$\int \frac{du}{dx} \cdot dx = \int (2x + y) \cdot dx$, $u = x^2 + yx + \varphi(y)$, де $\varphi(y)$ – довільна функція. Враховуючи, що x і y – незалежні змінні, запишемо загальний розв'язок даного рівняння: $u(x, y) = x^2 + yx + \varphi(y)$.

Для того, щоб переконатися, що рівняння розв'язано вірно, потрібно взяти частинну похідну по x від одержаної функції і підставити її в дане рівняння. Легко бачити, що одержиться тотожність: $2x + y = 2x + y$.

Приклад №2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 6x + 4y.$$

Розв'язання. Оскільки диференціальне рівняння третього порядку, то тричі треба інтегрувати, щоб знайти невідому функцію. Зінтегруємо дане рівняння двічі по dx, припускаючи при цьому $y = const$, і один раз по dy, припускаючи $x = const$.

1). $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \int (6x + 4y) dx = 3x^2 + 4yx + \varphi_1(y)$,

2). $\frac{\partial u}{\partial y} = \int \left(3x^2 + 4yx + \varphi_1(y)\right) dx = x^3 + 2yx^2 + x \cdot \varphi_1(y) + \varphi_2(y)$,

3). $u = \int \left(x^3 + 2yx^2 + x\varphi_1(y) + \varphi_2(y)\right) dy = x^3 y + x^2 y^2 + x \cdot \int \varphi_1(y) dy + \int \varphi_2(y) dy + \varphi_3(x)$

Ввівши позначення: $\psi_1(y) = \int \varphi_1(y) dy$, $\psi_2(y) = \int \varphi_2(y) dy$, — одержимо шукану функцію у такому вигляді

$u(x, y) = x^3 y + x^2 y^2 + x \cdot \psi_1(y) + \psi_2(y) + \psi_3(x)$

Перевірка: Візьмемо частинні похідні від одержаної функції двічі по x і один раз по y, одержимо: $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 y + 2xy^2 + \psi_1(y) + \psi_3'(x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6xy + 2y^2 + \psi_3''(x)$,

$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 6x + 4y$. Підставляючи знайдене значення в дане рівняння, одержимо тотожність: $6x + 4y = 6x + 4y$.

Отже, одержана функція є розв'язком даного рівняння. Замітимо, що одержаний загальний розв'язок має три довільні функції: $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ і $\psi_3(x)$, — оскільки диференціальне рівняння було третього порядку.

Приклад №3. Знайти загальний розв'язок рівняння $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, підібравши спочатку частинний розв'язок.

Розв'язання. Легко бачити, що частинним розв'язком рівняння є функція: $u(x, y) = x - y$. Дійсно: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -1$. Вибрана функція задовольняє рівняння. Загальний розв'язок даного рівняння можна записати так: $u(x, y) = \varphi(x - y)$, де φ – диференційовна функція.

Перевірка. Знайдемо частинні похідні по x і по y від загального розв'язку, дивлячись на нього, як на складну функцію: $u(x, y) = \varphi(z)$, де $z = x - y$. Маємо $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -\varphi'$. Якщо підставити знайдені значення у дане рівняння, то воно перетвориться у тотожність. Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено вірно.

Приклад №4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = y \cdot \ln x$$

Розв'язання. Зінтегруємо дане рівняння спочатку по dx, приймаючи $y = const$, а потім по dy, взявши $x = const$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int y \cdot \ln x \cdot dx = y \int \ln x \cdot dx = \begin{vmatrix} \ln x = u, & \frac{dx}{x} = du \\ dx = dv, & x = v \end{vmatrix} = y\left[x \ln x - \int dx\right] = y\left[x(\ln x - 1) + \varphi_1(y)\right];$$

$$u(x, y) = \int \left[xy(\ln x - 1) + y \cdot \varphi_1(y)\right] dy = \frac{y^2}{2} x(\ln x - 1) + \int y \cdot \varphi_1(y) dy + \psi_2(x).$$

Позначимо: $\int y \cdot \varphi_1(y)dy = \psi_1(y)$. Загальний розв'язок рівняння запишеться у такому вигляді:

$$u(x,y) = \frac{y^2}{2}x(\ln x - 1) + \psi_1(y) + \psi_2(x).$$

При розв'язанні диференціальних рівнянь в частинних похідних часто виконується перехід до звичайних диференціальних рівнянь, які розв'язуються відомими методами.

1.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням в частинних похідних першого порядку називається рівняння виду

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \qquad (1)$$

де $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$– невідома функція від незалежних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, визначені у деякій області $D \subset R^n$ n-вимірного простору.

Щоб зінтегрувати лінійне однорідне рівняння (1), складають систему звичайних диференціальних рівнянь, яка відповідає рівнянню (1):

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n}, \qquad (2)$$

і називається системою рівнянь характеристик, записаною у симетричній формі. У системі (2) $(n-1)$-рівняння.

Із системи рівнянь (2) знаходять $(n-1)$ перші незалежні інтеграли, які записують у такій формі

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1}, \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Ці перші інтеграли називаються характеристиками рівняння (1), або фазовими лініями рівняння, або гіперповерхнями.

Загальний розв'язок рівняння (1) записується так

$$u(x_1, x_2, ..., x_n) = F(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}), \tag{4}$$

де F – довільна диференційовна функція від $(n-1)$ аргументів $\varphi_1, \varphi_1, ... \varphi_{n-1}$.

Систему рівнянь характеристик (2) можна записати у параметричній формі. Позначимо відношення в рівняннях (2) через dt, де t – параметр. Рівняння (2) записується так

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1, \ \frac{dx_2}{dt} = a_2, ..., \frac{dx_n}{dt} = a_n, \tag{5}$$

Покажемо, що загальний розв'язок (4) знайдений правильно. Знайдемо частинні похідні від функції $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ по її аргументах:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = F' \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} \right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = F' \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2} \right); ...; \ \frac{\partial u}{\partial x_n} = F' \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + ... + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} \right).$$

Оскільки у рівняннях (3) $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$ – довільні сталі, то похідні від них дорівнюють нулеві. Підставивши значення частинних похідних у рівняння (1), перетворимо його у тотожність.

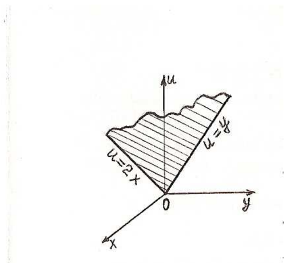
Приклад №1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Розв'язання. Складаємо рівняння характеристик: $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$. Знаходимо перший інтеграл: $x\,dx = y\,dy$, $x^2 - y^2 = C_1$. Загальний розв'язок рівняння має вигляд: $u(x, y) = F(x^2 - y^2)$.

Задачею Коші для рівняння (1) називається задача про знаходження розв'язку $u = u(x)$ (де $x = x(x_1, x_2, ..., x_n)$– точка) цього рівняння, який задовольняє умові: $u(x)\Big|_{x \in \gamma} = \varphi(x)$, — де γ – деяка гладка гіперповерхня у D, а $\varphi(x)$– дана гладка функція на цій гіперповерхні. Гіперповерхня γ називається початковою гіперповерхнею, а функція $\varphi(x)$ — початковою умовою. Точка x на початковій гіперповерхні γ називається нехарактеристичною, якщо характеристика, яка проходить через цю точку, трансверсальна (не дотична) до початкової гіперповерхні. Отже розв'язком задачі Коші є частинний розв'язок диференціального рівняння в частинних похідних, який задовольняє початковій умові.

Приклад №2. Знайти розв'язок рівняння: $\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0$, — який задовольняє умові: $u(0,y)=y$. Другими словами: розв'язати задачу Коші.



Мал.1.

Розв'язання. Складаємо рівняння характеристик: $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-2}$. Знаходимо характеристики: $2x+y=C$. Загальний розв'язок даного диференціального рівняння: $u(x,y)=F(2x+y)$, де F – довільна неперервно-диференційована функція. Вона визначає множину площин у просторі. Знайдемо ту з них, яка проходить у площині: $x=0$ через пряму $u=y$. Виключимо x і y із рівнянь: $x=0$, $u=y$, $2x+y=C$, одержимо: $u=C$. Підставимо в це рівняння замість C — його значення. Одержимо шуканий розв'язок: $u(x,y)=2x+y$. Він визначає площину, що проходить через початок координат, мал.1.

1.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням в частинних похідних першого порядку називається рівняння виду

$$a_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+a_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=b, \tag{6}$$

де $u=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$– невідома функція, $a_1,a_2,\ldots,a_n,b$– коефіцієнти рівняння, які залежать від аргументів $x_1,x_2,\ldots,x_n$, або постійні дійсні числа, визначені в деякій області $D\subset R^n$, n-вимірного простору.

Для розв'язання рівняння (6) складають систему рівнянь характеристик (у симетричній формі):

$$\frac{dx_1}{a_1}=\frac{dx_2}{a_2}=\ldots=\frac{dx_n}{a_n}=\frac{du}{b}. \qquad (7)$$

Із системи (7) знаходять n перших незалежних інтегралів, які записують у такій формі

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n,u)=C_1,\\ \varphi_2(x_1,x_2,...,x_n,u)=C_2,\\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\ \varphi_n(x_1,x_2,...,x_n,u)=C_n,\end{array}\right\} \qquad (8)$$

Загальний розв'язок записується так

$$F(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)=0, \qquad (9)$$

де F – довільна неперервна і диференційовна функція, залежна від $x_1,x_2,...,x_n,u$. У випадку, коли невідома функція знаходиться лише в останньому інтегралі, то розв'язок можна записати в явному вигляді

$$u(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{\psi(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{n-1})}{f(x_1,x_2,...,x_n)}. \qquad (10)$$

Рівняння характеристик можна записати і в параметричній формі:

$$\frac{dx_1}{dt}=a_1,\ \frac{dx_2}{dt}=a_2,\ .\ .\ .\ ,\ \frac{dx_n}{dt}=a_n,\ \frac{du}{dt}=b. \qquad (11)$$

Приклад №1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y^2\frac{\partial u}{\partial x}+xy\frac{\partial u}{\partial y}=x.$$

Розв'язання. Складаємо рівняння характеристик: $\frac{dx}{y^2}=\frac{dy}{xy}=\frac{du}{x}$. Знаходимо два перші інтеграли: 1). $\frac{dx}{y^2}=\frac{dy}{xy}$, $x\,dx=y\,dy$, $x^2-y^2=C_1$. 2). $\frac{dy}{xy}=\frac{du}{x}$, $du=\frac{dy}{y}$, $u-\ln y=C_2$. Загальний розв'язок диференціального рівняння запишеться так: $F(x^2-y^2;\,u-\ln y)=0$. Розв'язок явного виду: $u-\ln y=f(x^2-y^2)$ або $u(x,y)=\ln y+f(x^2-y^2)$, де $f(x^2-y^2)$– неперервна, диференційовна функція.

Задача Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними (6), як і для однорідного (1), полягає у знаходженні розв'язку $u=u(x)$, де $x(x_1,x_2,...,x_n)$, цього рівняння, який задовольняє умові:

$u(x)\Big|_{x\in\gamma} = \varphi(x)$, де γ – деяка гладка гіперповерхня в області D, $\varphi(x)$– дана гладка функція на цій поверхні. Гіперповерхня γ називається початковою гіперповерхнею, а функція $\varphi(x)$ — початковою умовою. Точка x на початковій гіперповерхні γ називається нехарактеристичною, якщо характеристика, яка проходить через цю точку, трансверсальна (не дотична) до початкової гіперповерхні.

Задача Коші для рівняння (6) у достатньо малому околі будь-якої нехарактеристичної точки x_0 початкової поверхні γ має розв'язок і при тому єдиний. Цей розв'язок визначається за формулою:

$$u(g(x,t)) = \varphi(x) + \int_0^t b(g(x,\tau))d\tau\,, \tag{12}$$

де $g(x,t)$– значення розв'язку рівняння характеристик (з початковою умовою $g(x,0)=0$ на початковій поверхні) у момент часу t.

Приклад №2. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2$$

при початковій умові: $u(0;y) = \dfrac{1}{y^2}$.

Розв'язання. І спосіб. Запишемо рівняння характеристик у параметричній формі: $\dfrac{dx}{dt} = y$; $\dfrac{dy}{dt} = -x$

Знайдемо розв'язки цих рівнянь у параметричній формі:

$$x = C_1 \sin t + C_2 \cos t\,,$$

$$y = C_1 \cos t - C_2 \sin t\,,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Вірність одержаних розв'язків легко перевірити диференціюванням їх по параметру t: $\dfrac{dx}{dt} = C_1 \cos t - C_2 \sin t = y$, $\dfrac{dy}{dt} = -C_1 \sin t - C_2 \cos t = -x$. У початкових умовах параметр $t=0$, — а незалежні змінні: $x(0)=0$, $y(0)=y$. Із розв'язків знаходимо при $t=0$: $C_2 = 0$, $C_1 = y$. Крім того $\varphi(x) = u(0;y) = \dfrac{1}{y^2}$.

Введемо позначення: $x = g_1(t,x,y)$, $y = g_2(t,x,y)$. Знаходимо: $x = g_1(t,x,y) = y \cdot \sin t$; $y = g_2(t,x,y) = y \cdot \cos t$. Згідно формули (12): $u(y \cdot \sin t; y \cdot \cos t) =$ $\frac{1}{y^2} + \int_0^t y^2 \left(\cos^2 \tau - \sin^2 \tau\right) d\tau = \frac{1}{y^2} + \int_0^t y^2 \cos 2\tau \, d\tau = \frac{1}{y^2} + \frac{y^2}{2} \sin 2t$.

Замінимо змінні: $y \cdot \sin t$ на x, $y \cdot \cos t$ на y, $\sin 2t = 2 \sin t \cdot \cos t$, $y^2 = y^2 \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) = y^2 \sin^2 t + y^2 \cos^2 t$ замінимо на $x^2 + y^2$; $y \sin t \cdot y \cos t$ — на $x \cdot y$.

Розв'язок задачі Коші має вигляд: $u(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2} + x \cdot y$. Він задовольняє одночасно і дане рівняння і початкову умову.

1.5. Квазілінійні диференціальні рівняння

Квазілінійним диференціальним рівнянням з частинними похідними першого порядку називається рівняння виду

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = b, \tag{13}$$

де $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – невідома функція з n незалежними змінними, $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ – коефіцієнти рівняння, неперервні функції від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$ визначені в деякій області D своїх змінних. Рівняння (13) відрізняється від рівняння (6) тим, що в ньому коефіцієнти можуть залежати як від незалежних змінних так і від невідомої функції.

Рівняння характеристик для квазілінійного диференціального рівняння першого порядку (13) записується так, як і для лінійного (6), а саме:

а). У симетричній формі

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b}. \tag{14}$$

б). У параметричній формі

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1, \ \frac{dx_2}{dt} = a_2, \ . \ . \ . \ , \ \frac{dx_n}{dt} = a_n, \ \frac{du}{dt} = b. \tag{15}$$

Задача Коші для квазілінійного диференціального рівняння полягає в тому, щоб знайти функцію $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка є розв'язком диференціального рівняння (13) і задовольняє початковій умові: $u(x_1,x_2,...,x_n)\Big|_{x\in\gamma}=\varphi(x)$, де для будь-якої нехарактеристичної точки x, яка належить початковій гладкій гіперповерхні γ, функція u перетворюється у $\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$. В $n-$вимірному евклідовому просторі E_n гіперповерхня γ має $(n-1)$-вимір.

Початкова умова $(\gamma,\varphi(x))$ називається нехарактеристичною для диференціального рівняння (13) у точці x_0 на гіперповерхні γ, якщо характеристика, що проходить через цю точку трансверсальна, тобто не дотична до початкової поверхні γ, а тому напрямний вектор її $\vec{a}(x_0,u_0)=\vec{a}(a_1,a_2,...,a_n)$, де $u_0=\varphi(x_0)$, в цій точці не дотикається до поверхні γ.

Якщо знайдено n перших незалежних інтегралів із рівнянь характеристик (14)

$$\Psi_i(x_1,x_2,...,x_n,u)=C_i,\ i=1,2,...,n, \tag{16}$$

то загальний розв'язок рівняння (13) записується так $F(\Psi_1,\Psi_2,...,\Psi_n)=0$, де $F-$ довільна диференційовна функція.

Щоб знайти розв'язок $u=u(x_1,x_2,...,x_n)$ рівняння (13), який задовольняв би початковій умові $u\Big|_{x\in\gamma}=\varphi(x)$, де гіперповерхня γ задана рівнянням $f(x_1,x_2,...,x_n)=0$, потрібно із системи рівнянь

$$\begin{cases} f(x_1,x_2,...,x_n)=0, \\ \varphi_i(x_1,x_2,...,x_n)=C_i, \\ u=\varphi(x_1,x_2,...,x_n), \quad (i=1,2,...,n) \end{cases} \tag{17}$$

виключити $x_1,x_2,...,x_n,u$ і одержати співвідношення $F(C_1,C_2,...,C_n)=0$. Підставляючи в нього замість $C_1,C_2,...,C_n$ ліві частини співвідношень (16), одержимо:

$$F(\Psi_1(x,u),\Psi_2(x,u),\ldots,\Psi_n(x,u))=0. \tag{18}$$

Одержане рівняння є шуканим розв'язком, що відповідає початковій умові.

Приклад №1. Знайти розв'язок задачі Коші

$$xu\frac{\partial u}{\partial x}+yu\frac{\partial u}{\partial y}+xy=0, \text{ початкова умова: } u\Big|_{xy=1}=1.$$

Розв'язання. Складаємо рівняння характеристик:

$$\frac{dx}{xu}=\frac{dy}{yu}=\frac{du}{-xy}.$$

Із цих рівнянь знаходимо два перших інтеграли: 1). $\frac{dx}{xu}=\frac{dy}{yu}$, $\ln y-\ln x=\ln C_1$, $\frac{y}{x}=C_1$; 2). $\frac{y\,dx+x\,dy}{yxu+xyu}=\frac{du}{-xy}$, $\frac{d(x\cdot y)}{2u}=\frac{du}{-1}$, $d(x\cdot y)=-2u\,du$, $x\cdot y+u^2=C_2$.

Складаємо систему рівнянь, в яку входять перші інтеграли з рівнянь характеристик, рівняння гіперповерхні і початкова умова:

$$\frac{y}{x}=C_1,\ x\cdot y+u^2=C_2,\ x\cdot y=1,\ u=1.$$

Виключимо з цієї системи x, y і u, щоб встановити зв'язок між C_1 і C_2. Щоб досягти такого взаємозв'язку, виконаємо еквівалентне перетворення другого рівняння, домноживши почленно його на $\frac{y}{x}$: $y^2+\frac{yu^2}{x}=\ \frac{y}{x}C_2=C_1\cdot C_2=C_3$. Маємо: $y^2+\frac{yu^2}{x}=C_3$. Будемо встановлювати тепер взаємозв'язок між C_1 і C_3. Із третього рівняння: $y=\frac{1}{x}$, тому одержимо: $\frac{y}{x}+\frac{y}{x}=C_3$ або $2C_1=C_3$.

Після підстановки в останнє рівняння значень C_1 і C_3 одержимо: $\frac{2y}{x}=y^2+\frac{yu^2}{x}$; $u^2=2-xy$.

Останнє співвідношення в області $x\cdot y<2$ дає два розв'язка даного диференціального рівняння: $u=\sqrt{2-xy}$ і $u=-\sqrt{2-xy}$. Один із цих розв'язків, а саме:

$$u(x,y)=\sqrt{2-x\cdot y},\quad xy<2$$

є шуканим розв'язком задачі Коші.

Розглянемо випадок задачі Коші, коли початкова гіперповерхня γ задана рівняннями у параметричній формі:

$$x_1^0 = x_1(s),\ x_2^0 = x_2(s),\ \ldots,\ x_n^{(0)} = x_n(s),\ u^{(0)} = u(s), \tag{19}$$

де записані функції неперервно диференційовні у розглянутій області. В цьому випадку характеристики для рівняння (13) визначають з рівнянь (15) у параметричній формі:

$$x_1 = x_1(s,t),\ x_2 = x_2(s,t),\ \ldots,\ x_n = x_n(s,t),\ u = u(s,t), \tag{20}$$

Одержані функції мають неперервні частинні похідні першого порядку по параметрах s і t. Вони і утворюють шукану інтегральну поверхню $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, якщо з перших n рівнянь системи (20) визначити параметри s і t і підставити одержані значення в останнє рівняння. Для цього потрібно, щоб на гіперповерхні γ не обертався у нуль якобіан:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial s_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial s_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial s_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial s_{n-1}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial s_{n-1}} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial s_{n-1}} \end{vmatrix} \tag{21}$$

Якщо $\Delta = 0$, то гіперповерхня γ і є характеристикою рівняння, а значить існує інтеграл $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Має місце така теорема: якщо $\Delta \neq 0$ скрізь на початковій поверхні γ, то задача Коші для рівняння (13) має один і тільки один розв'язок; якщо ж $\Delta = 0$ на всій гіперповерхні γ, то для того, щоб задача Коші мала розв'язок, гіперповерхня γ повинна бути характеристикою. В цьому випадку задача Коші має нескінченно багато розв'язків.

Приклад №2. Знайти розв'язок задачі Коші:

$(y^2 - u)\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u$,	Початкова умова: Інтегральна поверхня проходить через лінію γ: $x_{(0)} = 1,\ y_{(0)} = s,\ u_{(0)} = \dfrac{s^2}{2}$, де s – параметр

Складаємо рівняння характеристик у параметричній формі: $\frac{dx}{dt}=y^2-u$, $\frac{dy}{dt}=y$, $\frac{du}{dt}=u$.

Знайдемо розв'язки цих рівнянь через початкові значення змінних (x, y, u):

1). $\frac{du}{dt}=u$; $\int_{u_0}^{u}\frac{du}{u}=\int_0^t dt$; $\ln u-\ln u_0=t$; $\ln\frac{u}{u_0}=t$; $u=u_0e^t$; 2). $\frac{dy}{dt}=y$; $\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y}=\int_0^t dt$; $y=y_0e^t$;

3). $\frac{dx}{dt}=y_0^2e^{2t}-u_0e^t$, $\int\limits_{x(0)}^{x}dx=\int\limits_0^t\left(y_{(0)}^2e^{2t}-u_{(0)}e^t\right)dt$;

$x=\left(\frac{1}{2}y_{(0)}^2e^{2t}-u_{(0)}e^t\right)\Big|_0^t+x_0=\left(\frac{1}{2}y_{(0)}^2e^t-u_{(0)}\right)e^t-\left(\frac{1}{2}y_{(0)}^2-u_0\right)+x_{(0)}$.

Підставимо значення початкових умов у одержані вирази:

$x=\frac{1}{2}s^2\left(e^t-1\right)e^t+1$, $y=se^t$, $u=\frac{1}{2}s^2e^t$.

Якобіан для системи перших двох рівнянь

$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ x_s & y_s\end{vmatrix}=\frac{s^2}{2}e^{2t}\neq 0$ при $t=0$, $s\neq 0$.

Тому задача має єдиний розв'язок. Одержується він виключенням параметрів s і t із одержаної системи рівнянь: $e^t=\frac{y}{s}$; $x=\frac{y^2}{2}-\frac{ys}{2}+1$; $\frac{ys}{2}=1-x+\frac{y^2}{2}$; $u=\frac{ys}{2}=1-x+\frac{y^2}{2}$. Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$u(x,y)=1-x+\frac{y^2}{2}.$$

Приклад №3. Знайти загальний розв'язок квазілінійного диференціального рівняння

$$2xz\frac{\partial z}{\partial x}+2yz\frac{\partial z}{\partial y}=z^2-x^2-y^2$$

та знайти поверхню, яка задовольняє дане рівняння і проходить через лінію (коло) γ:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \end{array}\right\}$$

Розв'язання. Складаємо рівняння характеристик

$$\frac{dx}{2xz}=\frac{dy}{2yz}=\frac{dz}{z^2-x^2-y^2}.$$

Знаходимо перші інтеграли, тобто характеристики даного рівняння:

1). $\frac{dx}{2xz}=\frac{dy}{2yz}$; $\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0$; $\ln x-\ln y=\ln C_1$; $\ln\frac{x}{y}=\ln C_1$; $\frac{x}{y}=C_1$

2). $\frac{dy}{2yz}=\frac{dz}{z^2-x^2-y^2}$; $\frac{dy}{2yz}=\frac{dz}{z^2-y^2C_1^2-y^2}$; $2z\frac{dz}{dy}-\frac{z^2}{y}=-y\left(C_1^2+1\right)$.

Одержали рівняння Бернуллі. Зробимо підстановку: $u=z^2$. $\frac{du}{dy}=2z\frac{dz}{dy}$;

Тепер рівняння Бернуллі перетворюється у лінійне: $\frac{du}{dy}=\frac{u}{y}=-y\left(C_1^2+1\right)$. Знайдемо його розв'язок за формулою: $u=e^{-\int Pdy}\left\{\int Qe^{\int Pdy}dy+C_2\right\}$;

$u=-\left(C_1^2+1\right)y^2+C_2y=\left(x^2+y^2\right)+C_2y$; Звідси маємо: $\frac{x^2+y^2+z^2}{y}=C_2$.

Загальний інтеграл даного рівняння запишеться так

$$F\left(\frac{x}{y};\ \frac{x^2+y^2+z^2}{y}\right)=0.$$

Із системи рівнянь, в яку входять рівняння характеристик і рівняння кривої γ:

$$\frac{x}{y}=C_1,\ \frac{x^2+y^2+z^2}{y}=C_2,\ x+y+z=0,\ x^2+y^2+z^2=a_2$$

виключимо змінні x, y, z.

З другого і четвертого рівняння маємо: $\frac{a^2}{y}=C_2$, отже $y=\frac{a^2}{C_2}$. Тоді рівняння: $x=a^2\frac{C_1}{C_2}$, а з третього знаходимо: $z=-\frac{a^2}{C_2}\left(C_1+1\right)$.

Використовуючи рівняння друге, знайдемо залежність між C_1 і C_2:

$$\frac{a^4C_1^2}{C_2^2}+\frac{a^4}{C_2^2}+\frac{a^4}{C_2^2}\left(C_1+1\right)^2=a^2 \text{ або } 2a^2\left(C_1^2+C_1+1\right)=C_2^2.$$

Замінюючи тепер C_1 і C_2 відповідними їх виразами, дістанемо рівняння шуканої поверхні:

$$\left(x^2+y^2+x^2\right)^2=2a^2\left(x^2+y^2+xy\right).$$

1.6. Диференціальні рівняння в частинних похідних для визначення ортогональних поверхонь та траєкторій

Нехай дано сім'ю поверхонь $F(x,y,z)=C$, де C – довільна стала. Кожному числовому значенню C відповідає певна одна поверхня із даної сім'ї. Нехай поверхня $u(x,y,z)=C_1$ перетинає дану сім'ю поверхонь під прямим кутом. Визначимо умову ортогональності даних поверхонь.

Із диференціальної геометрії відомо, що нормальний вектор до поверхні у будь-якій її точці визначається координатами, які є частинними похідними від рівняння цієї поверхні по змінних x, y, z, — що входять у рівняння. В зв'язку з цим нормальний вектор до сім'ї поверхонь F має координати $\vec{a}\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)$. Нормальний вектор у будь-якій точці поверхні u має такі координати $\vec{b}\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$.

Оскільки, згідно поставленої задачі, поверхні ортогональні, то і їх нормальні вектори, у точках перетину поверхонь, перпендикулярні, тобто $\vec{a}\perp\vec{b}$. Це означає, що скалярний добуток цих векторів дорівнює нулеві: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Звідси слідує умова ортогональності поверхонь:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=0. \qquad (17)$$

Розглянемо приклади розв'язання задач на визначення ортогональних поверхонь, а також ортогональних траєкторій.

Приклад №1. Знайти поверхню, яка перетинає під прямим кутом сім'ю сфер: $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$,— і проходить через криву лінію, задану рівняннями: $x = 1$, $y^2 + z^2 = 1$.

Розв'язання. Записуємо умову ортогональності поверхні $u(x, y, z) = C_1$ із сім'єю поверхонь $F(x, y, z) = C$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0 .$$

Знайдемо частинні похідні: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z$. Підставивши їх значення в умову ортогональності поверхонь, одержимо однорідне лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку:

$$x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Розв'яжемо це рівняння. Складаємо рівняння характеристик у симетричній формі: $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$. Знаходимо два перші інтеграли цих рівнянь:

1). $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, $\ln x - \ln y = \ln C_1$, $\frac{x}{y} = C_1$; 2). $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$, $\ln x - \ln z = \ln C_2$, $\frac{x}{z} = C_2$.

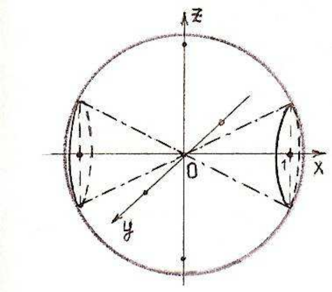
Координати точок шуканої поверхні повинні задовольняти двом знайденим першим інтегралам і рівняння лінії через яку вона проходить за умовою поставленої задачі.

Запишемо систему рівнянь:

$$x = 1,\ y^2 + z^2 = 1,\ \frac{x}{y} = C_1,\ \frac{x}{z} = C_2 .$$

Виключаючи змінні x, y і z, встановимо залежність між C_1 і C_2: $\frac{1}{y} = C_1$, $\frac{1}{z} = C_2$, $x^2 + z^2 = 1$; $\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2} = 1$.

У одержане рівняння підставимо замість C_1 і C_2 їх значення. Після елементарних перетворень одержимо: $y^2 + z^2 - x^2 = 0$. Це і є шукана поверхня. Вона визначає прямий круговий конус з вершиною у початку системи координат, Мал.2.



Мал.2.

Приклад №2. Знайти ортогональні траєкторії сім'ї площин, які проходять через пряму: $x = y = z$.

Ортогональними траєкторіями називаються лінії перпендикулярні до даної сім'ї поверхонь або ліній.

