Міністерство освіти і науки України
Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького

Лов'янова І. В.

МОДУЛЬ ЧИСЛА.
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ

(матеріали для факультативних занять та курсів за вибором)
10 КЛАС

методичний посібник

Черкаси
2014

УДК 373.5.016:51
ББК 74.262

Рецензенти

І. А. Акуленко – доктор педагогічних наук, доцент, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького

А. М. Капіносов – кандидат педагогічних наук, доцент, Криворізький педагогічний інститут ДВНЗ «Криворізький національний університет»

Б. Й. Окунєв – вчитель математики СШ № 15, м. Черкаси

Рекомендовано до друку вченою радою Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького (протокол № 6 від 27 березня 2014).

Л 68 Лов'янова І. В.
Модуль числа. Розв'язування задач з параметрами (матеріали для факультативних занять та курсів за вибором). 10 клас / І. В. Лов'янова; за заг. ред. проф. Н. А. Тарасенкової. – Черкаси: видавець Чабаненко Ю. А. – 2014. – 92 с.
ISBN

Посібник містить матеріали для проведення факультативних занять або курсів за вибором. Посібник може бути використаний як в класах універсального профілю для проведення факультативних занять або курсів за вибором, так і учнями інших профілів для підготовки до ЗНО, самостійної роботи з вказаних тем, тощо.

Посібник призначений для вчителів математики ЗОШ, студентів вищих педагогічних навчальних закладів, аспірантів, учнів старшої школи.

УДК 373.5.016:51
ББК 74.262

ISBN

Зміст

ПЕРЕДМОВА

Концепцією профільного навчання в старшій школі визначено, що профільне навчання – вид диференційованого навчання, який передбачає врахування освітніх потреб, нахилів та здібностей учнів і створення умов для навчання старшокласників відповідно до їхнього професійного самовизначення, що забезпечується за рахунок змін у цілях, змісті та структурі організації навчання. Профіль навчання охоплює таку сукупність предметів: базові, профільні та курси за вибором. Базові загальноосвітні предмети є обов'язковими для всіх профілів. Профільні загальноосвітні предмети – це предмети, що реалізують цілі, завдання і зміст кожного конкретного профілю. Курси за вибором – це навчальні курси, які доповнюють навчальні предмети сприяють формуванню індивідуальної освітньої траєкторії школярів, орієнтують на усвідомлений та відповідальний вибір майбутньої професії.

Курси за вибором поглиблюють та розширюють основний курс математики відповідно допрофілю навчання, надають можливості для організації творчої роботи учнів через систему індивідуальних завдань професійної спрямованості. формою організації навчання, що дозволяє реалізувати не тільки математичну підготовку учнів, а також і процес формування якостей особистості, є курси за вибором (курси, що учні вибирають із запропонованого набору у відповідності зі своїми інтересами і потребами). Основна функція курсів за вибором – профорієнтаційна. Вимоги до організації вивчення курсів: їх достатня кількість для визначення напряму профільного навчання; поступове введення за рахунок годин варіативного освітнього компоненту; поділ класу на групи, однорідні за підготовленістю та інтересами учнів.

Н. В. Нємова у своєму дослідженні [10] уточнює типологію курсів за вибором для допрофільної підготовки, яка містить три основних види курсів: предметні (пробні), міжпредметні й орієнтуючі. Проведений аналіз специфіки курсів на вибір дозволив вибрати саме предметний і орієнтуючі курси для формування профільної орієнтації, оскільки зміст предметних курсів за вибором спрямовано на розширення знань учнів з математики; на розвиток інтересу до предмета; на уточнення готовності і здатності освоювати предмет на підвищеному рівні; на створення умов для підготовки до вибору найбільш ймовірних предметів майбутнього профілювання, у цих курсах яскравіше проглядаються змістовні і діяльнісні особливості профілю навчання. Одним із основних критеріїв сучасного профільного навчання є «предметний» підхід до диференціації. Виходячи з нього сьогодні у школах використовують навчальний план трикомпонентної структури: базові навчальні предмети, профільні предмети і курси за вибором.

Даний методичний посібник створено у відповідності із діючими програмами курсів за вибором та факультативів. Матеріали посібника містять теоретичний матеріал та системи задач для проведення занять курсів за вибором в класах універсального профілю з таких курсів «Модуль числа», «Розв’язування рівнянь з параметрами». Дібрано і систематизовано вправи для проведення занять в 10 класі. Переважна кількість завдань супроводжується розв’язаннями і поясненнями, що сприяє самостійній роботі учнів і просуванню в опануванні матеріалу у власному темпі. Посібник може бути використаний не лише в класах універсального профілю, а також і учнями інших профілів для підготовки до ЗНО, самостійної роботи з вказаних тем, тощо. Посібник складається з двох розділів, списку використаної та рекомендованої літератури, який також скомпонований у відповідності до розділів, додатків, які можуть стати у нагоді вчителю під час планування занять.

РОЗДІЛ 1. МОДУЛЬ ЧИСЛА

§1. Означення і основні властивості модуля

Абсолютним значенням числа a (позначається $|a|$) називається відстань від точки, яка зображує дане число a на координатній прямій, до початку відліку. З означення випливає, що

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

Властивості:

1) $|a| \geq 0$, 7) $|a+b| = |a| + |b| \leftrightarrow ab \geq 0$,

2) $|a| = |-a|$, 8) $|a| + |b| = a + b \leftrightarrow a \geq 0$ і $b \geq 0$,

3) $|a| \geq a$, 9) $|a-b| = |a| + |b| \leftrightarrow ab \leq 0$,

4) $|ab| = |a| \cdot |b|$, 10) $|a| - |b| \geq 0 \leftrightarrow a^2 - b^2 \geq 0$,

5) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$, 11) $|x| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < -a. \end{array}\right.$,

6) $|a+b| \leq |a| + |b|$, 12) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ або $\begin{cases} x < a, \\ x > -a. \end{cases}$.

§2. План вивчення теми «Модуль». Базисні задачі

6 клас.

Теми

1. Модуль числа.
2. Прямокутна система координат.
3. Додавання і віднімання раціональних чисел.
4. Ділення і множення раціональних чисел.
5. Розв'язування рівнянь.

Базисні задачі до кожної теми

1.1. а) Знайти число x, якщо $|x| = 7, |x| = -3, |x| = 0$.

б) Розв'язати рівняння $|x-1| = 4$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x - 1 = 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 < 0, \\ x - 1 = -4. \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Відповідь: -3;5.

За означенням модуля $x - 1 = 4$ або $x - 1 = -4$. $x = 5$ або $x = -3$.

Перевірка $|5-1| = |4| = 4, |-3-1| = |-4| = 4$.

2.1. Де на координатній площині лежать точки, координати яких задовольняють умову:

а) $|x| = 0$ і $|y| > 10$; b) $y \le 0$ і $|x| > 10$; c) $|x| < 1$ і $y > 0$?

Розв'язання: (рис. 1).

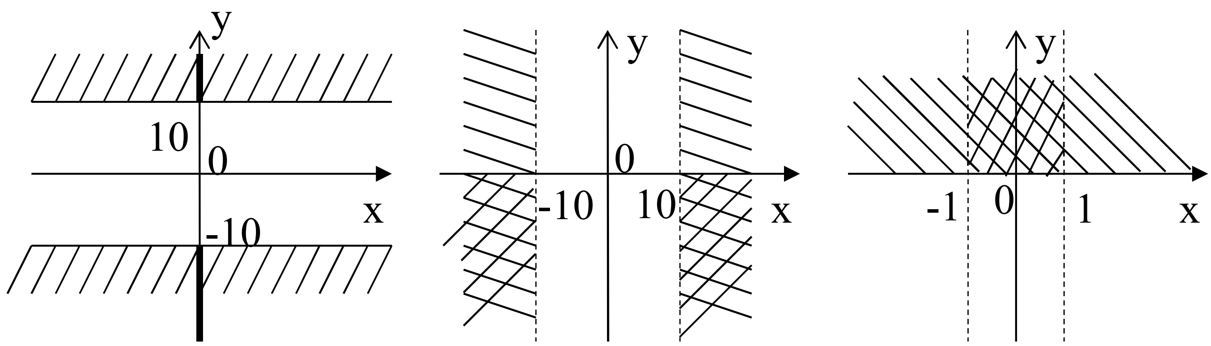

Рис. 1

3.1. а) Виконати дії $\left|-11\frac{3}{11}\right| - \left|5\frac{3}{5}\right| + \left|2\frac{8}{11}\right| - (-16{,}6)$.

Розв'язання: $11\frac{3}{11} - 5\frac{3}{5} + 2\frac{8}{11} - \left(-16{,}6\right) = 14 - 5\frac{3}{5} - \left(-16{,}6\right) =$

$= 14 - 5{,}6 - (-16{,}6) = 14 + 11 = 25$

б) Розв'язати рівняння і зробити перевірку $y - |-3{,}5| = -5$.

Розв'язання: $y - 3{,}5 = -5;\ y = -5 + 3{,}5;\ y = -1{,}5.$

4.1. а) Обчислити $|a : b|\,|a| : |b|$,

якщо $a = -42\ b = 7;\ a = 56{,}1\ b = -85;\ a = 60\ b = -12.$

Розв'язання: $a : b = -6; |-6| = 6; |-42| = 42; |7| - 7; |a| : |b| = 6.$

Два інших – аналогічно.

б) При яких натуральних значеннях x справджується нерівність

$|-13|\,x \ge |-3{,}9|; 13x \ge 3{,}9; x \ge 3{,}9 : 13; x \ge 0{,}3;$ при всіх $x \in N$.

$|-2{,}5|\,x > |-10;|\ 2{,}5x > 10; x > 4;$ при $x \in N, x = 5, ...$

7 клас.

Теми

1. Вирази зі змінними.
2. Лінійні рівняння з однією змінною.
3. Лінійна функція та її графік.

Базисні задачі до кожної теми

1.1. а) Записати вираз без знака модуля $|x - 2|, 3|x + 2|, |x^2 - x|$.

Розв'язання: За означенням модуля маємо:

$$|x-2|=\begin{cases} x-2, & x-2\ge 0 \\ -(x-2), & x-2<0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x-2, x\ge 2, \\ 2-x, x<2. \end{cases}$$

$$3|x+2|=\begin{cases} 3(x+2), & x+2\ge 0, \\ -3(x+2), & x+2<0. \end{cases}$$

$$|x^2-x|=\begin{cases} x^2-x, & x^2-x\ge 0, \\ -(x^2-x), & x^2-x<0. \end{cases}$$

б) При яких значеннях x правильна рівність $|x|=x$ і $-x=|x|$?

$|x|=x$ при $x\ge 0$.

$|-x|=-x$ при $|-x|=|-1|\cdot|x|=|x|=-x, x<0$. Отже $-x=|x|$ при $x<0$.

2.1. а) Чи мають коріння рівняння?

$|x|=0-$ так, $|x|=1-$ так, $|x|=-3-$ ні,

$|-x|=2-$ так, $|x+2|=3-$ так, $|x|+3=7-$ так.

б) Чи рівносильні рівняння?

$x+1,5=0$ і $|x+1,5|=0-$ так.

$(x+4)(x-4)=0$ і $|x|=4-$так.

$(x+3)(x-4)=0$ і $|x|-4=0-$ні.

в) Яке з рівнянь рівносильне рівнянню $4x-10=-1$:

а) $2x+1,5=6$ (Вірно), б) $|x|=2\frac{1}{4}$, в) $-6x+1,5=15$?

3.1. Побудувати графік функції:

а) $y=|x|$

$$y=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$ (рис. 2).

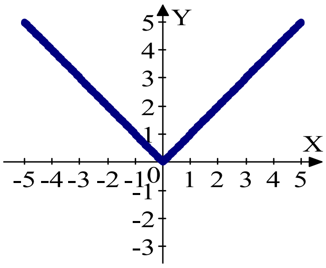

Рис. 2

б) $y=3|x+2|-1$,

$x+2=0, x=-2$.

1) $\begin{cases} x\ge -2, \\ y=3(x+2)-1=3x+5, \end{cases}$

2) $\begin{cases} x<-2, \\ y=-3(x+2)-1=-3x-7 \end{cases}$ (рис. 3).

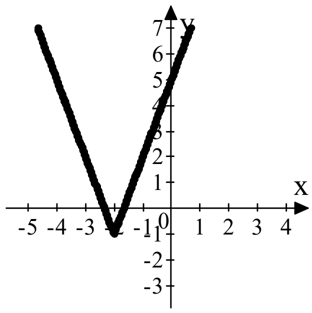

Рис. 3

8 клас.

Теми

1. Розв’язування квадратних рівнянь.
2. Розв’язування нерівностей з однією змінною.
3. Розв’язування системи нерівностей з однією змінною.

Базисні задачі до кожної теми

1.1. Розв’язати рівняння $x^2-5|x|+6=0.$

Іспосіб:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x^2-5x+6=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ x^2+5x+6=0,\end{cases}\end{array}\right.$$

$x^2-5x+6=0$ $D=1$ $x_1=2,$ $x_2=3;$ $x^2+5x+6=0$ $D=1$ $x_1=-2,$ $x_2=-3.$ Відповідь: –2; –3; 2; 3.

ІІспосіб:

$|x|=t,\ x^2=\left|x^2\right|=|x|^2,\ t^2-5t+6=0,\ D=25-24=1,\ t_1=2,\ |x|=2,$ $x=\pm 2;\ t_2=3,\ |x|=3,\ x=\pm 3.$ Відповідь: –3; –2; 2; 3.

2.1. Розв’язати нерівності:

а) $|x|<1.$ За властивістю модуля: $\begin{matrix}|x|>a,\\ |x|<a,\end{matrix}$ $-1<x<1,\ x\in(-1;1).$ б) $|x|\le 5,\ -5\le x\le 5,\ [-5;5].$

в) $|x|\ge 3.3,\ \left[\begin{array}{l}x\ge 3.3,\\ x\le -3.3,\end{array}\right.$ $(-\infty;-3.3]\cup[3.3;+\infty).$

г) $|x|>2,\ \left[\begin{array}{l}x>2,\\ x<-2,\end{array}\right.$ $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty).$

3.1. Розвязати систему: $\begin{cases}|x-1|\ge 1,\\ |x|\le 3,\end{cases}$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-1\ge 1,\\ x-1\le -1,\end{array}\right.\\ -3\le x\le 3,\end{cases}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 2,\\ x\le 0,\end{array}\right.\\ -3\le x\le 3,\end{cases}$$

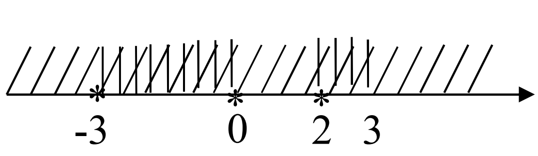

Рис. 4

$x\in[-3;0]\cup[2;3]$ (рис. 4).

9 клас.