Розв'язання. Згідно умови задачі пучок перетинних площин, тобто таких, які перетинаються по прямій $l : x = y = z$, утворює сім'ю площин. Треба визначити лінії ортогональні до цієї сім'ї площин.

Відомо, що лінія перетину двох площин, перпендикулярних до третьої площини, теж перпендикулярна до неї. Аналогічно, лінія перетину двох поверхонь, перпендикулярних до третьої поверхні, теж перпендикулярна до неї. Така лінія і є ортогональна траєкторія.

У даній задачі треба записати диференціальне рівняння, яке визначає всі ортогональні поверхні до даної сім'ї площин, знайти дві різні характеристики із рівнянь характеристик, які у перетині і утворюють шукані ортогональні траєкторії.

Спочатку запишемо рівняння пучка площин, які проходять через пряму $l : x = y = z$, визначену рівняннями двох площин. Домножимо друге рівняння на довільну сталу C і додамо до першого. Одержимо рівняння пучка площин $y - x + C(z - x) = 0$. Це рівняння у стандартній формі можна записати так: $F \equiv \dfrac{y - x}{x - z} = C$.

Користуючись умовою ортогональності (17), запишемо:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0 .$$

Знайдемо похідні:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{z - y}{(x - z)^2}, \; \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x - z}, \; \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{y - x}{(x - z)^2} .$$

Підставимо знайдені похідні в умову ортогональності. Після елементарних перетворень, одержимо диференціальне рівняння поверхонь, ортогональних до даного пучка площин:

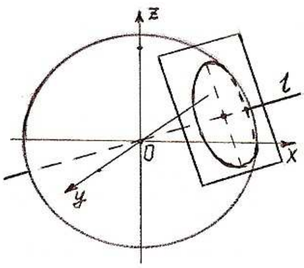
$$(z-y)\frac{\partial u}{\partial x}+(x-z)\frac{\partial u}{\partial y}+(y-x)\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Розв'яжемо його. Складаємо рівняння характеристик: $\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}$.

Знаходимо два перших інтеграли:

1). $\frac{dx+dy}{z-y+x-z}=\frac{dz}{y-x}$, $dx+dy=-dz$, $x+y+z=C_1$;

2). $\frac{x\,dx+y\,dy}{x(z-y)+y(x-z)}=\frac{z\,dz}{z(y-x)}$, $\frac{\frac{1}{2}\left(dx^2+dy^2\right)}{xz-yz}=\frac{\frac{1}{2}dz^2}{yz-xz}$, $x^2+y^2+z^2=C_2$.



Мал.3.

Одержані характеристики є інтегральними поверхнями, ортогональними до пучка площин і дає шукані траєкторії, які визначаються такою системою рівнянь:

$$\begin{cases} x+y+z=C_1 \\ x^2+y^2+z^2=C_2 \end{cases}.$$

Перше рівняння визначає сім'ю площин перпендикулярних до прямої l, а друге — сфери з центром у початку системи координат. У перетині утворюються кола, Мал.3. Отже ортогональні траєкторії кола розташовані у площинах $\perp$ до прямої l - їх безліч, так, як безліч C_1 площин $\perp$ l і безліч радіусів сфер C_2 - які перетинаються з площинами.

1.7. Диференціальні рівняння у повних диференціалах

Диференціальними рівняннями у повних диференціалах називаються рівняння такого виду:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0; \qquad (1)$$

або

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0, \qquad (2)$$

якщо ліва частина його є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ або $u(x,y,z)$.

Щоб розв'язати рівняння (1) треба знайти таку функцію $u = u(x, y)$, повний диференціал від якої $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ дорівнює лівій частині рівняння (1). Загальний інтеграл для такого рівняння можна записати: $u(x, y) = C$, — де C — довільна стала.

Рівняння (1) має розв'язок, якщо виконується умова його інтегровності:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (3)$$

Для рівняння (2) умова інтегровності записується у такому вигляді:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0. \qquad (4)$$

Якщо умова інтегровності виконується, то розв'язок рівняння можна знаходити різними способами безпосереднім інтегруванням.

Приклад №1. Розв'язати рівняння

$$\left(2x + 3x^2 y\right)dx + \left(x^3 - 3y^2\right)dy = 0$$

Розв'язання. Перевіряємо умову інтегровності:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2, \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2. \text{ Виконується.}$$

I спосіб.

Будемо шукати функцію $u(x, y)$ такою, що $du = u_x dx + u_y dy$, де $u_x = 2x + 3x^2 y$, $u_y = x^3 - 3y^2$. Зінтегруємо перше рівняння по dx при умові що $y = const$:

$$u(x, y) = \int \left(2x + 3x^2 y\right)dx = x^2 + x^3 y + \varphi(y).$$

Від одержаного виразу візьмемо похідну по змінній "y" і підставимо її у друге рівняння:

$u_y = x^3 + \varphi'(y) = x^3 - 3y^2$.

Маємо $\frac{d\varphi}{dy} = -3y^2$, $\varphi(y) = \int -3y^2 dy = -y^3 + C$, де C — довільна стала. Одержали функцію: $u(x, y) = x^2 + x^3 y - y^3 + C$.

Загальний розв'язок: $x^2 + x^3 y - y^3 + C$.

II спосіб.

Функцію $u(x,y)$ будемо знаходити за формулою $u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy$. Маємо: $u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\left(2x+3x^2y\right)dx+\int\limits_{y_0}^{y}\left(x_0^3-3y^2\right)dy=$ $\left.\left(x^2+x^3y\right)\right|_{x_0}^{x}+\left.\left(x_0^3y-y^3\right)\right|_{y_0}^{y}=$ $x^2+x^3y-x_0^2-x_0^3y+x_0^3y-y^3-x_0^3y_0+y_0^3=$ $x^2+x^3y-y^3+C$, де $C=-x_0^2-x_0^3y_0-y_0^3$.

Одержали функцію: $u(x,y)=x^2+x^3y-y^3+C$. Розв’язок: $x^2+x^3y-y^3=C$.

<u>ІІІ спосіб.</u>

Зінтегруємо частинні похідні u_x по dx, а u_y по dy:

$$u(x,y)=\int\left(2x+3x^2y\right)dx=x^2+x^3y+\varphi_1(y),$$

$$u(x,y)=\int\left(x^3-3y^2\right)dy=x^3y-y^3+\varphi_2(x).$$

Для запису шуканої функції і першого інтегралу випишемо всі доданки із незалежними змінними, а з другого — лише ті, яких не було у першому. Замість довільних функцій $\varphi_1(y)$ і $\varphi_2(x)$ запишемо: C, — довільну сталу: $u(x,y)=x^2+x^3y-y^3+C$. Розв’язок $x^2+x^3y-y^3=C$.

Нехай дано рівняння виду: $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$. Якщо ліва частина цього рівняння не є повним диференціалом, тобто не виконується умова: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,але виконується умова існування розв’язку, а саме, функції P і Q мають неперервні частинні похідні і обертаються в нуль одночасно, то існує функція $\mu=\mu(x,y)$, — інтегрувальний множник, для якої

$$\mu(x,y)\cdot\left(P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\right)=du,$$

де du — повний диференціал функції $u(x,y)$. Звідси слідує, що задовольняється умова інтегровності

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q). \qquad (5)$$

Отже, інтегрувальний множник знаходиться при розв’язуванні диференціального рівняння в частинних похідних:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot P+\frac{\partial P}{\partial y}\mu=\frac{\partial \mu}{\partial x}Q+\frac{\partial Q}{\partial x}\mu$$

або

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=-\frac{\partial \mu}{\partial y}P+\frac{\partial \mu}{\partial x}Q. \qquad (6)$$

Загального методу для визначення інтегрувального множника з рівняння (6) немає. Проте існують окремі випадки. Розглянемо деякі з них.

1. Якщо має місце вираз: $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=F(x)$, то інтегрувальний множник знаходять у вигляді $\mu=\mu(x)$ із рівняння:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx=F(x)\cdot dx. \qquad (7)$$

2. Якщо має місце вираз: $-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\Phi(y)$, то інтегрувальний множник знаходиться у вигляді $\mu=\mu(y)$ із рівняння:

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dy=\Phi(y)dy. \qquad (8)$$

3. Якщо інтегрувальний множник має такий вигляд $\mu(x,y)=\mu(\omega(x,y))$, де $\omega(x,y)$ — відома функція (її треба підібрати і перевірити, частіше це функція виду $\frac{x}{y}$ або xy і т.д.). В цьому випадку інтегрувальний множник знаходиться з диференціального рівняння такого:

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{d\omega}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x}-P\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y}}. \qquad (9)$$

Є і інші випадки.

Нехай $\mu_0(x,y)$ — інтегрувальний множник рівняння (1) і $u_0(x,y)$ — відповідний йому інтеграл рівняння, тоді всі інтегрувальні множники рівняння (1) визначаються за формулою: $\mu(x,y)=\mu_0(x,y)\cdot\varphi(u_0(x,y))$, де $\varphi(z)$ — довільна неперервно диференційовна функція.

Використовуючи це твердження, інтегрувальний множник інколи можна знайти так. Рівняння (1) розбивається на дві частини: $P_1(x,y)\,dx + Q_1(x,y)\,dy + P_2(x,y)\,dx + Q_2(x,y)\,dy = 0$. Припустимо, що вдалося знайти інтегрувальні множники $\mu_1(x,y)$ і $\mu_2(x,y)$ і інтеграли $u_1(x,y)$ і $u_2(x,y)$ відповідно для рівнянь:

$$P_1(x,y)\,dx + Q_1(x,y)\,dy = 0 \text{ і } P_2(x,y)\,dx + Q_2(x,y)\,dy = 0.$$

Тоді всі інтегрувальні множники першого із рівнянь будуть мати вигляд $\mu(x,y) = \mu_1(x,y)\cdot\varphi_1(u_1(x,y))$, а другого $\mu(x,y) = \mu_2(x,y)\cdot\varphi_2(u_2(x,y))$, де $\varphi_1(z)$ і $\varphi_2(z)$ — довільні диференційовні функції. Якщо удасться підібрати функції $\varphi_1^*(z)$ і $\varphi_2^*(z)$ так, що $\mu_1(x,y)\cdot\varphi_1^*(u_1(x,y)) = \mu_2(x,y)\cdot\varphi_2^*(u_2(x,y))$, то $\mu(x,y) = \mu_1(x,y)\cdot\varphi_1^*(u_1(x,y))$ — є інтегрувальним множником рівняння (1).

Розглянемо приклади знаходження інтегрувальних множників і розв’язків диференціальних рівнянь.

Приклад №2. Розв’язати рівняння

$$\left(x^2 - \sin^2 y\right)dx + x\cdot\sin 2y\,dy = 0.$$

Розв’язання. Позначимо: $P(x,y) = x^2 - \sin^2 y$; $Q(x,y) = x\cdot\sin 2y$. Перевіряємо умову інтегровності: $\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \sin 2y$, маємо: $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Шукаємо інтегрувальний множник:

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -\frac{2}{x};\ \mu = \mu(x);\ \frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2}{x}dx;\ \ln\mu = -2\ln x + C.$$

Нехай $C = 0$, тоді $\mu = \frac{1}{x^2}$.

Домноживши дане рівняння на $\mu = \frac{1}{x^2}$, перетворимо його в рівняння у повних диференціалах: $\left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx + \frac{1}{x}\sin 2y\,dy = 0$.

Знайдемо розв’язок одержаного диференціального рівняння:

$$u(x,y) = \int\left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx = x + \frac{1}{x}\sin^2 y + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} 2\sin y \cdot \cos y + \varphi'(y) = \frac{1}{x} \cdot \sin 2y + \varphi'(y);$$

$$\frac{1}{x} \cdot \sin 2y + \varphi'(y) = \frac{1}{x} \cdot \sin 2y, \ \frac{d\varphi}{dy} = 0, \ \varphi = C.$$

Розв'язок рівняння такий: $u(x, y) = x + \frac{1}{x}\sin^2 y + C$

Приклад №3. Розв'язати рівняння

$$\left(y^4 - 4xy\right)dx + \left(2xy^3 - 3x^2\right)dx = 0.$$

Розв'язання. Позначимо: $P(x, y) = y^4 - 4xy$, $Q(x, y) = 2xy^3 - 3x^2$. Перевіримо умову інтегровності: $\frac{\partial P}{\partial y} = 4y^3 - 4x$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y^3 - 6x$, $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Шукаємо інтегрувальний множник. $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y^3 + 2x$. При діленні одержаного виразу на $P(x, y)$ і на $Q(x, y)$ одержуються функції від (x, y). Отже, треба шукати інтегрувальний множник у вигляді: $\mu = \mu(x, y)$. Нехай $\mu = \mu(\omega(x, y))$, де $\omega(x, y) = x \cdot y$. Підставимо у рівняння (9) $\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\omega} = \dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial \omega}{\partial x} - P\frac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{2y^3 + 2x}{xy^4 + x^2 y} = \frac{2}{xy} = \frac{2}{\omega}$.

Звідки: $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2d\omega}{\omega}$, $\ln \mu = 2\ln \omega + \ln C$, $\mu = C \cdot \omega^2$. Нехай $C = 1$, тоді $\mu = \omega^2 = x^2 y^2$. Домноживши дане в умові задачі рівняння на функцію $\mu = x^2 y^2$, одержимо рівняння у повних диференціалах:

$$\left(x^2 y^6 - 4x^3 y^3\right)dx + \left(2x^3 y^5 - 3x^4 y^2\right)dy = 0.$$

Знайдемо розв'язок:

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} = x^2 y^6 - 4x^3 y^3; \ Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3 y^5 - 3x^4 y^2.$$

Зінтегруємо перше рівняння по dx при $y = const$, знайдемо частинну похідну по ∂y від одержаного виразу і підставимо її значення у друге рівняння

$$u(x, y) = \int \left(x^2 y^6 - 4x^3 y^3\right)dx = \frac{x^3 y^6}{3} - x^4 y^3 + \varphi(y);$$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3y^5 - 3x^4y^2 + \frac{d\varphi}{dy} = \ 2x^3y^5 - 3x^4y^2$, $\frac{d\varphi}{dy} = 0$, $\varphi = C$, де C — довільна стала.

Шукана функція $u(x, y) = \frac{1}{3}x^3y^6 - x^4y^3 + C$.

Загальний розв'язок: $\frac{x^3y^6}{3} - x^4y^3 = C$.

Приклад №4. Розв'язати рівняння

$$x(y-1)(z-1)\,dx + y(z-1)(x-1)\,dy + z(x-1)(y-1)\,dz = 0.$$

Розв'язання. Позначимо: $P = x(y-1)(z-1)$, $Q = y(z-1)(x-1)$, $R = z(x-1)(y-1)$.

Знаходимо: $\frac{\partial P}{\partial y} = x(z-1)$, $\frac{\partial P}{\partial z} = x(y-1)$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = y(x-1)$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = y(z-1)$, $\frac{\partial R}{\partial x} = z(y-1)$, $\frac{\partial R}{\partial y} = z(x-1)$. Підставляючи в умову (4) значення P, Q, R і їх похідних, переконуємося, що вона виконується.

Виразимо dz через решту диференціалів:

$$dz = -\frac{x(z-1)}{z(x-1)}dx - \frac{y(z-1)}{z(y-1)}dy$$

Запишемо повний диференціал від функції z і випишемо частинні похідні його:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,\ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x(z-1)}{z(x-1)},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y(z-1)}{z(y-1)}.$$

Зінтегруємо першу частинну похідну по dx:

$$\frac{z\,dz}{z-1} = \frac{-x\,dx}{x-1};$$

$$\frac{(z-1+1)}{z-1}dz = \frac{-x+1-1}{x-1}dx,$$

$$\left(1 + \frac{1}{z-1}\right)dz = \left(-1 - \frac{1}{x-1}\right)dx,$$

$z + \ln(z-1) = -x - \ln(x-1) + \varphi(y)$. Одержане рівняння диференціюємо по ∂y і підставимо замість $\frac{\partial z}{\partial y}$ його значення $\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{z-1}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\varphi}{dy}$; $\frac{\partial z}{\partial y}\left[1 + \frac{1}{z-1}\right] = \frac{d\varphi}{dy}$; $-\frac{y(z-1)}{z(y-1)}\cdot\left[1 + \frac{1}{z-1}\right] = \frac{d\varphi}{dy}$. $\frac{d\varphi}{dy} = \frac{y}{1-y}$, $\varphi(y) = -y - \ln(y-1) + C$, C — довільна стала.

Загальний розв’язок: $z=-\ln(z-1)-x-\ln(x-1)-y-\ln(y-1)+C$, або

$\ln(z-1)+\ln(x-1)+\ln(y-1)=-x-y-z+C$.

$\ln(z-1)(x-1)(y-1)= -x-y-z+C$;

розв’язок у неявному вигляді: $(z-1)(x-1)(y-1)= e^{-x-y-z+C}$.

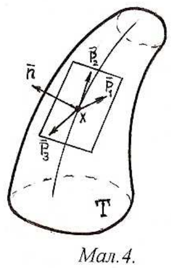
1.8. Нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку

Нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних першого порядку в загальному вигляді записується так

$$F(x_1,x_2,...,x_n,u,p_1,p_2,...,p_n)=0, \qquad (1)$$

де x_1, $x_2,...,x_n$ — незалежні змінні, u — неявна функція від цих незалежних змінних, $p_k=\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ $(k=1,2,...,n)$ — частинні похідні від функції u по незалежних змінних.

Нелінійні рівняння виду (1) у своїх коефіцієнтах можуть містити крім незалежних змінних ще і добутки або степені частинних похідних першого порядку. З геометричної точки зору частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ визначають напрями дотичних площин до інтегральної гіперповерхні у будь-якій її точці $x(x_1,x_2,...,x_n)$.Отже із сім’ї площин, що проходять через будь-яку точку інтегральної гіперповерхні рівняння (1) виділяє, у кожній точці гіперплощини, дотичні до цієї поверхні. Сама інтегральна поверхня є обвідною всіх гіперплощин простору і називається конусом T або конусом Монжа.



Мал.4.

На відміну від лінійного диференціального рівняння, в якому гіперплощини дотикаються до гіперповерхні в n-вимірному просторі, у нелінійному диференціальному рівнянні, гіперплощини дотикаються до конуса T. В зв'язку з цим розв'язки на гіперплощині будуть не у формі гіперліній, а у формі гіперполосок, розташованих вздовж конуса T, тому рівняння характеристик має складніший вигляд ніж у лінійних диференціальних рівнянь. Спочатку знаходиться сім'я обвідних всіх дотичних площин, як конус T, потім визначається твірна конуса T і її напрям дає змогу записати рівняння характеристик для нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку.

На визначенні розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку в частинних похідних зупинимося оглядово. Для диференціального рівняння (1) система рівнянь характеристик записується так, [1]:

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\ldots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{du}{P_1p_1+\ldots+P_np_n}=-\frac{dp_1}{\left(X_1+Up_1\right)}=\ldots=-\frac{dp_n}{\left(X_n+Up_n\right)}=ds\,, \tag{2}$$

де $P_k=F_{p_k}=\dfrac{\partial F}{\partial p_k}$, $X_k=F_{x_k}=\dfrac{\partial F}{\partial x_k}$, $U=F_u=\dfrac{\partial F}{\partial u}$, s — числовий параметр.

Система (2) має перший інтеграл такого виду

$$F\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,u,p_1,\ldots,p_n\right)=C\,. \tag{3}$$

Всі розв'язки системи (2) які одночасно задовольняють рівнянню

(1), називаються характеристичними полосами. Ці полоси утворюють $(2n-1)$-параметричну сім'ю.

Якщо зінтегрувати систему (2), то одержимо:

$$\left.\begin{aligned} x_k&=x_k\left(s,x_k^{(0)},u^{(0)},p_k^{(0)}\right),\\ u&=u\left(s,x_k^{(0)},u^{(0)},p_k^{(0)}\right),\\ p_k&=p_k\left(s,x_k^{(0)},u^{(0)},p_k^{0}\right)\end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

де $x_k^{(0)}$, $u^{(0)}$, $p_k^{(0)}$ — початкові значення функцій при $s=0$. Будемо вважати, ці початкові значення функцій є функціями від $(n-1)$-параметрів

$$x_k^{(0)}\left(t_1,\ldots,t_{n-1}\right),\ u^{(0)}\left(t_1,\ldots,t_{n-1}\right),\ p_k^{(0)}\left(t_1,\ldots,t_{n-1}\right). \tag{5}$$

Підставляючи їх у рівняння (4), одержимо:

$$\left.\begin{aligned} x_k &= x_k(s,t_1,\ldots,t_{n-1}),\\ u &= u(s,t_1,\ldots,t_{n-1}),\\ p_k &= p_k(s,t_1,\ldots,t_{n-1}). \end{aligned}\right\} \qquad (\text{де } k=1,2,\ldots,n) \tag{6}$$

Якщо функціональний детермінант

$$\Delta = \frac{D(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{D(s,x_1,\ldots,x_{n-1})}, \tag{7}$$

який, в силу перших рівнянь системи (2) можна було б записати у вигляді

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1 & \ldots & P_n \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

не обертається у нуль на початковому многовиді (4) (тобто при $s=0$) і, тому, в силу неперервності похідних, не обертається в нуль в деякому околі цього многовиду, то величини $s,t_1,\ldots,t_{n-1}$, в цьому околі можуть бути виражені через $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Підставляючи ці вирази у $u=u(s,t_1,t_2,\ldots,t_{n-1})$, одержимо певну поверхню $u=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, яка містить початковий многовид (5). Ця поверхня буде інтегральною поверхнею рівняння (1), якщо функції (5) задовольняють n співвідношенням

$$\left.\begin{aligned} &F\left(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)},u^{(0)},p_1^{(0)},\ldots,p_n^{(0)}\right)=0,\\ &\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t_j} = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu^{(0)}\cdot\frac{\partial x_\nu^{(0)}}{\partial t_j} \quad (j=1,2,\ldots,n-1), \end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

тотожно по t_j

Задача Коші полягає у знаходженні інтегральної поверхні рівняння (1), яка містить даний $(n-1)$-вимірний многовид

$$x_k^{(0)}(t_1,\ldots,t_{n-1}),\, u^{(0)}(t_1,\ldots,t_{n-1}). \tag{10}$$

Многовид (10) доповнюється до многовиду (5) знайденим $p_k^{(0)}(t_1,\ldots,t_{n-1})$ із рівнянь (9). Якщо при цьому визначник (8) відмінний від нуля вздовж такого многовиду, то розглянутий метод приводить до розв’язку Коші, і цей розв’язок єдиний.

Приклад . Знайти розв'язок нелінійного рівняння (задача Коші):

$$F \equiv x_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - u = 0,$$

якщо початкова умова: $x_1^{(0)} = t_1$, $x_2^{(0)} = 1$, $u^{(0)} = \frac{1}{2}t_1^2$

Розв'язання. Введему для зручності записів такі позначення: $p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}$, $p_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}$. Тоді дане рівняння запишеться так: $F \equiv x_1 p_1 + x_2 p_2 - p_1^2 - u = 0$. Знайдено початкові значення для $p_1^{(0)}$ і $p_2^{(0)}$: $p_1^{(0)} = \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_1^{(0)}} = t_1$, підставимо значення початкових умов ц дане рівняння; $t_1 \cdot t_1 + 1 \cdot p_2^{(0)} - t_1^2 - \frac{1}{2}t^2 = 0$, $p_2^{(0)} = \frac{1}{2}t_1^2$. Одержаними значеннями $p_1^{(0)}$ і $p_2^{(0)}$ доповнимо початкові умови задачі Коші.

Складаємо рівняння характеристик для даного нелінійного диференціального рівняння

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \frac{du}{P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2} = \frac{-dp_1}{X_1 + U \cdot p_1} = \frac{-dp_2}{X_2 + U \cdot p_2} = ds,$$

де $P_1 = \frac{\partial F}{\partial p_1} = x_1 - 2p_1$; $P_2 = \frac{\partial F}{\partial p_1} = x_2$; $X_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1} = P_1$; $X_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2} = P_2$; $U = \frac{\partial F}{\partial u} = -1$. Знайдемо вирази: $P_1 \cdot p_1 + P_2 p_2 = (x_1 - 2p_1) \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = x_1 p_1 - 2p_1^2 + x_2 \cdot p_2 = u - p_1^2$, $X_1 + U \cdot p_1 = p_1 - p_1 = 0$; $X_2 + U \cdot p_2 = p_2 - p_2 = 0$.

Рівняння характеристик мають вигляд:

$$\frac{dx_1}{x_1 - 2p_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{du}{u - p_1^2} = \frac{-dp_1}{0} = \frac{-dp_2}{0} = ds.$$

Знаходимо перші інтеграли з рівнянь характеристик

1). $\int\limits_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1 - 2p_1^{(0)}} = \int\limits_0^s ds$; $\ln\left(x_1 - 2p_1^{(0)}\right) - \ln\left(x_1^{(0)} - 2p_1^{(0)}\right) = S$; $\ln\frac{x_1 - 2p_1^{(0)}}{x_1^{(0)} - 2p_1^{(0)}} = S$;

$x_1 = 2p_1^{(0)} + \left(x_1^{(0)} - 2p_1^{(0)}\right)e^S$.

2). $\int\limits_{x_2^{(0)}}^{x_2} \frac{dx_2}{x_2} = \int\limits_0^s ds$; $\ln\frac{x_2}{x_2^{(0)}} = S$; $x_2 = x_2^{(0)} \cdot e^S$.

3). $\int\limits_{u^{(0)}}^{u} \frac{du}{u - p_1^{(0)2}} = \int\limits_0^s ds$; $\ln\frac{u - p_1^{(0)2}}{u^{(0)} - p_1^{(0)2}} = S$; $u = p_1^{(0)2} + \left(u^{(0)} - p_1^{(0)2}\right)e^S$.

4). $\dfrac{dp_1}{0} = ds$; $\int\limits_{P_1^{(0)}}^{P_1} dp_1 = 0$; $P_1 = P_1^{(0)}$;

5) $\dfrac{dP_2}{0} = ds$; $p_2 = p_2^{(0)}$

У одержані перші незалежні інтеграли підставимо значення початкових умов:

$x_1 = 2t_1 + (t_1 - 2t_1)e^S = 2t_1 - t_1 \cdot e^S$; $\quad x_2 = e^S$; $\quad u = t_1^2 + \left(\frac{1}{2}t_1^2 - t_1^2\right)e^S = t_1^2 - \frac{1}{2}t_1^2 e^S$; $\quad p_1 = t_1$; $p_2 = \frac{1}{2}t_1^2$.

Визначимо параметри S і t перших двох рівнянь і підставимо їх значення у третє рівняння:

$$\begin{cases} x_1 = 2t_1 - t_1 \cdot e^S \\ x_2 = e^S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2t_1 - t_1 \cdot x_2 = t_1(2 - x_2); \\ t_1 = \dfrac{x_1}{2 - x_2}; \quad S = \ln x_2. \end{cases}$$

$$u = \frac{x_1^2}{(2 - x_2)^2} - \frac{1}{2}\frac{x_1^2 \cdot x_2}{(2 - x_2)^2} = \frac{2x_1^2 - x_1^2 x_2}{2(2 - x_2)^2} = \frac{x_1^2}{2(2 - x_2)}$$

Отже, розв’язок задачі Коші має вигляд: $u(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2}{2(2 - x_2)}$.

1.9. Системи нелінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку.

У загальному вигляді системи нелінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку записуються так:

$$\begin{cases} F_1\left(x, y, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \\ F_2\left(x, y, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де невідома функція $u = u(x, y)$ — залежить від двох аргументів, обмежуються такою.

Систему рівнянь (1) можна розв’язати відносно частинних похідних:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = A(x, y, u), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = B(x, y, u). \end{cases} \tag{2}$$

Для такої системи необхідною і достатньою умовою сумісності є співвідношення:

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial u} \cdot B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial u} \cdot A\,. \tag{3}$$

Якщо умова (3) виконується, то система (1) має безліч розв'язків, тобто має загальний розв'язок, залежний від довільної сталої.

Якщо умова (3) не перетворюється в тотожність, то вона визначає одну неявну функцію від аргументів x і y.

Якщо система рівнянь (1) має розв'язок, то він повинен збігатися з функцію, що визначається рівнянням (3).

Розглянемо приклади.

Приклад №1. Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{4xu}{x^2 + y^2} + yu, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{4yu}{x^2 + y^2} + xu. \end{cases}$$

Розв'язання. Перевіримо виконання умови про сумісність системи рівнянь

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial u} \cdot B = -\frac{8xyu}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + u + \left(\frac{4x}{x^2 + y^2} + y\right)\left(\frac{4y}{x^2 + y^2} + x\right),$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial u} \cdot A = -\frac{8xyu}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + u + \left(\frac{4x}{x^2 + y^2} + y\right)\left(\frac{4y}{x^2 + y^2} + x\right).$$

Умова сумісності виконується тотожно. Отже, система має розв'язки. Зінтегруємо перше рівняння системи по dx при умові, що $y = const$.

$$\frac{du}{u} = \left(\frac{4x}{x^2 + y^2} + y\right)dx\,, \qquad \ln u = 2\ln\left(x^2 + y^2\right) + xy + \ln\varphi(y), \qquad \ln\frac{u}{\left(x^2 + y^2\right)^2 \varphi(y)} = xy\,,$$

$u = \left(x^2 + y^2\right)^2 \varphi(y) \cdot e^{xy}$. Від одержаної функції знайдемо частинну похідну по змінній y і підставимо її значення у друге рівняння системи.

$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\left(x^2 + y^2\right)\varphi(y)\cdot e^{xy}\cdot 2y + \left(x^2 + y^2\right)^2\varphi'(y)e^{xy} + \left(x^2 + y^2\right)^2\varphi(y)\cdot x\cdot e^{xy} =$

$\frac{4yu}{x^2 + y^2} + \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}u + xu$.

Одержимо: $\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = 0$. Звідси находимо $\varphi'(y) = 0$, $\varphi(y) = C$, де C — довільна стала. Підставивши значення функції $\varphi(y)$ у вираз для u, запишемо шуканий розв'язок системи рівнянь: $u(x, y) = C\left(x^2 + y^2\right)^2 e^{xy}$.

Приклад №2. Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y}{x}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \ln x. \end{cases}$$

Розв'язання. Перевіримо виконання умови сумісності системи рівнянь:

$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial u}\cdot B = \frac{1}{x}$; $\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial u}\cdot A = \frac{1}{x}$. Система сумісна.

Зінтегруємо перше рівняння по dx при $y = const$: $u = \int \frac{y}{x}dx = y\ln x + \varphi(y)$, $u(x, y) = y\ln x + \varphi(y)$.

Знайдемо похідну від функції $u(x, y)$ по змінній y і підставимо її у друге рівняння $\frac{\partial u}{\partial y} = \ln x + \varphi'(y)$; $\ln x + \varphi'(x) = \ln x$; $\varphi'(x) = 0$; $\varphi(x) = C$.

Загальний розв'язок рівнянь: $u(x, y) = y\ln x + C$.

Приклад №3. Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = yu + u^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = xu. \end{cases}$$

Розв'язання. Перевіримо виконання сумісності рівнянь:

$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial u}\cdot B = u + \left(y + 2u\right)\cdot xu = \ u + xyu + 2xu^2$;

$\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial u}\cdot A = u + x\left(yu + u^2\right) = \ u + xyu + xu^2$.

Підставимо в умову сумісності: $u+xyu+2xu^2=u+xyu+xu^2$; $xu^2=0$. $x=0$ — не задовольняє рівняння. $u^2=0$; $u(x,y)=0$ задовольняє. Отже, розв'язок: $u(x,y)=0$. Єдиний розв'язок.

РОЗДІЛ II.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

2.1. Лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку. Класифікація рівнянь

Будемо розглядати диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку, які найчастіше зустрічаються у фізиці для математичного представлення фізичних процесів. У загальному вигляді такі рівняння записуються так

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0\,, \qquad (1)$$

де a_{11}, a_{12}, a_{22} – коефіцієнти рівняння, дійсні числа, або функції від x і y; $u(x,y)=u$ – невідома функція.

Надалі, для спрощення запису, будемо позначати частинні похідні від функції $u=u(x,y)$, так: u_{xx}, u_{xy}, u_x, u_y. У таких позначеннях рівняння (1) запишеться:

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0\,.$$

Л.Ейлер довів, що будь-яке диференціальне рівняння другого порядку можна звести до канонічного виду, аналогічно тому, як зводяться до канонічного виду рівняння ліній другого порядку. Ним же було запропоновано вживати назви типів канонічних диференціальних рівнянь такі ж, як і у лінійній другого порядку.

Для визначення типу диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку складають характеристичне рівняння такого виду:

$$\lambda^2-\lambda(a_{11}+a_{22})+\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)=0 \qquad (2)$$

та знаходять його корені за формулою

$$\lambda_{1,2}=\frac{(a_{11}+a_{22})\pm\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2-4\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)}}{2}\,, \qquad (3)$$

де λ_1 і λ_2 – дійсні числа.

Розглянемо випадки:

1. Якщо $\delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то корені λ_1 і λ_2 – одного знаку. В цьому випадку рівняння (1) — еліптичного типу.
2. Якщо $\delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то корені λ_1 і λ_2 – різних знаків і диференціальне рівняння (1) — гіперболічного типу.
3. Якщо $\delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0$, то один корінь і диференціальне рівняння (1) — параболічного типу.

Тип рівняння при перетворенні змінних не змінюється.

Для знаходження розв'язку диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку (2) потрібно скласти рівняння характеристик. Складається воно з коефіцієнтів його при старших членах)тобто, які стоять при похідних другого порядку) і деякої функції $\omega(x, y)$, у такому вигляді:

$$a_{11}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 = 0. \qquad (4)$$

Якщо функція $\omega(x, y)$ задовольняє рівнянню (4), то поверхня, а у випадку двох вимірів — лінія, визначається рівнянням $\omega(x, y) = C$, де C – довільна стала і називається характеристикою даного рівняння (1), тобто інтегральною поверхнею (чи лінією), або розв'язком його.

Для того, щоб розв'язати рівняння (1) будемо міркувати так: Нехай функція $\omega(x, y)$ – розв'язок рівняння (4), тоді $\omega(x, y) = C$ – характеристика рівняння (1). Диференціюючи рівняння характеристики, одержимо: $\frac{\partial\omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega}{\partial y}dy = 0$ або $\frac{\partial\omega}{\partial x}dx = -\frac{\partial\omega}{\partial y}dy$ або $\frac{\partial\omega}{\partial x} : \frac{\partial\omega}{\partial y} = -dy : dx$.

Оскільки рівняння (4) однорідне відносно $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ і $\frac{\partial\omega}{\partial y}$, то замінивши ці величини, — пропорційними до них — dy і dx, одержимо звичайне диференціальне рівняння першого порядку

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dy\,dx + a_{22}dx^2 = 0. \qquad (5)$$

Рівняння (5) еквівалентне рівнянню (4).

Розв'яжемо одержане рівняння (5):

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0 \text{ або } \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}\cdot a_{22}}}{a_{11}}; \\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}\cdot a_{22}}}{a_{11}}. \end{cases} \quad (6)$$

Розглянемо, якими підстановками потрібно користуватися, щоб перетворити диференціальне рівняння (1) до канонічного виду.

①. Якщо диференціальне рівняння (1) еліптичного типу: $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2>0$, то праві частини рівнянь (6), — спряжені між собою комплексні вирази. Їх розв'язок буде таким $\omega(x,y)=\varphi(x,y)\pm\Psi(x,y)=C$. В цьому випадку для приведення диференціального рівняння (1) до канонічного виду, треба користуватися підстановкою:

$$\zeta=\varphi(x,y),\quad \eta=\Psi(x,y), \quad (7)$$

де ζ (дзета) і η (ета) (букви грецького алфавіту) — нові змінні.

②. Якщо диференціальне рівняння (1) гіперболічного типу: $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2<0$, то інтеграли рівнянь (6) будуть такими: $\varphi(x,y)=C_1$ і $\Psi(x,y)=C_2$, а заміна змінних, для зведення рівняння (1) до канонічного виду буде такою:

$$\zeta=\varphi(x,y),\quad \eta=\Psi(x,y). \quad (8)$$

③. Якщо рівняння (1) параболічного типу: $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2=0$, то рівняння характеристик має лише один корінь: $\varphi(x,y)=C$. Тому при зведенні рівняння (1) до канонічного виду треба ввести нові зміні так: $\zeta=\varphi(x,y)$, а функцію для другої змінної ζ потрібно підібрати довільно, але щоб задовольнялося рівняння:

$$\zeta_x\cdot\eta_y-\zeta_y\cdot\eta_x\neq 0. \quad (9)$$

Отже, у випадку параболічного типу треба користуватися підстановкою:

$$\zeta=\varphi(x,y),\quad \eta=\Psi(x,y). \quad (10)$$

де $\Psi(x,y)$– довільно вибрана, конкретна функція неперервна і диференційовна, яка задовольняє умові(8).

Канонічні диференціальні рівняння в частинних похідних другого порядку записуються так:

1). Еліптичного типу:

$$u_{xx} + u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \qquad (11)$$

2). Гіперболічного типу:

$$u_{xx} - u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \text{ або } u_{xy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \qquad (12)$$

3). Параболічного типу:

$$u_{xx} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \text{ або } u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \qquad (13)$$

Розглянемо приклади.

Приклад №1. Привести до канонічного виду диференціальне рівняння:

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$$

Розв'язання. Випишемо коефіцієнти рівняння:

$a_{11} = x^2$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = -y^2$; $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -x^2 y^2 < 0$.

Дане диференціальне рівняння гіперболічного типу.

Складаємо рівняння характеристик

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}; \ \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Знаходимо інтеграли рівнянь:

1). $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$, $\ln y + \ln x = \ln C_1$; $\ln xy = \ln C_1$, $xy = C_1$,

2). $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$; $\ln y - \ln x = \ln C_1$; $\ln \frac{y}{y} = \ln C_2$, $\frac{y}{x} = C_2$.

Вводимо нові змінні: $\zeta = xy$; $\eta = \frac{y}{x}$.

Знаходимо частинні похідні функції $u(x, y)$ по нових змінних:

$$u_x = u_\zeta \zeta_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\zeta \cdot y + u_\eta \left(-\frac{y}{x^2}\right) = u_\zeta y - \frac{y}{x^2} u_\eta.$$

$$u_{xx} = y u_{\zeta\zeta} \cdot \zeta_x + y u_{\zeta\eta} \eta_x + \frac{+y2x}{x^{-4-3}} u_\eta - \frac{y}{x^2} u_{\zeta\eta} \zeta_x - \frac{y}{x^2} u_{\eta\eta} \eta_x =$$

$$y^2 u_{\zeta\zeta} - \frac{y^2}{x^2} u_{\zeta\eta} + 2\frac{y}{x^3} u_\eta - \frac{y^2}{x^2} u_{\zeta\eta} + \frac{y^2}{x^4} u_{\eta\eta}.$$

$$u_y = u_\zeta \cdot \zeta_y + u_\eta \cdot \eta_y = x \cdot u_\zeta + \frac{1}{x} u_\eta.$$

$$u_{yy} = xu_{\zeta\zeta}\zeta_y + xu_{\zeta\eta}\eta_y + \frac{1}{x}u_{\eta\zeta}\zeta_y + \frac{1}{x}u_{\eta\eta}\eta_y = x^2u_{\zeta\zeta} + u_{\zeta\eta} + u_{\eta\zeta} + \frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}.$$

Підставимо значення похідних у дане рівняння. Після елементарних перетворень, одержимо:

$$u_{\zeta\eta} - \frac{u_\eta}{2xy} = 0.$$

Одержали канонічне рівняння гіперболічного типу.

Приклад №2. Привести до канонічного виду рівняння:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0.$$

Розв'язання.

$a_{11} = 1$; $a_{12} = -1$; $a_{22} = 2$; $\delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 1 > 0$.

Дане диференціальне рівняння еліптичного типу.

Складаємо рівняння характеристик: $\frac{dy}{dx} = -1 \pm i$. Розв'язавши цю систему, одержимо дві сім'ї характеристик:

$y = -x + ix + C_1$ і $y = -x - ix + C_2$. Зробимо заміну змінних $\zeta = x + y$; $\eta = x$. Знаходимо частинні похідні від функції $u(x, y)$ по нових змінних:

$u_x = u_\zeta\zeta_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\zeta + u_\eta$; $u_{xx} = u_{\zeta\zeta}\zeta_x + u_{\zeta\eta}\eta_x + u_{\eta\zeta}\zeta_x + u_{\eta\eta}\eta_x = u_{\zeta\zeta} + 2u_{\zeta\eta} + u_{\eta\eta}$.

$u_y = u_\zeta\zeta_y + u_\eta \cdot \eta_y = u_\zeta$; $u_{yy} = u_{\zeta\zeta}\zeta_y + u_{\zeta\eta}\eta_y = u_{\zeta\zeta}$; $u_{xy} = u_{\zeta\zeta} + u_{\zeta\eta}$.

Підставимо значення похідних у дане рівняння. Після елементарних перетворень, одержимо канонічне рівняння еліптичного типу:

$u_{\zeta\zeta} + u_{\eta\eta} = 0$.

2.2. Коректність постановки задач математичної фізики

За допомогою диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку можна описувати різні фізичні процеси і природні явища. Тому такі рівняння називають рівняннями математичної фізики.

Диференціальні рівняння гіперболічного і параболічного типів використовуються частіше при вивченні процесів, які відбуваються в часі.

Наприклад: механічні коливання, поширення електромагнітних хвиль, теплоти, дифузії і ін.

У одновимірному просторі функція u залежить від однієї змінної — довжини і другої змінної — часу, та позначається $u(x,t)$. Диференціальні рівняння записуються так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \cdot C + g(x,t), \text{ (гіперболічний тип),} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + g(x,t), \text{ (параболічний тип),} \qquad (2)$$

де C – постійне число, $g(x,t)$ – відома функція.

Відомо, що такі рівняння мають безліч розв'язків. Для того щоб розв'язок був конкретним, а не довільним до шуканої функції ставляться умови, яким вона повинна задовольняти. Такі умови бувають двох типів: початкові і граничні (крайові).

Якщо диференціальне рівняння гіперболічного типу, то на функцію $u = u(x,t)$ накладаються початкові умови, які визначають в момент часу $(t = 0)$, величину функції і її похідної по часу:

$$u(x;0) = f(x),\ \frac{\partial u(x;0)}{\partial t} = F(x) \text{ або } u\big|_{t=0} = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x), \qquad (3)$$

а також граничні умови, які визначають величину функції на границі області. Наприклад, на кінцях закріпленої струни довжиною l, граничні умови записуються так:

$$u(0;t) = u_1,\ u(l,t) = u_2 \text{ або } u\big|_{x=0} = u_1,\ u\big|_{x=l} = u_2\,. \qquad (4)$$

Якщо задача розглядається на кінцевому інтервалі, то повинні бути задані як початкові так і граничні умови. В цьому випадку говорять, що розглядається змішана задача.

Якщо процес протікає на нескінченному інтервалі зміни координат x (наприклад, нескінченна струна чи стержень), то граничні умови не ставляться. В цьому випадку маємо задачу лише з початковими умовами. Її часто називають задачею Коші.

Рівняння еліптичного типу виникають завжди при дослідженні стаціонарних процесів. Часу t в таких рівняннях немає і обидві незалежні змінні — це координати точки $M(x,y)$. Такими є рівняння стаціонарного температурного поля; електричного поля, утвореного зарядом.

Для задач еліптичного типу ставляться лише граничні умови, тобто, вказується поведінка невідомої функції на контурі області.

Канонічне диференціальне рівняння еліптичного типу у двовимірному просторі має такий вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x,y). \qquad (5)$$

Це рівняння може описувати стаціонарні поля: температурне, потенціальне, гравітаційне і ін. Граничні умови записуються так:

$$u(x,y)\big|_{\Gamma} = \varphi(x,y). \qquad (6)$$

Розв'язок задачі називається стійким, відносно початкових умов, якщо малі зміни у початкових і граничних умовах, викликають і малі зміни у розв'язку.

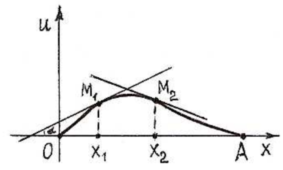
Всі задачі математичної фізики, які мають єдиний стійкий розв'язок відносно початкових і граничних умов, називаються поставленими коректно.

Досліджуючи питання про коректність постановки задачі математичної фізики видатний французький математик Жак Адамар (1865 — 1963) дав такі означення:

Задача називається коректною, якщо вона розв'язується при будь-яких початкових (або граничних) даних, які належать до деякого класу, має єдиний розв'язок і цей розв'язок неперервно залежить від початкових даних.

Задача називається некоректною, якщо вона розв'язується не при будь-яких початкових умовах, або якщо вона має не єдиний розв'язок або якщо неможливо вибрати такі норми для розв'язків і такі норми для початкових даних, щоб у цих нормах мала місце неперервна залежність розв'язку від умов задачі.

2.3. Коливання струни та їх рівняння. Постановка початкових і граничних умов



Мал.5.

Нехай дано натягнуту струну довжиною l, закріплену на кінцях. Побудуємо прямокутну декартову систему координат Oxu так, щоб вісь Ox співпадала з натягнутою струною, у якої один кінець збігається з початком координат, точкою O, а другий з точкою $A(l,0)$, мал.5.

Будемо вважати, що у початковий момент часу всі точки струни розташовані вздовж вісі Ox, а T – сила натягу її в цей момент, який називається положенням рівноваги.

Якщо під дією зовнішньої сили, розташованої у площині Oxu паралельно вісі Ou, вивести із положення рівноваги точки струни, які лежать між закріпленими кінцями, і припинити дію цієї сили, то струна почне коливатися, тобто відхилятися своїми точками навколо положення рівноваги. У процесі коливання величина відхилення u буде залежати від абсциси точки струни x і від часу t. Отже, щоб знати положення точки струни у будь-який момент часу, потрібно встановити залежність між величинами u, x і t, тобто знайти функцію $u(x,t)$.

Замітимо, що при фіксованому значенні часу t, частинна похідна $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x(x,t)$ – визначає кутовий коефіцієнт дотичної до струни у точці з абсцисою x, вздовж якої розташована сила натягу струни. При постійному значенні x функція $u(x,t)$ визначає закон руху точки з абсцисою x, вздовж прямої, паралельної вісі Ou; частинна похідна $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t(x,t)$ – швидкість цього руху, а друга похідна $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ – прискорення.

Для того, щоб записати рівняння коливань струни зробимо декілька припущень: 1). Будемо розглядати струну абсолютно гнучкою, тобто без опору на згин; 2). Вважатимемо струну пружною, яка задовольняє закону Гука; 3). Зміна величини сили натягу пропорційна зміні довжини струни; 4). Струна однорідна з лінійною густиною ρ (ρ – маса одиниці довжини струни); 5). На струну, паралельно до вісі Ou, діють сили, неперервно розподілені вздовж струни і які можуть змінюватися з часом. Густину розподілу цих сил будемо позначати $g(x,t)$. Сили напрямлені вгору будемо вважати додатними, а вниз — від'ємними. Наприклад, якщо зовнішньою силою є вага струни, то $g(x,t) = -\rho \cdot g$, де ρ – густина струни, g – прискорення сили тяжіння.

Силами опору середовища спочатку будемо нехтувати.

Під час коливання струни, взагалі кажучи, будуть змінюватися і довжина струни l і сила натягу T. Проте ми будемо розглядати лише малі коливання. Якщо позначити через $\alpha(x,t)$ гострий кут між віссю абсцис і дотичною до струни в точці з абсцисою x в момент часу t, то умова малості коливань полягає в тому, що величина $\alpha^2(x,t) \approx 0$.

Розкладаючи у ряд Маклорена функцію $\sin\alpha$, одержимо:

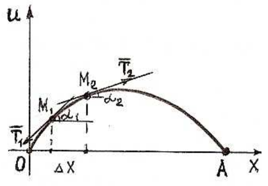
$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots.$$

Згідно припущення маємо: $\sin\alpha \approx \alpha$. Крім цього $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha^2}{2} \approx 0$, тому $\cos\alpha \approx 1$. Звідси слідує $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha$; $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx 0$.

При такій умові довжина струни на ділянці M_1M_2 у момент часу t дорівнює

$$M_1M_2 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx = x_2 - x_1,$$

і вся довжина: $OA = l,$ – залишається незмінною.



Мал.6.

Покажемо тепер, що при запропонованих припущеннях величина сили натягу T є постійна, не залежна ні від точки її прикладення ні від часу t. Для цього візьмемо будь-яку ділянку струни M_1M_2 (мал.6) у момент часу t і замінимо дію відкинутих ділянок струни силами натягів T_1 і T_2. Так як за умовою всі точки струни рухаються паралельно вісі Ou і зовнішні сили теж паралельні цій же вісі, то сума проекцій сил натягу на вісь Ox повинна дорівнювати нулеві:

$$-T_1\cos\alpha_1 + T_2\cos\alpha_2 = 0.$$

В зв'язку з малістю кутів слідує $T_1 = T_2 = T$.

Перейдемо тепер до виведення рівняння коливань струни. Для цього виділимо нескінченно малу ланку струни M_1M_2, яка проектується на вісь Ox у інтервал $[x; x+dx]$. На кінцях струни діють сили $T_1 = T_2 = T$. Визначимо суму проекцій цих сил на вісь Ou:

$$F_u = T\cdot\sin\alpha_2 - T\sin\alpha_1 = T(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1).$$

Оскільки $\cos\alpha \approx 1$, то $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = u_x(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. Отже,

$$F_u = T(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) = T(u_x(x+dx,t) - u_x(x,t)) = \underset{при\ dx\to 0}{T\frac{u_x(x+dx,t) - u_x(x,t)}{dx}}dx = T\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx.$$

У випадку коли розглядаються вільні коливання струни, то струна рухається лише за рахунок сил натягу. Згідно другого закону Ньютона: сила прикладена до тіла повинна бути рівною добуткові маси тіла на прискорення надане тілу цією силою. Враховуючи, що ділянка струни dx має лінійну густину ρ і прискорення $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, можна записати: $\rho\, dx\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$. Після елементарного перетворення одержимо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

де позначено $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$, a – швидкість поширення звуку у струні. Маємо диференціальне рівняння вільних коливань струни.

Вперше диференціальне рівняння коливань струни вивів у 1715р. англійський математик Брук Тейлор (1685—1731), відомий відкриттям загальної формули розкладу функції у степеневий ряд.

Розглянемо випадок, коли на струну діють зовнішні сили. Позначимо рівнодійну всіх зовнішніх сил, прикладених до ділянки dx, через $F = g(x,t) \cdot dx$. Застосуємо другий закон Ньютона із врахуванням дії на ділянку струни як сили натягу, так і зовнішніх сил:

$$\rho\, dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + g(x,t) \cdot dx .$$

Скоротивши це рівняння на dx і поділивши на ρ, маємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \cdot g(x,t) \tag{2}$$

Одержали диференціальне рівняння коливань струни під дією зовнішніх сил.

Розглянемо коливання струни, що відбуваються у середовищі з опором. Силу опору середовища коливального процесу будемо розглядати пропорційною швидкості руху. На ділянці dx її можна визначити за формулою: $F_{оп.} = \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dx$, де α – коефіцієнт пропорціональності. Враховуючи, що сила опору завжди направлена проти руху і обмежуючись випадком вільних коливань, запишемо рівняння коливань струни у такому вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3}$$

де $2m = \frac{\alpha}{\rho}$, $m = \frac{\alpha}{2\rho}$ – коефіцієнт опору середовища.

Диференціальне рівняння (3) визначає затухаючі коливання струни у середовищі з опором.

Якщо на струну діють: сила опору середовища і зовнішні сили, то одержується диференціальне рівняння незатухаючих коливань струни у середовищі з опором:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2m\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho}\cdot g(x,t). \qquad (4)$$

Початкові умови. Для визначення функції $u(x,t)$ початковими умовами беруться: значення функції у початковий момент часу $t=0$ і значення прискорення у цей момент та записують:

$$u(x;0)=f(x),\ \frac{\partial u(x;0)}{\partial t}=F(x); \qquad (5)$$

або

$$u\big|_{t=0}=f(x),\ u_t\big|_{t=0}=F(x). \qquad (6)$$

Граничні умови. Якщо струна має певну довжину l то граничні умови визначають значенням функції $u(x,t)$ на її кінцях. Наприклад, якщо кінці струни закріплені нерухомо, то значення функції $u(x,t)$ у цих точках дорівнює нулеві і граничні умови записуються так:

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0; \qquad (7)$$

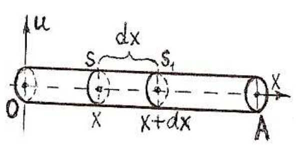
або

$$u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{x=l}=0. \qquad (8)$$

Якщо на кінцях струни значення функції змінюється за певними законами, то граничні умови мають такий вигляд

$$u(0,t)=u_1,\ u(l,t)=u_2. \qquad (9)$$

2.4. Поздовжні коливання стержня та їх рівняння



Мал.7.

Стержень — це тіло циліндричної або призматичної форми. Будемо розглядати вздовж вісі. При цьому будь-який поперечний переріз стержня переміщується вздовж вісі, мал.7.

Якщо стержень стиснути (або розтягнути), а потім відпустити, то в ньому виникнуть поздовжні коливання. Виведемо рівняння таких коливань.

Розташуємо вісь абсцис (Ox) вздовж вісі стержня. Кінці стержня закріпимо у точках $O(0;0)$ і $A(l;0)$, де $l-$ довжина стержня. Розглянемо поперечний переріз стержня у деякій точці x. Зміщення цього перерізу у будь-який момент часу t будемо характеризувати функцією $u(x,t)$. Нехай точка x змістилась у положення $x+dx$, тоді функція зміщення в ній у момент часу t буде $u(x+dx;t)$. Згідно формули Тейлора, з точністю до нескінчено малих вищого порядку малості, можна записати: $u(x+dx;t)=u(x,t)+\frac{\partial u}{\partial x}dx$. Звідси слідує, що відносне видовження стержня в перерізі з абсцисою x в момент часу t дорівнює

$$\frac{u(x+dx;t)-u(x,t)}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}=u_x(x,t). \qquad (1)$$

Вважаючи, що сили, які викликають це видовження, підлягають закону Гука, знайдемо величину натягу T, яка діє на переріз у точці x:

$$T=E\cdot s\cdot u_x(x,t), \qquad (2)$$

де s – площа поперечного перерізу стержня, E – модуль пружності матеріалу стержня. Відповідно, сила T_1, яка діє у точці $x_1=x+dx$ на поперечний переріз, дорівнює:

$$T_1=E\cdot s\cdot u_x(x+dx;t) \qquad (3)$$

Результуюча цих сил на ділянку dx дорівнює різниці

$$T_1-T=Es[u_x(x+dx;t)-u_x(x,t)]=Es\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \qquad (4)$$

Розглядаючи виділену ділянку стержня матеріальною точкою з масою $\rho s\,dx$, де ρ – об’ємна густина стержня, застосуємо другий закон Ньютона:

$$\rho s\,dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=Es\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx. \qquad (5)$$

Скоротивши рівняння (5) на $s\,dx$ і ввівши позначення $a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, одержимо диференціальне рівняння вільних поздовжніх коливань стержня:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (6)$$

Якщо додатково припустити, що до стержня прикладена зовнішня сила $g(x,t)$, розрахована на одиницю об’єму, і діє вздовж стержня, то до правої частини співвідношення (5) потрібно додати вираз $g(x,t)\cdot s\cdot dx$. Рівняння (6) прийме вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \cdot g(x;t). \qquad (7)$$

Одержали диференціальне рівняння вимушених поздовжніх коливань стержня.

Зовнішньо, диференціальні рівняння вільних і вимушених поздовжніх коливань стержня співпадають з відповідними поперечними коливаннями струни. Аналогічно ставляться початкові і граничні умови для функції $u(x,t)$.

Розглянемо приклад з визначенням початкових і граничних умов.

Приклад . Нехай однорідний стержень з густиною ρ і довжиною l закріплено в точці $x = 0$, розтягнуто силою P, прикладеною до другого його кінця. У момент часу $t = 0$ дія сили миттєво припиняється, після чого стержень залишається сам на себе. У стержні виникають поздовжні коливання. Записати диференціальне рівняння повздовжніх коливань стержня і початкові та граничні умови для функції $u(x;t)$.

Розв'язання. Розглядаються вільні коливання стержня вздовж його вісі. Диференціальне рівняння таких коливань записується так

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

де $a^2 = \frac{E}{\rho}$, де E – модуль пружності стержня.

Будемо вважати, що сила P, яка діє у початковий момент, розтягує стержень за законом Гука і визначається за формулою (2). Знайдемо початкове зміщення $u(x;0) = f(x)$. Так як $P = E \cdot S \cdot f'(x)$, то $f'(x) = \frac{P}{E \cdot S}$, де S – площа поперечного перерізу стержня, а $f(x) = \frac{P}{Es} x$. Отже, початкові умови для функції $u(x,t)$:

$$u(x;0) = \frac{P}{Es} x; \quad \frac{\partial u(x;0)}{\partial t} = 0.$$

Оскільки стержень закріплено тільки в одному кінці, а другий — вільний, то і одна гранична умова:

$$u(0;t)=0 .$$

2.5. Задача про нескінчену струну. Метод Даламбера

Розглянемо струну з великою довжиною закріплену на кінцях. Якщо збудити коливання в середній частині цієї струни, то кінці на їх впливати не будуть, оскільки не буде відбивання хвиль від закріплених кінців. Коливання, поширюючись по струні, згаснуть, не дійшовши до кінців, за рахунок розсіювання енергії. Таку струну вважають нескінченою і при вивчені її коливань граничних умов не розглядають.

Вільні коливання нескінченої струни описуються таким однорідним диференціальним рівнянням:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

де u – невідома функція поперечних коливань, x – абсциса, t – час, $a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ – швидкість поширення звуку у струні, T – сила натягу, ρ – лінійна густина струни (маса одиниці довжини).

Початкові умови для функції $u(x,t)$:

$$u(x,0)=f(x); \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=F(x), \qquad (2)$$

де $f(x), F(x)$ – відомі функції. Знаходження функції $u=u(x,t)$, яка б задовольняла рівнянню (1) і початковим умовам (2), називається задачею Коші.

Розглянемо розв'язання такої задачі методом Даламбера або методом біжучих хвиль.

Спочатку покажемо, що загальний розв'язок рівняння (1) залежить від двох довільних функцій і має вигляд:

$$u(x,t)=\varphi(x-at)+\Psi(x+at), \qquad (3)$$

де φ і Ψ – довільні неперервні і двічі диференційовні функції.

Знайдемо першу і другу частинні похідні по змінних x і t від функції $u(x,t)$:

$$u_x = \varphi'(x-at) + \Psi'(x+at),$$

$$u_{xx} = \varphi''(x-at) + \Psi''(x+at),$$

$$u_t = -a\varphi'(x-at) + a\Psi'(x+at),$$

$$u_{tt} = a^2\varphi''(x-at) + a^2\Psi''(x+at).$$

При підстановці значень знайдених похідних у рівняння (1), воно перетворюється в тотожність. Отже, функція (3) є загальним розв'язком рівняння (1).

Загальний розв'язок диференціального рівняння (1) у вигляді (3) вперше було знайдено у 1747р французьким математиком Жаном Даламбером.