Теми

1. Функція та її властивості.
2. Побудова графіка квадратичної функції.
3. Розв'язування лінійних рівнянь та нерівностей, що містять модуль.
4. Розв'язування нерівностей другого ступеня з однією змінною.
5. Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних.
6. Розв'язування системи рівнянь другого ступеня графічним способом.
7. Парні та непарні функції.

Базисні задачі до кожної теми

1.1. Розглянути графік і властивості функції $y=|x|$.

2.1. Побудувати графік функції

$$y=x^2-4|x|+3.$$

$$y=\begin{cases} x^2-4x+3, \; x\ge 0, \\ x^2+4x+3, \; x<0, \end{cases}$$ (рис. 5).

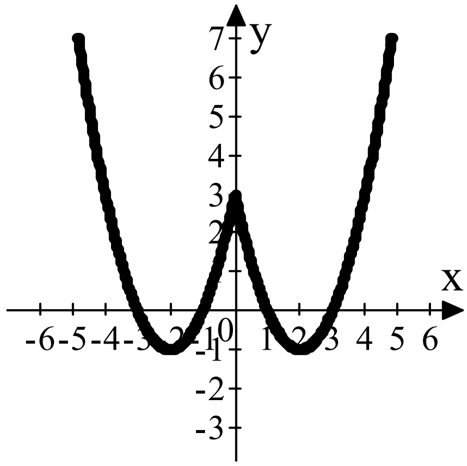

Рис.5

3.1. а) Розв'язати рівняння $|5-x|+|x-1|=10$.

б) Розв'язати нерівність $|x-1|+|x+1|<4$.

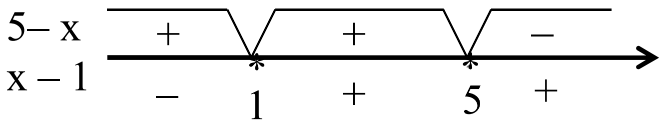

Рис. 6

Розв'язання:

а) $|5-x|+|x-1|=10, 5-x=0, \quad x=5, x-1=0, x=1$ (рис. 6).

При $x<1$; $5-x-x+1=10$; $-2x=4$; $x=-2$.

При $1\le x\le 5$; $5-x+x-1=10$; $4\ne 10$; $\emptyset$.

При $x>5$; $x-5+x-1=10$; $2x=16$; $x=8$.

Відповідь: –2; 8.

б) $|x-1|+|x+1|<4$,

І спосіб

$x-1=0, \qquad x+1=0$

$x=1, \; x=-1$ (рис. 7).

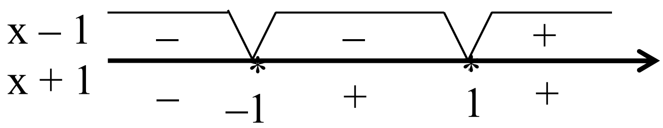

Рис. 7

При $x < -1,\ 1 - x - x - 1 < 4, -2x < 4,\ x > -2.$ Тоді $-2 < x < -1$.

При $-1 \le x \le 1,\ 1 - x + x + 1 < 4,\ 2 < 4.$ Тоді $-1 \le x \le 1$.

При $x > 1, x - 1 + x + 1 < 4,\ 2x < 4,\ x < 2.$ Тоді

Відповідь: $x \in (-2;-1) \cup [-1;1] \cup (1;2), \quad x \in (-2;2)$.

II спосіб.

Побудуємо графіки функцій (рис. 8) $y = |x-1| + |x+1|, \quad y = 4$. Відповідь: $x \in (-2;2)$

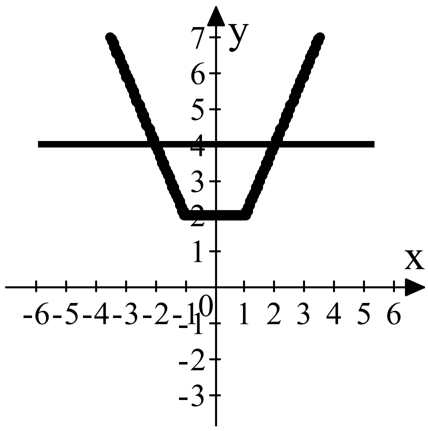

Рис. 8

4.1. На основі властивості модуля $\begin{array}{l} |x| < a \\ |x| > a \end{array}$ розв'язати нерівності:

а) $|x^2 + 5x| < 6$,

б) $|x - 6| > x^2 - 5x + 9$.

На основі означення модуля розв'язати нерівність: $x^2 - 5|x| + 6 < 0$.

Розв'язання:

а) $-6 < x^2 + 5x < 6 \begin{cases} x^2 + 5x < 6 \\ x^2 + 5x + 6 > 0 \end{cases}, \begin{cases} -6 < x < 1 \\ \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x > -2 \end{array} \right. \end{cases}$, (рис. 9).

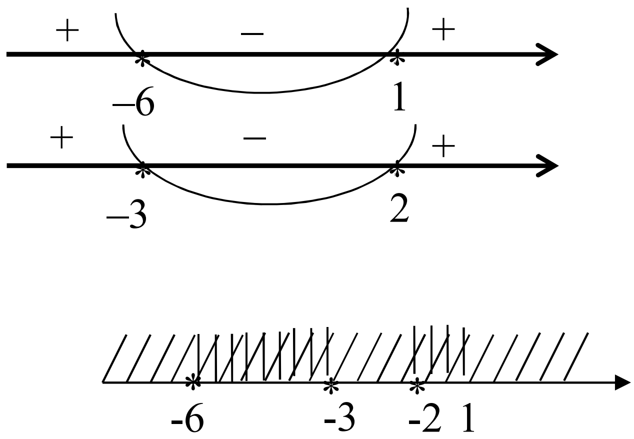

Рис. 9

б) $|x - 6| > x^2 - 5x + 9$,

$$\left[\begin{array}{l} x - 6 > x^2 - 5x + 9, \\ x - 6 < -x^2 + 5x - 9, \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + 15 < 0, \\ x^2 - 4x + 3 < 0, \end{array} \right. x \in (1;3).$$

в) $x^2-5|x|+6<0,$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-5x+6<0\end{cases} \quad (2;3)\\ \begin{cases}x<0\\ x^2+5x+6<0\end{cases} \quad (-3;-2)\end{array}\right. \qquad x\in(-3;2)\cup(2;3).$$

5.1. Розв’язати рівняння: $|x^2-1|+|x^2+3x+2|+|x+1|=0.$

Розв’язання:

$$\begin{cases}|x^2-1|=0\\ |x^2+3x+2|=0\\ |x+1|=0\end{cases}, \begin{cases}x=\pm 1\\ \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=-1\end{array}\right.\\ x=-1\end{cases}.$$ Відповідь: $x=-1$.

5.2. Розв’язати рівняння: $(x^2-3|x|)^2-2(x^2-3|x|)-8=0.$

Розв’язання: заміна $x^2-3|x|=y,$ тоді $y^2-2y-8=0,$ $D=4+32=36;\ y_1=4,\quad y_2=-2.$

$$\left[\begin{array}{l}x^2-3|x|=4\\ x^2-3|x|=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll}\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-3x-4=0\end{cases} & \begin{cases}x\ge 0\\ x=-1,\ x=4\end{cases} & \\ \begin{cases}x<0\\ x^2+3x-4=0\end{cases} & \begin{cases}x<0\\ x=1,\ x=-4\end{cases} & \begin{array}{l}x=4\\ x=-4\end{array}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ x^2-3x+2=0\end{cases} & \begin{cases}x\ge 0\\ x=1,\ x=2\end{cases} & \begin{array}{l}x=1,\ x=2\\ x=-1,\ x=-2\end{array}\\ \begin{cases}x<0\\ x^2+3x+2=0\end{cases} & \begin{cases}x<0\\ x=-1,\ x=-2\end{cases} & \end{array}\right..$$

Відповідь: –4; –2; –1; 1; 2; 4.

10 клас.

Теми

1. Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу.
2. Тригонометричні функції числового аргументу.
3. Тригонометричні рівняння та нерівності.

4. Розв’язування нерівностей методом інтервалів.
5. Парні та непарні функції. Періодичність.
6. Функції та їх графіки.
7. Графіки тригонометричних функцій.
8. Властивості функцій.

Базисні задачі до кожної теми

1.1. Довести тотожність $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=2\operatorname{ctg}\alpha.$

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}.$$

$$-\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}=\left|\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right|-\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=2\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=2\operatorname{ctg}\alpha.$$ Доведено.

3.1. Розв’язати рівняння: а) $|\cos 2x|-\sin 2x-1$. б) $\dfrac{|\sin x|}{\sin x}=2\cos x+1.$

Розв’язання:

а) Оскільки $\sin 2x\le 1, 1+|\cos 2x|\ge 1,$ то рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases}\sin 2x=1\\ \cos 2x=0\end{cases},\ \begin{cases}2x=\dfrac{\pi}{2}+2r\pi,\ r\in z\\ 2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in z\end{cases},\ \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+\pi r,\ r\in z\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in z\end{cases}.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{4}+\pi r,\ r\in z.$

б) $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in z.$

11 клас.

Теми

1. Модуль. Властивості модуля.
2. Ірраціональні, показникові і логарифмічні рівнянняі нерівності.

Базисні задачі до кожної теми

2.1. Розв’язати рівняння:

а) $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$, б) $25^{|1-2x|}=5^{4-6x}$,

в) $\left|\frac{x}{2}-1\right|^{x^2-6x+8}=1$, г) $\left|\log_2|x|\right|-\frac{1}{2}\left(|x+3|+|x-3|\right)=4$,

д) $\log_2\left(\frac{1}{|x-1|-1}\right)=1$.

Розв'язання:

а) $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$,

$\sqrt{x+1-4\sqrt{x+1}+4}=\sqrt{x+1-2\sqrt{x+1}+1}$,

$\sqrt{\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}$, $\left|\sqrt{x+1}-2\right|=\left|\sqrt{x+1}-1\right|$.

Розглянемо три випадки:

1: $\sqrt{x+1}<1$, коренів немає.

2:$1\le\sqrt{x+1}<2$.

3: $\sqrt{x+1}\ge 2$, коренів немає.

Другий випадок: $2-\sqrt{x+1}=\sqrt{x+1}-1$, $\sqrt{x+1}=1.5$, $x+1=2.25$, $x=1.25$. Відповідь: 1,25.

б) $x=0,6$.

в) $\left|\frac{x}{2}-1\right|^{x^2-6x+8}=1$. Розглянемо два випадки:

1) $\begin{cases}\left|\frac{x}{2}-1\right|\neq 1\\ \left|\frac{x}{2}-1\right|\neq 0\\ x^2-6x+8=0\end{cases}$, $\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 4\\ x\neq 2\\ \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=2\end{array}\right.\end{cases}$, $\varnothing$.

2) $\left|\frac{x}{2}-1\right|=1$, $x=1$, $x=4$. Оскільки $1^n=1$ для будь-якого $n\in R$, то ці значення є коренями рівняння. Відповідь: 0; 4.

г) $\left|\log_2|x|\right|-\frac{1}{2}\left(|x+3|+|x-3|\right)=4$, (рис. 10).

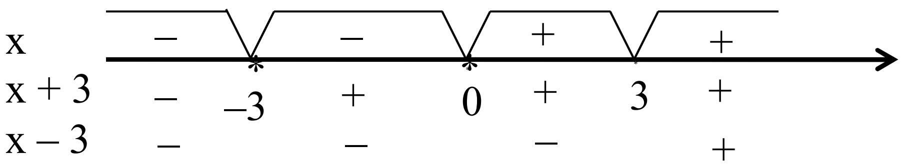

Рис. 10

1) $\begin{cases} x < -3 \\ \left|\log_2(-x)\right| - \dfrac{1}{2}(-x-3-x+3) = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} x < -3 \\ 2^{4-x} = -x \end{cases}$, $\varnothing$.

2) $\begin{cases} -3 \le x < 0 \\ \left|\log_2(-x)\right| - \dfrac{1}{2}(x+3-x+3) = 4 \end{cases}$, $\left|\log_2(-x)\right| = 7$,

$\left[\begin{array}{l} \log_2(-x) = -7 \\ \log_2(-x) = 7 \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} x = -128 \\ x = -\dfrac{1}{128} \end{array}\right.$, $x = -\dfrac{1}{128}$.

3) $\begin{cases} 0 < x < 3 \\ \left|\log_2(x)\right| - \dfrac{1}{2}(x+3-x+3) = 4 \end{cases}$, $\left|\log_2 x\right| = 7$, $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = -7 \\ \log_2 x = 7 \end{array}\right.$,

$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{128} \\ x = 128 \end{array}\right.$, $x = \dfrac{1}{128}$.

4) $\begin{cases} x \ge 3 \\ \log_2 x - \dfrac{1}{2}(x+3+x-3) = 4 \end{cases}$, $\log_2 x = x+4$, $2^{x+4} = x$, $\varnothing$.

Відповідь: $-\dfrac{1}{128}; \dfrac{1}{128}$.

д) $x = 2,5,\ x = -0,5$.

2.2. Розв’язати нерівності:

а) $\left|x+1\right|^{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}} < 1$, б) $\left|2^{4x^2-1} - 5\right| \le 3$. в) $\lg\left(3^{\sqrt{\left|\frac{x(x-4)}{x-3}\right|}} + 1\right) \ge 1$.

г) $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_x \left(\left|8x^2 - 16x + 6\right|\right) > 0$.

Розв’язання:

а) $\left|x+1\right|^{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}<1$. $\left|x+1\right|\neq 1$. $\begin{cases} 0<\left|x+1\right|<1 \\ x^2-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<x<-1 \\ \ 1<0<0 \\ \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$

в цьому випадку $x\in(-2;-1)\cup(-1;0)$.

$\begin{cases} \left|x+1\right|>1 \\ x^2-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}<0 \end{cases}$, $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-2 \end{array}\right. \\ 1<x<\dfrac{3}{2} \end{cases}$, $x\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Відповідь: $(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(1;1,5)$.

б) $\left[-1;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right]$.

в) $3^{\sqrt{\left|\frac{x(x-4)}{x-3}\right|}}\geq 9$, $\sqrt{\left|\dfrac{x(x-4)}{x-3}\right|}\geq 2$, $\left|\dfrac{x(x-4)}{x-3}\right|\geq 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x(x-4)}{x-3}\geq 4 \\ \dfrac{x(x-4)}{x-3}\leq -4 \end{array}\right.$,

$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-8x+12}{x-3}\geq 0 \\ \dfrac{x^2-12}{x-3}\leq 0 \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} [2;3)\cup[6;+\infty) \\ \left(-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left(3;2\sqrt{3}\right] \end{array}\right.$.

Відповідь: $\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup[2;3)\cup\left(3;2\sqrt{3}\right)\cup[6;+\infty)$.

г) $\log_{\frac{1}{2}}\log_2\log_x\left(\left|8x^2-16x+6\right|\right)>0$.

ОДЗ: $x\neq\dfrac{1}{2}$, $x\neq\dfrac{3}{2}$, $x\neq 1$. $0<\log_2\log_2\left(\left|8x^2-16x+6\right|\right)<1$,

$1<\log_x\left(\left|8x^2-16x+6\right|\right)<2$, $\log_x x<\log_x\left(\left|8x^2-16x+6\right|\right)<\log_x x^2$.