Користуючись початковими умовами, визначимо невідомі функції φ і Ψ. Згідно першої початкової умови значення функції (3) запишеться так:

$$u(x;0) = \varphi(x) + \Psi(x) = f(x). \qquad (4)$$

Згідно другої початкової умови маємо:

$$\frac{\partial u(x;0)}{\partial t} = -a\varphi'(x) + a\Psi'(x) = F(x). \qquad (5)$$

Інтегруючи рівняння (5) на проміжку $[0,x]$, одержимо

$$\int_0^x \left[-a\varphi'(x) + a\Psi'(x)\right]dx = \int_0^x F(x)\,dx,$$

$$-a\left[\varphi(x) - \Psi(x)\right]\Big|_0^x = \int_0^x F(x)\,dx \quad \text{або}$$

$$-\varphi(x) + \Psi(x) = \frac{1}{a}\int_0^x F(x)\,dx + C, \qquad (6)$$

де $C = -\varphi(0) + \Psi(0) -$ стала величина.

Із рівнянь (5) і (6) запишемо систему

$$\begin{cases} \varphi(x) + \Psi(x) = f(x), \\ -\varphi(x) + \Psi(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x F(x)\,dx + C, \end{cases}$$

з якої знаходимо:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x F(x)\,dx - \frac{C}{2}, \\ \Psi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x F(x)\,dx + \frac{C}{2}. \end{cases}, \qquad (7)$$

Замінивши у формулах (7) аргумент x відповідно на $x-at$ і $x+at$ і підставивши їх у формулу (3), одержимо

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-at) + f(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(x)\,dx. \qquad (8)$$

Формула (8) визначає розв'язок задачі Коші для вільних коливань струни методом Даламбера. Вперше формулу (8) було одержано у 1748р Леонардом Ейлером. Тепер її називають формулою Даламбера.

Цікаво відмітити, що Ейлер вважав початкові функції $f(x)$ і $F(x)$ довільними кривими, як і випливає з умови задачі. Ж.Даламбер у 1750р. спішно виступив проти такого широкого тлумачення. Він вважав, що функція $u(x,t)$ повинна виражатися аналітично через x і t.

У випадку, коли задача Коші визначається неоднорідним диференціальним рівнянням виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + P(x,t), \qquad (9)$$

де $P(x,t)$ – функція вимушених коливань, з тими ж початковими умовами (2), розв'язок її визначається за такою формулою:

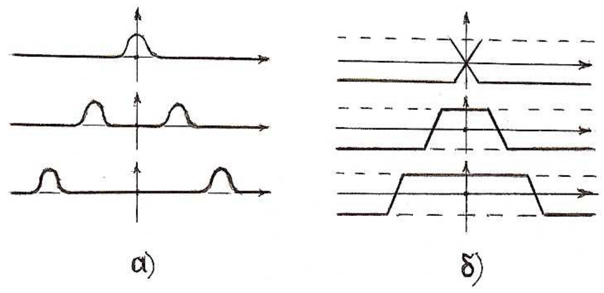
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-at) + f(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(x)\,dx + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t+\tau)} P(\zeta,\tau)\,d\zeta. \qquad (10)$$

Висновки

1. Якщо початкові швидкості точок струни відсутні, тобто $F(x)=0$, і струна коливається лише за рахунок початкових відхилень $f(x)$, то формула коливань струни запишеться так:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-at) + f(x+at)\right]. \qquad (11)$$

Вона визначає утворення на струні хвиль відхилення, які поширюються від початкової точки вправо і вліво у вигляді випуклостей, створюючи біжучу хвилю, мал.8, а).



Мал.8.

②. Якщо початкові відхилення точок струни дорівнюють нулеві, а коливання струни відбуваються за рахунок того, що в початковий момент часу точки струни отримали початкові швидкості $F(x)$, то в цьому випадку формула коливань струни (8) має такий вигляд:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(x)\,dx\,. \qquad (12)$$

Вона визначає утворення в струні хвиль імпульсу, які поширюються в ній у формі трапеції, мал.8, б).

③. Загальний випадок початкових умов є результатом накладання (суперпозиції) розглянутих двох випадків біжучих хвиль.

④. Для напівнескінченої струни, тобто закріпленої на одному кінці нерухомо, рівняння (1) з початковими умовами (2) слід доповнити граничною умовою: $u(0,t)=0$. При цьому якщо функції $f(x)$ і $F(x)$ непарні, тобто $f(-x)=-f(x)$ і $F(-x)=-F(x)$, то розв'язок задачі Коші визначається формулою (8).

⑤. У випадку скінченої струни, закріпленої нерухомо на обох кінцях, розв'язок задачі ускладнюється, — треба врахувати накладання збуджених хвиль відбитих від нерухомих кінців. В цьому випадку розв'язок задачі краще знаходити методом Фур'є.

Приклад №1. Знайти розв’язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\text{, якщо } u(x;0)=x^2,\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.$$

Розв’язання. Оскільки: $a=1$, $f(x)=x^2$, $F(x)=0$, то за формулою (11) знаходимо:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[(x-t)^2+(x+t)^2\right]=x^2+t^2.$$

Відповідь: $u(x,t)=x^2+t^2$.

Приклад №2. Знайти розв’язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+t\text{, якщо } u(x,0)=2x;\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=x.$$

Розв’язання. Оскільки: $a=2$, $f(x)=2x$, $F(x)=x$, $P(x,t)=t$, то за формулою (10) знаходимо:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[2(x-2t)+2(x+2t)\right]+\frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t}x\,dx+\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t+\tau)}\tau\cdot d\zeta=2x+xt+\frac{1}{6}t^3.$$

Відповідь: $u(x,t)=2x+xt+\frac{1}{6}t^3$.

2.6. Вільні коливання струни, закріпленої на обох кінцях. Метод Фур’є

Вільні коливання струни, закріпленої на обох кінцях, описується таким диференціальним рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\tag{1}$$

в якому невідома функція $u(x,t)$ задовольняє таким початковим умовам:

$$u(x;0)=f(x),\ \frac{\partial u(x;0)}{\partial t}=F(x),\tag{2}$$

і граничним умовам:

$$u(0;t)=0,\ u(l,t)=0.\tag{3}$$

Тут l – довжина струни, $a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ – швидкість поширення хвиль у струні, T – сила натягу, ρ – лінійна густина.

Будемо розв'язувати рівняння (1) методом Фур'є, який ще називається методом розділення змінних. Розв'язування цим методом складається з двох частин:

1). Знаходяться частинні розв'язки рівняння (1), які задовольняють граничним умовам шуканої функції;

2). Знаходиться загальний розв'язок, який задовольняє початковим умовам.

I-частина. Представимо шукану функцію у такому вигляді:

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t), \tag{4}$$

де $X(x)$ і $T(t)$ – дві невідомі неперервні і диференційовні функції: перша залежність від аргументу x, а друга від часу t. Знайдемо другі похідні від функції (4) по змінних x і t.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=X\cdot T'', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''\cdot T. \tag{5}$$

Підставимо значення похідних у рівняння (1):

$$X\cdot T''=a^2 X'' T \tag{6}$$

Поділимо обидві частини рівняння (6) на $a^2 X\, T$:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{7}$$

Оскільки у рівнянні (7) ліва і права частини залежать від різних змінних, то вони можуть бути рівними лише тоді, коли дорівнюватимуть постійній величині, наприклад, $c=const$. Звідси слідує, що функції $X(x)$ і $T(t)$ визначаються із звичайних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$X''(x)-c\cdot X(x)=0 \quad \text{і} \quad T''(t)-c\cdot a^2 T(t)=0. \tag{8}$$

Розв'язки цих рівнянь повинні задовольняти граничним умовам:

$$u(0;t)=X(0)\cdot T(t)=0, \quad u(l;t)=X(l)\cdot T(t)=0. \tag{9}$$

Оскільки t – змінна, то рівняння (9) виконуватимуться при

$$X(0)=0 \quad \text{і} \quad X(l)=0. \tag{10}$$

Ми прийшли до лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами:

$$X''(x)-c\cdot X(x)=0, \text{ якщо } X(0)=0 \quad \text{і} \quad X(l)=0. \tag{11}$$

Ненульові розв’язки рівняння (11) будемо шукати в такому вигляді:

$$X(x)=e^{rx} \tag{12}$$

Підставляючи значення функції $X(x)$ і її похідні із рівняння (12) у рівняння (11), одержимо характеристичне рівняння:

$$r^2-c=0. \tag{13}$$

Розглянемо різні випадки.

1. Нехай $c=\lambda^2>0$, тоді корені рівняння (13) будуть дійсними числами: $r_{1,2}=\pm\lambda$ і загальний розв’язок рівняння (11) матиме вигляд:

$$X(x)=c_1e^{\lambda x}+c_2e^{-\lambda x}. \tag{14}$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі, які визначаються з граничних умов:

$$\begin{cases} c_1+c_2=0, \\ c_1e^{\lambda l}+c_2e^{-\lambda l}=0. \end{cases} \tag{15}$$

Детермінант цієї системи: $\Delta=\dfrac{1-e^{2\lambda l}}{e^{\lambda l}}\neq 0$, а це означає, що система має єдиний ненульовий розв’язок: $c_1=c_2$, $X(x)\equiv 0$. Цей розв’язок нам не підходить.

2. Нехай $c=0$, тоді обидва корені характеристичного рівняння (13): $r_{1,2}=0$. В цьому випадку загальний розв’язок буде

$$X(x)=c_1+c_2x. \tag{16}$$

Підставляючи граничні умови одержимо

$$X(0)=c_1=0; \quad X(l)=c_1+c_2\cdot l.$$

Звідси слідує: $c_1=0$; $c_2=0$. Отже, і в цьому випадку нульовий розв’язок: $X(x)\equiv 0$, що не підходить.

3. Нехай $c=-\lambda^2<0$, корені рівняння (13) уявні числа: $r_{1,2}=\pm i\lambda$. В цьому випадку загальний розв’язок містить тригонометричні функції:

$$X(x)=c_1\cdot\cos\lambda x+c_2\cdot\sin\lambda x. \tag{17}$$

При $x = 0$, маємо $X(0) = c_1 = 0$; при $x = l$, маємо $X(l) = c_2 \cdot \sin \lambda l = 0$. Це рівняння має місце при $c_2 \neq 0$ і буде таким: $\sin \lambda l = 0$. Розв'язок цього рівняння: $\lambda \cdot l = k\pi \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Звідси маємо

$$\lambda = \frac{k\pi}{l}. \tag{18}$$

Отже, при $c = -\lambda^2$ існує розв'язок рівняння (11) відмінний від нуля. Цей розв'язок при деякому фіксованому k можна записати так

$$X_k(x) = A_k \cdot \sin \frac{k\pi\, x}{l}, \tag{19}$$

де A_k – довільна постійна величина.

У формулі (18) кожному значенню k відповідає повне значення числа λ, позначимо його

$$\lambda_k = \frac{kx}{l}. \tag{20}$$

Величини λ_k називаються власними числами або частотами коливань, а функції: $\sin \dfrac{k\pi\, x}{l}$ – власними функціями рівняння (11) або формами коливань.

Тепер знайдемо функцію $T(t)$. Кожному власному числу λ_k відповідає власна функція $T_k(t)$, яка визначається з рівняння (8) при $c = -\lambda^2$:

$$T_k''(t) + \left(\frac{k\pi\, a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0. \tag{21}$$

Це звичайне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Загальний розв'язок його має такий вигляд:

$$T_k(t) = B_k \cos \frac{k\pi\, at}{l} + D_k \sin \frac{k\pi\, at}{l}, \tag{22}$$

де B_k і D_k – довільні сталі.

Підставляючи знайдені вирази (19) і (22) у формулу (4) при $k = 1, 2, 3, \ldots$, і позначивши: $A_k \cdot B_k = a_k$, $A_k \cdot D_k = b_k$, знайдемо частинні розв'язки диференціального рівняння (1)

$$u_k(x,t) = \left(a_k \cdot \cos \frac{k\pi\, at}{l} + b_k \cdot \sin \frac{k\pi\, at}{l}\right) \sin \frac{k\pi\, x}{l}. \tag{23}$$

II-частина. Загальний розв'язок рівняння (1) складається із суми частинних розв'язків. Його можна записати у вигляді нескінченного ряду

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos\frac{k\pi\, at}{l}+b_k\cdot\sin\frac{k\pi\, at}{l}\right)\cdot\sin\frac{k\pi\, x}{l}. \qquad (24)$$

Ряд (24) повинен бути збіжним і його можна двічі почленно диференціювати.

Будемо тепер визначати довільні сталі a_k і b_k так, щоб функція (24) задовольняла початкові умови. При $t=0$ із (24) і (2) одержимо:

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot\sin\frac{k\pi\, x}{l}=f(x). \qquad (25)$$

Продиференціюємо ряд (24) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi\, a}{l}\left(-a_k\cdot\sin\frac{k\pi\, at}{l}+b_k\cdot\cos\frac{k\pi\, at}{l}\right)\cdot\sin\frac{k\pi\, x}{l}.$$

При $t=0$ запишемо другу початкову умову:

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi\, a}{l}b_k\cdot\sin\frac{k\pi\, x}{l}=F(x). \qquad (26)$$

Із рівнянь (25) і (26) слідує, що коефіцієнти a_k і b_k можуть бути визначені розкладом функцій $f(x)$ і $F(x)$ в ряди Фур'є по синусах на інтервалі $[0,l]$.

Покажемо, що власні функції (19) ортогональні на інтервалі $[0,l]$.

Із теорії функції відомо, що система функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, . . . , $\varphi_n(x)$, . . . ортогональна на інтервалі $[a,b]$, якщо інтеграл від добутку двох різних функцій системи дорівнює нулеві, тобто

$$\int_a^b\varphi_n(x)\cdot\varphi_m(x)dx=0 \quad \text{при } n\neq m.$$

Отже маємо:

$$\int_0^l\sin\frac{m\pi\, x}{l}\cdot\sin\frac{n\pi\, x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\cos\frac{(m-n)\pi\, x}{l}-\cos\frac{(m+n)\pi\, x}{l}\right]dx=$$

$$\frac{l}{2\pi}\left\{\frac{1}{m-n}\cdot\sin\frac{(m-n)\pi\, x}{l}-\frac{1}{m+n}\cdot\sin\frac{(m+n)\pi\, x}{l}\right\}\Bigg|_0^l=0,$$

$$\int_0^l\sin\frac{m\pi\, x}{l}\cdot\sin\frac{m\pi\, x}{l}dx=\int_0^l\sin^2\frac{m\pi\, x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_0^l\left(1-\cos^2\frac{m\pi\, x}{l}\right)dx=\frac{l}{2}.$$

Домножимо ліву і праву частини рівнянь (25) і (26) на $\sin\frac{k\pi\, x}{l}dx$ і проінтегруємо їх на інтервалі $[0,l]$ одержимо

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{k\pi\, x}{l}dx\,, \tag{27}$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi\, a}\int_0^l F(x)\cdot\sin\frac{k\pi\, x}{l}dx\,. \tag{28}$$

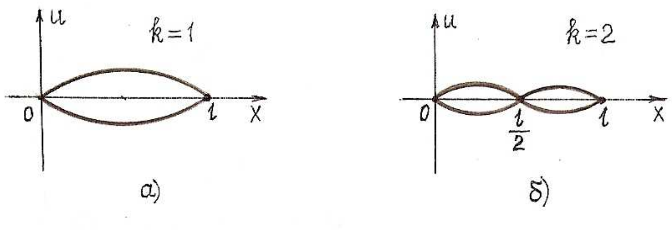
Підставляючи вирази (27) і (28) у ряд (24), одержимо розв'язок даної задачі. Оскільки у розв'язку тригонометричні функції мають період $T_0 = \frac{2l}{a}$, то коливання незатухаючі. Це відбувається тому, що в рівнянні (1) не враховуються сили опору середовища коливального процесу.

Стоячі хвилі

Якщо ввести позначення $F_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $\mathrm{tg}\,\varphi_k = \frac{a_k}{b_k}$, на формулу (24) можна записати так

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k\cdot\sin\frac{k\pi\, x}{l}\cdot\sin\left(\frac{k\pi\, at}{l} + \varphi_k\right). \tag{29}$$

Фізичний зміст цієї формули такий. Всі точки струни виконують гармонічні коливання з частотою $\omega_k = \frac{k\pi\, a}{l}$ і фазою φ_k. Амплітуда коливання залежить від абсциси x точки струни і дорівнює $F_k\cdot\sin\frac{k\pi\, x}{l}$. При такому коливанні точки одночасно досягають свого максимального відхилення в одну і другу сторону і одночасно проходять положення рівноваги. Таке коливання називається стоячими хвилями, мал.9.



Мал.9.

Кожна струна може мати свої власні коливання, лише певної частоти $\omega_k = \frac{k\pi\, a}{l}$. Ці частоти називаються власними частотами струни.

Найменшою власною частотою є

$$\omega_1 = \frac{\pi\, a}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

де $T-$ сила натягу струни, $\rho-$ лінійна густина.

Коли струна коливається, то вона створює звук, висота якого зростає із частотою коливання. При власних коливаннях найнижчій тон буде при частоті ω_1. При цьому звук тим вищий, чим більший натяг T струни і чим коротша струна. Інші тони називаються обертонами або гармоніками.

Приклад . Струна закріплена на кінцях $x_1 = 0$, $x_2 = l$ і на початку руху має форму параболи $u(x;0) = \frac{4h}{l^2}x(l-x)$. Визначити закон руху точок струни при вільних коливаннях, якщо початкові швидкості відсутні.

Розв'язання. Струна виконує вільні коливання, які описуються рівнянням:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ якщо: } u(x,0) = \frac{4h}{l^2}x(l-x);\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$$

Загальний розв'язок даної задачі визначається за формулою (24), для якої треба визначити коефіцієнти за формулами (27) і (28). Із початкових умов задачі і формули (28) слідує, що коефіцієнт $b_k = 0$.

Знайдемо коефіцієнт a_k за формулою (27):

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{8h}{l^3}\left(lx - x^2\right)\cdot \sin\frac{k\pi\, x}{l}dx = \left\| \begin{array}{c|c} u = lx - x^2 & du = (l-2x)dx \\ dv = \sin\frac{k\pi\, x}{l}dx & v = -\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi\, x}{l} \end{array} \right\| =$$

$$-\frac{8h}{l^3}\left(lx - x^2\right)\frac{l}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi\, x}{l}\Bigg|_0^l + \frac{8h}{k\pi\, l^2}\int_0^l (l-2x)\cdot\cos\frac{k\pi\, x}{l}dx =$$

$$\left\| \begin{array}{c|c} u = l - 2x & du = -2dx \\ dv = \cos\frac{k\pi\, x}{l}dx & v = \frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi\, x}{l} \end{array} \right\| = \qquad -\frac{16h}{k^3\pi^3}(\cos k\pi - 1) = \qquad \frac{16h}{k^3\pi^3}\left[1 - (-1)^k\right] =$$

$$\frac{16h}{k^3\pi^3}\cdot \begin{cases} 0, \ \textit{при}\ k = 2n - \textit{парне} \\ 2, \ \textit{при}\ k = 2n+1 - \textit{непарне} \end{cases}$$

Розв’язок задачі має вигляд:

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi\, at}{l}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi\, x}{l}.$$

2.7. Розв’язування рівняння про вимушені коливання струни (стержня)

Відомо, що вимушені коливання струни і вимушені повздовжні коливання стержня описуються таким диференціальним рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(x,t), \qquad (1)$$

де функція $G(x,t) = \frac{1}{\rho}g(x,t)$, ρ – густина матеріалу, $g(x,t)$ – густина розподілу зовнішніх сил.

Поставимо для невідомої функції $u(x,t)$ такі початкові і граничні умови:

$$u(x;0) = f(x),\ \frac{\partial u(x;0)}{\partial t} = F(x),\ u(0;t) = u(l;t) = 0. \qquad (2)$$

Розв’язок сформульованої задачі будемо шукати у вигляді суми двох функцій

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t). \qquad (3)$$

Виберемо функцію $v(x,t)$ так, щоб вона задовольняла однорідному рівнянню

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (4)$$

і умовам:

$$v(x;0)=f(x),\ \frac{\partial v(x;0)}{\partial t}=F(x),\ v(0;t)=v(l;t)=0. \qquad (5)$$

Тоді функція $w(x;t)$ повинна задовольняти неоднорідному рівнянню

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+G(x;t) \qquad (6)$$

та нульовим початковим і граничним умовам

$$w(x;0)=\frac{\partial w(x,0)}{\partial t}=0;\ w(0;t)=w(l,t)=0. \qquad (7)$$

Легко бачити, що будучи підставленою у рівняння (1) функція (3), із врахуванням рівнянь (4) і (6), перетворить його в тотожність.

Оскільки функція $v(x,t)$ описує вільні коливання при початкових відхиленнях і швидкостях, то знаходиться з рівнянь (4) — (5) методом Фур'є у такому вигляді:

$$v(x;t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos\frac{k\pi\, at}{l}+b_k\cdot\sin\frac{k\pi\, at}{l}\right)\cdot\sin\frac{k\pi\, x}{l}. \qquad (8)$$

Функція $w(x;t)$ описує вимушені коливання, які відбуваються під дією зовнішніх сил, при відсутніх початкових збуреннях. Будемо шукати функцію $w(x;t)$ у вигляді розкладу в ряд за власними функціями $\sin\frac{k\pi\, x}{l}$ однорідної задачі:

$$w(x;t)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(t)\cdot\sin\frac{k\pi\, x}{l}, \qquad (9)$$

де $\gamma_k(t)$– шукані функції, залежні від часу t.

Замітимо, що функція $w(x;t)$ задовольняє граничним умовам: $w(0;t)=w(l,t)=0$. Оскільки власні функції перетворюються в нуль при $x=0$ і $x=l$, то для виконання функцією $w(x,t)$ початкових і граничних умов потрібно, щоб $\gamma_k(0)=0$ і $\gamma_k'(0)=0$.

Запишемо рівняння (6) у такому вигляді

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=G(x;t) \qquad (10)$$

та підставимо в нього значення функції з формули (9):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\gamma_k''(t)+\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}\gamma_k(t)\right]\cdot\sin\frac{k\pi\, x}{l}=G(x;t) \qquad (11)$$

Розкладемо функцію $G(x;t)$ на інтервалі $(0;l)$ у ряд по синусах з аргументом x:

$$G(x;t)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k(t)\cdot\sin\frac{k\pi\, x}{l}, \qquad (12)$$

де

$$g_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l G(x;t)\cdot\sin\frac{k\pi\, x}{l}dx. \qquad (13)$$

(При інтегруванні час t вважається постійним).

У випадку, коли функція розподілу зовнішніх сил не залежить від часу t, тобто $G(x;t)=G(x)$, то формула (12) є звичайним розкладом у ряд Фур'є по синусах. В цьому випадку коефіцієнти $g_k(t)$ постійні.

Якщо ж функція не залежить від x, тобто $G(x,t)=G(t)$, то функція $g_k(t)$ будуть дорівнювати

$$g_k(t)=\frac{2G(t)}{l}\int_0^l\sin\frac{k\pi\, x}{l}dx=\begin{cases}\dfrac{4}{k\pi}G(t), \text{ якщо } k-\text{непарне},\\ 0, \text{ якщо } k-\text{парне}.\end{cases} \qquad (14)$$

Прирівнюючи у (11) і (12) коефіцієнти при власних функціях, складемо диференціальне рівняння для знаходження невідомих функцій $\gamma_k(t)$:

$$\gamma_k''(t)+\left(\frac{k\pi\, a}{l}\right)^2\gamma_k(t)=g_k(t), \qquad (15)$$

які відповідають початковим умовам

$$\gamma_k(0)=0,\quad \gamma_k'(0)=0. \qquad (16)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння, яке відповідає неоднорідному рівнянню (15) має вигляд:

$$\gamma_{k0}(t)=A_k\cos\frac{k\pi\, at}{l}+B_k\cdot\sin\frac{k\pi\, at}{l}. \qquad (17)$$

Розв'язок неоднорідного рівняння (15) у випадку, коли функція $g_k(t)$ має спеціальний вигляд, може бути знайдений методом неозначених коефіцієнтів, а при довільній правій частині потрібно його шукати методом варіації довільної сталої.

Користуючись методом варіації довільної сталої можна показати, що при будь-якій правій частині $g_k(t)$ розв'язок рівняння (15) з початковими умовами (16) визначається за формулою:

$$\gamma_k(t) = \frac{l}{k\pi\, a}\int_0^t g_k(\tau)\cdot \sin\frac{k\pi\, a(t-\tau)}{l}\,d\tau\,. \qquad (18)$$

Рекомендуємо читачеві самостійно зробити вивід цієї формули методом варіації довільної сталої.

Приклад . Знайти вимушені коливання струни, на яку в момент часу $t = 0$ починає діяти постійна сила, рівна силі тяжіння.

Розв'язання. В цьому випадку $G(x,t) = -g$. За формулою (13) знаходимо:

$$g_k(t) = -\frac{2g}{l}\int_0^l \sin\frac{k\pi\, x}{l}\,dx = -\frac{2g}{k\pi}(1-\cos k\pi)$$

Звідси слідує: $g_{2n} = 0$ і $g_{2n+1} = -\dfrac{4g}{(2n+1)\pi}$.

Для функції $\gamma_{2n}(t)$ з парними індексами рівняння (15) буде однорідним і дає нульові розв'язки.

Для функції з непарними індексами $\gamma_{2n+1}(t)$ рівняння (15) має вигляд:

$$\gamma''_{2n+1} + \left[\frac{(2n+1)\pi\, a}{l}\right]^2 \gamma_{2n+1} = -\frac{4g}{(2n+1)\pi}\,.$$

Частинний розв'язок цього рівняння $\gamma_0 = -4g\left[\dfrac{l}{(2n+1)\pi\, a}\right]^2$.

Отже, загальним розв'язком буде функція

$$\gamma_{2n+1}(t) = A_{2n+1}\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi\, at}{l} + B_{2n+1}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi\, at}{l} - 4g\left[\frac{l}{(2n+1)\pi\, a}\right]^2.$$

Підставляючи початкові умови, знаходимо довільні сталі:

$$A_{2n+1} = \frac{4gl^2}{[(2n+1)\pi\, a]^2}\,,\quad B_{2n+1} = 0\,.$$

Отже, функція :

$$\gamma_{2n+1} = -4g\left[\frac{l}{(2n+1)\pi a}\right]^2 \cdot \left(1-\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{l}\right).$$

Підставляючи одержаний вираз у формулу (9), одержимо розв'язок $w(x,t)$, який описує вимушені коливання струни, що відбуваються під дією сили тяжіння:

$$w(x,t) = -4g\left[\frac{l}{\pi a}\right]^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\left[1-\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

Знак мінус вказує на те, що на початку коливання точки струни відхилялися вниз. Кожна точка струни виконує складне періодичне коливання з періодом $\frac{2l}{a}$. У момент часу $t = \frac{2l}{a}k$ $(k = 0,1,2,...)$ всі точки струни проходять положення рівноваги.

2.8. Визначення коливань струни у середовищі з опором

Відомо що рівняння, яке описує коливання струни, без дії зовнішніх сил, у середовищі з опором записується так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

Початкові і граничні умови мають такий вигляд

$$u(x;0) = f(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = F(x),\ u(0;t) = 0,\ u(l;t) = 0. \qquad (2)$$

Розв'язок рівняння (1) з умовами (2) будемо знаходити методом Фур'є.

Припускаємо, що невідома функція має вигляд

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t). \qquad (3)$$

Підставивши значення похідних від цієї функції в рівняння (1), після елементарних перетворень одержимо:

$$\frac{T''(t) + 2mT'(t)}{a^2\cdot T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c = const. \qquad (4)$$

Оскільки граничні умови для функції $u(x,t)$ – нульові, то рівність (4) можлива, якщо $c=-\lambda_k^2$, де $\lambda_k=\dfrac{k\pi}{l}$ – власні числа $(k=1,2,3,...)$, а власні функції можна визначити за формулою:

$$X_k(x)=\sin\frac{k\pi\, x}{l} \tag{5}$$

Для визначення функцій $T_k(t)$ із (4) запишемо рівняння:

$$T_k''+2mT_k'+\left(\frac{k\pi\, a}{l}\right)^2 T_k=0, \tag{6}$$

для якого характеристичне рівняння має вигляд

$$r^2+2mr+\left(\frac{k\pi\, a}{l}\right)^2=0, \tag{7}$$

а корені його

$$r_{1,2}=-m\pm\sqrt{m^2-\left(\frac{k\pi\, a}{l}\right)^2}\,. \tag{8}$$

Будемо вважати, що коефіцієнт тертя настільки малий, що підкореневий вираз від'ємний для будь-яких значень k. Зрозуміло, що це можливо при $m<\dfrac{\pi\, a}{l}$.

$$r_{1,2}=-m\pm iq_k\,. \tag{9}$$

Загальний розв'язок рівняння (6), при таких умовах і позначеннях, запишеться так

$$T_k(t)=e^{-mt}\left(a_k\cdot\cos q_k t+b_k\cdot\sin q_k t\right). \tag{10}$$

Замітимо, що при від'ємному підкореневому виразі у (8), розв'язок (10) буде іншим і розв'язування рівняння (1) ускладнюється.

За допомогою функцій $X_k(x)$ і $T_k(t)$ складаємо вираження частинних розв'язків:

$$u_k(x,t)=e^{-mt}\left(a_k\cos q_k t+b_k\sin q_k t\right)\sin\frac{k\pi\, x}{l}\,. \tag{11}$$

Загальний розв'язок рівняння (1) запишемо у вигляді ряду складеного із частинних розв'язків (11)

$$u(x,t)=e^{-mt}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos q_k t+b_k\sin q_k t\right)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (12)$$

Коефіцієнти a_k і b_k будемо визначати за допомогою початкових умов.

Оскільки

$$u(x;0)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}=f(x). \qquad (13)$$

тому маємо

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \qquad (14)$$

Так як

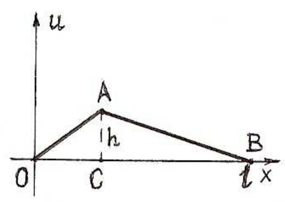
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-ma_k+b_kq_k\right)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}=F(x), \qquad (15)$$

то

$$-ma_k+b_kq_k=\frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \qquad (16)$$

звідки

$$b_k=\frac{2}{lq_k}\int_0^l F(x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx+\frac{m}{q_k}a_k, \qquad (17)$$



Мал.10.