Якщо $x \in \left(0;\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};1\right)$ маємо систему. $\begin{cases} \left|8x^2-16x+6\right| < x \\ \left|8x^2-16x+6\right| > x^2 \end{cases}$,

$$\begin{cases} -x < 8x^2-16x+6 < x \\ \left[\begin{array}{l} 8x^2-16x+6 > x^2 \\ 8x^2-16x+6 < -x^2 \end{array}\right. \end{cases}, \quad \begin{cases} 8x^2-15x+6>0 \\ 8x^2-17x+6<0 \\ \left[\begin{array}{l} 7x^2-16x+6>0 \\ 9x^2-16x+6<0 \end{array}\right. \end{cases},$$

$$\begin{cases} \left(X-\frac{15-\sqrt{33}}{16}\right)\left(X-\frac{15+\sqrt{33}}{16}\right)>0 \\ \left(X-\frac{17-\sqrt{97}}{16}\right)\left(X-\frac{17+\sqrt{97}}{16}\right)<0 \\ \left[\begin{array}{l} \left(X-\frac{8-\sqrt{22}}{7}\right)\left(X-\frac{8+\sqrt{22}}{7}\right)>0 \\ \left(X-\frac{8-\sqrt{10}}{9}\right)\left(X-\frac{8+\sqrt{10}}{9}\right)<0 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Відповідь: $x \in \left(\frac{17-\sqrt{97}}{16};\frac{8+\sqrt{22}}{7}\right) \cup \left(\frac{8-\sqrt{10}}{9};\frac{15-\sqrt{33}}{16}\right)$.

Завдання для факультативних занять

6 клас.

1. Показати на числовій прямій множину розв’язків рівняння або нерівності: а) $|x|=2$, б) $|-x|=2$, в) $|x|<5$, г) $|x|\ge 5$, д) $|x|\le 2$.
2. Скільки розв’язків (залежно від значення α) може мати рівняння: а) $|x+3|+|x-5|=\alpha$, б) $|x-2|-|x-4|=\alpha$, в) $|x+1|-|x+3|=\alpha$?

7 клас.

3. Знайти найменше можливе значення для кожної із сум: а) $|x-2|+|x-4|$, б) $|x+2|+|x|+|x-3|$.

9 клас.

4. Знайти область визначення функції, заданою формулою:

$$y=\sqrt{3-|x-1|}-\frac{2}{x^2-1}.$$

5. Знайти область значення функції а) $f(x)=\left|x^2+x-2\right|$,

   б) $f(x)=\dfrac{2}{|x|}-1$.

6. Побудувати графіки функцій та відношень: $|y|=-x^2-3x+10$.

7. При яких значеннях аргументу x значення $f(x)$ перетворюється в нуль; набуває додатних значень, від'ємних значень $y=x(x-2)(|x|+2)(x-3)^2$?

8. Розв'язати нерівності: а) $|x-6|>x^2-5x+9$,

   б) $|x-6|>\left|x^2-5x+9\right|$.

9. Розв'язати рівняння $|x|+x^3=0$.

10 клас.

10. В яких чвертях може закінчуватися кут α, якщо:

    а) $\left|\cos|-\alpha|\right|=-\cos\alpha$, б) $|\operatorname{ctg}\alpha|=\operatorname{ctg}\alpha$, в) $|\sin\alpha|=-\sin\alpha$,

    г) $|\operatorname{tg}(-\alpha)|=-\operatorname{tg}\alpha$?

11. Розв'язати рівняння (нерівність): а) $2\cos x+4\sin x=\sin|x|$,

    б) $\sin\left|x-\dfrac{\pi}{4}\right|+\sin\left|x+\dfrac{\pi}{4}\right|>1$, в) $|\sin x|+|\cos x|>1$.

11 клас.

12. Розв'язати рівняння:

    а) $\sqrt{4\cos^4 x-6\cos 2x+3}+\sqrt{4\sin^4 x+6\cos 2x+3}=4\cos x$,

    б) $\left|3^{\operatorname{tg}\pi x}-3^{1-\operatorname{tg}\pi x}\right|\ge 2$,

    в) $\log_3\left(\sqrt{x}+\left|\sqrt{x}-1\right|\right)=\log_9\left(4\sqrt{x}-3+4\left|\sqrt{x}-1\right|\right)$.

§3. Методи розв'язування рівнянь та нерівностей, що містять знак модуля

3.1. Розв'язання рівнянь виду $|f(x)|=|g(x)|$

Оскільки $|a|=|b|$, якщо $a=\pm b$, то

$$|f(x)|=|g(x)|\Leftrightarrow f(x)=\pm g(x)\Leftrightarrow f^2(x)-g^2(x)=0.$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $|x-2|=|2x-1|$.

Розв'язання. Маємо $x-2=2x-1$ або $x-2=-2x+1$. Корінь першого рівняння $x=-1$, а другого $x=1$. Отже, $x=\pm 1$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\left|\sin x+\cos x\right|=2\left|\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right|$.

Розв'язання. Дане рівняння розпадається на два: $\sin x+\cos x=2\sin x-\cos x, \sin x+\cos x=-2\sin x+\cos x$. Розв'язання першого рівняння $x=\operatorname{arctg}2+\pi n, n\in Z$, а другого $x=\pi r, r\in Z$. Відповідь: $\operatorname{arctg}2+\pi n, n\in Z$ і $x=\pi r, r\in Z$.

Вправи

Розв'язати рівняння:

1. $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=2.$
2. $\left|x^3+x+1\right|=1.$
3. $\left|\frac{|x-2|}{1-|x-2|}\right|=3.$
4. $\left|x^2-x-2\right|=\left|2x^2-x-1\right|.$
5. $\left|3-\left|2-\left|1-x\right|\right|\right|=2.$
6. $\left|\sin^2 x-\sin x\right|=\left|\cos^2 x-\cos x\right|.$

3.2. Розв'язання рівнянь виду $\left|f(x)\right|=g(x)$

Вкажемо два прийоми розв'язання цих рівнянь.

1. Рівняння $\left|f(x)\right|=g(x)$ має корні, коли $g(x)\geq 0$. Отже, $\left|f(x)\right|=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=\pm g(x),\\ g(x)\geq 0.\end{cases}$ Тому достатньо розв'язати два рівняння $f(x)=g(x), f(x)=-g(x)$, і для знайдених значень x перевірити справедливість нерівності $g(x)\geq 0$.

2. Оскільки $\left|f(x)\right|=f(x)$, якщо $f(x)\geq 0$, і $\left|f(x)\right|=-f(x)$, якщо $f(x)<0$, то рівняння $\left|f(x)\right|=g(x)$ рівносильне кожній із наступних систем: $\begin{cases}f(x)\geq 0\\ f(x)=g(x)\end{cases}$ або $\begin{cases}f(x)<0,\\ f(x)=-g(x).\end{cases}$ У першій системі, розв'язавши рівняння $f(x)=g(x)$, для знайдених коренів треба перевірити виконання умови $f(x)\geq 0$. Аналогічні міркування приводять і для другої системи.

Зауваження. Можна розв'язати рівняння $f(x)=g(x)$ і $f(x)=-g(x)$ і корні кожного з них перевірити підстановкою в рівняння $|f(x)|=g(x)$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\left|x^3+3x^2+x\right|=-x+x^3$.

Розв'язання. Тут скористаймося першим прийомом. Розв'яжемо рівняння $x^3+3x^2+x=-x+x^3$ і $x^3+3x^2+x=x-x^3$. Перше з них має корені $-\frac{2}{3}$ і 0, а друге – 0 і $-\frac{3}{2}$. Легко побачити, що умова $x^3-x\geq 0$ виконується лише при $x=0$ і при $x=-\frac{2}{3}$ Отже, – $-\frac{2}{3}$ і 0 – корені рівняння.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\left|\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. Для розв'язання цього рівняння скористаймося другим прийомом. Дане рівняння рівносильне кожній із наступних систем: $\begin{cases}\sin x\geq\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x-\cos x=0\end{cases}$ або $\begin{cases}\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x+\cos x-\sqrt{2}=0.\end{cases}$

Рівняння $\sin x-\cos x=0$ має серію розв'язань $x=\frac{\pi}{4}+\pi r,\ r\in Z,$ але, за умовою, $\sin x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$ задовольняють лише значення $x=\frac{\pi}{4}+2\pi m,\ m\in Z.$ Друга ж система розв'язків не має.

Відповідь: $\frac{\pi}{4}+2\pi m,\ m\in Z.$

Вправи

Розв'язати рівняння:

7. $|3x-1|+2x=4.$ 9. $|\sin 2x|=\cos x.$ 11. $\left||x|-2\right|=1-2x.$

8. $\left|\frac{x-1}{x-2}\right|=x.$ 10. $\left|x^3-3x\right|=x^2-2x.$

3.3. Розв'язання рівнянь виду $|f_1(x)|+|f_2(x)|+\ldots+|f_n(x)|=g(x)$

Розглянемо тепер рівняння, що містять знак модуля, розв'язання яких ґрунтується на визначенні поняття модуля числа $a:|a|=a,$ якщо $a\geq 0, |a|=-a,$ коли $a<0.$ Нехай дано рівняння

$\left|f_1\left(x\right)\right|+\left|f_2\left(x\right)\right|+...+\left|f_n\left(x\right)\right|=a,$ де $f_i(x)$ – функції; зокрема, це можуть бути многочлени, дробово-раціональні функції тощо. Для кожної із цих функцій знаходять область визначення, її нулі і точки розриву. Нулі й точки розриву розбивають загальну область визначення функції $f_i(x)\left(i=1,2,...,n\right)$ на проміжки, в кожному з яких кожна з функцій $f_i(x)$ зберігає постійний знак. Далі, використовуючи означення модуля, для кожної із знайдених областей отримаємо рівняння, яке треба розв'язати.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $2\left|x-2\right|-3\left|x+4\right|=1.$

Розв'язання. Для звільнення від знаків модуля розіб'ємо числову пряму на три проміжки: $x\le -4,\ -4<x\le 2,\ x>2.$

Розв'язування даного рівняння зводиться до розв'язування трьох систем:

1) $\begin{cases} x\le -4, \\ -2x+4+3x+12=1; \end{cases} \begin{cases} x\le -4, \\ x=-15; \end{cases}$ –15 – корінь даного рівняння.

2) $\begin{cases} -4<x\le 2, \\ -2x+4-3x-12=1; \end{cases} \begin{cases} -4<x\le 2, \\ x=-1,8; \end{cases}$ –1,8 – корінь даного рівняння.

3) $\begin{cases} x>2, \\ 2x-4-3x-12=1; \end{cases} \begin{cases} x>2, \\ x=-17; \end{cases}$ система не має розв'язків.

Відповідь: –15; – 1,8

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\left|x^2-x\right|+\left|x-2\right|=x^2-2.$

Розв'язання. Тут для звільнення від знаків модуля відмітимо на числовій прямій три числа: 0, 1, 2. Для знаходження коренів цього рівняння потрібно розв'язати чотири системи:

1) $\begin{cases} x\le 0, \\ x^2-x-x+2=x^2-2; \end{cases} \begin{cases} x\le 0, \\ x=2; \end{cases}$ система не має розв'язків.

2) $\begin{cases} 0<x\le 1, \\ -x^2+x-x+2=x^2-2; \end{cases} \begin{cases} 0<x\le 1, \\ x=\pm\sqrt{2}; \end{cases} \emptyset.$

3) $\begin{cases} 1<x\le 2, \\ x^2-x-x+2=x^2-2; \end{cases}$ звідки $x=2;$

4) $\begin{cases} x > 2, \\ x^2 - x + x - 2 = x^2 - 2; \end{cases}$ звідки $x > 2$.

Відповідь: $\left[2;+\infty\right)$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| - \left|\cos x - \frac{1}{2}\right| = 1$.

Розв'язання. Спочатку будемо шукати розв'язання рівняння на проміжку довжини 2π. На колі одиничного радіуса треба відмітити числа $-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}$. Розв'язання даного рівняння зводиться до розв'язання чотирьох систем:

1) $\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{6}, \\ -\sin x + \frac{1}{2} - \cos x + \frac{1}{2} = 1; \end{cases}$ звідки $x = -\frac{\pi}{4}$;

2) $\begin{cases} \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{3}, \\ \sin x - \frac{1}{2} - \cos x + \frac{1}{2} = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{3}, \\ x = \pi,\ x = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $\emptyset$.

3) $\begin{cases} \frac{\pi}{3} < x \le \frac{5\pi}{6}, \\ \sin x - \frac{1}{2} + \cos x - \frac{1}{2} = 1; \end{cases}$ $\emptyset$.

4) $\begin{cases} \frac{5\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{3}, \\ -\sin x + \frac{1}{2} + \cos x - \frac{1}{2} = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{5\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{3}, \\ \cos x - \sin x = 1, \end{cases}$ звідки $x = \frac{3\pi}{2}$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad m, n \in Z$.

Вправи

Розв'язати рівняння:

12. $|5 - 3x| = 2x + 1$.

13. $|3x - 8| - |3x - 2| = 6$.

14. $|2x + 7| - 2|3x - 1| = 4x + 1$.

15. $\sqrt{x - 2} + |x - 3| = |x - 4|$.

16. $\left|\frac{1}{x} - 1\right| + |x - 2| = 1$.

17. $|\operatorname{tg} x| + |\sin x| = |\sin x|^3$.

18. $x^2-5|x|+6=0$.Вказівка. Припустити $|x|=t$, де $t\geq 0$, тоді $x^2=|x|^2=t^2$.

3.4. Розв'язання нерівностей виду $|f(x)|\leq a$ і $|f(x)|\leq|g(x)|$

Нагадаємо насамперед одну властивість числових нерівностей: Коли $a>b, a>0, b>0$, то і $a^2>b^2$. Вірне і протилежне твердження: Якщо $a^2>b^2, a>0, b>0$, то $a>b$.

Із цих властивостей випливає, що нерівності $|f(x)|\leq a$ (де $a\geq 0$; при $a<0$ розв'язків немає) і $|f(x)|\leq|g(x)|$ можна замінити рівносильними їм нерівностями $f^2(x)-a^2\leq 0$ і $f^2(x)-g^2(x)\leq 0$. Аналогічні міркування вірні і для нерівностей $|f(x)|\geq a$, де $a\geq 0$, і $|f(x)|\geq|g(x)|$.

Зазначимо, що нерівність $|f(x)|\geq a$, де $a<0$, виконується при будь-якому значенні x із області визначення функції f.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $|x^2-5x|\leq 6$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна нерівності $(x^2-5x-6)(x^2-5x+6)\leq 0$, яка розв'язується методом інтервалів.

Відповідь: $-1\leq x\leq 2, 3\leq x\leq 6$.

Приклад 9. Розв'язати нерівність $|\sin x|>|\cos x|$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна нерівності $\sin^2 x>\cos^2 x$ або $cos2x>0$, звідки $\frac{\pi}{2}+2\pi n<2x<\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in Z$.

Отже, $\frac{\pi}{4}+\pi n<2x<\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in Z$ – розв'язок даної нерівності.

Вправи

Розв'язати нерівності:

19. $|2x-6|\leq 3$.
20. $|3x-1|>|2x-5|$.
21. $|x^2-5|\geq 4$.
22. $|x^2+x-3|\leq|2x^2+x-2|$.
23. $|\log_3 x-2|\geq|\log_3 x|$.
24. $|2\sin x-1|\leq|\sin x|$.

3.5. Розв’язання нерівностей виду $\left|f(x)\right| \le g(x)$ і $\left|f(x)\right| \ge \left|g(x)\right|$

Перший спосіб. Нерівність $\left|f(x)\right| \le g(x)$ рівносильна двом системам нерівностей: $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) \le g(x) \end{cases}$ і $\begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) \le g(x). \end{cases}$ аналогічні міркування вірні й для нерівності $\left|f(x)\right| \ge \left|g(x)\right|$.

Другий спосіб. Нерівність $\left|f(x)\right| \le g(x)$ має розв’язки, коли $g(x) \ge 0$; тому $\left|f(x)\right| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) - g^2(x) \le 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$ Нерівність $\left|f(x)\right| \ge g(x)$ виконується для всіх x із області визначення функції f, при яких *g(x)*. Якщо ж $g(x) \ge 0$, то $\left|f(x)\right| \ge g(x) \Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) \ge 0$. Отже, при розв’язанні нерівності $\left|f(x)\right| \ge g(x)$ необхідно розглядати два випадки.

Приклад 10. Розв’язати нерівність $\left|x^2 - x\right| \le x + 2$.

Розв’язання. Згідно зробленим зауваженням, отримаємо $\left|x^2 - x\right| \le x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 - x\right)^2 - (x+2)^2 \le 0, \\ x + 2 \ge 0. \end{cases}$ Розв’яжемо першу нерівність; маємо $\left(x^2 + 2\right)\left(x^2 - 2x - 2\right) \le 0$, звідки $1 - \sqrt{3} \le x \le 1 + \sqrt{3}$. Розв’язанням другої нерівності є $x \ge -2$. Ясно, що розв’язком системи, а значить, і даної нерівності є проміжок $1 - \sqrt{3} \le x \le 1 + \sqrt{3}$.

Відповідь: $1 - \sqrt{3} \le x \le 1 + \sqrt{3}$.

Приклад 11. Розв’язати нерівність $\left|\frac{1}{x} - 1\right| > x - 2$.

Розв’язання. Функція $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ визначена при $x \ne 0$. Розв’язком даної нерівності є об’єднання розв’язків системи нерівностей $\begin{cases} x < 2, \\ x \ne 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} \left(\frac{1}{x} - 1 - x + 2\right)\left(\frac{1}{x} - 1 + x - 2\right) > 0, \\ x \ge 2. \end{cases}$

Розв'яжемо першу нерівність другої системи; маємо $\frac{\left(-x^2+x+1\right)\left(x^2-3x+1\right)}{x^2}>0,\ \frac{\left(x^2-x-1\right)\left(x^2-3x+1\right)}{x^2}<0.$

Зміна знаків чисельника дробу ілюструє рис. 11.

Зрозуміло, що $x\in\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$;

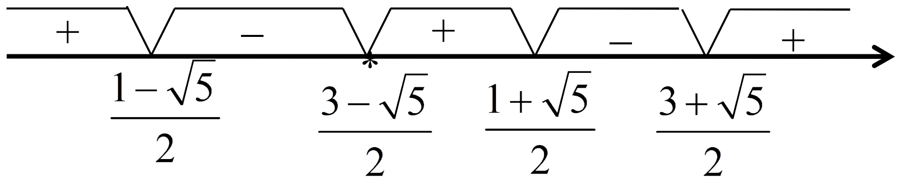

Рис. 11

розв'язком другої системи є проміжок $\left[2;\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. В результаті отримуємо відповідь: $(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Примітка. Нерівність можна розв'язати і традиційно, отримавши дві системи нерівностей:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}-1\geq 0,\\ \frac{1}{x}-1>x-2,\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{1}{x}-1<0,\\ -\frac{1}{x}+1>x-2.\end{cases}$$

Вправи

25. $|3x+2|+x>1.$ 27. $\left|x^2-2\right|\leq x.$ 29. $|\sin x|\geq\cos x.$

26. $|x-1|\leq 2x+1.$ 28. $\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\geq x.$

3.6. Розв'язання нерівностей виду $\left|f_1(x)\right|+\left|f_2(x)\right|+\ldots+\left|f_n(x)\right|\leq g(x)$

При розв'язанні нерівностей указаного виду слід використовувати той же прийом, що і при розв'язанні рівнянь, що містять суму модулів декількох функцій (див. п. 3.3).

Приклад 12. Розв'язати нерівність $|5x-6|<x+1$.

Розв'язання. Оскільки $5x-6=0$ при $x=1,2,$ то розв'язанням даної нерівності є об'єднання розв'язань двох систем нерівностей: $\begin{cases} x \le 1,2, \\ -5x+6 < x+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1,2, \\ 5x-6 < x+1. \end{cases}$ Розв'язавши ці системи, отримаємо відповідь: (5/6; 7/4).

Приклад 13. Розв'язати нерівність $\left|x^2-2x\right|+\left|x-1\right| \le x^2.$

Розв'язання. Розв'язанням даної нерівності є об'єднання розв'язань чотирьох систем нерівностей:

1)$\begin{cases} x \le 0, \\ x^2-2x-x+1 \le x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 0, \\ x \ge \dfrac{1}{3}; \end{cases}$ система не має розв'язків;

2) $\begin{cases} 0 < x \le 1, \\ -x^2+2x-x+1-x^2 \le 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x \le 1, \\ 2x^2-x-1 \ge 0, \end{cases}$ звідки $x=1;$

3) $\begin{cases} 1 < x \le 2, \\ -x^2+2x+x-1 \le x^2, \end{cases}$ $\begin{cases} 1 < x \le 2, \\ 2x^2-3x+1 \ge 0, \end{cases}$ звідки $1 < x \le 2;$

4) $\begin{cases} x > 2, \\ x^2-2x+x-1-x^2 \le 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2, \\ x \ge -1, \end{cases}$ звідки $x > 2;$

Розв'язанням даної нерівності є проміжок $\left[1;+\infty\right).$

Вправи

Розв'язати нерівності

30. $\left|4x-1\right|+2x-4 \le 0.$
31. $\left|3-x\right|-\left|x-2\right| \le 5.$
32. $\left|2x-6\right|+\left|4-x\right| \le \left|x-2\right|.$
33. $\left|x^2+2x\right|+\left|x-2\right| > 4.$
34. $\left|\sin x\right|-\left|\cos x\right| \le 1.$
35. $\sqrt{x^2-3x} \ge \left|x-4\right|+\left|x-3\right|.$

3.7. Розв'язання нерівностей, що містять модулі, методом інтервалів

На завершення відмітимо, що у деяких випадках при розв'язанні нерівностей, що містять знак модуля, зручно використовувати метод інтервалів.

Приклад 14. Розв'язати нерівність $\dfrac{1-\left|x^2-3\right|}{\left|2x^2-x\right|-1} \le 0.$

Розв’язання. Розглянемо функцію $f\left(x\right)=\dfrac{1-\left|x^2-3\right|}{\left|2x^2-x\right|-1}$. Найдемо нулі функції: $\left|x^3-3\right|=1$; звідки $x_1=2;\ x_2=-2;\ x_3=\sqrt{2};\ x_4=-\sqrt{2}$. Далі знаходимо точки розриву: $\left|2x^2-x\right|=1$, звідки $x_5=-\dfrac{1}{2},\ x_6=1$. Нанесемо точки розриву і нулі функції на числову пряму, які розіб’ють її на сім проміжків, у кожному із яких функція f зберігає постійний знак (рис. 12).

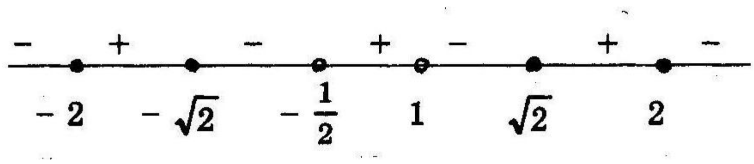

Рис. 12

Відповідь: $\left(-\infty;-2\right]\cup\left[-\sqrt{2};-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

Вправи

Розв’язати методом інтервалів нерівності:

36. $\dfrac{1-x^2}{\left|x-4\right|-2}\ge 0.$ 37. $\dfrac{\left|x-3\right|-2x}{x-2\left|x+1\right|}\le 0.$ 38. $\dfrac{\left|x^2-x\right|-\left|x\right|}{\left|x-2\right|+2x}>0.$ 39. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-5\left|x\right|+4}\ge 0.$ 40. $\left(x^2-\left|x\right|-6\right)\left(\left|\left|x-2\right|-1\right|-3\right)>0.$

Відповіді до вправ

1. $-3;-\dfrac{1}{3}$. **2.** $-1;0$. **3.** $\dfrac{1}{2};1\dfrac{1}{4};2\dfrac{3}{4};3\dfrac{1}{2}$. **4.** $\dfrac{1\pm\sqrt{10}}{3}$. **5.** $-6;-2;0;2;4;8$.

6. $\dfrac{\pi}{4}+\pi r,\ r\in Z;\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in Z;2\pi n,\ n\in Z$. **7.** $-3;1$. **8.** $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

9. $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi m,\ m\in Z$. **10.** $\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2};0$. **11.** $\emptyset$. **12.** 0,8; 6.

13. $\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right]$. **14.** ± 1. **15.** 3. **16.** $1;1+\sqrt{2}$. **17.** $\pi n,\ n\in Z$. **18.** $\pm 2;\pm 3$.

19. $\left[1,5;4,5\right]$. **20.** $\left(-\infty;-4\right]\cup\left(1,2;+\infty\right)$. **21.** $\left(-\infty;-3\right]\cup\left[1;1\right]\cup\left[3;+\infty\right)$.

22. $\left(-\infty;-1\right]\cup\left[\frac{5}{3};+\infty\right)$. **23.** $\left(0;\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{1}{3};3\right]\cup\left[9;+\infty\right)$.

24. $\left[\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n;\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n\right], n\in Z.$

25. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};+\infty\right)$. **26.** $\left[0;+\infty\right)$. **27.** $\left[1,2\right]$.

28. $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(-1;\sqrt{3}-1\right)$. **29.** $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{7\pi}{4}+2\pi n\right], n\in Z.$

30. $\left[-\frac{3}{2};\frac{5}{6}\right]$. **31.** $\left(-\infty;+\infty\right)$. **32.** $\left[3,4\right]$. **33.** $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

34. $\left(-\infty;+\infty\right)$. **35.** $\left[\frac{3+\sqrt{13}}{2};\frac{25+\sqrt{37}}{6}\right]$.

36. $\left[-1;1\right]\cup\left[2;6\right]$. **37.** $\left(-\infty;1\right]$. **38.** $\left(-2;0\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

39. $\left(-\infty;-4\right)\cup\left[-3;-2\right]\cup\left(-1;1\right)\cup\left(4;+\infty\right)$.

40. $\left(-\infty;-3\right)\cup\left(-2;3\right)\cup\left(6;+\infty\right)$.

РОЗДІЛ 2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ

§1.Рівняння і нерівності з параметрами. Вступ.

Для розв'язування задач у техніці й математиці досить часто доводиться складати і розв'язувати рівняння, системи рівнянь, нерівності. При цьому нерідко в ці рівняння й нерівності, крім невідомих величин, входять також деякі інші змінні величини, що мають назву параметра.

Рівнянням з параметрами називаємо рівняння виду:

$$f\left(x, a_{1,} a_2, ..., a_n\right) = 0, \ (1)$$

де x – шукане невідоме, $a_{1,} a_2, ..., a_n$ – змінні параметри.

Значення шуканого невідомого x залежить від значення параметрів.

Значення параметрів $a_{1,} a_2, ..., a_n$, при яких вираз $f\left(x, a_{1,} a_2, ..., a_n\right)$ має зміст при деяких значеннях x, називаються допустимими. Множину всіх допустимих систем значень параметрів рівняння (1) називають областю зміни параметрів цього рівня.

Для кожної допустимої системи значень параметрів рівняння (1) має певну множину розв'язків. Розв'язати рівняння з параметрами означає знайти всі розв'язки цього рівняння для кожної допустимої системи значень параметрів.

Щоб розв'язати рівняння $f\left(x, a_{1,} a_2, ..., a_n\right) = 0$ з невідомим x і параметрами $a_{1,} a_2, ..., a_n$, треба:

1) визначити область допустимих систем значень параметрів $a_{1,} a_2, ..., a_n$;

2) розв'язати рівняння відносно x і подати невідоме x у вигляді функції $x = \varphi\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ від параметрів;

3) з'ясувати, при яких допустимих системах значень параметрів значення функції $x = \varphi\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ є розв'язками даного рівняння;

4) розглянути рівняння (1) при таких допустимих системах значень параметрів, при яких його не можна розглядати відносно x; з'ясувати, чи має рівняння при цих значеннях параметрів розв'язки, і якщо має, то які.

Розв’язування задач з параметрами потребує знання властивостей елементарних функцій (областей визначення, областей зростання та спадання), властивостей рівнянь або нерівностей (рівносильних і нерівносильних перетворень, умов, що забезпечують рівносильність перетворень), вміння вести аналіз, не випускаючи ніяких можливостей. Крім того для застосування графічних методів потрібно вміти виконувати побудову різних графіків, вести графічний аналіз, що відповідає даним значенням параметру.

Завдання з параметрами дуже багатозначні. Це задачі на подільність многочлена, на аналіз спеціальних відношень між коренями квадратного тричлена, рівняння, нерівності, геометричні задачі з параметрами, задачі на найбільше та найменше значення.

Елементи аналізу при розв’язуванні задач з параметрами

Потрібною частиною розв’язування задач з параметрами є аналіз. Розглянемо рівняння з параметрами виду:

$$f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \varphi(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \qquad (2)$$

де $f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ і $\varphi(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – деякі функції невідомої хта параметрів$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Елементами аналізу є:

1. Аналіз умов, що визначають область допустимих значень невідомої і параметрів.

Якщо при $\alpha_1 = a_1, \alpha_2 = a_2, \dots, \alpha_n = a_n$ (де $a_1, a_2, \dots, a_n$ – деякі числа з множини M, в якій розглядається рівняння (2)) ліва і права частина рівняння (2) визначені, то система значень параметрів $\alpha_1 = a_1, \alpha_2 = a_2, \dots, \alpha_n = a_n$, називається допустимою.

Множина всіх допустимих систем значень параметрів рівняння (2) називається областю допустимих систем значень параметрів або областю зміни параметрів цього рівняння.