Приклад . Знайти коливання струни із закріпленими кінцями $x=0$ і $x=l$, якщо початкові швидкості точок струни дорівнюють нулеві, а початкове відхилення має форму трикутника з вершиною у точці $A(c;h)$, мал.10. (Натяг струни T_0, густина ρ). Струна коливається у середовищі з опором, причому $m=\frac{\alpha}{\rho}<\frac{\pi a}{l}$.

Розв'язання. Функція $f(x)=u(x;0)$ задається формулами

$$f(x)=\begin{cases}\frac{hx}{c}, \text{ якщо } 0\le x\le c\\ \frac{h(l-x)}{l-c}, \text{ якщо } c\le x\le l\end{cases}$$

Функція $F(x)=\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$. Тому згідно формули (17): $b_k=\dfrac{m}{q_k}a_k$. Коефіцієнти a_k знаходимо за формулою (14):

$$a_k=\frac{2}{l}\left[\frac{h}{c}\int_0^c x\cdot\sin\frac{k\pi\,x}{l}\,dx+\frac{h}{l-c}\int_c^l (l-x)\cdot\sin\frac{k\pi\,x}{l}\,dx\right].$$

Обчислюючи інтеграли по частинах, одержимо

$$a_k=\frac{2hl^2}{k^2\pi^2c(l-c)}\cdot\sin\frac{k\pi\,c}{l}$$

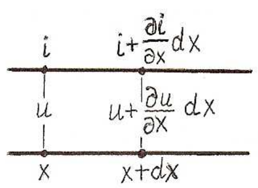
Підставляючи значення коефіцієнтів a_k і b_k у формулу (12), одержимо розв'язок у такому вигляді:

$$u(x,t)=\frac{2hl^2}{\pi^2c(l-c)}e^{-mt}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\cos q_k\cdot t+\frac{m}{q_k}\cdot\sin q_k t\right)\cdot\sin\frac{k\pi\,c}{l}\cdot\sin\frac{k\pi\,x}{l}$$

де

$$q_k=\sqrt{\left(\frac{k\pi\,a}{l}\right)^2-m^2}\ .$$

2.9. Електричні коливання в однорідних мережах. Телеграфне рівняння.



Мал.11.

Розглянемо двопровідникову електричну мережу, в якій напруга u між провідниками і струмом i в деякій точці мережі залежать від відстані x від початку мережі та часу t (Мал.11). Позначимо ці функції через $u(x,t),\ i(x,t)$. Будемо вважати їх невідомими.

Нехай у мережі є: опір провідників - R; індуктивність - L; втрата струму від поганої ізоляції провідників; активна провідність - G, як коефіцієнт пропорційності між струмом втрат і напругою; ємність між провідниками, або провідником і землею - C.

Для складання диференційного рівняння коливань струму у мережі, виділимо ділянку між точками x і $x+dx$ цієї мережі. Нехай у момент часу t в точці x напруга $u(x,t)$, а струм $i(x,t)$, тоді в точці $x+dx$ вони будуть такими: $u+\frac{\partial u}{\partial x}\partial x,\ \ i+\frac{\partial i}{\partial x}\partial x$.

Різниця напруги між початком і кінцем цієї ділянки дорівнює сумі падіння напруги на активному опорі $i \cdot Rdx$ і індуктивному опорі $L\partial x\frac{\partial i}{\partial t}$.Отже маємо

$$u-(u+\frac{\partial u}{\partial x}\partial x)=i\cdot Rdx+L\partial x\frac{\partial i}{\partial t}$$

або
$$\frac{\partial u}{\partial x}+Ri+L\frac{\partial i}{\partial t}=0\,. \qquad (1)$$

Зміна струму на ділянці $[x;x+dx]$ зумовлена втратами через недосконалу ізоляцію $Gdx\cdot u$ і зміщеннями за рахунок ємності $C\partial x\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$i-(i+\frac{\partial i}{\partial x}\partial x)=Gdx\cdot u+C\partial x\frac{\partial u}{\partial t}$$

або
$$\frac{\partial i}{\partial x}+Gu+C\frac{\partial u}{\partial t}=0\,. \qquad (2)$$

Рівняння (1) і (2) утворюють систему двох рівнянь з частинними похідними першого порядку. З цих рівнянь можна виключити одну з невідомих функцій $u(x,t)$ або $i(x,t)$. Для того, щоб виключити функцію $i(x,t)$, продиференціюємо рівняння (1) по x , а (2) по t :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+R\frac{\partial i}{\partial x}+l\frac{\partial^2 i}{\partial t\partial x}=0\,, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t\partial x}+G\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad (4)$$

Визначимо з рівнянь (2) і (4) вирази

$$\frac{\partial i}{\partial x}=-Gu-C\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{і} \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial t\partial x}=-G\frac{\partial u}{\partial x}-C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

та підставимо їх у рівняння (3). Після елементарних перетворень одержимо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{RC+LG}{LG}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{RG}{LC}u-\frac{1}{LC}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (5)$$

Аналогічно одержується рівняння для функції струму:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+\frac{RC+LG}{LG}\cdot\frac{\partial i}{\partial t}+\frac{RG}{LC}i-\frac{1}{LC}\cdot\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=0 \qquad (6)$$

Одержані рівняння (5) і (6) називаються телеграфними рівняннями відповідно для напруги і струму.

Ці рівняння враховують різні можливі фактори, які впливають на коливання напруги і струму в мережі і для розв'язування потребують спеціальних методів, які не входять до розгляду у нашу програму. Ми зупинимось на окремих випадках, які теж мають важливе значення в електротехніці і розв'язуються нам відомими методами.

Будемо розглядати коливання без втрат у електромережах: $R=G=0$ - немає опору провідників, відсутні втрати на нагрівання, хороша ізоляція. У такому випадку телеграфне рівняння (5) можна записати

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (7)$$

де $a^2=\frac{1}{LG}$, $a-$ швидкість поширення електромагнітних коливань у мережах, яка дорівнює швидкості поширення світла у повітрі. Дослідження цього коефіцієнта підтверджує електромагнітну природу світла.

Аналогічно можна одержати рівняння коливань струму в мережі без опору і втрат в ізоляційній системі:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \qquad (8)$$

Розглянемо, як записуються початкові і граничні умови.

1). Нехай мережа нескінчена. В цьому випадку граничних умов не буде, тобто маємо задачу Коші. Припустимо, що у початковий момент часу $(t=0)$ вздовж мережі дано напругу і струм: $u(x;0)=f(x),\ \ i(x;0)=\varphi(x)$. Із рівняння (2) знаходимо $R=G=0$:

$$\frac{\partial i}{\partial x}\Big|_{t=0}+C\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 \qquad \text{або} \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=-\frac{1}{C}\varphi'(x)$$

Аналогічно, з рівняння (1): $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{t=0} + L\frac{\partial i}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$ або $\frac{\partial i(x,0)}{\partial t} = -\frac{1}{L}f'(x)$.

Отже, для рівняння (7) маємо початкові умови:

$$u(x;0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = -\frac{1}{C}\varphi'(x), \qquad (9)$$

а для рівняння (8) початкові умови такі:

$$i(x;0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial i(x,0)}{\partial t} = -\frac{1}{L}f'(x), \qquad (10)$$

2). Нехай електрична мережа має скінчену довжину l . У точці $x = 0$ можливі такі випадки:

а) При підключенні до мережі постійної електрорушійної сили E: $u(0;t) = E$;

б) При підключенні синусоїдальної напруги $u(0;t) = E \cdot \sin t\varpi$, де ϖ – частота коливань;

в) Якщо кінець у точці $x = l$ ізольовано, то $i(l;t) = 0$, а з рівняння (1) маємо $\frac{\partial u(l,0)}{\partial x} = 0$;

г) якщо двостороння мережа замкнута, то в точці $x = l$ має приймач енергії з опори R_l і індуктивністю L_l, то $u(l;t) = R_l \cdot i(l,t) + L_l \frac{\partial u(l,t)}{\partial t}$.

Приклад. Дано мережу довжиною l без втрат $R = G = 0$, яка підключається в точці $x = 0$ від джерела змінного струму з електрорушійною силою $E \cdot \sin t\varpi$. Знайти напругу $u(x;t)$ мережі при умові, що на другому кінці $x = l$ вона накоротко замкнута і в момент включення напруга і струм у мережі відсутні.

Розв'язування . Функція $u(x;t)$ повинна задовольняти рівнянню (7) при початкових умовах: $u(x;0) = 0$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = 0$.

Граничні умови: $u(0;t) = E \cdot \sin t\varpi$, $u(l,t) = 0$.

У даній задачі граничні умови різні, тому їх називають неоднорідними. У випадку неоднорідних граничних умов невідому функцію шукають у вигляді суми двох функцій: $u(x;t) = v(x,t) + \varpi(t)$.

Функцію $v(x;t)$ будемо шукати так, щоб вона задовольнила граничним умовам : $v(0;t) = E \cdot \sin t\varpi$, $v(l,t) = 0$. Для цього її представимо: $v(x;t) = X(x) \cdot \sin t\varpi$. Підставивши її у рівняння (7) одержимо:

$X''(x) - \frac{\varpi^2}{a^2} X(x) = 0$, при граничних умовах $X(0) = E$;$X(l) = 0$.

Загальний розв'язок його $X(x) = C_1 \cdot \cos\frac{x\varpi}{a} + C_2 \cdot \sin\frac{x\varpi}{a}$. Знайдемо довільні сталі:

1). При $x = 0$: $C_1 = E$;

2). При $x = l$ маємо $0 = \varepsilon \cdot \cos\frac{l\varpi}{a} + C_2 \cdot \sin\frac{l\varpi}{a}$; $C_2 = -\varepsilon \cdot ctg\frac{l\varpi}{a}$.

Розв'язок :

$$v(x;t) = (\varepsilon \cdot \cos\frac{x\varpi}{a} - \sin\frac{x\varpi}{a} \cdot \varepsilon \cdot ctg\frac{l\varpi}{a}) \cdot \sin t\varpi$$

або $$v(x;t) = \frac{\varepsilon}{\sin\frac{l\varpi}{a}} \cdot \sin\frac{(l-x)\varpi}{a} \cdot \sin t\varpi .$$

Функція $w(x,t)$ задовольняє рівнянню (7) і однорідним граничним умовам:

$$w(0;t) = w(l;t) = 0 .$$

Оскільки

$v(x;0) = v(x;0) + w(x;0) = 0$; $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} + \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = 0$ маємо початкові умови $w(x;0) = 0$; $\frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = -\frac{\varepsilon \cdot \varpi \cdot \sin\frac{(l-x)\varpi}{a}}{\sin\frac{l\varpi}{a}}$.

Загальний розв'язок знаходимо так

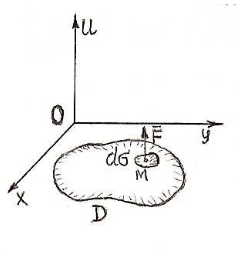
$$w(x;t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos\frac{kat\pi}{l} + b_k \cdot \sin\frac{kat\pi}{l}) \cdot \sin\frac{kx\pi}{l}$$ де $a_k = 0$,

$$b_k = \frac{2}{ka\pi} \int_0^x \frac{\varepsilon\varpi \cdot \sin\frac{(l-x)\varpi}{a}}{\sin\frac{l\varpi}{a}} \cdot \sin\frac{kx\pi}{l} dx .$$ Після інтегрування:

$$b_k = \frac{2a\varepsilon\varpi}{l \cdot \left[\left(\frac{ka\pi}{2}\right)^2 - \varpi^2\right]}.$$

$$u(x,t) = \frac{E \cdot \sin\frac{(l-x)\varpi}{a}}{\sin\frac{l\varpi}{a}} \cdot \sin t\varpi + \frac{2aE\varpi}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{atk\pi}{l} \cdot \sin\frac{xk\pi}{l}}{\left(\frac{ka\pi}{l}\right)^2 - \varpi^2}.$$

2.10. Рівняння коливань мембрани



Мал.12.

Розглянемо вільні коливання мембрани. Під мембраною будемо розуміти пружну, що вільно згинається, натягнуту однорідну плівку.

Нехай у стані спокою мембрана займає деяку область D в площині Oxy (Мал..12). Будучи виведеними певним чином із стану спокою точки мембрани починають рухатися перпендикулярно до координатної площини Oxy виконуючи поперечні коливання.

Позначимо відхилення точок мембрани від площини Oxy через $u(x,y,t)$. Виділимо ділянку $d\delta$ в області D і візьмемо на цій ділянці точку $M(x;y)$. У будь-який момент часу t при рухові точок мембрани паралельно вісі Ou, проекція маси частини мембрани на цю ділянку дорівнює $\rho \cdot d\delta$, де ρ - поверхнева густина, вважається постійною. Прискорення точок взятої елементарної ділянки дорівнює $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Отже інерційна сила, яка діє на ділянку: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \rho \cdot d\delta$. . Зовнішньою силою, яка діє на dx, є проекція на вісь Ou сил натягу, що дорівнює виразу: $T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \cdot d\delta$.

Розглядаючи виділену ділянку ds, як матеріальну точку, і застосувавши другий закон Ньютона, складемо рівняння : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \rho \cdot d\delta = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \cdot d\delta$

або
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad (1)$$

де $a^2 = \frac{T}{\rho}$.

Отже коливання мембрани описується диференційним рівнянням (1), яке називається двовимірним хвильовим рівнянням.

Дамо визначення початковим і граничним умовам задачі. Якщо у стані спокою мембрана займала в площині Oxy певну область D, обмежену контуром Γ, то щоб вона коливалася потрібно її точкам надати, або початкових відхилень, або початкових швидкостей, або те і інше. Тобто треба знайти функції:

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \qquad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = F(x, y), \qquad (2)$$

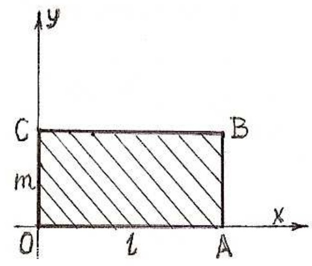
визначені у області D.

Якщо край мембрани закріплено нерухомо, то гранична умова:

$$u(x, y, t)\big|_{\Gamma} = 0. \qquad (3)$$

Розв’язування поставленої задачі має певні труднощі в залежності від форми мембрани. Навіть для порівняно простих випадків прямокутної і кругової мембран способи розв’язування задачі будуть різними. А у випадку іншого виду потрібно застосовувати спеціальні прийоми.

Розглянемо задачу про коливання прямокутної мембрани. Нехай мембрана у стані спокою має форму прямокутника $OABC$: $A(l,0), C(0,m), B(l,m)$, (Мал.13).



Мал.13.

Задача про коливання прямокутної мембрани зводиться до розв'язування рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

з початковими умовами

$$u(x,y,0) = f(x,y), \qquad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = F(x,y)$$

і граничними умовами, заданими на границі прямокутника:

$$U\Big|_{x=0} = 0;\quad U\Big|_{x=l} = 0;\quad U\Big|_{y=0} = 0;\quad U\Big|_{y=m} = 0; \tag{4}$$

Будемо шукати розв'язок методом Фур'є у вигляді добутку трьох функцій, кожна із яких залежить лише від одного аргументу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,y,t) = X(x)\cdot Y(y)\cdot T(t). \tag{5}$$

Використовуючи граничні умови для кожної з функцій маємо

$$X(0)=0,\quad X(l)=0,\quad Y(0)=0,\quad Y(m)=0 \tag{6}$$

Продиференціювавши функцію $u(x,y,t)$ по кожному з аргументів, підставивши їх значення у рівняння (1) та розділивши змінні, одержимо:

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}. \tag{7}$$

Ліва частина рівняння (7) залежить від t, а права — від x і y. Тому ці вирази можуть мати зміст лише тоді, коли вони є постійними числами. Правою частиною рівняння (7) є сума двох відношень, залежних від різних змінних, тому їх сума буде числом, якщо кожне з них буде постійною величиною, тобто

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2,\quad \frac{Y''}{Y} = -\mu^2. \tag{8}$$

Ці числа взяті від'ємними, щоб мати ненульовий розв'язок задачі.

Отже, для знаходження функцій $X(x)$, $Y(y)$, $T(t)$ одержимо такі рівняння:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0, & (9) \\ Y''(x) + \mu^2 Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(m) = 0, & \\ T''(t) + a^2(\lambda^2 + \mu^2)T(t) = 0. & (10) \end{cases}$$

(11)

Розв’язки рівнянь (9) і (10) мають вигляд:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x,$$

$$Y(y) = D_1 \cos \mu y + D_2 \sin \mu y.$$

Граничні умови приводять до співвідношень:

1). $X(0) = X(l) = 0$: $C_1 = 0$; $\lambda l = k\pi$, де $k \in Z$.

2). $Y(0) = Y(m) = 0$: $D_1 = 0$; $\mu m = n\pi$, де $n \in Z$.

Власні числа визначаються формулами:

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{m}. \tag{12}$$

Кожній парі власних чисел відповідає пара власних функцій

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi\, x}{l}, \quad Y_n(y) = \sin \frac{n\pi\, y}{m}. \tag{13}$$

Рівняння (11) можна записати у такому вигляді

$$T''_{k,n}(t) + a^2\pi^2\left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}\right)T(t) = 0$$

Розв’язок цього рівняння позначимо $T_{kn}(t)$ і запишемо:

$$T_{kn}(t) = a_{kn} \cdot \cos \omega_{kn} t + b_{kn} \cdot \sin \omega_{kn} \cdot t, \tag{14}$$

де a_{kn} і b_{kn} – довільні постійні, $\omega_{kn} = \pi\, a\sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}}$ – власні частоти коливань мембрани.

Підставляючи вирази з формул (13) і (14) у рівняння (5), одержимо формулу частинних розв’язків поставленої задачі:

$$u_{kn}(x, y, t) = (a_{kn} \cdot \cos \omega_{kn} t + b_{kn} \cdot \sin \omega_{kn} \cdot t) \cdot \sin \lambda_k x \cdot \sin \mu_n y. \tag{15}$$

Загальний розв’язок рівняння (1) будемо визначити у вигляді подвійного ряду, що складається із суми всіх частинних розв’язків (15):

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{kn} \cos \omega_{kn} t + b_{kn} \cdot \sin \omega_{kn} \cdot t) \cdot \sin \lambda_k x \cdot \sin \mu_n y. \tag{16}$$

Для знаходження коефіцієнтів a_{kn} і b_{kn} використаємо початкові умови і розклад функцій $f(x,y)$, $F(x,y)$ у подвійні ряди Фур'є. Після відомих перетворень одержимо формули для визначення вказаних коефіцієнтів:

$$a_{kn} = \frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m f(x,y)\cdot \sin\frac{k\pi\, x}{l}\cdot \sin\frac{n\pi\, y}{m}\,dx\,dy, \qquad (17)$$

$$b_{kn} = \frac{4}{l\cdot m\cdot \omega_{kn}}\int_0^l\int_0^m F(x,y)\cdot \sin\frac{k\pi\, x}{l}\cdot \sin\frac{n\pi\, y}{m}\,dx\,dy. \qquad (18)$$

Приклад. Визначити коливання квадратної мембрани $(l = m = 1)$, всі точки якої одержали однакову початкову швидкість v_0.

Розв'язування. Коливання описуються рівнянням (1) з початковими умовами: $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = v_0$. Маємо: $a_{kn} = 0$, $F(x,y) = v_0$, $\omega_{kn} = \pi\, a\sqrt{k^2 + n^2}$.

$$b_{kn} = \frac{4v_0}{\pi\, a\sqrt{k^2+n^2}}\int_0^1\int_0^1 \sin k\pi\, x\cdot \sin n\pi\, y\,dx\,dy = \frac{4v_0}{\pi^3 a\sqrt{k^2+n^2}}(1-\cos k\pi)(1-\cos n\pi).$$

При k і n парних $b_{kn} = 0$; при $k = 2r-1$, $n = 2s-1$ одержимо

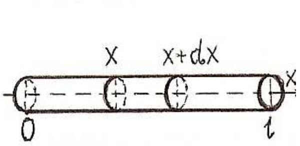
$$b_{kn} = \frac{16v_0}{\pi^3 a(2r-1)(2s-1)\sqrt{(2r-1)^2 + (2s-1)^2}}.$$

Розв'язок рівняння матиме вигляд

$$u(x,y,t) =$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} b_{(2r-1)(2s-1)}\cdot \sin(2r-1)\pi\, x\cdot \sin(2s-1)\pi\, y\cdot \sin\sqrt{(2r-1)^2 + (2s-1)^2}\cdot \pi\, a\cdot t\,\cdot$$

2.11. Рівняння лінійної теплопровідності та його розв'язування



Мал.14.

Розглянемо металевий стержень, бічна поверхня якого теплоізольована, тобто, через бічну поверхню не проходить теплообмін. Якщо стержень у початковий момент часу $(t = 0)$ був нагрітий нерівномірно, то тепло буде в ньому поширюватися до тих пір, поки стане однаковим у кожній його точці.

Якщо стержень тонкий і його вісь співпадає з віссю абсцис, то температура u буде залежати від координати x і часу t, тобто є функцією $u(x,t)$; $\frac{\partial u}{\partial x}$ — швидкість поширення температури вздовж вісі абсцис.

Для складання диференційного рівняння поширення теплоти у стержні, розглянемо його ділянку $[x; x+dx]$ на вісі абсцис.

Кількість теплоти на цій ділянці визначається за формулою $dQ = c \cdot \rho \cdot S \cdot dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \partial t$, де c - питома теплоємність стержня, ρ - питома густина, $\frac{\partial u}{\partial t}$ - швидкість поширення температури протягом часу dt. Згідно теплового балансу ця теплота дорівнює різниці кількості теплот, які проходять через поперечні перерізи в точках $(x+dx)$ і x, тобто

$$c \cdot \rho \cdot S \cdot dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \partial t = k \cdot S\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx\right) dt - k \cdot S \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \partial t,$$

де k - коефіцієнт теплопровідності. Після елементарних перетворень одержиться рівняння теплопровідності однорідного стержня без теплових джерел:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

де $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ – коефіцієнт температуропроводності.

Якщо у стержні є теплове джерело, яке можна визначити функцією $F(x,t) \cdot dx \cdot dt$, то рівняння (1) запишеться так :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t) \qquad (2)$$

де $g(x,t) = \frac{1}{cs\rho} \cdot F(x,t)$. Одержане неоднорідне рівняння вказує на те, що в стержні є теплові джерела.

Розглянемо тепер початкові і граничні умови, які накладаються на функцію $u(x;t)$. Початкова умова визначає температуру в усіх точках стержня в деякий момент часу $t = 0$, від якого починається відлік часу, і записується

$$u(x;0) = u\big|_{t=0} = f(x) \qquad (3)$$

де $f(x)$ – дана функція.

Граничні умови:

$$u(0;t) = \widetilde{u}_0, \; u(l;t) = \widetilde{u}_l, \qquad (4)$$

де $\widetilde{u}_0$ і $\widetilde{u}_l$ – значення температур стержня на його кінцях. Якщо немає теплообміну, то це постійні числа.

Якщо на кінцях стержня відбувається теплообмін з оточуючим середовищем, то згідно закону Ньютона: потік тепла через одиницю поверхні за одиницю часу пропорційний різниці температур тіла і оточуючого середовища, тобто $h \cdot (u - \widetilde{u})$ де u - температура кінця стержня , $\widetilde{u}$ - температура оточуючого середовища,

h - коефіцієнт теплообміну:

$$\begin{aligned} k \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} &= h_0 \cdot \left(u\big|_{x=0} - \widetilde{u}_0\right) \\ k \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} &= h_l \cdot \left(u\big|_{x=l} - \widetilde{u}_l\right) \end{aligned} \qquad (5)$$

Якщо кінець теплоізольований, то гранична умова на ньому $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Розглянемо розв’язування рівнянь теплопровідності.

1.*Випадок* . Нехай на кінцях стержня підтримується постійна температура $0^0 C$. В цьому випадку граничні умови запишуться так

$$u(0;t) = 0, \; u(l;t) = 0, \qquad (6)$$

а початкова умова визначиться за функцією (3).

Застосуємо метод Фур’є . Будемо шукати не нулеві розв’язки рівняння (1) у такому вигляді

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \qquad (7)$$

Підставимо функцію (7) в рівняння (1). Після елементарних перетворень одержимо:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2 \qquad (8)$$

Задача зводиться до двох звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами:

$$X''(x)+k^2\,X(x)=0 \qquad T'(t)+a^2\,k^2\,T(t)=0 \qquad (9)$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо:

$$X(x)=\ C_1\cdot\cos kx+\ \ C_2\cdot\sin ks\ \ ,\ \ T(t)=c_3e^{-a^2k^2t} \qquad (10)$$

Запишемо загальний розв'язок за формулою (7):

$$U(x,t)=(A\cdot\cos kx+B\cdot\sin kx)\cdot e^{-a^2k^2t}, \qquad (11)$$

де $A=C_1\cdot C_3$, $B=C_2\cdot C_3$. Ці коефіцієнти визначатимемо за допомогою даних граничних умов.

При $x=0$: $U(x,t)=A\cdot e^{-a^2k^2t}=0$, маємо $A=0$.

Отже, $U(x,t)=B\cdot e^{-a^2k^2t}\sin kx$.

При $x=\ell$: $U(\ell,t)=\ B\cdot e^{-a^2k^2t}\sin k\ell=0$, маємо : $k\ell=n\pi,\quad n\in z.$

Числа $k_n=\dfrac{\pi\cdot n}{\ell},\quad n\in z$ називаються власними числами рівняння (1). Кожному власному числу відповідає частинний розв'язок рівняння (1):

$$U_n(x,t)=B_n\cdot e^{-a^2k^2t}\cdot\sin\frac{nx\pi}{\ell}, \qquad (12)$$

який називається власною функцією.

Загальний розв'язок рівняння (1) знаходимо за принципом суперпозиції частинних розв'язків

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot e^{-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2t}\cdot\sin\frac{nx\pi}{\ell} \qquad (13)$$

Функція $U(x,t)$ повинна задовольняти початковій умові:

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot\sin\frac{nx\pi}{\ell}=f(x) \qquad (14)$$

З рівняння (14) слідує, що коефіцієнти B_n треба взяти у вигляді розкладу на відрізку $[0;\ell]$ функції $f(x)$ в ряд Фур'є:

$$B_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cdot\sin\frac{nx\pi}{\ell} \qquad \text{(n=1,2,3,...)} \qquad (15)$$

Отже, розв’язок поставленої задачі визначається рядом (13) з коефіцієнтами B_n, знайденими за формулою (15).

2.*Випадок.* Нехай в однорідному теплоізольованому стержні довжиною l є джерело теплової енергії, а на кінцях підтримується нульова температура. Функція $u(x,t)$ задовольняє неоднорідному диференціальному рівнянню (2) з початковою умовою (3) і граничними умовами (6).

Розв’язок рівняння (2) знаходиться у вигляді суми двох функцій:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \qquad (16)$$

де $v(x,t)$– є розв’язок рівняння (1) з умовами (3) і (6), тобто визначається формулами (13) і (15); а $w(x,t)$– задовольняє неоднорідному рівнянню (2) з нульовими початковою і граничними умовами

$$w(x,0) = 0, \quad w(0,t) = 0, \quad w(l,t) = 0. \qquad (17)$$

Така функція визначається за формулою:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot \sin\frac{kx\pi}{l}, \quad \text{де} \quad T_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l B_k(\tau) \cdot e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau,$$

$$B_k(\tau) = \frac{2}{l}\int_0^l g(x,\tau) \cdot \sin\frac{kx\pi}{l} dx \qquad (18)$$

3. *Випадок.* Нехай в однорідному теплоізольованому стержні довжиною l

є джерело теплової енергії, і на кінцях різні значення температури. В цьому випадку функція $u(x,t)$ задовольняє рівнянню (2) , початковій умові (3) і граничним умовам:

$$u(0,t) = \varphi(t), \qquad u(l,t) = \psi(t) \qquad (19)$$

Розв’язок задачі шукаємо в такому вигляді:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \qquad (20)$$

де функція $v(x,t)$ задовольняє задачі з рівняннями (2) і (17), та визначається за формулою (18); а функція $w(x,t)$ знаходиться за формулою:

$$w(x,t) = \varphi(t) + [\psi(t) - \varphi(t)] \cdot \frac{x}{l} \qquad (21)$$

Ця функція така, що забезпечує для функції $v(x,t)$ однорідні граничні умови, тобто: при $x=0$ маємо $w=\varphi(t)$, а при $x=l$, $w=\psi(t)$.

Приклад №1. Знайти розв'язок рівняння.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0<x<l),\ t>0$$

для якого початкові умови:

$$u(x,t)\big|_{t=0}=f(x)=\begin{cases} x,\ \text{якщо}\ 0<x\le\dfrac{l}{2}, \\ l-x,\ \text{якщо}\ \dfrac{l}{2}<x\le l, \end{cases}$$

і граничні умови: $u(0,t)=u(l,t)=0$.

Розв'язування. Загальний розв'язок має вигляд

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l},$$

де $a_k=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx=\ \dfrac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}x\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx=$ |інтегруючи по частинах, маємо| $=\dfrac{4l}{k^2\pi^2}\cdot\sin\dfrac{k\pi}{2}$.

Отже, маємо

$$u(x,t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}\cdot e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}$$

Приклад №2. Знайти розв'язок рівняння.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при початковій умові $u(x,0)=0$

і граничних умовах: $u(0,t)=A\cdot t$, $u(l,t)=0$.

Розв'язування.

Оскільки зовнішня енергія відсутня, то розв'язок рівняння запишеться так

$$u(x,t)=w(x,t)=\varphi(t)+[\psi(t)-\varphi(t)]\cdot\frac{x}{l},$$

де $\varphi(t)=A\cdot t$, $\psi(l)=0$. Отже маємо:

$$u(x,t) = A \cdot \frac{l-x}{l} \cdot t .$$

2.12. Задачі дифузії

У процесі дифузії (тобто проникнення однієї речовини в іншу) шуканою функцією є концентрація дифундуючої речовини, яку позначають через $c = c(x,y,z,t)$.