Знаходження $D(f)$ невідомого зводиться до формулювання і розв’язання системи нерівностей, що вкажуть допустимі значення невідомого. Але ці розв’язки в задачах звичайно залежать від параметра. Тому перетин цих розв’язків для знаходження загального розв’язку системи потребує аналізу загального розташування на числовій осі границь областей розв’язків кожної нерівності в залежності від параметра. Тільки після цього стає правильний вибір границь $D(f)$ невідомого для кожного значення параметра, причому при деяких значеннях параметра первісна задача може взагалі не мати розв’язків.

Часто виникає необхідність виконати нерівносильні зміни, що розширюють *D(f)*, серед розв'язків можуть виявлятися сторонні корені. При розв'язуванні рівнянь без параметрів такі сторонні корені легко відкидаються за допомогою перевірки. Однак при розв'язуванні задач з параметрами перевірка стає іноді дуже складною, практично неможливою. Як же в такому випадку добитися рівносильності змін? Рівносильність змін в цьому випадку досягається за рахунок аналізу умов, що визначають *D(f)*: первісне рівняння буде рівносильне системі, що складається із знову отриманого рівняння і умов, що визначають *D(f)*. Розв'язуючи цю систему, отримаємо всі розв'язки первісного рівняння.

Крім того, реалізація умов, що визначають *D(f)*, часто звільняє від необхідності виконувати багато непотрібних змін, які в кінцевому рахунку все одно приведуть до сторонніх коренів.

В деяких випадках розв'язок нерівностей, що визначають *D(f)*, буває значно складніше, ніж розв'язування рівняння . Тоді зручно розв'язувати рівняння, а потім перевірити, при яких значеннях параметра для кожного з коренів виконуються умови, що визначають *D(f)*.

2. Аналіз врахування обмеженості функції.

Відомо, що область зміни багатьох функцій обмежена і тому вирази, що містять такі функції повинні змінюватися в обмеженій області.

Задачі з параметрами, в яких фігурують обмежені функції, при деяких значеннях параметрів можуть не мати розв'язків. Тому з умовами, що визначають *D(f)* до числа умов, з яких визначається допустиме значення параметрів, відносяться і умови обмеженості функції, що входять в умову рівняння.

3. Аналіз формулювання мов, що забезпечують рівносильність змін.

Формулювання умов, що виражають *D(f)*, дозволяють зводити рівняннядо рівносильної йому системи рівнянь і нерівностей. Аналогічну роль відіграє формулювання умов обмеженості функції, наприклад, при розв'язуванні задач ірраціональних або задач, що містять знак абсолютної величини.

Тому рівняння $\sqrt{x-2a}=a-1$ при зберіганні умови $a-1\geq 0$ рівносильне рівнянню $x-2a=(a-1)^2$. Отже, при $a\geq 1$ маємо $x=a^2+1$, а при $a<1$ розв'язків немає. Тут умова $x-2a\geq 0$ зберігається автоматично, так як $a^2+1\geq 2a$.

4. <u>Аналіз умови монотонності зміни функції.</u>

Іноді доводиться виконувати деякі дії, рівносильні тільки на деякій множині, що визначається даною умовою. Для пошуку розв'язків, що не входять в цю множину, потрібно розглядати окремі випадки, проводити дослідження знаків лівої і правої частини рівняння в залежності від цього вибрати потрібний шлях розв'язання. Необхідність проводити такі аналізи виникає, наприклад, при розв'язуванні рівнянь, нерівностей, в яких виконання наступних змін потребує монотонності функцій, що входять в рівняння.

§2. Лінійні рівняння з параметрами

Рівняння виду $ax+b=0,$ (2) де x – невідоме, a, b – параметри, називають лінійним рівнянням із параметрами.

Це рівняння рівносильне рівнянню (3) $ax=-b.$

Дослідимо його.

Якщо $a \neq 0,$ то рівняння (3) має єдиний розв'язок: $x=-\frac{b}{a}.$

Якщо $a=0,\ b=0,$ то рівняння (3) має вигляд: $0 \cdot x=0,$ звідки x – будь-яке число. Рівняння має безліч розв'язків.

Якщо $a=0,\ b \neq 0,$ то рівняння (3) має вигляд: $0 \cdot x=-b,$ що неможливо. Рівняння не має розв'язків.

Приклад 1. При якому значенні параметра a рівняння $\left(a^2-1\right)x=a^2+2a-3$ має безліч розв'язків?

Розв'язання:

Використовуючи схему дослідження лінійного рівняння,

маємо: $\begin{cases} a^2-1=0, \\ a^2+2a-3=0. \end{cases}$

Розв'язуючи цю систему, дістаємо:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=-1, \\ a=1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a=1, \text{ звідки a} = 1. \\ a=-3, \end{array}\right. \end{cases}$$

Відповідь: 1.

Приклад 2. При якому значенні параметра a рівняння $\left(a^2+2\right)x=a\left(2-3x\right)+2$ не має розв’язку?

Розв’язання:

Перетворимо дане рівняння до вигляду: $\left(a^2+2\right)x=2a-3ax+2,$ або $\left(a^2+3a+2\right)x=2a+2.$ Останнє рівняння не має розв’язків, якщо $\begin{cases} a^2+3a+2=0, \\ 2a+2\neq 0, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=-2, \\ a=-1, \end{array}\right. \\ a\neq 1. \end{cases}$ $a=-2.$ Відповідь: –2.

Приклад 3. При яких значеннях t рівняння $3\left(2-x\right)=4\left(t-2x\right)$ має додатні розв’язки?

Розв’язання:

Зведемо дане рівняння до загального вигляду. Дістанемо: $6-3x=4t-8x,$ або $5x=4t-6.$ Оскільки за умовою $x>0,$ то $4t-6>0,$ звідки $t>1,5.$ Відповідь: $t\in\left(1,5;\infty\right).$

Приклад 4. При яких значеннях k рівняння $3k+3\left(x+1\right)=\dfrac{3kx+15}{5}$ має єдиний розв’язок?

Розв’язання:

Дане рівняння рівносильне рівнянню $\left(15-3k\right)x=-15k.$ Останнє рівняння має єдиний розв’язок, якщо $15-3k\neq 0,$ тобто $k\neq 5.$

Відповідь: $k\in\left(-\infty;5\right]\cup\left(5;+\infty\right).$

Приклад 5. Визначити, при яких значеннях параметра a корені рівняння $ax=7x-1$ кратні 3.

Розв’язання:

Зведемо дане рівняння до вигляду: $x\left(7-a\right)=1.$ Якщо $7-a\neq 0,$ то рівняння має єдиний розв’язок: $x=\dfrac{1}{7-a}.$ За умовою корені рівняння кратні 3, тобто $\dfrac{1}{7-a}=3n,$ де $n\in Z.$ Звідки $a=\dfrac{21n-1}{3n}=7-\dfrac{1}{3n},$ де $n\in Z.$ Відповідь: $a=7-\dfrac{1}{3n},$ де $n\in Z.$

Приклад 6. Розв'язати рівняння: $a^2x - ab = a.$

Розв'язання:

$a^2x - ab = a.$ Якщо $a \neq 0,$ то $x = \dfrac{ab+a}{a^2} = \dfrac{b+1}{a}.$ якщо $\begin{cases} a = 0, \\ ab + a = 0, \end{cases}$ то рівняння має безліч розв'язків.

Відповідь. Якщо $a \neq 0, b \in R, x = \dfrac{b+1}{a};$ якщо $a = 0, b \in R,$ рівняння має безліч розв'язків.

Приклад 7. Розв'язати рівняння відносно x: $(a+x)b - a = (b+1)x + ab.$

Розв'язання:

$ab + bx - a - (b+1)x = ab,$ звідки $(b - b - 1)x = a,$ тобто $x = -a.$ При будь-яких значення a і b рівняння має єдиний розв'язок.

Відповідь. Якщо $a \in R, b \in R, x = -a.$

Завдання для самостійної роботи

1. При якому значенні параметра a рівняння $\left(a^2 - 2a\right)x = a^2 - 4$ має безліч розв'язків?

$(a = 2.)$

2. При якому значенні параметра a рівняння $a^2(x-1) + a(3x-1) + 2x = 0$ має безліч розв'язків?

$(a = -1.)$

3. При якому значенні параметра a рівняння $(a-3)(a-4)x = a^2 - 16$ не має розв'язку?

$(a = 3.)$

4. При якому значенні параметра k рівняння $3k + 3(x+1) = \dfrac{3kx+15}{5}$ не має розв'язку? $(k = 5.)$

5. Визначити, при яких значеннях k рівняння $\dfrac{4x+3k}{3} = \dfrac{5x-2k}{4}$ має від'ємні розв'язки.

$(k > 0.)$

6. Визначити, при яких значеннях параметра a корені рівняння $ax = 7x - 1$ кратні 5.

$$\left(a = 7 - \frac{1}{5m},\ m = 1, 2, 3, \ldots \right)$$

7. Визначити, при яких значеннях параметра a рівняння $3(x+1) = 4 + ax$ матиме корінь більший, ніж –1.

$$\left(a \in (-\infty; 3) \cup (4; +\infty). \right)$$

Під час розв'язування рівнянь з параметрами область зміни параметрів може бути заданою. Якщо межі зміни параметрів не зазначені, то вважається, що параметри набувають усіх своїх допустимих значень.

§3. Квадратні рівняння з параметрами

Рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – шукане невідоме, a, b, c – параметри, $a \neq 0$, називається квадратним рівнянням з параметрами.

Якщо $a = 0$, то рівняння перетворюється на лінійне і набирає вигляду: $ax + b = 0$.

Корені квадратного рівняння знаходимо за формулою:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac.$$

Якщо $a \neq 0$ і $D > 0$, то рівняння має два дійсні корені.

Якщо $a \neq 0$ і $D = 0$, то рівняння має єдиний корінь:

$$x = -\frac{b}{2a}$$ (іноді кажуть: два однакові корені).

Якщо $a \neq 0$ і $D < 0$, то рівняння не має дійсних коренів.

Для коренів x_1 і x_2 квадратного рівняння виконується теорема Вієта:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Приклад 1. При скількох цілих значеннях параметра m квадратне рівняння $2x^2 + mx + 2m = 0$ не має дійсних коренів?

Розв'язання:

Дискримінант рівняння $D = m^2 - 16m.$

Рівняння не має дійсних коренів, якщо $D < 0,$ тобто $m^2 - 16m < 0.$ Використовуючи метод інтервалів розв'язування нерівностей, маємо: m(m – 16)<0, m ∈(0; 16).

Цілі значення з цього проміжку такі: 1, 2, 3, …, 15.

Відповідь. 15.

Приклад 2. При якому значенні параметра a рівняння $\left(x+a\right)^2 + 25x^2 - 10x + 1 = 0$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання:

Розкривши дужки та звівши подібні додатки, дістанемо:

$$26x^2 + \left(2a - 10\right)x + a^2 + 1 = 0.$$

Останнє рівняння має єдиний розв'язок, якщо його дискримінант дорівнює нулю, тобто $\left(2a-10\right)^2 - 4 \cdot 26 \cdot \left(a^2+1\right) = 0,$ звідки $25a^2 + 10a + 1 = 0.$ Тоді $a = -0{,}2.$

Відповідь. $a = -0{,}2.$

Приклад 3. Обчислити суму цілих значень параметра $a,$ при яких рівняння $\left(a+7\right)x^2 + 2ax + 11a = 0$ має два різні дійсні корені.

Розв'язання:

Дане рівняння є квадратним, якщо $a + 7 \neq 0,$ тобто $a \neq 7,$ і має два різні дійсні корені, якщо $D > 0.$

$$4a^2 - 4\left(a+7\right) \cdot 11a > 0;$$

звідки $-4a\left(10a + 77\right) > 0,$ a∈(-7,7; 0).

Сума цілих значень параметра $S = -6 - 5 - 4 - 3 - 2 = -21.$

Відповідь. –21.

Приклад 4. Визначити найбільше ціле значення параметра $a,$ при якому рівняння $7^{2x} + a \cdot 7^x + 4 = 0$ має два різні розв'язки.

Розв'язання:

Введемо заміну $y = 7^x;$ очевидно, $y > 0.$ Тоді рівняння набере вигляду:

$$y^2 + ay + 4 = 0.$$

Це рівняння має два розв'язки, якщо $D > 0,$ тобто $a^2 - 16 > 0,$ звідки $\left[\begin{array}{l} a < -4, \\ a > 4. \end{array}\right.$ Корені рівняння (4): $y = \dfrac{-a \mp \sqrt{D}}{2}$. Оскільки $y > 0,$ то $-a \mp \sqrt{D} > 0$ і $a < 0.$ Із системи $\begin{cases} a < 0, \\ \left[\begin{array}{l} a < -4, \\ a > 4 \end{array}\right. \end{cases}$ маємо: $a < -4.$

Найбільшим цілим значенням параметра a є –5.

Відповідь. –5.

Приклад 5. При скількох цілих значеннях параметра m сума коренів рівняння $3x^2 + \left(\dfrac{m}{2} - 1\right)x - 4 = 0$ належить проміжку $(-2; -1)$?

Розв'язання:

Оскільки старший коефіцієнт додатний, а вільний член від'ємний, то рівняння має корені.

Дамо відповідь на запитання, не знаходячи коренів даного рівняння. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -\dfrac{\frac{m}{2} - 1}{3}$. Тоді $-2 < -\dfrac{m}{6} + \dfrac{1}{3} < -1.$

Віднімемо від обох частин нерівностей $\dfrac{1}{3}$. Дістанемо: $-2\dfrac{1}{3} < -\dfrac{m}{6} < -1\dfrac{1}{3}$, або $-\dfrac{7}{3} < -\dfrac{m}{6} < -\dfrac{4}{3}$. Домножимо на –6: $8 < m < 14.$

Отже, параметр набуває таких цілих значень: 9; 10; 11; 12; 13.

Відповідь. 5.

Приклад 6. Розв'язати рівняння:

$$a(a+1)x^2 - \left(2a^2 - 1\right)x + a(a-1) = 0.$$

Розв'язання:

Дане рівняння має смисл при будь-яких значеннях a.

Розглянемо окремі випадки.

1) Нехай $a=0$. Тоді рівняння набере вигляду: $0\cdot x^2+x+0=0$, звідки $x=0$.

2) Нехай $a=-1$. Тоді рівняння набере вигляду: $0\cdot x^2-x+2=0$, тобто $x=2$.

3) Нехай $a\neq 0$ і $a\neq -1$. Тоді рівняння має два корені:

$$x_1=\frac{2a^2-1-1}{2a(a+1)}=\frac{2(a-1)(a+1)}{2a(a+1)}=\frac{a-1}{a},\ x_2=\frac{2a^2-1+1}{2a(a+1)}=\frac{a}{a+1}.$$

Відповідь. Якщо $a=0, x=0$; якщо $a=-1, x=2$; якщо $a\neq 0$, $a\neq -1, x_1=\dfrac{a-1}{a}; x_2=\dfrac{a}{a+1}$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння:

$$\frac{x}{a(x+1)}-\frac{2}{x+2}=\frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}. \quad (6)$$

Розв'язання

Дане рівняння має смисл при всіх значеннях a, крім $a=0$, при цьому $x\neq -1, x\neq -2$.

Якщо $a\neq 0$, то рівняння (6) після зведення до спільного знаменника набирає вигляду:

$$\frac{x(x+2)-2a(x+1)}{a(x+1)(x+2)}=\frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)},$$

Звідки $x^2+2(1-a)x+a^2-2a-3=0$ на області допустимих значень невідомого і параметра.

Дискримінант цього рівняння $D=4(1-a)^2-4\left(a^2-2a-3\right)=16$, а його корені: $x_1=\dfrac{-2(1-a)-4}{2}=a-3;\ x_2=\dfrac{-2(1-a)+4}{2}=a+1.$

Враховуючи область допустимих значень невідомого, дістанемо: а – 3 ≠ –1, а – 3 ≠ –2 $a+1\neq -1; a+1\neq -2$, звідки $a\neq 2$; $a\neq 1; a\neq -2; a\neq -3$.

Отже, якщо $\begin{cases} a \neq -3, \\ a \neq -2, \\ a \neq 0, \\ a \neq 1, \\ a \neq 2, \end{cases}$ то рівняння має два корені: $x_1 = a - 3; x_2 = a + 1.$

Якщо $a = -3,$ то $x = -6;$ якщо $a = -2,$ то $x = -5;$ якщо $a = 1,$ то $x = 2;$ якщо $a = 2,$ то $x = 3.$

Відповідь. Якщо $\begin{cases} a \neq -3, \\ a \neq -2, \\ a \neq 0, \\ a \neq 1, \\ a \neq 2, \end{cases}$ $x_1 = a - 3; x_2 = a + 1;$

якщо $a = -3,$ то $x = -6;$ якщо $a = -2,$ то $x = -5;$ якщо $a = 0,$ то $x \in \phi;$ якщо $a = 1,$ то $x = 2;$ якщо $a = 2,$ то $x = 3.$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $(a+1)x^2 - (1-2a)x + a + 1 = 0$ має два різні від'ємні корені.

$(a \in (-\infty; -1).)$

2. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $(a^2 - 4)x^2 - 4(a-2)x + 2(a+1) = 0$ має один корінь.

$(-2.)$

3. При скількох цілих значеннях параметра m добуток коренів рівняння $3x^2 - 12x + \frac{m}{2} + 1 = 0$ належить проміжку (1; 2)?

(5.)

4. У рівнянні $2x^2 - 12x + a = 0$ визначити a, при якому відношення коренів цього рівняння дорівнює $-\frac{1}{7}$. (–14.)

5. Знайти всі значення a, при яких сума коренів рівняння $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$ дорівнює сумі квадратів його коренів.

$(a_1 = 0,5; a_2 = 1.)$

6. При яких значеннях a корені рівняння $2x^2-(2a-5)x+a-3=0$ містяться між 0 і 1?

$\left(a\in(3;4).\right)$

7. При яких значеннях m корені квадратного рівняння $(m-2)x^2-3(m+2)x+6m=0$ мають різні знаки?

$(m\in(0;2).)$

8. При яких значеннях параметра m корені рівняння $mx^2-(3m+1)x+m=0$ будуть дійсними і рівними?

$\left(m_1=-1, m_2=-0,2.\right)$

9. Обчислити найбільше значення параметра a, при якому рівняння $(a-1)x^2+2ax+a=0$ не має двох різних дійсних коренів.

(1.)

10. При якому найменшому цілому значенні параметра m корені рівняння $3x^2+(2m-1)x-m-8=0$ лежать по різні сторони ззовні проміжку $[-2;1]$?

(2.)

11. Розв’язати рівняння $x^2+2ax-3a^2=0$ відносно x.

$\left(x_1=-3a, x_2=a.\right)$

12. Розв’язати рівняння $x^2-4ax+4a^2=b^2$ відносно x.

$\left(x_1=2a-b, x_2=2a+b.\right)$

13. Розв’язати рівняння з параметром $m: \dfrac{m}{x-m}-\dfrac{x}{x+m}=\dfrac{7}{5}$.

(Якщо $m\neq 0, x_1=\dfrac{3m}{2}, x_2=-\dfrac{2}{3}m.$)

14. Розв’язати рівняння відносно $x:\left(a^2+a-2\right)x^2+a^2-1=0.$

(Якщо $a=1, x\in R$; якщо $a=-2$, коренів немає;

якщо $a\in(-2;-1], x_{1,2}=\pm\sqrt{-\dfrac{a+1}{a+2}}.$)

15. Розв’язати рівняння з параметром a:

$$\frac{x-a}{x-1}+\frac{x+a}{x+1}=\frac{x-2a}{x-2}+\frac{x+2a}{x+2}-\frac{6(a-1)}{5}.$$

(Якщо $a \neq 1$, $x_1 = \sqrt{5-\sqrt{21}}$, $x_2 = -\sqrt{5-\sqrt{21}}$, $x_3 = \sqrt{5+\sqrt{21}}$, $x_4 = -\sqrt{5+\sqrt{21}}$, якщо $a = 1$, $x \in (-\infty;2) \cup (-2;-1) \cup (-1;1) \cup (1;2) \cup (2;+\infty)$.)

16. Знайти значення a, при яких рівняння $x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$ має розв'язки. Знайти знаки коренів.

(Якщо $a \in (0;4)$, рівняння розв'язку не має; якщо $a \in \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$, корені різних знаків; якщо $a \in \left(-\frac{1}{2};0\right]$, корені від'ємні; якщо $a \in [4;+\infty)$, корені додатні.)

§4. Теореми про властивості квадратних тричленів та їх графіків

Для розв'язання багатьох задач із параметрами дуже важливим є знання властивостей квадратичної функції і залежності цих властивостей від можливих відношень між коефіцієнтами.

Нехай нам дано квадратне рівняння $Ax^2 + Bx + C = 0$,

Де $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ – квадратична функція і вводимо наступні позначки: A, B, C – коефіцієнти квадратичної функції; $f(a)$ – значення функції в точці $x = a$; $D = B^2 - 4AC$ – дискримінант; $X_0 = -\frac{B}{2A}$ – абсциса вершини параболи; $Y_0 = -\frac{D}{4A}$ – ордината вершини параболи; X_1 – менший дійсний корінь рівняння (7); X_2 – більший дійсний корінь рівняння (7); $X_1 + X_2 = -\frac{B}{A}$ – сума коренів квадратного рівняння згідно з теоремою Вієта; $X_1 \cdot X_2 = \frac{C}{A}$ – добуток коренів квадратного рівняння згідно з теоремою Вієта.

Необхідні і достатні умови для заданого розташування коренів квадратного тричлена на числовій осі. Дослідження знаку дискримінанта дозволяє встановити, чи дійсні, чи комплексні корені квадратного тричлена. Однак для цілого ряду задач потрібно ще встановити, як розміщені на числовій осі дійсні корені квадратного тричлена відносно яких-небудь фіксованих точок числової осі. Це зручно зробити, використовуючи наступну серію теорем.

Теорема 1. Корені квадратного тричлена Ax^2+Bx+C з дійсними коефіцієнтами обидва дійсні і обидва більше даного числа λ тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} B^2-4AC \geq 0, \\ \lambda < -\dfrac{B}{2A}, \\ A(A\lambda^2 + B\lambda + C) > 0 \end{cases}$$

Теорема 2. Корені квадратного тричлена Ax^2+Bx+C з дійсними коефіцієнтами обидва дійсні і обидва менше даного числа δ тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} B^2-4AC \geq 0, \\ \delta > -\dfrac{B}{2A}, \\ A(A\delta^2 + B\delta + C) > 0. \end{cases}$$

Теорема 3. Корені квадратного тричлена Ax^2+Bx+C з дійсними коефіцієнтами обидва дійсні і містяться в проміжку $]\lambda,\delta[$, $\lambda < x_1 < \delta$ і $\lambda < x_2 < \delta$ тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} B^2-4AC \geq 0, \\ A\left(A\delta^2 + B\delta + C\right) > 0, \\ A\left(A\lambda^2 + B\lambda + C\right) > 0, \\ \lambda < -\dfrac{B}{2A} < \delta. \end{cases}$$

Теорема 4. Для того, щоб корені квадратного тричлена Ax^2+Bx+C з дійсними коефіцієнтами були обидва дійсні і число γ було вміщено між ними, необхідно і достатньо, щоб зберігалася умова $A\left(A\gamma^2 + B\gamma + C\right) < 0$.

Нерівності в теоремах 1-4 мають визначений геометричний зміст:

o знак дискримінанта визначає положення параболи відносно осі абсцис;

o знак коефіцієнта A напрямок віток параболи;

o знак $f(\lambda)$ визначає вище чи нижче осі абсцис проходить парабола $y = f(x)$ в точці λ;

o знак виразу $\left(\lambda + \dfrac{B}{2A}\right)$ визначає положення абсциси вершини параболи $x_0 = -\dfrac{B}{2A}$ відносно точки λ.

Таким чином, кожна з теорем задає визначене положення параболи $y = f(x)$ відносно вісі абсцис і точки λ і може бути дуже просто трактована геометрично.

Розглянемо геометричну інтерпретацію теореми 1.

Згідно з умовою задачі, графік функції $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ перетинає вісь ох або дотикається до неї, а точки перетину або дотику (корені функції) лежать справа від заданої точки λ. Можливі чотири різних положення параболи $y = f(x)$ відносно осі Ox і точки λ, що відповідають умові задачі.

Випадок 1.

Вітки параболи направлені вгору, корені дійсні, вершина параболи розташована з права від точки λ. У точці λ парабола проходить вище осі Ox. Система цих умов є достатньою для того, щоб парабола $y = Ax^2 + Bx + C$ знаходилася по відношенню до осі Ox і точки λ у положенні, яке показано на рисюнку (рис. 13).

Це можна описати математично наступною системою нерівностей:

$$\begin{cases} A > 0, \\ B^2 - 4AC > 0, \\ A\lambda^2 + B\lambda + C > 0, \\ -\dfrac{B}{2A} > \lambda. \end{cases}$$

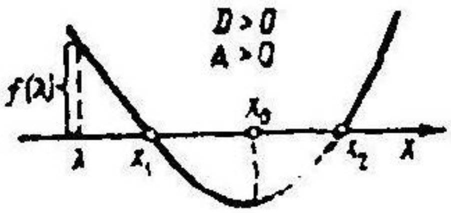

Рис. 13

Випадок 2. (Рис. 14.)

Цей випадок математично можна описати наступною системою:

$$\begin{cases} A > 0, \\ B^2 - 4AC = 0, \\ A\lambda^2 + B\lambda + C < 0, \\ -\dfrac{B}{2A} > \lambda. \end{cases}$$

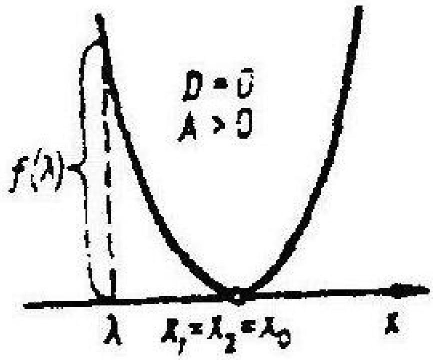

Рис. 14

Випадок 3. (Рис. 15.)

Цей випадок математично можна описати наступною системою: $\begin{cases} A < 0, \\ B^2 - 4AC > 0, \\ A\lambda^2 + B\lambda + C < 0, \\ -\dfrac{B}{2A} > \lambda. \end{cases}$

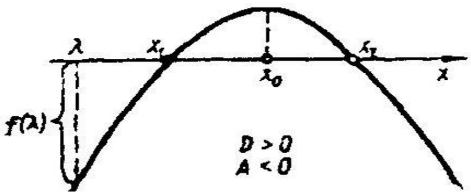

Рис. 15

Випадок 4. (Рис. 16.)

Цей випадок математично записується наступною схемою:

$$\begin{cases} A < 0, \\ B^2 - 4AC = 0, \\ A\lambda^2 + B\lambda + C < 0, \\ -\dfrac{B}{2A} > \lambda. \end{cases} \quad (15)$$

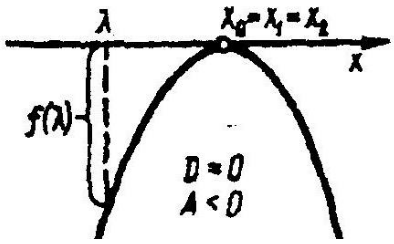

Рис. 16

Очевидно, що описаними вище чотирма випадками вичерпується всі можливі розташування параболи, при яких корені квадратного тричлена дійсні і обидва більші λ.

Аналогічно можна дати геометричну інтерпретацію теоремам 2, 3, 4.

Приклади розв'язування задач на застосування теорем

Приклад 1. При яких значеннях параметра *a* корені рівняння $(a+1)x^2 - 3ax + 4a = 0$ будуть обидва більше одиниці.

Розв'язання.

Порахуємо основні елементи квадратного тричлена: $A=a+1$, $D=B^2-4AC=-7a^2-16a$, $f(1)=2a+1$, $x_0=-\frac{B}{2A}=\frac{3a}{2(a+1)}$.

Тоді, згідно теореми 1, задача описується системою нерівностей:

$$\begin{cases} -7a^2-16a \ge 0, \\ (a+1)(2a+1) \succ 0, \\ \dfrac{3a}{2(a+1)} \succ 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a(a+\frac{16}{7}) \le 0, \\ (a+1)(a+\frac{1}{2}) \succ 0, \\ (a-2)(a+1) \succ 0, \\ a \ne -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\frac{16}{7} \le a \le 0, \\ \left[\begin{array}{l} a \succ -\frac{1}{2}, \\ a \prec 1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a \succ 2, \\ a \prec -1, \end{array}\right. \\ a \ne -1 \end{cases}$$

Відповідь:

$$\frac{16}{7} \le a \prec -1$$

*Приклад 2.*При яких дійсних значеннях параметра *a* корені рівняння $(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$ дійсні і один із коренів більше 3, а другий менше 2?

Розв’язання:

Обчислимо елементи параболи: $A=a-2$,

$D=B^2-4AC=-12a^2+56a+36$,

$f(3)=7a-36$, $f(2)=4a-20$,

$x_0=-\frac{B}{2A}=\frac{a+3}{(a-2)}$

Згідно з умовою задачі, може бути тільки два випадки розташування параболи $y=(a-2)x^2-2(a+3)x+4a$ відносно осі *Ox*. (рис. 17)

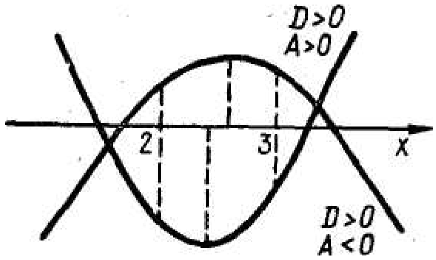

Рис. 17

Випадок 1 можна описати системою:

$$\begin{cases} D \succ 0, \\ A \succ 0, \\ f(3) \prec 0, \\ f(2 \prec 0) \end{cases} \quad \begin{cases} A \succ 0, \\ f(3) \prec 0, \\ f(2) \prec 0 \end{cases}$$

В останній системі умова *D>0* була опущена, оскільки вона виконується автоматично при виконанні наступних трьох умов.