Процес дифузії схожий на поширення теплоти в тілі, тому вивід рівняння дифузії для функції $c = c(x,y,z,t)$ аналогічний до виведення рівняння теплопровідності. Рівняння дифузії можна записати так:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \cdot \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right), \qquad (22)$$

де D – додатній коефіцієнт, який називається коефіцієнтом дифузії.

У початковій умові задається початкова концентрація:

$$C\big|_{t=0} = f(x,y,z) \qquad (23)$$

До граничних умов відносяться такі

$$\frac{\partial c}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0 \qquad (24)$$

$$\text{і} \quad C\big|_{\Gamma} = 0, \qquad (25)$$

де Γ – границя області, в якій відбувається дифузія. Умова (24) означає, що Γ є стінкою, через яку не проникає дифузуюча речовина. Умова (25) задає концентрацію на границі.

На дифузію розглядаються лінійні, плоскі і просторові задачі. Рівняння (22) визначає просторову задачу на дифузію.

Лінійні задачі на дифузію розглядаються у тонкій трубці з непроникаючими стінками. Для лінійної задачі функція $c(x,t)$ - концентрації дифузуючої речовини задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \qquad (26)$$

з початковою умовою $c(x;0) = f(x)$, і граничними умовами $\frac{\partial c}{\partial x} = 0$ або $c = \tilde{c}$, (на кінці або на кінцях).

Поставлена задача розв'язується такими ж методами, як і задача теплопровідності. Розглянемо такі випадки

1. Коефіцієнт D може бути змінною величиною. Наприклад, при підвищенні температури дифузія прискорюється і коефіцієнт D буде змінною величиною, залежною від часу t. В такому випадку рівняння (26) зводять до простішого виду, ввівши замість незалежної змінної t нову змінну

$$\Theta = \int_0^t D(\tau)d\tau \tag{27}$$

Оскільки $D > 0$, то $\Theta = \Theta(t)$ монотонно зростає при зміні t, а при t=0, $\Theta = 0$. Тому існує однозначна обернена функція $t = t(\Theta)$. Отже концентрацію c можна вважати функцією $c(x;\Theta)$. Оскільки

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial \Theta} \cdot D(t) \tag{28}$$

тобто $\frac{\partial \Theta}{\partial t} = D(t)$. Тому рівняння (26) прийме такий вигляд

$$\frac{\partial c}{\partial \Theta} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \tag{29}$$

Початкова і граничні умови не змінюються.

2. Якщо дифузія проходить при постійній температурі, то коефіцієнт дифузії D може залежати від x : $D(x)$. Рівняння дифузії буде

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D(x) \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{30}$$

Таке рівняння не може бути зведене до рівняння з постійним коефіцієнтом. Його потрібно с наближено.

Одним із простих методів наближеного розв'язування є заміна $D(x)$ кусочно-постійною функцією. Для цього весь інтервал, на якому згадано функцію $D(x)$, розбивають на частини, інтервалами $(x_{k-1};x_k)$ і у кожному інтервалі вважають D - постійним. $D = D_k$ (за D_k можна взяти значення $D(x)$ в деякій точці ξ_k даного інтервалу $D_k = D(\xi_k)$).

У кожному окремому інтервалі задача розв’язується з граничними умовами “склеювання” розв’язку. Якщо точка x_k ділить два інтервали, то в ній концентрація c повинна бути неперервною.

3. При достатньо великих концентраціях коефіцієнт дифузії D залежить від самої концентрації: $D = D(c)$.

Відповідне рівняння

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D(c) \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{31}$$

буде вже нелінійним і його можна розв’язати лише наближено спеціальними методами нелінійної механіки.

Замітимо, що при розв’язуванні задач на дифузію часто просторовий Лапласіан Δc записують у циліндричних або сферичних координатах і тоді розв’язування задач спрощується.

Приклад: Радіальна дифузія в однорідній кулі описується рівнянням

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial c}{\partial \rho}\right)$$

з початковою умовою: $c(\rho,0) = f(\rho)$,

і граничною умовою: $c(\rho,t)\big|_{\rho=R} = c_0$.

Розв’язання .

Розв’язок задачі визначається за формулою:

$$c(\rho;t) = \frac{1}{\rho}\sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot e^{-\left(\frac{kd\pi}{R}\right)^2 t} \cdot \sin\frac{k\pi\rho}{R} ,$$

де $B_k = \frac{2}{R}\int_0^R f(\rho) \cdot \sin\frac{k\pi\rho}{R} \cdot d\rho$.

2.13. Рівняння Лапласа і Пуассона

Рівняння Лапласа має такий вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

де x, y, z – ортогональні Декартові координати. Ліва частина рівняння (1) називається лапсасіаном функції u, а правило, за яким утворюється лапсасіан називається оператором Лапласа. Його прийнято позначати символом Δ (дельта). Тому рівняння (1) можна ще записати у такому вигляді $\Delta u = 0$. Це однорідне диференціальне рівняння другого порядку в частинних похідних.

Неоднорідне диференціальне рівняння виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f \quad \text{або} \quad \Delta u = f, \qquad (2)$$

де f – відома функція, називається рівнянням Пуассона.

У циліндричних і сферичних координатах ліві частини цих рівнянь записуються так:

$$\Delta u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad (3)$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\Theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \Theta} \cdot \left(\sin\Theta \frac{\partial u}{\partial \Theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\Theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \qquad (4)$$

Рівняння Лапласа і Пуассона відносяться до рівнянь еліптичного типу. Невідома функція в них не залежить від часу і тому описує стаціонарні процеси. До цих рівнянь приводять багаточисленні задачі теорії теплопровідності, електростатики, гідродинаміки, гравітації і т.д.

Для прикладу розглянемо постановку задачі про стаціонарний тепловий стан однорідного тіла.

Нехай дано деяке ізольоване від зовнішнього простору однорідне ізотропне тіло, в якому протягом певного часу не змінюється тепловий стан. Позначимо через V - об'єм простору, який займає це тіло, через S - його поверхню, а через $u = u(x, y, z)$ - температуру в будь-якій його точці.

Виділимо в тілі деяку область V_1, обмежену довільною поверхнею S_1, і розглянемо кількість теплоти, яка проходить за одиницю часу через елемент площі поверхні ds_1. Згідно принципу Фур'є ця кількість теплоти пропорційна площі елемента поверхні і нормальній похідній $\frac{\partial u}{\partial n}$, де $\vec{n}$ - напрям зовнішньої нормалі до поверхні. Ця кількість теплопровідності дорівнює $k\frac{\partial u}{\partial n}.ds_1$, де k - коефіцієнт внутрішньої теплопровідності. Із термодинаміки відомо, що кількість теплоти в тілі переходить від точок з більшою температурою до точок з меншою температурою. Отже, якщо теплота виходить з тіла, то $\frac{\partial u}{\partial n}<0$; якщо теплота входить в тіло, то $\frac{\partial u}{\partial n}>0$, якщо тепловий стан тіла не змінюється, то $\frac{\partial u}{\partial n}=0$. Алгебраїчна сума кількості теплоти, яка проходить через поверхню S_1 за одиницю часу, визначається подвійним інтегралом $k\iint\limits_{s1}\frac{\partial u}{\partial n}.ds_1$. Оскільки за умовою задачі стан теплоти в тілі не змінюється, то $k\iint\limits_{s1}\frac{\partial u}{\partial n}.ds_1$=0.

Запишемо для області V_1 формулу Гріна:

$$\iiint\limits_{v_1}(u\cdot\Delta v-v\cdot\Delta u)dv=\iint\limits_{s_1}\left(u\cdot\frac{du}{dn}-v\cdot\frac{du}{dn}\right)ds_1 \qquad (5)$$

і припустимо, що в ній $v=1$. Знаходимо таке рівняння:

$$\iiint\limits_{v_1}\Delta u\cdot dv=0 \qquad (6)$$

Звідси слідує $\Delta u=0$, тобто функція $u(x,y,z)$ задовольняє рівняння Лапласа. Отже, рівняння Лапласа описує стаціонарний тепловий стан однорідного тіла.

Аналогічно можна переконатись, що рівняння Лапласа і Пуассона описують і інші стаціонарні процеси.

Для знаходження єдиного розв'язку рівняння еліптичного типу до нього ставляться граничні умови. В залежності від умов розрізняються три види граничних задач:

1). $u|_{\Gamma}=\Psi(x,y,z)$ - перша гранична задача або задача Діріхле;

2). $\frac{du}{dn}|_{\Gamma}=\Psi(x,y,z)$ - друга гранична задача або задача Неймана;

3). $\left(\frac{du}{dn}+\beta u\right)=\Psi(x,y,z)$ - третя або зовнішня гранична задача.

Тут β *і* Ψ - неперервні функції, визначені на граничній поверхні S, $\frac{du}{dn}$ - похідна, визначена у точці поверхні S за напрямом нормалі до неї.

Існують і задачі з іншими граничними умовами. Слід пам'ятати, що вони повинні ставитись корректно, тобто так, щоб розв'язок існував і при тому єдиний, та неперервно залежав від поставлених умов.

Задачі Лапласа і Пуассона при різних постановках граничних умов часто розв'язуються методом функції Гріна. Проте, в окремих випадках, коли область не складна, наприклад, має форму круга або прямокутника, можна розв'язувати їх і відомим нам методом Фур'є .

2.14. Метод Фур'є для рівняння Лапласа

Розглянемо, як розв'язується методом Фур'є рівняння Лапласа для двовимірного простору у постановці задачі Діріхле для круга. Нехай областю задання шуканої функції є круг з центром у початку координат і радіусом R. Будемо розв'язувати задачу у полярних координатах. Отже, будемо шукати розв'язок $u=(r,\varphi)$ рівняння Лапласа.

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0 \qquad (7)$$

з граничною умовою:

$$u\big|_{r=R}=\widetilde{u}(\varphi). \qquad (8)$$

Будемо шукати розв'язок рівняння (7) в такому вигляді

$$u=U(r)\cdot\Phi(\varphi), \qquad (9)$$

де $U(r)$ і $\Phi(\varphi)$ – невідомі функції від різних аргументів. Із рівняння (7) знаходимо:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right)\Phi=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\cdot U \qquad (10)$$

або $$\frac{r}{U}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=-\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} \qquad (11)$$

Оскільки ліва частина рівняння залежить лише від r , а права – від φ , то вони постійні:

$$\frac{r}{U}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=\lambda, \quad \frac{1}{\Phi}\cdot\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-\lambda \qquad (12)$$

Друге рівняння

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\Phi\lambda=0 \qquad (13)$$

має загальний розв’язок:

$$\Phi(\varphi)=A\cdot\cos\sqrt{\lambda}\cdot\varphi+B\cdot\sin\sqrt{\lambda}\cdot\varphi \qquad (14)$$

де A i B – довільні сталі. Φ – періодична функція з періодом 2π . А це означає, що $\sqrt{\lambda}$ повинен бути цілим числом n $(n=0,1,2,3,...)$. Від’ємні n треба відкинути. Отже, $\lambda=n^2$ - власні числа, і

$$\Phi(\varphi)=A\cdot\cos n\varphi+B\cdot\sin n\varphi \qquad (15)$$

Повернемося тепер до першого рівняння, в якому замінимо λ на n^2:

$$\frac{r}{U}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=n^2, \qquad (16)$$

звідки

$$r^2\frac{d^2U}{dr^2}+r\frac{dU}{dr}-n^2U=0 \qquad (17)$$

Це рівняння можна розв’язати підстановкою $U=r^{\alpha}$, причому для показника α легко знаходиться рівняння

$$\alpha(\alpha-1)\cdot r^{\alpha}+r^{\alpha}\alpha-n^2r^2=0 \qquad (18)$$

або

$$\alpha(\alpha-1)+\alpha-n^2=0, \quad \alpha^2=n^2, \quad \alpha=\pm n$$

Отже, маємо

$$U(r)=r^n \quad \text{або} \quad U(r)=r^{-n}. \qquad (19)$$

Друге із цих розв’язків треба відкинути, оскільки він обертається в нескінченність у центрі круга $r=0$.

Частинні розв’язки рівняння Лапласа запишуться так

$$u_n(r,\varphi) = r^n(A_n \cdot \cos n\varphi + B_n \cdot \sin n\varphi) \qquad (20)$$

Загальний розв'язок рівняння Лапласа має такий вигляд:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \qquad (21)$$

Для того, щоб надати розв'язку вигляду ряду Фур'є позначимо:

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = a_n, \quad B_n = b_n \qquad n = (1,2,3,...)$$

Функція $u(r,\varphi)$ запишеться так

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \qquad (22)$$

Коефіцієнти a_0, a_n *і* b_n визначимо з граничної умови, в якій функція $\widetilde{u}(\varphi)$ теж періодична, з періодом 2π. Вважаючи у розв'язку $r = R$, одержимо граничну умову

$$\widetilde{u}(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(R^n a_n \cos n\varphi + R^n b_n \sin n\varphi) \qquad (23)$$

Розклавши функцію $\widetilde{u}(\varphi)$ в рад Фур'є , одержимо коефіцієнти:

$$a_n = \frac{1}{r^n \pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{u}(\varphi) \cdot \cos n\Psi d\Psi \ , \qquad b_n = \frac{1}{r^n \pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{u}(\varphi) \cdot \sin n\Psi d\Psi \qquad (24)$$

Розв'язок задачі Діріхле для круга визначається формулою (22) з коефіцієнтами (24).

Аналогічно можна розв'язувати і інші задачі еліптичного типу.

Розділ III.

ТЕМИ І ЗМІСТ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №1

ТЕМА: ***«ПОНЯТТЯ ПРО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ. ОСНОВИ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ»***

МЕТА: Відпрацювати основні поняття: диференціальне рівняння з частинними похідними, розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними, типи рівнянь з частинними похідними другого порядку. Формувати у студентів уміння використовувати знання, здобуті з інших розділів математичного аналізу, у процесі засвоєння спеціальних умінь дисципліни, що вивчається.

ПЛАН:

1. Поняття про рівняння з частинними похідними.
2. Поняття про загальний інтеграл рівняння у частинних похідних.
3. Основні типи рівнянь математичної фізики, приклади рівнянь

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ:

№1. Знайти функцію, що задовольняє даному рівнянню:

$$1)\frac{\partial z}{\partial x}=1;2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6y;3)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=7y;4)\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0;5)\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=1;6)\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=0;7)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=6x+4y.$$

№2. Довести, що задані функції та їх частинні похідні задовольняють даним рівнянням:

1. $z=\frac{y^2}{2x^2}+\frac{x^2}{y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial x}+\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0.$
2. $z=\frac{y}{2x^2}-\arcsin(xy),\quad x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{3}{2}\frac{y}{x^2}=0.$
3. $z=\exp\left(\frac{x}{y}\right),\quad \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0.$
4. $z=\ln\left(x^2+y^2\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$
5. $z=ye^{x-y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2e^{x-y}=0.$
6. $z=\ln(x+xy+y),\quad (1+x)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(1+y)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

7. $z=e^{x-2y}$, $4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

8. $z=e^{x^2+y^2}$, $\left(1+2y^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\left(1+2x^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

9. $z=\frac{x^2}{y^2}$, $\frac{6x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

№3. Визначити тип рівняння:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f(x,y)=0$.

2. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2y\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

ЛІТЕРАТУРА: [2],[3],[6],[7].

ЗАВДАННЯ ДОДОМУ: розв'язати вправи, які не розглянули на занятті.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №2

ТЕМА: ***«ПОНЯТТЯ ПРО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ. ВИЗНАЧЕННЯ ТИПУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯНННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. КЛАСИФІКАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ»***

МЕТА: Відпрацювати алгоритм визначення типу рівняння з частинними похідними другого порядку.

ПЛАН:

1. Поняття про типи рівнянь з частинними похідними другого порядку. Алгоритм визначення типу рівняння другого порядку.
2. Рівняння з частинними похідними другого порядку з постійними коефіцієнтами.
3. Рівняння з частинними похідними другого порядку зі змінними коефіцієнтами.
4. Класифікація нелінійних рівнянь другого порядку. Визначення типу нелінійного рівняння вздовж заданого розвязку.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ:

ВИЗНАЧЕННЯ ТИПУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯНННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Приклад: Визначити тип рівняння $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Розв’язання.

В заданому рівнянні $a = x^2, b = 0, c = -y^2$, $b^2 - ac = 0 + x^2 y^2 = x^2 y^2 > 0$ при всіх x,y – відмінних від нуля, отже дане рівняння гіперболічного типу.

Завдання для самостійного виконання:

№1. Для заданих рівнянь 59-68 визначити тип

59. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2u - x^2 y = 0$

60. $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0$

61. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 3u - xy^2 = 0$

62. $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2u = 0$

63. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

64. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} + 3\frac{\partial u}{\partial x} - u = 0$

65. $y^{2m+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

66. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = 0$

67. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

68. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2e^{x-y} = 0$

КЛАСИФІКАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Приклад: Визначити тип рівняння $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 = 8$ вздовж розв'язку $u = x^2 + y^2$.

Розв'язаня:

Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ і підставимо їх у задане рівняння.

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$.

Отримаємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot 0 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot 2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot 2 = 8$$

$a=2$ $b=0$ $c=2$ $b^2 - ac = 0 - 4 = -4 < 0$,

Отже, рівняння еліптичного типу вздовж $u = x^2 + y^2$.

Завдання для самостійного виконання:

№2. Визначити тип рівняння вздовж заданого розв'язку

1. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 = 0$, $u = x^2 + y^2$

2. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 = 8$, $u = 2\sqrt{2}xy$

3. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 = 0$, $u = (x+y)^2$

4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 - 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $u = 2y^2$

5. $3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3 - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - 4 = 0$, $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

6. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 2(x+y) - 8 = 0$, $u = x^2 + 2xy$

7. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^4 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} - 2x = 0$, $u = 2xy - 8y$

8. $2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial y}-2x=0,\qquad u=xy-\frac{1}{2}x^2$

9. $5\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^5-7\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+25\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-150y=0,\qquad u=\frac{x^2}{2}+y^3+\frac{5}{7}xy$

10. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+5\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+6\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2=12,\qquad u=\frac{1}{2}(x+y)^2$

ЛІТЕРАТУРА: [2],[4],[6],[7].

ЗАВДАННЯ ДОДОМУ:

вивчити алгоритм зведення до канонічного вигляду рівнянь з частиними похідними другого порядку;

розв'язати вправи, які не розглянули на занятті з №1.

визначити тип рівняння вздовж заданого розв'язку

1. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2=0\qquad u=x\qquad u=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{17}{16}xy$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2-4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\qquad u=5xy\qquad u=x$

3. $3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-4=0\qquad u=2y^2$

4. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+5\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+6\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2=12\qquad u=\sqrt{3}x^2$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №3 - №5

ТЕМА: ***«КАНОНІЧНИЙ ВИД ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ »***

МЕТА: Сформувати уміння зводити рівняння другого порядку до канонічного виду у відповідності із його типом, а також сформувати усвідомлення про те, що рівняння зі змінними коефіцієнтами може бути різного типу на певних областях зміни аргументів *x* і *y,* а тому зводитися до різного канонічного виду на кожній із розглядуваних областей.

ПЛАН:

1. Зведення до канонічного виду диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами.
2. Зведення до канонічного виду в кожній з областей, де зберігається тип розглядуваного рівняння зі змінними коефіцієнтами.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ:

№1. Звести до канонічного вигляду рівняння у відповідності із його типом, попередньо визначивши тип рівняння:

1) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

2) $\frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

3) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

4) $2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$

5) $\sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

6) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

7) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

8) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(u, x, y) = 0$

№2. Рівняння 79-88 звести до канонічного вигляду в кожній з областей, де зберігається тип розглядуваного рівняння.

79. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial u}{\partial x} + ye^{\frac{y}{x}} = 0$

80. $xy^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x^2 y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

81. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

82. $e^{2x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2e^{x+y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+e^{2y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-xu=0$

83. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$

84. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(x-1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

85. $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

86. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

87. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(\cos^2 x-\sin^2 x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cos x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

88. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

ЛІТЕРАТУРА: [2],[3],[6],[7],[4],[13],[15].

ЗАВДАННЯ ДОДОМУ:

№1 (4, 6, 8),

№2 (81, 84, 87)

Підготуватися до контрольної роботи

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №6

МОДУЛЬ – КОНТРОЛЬ НА ТЕМУ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ»

(текст контрольної роботи на сторінці ____ посібника)

МЕТА: Виявити рівень здобутих знань, умінь і навичок з теми: «Диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку»

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №7

ТЕМА: **«*ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ. РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ: РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ. МЕТОД ДАЛАМБЕРА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ КОЛИВАНЬ СТРУНИ.*»**

МЕТА: Сформувати уміння за заданими крайовими і граничними умовами обирати метод розв'язування задач математичної фізики. Зокрема відпрацювати уміння розв'язувати рівняння коливання струни методом Даламбера.

ПЛАН:

1. Рівняння коливань струни.
2. Метод Даламбера для розв'язування рівнянь коливань струни.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ:

89. Для заданих рівнянь знайти розв'язок, який відповідає початковим умовам, якщо:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u/_{t=0} = x^2 \quad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0} = 0$

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u/_{t=0} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0} = x$

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u/_{t=0} = \sin x \quad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0} = 1$

г) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u/_{t=0} = x \quad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0} = -x$

д) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u/_{t=0} = \sin x \quad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0} = \cos x$

е) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u/_{t=0} = -\frac{x^2}{2} \quad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0} = \frac{e^x}{2}$

ж) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u/_{t=0} = 1 + 2\sin x \quad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0} = \sin x$

з) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u/_{t=0} = x + \cos x \quad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0} = \sin x$

ЛІТЕРАТУРА: [2],[3],[6],[13].

ЗАВДАННЯ ДОДОМУ:

Знайти розв'язок рівнянь $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, який відповідає початковим умовам, якщо

$u/_{t=0} = \cos x \quad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0} = 0$

$u/_{t=0} = \dfrac{x}{1+x^2} \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big/_{t=0} = \sin x$

$u/_{t=0} = \dfrac{\sin x}{x} \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big/_{t=0} = 0$

$u/_{t=0} = \dfrac{1}{1+x^2} \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big/_{t=0} = \cos x$

$u/_{t=0} = \dfrac{\sin x}{x} \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big/_{t=0} = \dfrac{x}{1+x^2}$

$u/_{t=0} = e^{-x^2} \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big/_{t=0} = \dfrac{x}{1+x^2}$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 8

ТЕМА: ***«ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ. РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ: РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ КОЛИВАНЬ СТРУНИ МЕТОДОМ ФУР'Є***

МЕТА: Сформувати у студентів уміння відтворювати різні етапи метода Фур'є до розв'язування рівнянь коливань струни в залежності від постановки граничних і початкових умов задачі.

ПЛАН:

1. Розв'язування рівнянь коливань струни при умові, що початкове відхилення відмінне від нуля, а початкова швидкість нульова.
2. Розв'язування рівнянь коливань струни при умові, що початкове відхилення відмінне від нуля, і початкова швидкість нульова.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ:

92. Розв'язати методом Фур'є рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad u(0,t)=0 \quad u(l,t)=0 \quad u/_{t=0} = \frac{4h}{l^2 x(l-x)} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big/_{t=0} = 0$$

91. Розв'язати методом Фур'є рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = Ae^{-t}$ $u(x,0) = \frac{Aach\frac{x}{a}}{sh\frac{l}{a}}$ $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\frac{Aach\frac{x}{a}}{sh\frac{l}{a}}$

$0 < x < l$, $t > 0$

ЛІТЕРАТУРА: [2],[3],[6],[7] [13].

ЗАВДАННЯ ДОДОМУ:

90. Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,що задовольняє умовам

$u(0,t) = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$ $u(x,0) = \varphi(x)$ $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$

методом Фур'є.

93. Розв'язати методом Фур'є рівняння

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при

$$u(0,t) = 0 \quad u(l,t) = 0 \quad u\Big/_{t=0} = \begin{cases} \frac{2h}{l}x, \text{ якщо } 0 \le x \le \frac{l}{2} \\ \frac{2h}{l}(l-x), \text{ якщо } \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big/_{t=0} = 0$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №10

ТЕМА: ***«ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ. РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ: РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ СТРУНИ. МЕТОД ДАЛАМБЕРА І МЕТОД ФУР'Є».***

МЕТА: Сформувати уміння застосовувати відомі методи розв'язування рівнянь коливань струни (метод Даламбера, метод Фур'є) у випадку вимушених коливань.

ПЛАН:

1. Метод Даламбера у випадку вимушених коливань струни.
2. Формули розв'язування рівняння коливань струни методом Фур'є при наявності змушуючої сили.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ:

№1. Розвязати методом Даламбера рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \quad 2t$$

якщо $\quad u(x,0) = (x)^2 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2x$

№2. Розвязати методом Фур'є рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^t$$

Якщо $u(0,t) = 0 \quad u(l,t) = 0 \quad u(x,0) = x^2 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2x$

ЛІТЕРАТУРА: [2],[3],[6],[13].

ЗАВДАННЯ ДОДОМУ:

виконання індивідуальних завдань

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 10 - 11

«Розв'язування рівнянь теплопровідності методом Фур'є»

ТЕМА: ***«РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ. РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДОМ ФУР'Є»***

МЕТА: Закріпити усвідомлення студентами суті методу Фур'є під час розв'язування рівнянь теплопровідності з різними крайовими та початковими умовами.

ПЛАН:

1. Рівняння теплопровідності для необмеженого стержня. Задача Коші.
2. Рівняння теплопровідності для тепло ізольованого з боків стержня.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ:

Завдання для колективного розв'язання:

Задача №1. Дано тонкий однорідний стержень довжиною *l,* ізольований від зовнішнього простору, початкова температура якого дорівнює $f(x) = \frac{cx(l-x)}{l^2}$. Кінці стержня підтримуються при температурі рівній 0. визначити температуру стержня в момент часу *t.*

Задача №2. Знайти розподіл температури *u(x,t)* в стержні, якщо на його кінцях температура відповідно *u(0,t)=m1, u(l,t)=m2,* а початкова температура *u(x,0)=a*. Бічні сторони стержня тепло ізольовані.

Завдання для самостійного виконання

94. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

а) $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо початковий розподіл температури визначається рівністю

$$u(x,t)\big/_{t=0} = f(x) = \begin{cases} u_0, якщо x_1 < x < x_2 \\ 0, якщо x < x_1 або x_1 > x_2 \end{cases}$$

б) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,яка задовольняє початковій умові $u\big/_{t=0} = f(x) = u_0$ і крайовій умові $u\big/_{x=0} = 0$

ЛІТЕРАТУРА: [2],[3],[6],[13].

ЗАВДАННЯ ДОДОМУ:

Розв'язати задачу $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,яка задовольняє умовам

$$u\big/_{t=0} = f(x) = \begin{cases} x, якщо 0 < x \le \frac{l}{2} \\ l - x, якщо \frac{l}{2} \le x < l \end{cases}$$

$$u\big/_{x=0} = u\big/_{x=l} = 0$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №12

ТЕМА: ***«РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ. РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ.»***

МЕТА: Виявити рівень засвоєння студентами теоретичних знань та практичних умінь і навичок розв’язування рівнянь гіперболічного та параболічного типів різними методами. А також зясувати якість виконання завдань, винесених на самостійне опрацювання з теми «Коливання мембрани».

ПЛАН:

1. Коливання струни: вільні і вимушені.
2. Коливання мембрани.
3. Рівняння теплопровідності.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ:

Захист студентами задач, виконаних в індивідуальній домашній роботі.

ЛІТЕРАТУРА: [2],[3],[6],[7] [13].

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №13

ТЕМА: ***«РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ. РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА. ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ КРУГА. ІНТЕГРАЛ ПУАССОНА».***

МЕТА: Відпрацювати уміння і навички застосовувати метод Фур'є до розв'язування рівнянь математичної фізики еліптичного типу.

ПЛАН:

1. Рівнянн Лапласа.
2. Метод Фур'є для рівняння Лапласа. Інтеграл Пуассона.
3. Задача Діріхле для круга.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ:

96. Знайти розв'язок рівняння Лапласа для внутрішньої частини кільця $1 \le r \le 2$, що задовольняє крайовим умовам:

$$u/_{r=1} = 0 \qquad u/_{r=2} = y$$

Ввести полярні координати.

97. Знайти розв'язок рівняння Лапласа в прямокутнику $0 < x < \rho, 0 < y < s$, який задовольняє крайовим умовам

$$u(0,y) = \frac{\partial u(\rho,y)}{\partial x} = 0, u(x,0) = 0, u(x,s) = f(x)$$

Знайти розв'язок рівняння Лапласа в прямокутнику $0 < x < \rho, 0 < y < s$, який задовольняє крайовим умовам

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = \frac{\partial u(\rho,y)}{\partial x} = 0, u(x,0) = A, u(x,s) = Bx$$

ЛІТЕРАТУРА: [2],[3],[6],[7] [13].

ЗАВДАННЯ ДОДОМУ:

Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, який задовольняє крайовим умовам

$u(0,y)=0, u(a,y)=0, u(x,0)=\varphi_1(x), u(x,b)=\varphi_2(x)$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 14

ТЕМА: ***«РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ. РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА. ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ КРУГА. ІНТЕГРАЛ ПУАССОНА. ПОНЯТТЯ ГАРМОНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ».***

МЕТА: Сформувати у студентів поняття про гармонійну функцію, відпрацювати уміння і навички досліджувати функцію на гармонійність за допомогою оператора Лапласа.

ПЛАН:

1. Оператор Лапласа.
2. Умови гармонійності функції.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ:

99. Знайти гармонійну функцію u_1 якщо:

а) $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y-y^3$

б) $\frac{\partial u}{\partial z}=e^x(x\cos y-y\sin x)+2z$

100.Знайти значення постійної k ,для якої задані функції є гармонійними

а) $x_1^3+kx_1x_2^2$

б) $x_1^2+x_2^2+kx_3^2$

в) $e^{2x_1}chkx_2$

ЛІТЕРАТУРА: [2],[3],[6].