Якщо підставити знайдені елементи параболи в систему і розв'язати її, отримаємо:

$$\begin{cases} a-2 \succ 0, \\ 7a-36 \prec 0, \\ 4a-20 \prec 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \succ 2, \\ a \prec \dfrac{36}{7}, \\ a \prec 5 \end{cases}$$

Отже *2<a<5* – розв'язок системи.

Випадок 2 описується системою:

$$\begin{cases} A \prec 0, \\ f(3) \succ 0, \\ f(2) \succ 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a-2 \prec 0, \\ 7a-36 \succ 0, \\ 4a-20 \succ 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \prec 2, \\ a \succ \dfrac{36}{7}, \\ a \succ 5 \end{cases}$$

Розвязком якої є порожня множина.

Обидва випадки можуть бути описані однією системою, якщо скористатися теоремою 4. Дійсно, числа 2 і 3 лежать між коренями даного рівняння одночасно. Тому:

$$\begin{cases} A \bullet f(2) \prec 0, \\ A \bullet f(3) \prec 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a-2)(4a-20) \prec 0, \\ (a-2)(7a-36) \prec 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a-2)(a-5) \prec 0, \\ (a-2)(a-\dfrac{36}{7}) \prec 0 \end{cases}$$

Відповідь: *2<a<5*.

Приклад 3.

Довести, що вершина параболи $y=x^2+(2a-3)x+a^2+1$ описує пряму лінію.

Розв'язання:

Обчислимо координати вершини параболиі отримаємо систему:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{3-2a}{2}, \\ y_0 = -(3a+\dfrac{5}{4}). \end{cases}$$

Знайдемо y_0 як функцію x_0. Для цього в першому співвідношенні системи a виразимо через x_0 і підставимо в друге, отримаємо:

$$y_0 = -3\left(\frac{3-2x_0}{2}\right) - \frac{5}{4} = 3x_0 - \frac{23}{4}.$$

Таким чином, ордината вершини параболи лінійно залежить від абсциси, причому $-\infty < x_0 < +\infty$. Таким чином довели, що вершина параболи при зміні параметра a описує пряму лінію, рівняння якої

$$y= -3x - \frac{23}{4}.$$

Приклад 4. Дослідити в залежності від параметра a корені рівняння $(a-3)x^2-2(3a-4)x+7a-6=0$.

Розв'язання:

1) Нехай $a=3$, тоді рівняння прийме вигляд $-10x+15=0$, розв'язуючи яке, знаходимо один корінь $x = \frac{3}{2}$.

2) Нехай $a \neq 3$, тоді $D=4(3a-4)^2-4(a-3)(7a-6)=4(2a^2+3a-2)$. Легко знайти, що: $D<0$, при $-2 < a < \frac{1}{2}$; $D=0$, при $a = -2$; $a = \frac{1}{2}$; $D>0$, при $a > \frac{1}{2}$; $a< -2$.

Тому: а) Якщо $-2 < a < \frac{1}{2}$, то рівняння має комплексні корені;

б) якщо $a = \frac{1}{2}$, то $D = 0$ і рівняння має два рівних кореня $x_1=x_2=1$;

в) якщо $a > \frac{1}{2}$; або $a< -2.$, то рівняння має два різних дійсні корені.

Знаки коренів рівняння можна знайти, використовуючи теорему Вієта, згідно з якою:

$$y_1 = x_1 + x_2 = \frac{2(3a-4)}{a-3};\ y_2 = x_1x_2 = \frac{7a-6}{a-3}$$

Легко знайти, що:

$y_1=0$, при $a = \frac{4}{3}$; $y_2=0$, при $a = \frac{6}{7}$;

$y_1<0$, при $\frac{4}{3}<a<3$; $y_2<0$, при $\frac{6}{7}<a<3$;

$y_1>0$, при $a<\frac{4}{3}$ і $a>3$; $y_2>0$, при $a <\frac{6}{7}$ і $a>3$.

Зображаючи на числових осях області знакосталості дискримінанта D і функцій y_1 і y_2, отримаємо п'ять інтервалів для $D>0$ (рис. 18).

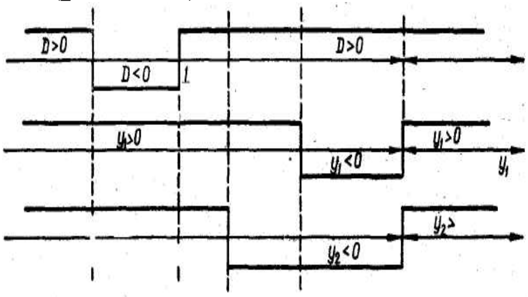

Рис.18

При
$$\left[\begin{array}{l} a \prec -2, \\ \frac{1}{2} \prec a \prec \frac{6}{7}, \\ a \succ 3 \end{array}\right.$$
маємо
$$\begin{cases} D \succ 0, \\ x_1 + x_2 \succ 0, \\ x_1 x_2 \succ 0. \end{cases}$$
Корені рівняння дійсні і обидва додатні при $\frac{6}{7} < a < \frac{4}{3}$ маємо
$$\begin{cases} D \succ 0, \\ x_1 + x_2 \succ 0, \\ x_1 x_2 \prec 0. \end{cases}$$
Це означає, що корені дійсні, з різними знаками і додатній корінь більший за абсолютною величиною.

При $\frac{4}{3}<a<3$ маємо
$$\begin{cases} D \succ 0, \\ x_1 + x_2 \prec 0, \\ x_1 x_2 \prec 0. \end{cases}$$
Це означає, що корені дійсні, мають різні знаки і додатній корінь менше за абсолютною величиною.

Приклад 5.

При яких значеннях параметра a один із коренів рівняння $x^2-7x+2a=0$ дорівнює подвоєному кореню рівняння $x^2-5x+a=0$?

Розв'язання:

Нехай α і γ – корені другого рівняння, тоді коренями першого будуть 2α і β. Згідно теореми Вієта, записуємо:
$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 7, \\ \alpha + \gamma = 5, \\ 2\alpha\beta = 2a, \\ \alpha\gamma = a. \end{cases}$$
З перших двох рівнянь системи знаходимо, що $\beta=7-2\alpha$ *і* $\gamma=5-\alpha$.

Підставляючи знайдені значення β і γ в наступні рівняння системи, отримаємо:
$$\begin{cases} \alpha(7 - 2\alpha) = a, \\ \alpha(5 - \alpha) = a. \end{cases} \Longrightarrow$$
$\alpha\,(7-2\alpha)=\alpha(5-\alpha), \alpha(2-\alpha)=0,\ \alpha_1=0,\ \alpha_2=2.$

Звідси отримаємо, що $a=0$ і $a=6$.

Відповідь: при $a=0$; $a=6$.

§5. Теореми про властивості квадратичних нерівностей

Нехай ми маємо квадратну нерівність $Ax^2 + Bx + C \vee 0, A \neq 0$

Де $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ – квадратична функція і вводимо наступні позначки: $A, B, C-$ коефіцієнти квадратичної функції; $f(a)$ – значення функції в точці $x = a; D = B^2 - 4AC$ – дискримінант; $X_0 = -\frac{B}{2A}$ – абсциса вершини параболи; $Y_0 = -\frac{D}{4A}$ – ордината вершини параболи; X_1 – менший дійсний корінь функції $f(x) = 0; X_2$ – більший дійсний корінь функції $f(x) = 0;$ $X_1 + X_2 = -\frac{B}{A}$ – сума коренів квадратного рівняння згідно з теоремою Вієта; $X_1 \cdot X_2 = \frac{C}{A}$ – добуток коренів квадратного рівняння згідно з теоремою Вієта.

Якщо всі задачі умовно розбити на деякі групи, то перша група задач зв'язана з наступними теоремами:

Теорема 1. Нерівність $Ax^2 + Bx + C \leq 0$ виконується для усіх $x \in R$ тоді і тільки тоді, коли: $\begin{cases} B^2 - 4AC \leq 0, \\ A < 0. \end{cases}$

Теорема 2. Нерівність $Ax^2 + Bx + C \geq 0$ виконується для усіх $x \in R$ тоді і тільки тоді, коли: $\begin{cases} B^2 - 4AC \leq 0, \\ A > 0. \end{cases}$

Друга група задач зв'язана з теоремами:

Теорема 3. Нерівність $Ax^2 + Bx + C < 0$ виконується для усіх $\alpha < x < \beta$ тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} D < 0, \\ A > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A > 0, \\ f(\alpha) \leq 0, \\ f(\beta) \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} D \geq 0, \\ A < 0, \\ f(\alpha) \leq 0, \\ x_0 < \alpha \end{cases} \vee \begin{cases} D \geq 0, \\ A < 0, \\ f(\beta) \leq 0, \\ x_0 > \beta. \end{cases}$$

Нерівність виконується для всіх $\alpha \leq x \leq \beta$ тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} D<0, \\ A<0 \end{cases} \vee \begin{cases} A>0, \\ f(\alpha)<0, \\ f(\beta)<0, \\ D>0 \end{cases} \vee \begin{cases} D\ge 0, \\ A<0, \\ f(\alpha)<0, \\ x_0<\alpha \end{cases} \vee \begin{cases} D\ge 0, \\ A<0, \\ f(\beta)<0, \\ x_0>\beta. \end{cases}$$

Теорема 4. Нерівність $Ax^2+Bx+C>0$ виконується для усіх $\alpha<x<\beta$ тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} D<0, \\ A>0 \end{cases} \vee \begin{cases} A<0, \\ f(\alpha)\ge 0, \\ f(\beta)\ge 0, \\ D>0 \end{cases} \vee \begin{cases} D\ge 0, \\ A>0, \\ f(\alpha)\ge 0, \\ x_0<\alpha \end{cases} \vee \begin{cases} D\ge 0, \\ A>0, \\ f(\beta)\le 0, \\ x_0>\beta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} D<0, \\ A>0 \end{cases} \vee \begin{cases} A<0, \\ f(\alpha)>0, \\ f(\beta)>0, \\ D>0 \end{cases} \vee \begin{cases} D\ge 0, \\ A>0, \\ f(\alpha)>0, \\ x_0<\alpha \end{cases} \vee \begin{cases} D\ge 0, \\ A>0, \\ f(\beta)<0, \\ x_0>\beta. \end{cases}$$

Теорема 5. Нерівність $Ax^2+Bx+C<0$ виконується для усіх $x>\delta$ тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} D<0, \\ A<0 \end{cases} \vee \begin{cases} D\ge 0, \\ A<0, \\ f(\delta)\le 0, \\ x_0<\delta. \end{cases}$$

Нерівність виконується для всіх $x<\delta$ тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} D<0, \\ A<0 \end{cases} \vee \begin{cases} D\ge 0, \\ A<0, \\ f(\delta)\le 0, \\ x_0>\delta. \end{cases}$$

Теорема 6. Нерівність $Ax^2+Bx+C<0$ виконується для усіх $x>\delta$ тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} D < 0, \\ A > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} D \geq 0, \\ A > 0, \\ f(\delta) \geq 0, \\ x_0 < \delta. \end{cases}$$

Нерівність виконується для всіх $x < \delta$ тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} D < 0, \\ A > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} D \geq 0, \\ A > 0, \\ f(\delta) \geq 0, \\ x_0 > \delta. \end{cases}$$

Третя група задач пов'язана з теоремами:

Теорема 7. З нерівності $Ax^2 + Bx + C < 0$ випливає нерівність $\alpha < x < \beta$ тоді і тільки тоді, коли: (рис. 17)

$$\begin{cases} B^2 - 4AC > 0, \\ A > 0, \\ A\alpha^2 + B\alpha + C \geq 0, \\ A\beta^2 + B\beta + C \geq 0, \\ \alpha < -\dfrac{B}{2A} < \beta. \end{cases}$$

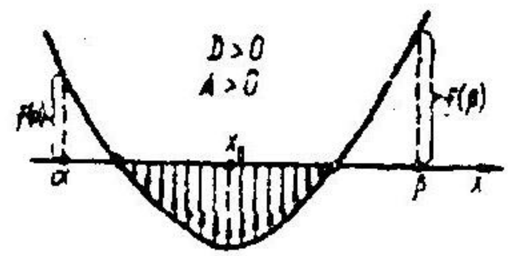

Рис. 17

Теорема 8. З нерівності $Ax^2 + Bx + C > 0$ випливає нерівність $\alpha < x < \beta$ тоді і тільки тоді, коли: (рис. 18)

$$\begin{cases} B^2 - 4AC > 0, \\ A < 0, \\ A\alpha^2 + B\alpha + C \leq 0, \\ A\beta^2 + B\beta + C \leq 0, \\ \alpha < -\dfrac{B}{2A} < \beta. \end{cases}$$

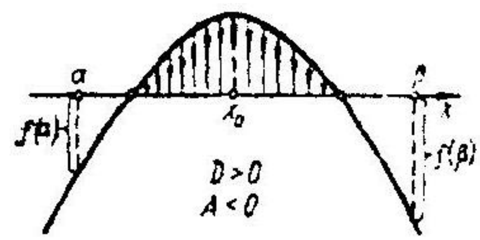

Рис. 18

Теорема 9. З нерівності $Ax^2 + Bx + C < 0$ випливає нерівність $x > \beta$ тоді і тільки тоді, коли: (рис. 19)

$$\begin{cases} B^2 - 4AC > 0, \\ A < 0, \\ A\beta^2 + B\beta + C \le 0, \\ -\dfrac{B}{2A} < \beta. \end{cases}$$

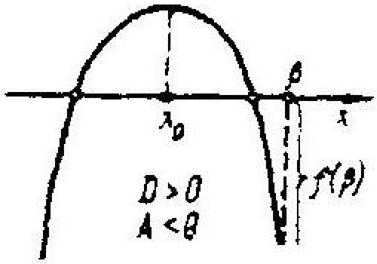

Рис.19

Нерівність $x < \alpha$ випливає тільки тоді, коли: (рис. 20)

$$\begin{cases} B^2 - 4AC > 0, \\ A < 0, \\ A\alpha^2 + B\alpha + C \le 0, \\ -\dfrac{B}{2A} > \alpha. \end{cases}$$

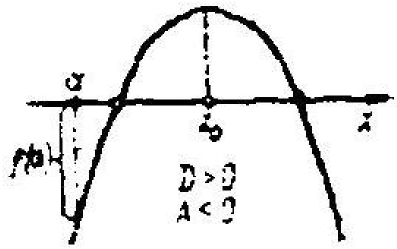

Рис. 20

Теорема 10. З нерівності $Ax^2 + Bx + C > 0$ випливає нерівність $x > \beta$ тоді і тільки тоді, коли: (рис. 21)

$$\begin{cases} B^2 - 4AC > 0, \\ A > 0, \\ A\beta^2 + B\beta + C \ge 0, \\ -\dfrac{B}{2A} < \beta. \end{cases}$$

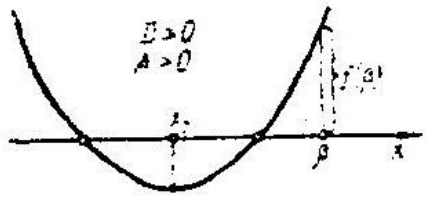

Рис. 21

Нерівність $x < \alpha$ випливає тільки тоді, коли: (рис. 22)

$$\begin{cases} B^2 - 4AC > 0, \\ A > 0, \\ A\alpha^2 + B\alpha + C \ge 0, \\ -\dfrac{B}{2A} > \alpha. \end{cases}$$

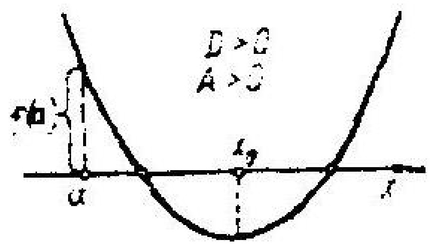

Рис. 22

Четверта група задач пов’язана з теоремами:

Теорема 11. З нерівності $\alpha < x < \beta$ випливає нерівність $Ax^2 + Bx + C < 0$ тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} D<0, \\ A<0 \end{cases} \vee \begin{cases} A>0, \\ f(\alpha)\le 0, \\ f(\beta)\le 0, \\ D>0 \end{cases} \vee \begin{cases} D\ge 0, \\ A<0, \\ f(\alpha)\le 0, \\ x_0<\alpha \end{cases} \vee \begin{cases} D\ge 0, \\ A<0, \\ f(\beta)\le 0, \\ x_0>\beta. \end{cases}$$

Геометрична інтерпретація теореми відображена на рисунку 23.