ЗАВДАННЯ ДОДОМУ:

Підготуватися до заліку

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 15

МОДУЛЬ – КОНТРОЛЬ НА ТЕМУ: «ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ РЕАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ».

МЕТА: Виявити рівень знань, умінь та навичок студентів складати й розв’язувати рівняння математичної фізики різних типів: гіперболічні, еліптичні, параболічні.

Розділ IV
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

3.1.Рівняння з частинними похідними першого порядку.

Алгоритм розв’язування рівняння

Щоб розв’язати рівняння в частинних похідних $a_1 \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_n \cdot \frac{\partial z}{\partial x_n} = b$ (1), де a_1, a_2, …, a_n, b – залежить від x_1, …, x_n, z треба записати систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b} \quad (2)$$

і знайти n незалежних перших інтегралів цієї системи

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,\ldots,x_n,z) = c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x_1,\ldots,x_n,z) = c_n \end{cases} \quad (3)$$

Загальний розв’язок рівняння (1) в неявному вигляді записується так:

$$F(\varphi_1,\ldots\varphi_n) = 0 \quad (4)$$

де F – довільна диференційована функція.

Приклад

Знайти загальний розв’язок рвняння

$$xz \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + yz \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -xy$$

Розв’язання.

Складаємо систему рівнянь

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$$

і знаходимо її перші інтеграли

1) $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = \ln|c_1 \cdot y| \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = c_1$

2) $\frac{dy}{yz} = -\frac{dz}{xy}$

$$x = yc_1$$

$$\frac{dy}{yz} = -\frac{dz}{y^2 c_1} \quad \Rightarrow \quad ydy = -\frac{z}{c_1}dz \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2c_1} = c_2 \quad \Rightarrow \quad z^2 + xy = c_2$$

Отже, загальний розв'язок рівняння можна записати у неявному вигляді так:

$$F\left(\frac{x}{y}; z^2 + xy\right) = 0$$

<u>*Примітка:*</u> в тих випадках, коли z входить тільки в один загальний інтеграл, то загальний розв'язок можна записати, виразивши з нього z, так у розглядуваному прикладі

$$z^2 + xy = f(\frac{x}{y}) \quad \text{або} \quad z = \pm\sqrt{f\left(\frac{x}{y}\right) - xy}$$

де f – довільна диференційна функція.

<u>Завдання для самостійного виконання</u>

Для кожного з рівнянь 1-22 знайти загальний розв'язок

1. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ $\quad\left[z = f(x^2 + y^2)\right]$

2. $(x^2 + 2y)\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ $\quad\left[z = f(xy + y^2)\right]$

3. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ $\quad\left[u = f\left(\frac{y}{x}; \frac{z}{x}\right)\right]$

4. $(x - z)\frac{\partial u}{\partial x} + (y - z)\frac{\partial u}{\partial y} + 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ $\quad\left[u = f\left(\frac{x - y}{z}; \frac{(x + y + 2z)^2}{z}\right)\right]$

5. $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x - y$ $\quad\left[F(x^2 - y^2; x - y + z) = 0\right]$

6. $e^x\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = ye^x$ $\quad\left[F\left(e^{-x} - \frac{1}{y}; z + \frac{x - \ln|y|}{e^{-x} - y^{-1}}\right) = 0\right]$

7. $2x\frac{\partial z}{\partial x} + (y - x)\frac{\partial z}{\partial y} - x^2 = 0$ $\quad\left[F\left(x^2 - 4z; \frac{(x + y)^2}{x}\right) = 0\right]$

8. $xy\frac{\partial z}{\partial x} - x^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz$ $\quad\left[F\left(x^2 + y^2; \frac{z}{x}\right) = 0\right]$

9. $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=x^2y+z$ $\left[F\left(\frac{x^2}{y};xy-\frac{3z}{x}\right)=0\right]$

10. $(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}+z^2=0$ $\left[F\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z};\frac{1}{x-y}+\frac{1}{z}\right)=0\right]$

11. $2y^4\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\sqrt{z^2+1}$ $\left[F(x^2+y^4;y(z+\sqrt{z^2+1}))=0\right]$

12. $x^2z\frac{\partial z}{\partial x}+y^2z\frac{\partial z}{\partial y}=x+y$ $\left[F\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y};\ln|xy|-\frac{z^2}{2}\right)=0\right]$

13. $yz\frac{\partial z}{\partial x}-xz\frac{\partial z}{\partial y}=e^z$ $\left[F\left(x^2+y^2;arctg\frac{x}{y}+\frac{z+1}{e^z}\right)=0\right]$

14. $(z-y)^2\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=e^z$ $\left[F(z^2-y^2,x^2+(y-z)^2)=0\right]$

15. $xy\frac{\partial z}{\partial x}+(x-2z)\frac{\partial z}{\partial y}=yz$ $\left[F\left(\frac{z}{x},2x-4z-y^2\right)=0\right]$

16. $y\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x}$ $\left[F(z-\ln|x|,2x(z-1)-y^2)=0\right]$

17. $\sin^2x\frac{\partial z}{\partial x}+tgz\frac{\partial z}{\partial y}=\cos^2z$ $\left[F(tgz+ctgx;2y-tg^2z)=0\right]$

18. $(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=x+y,$ $\left[F\left(\frac{x+y+z}{(x-y)^2};(x-y)(x+y-2z)\right)=0\right]$

19. $(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x+yz)\frac{\partial z}{\partial y}=1-z^2,$ $\left[F((x-y)(z+1);(x+y)(z-1))=0\right]$

20. $(y+z)\frac{\partial u}{\partial x}+(z+x)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=u$ $\left[F\left(u(x-y);u(y-z);\frac{x+y+z}{u^2}\right)=0\right]$

21. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+(z+u)\frac{\partial u}{\partial z}=xy$ $\left[F\left(\frac{x}{y};xy-2u;\frac{z+u-xy}{x}\right)=0\right]$

22. $(u-x)\frac{\partial u}{\partial x}+(u-y)\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=x+y$ $\left[F\left(\frac{x-y}{z};(2u+x+y)z;\frac{u-x-y}{z^2}\right)=0\right]$

Алгоритм знаходження поверхні *z=z(x,y)*, яка задовольняє диференціальному рівнянню

$$a_1(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+a_2(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=b(x,y,z) \qquad (1)$$

і проходить через лінію

$$x=u(t), \quad y=V(t), \quad z=w(t) \qquad (2)$$

Потрібно знайти два перші незалежні інтеграли системи

$$\frac{dx}{a_1}=\frac{dy}{a_2}=\frac{dz}{b}$$

$$c_1=\varphi_1(x,y,z), \quad c_2=\varphi_2(x,y,z) \qquad (3)$$

Підставити у вирази (3) замість x,y,z їх значення із (2).

Отримується рівність

$$\Phi_1(t)=c_1, \quad \Phi_2(t)=c_2$$

Виключаємо з цих рівностей t, отримуємо співвідношення

$$F(c_1,c_2)=0 \qquad (4)$$

Підставляємо в рівність (4) замість c_1, c_2 праві частини перших інтегралів (3), отримуємо шуканий розв'язок.

<u>Приклад</u>

Знайти інтегральну поверхню $z=z(x,y)$, яка задовольняє рівнянню

$$xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=-xy$$

і проходить через лінію $y=x^2$, $z=x^3$.

Розв'язання

Скористаємося розв'язком заданого рівняння (який розглянуто в попередньому прикладі) і запишемо його загальний інтеграл

$$c_1=\frac{x}{y};c_2=z^2+xy$$

Запишемо задану лінію у параметричному вигляді, обравши x за параметр, отримаємо

$$x=x, \quad y=x^2, \quad z=x^3$$

Виразимо через параметр x, c_1 і c_2, отримаємо

$$c_1=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x};c_2=(x^3)^2+x\cdot x^2=x^6+x^3$$

Виключивши x, отримаємо

$$x = \frac{1}{c_1} \qquad c_2 = \frac{1}{c_1^6} + \frac{1}{c_1^3}$$

В останню рівність замість c_1 і c_2 підставимо їх значення, отримаємо шуканий розв'язок

$$\left(\frac{y}{x}\right)^6 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = z^2 + xy\,.$$

<u>Завдання для самостійного виконання</u>

Знайти розв'язки рівнянь 23-27, що задовольняють початковим умовам

23. $z\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z=2x$ при $y=1$ $\left[z = 2xy\right]$

24. $\frac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z=y$ при $x=0$ $\left[z = ye^x - e^{2x} + 1\right]$

25. $2\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z=y^2$ при $x=1$ $\left[z = y^2 e^{2\sqrt{x}-2}\right]$

26. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u=yz$ при $x=1$, $\left[u = (1 - x + y)(2 - 2x + z)\right]$

27. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u=x^2+y^2$ при $z=0$ $\left[u = (xy - 2z)\cdot\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\right]$

В задачах 28-44 знайти поверхню, що задовольняє даному рівнянню і проходить через задану лінію.

28. $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = x$, $x=0$, $z=y^2$ $\left[y^2 - x^2 - \ln\sqrt{y^2 - x^2} = z - \ln|y|\right]$

29. $x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$, $y=1$, $z=x^2$ $\left[2x^2(y+1) = y^2 + 4z - 1\right]$

30. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$, $x=2$, $z=y^2+1$ $\left[(x+2y)^2 = 2x(z + xy)\right]$

31. $tgx\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$, $y=x$, $z=x^3$ $\left[\sqrt{\frac{z}{y^3}}\sin x = \sin\sqrt{\frac{z}{y}}\right]$

32. $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=z^2(x-3y)$ $\quad$ *x=1, yz+1=0* $\quad$ $\left[2xy+1=x+3y+z^{-1}\right]$

33. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z^2(x-3y)$ $\quad$ *y=-2, z=x-x*^{2} $\quad$ $\left[x-2y=x^2+y^2+z\right]$

34. $yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=xy$ $\quad$ *x=a,* $y^2+z^2=a^2$ $\quad$ $\left[2x^2-y^2-z^2=a^2\right]$

35. $z\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz$ *,x+y=2, yz=1* $\quad$ $\left[((y^2z-2)^2-x^2+z)y^2z=1\right]$

36. $z\frac{\partial z}{\partial x}+(z^2-x^2)\frac{\partial z}{\partial y}+x=0$, $y=x^2$*, z=2x* $\quad$ $\left[x^2+z^2=5(xz-y)\right]$

37. $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$ *,z=y=-x* $\quad$ $\left[3(x+z+y)^2=x^2+y^2+z^2\right]$

38. $x\frac{\partial z}{\partial x}+(xz+y)\frac{\partial z}{\partial y}=z$, $\quad$ *x+y=2z, xz=1* $\quad$ $\left[xz=(xz-y-x+2z)^2\right]$

39. $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}+z^2=0$, *x-y=0, x-yz=1* $\quad$ $\left[(1+y)^3=3yz(1+yz-x)+y^3\right]$

40. $x\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=y$, *y=2z, x+2y=z* $\quad$ $\left[x+y+z=0\right]$

41. $(y+2z^2)\frac{\partial z}{\partial x}-2x^2z\frac{\partial z}{\partial y}=x^2$, *x=z,* $y=x^2$ $\quad$ $\left[2(x^3-4z^3-3yz)^2=9(y+z^2)^3\right]$

42. $(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial z}{\partial y}=2z$, $\quad$ *x-y=2, z+2x=1* $\quad$ $\left[(x-y)(3x+y+4z)=4z\right]$

43. $xy^3\frac{\partial z}{\partial x}+x^2z^2\frac{\partial z}{\partial y}=y^3z$, $\quad$ $x=-z^3, y=z^2$ $\quad$ $\left[xz+y^2=0\right]$

44. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2xy$, $\quad$ *y=x,* $z=x^2$ $\quad$ $\left[\begin{array}{l} z=xy+f\left(\frac{y}{x}\right) \\ f-\textit{довільна}, f(1)=0 \end{array}\right]$

В прикладах 45-58 довести, що задані функції *z=f(x,y)* та їх частинні похідні задовольняють даним рівнянням.

45. $z=\cos(x+y)$ $\quad$ $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$

46. $z=\sin\left(\frac{x}{y}\right)$, $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$

47. $z=x\sin y$, $x\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

48. $z=tg\frac{x}{y}$, $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$

49. $z=\frac{1}{x}e^{\frac{x}{y}}$, $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}=0$

50. $z=\frac{x^2+y^2}{x+y}$, $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

51. $z=\ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$, $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

52. $z=\arcsin\frac{x}{y}$, $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$

53. $z=\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$, $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial y}=0$

54. $z=arctg\frac{x}{y}$, $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

55. $z=(x+y)\sin(x-y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-4\cos(x-y)=0$

56. $z=\frac{x+y+1}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+2\frac{y+1}{x^3}=0$

57. $z=\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$, $\frac{x^3}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{y^3}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

58. $z=\ln(x^2+y^2+x+y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{2}{(x^2+y^2+x+y)^2}=0$

3.2 . Рівняння з частинними похідними другого порядку

Алгоритм визначення типу рівняння другого порядку

1) Розглянемо рівняння $a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$, де a,b,c – функції x і y

2) Знайдемо визначник $\Delta = b^2 - ac$

3) Якщо в деякій області D

$\Delta > 0$, то рівняння в цій оьласті належить до гіперболічного типу,

при $\Delta = 0$, рівняння в області D належить до параболічного типу,

якщо $\Delta < 0$, то рівняння належить до еліптичного типу.

Приклад:

Визначити тип рівняння $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Розв'язання.

В заданому рівнянні $a = x^2, b = 0, c = -y^2$, $b^2 - ac = 0 + x^2 y^2 = x^2 y^2 > 0$ при всіх x,y – відмінних від нуля, отже дане рівняння гіперболічного типу.

Завдання для самостійного виконання:

Для заданих рівнянь 59-68 визначити тип

59. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2u - x^2 y = 0$

60. $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0$

61. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 3u - xy^2 = 0$

62. $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2u = 0$

63. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

64. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} + 3\frac{\partial u}{\partial x} - u = 0$

65. $y^{2m+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

66. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = 0$

67. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

68. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2e^{x-y}=0$

Вздовж відповідних розв'язків *u(x,y)* визначити тип рівнянь 69-78.

Примітка: в задачах 69-78 попередньо необхідно задане рівняння звести до вигляду $a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=0$ використовуючи задану функцію *u(x,y)* та її частинні похідні.

Наприклад:

Визначити тип рівняння $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2=8$ вздовж розв'язку $u=x^2+y^2$.

Розв'язаня:

Знайдемо частинні похідні $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ і $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ і підставимо їх у задане рівняння.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$ $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$ $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}=2y$ $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2$.

Отримаємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot 0+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot 2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot 2=8$$

a=2 *b=0* *c=2* $b^2-ac=0-4=-4<0$,

Отже, рівняння еліптичного типу вздовж $u=x^2+y^2$.

69. $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2=0$, $\qquad u=x^2+y^2$

70. $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2=8$, $\qquad u=x^2+y^2$, $u=2\sqrt{2}xy$

71. $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2-4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2=0$, $\qquad u=(x+y)^2$, $u=x$, $u=x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{17}{16}xy$

72. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2-4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $u=2y^2$, $u=5xy$, $u=x$

73. $3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-4=0$, $u=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $u=2y^2$

74. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-2(x+y)-8=0$, $u=x^2+2xy$

75. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^4+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial y}-2x=0$, $u=2xy-8y$

76. $2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial y}-2x=0$, $u=xy-\frac{1}{2}x^2$

77. $5\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^5-7\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+25\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-150y=0$, $u=\frac{x^2}{2}+y^3+\frac{5}{7}xy$

78. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+5\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+6\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2=12$, $u=\frac{1}{2}(x+y)^2$, $u=\sqrt{3}x^2$

Алгоритм зведення рівняння другого порядку до канонічного вигляду.

1) Розглянемо рівняння

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \quad (1),$$ де a,b,c – функції x і y.

2) Визначимо тип рівняння (1)

3) Складемо рівняння характеристик для заданого рівняння (1)

$$ady^2-2bdxdy+cdx^2=0 \quad (2)$$

4) Розв'яжемо рівняння характеристик.

а) якщо рівняння (1) гіперболічного типу, то рівняння характеристик має два унтеграли $\varphi(x,y)=c_1$, $\psi(x,y)=c_2$ вводимо заміну $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$ і рівняння (1) зводиться до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}=\Phi\left(\xi,\eta,z,\frac{\partial z}{\partial\xi},\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)$$

б) якщо рівняння (1) параболічного типу, то рівняння характеристик (2) має лише один інтеграл $\varphi(x,y)=c$. У цьому випадку вводимо заміну

$\xi=\varphi(x,y)$, а $\eta=\psi(x,y)$ - яка-небудь функція, для якої $\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial y}-\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\neq 0$.

Після заміни отримуємо канонічний вигляд рівняння

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=\Phi\left(\xi,\eta,z,\frac{\partial z}{\partial\xi},\frac{\partial z}{\partial\eta}\right).$$

в) якщо рівняння (1) еліптичного типу, то рівняння характеристик мають вигляд $\varphi(x,y)\pm i\psi(x,y)=c_{1,2}$, де $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ - функції дійсного змінного, тоді вводимо заміну $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, тоді канонічна форма рівняння (1) має вигляд

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=\Phi\left(\xi,\eta,z,\frac{\partial z}{\partial\xi},\frac{\partial z}{\partial\eta}\right).$$

Приклад:

Звести до канонічного вигляду рівняння $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ (1)

Розв'язання:

$a=x^2, c=-y^2, b=0$, $\Delta=b^2-ac=0-x^2(-y^2)=x^2y^2>0$, отже, рівняння гіперболічного типу.

Складаємо рівняння характеристик і знаходимо його загальні інтеграли.

$x^2dy^2-y^2dx^2=0$;

$(xdy-ydx)(xdy+ydx)=0$;

$\dfrac{dy}{y}-\dfrac{dx}{x}=0$, $\dfrac{dy}{y}+\dfrac{dx}{x}=0$,

$\ln y-\ln x=\ln c_1$, $\ln y+\ln x=\ln c_2$,

$\dfrac{y}{x}=c_1$ $yx=c_2$

Вводимо нові змінні $\xi=\dfrac{y}{x}, \eta=yx$.

Для знаходження частинних похідних функцій використовуємо такі формули:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\partial y}.$$

За цими формулами знайдемо необхідні частинні похідні: $\xi=\varphi(x,y)=\frac{y}{x}$, $\eta=\psi(x,y)=yx$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}=y\qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}y^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{2y}{x^3}+\frac{\partial u}{\partial \eta}0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{1}{x}\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}=x\qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{1}{x}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}1+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}x^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}0+\frac{\partial u}{\partial \eta}0 \qquad (3)$$

Значення $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ із рівностуй (2) і (3) підставляємо в умову (1) і отримуємо:

$$\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{2y}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$$

$$-4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=\frac{2y}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$$

$$-4\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+2\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$$

Відповідь: $2\eta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$

Завдання для самостійного виконання

Рівняння 79-88 звести до канонічного вигляду в кожній з областей, де зберігається тип розглядуваного рівняння.

79. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2y\frac{\partial u}{\partial x}+ye^{\frac{y}{x}}=0$

80. $xy^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x^2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y^2\frac{\partial u}{\partial x}=0$

81. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\cos x\frac{\partial u}{\partial y}=0$

82. $e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2e^{x+y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+e^{2y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-xu=0$

83. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$

84. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(x-1)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

85. $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

86. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0$

87. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(\cos^2 x-\sin^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cos x\frac{\partial u}{\partial y}=0$

88. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

Відповіді

59. гіперболічний тип
60. гіперболічний тип
61. гіперболічний тип
62. гіперболічний тип
63. гіперболічний тип
64. гіперболічний тип
65. для *y<0* - гіперболічний тип,

для *y>0* – еліптичний тип,

для у=*о* – параболічний тип

66. для *xy<0* - гіперболічний тип,

для *xy>0* - еліптичний тип,

для *xy=0* - параболічний тип

67. еліптичний тип

68. гіперболічний тип

69. гіперболічний тип

70. еліптичний вздовж $u = y^2 + x^2$,

гіперболічний вздовж $u = 2\sqrt{2}xy$

71. еліптичний вздовж $u = (x + y)^2$

гіперболічний вздовж $u = x$

параболічний вздовж $u = x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{7}{16}xy$.

72. параболічний вздовж $u = 2y^2$

еліптичний вздовж $u = 5xy$

гіперболічний вздовж $u = x$

73. параболічний вздовж $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

гіперболічний вздовж $u = 2y^2$

74. гіперболічний тип

75. гіперболічний тип

76. гіперболічний тип

77. еліптичний тип

78. гіперболічний вздовж $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

параболічний вздовж $u = \sqrt{3}x^2$

79. параболічне всюди, крім початку координат

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\frac{\xi^2}{\eta^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta}e^{\xi} = 0, \qquad \xi = \frac{y}{x}, \eta = y$$

80. параболічне всюди, окрім координатної вісі x=0

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{2\eta^2}{\xi - \eta^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \xi = x^2 + y^2, \eta = x$$

81. гіперболічне всюди

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \xi = x + y - \cos x, \quad \eta = -x + y - \cos x$$

82. параболічне всюди

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\xi}{1+\xi e^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\eta e^{-2\eta}u=0 \qquad u=0 \quad \xi=e^{-y}-e^{-x}, \eta=x$$

83. параболічне при *x=0,* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

гіперболічне при $x\neq 0$ $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2(\xi-\eta)}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi}=0$, $\xi=x^2+y$, $\eta=y$

84. параболічне при *x=0,* $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,

гіперболічне при *x>0* $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$ $\xi=y-x+2\sqrt{x}$ $\eta=y-x-2\sqrt{x}$

еліптичне при *x<0* $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$, $\xi=y-x$, $\eta=2\sqrt{-x}$

85. параболічне при *y=0* $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,

гіперболічне при *y<0* $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{6(\xi+\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$, $\xi=\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}+x$, $\eta=\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}-x$

еліптичне при *y>0* $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$, $\xi=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$, $\eta=x$

86. параболічне при $x=0, y\neq 0$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2}{y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$ і при $x\neq 0, y=0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0;$$

гіперболічне при *x>0, y<0* і при *x<0, y>0* $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{3}{\xi^2-\eta^2}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\xi}-\xi\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$

(заміна при при *x>0, y<0* $\xi=\sqrt{y}+\sqrt{x}, \eta=\sqrt{y}-\sqrt{x}$ і при *x<0, y>0*

$\xi=\sqrt{y}+\sqrt{-x}, \eta=\sqrt{y}-\sqrt{-x}$)

еліптичне при *x>0, y<0* $\xi=\sqrt{y}, \eta=\sqrt{x}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+3\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$ і при *x<0,*

y<0 $\xi=\sqrt{-y}, \eta=\sqrt{-x}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+3\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$

87. параболічне на прямих $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}, k=0,\pm 1,...$

гіперболічне поза прямими $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}, k=0,\pm 1,...$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\xi-\eta}{2[4-(\xi-\eta)^2]}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$$

$\xi=y+\cos x+\sin x$, $\eta=y+\cos x-\sin x$

88. параболічне на осях координат *x=0* і *y=0,* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$

гіперболічне при *x>0, y<0* $\xi=-2(-y)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}$, $\eta=-2(-y)^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

при *x<0, y>0* $\xi=2y^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}$, $\eta=2y^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{3(\xi^2-\eta^2)}\left[(2\xi-\eta)\frac{\partial u}{\partial\xi}-(2\eta-\xi)\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]=0$$

еліптичне при *x>0, y>0* $\xi=2y^{\frac{1}{2}},\eta=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

при *x<0, y>0* $\xi=2(-y)^{\frac{1}{2}},\eta=\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$$

3.3.Рівняння математичної фізики

Рівняння коливань струни $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (1)

граничні умови $u(0,t)=0$ $u(l,t)=0$ (2)

початкові умови $u(x,t)/_{t=0}=f(x)$ $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}/_{t=0}=F(x)$ (3)

Розв'язок рівняння (1) з початковими умовами (3) методом Даламбера знаходиться за формулою

$$u=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)dz \quad (4)-$$

<u>Приклад</u>

Знайти розв’язок рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо $u/_{t=0}=x^2$ $\frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0}=0$

Розв'язання: Оскільки $a=1 f(x)=x^2 F(x)=0$, то за формулою (4) знаходимо

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[(x-t)^2+(x+t)^2\right]=x^2+t^2$$

<u>Завдання для самостійного виконання</u>

89. Для заданих рівнянь знайти розв’язок, який відповідає початковим умовам, якщо:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u/_{t=0}=0$ $\quad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0}=x$

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u/_{t=0}=\sin x$ $\quad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0}=1$

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u/_{t=0}=x$ $\quad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0}=-x$

г) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u/_{t=0}=\sin x$ $\quad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0}=\cos x$

д) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u/_{t=0}=-\frac{x^2}{2}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0}=\frac{e^x}{2}$

е) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u/_{t=0}=1+2\sin x$ $\quad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0}=\sin x$

ж) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u/_{t=0}=x+\cos x$ $\quad \frac{\partial u}{\partial t}/_{t=0}=\sin x$

Інтегрування рівнянь малих коливань струни методом Фур'є для рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (1) з граничними умовами (2) та початковими умовами (3) відбувається за формулою

$$u(x,t)=(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)(Ccjs\lambda t+D\sin a\lambda t)\ (5)$$

в якій значення констант A,B,C,D, λ знаходять із заданих граничних і початкових умов.

<u>Приклад.</u> Розвязати рівняння коливань струни $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ методом Фур’є, якщо $u(x,0)=\frac{4h}{l^2}x(l-x)$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$.

Розв'язання: Розвязок даної задачі визначається за формулою

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos\frac{k\pi\, at}{l}+b_k\cdot\sin\frac{k\pi\, at}{l}\right)\cdot\sin\frac{k\pi\, x}{l},$$

для якої треба визначити коефіцієнти за формулами

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{k\pi\, x}{l}dx \qquad b_k=\frac{2}{k\pi\, a}\int_0^l F(x)\cdot\sin\frac{k\pi\, x}{l}dx$$

Із початкових умов даної задачі слідує, що $b_k=0$.

Знайдемо коефіцієнт a_k.

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{8h}{l^3}\left(lx-x^2\right)\cdot\sin\frac{k\pi\, x}{l}dx= \qquad \left\|\begin{array}{c|c} u=lx-x^2 & du=(l-2x)dx \\ dv=\sin\frac{k\pi\, x}{l}dx & v=-\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi\, x}{l}\end{array}\right\|=$$

$$-\frac{8h}{l^3}\left(lx-x^2\right)\frac{l}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi\, x}{l}\Bigg|_0^l+\frac{8h}{k\pi\, l^2}\int_0^l(l-2x)\cdot\cos\frac{k\pi\, x}{l}dx=$$

$$\left\|\begin{array}{l|l} u=l-2x & du=-2dx \\ dv=\cos\frac{k\pi\, x}{l}dx & v=\frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi\, x}{l}\end{array}\right\|= \qquad -\frac{16h}{k^3\pi^3}(\cos k\pi-1)= \qquad \frac{16h}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right]=$$

$$\frac{16h}{k^3\pi^3}\cdot\begin{cases}0, \text{ при } k=2n-\text{парне}\\ 2, \text{ при } k=2n+1-\text{непарне}\end{cases}$$

Розв’язок задачі має вигляд:

$$u(x,t)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi\, at}{l}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi\, x}{l}.$$

<u>Завдання для самостійного виконання.</u>

90. Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,що задовольняє умовам

$$u(0,t)=0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0 \quad u(x,0)=\varphi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$$

методом Фур'є.

91. Розв'язати методом Фур'є рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=Ae^{-t}$ $u(x,0)=\frac{Aach\frac{x}{a}}{sh\frac{l}{a}}$ $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=-\frac{Aach\frac{x}{a}}{sh\frac{l}{a}}$

$0<x<l$, $t>0$

92. Розв'язати методом Фур'є рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad u(0,t)=0 \quad u(l,t)=0 \quad u\big/_{t=0}=\frac{4h}{l^2x(l-x)} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big/_{t=0}=0$$

93. Розв'язати методом Фур'є рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad u(0,t)=0 \quad u(l,t)=0 \quad u\big/_{t=0}=\begin{cases}\frac{2h}{l}x, \text{ якщо } 0\le x\le \frac{l}{2}\\ \frac{2h}{l}(l-x), \text{ якщо } \frac{l}{2}\le x\le l\end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big/_{t=0}=0$$

Рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (6)

що задовольняє умовам $u(0,t)=0$ $u(l,t)=0$ $u(x,0)=\varphi(x)$ (7)

розв'язується за формулою $u(x,t)=e^{-a^2\lambda^2 t}(\alpha\cos\lambda x+\beta\sin\lambda x)$ (8)

де λ,α,β - const які визначаються із крайових та початкових умов (7)

Приклад.

Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0<x<l)$, $t>0$

для якого початкові умови:

$u(x,0)=f(x)=x(l-x)$

і граничні умови: $u(0,t)=u(l,t)=0$.

Розв'язання. Загальний розв'язок має вигляд

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l},$$

де $a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx=;$

$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$, інтегруючи за частинами одержуємо $a_k=\frac{4l^2}{k^3\pi^3}((-1)^{n+1}+1)$

Отже, маємо

$$u(x,t)=\frac{4l^2}{\pi^3}\sum\frac{((-1)^{k+1}+1)}{k^3}e^{-(\frac{k\pi}{l})^2}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

<u>Завдання для самостійного виконання</u>

94. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності

а) $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо початковий розподіл температури визначається рівністю

$$u(x,t)\Big/_{t=0}=f(x)=\begin{cases} u_0, якщо x_1<x<x_2 \\ 0, якщо x<x_1 або x_1>x_2 \end{cases}$$

б) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,яка задовольняє початковій умові $u\Big/_{t=0}=f(x)=u_0$ і крайовій умові $u\Big/_{x=0}=0$

в) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,яка задовольняє умовам

$$u\Big/_{t=0}=f(x)=\begin{cases} x, якщо 0<x\le\frac{l}{2} \\ l-x, якщо \frac{l}{2}\le x<l \end{cases}$$

$$u\Big/_{x=0}=u\Big/_{x=l}=0$$

95. Радіальна дифузія в однорідній кулі описується рівнянням $\frac{\partial c}{\partial t}=D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial c}{\partial\rho}\right)$ з початковою умовою $c(\rho,0)=f(\rho)$ і граничною умовою $c(\rho,t)\Big/_{\rho=R}=c_0$

Рівняння Лапласа має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \quad (9)$$

рівняння Лапласа для двомірного простору ставиться як задача Діріхле для круга і в полярних координатах записується так

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0 \quad (10)$$

з граничною умовою $u/_{r=R}=\bar{u}(\varphi)$ (11)

за методом Фур'є функція $u(r,\varphi)$ знаходиться за формулою

$$u(r,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right) \quad (12)$$

де коефіцієнти a_0,a_n,b_n визначаються з умови (11)

<u>Приклад.</u> Знайти функцію, що задовольняє рівнянню Лапласа і приймає в точках верхнього півкола радіуса R значення 1, а в точках нижнього півкола радіуса R значення – 1

Розв'язання. У даному прикладі граничні умови мають вигляд:

$$f(\varphi)=\begin{cases}-1,-\pi\prec\varphi\prec 0\\ 1,0\prec\varphi\prec\pi\end{cases}$$

Розклад функції f у ряд Фур'є має вигляд:

$$f(\varphi)=\frac{4}{\pi}\sum\frac{\sin(2n-1)\varphi}{2n-1}$$

Тому розвязок рівняння Лапласа із заданими граничними умовами задається формулою:

$$u(r\sin\varphi,r\cos\varphi)=\frac{4}{\pi}\sum\frac{r^n\sin(2n-1)\varphi}{(2n-1)R^n}$$

$$0\le r\le 1,-\pi\le\varphi\le\pi$$

Цей ряд збігається, якщо $\frac{r}{R}$ значно менше одиниці.

<u>Завдання для самостійного виконання</u>

96. Знайти розв'язок рівняння Лапласа для внутрішньої частини кільця $1\le r\le 2$, що задовольняє крайовим умовам:

$$u/_{r=1}=0 \qquad u/_{r=2}=y$$

Ввести полярні координати.

97. Знайти розв'язок рівняння Лапласа в прямокутнику $0 < x < \rho, 0 < y < s$, який задовольняє крайовим умовам

а) $u(0,y) = \frac{\partial u(\rho,y)}{\partial x} = 0, u(x,0) = 0, u(x,s) = f(x)$

б) $\frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = \frac{\partial u(\rho,y)}{\partial x} = 0, u(x,0) = A, u(x,s) = Bx$

98. Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, який задовольняє крайовим умовам

$u(0,y) = 0, u(a,y) = 0, u(x,0) = \varphi_1(x), u(x,b) = \varphi_2(x)$

99. Знайти гармонійну функцію u_1 якщо:

а) $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 y - y^3$

б) $\frac{\partial u}{\partial z} = e^x(x\cos y - y\sin x) + 2z$

100.Знайти значення постійної k ,для якої задані функції є гармонійними

а) $x_1^3 + kx_1x_2^2$

б) $x_1^2 + x_2^2 + kx_3^2$

в) $e^{2x_1} chkx_2$

Відповіді

№89 а) $u = x^2 + t^2$ б) $u = xt$

в) $u = \sin x \cos at + t$ г) $u = x(1-t)$

д) $u = \frac{\cos x \sin at}{a}$

№90 $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{(2n+1)a\Pi t}{2l} \sin\frac{(2n+1)\Pi x}{2l}$,

$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{(2n+1)\Pi x}{2l}dx$

№91 $u(x,t) = \frac{Aa}{sh\frac{l}{a}} e^{-t} ch\frac{x}{a}$, якщо $u(x,t)$ шукати у вигляді $u(x,t) = v(x,t) + e^{-t} f(x)$

№92 $u(x,t) = \frac{32h}{\Pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\Pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\Pi x}{l}$

№93 $u(x,t)=\frac{8h}{\Pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\Pi}{2}\sin\frac{k\Pi x}{l}\cos\frac{k\Pi at}{l}$

3.4.Контрольні запитання і завдання

I частина. Теоретичні питання

1. Поняття про рівняння з частинними похідними. Як визначається проядок рівняння з частинними похідними? Поняття про загальний інтеграл рівняння у частинних похідних.
2. В чому полягає основна відмінність сімейства розв'язків рівняння з частинними похідними від сімейства розв'язків звичайного диференціального рівняння? Наведіть приклади.
3. Постановка задач математичної фізики. Оператор Лапласа в полярних, циліндричних і сферичних координатах.
4. Основні типи рівнянь математичної фізики, приклади рівнянь.
5. У чому відмінність рівнянь математичної фізики від рівнянь з частинними похідними другого порядку загального вигляду? Чим відрізняється однорідне рівняння від неоднорідного?
6. Канонічний вид диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними.
7. Зведення до канонічного вигляду рівняння гіперболічного типу, навести приклад.
8. Зведення рівняння до канонічного вигляду вздовж заданого розвязку.
9. Зведення до канонічного вигляду рівняння параболічного типу, навести приклад.
10. Зведення до канонічного вигляду рівняння еліптичного типу, навести приклад.
11. Виведення диференціального рівняння коливань струни.

12. Постановка початкових і граничних умов для диференціального рівняння коливань струни. В чому геометричний і фізичний зміст цих умов?

13. Розв'язування рівняння коливань струни методом Даламбера.

14. Розв'язування рівняння коливань струни методом Фур'є. В якому вигляді шукається розвязок? Чому інтегрування хвильового рівняння методом Фур'є зводиться до інтегрування двох звичайних диференціальних рівнянь? Як використовуються початкові і граничні умови?

15. Який аналітичний вигляд має розв'язок рівняння коливання струни, знайдений методом Фур'є? Який фізичний зміст цього розв'язку?

16. Рівняння теплопровідності для нестаціонарного випадку.

17. Рівняння теплопровідності для випадку, коли стержень розташовано вздовж осі Ох.

18. Задача Коші для рівняння теплопровідності.

19. Розв'язування одновимірного рівняння теплопровідності методом Фур'є.

20. Який аналітичний вигляд має розв'язок рівняння теплопровідності, знайдений методом Фур'є? Який фізичний зміст цього розв'язку?

21. Чим відрізняються аналітичні структури розв'язків хвильового рівняння і рівняння теплопровідності?

22. Задачі дифузії.

23. Рівняння Лапласа і Пуассона.

24. Метод Фур'є для рівняння Лапласа.

25. Кливання мембрани.

26. Вимушені коливання.

27. Розв'язування рівнянь вимушених коливань методом Даламбера.

28. Розв'язування рівнянь вимушених коливань методом Фур'є

II частина. Практичні завдання.

№1. Перевірити чи є функція *u=u(x,y,z)* розв'язком рівняння $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$

в області $x>0, y>0, z>0$, якщо:

а) $u = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2}$

б) $u = xyz$

в) $u = \frac{y}{x} e^{\frac{xz}{y^2}}$

№2. Довести, що функція $u(x,y)=x+y+f(x,y)$, де $f(x,y)$ – довільна неперервно диференційована функція є розв'язком диференціального рівняння

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = x - y$$

№3. Довести, що $u = \sqrt{x^2 + y^2}\, f\left(arctg\frac{u}{x} + \ln\sqrt{x^2 + y^2} \right)$, де $f(z)$ – неперервно диференційована функція є розв'язком рівняння

$$(x + y)\frac{\partial u}{\partial x} - (x - y)\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

№4. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє умові, якщо

а) $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\qquad u(0, y) = py^2$

б) $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 1$ $\qquad u(x,1) = x$

в) $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2$ $\qquad u(0, y) = \frac{1}{y^2}$

г) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ $\qquad u(1, y, z) = y^2 + z^2$

д) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ $\qquad u(x, y, z)\Big|_{y^2+z^2=2} = \frac{2}{x^2}$

№5. Знайти розв'язок задачі Коші

а) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = xyz$ $\qquad u(0, y, z) = y - z$

б) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy$ $\qquad u(x, x) = x^2$

в) $xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} + xy = 0$ $\qquad u\Big|_{xy=1} = 1$

г) $(x-2e^{y})\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad u(x,0)=0$

д) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial z}=0 \qquad u(x,1,z)=xz$

є) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=1 \qquad u(x;1)=x$.

з) $(y^2-u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=u, \quad u(1;y)=2$.

№6. Розв'язати рівняння:

а) $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$

б) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$

в) $y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+y^2$

г) $xy\frac{\partial u}{\partial x}-y^2\frac{\partial u}{\partial y}=x^2$

д) $\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=xyz$

є) $x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=0$

ж) $x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=x-y$

з) $x^2u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y^2u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=x+y$

і) $(y+z)\frac{\partial u}{\partial x}+(z+x)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=u$

№7. Знайти поверхню, що задовольняє рівнянню $yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=-2xy$ і проходить через коло $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ z=3 \end{cases}$

№8. Знайти поверхню, що задовольняє рівнянню $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=4$ і проходить через параболу $\begin{cases} y^2 = z \\ x=0 \end{cases}$.

№9. Знайти поверхню $u=u(x,y)$, що задовольняє рівнянню $x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=u-x^2-y^2$ і проходить через параболу $\begin{cases} u=x-x^2 \\ y=-2 \end{cases}$

№10. Розв'язати найпростіші диференціальні рівняння в частинних похідних:

а). $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=3x^2+y$;

б). $\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x\,\partial y^2}=x\cdot e^{2y}-y^2\ln x$;

в). $y\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+2xy\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

№11. Знайти поверхню, яка проходить через лінію l: $y=x$, $z=1$, ортогонально до сім'ї поверхонь: $x^2+y^2+z^2=Cx$, де $C=const$.

Відповідь: $2y^2+z^2=z\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

№12. Знайти ортогональні траєкторії сім'ї площин: $y=Cx$

Відповідь: $\begin{cases} x^2+y^2=C_1^2, \\ z=C_2. \end{cases}$

№13. Зінтегрувати нелінійне диференціальне рівняння

$F\equiv x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3-\frac{1}{2}\left(P_1^2+P_2^2-P_3^2\right)-u=0$,

де $P_k=\frac{\partial u}{\partial x_k}$, $k=1,2,3$; $u=u(x_1,x_2,x_3)$ — невідома функція,

Початкові умови: $x_1^0=t_1$, $x_2^0=t_2$, $x_3^0=0$, $u^0=\frac{1}{2}\left(t_2^2-t_1^2\right)$.

Відповідь: $u(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{2}\left(x_1-\sqrt{2}x_3\right)^2$.

№14. Знайти розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}=\ln x. \end{cases}$$

Відповідь: $u(x,y)=y\cdot\ln x+C$.

№15. Розв’язати рівняння:

$\left(3x^2\cdot\cos y-\sin y\right)\cos y\,dx-x\,dy=0$.

Відповідь: $\mu=\dfrac{1}{\cos^2 y}$; $u(x,y)\equiv x^3-x\cdot\operatorname{tg}y=C$.

№16. Розв’язати рівняння:

$\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dx+\left(2xy+\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)dy=0$.

Відповідь: $\mu=\dfrac{1}{x}$; $\ln x+\ln y+y^2-\dfrac{x}{y}=C$.

№17. Для заданого рівняння методом Даламбера знайти розв'язок, який відповідає початковим умовам, якщо

$$\frac{\partial u}{\partial t^2}=\frac{\partial u^2}{\partial x^2}\quad u\big/_{t=0}=\sin x\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big/_{t=0}=\cos x$$

№18. Розв'язати рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

якщо $u(0,t)=T,\quad u(l,t)=u,\quad u(x,0)=0$

№19. Знайти значення постійної k, для якої задана функція є гармонійною

$$\sin 3x_1 chkx_2$$

№20. Для заданого рівняння методом Даламбера знайти розв'язок, який відповідає початковим умовам, якщо

$$\frac{\partial u}{\partial t^2}=\frac{\partial u^2}{\partial x^2}\quad u\big/_{t=0}=\sin x\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big/_{t=0}=\cos x$$

№21. Розв'язати рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

якщо $u(0,t)=T,\quad u(l,t)=u,\quad u(x,0)=0$

№22. Знайти значення постійної k, для якої задана функція є гармонійною

$$\sin 3x_1 chkx_2$$

№ 23. Звести до канонічного виду рівняння

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0 .$$

Відповідь: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$.

№ 24. Звести до канонічного виду рівняння

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} + 2y u_y = 0$$

Відповідь: $u_{\xi\eta} = -\dfrac{1}{2\eta} u_{\xi}$.

№ 25. Знайти методом Даламбера розв'язок рівняння

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, початкові умови: $u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = x$.

Відповідь: $u(x,t) = x \cdot t$.

№ 26. Знайти методом Даламбера розв'язок рівняння

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6$, початкові умови: $u(x,0) = x^2,\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 4x$.

Відповідь: $u(x,t) = (x + 2t)^2$.

№ 27. Струна, закріплена на кінцях $x = 9,\ x = 4$, в початковій момент має форму $u(x,0) = h(x^4 - 2x^3 + x)$. Знайти форму струни для будь-якого моменту часу t, якщо початкові умови відсутні.

Відповідь: $u(x,t) = \dfrac{96h}{\pi^5} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^5} \cdot \cos(2k+1)at\pi \cdot \sin(2k+1)x\pi$.

№ 28. Розв'язати рівняння

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x(x - l) \cdot t^2$, при нулевих початкових і граничних умовах:

$u(0,t) = 0$; $u(l,t) = 0$.

Відповідь:

$$u(x,t) = -\frac{8l^4 t^2}{x^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \sin\frac{(2n+1)x\pi}{l} +$$

$$+\frac{16l^6}{\pi^7} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^7} \left(1 - \cos\frac{(2n+1)t\pi}{l}\right) \cdot \sin\frac{(2n+1)t\pi}{l}$$

№ 29. Знайти закон вільних коливань квадратної мембрани із стороною l, якщо у початковий момент її точкам надана швидкість $\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial t}=\frac{a}{50}$.

Початкове відхилення дорівнює нулеві. Мембрана закріплена у точках свого контуру.

Відповідь:

$$u(x,y,t)=\frac{8l}{25\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{kn\sqrt{k^2+n^2}}\sin\frac{a\pi}{l}\sqrt{k^2+n^2}\cdot t\cdot\sin\frac{kx\pi}{l}\cdot\sin\frac{ny\pi}{l}.$$

№ 30. Знайти закон вільних коливань квадратної мембрани із стороною 2, якщо початкове відхилення точок було u(x,y,0)=$\sin\frac{\pi x}{2}$, а початкова швидкість

$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=0.$$

Мембрана закріплена в точках свого контуру.

№ 31. Коливання мембрани визначається диференціальним рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

Знайти закон коливання мембрани, якщо вона прямокутна зі сторонами $\ell=1$ і $m=2$, точки контуру мембрани нерухомі і початкові умови:

u(x,y,0)=x

$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=x+2$$

№ 32. Знайти закон вільних коливань прямокутної мембрани зі сторонами ℓ і m, якщо коливання визначаються диференціальним рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

При початкових і граничних умовах

u(x,y,0)=2xy $\qquad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=\frac{x}{y}$

u(0,y,t) = u(ℓ,y,t) = u(x,m,t) = u(x,0,t)=0

№33. На кінцях стержня підтримується постійна температура $0^{\circ}c$. Довжина тепло ізольованого стержня $\ell=2$, a=const – коефіцієнт тепло ізольованості. Початкова температура u(x,0)=3x у всіх точках стержня. Знайти закон поширення температури в стержні.

№ 34. Дано тонкий однорідний стержень довжиною ℓ, ізольований від зовнішнього простору, початкова температура якого дорінвює

$$u(x,0)=\frac{x(\ell-x)}{\ell^2}$$

Кінці стержня підтримуються при температурі рівній нулеві. Знайти температуру стержня у довільний момент часу t.

№ 35. Дано тонкий однорідний стержень довжиною ℓ, з тепло ізольованою бічною поверхнею. Знайти розподіл температури в стержні, якщо на його кінцях x=0 і x=ℓ підтримується нульова температура, а початкова температура $u(x,0)=u_0-const$.

№ 36. Знайти розподіл температури в тонкому тепло ізольованому по бічній поверхні стержні довжиною ℓ. Температура стержня на кінцях $u(0,t)=m_1$ і $u(\ell,t)=m_2$, а початкова температура $u(x,0)=u_0$

№ 37. Визначити закон коливань прямокутної мембрани, якщо рівняння її записується так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

а початкові умови u(x,y,0)=10 $\qquad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=2x$

Мембрана закріплена по периметру нерухомо.

№ 38. Розв'язати диференціальне рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6,$$

якщо: u(x,0)=x^2; $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=4x$;

III частина. Завдання для контрольних робіт.

Контрольна робота на тему:

«Диференціальні рівняння з частинними похідними»

Варіант № 1.

1. Знайти функцію *z=z(x,y)*, яка задовольняє даному диференціальному рівнянню, якщо $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$

2. Перевірити чи є функція z (x,y) розвязком рівняння

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{2}{(x^2 + y^2 + x + y)^2} = 0$, якщо $z = \ln(x^2 + y^2 + x + y)$

3. Визначити тип рівняння і звести його до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2e^{x-y} = 0$$

4. Вздовж відповідних розв'язків *u(x,y)* визначити тип рівнянь

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 5\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + 6\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 = 12$$

$u = \sqrt{3}x^2$

Варіант № 2.

1. Знайти функцію *z=z(x,y)*, яка задовольняє даному диференціальному рівнянню, якщо $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

2. Перевірити чи є функція z (x,y) розвязком рівняння

$z = \frac{x + y + 1}{x^2}$, якщо $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + 2\frac{y+1}{x^3} = 0$

3. Визначити тип рівняння і звести його до канонічного вигляду

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = 0$$

4. Вздовж відповідних розв'язків *u(x,y)* визначити тип рівнянь

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 5\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + 6\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 = 12 \qquad u = \frac{1}{2}(x + y)^2$$

Контрольна робота на тему:
«Рівняння математичної фізики»

Варіант №1.

1. Розв'язати диференціальне рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin t,$$

якщо: u(x,0)=$\sin x$; $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \cos x$;

2. Знайти закон вільних коливань квадратної мембрани із стороною ℓ, якщо в початковий момент надана швидкість,

$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = \frac{a}{50},$$

а початкове відхилення дорівнює нулеві. Мембрана закріплена в точках свого контуру.

3. Дано тонкий однорідний стержень довжиною ℓ, бічна поверхня якого теплоізольована. Знайти розподіл температури u(x,t) в стержні, якщо на його кінцях температура підтримується

$$u(0,t)=u(\ell,t)=0,$$

а початкова температура стержня

$$u(x,0) = Ax(\ell - x)$$

Варіант №2.

1. Розв'язати диференціальне рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin t,$$

якщо: u(x,0)=0; $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 1$;

2. Знайти закон вільних коливань квадратної мембрани із стороною ℓ, якщо в початковий момент надана швидкість,

$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = \frac{a}{50},$$

а початкове відхилення дорівнює нулеві. Мембрана закріплена в точках свого контуру.

3. Дано тонкий однорідний стержень довжиною ℓ, бічна поверхня якого теплоізольована. Знайти розподіл температури u(x,t) в стержні, якщо на його кінцях температура підтримується

$$u(0,t)=u(\ell,t)=0,$$

а початкова температура стержня $u(x,0) = Ax(\ell - x)$

<u>IV частина . Контрольні індивідуальні завдання</u>

1 варіант

№1. Розв'язати елементарне диференціальне рівняння з частинними похідними.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = ye^{2y} + x3^y$$

№2. Визначити тип диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними і звести його до канонічного виду.

$$u_{xx} - x^2 u_{yy} + u_x = 0$$

№3. Розв'язати диференціальне рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin \omega t,$$

якщо: u(x,0)=x; $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 1$;

№4. Знайти закон вільних коливань квадратної мембрани із стороною ℓ, якщо в початковий момент їй надано швидкість $\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = \frac{a}{2}$.

Початкове відхилення дорівнює нулю. Мембрана закріплена в точках свого контуру нерухомо.

№5. Знайти розподіл температури u(x,t) в тонкому однорідному стержні $0 \le x \le \ell$, бічна поверхня якого тепло ізольована. На кінцях температура відповідно $u(0,t) = m_1$, $u(\ell,t) = m_2$, а початкова температура $u(x,0) = u_0$

2 варіант

№1. Розв'язати елементарне диференціальне рівняння з частинними похідними.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = xy - y^2 \ln x$$

№2. Визначити тип диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними і звести його до канонічного виду.

$$u_{xx} + 4u_{yy} - 2u_{xy} = 0$$

№3. Розв'язати диференціальне рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

якщо: u(x,0)=sinx; $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \cos x$;

№4. Знайти закон вільних коливань квадратної мембрани із стороною ℓ, якщо в початковий момент їй надано швидкість

$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = \frac{a}{2}.$$

Початкове відхилення дорівнює нулю. Мембрана закріплена в точках свого контуру нерухомо.

№5. Знайти розподіл температури u(x,t) в тонкому однорідному стержні $0 \le x \le \ell$, бічна поверхня якого тепло ізольована. На кінцях температура відповідно $u(0,t) = m_1$, $u(\ell,t) = m_2$, а початкова температура $u(x,0) = u_0$

3 варіант

№1. Розв'язати елементарне диференціальне рівняння з частинними похідними.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 4xy - \frac{x^2 \ln x}{y}$$

№2. Визначити тип диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними і звести його до канонічного виду.

$$3x^2 u_{xx} - 3u_{yy} + u_x = 0$$

№3. Розв'язати диференціальне рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

якщо: u(x,0)=$x^2 + 2x$; $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$; u(0,t)=0 u(4,t)=0

№4. Знайти закон вільних коливань квадратної мембрани із стороною 2 см, якщо в початковий момент надана швидкість,

$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = 3x,$$

а початкове відхилення дорівнює нулеві.Мембрана закріплена в точках свого контуру.

№5. Дано тонкий однорідний стержень довжиною ℓ, бічна поверхня якого теплоізольована. Знайти розподіл температури u(x,t) в стержні, якщо на його кінцях температура підтримується

$$u(0,t)=u(\ell,t)=0,$$

а початкова температура стержня

4 варіант

№1. Розв'язати елементарне диференціальне рівняння з частинними похідними.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y} = \sin y e^x - 2xy^2$$

№2. Визначити тип диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними і звести його до канонічного виду.

$$4u_{xx} - 2x\ u_{yy} + u_{xy} = 0$$

№3. Розв'язати диференціальне рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt,$$

якщо: u(x,0)=$\sin x$; $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = x$; u(0,t)=0 u(2,t)=0

№4. Знайти закон вільних коливань квадратної мембрани із стороною 2 см, якщо в початковий момент надана швидкість,

$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = 3x,$$

а початкове відхилення дорівнює нулеві. Мембрана закріплена в точках свого контуру.

№5. Знайти розподіл температури в тонкому теплоізольованому стержні довжиною ℓ, якщо на його кінцях температура підтримується

$$u(0,t)=u(\ell,t)=0,$$

а початкова температура стержня

$$u(x,0) = u_0 \frac{\ell - x}{\ell}$$

5 варіант

№1. Розв'язати елементарне диференціальне рівняння з частинними похідними.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = xy \sin x + xtgy$$

№2. Визначити тип диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними і звести його до канонічного виду.

$$u_{xx} - yu_{yy} = 0$$

№3. Розв'язати диференціальне рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x,$$

якщо: $u(x,0)=x^2$; $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \frac{x}{2}$; $u(0,t)=u(\ell,t)=0$

№4. Знайти закон вільних коливань прямокутної мембрани із сторонами 10 і 20см, якщо в початковий момент надана швидкість,

$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = \sin\frac{\pi x}{10},$$

а початкове відхилення було h_0. Точки контуру закріплені нерухомо.

№5. Знайти розподіл температури в тонкому теплоізольованому стержні довжиною ℓ, якщо на його кінцях температура підтримується

$$u(0,t)=u(\ell,t)=0,$$

а початкова температура стержня

$$u(x,0)=\frac{u_0}{\ell}(\ell-x)$$

6 варіант

№1. Розв'язати елементарне диференціальне рівняння з частинними похідними.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2^x y-\frac{y}{\sin x}$$

№2. Визначити тип диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними і звести його до канонічного виду.

$$x^2u_{xx}+y^2u_{yy}+2xyu_{xy}=0$$

№3. Розв'язати диференціальне рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

якщо: u(x,0)=x^2; $\quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=1$;

№4. Знайти закон вільних коливань прямокутної мембрани із сторонами 10 і 20см, якщо в початковий момент надана швидкість, а початкова швидкість $\dfrac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=\sin\dfrac{\pi x}{10}$,

а початкове відхилення було h_0. Точки контуру закріплені нерухомо.

№5. Знайти розподіл температури в тонкому теплоізольованому стержні довжиною ℓ, якщо на його кінцях температура підтримується

u(0,t)=u(ℓ,t)=0,

а початкова температура стержня

$$u(x,0)=\frac{u_0}{\ell}(x-\ell)$$

7 варіант

№1. Розв'язати елементарне диференціальне рівняння з частинними похідними.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-y^2+x\sin 5x$$

№2. Визначити тип диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними і звести його до канонічного виду.

$$u_{xx} - 4u_{yy} + u_{xy} + 6u_y - 2u_x = 0$$

№3. Розв'язати диференціальне рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin t,$$

якщо: u(x,0)=0; $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 2e^{3x}$;

№4. Знайти закон вільних коливань прямокутної мембрани із стороною 5см, якщо початкове відхилення точок було u(x,y,0)=h_0, а початкова швидкість

$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = \upsilon_0.$$

Мембрана закріплена в точках свого контуру.

№5. Дано тонкий теплоізольований стержень довжиною ℓ. Знайти розподіл температури в стержні, якщо на його кінцях температура підтримується $0^{\underline{0}} c$, а початкова температура стержня

$$u(x,0) = ax(l - x)$$

8 варіант

№1. Розв'язати елементарне диференціальне рівняння з частинними похідними.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = ytgx + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

№2. Визначити тип диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними і звести його до канонічного виду.

$$\frac{1}{x^2}u_{xx} + \frac{1}{y^2}\ u_{yy} = 0$$

№3. Розв'язати диференціальне рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3x,$$

якщо: u(x,0)=0; $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 3x^2 + 2$; u(0,t)=0 u(2,t)=0

№4. Знайти закон вільних коливань прямокутної мембрани із стороною 5см, якщо початкове відхилення точок було u(x,y,0)=h_0, а початкова швидкість

$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=\upsilon_0.$$

Мембрана закріплена в точках свого контуру.

№5. Дано тонкий теплоізольований стержень довжиною ℓ. Знайти розподіл температури в стержні, якщо на його кінцях температура підтримується $0^{\underline{0}} c$, а початкова температура стержня

$$u(x,0)=ax(l-x)$$

9 варіант

№1. Розв'язати елементарне диференціальне рівняння з частинними похідними.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=ye^{2y}-x3^y$$

№2. Визначити тип диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними і звести його до канонічного виду.

$$y^2u_{xx}+2x^2u_{yy}+2xyu_{xy}+yu_y=0$$

№3. Розв'язати диференціальне рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^2,$$

якщо: u(x,0)=$2x^2$; $\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$;

№4. Знайти закон вільних коливань прямокутної мембрани із сторонами ℓ і m, якщо початкове відхилення точок було u(x,y,0)=h_0, а початкова швидкість

$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=\upsilon_0\sin\frac{\pi y}{m}.$$

Мембрана закріплена в точках свого контуру.

№5. Дано тонкий теплоізольований стержень довжиною ℓ. Знайти розподіл температури в стержні, якщо на його кінцях температура підтримується $0^{\underline{0}} c$, а початкова температура стержня $u(x,0)=ax(l-x)$

10 варіант

№1. Розв'язати елементарне диференціальне рівняння з частинними похідними.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = -y^2 \ln x + \frac{x}{y}$$

№2. Визначити тип диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними і звести його до канонічного виду.

$$(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + yu_y + xu_x = 0$$

№3. Розв'язати диференціальне рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5t,$$

якщо: u(x,0)=0; $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \cos 3x$; u(0,t)=0 u($\ell$,t)=0

№4. Знайти закон вільних коливань прямокутної мембрани із сторонами ℓ і m, якщо початкове відхилення точок було u(x,y,0)=h_0, а початкова швидкість

$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = \vartheta_0 \sin\frac{\pi y}{m}.$$

Мембрана закріплена в точках свого контуру.

№5. На кінцях стержня підтримується постійна температура $0^{\underline{0}} c.$ Довжина тепло ізольованого стержня ℓ=2, a=const – коефіцієнт тепло ізольованості. Початкова температура u(x,0)=3x у всіх точках стержня. Знайти закон поширення температури в стержні.

ЛІТЕРАТУРА

1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969.-288 с.
2. Бицадзе А.В. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1977.- 224с.
3. Вища математика: Підручник: У 2 кн. – К.: Либідь, 2003. – Кн..2 Спеціальні розділи / За ред. Г.Л.Кулініча. – 368 с.
4. Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1974.-270 с.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967.-436 с.
6. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.II.- М.: Высшая школа, 1974.- С. 299-329.
7. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966.
8. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. - 712 с.
9. Линейные уравнения математической физики. Под ред. С.Г.Михлина. – М.: Наука, 1964. – 368 с.
10. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. – М.: Просвещение, 1988. – 256 с.
11. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968.-576 с.
12. Овчинников П.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник у 2-х ч. Ч.2. За заг. ред.. П.П.Овчинникова. – К.: Техніка, 2004. – 792 с.
13. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения (Примеры и задачи). – К.: Вища школа, 1984.-408 с.
14. Самойленко А.М. та інші. Диференціальні рівняння. – К., 2003.
15. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1970.-96 с.

Зміст

Навчальне видання

Петор Іванович Ульшин

Ірина Василівна Лов’янова

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Посібник