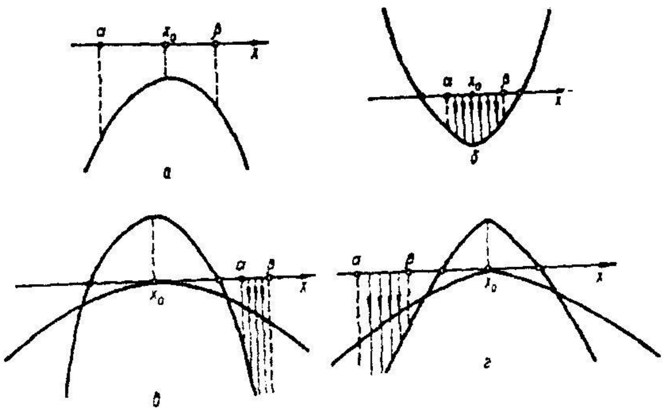

Рис. 23

Теорема 12. З нерівності $\alpha<x<\beta$ випливає нерівність $Ax^2+Bx+C>0$ тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} D<0, \\ A>0 \end{cases} \vee \begin{cases} A<0, \\ f(\alpha)\ge 0, \\ f(\beta)\ge 0, \\ D>0 \end{cases} \vee \begin{cases} D\ge 0, \\ A>0, \\ f(\alpha)\ge 0, \\ x_0<\alpha \end{cases} \vee \begin{cases} D\ge 0, \\ A>0, \\ f(\beta)\ge 0, \\ x_0>\beta. \end{cases}$$

Приклади застосування теорем до розв'язування нерівностей з параметрами

Приклад 1. При яких значеннях параметра *a* нерівність $(a-3)x^2-ax+8-a\le 0$ виконується для всіх $x \in R$?

Розв'язання:

Згідно з теоремою 1, необхідно і достатньо, щоб:

$\begin{cases} B^2-4AC\le 0, \\ A\succ 0, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} 5a^2-4a+96\le 0, \\ a-3\prec 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\le a\prec 4{,}8, \\ a\prec 3 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$

Відповідь: немає таких значень параметра *a*, при яких дана нерівність виконується для всіх $x \in R$.

Приклад 2. Знайти всі значення *p*, при яких вираз $lg((p-1)x^2+2px+3p-2)$ визначено на $x \in R$.

Розв’язання:

З означення області допустимих значень для логарифмічної функції знаходимо, що даний вираз має зміст для тих x, для яких

$$(p–1)x^2+2px+3p–2>0.$$

Згідно з теоремою 2, необхідно і достатньо знайти:

$$\begin{cases} B^2-4AC \le 0, \\ A \succ 0. \end{cases} \text{тобто} \quad \begin{cases} -8p^2+20p-8 \prec 0, \\ p-1 \succ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p^2 5p+2 \succ 0, \\ p-1 \succ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} p \succ 2, \\ p \prec \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ p \succ 1 \end{cases} \Leftrightarrow (p \succ 2)$$

Відповідь: $(2;+\infty)$.

Приклад 3. Знайти всі значення параметра m, при яких нерівність $mx^2–4x+3m+1>0$ виконується для всіх $x>0$.

Розв’язання:

Згідно з теоремою 6, умова заданої задачі виконується, якщо

$$\begin{cases} D \prec 0, \\ A \succ 0 \end{cases} \vee \begin{cases} D \ge 0, \\ A \succ 0, \\ f(0) \ge 0, \\ x_0 \prec 0. \end{cases}$$

Обчислимо основні елементи квадратного тричлена:

$D=B^2–4AC=16–4m(3m+1)=–12m^2–4m+16,$

$A= m, \qquad f(0)=3m+1;$

$X_0 = -\dfrac{B}{2A} = \dfrac{4}{2m}.$

Таким чином:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -12m^2-4m+16 \prec 0, \\ m \succ 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -12m^2-4m+16 \ge 0, \\ m \succ 0, \\ 3m+1 \ge 0, \\ \dfrac{4}{2m} \prec 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3m^2+m-4 \succ 0, \\ m \succ 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3m^2+m-4 \le 0, \\ m \succ 0, \\ m \ge -\dfrac{1}{3}, \\ m \prec 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2+m-4 \succ 0, \\ m \succ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \succ 1, \\ m \prec -\dfrac{4}{3}, \end{array}\right. \\ m \succ 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m \succ 1).$$

Відповідь: $(1;+\infty)$.

Приклад 4. Знайти всі значення параметра a, при яких нерівність $x^2-2(a^2-1)x-4a^2<0$ виконується для всіх $0<x<1$.

Розв’язання:

Згідно теореми 3, задача описується системою нерівностей (A=1):

$$\begin{cases} f(0)\le 0,\\ f(1)\le 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a^2\le 0,\\ -6a^2+3\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2\ge 0,\\ a^2-\frac{1}{2}\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty \prec a \prec +\infty,\\ \left[\begin{array}{l} a\ge \frac{\sqrt{2}}{2},\\ a\le -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\ge \frac{\sqrt{2}}{2},\\ a\le -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty)$.

Приклад 5. Знайти всі значення параметра *а*, при яких нерівність $(x-5a)(x-a+5)<0$ виконується для всіх x таких, що $2\le x\le 5$.

Розв'язання:

Корені квадратного тричлена тут очевидні: $x_1=5a;\ x_2=a-5$. Вони дійсні, різні ($D>0,\ A=1$) і обидва повинні лежати у відрізку [2;5]. Задача описується системою:

$$\begin{cases} f(2)\prec 0,\\ f(5)\prec 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-5a)(2-a+5)\prec 0,\\ (5-5a)(5-a+5)\prec 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-\frac{2}{5})(a-7)\prec 0,\\ (a-1)(a-10)\prec 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}\prec a\prec 7,\\ 1\prec a\prec 10\end{cases} \Leftrightarrow (1\prec a\prec 7).$$

Відповідь: (1;7).

Приклад 6. Знайти всі значення параметра *а*, при яких з нерівності $ax^2-x+1-a<0$ випливає нерівність $0<x<1$.

Розв'язання:

Згідно з теоремою 7, дана задача має описуватися системою нерівностей:

$$\begin{cases} D\succ 0,\\ A\succ 0,\\ f(0)\ge 0,\\ f(1)\ge 0,\\ 0\prec x_0\prec 1\end{cases}$$

де: $D=1-4a+4a^2=(2a-1)^2,\ A=a, f(0)=1-a,\ \ f(1)=0,\ x_0=\frac{1}{2a}$.

Тобто:

$$\begin{cases}(2a-1)^2 \succ 0,\\ a \succ 0,\\ 1-a \ge 0,\\ \dfrac{1}{a} \prec 1,\\ \dfrac{1}{a} \succ 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} a \succ \dfrac{1}{2},\\ a \prec \dfrac{1}{2},\end{array}\right.\\ a \succ 0,\\ a \le 1,\\ \left[\begin{array}{l} a \succ 1,\\ a \prec 0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a \succ 0,\\ a \le 1,\\ a \succ \dfrac{1}{2},\\ \left[\begin{array}{l} a \succ 1,\\ a \prec 0,\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases} a \succ 0,\\ a \le 1,\\ a \prec \dfrac{1}{2},\\ \left[\begin{array}{l} a \succ 1,\\ a \prec 0\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \varnothing$$

Якщо A=0, тобто a=0, маємо нерівність $(1\text{-}x<0) \Leftrightarrow (x>1)$, яка не задовольняє умові $0<x<1$.

Відповідь: Ø.

Приклад 7. Знайти всі значення параметра a, при яких з нерівності $1<x<2$ випливає нерівність $(1\text{-}a)x^2\text{-}4ax\text{-}4(1\text{-}a)<0$.

Розв’язання:

Обчислимо основні елементи квадратного тричлена в лівій частині нерівності:

$D=B^2-4AC=16a^2+16(1-a^2)=16;\qquad A=1-a;$

$f(1)=-9a-3;\qquad f(2)=-16a;$

$x_0=-\dfrac{B}{2A}=\dfrac{4a}{2(1-a)}=\dfrac{2a}{1-a}.$

Згідно з теоремою 11, задача описується сукупністю систем:

$$1)\begin{cases}1-a \succ 0,\\ -9a-3 \le 0,\\ -16a \le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \prec 1,\\ a \ge -\dfrac{1}{3},\\ a \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow (0 \le a \le 1).$$

$$2)\begin{cases}1-\mathrm{a} \prec 0,\\ -9\mathrm{a}-3 \le 0,\\ \dfrac{2\mathrm{a}}{1-\mathrm{a}} \prec 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{a} \succ 1,\\ \mathrm{a} \ge -\dfrac{1}{3},\\ \left[\begin{array}{l}\mathrm{a} \succ 1,\\ \mathrm{a} \prec \dfrac{1}{3}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\,\mathrm{a} \succ 1,\right. \Leftrightarrow (\mathrm{a} \succ 1).$$

$$3)\ \begin{cases} 1-a \prec 0, \\ -16a \le 0, \\ \dfrac{2a}{1-a} \succ 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \succ 1, \\ a \ge 0, \\ \dfrac{1}{2} \prec a \prec 1 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

Якщо A=0, тобто (1–a=0)$\Leftrightarrow$(a=1), то отримаємо нерівність (–4x–8<0)$\Leftrightarrow$(x+2>0) $\Leftrightarrow$(x>–2). Отже, інтервал 1<x<2 входить в x>–2 і a=1 є розв'язком.

Таким чином умова задачі виконується для параметра a в таких випадках:

$$\left[\begin{array}{l} 0 \le a \prec 1 \\ a \succ 1 \\ a = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow (a \ge 0).$$

Відповідь:(0;+∞).

§6. Багатокомпонентні задачі з теми «Квадратні рівняння з параметрами»

Завдання 1. Дано рівняння $(m+1)x^2-(m+3)x+3-m=0$, $m \in R$.

1. Розв'язати рівняння при $m=-3$.

2. Знайти значення параметра m, при яких число $\dfrac{1}{2}$ є коренем рівняння. Обчислити другий корінь.

3. Розв'язати рівняння відносно x.

4. При яких значеннях параметра m корені x_1 і x_2 даного рівняння задовольняють умову $x_1^2+x_2^2=5$?

5. Знайти значення параметра m, при яких корені рівняння є невід'ємними числами.

6. Знайти співвідношення між коренями x_1 і x_2 даного рівняння, яке не залежить від параметра m.

7. При яких значеннях параметра m один із коренів рівняння дорівнює квадрату другого?

8. Знайти значення параметра, при яких корені рівняння більші за одиницю.

9. Скласти рівняння, корені якого є числа $\dfrac{x_1}{x_2}$ і $\dfrac{x_2}{x_1}$, де x_1 і x_2 – корені даного рівняння.

10.Знайти найменше ціле значення параметра m, при якому виконується нерівність.

11.При яких значеннях параметра m числа 1, x_1, x_2 у такому порядку утворюватимуть зростаючу арифметичну прогресію? Знайти ці числа.

Розв'язання.

1. Якщо $m=-3$, то рівняння набуває вигляду $-2x^2+6=0$. Звідси $x=\pm\sqrt{3}$.

2. Число $\dfrac{1}{2}$ буде коренем рівняння, якщо воно задовольняє рівняння. Тому $(m+1)\dfrac{1}{4}-(m+3)\dfrac{1}{2}+3-m=0$, звідси $m=1\dfrac{2}{5}$. Підставивши це значення m в дане рівняння, отримаємо:

$6x^2-11x+4=0$ звідси $x_1=\dfrac{1}{2}, x_2=1\dfrac{1}{3}$ – шуканий корінь.

3. Очевидно, що при $m=-1$ дістанемо лінійне рівняння $-2x+4=0$, коренем якого є $x=2$.

Якщо $m\neq-1$, то дане рівняння є квадратним і його розв'язки залежать від дискримінанта D: $D=(m+3)^2-4(m+1)(3-m)=5m^2-2m-3$.

Якщо $5m^2-2m-3=0$, тобто $m=1$ або $m=-\dfrac{3}{5}$, то дискримінант $D=0$. Рівняння має один корінь $x=\dfrac{m+3}{2(m+1)}$. При $m=1$ і $m=-\dfrac{3}{5}$ отримаємо, відповідно, $x=1$ і $x=3$.

Якщо $5m^2-2m-3>0$ і $m\neq-1$, тобто $m\in(-\infty;-1)\cup\left(-1;-\dfrac{3}{5}\right)\cup(1;+\infty)$, то дискримінант $D>0$.

Рівняння має два різні корені x_1 і x_2:

$$x_{1,\,2}=\frac{m+3\pm\sqrt{5m^2-2m-3}}{2(m+1)}.$$

Якщо $5m^2-2m-3<0$, тобто $m\in\left(-\dfrac{3}{5};1\right)$, то дискримінант $D<0$. Рівняння розв'язків не має.

4. У лівій частині рівності $x_1^2+x_2^2=5$ виділимо повний квадрат

$$\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=5. \qquad (6.1)$$

За теоремою Вієта: $x_1+x_2=\dfrac{m+3}{m+1}$ і $x_1x_2=\dfrac{3-m}{m+1}$. Підставивши ці значення в рівність (6.1), дістанемо рівняння

$\left(\dfrac{m+3}{m+1}\right)^2-2\cdot\dfrac{3-m}{m+1}=5.$ Після відповідних перетворень одержимо рівняння $m^2+4m+1=0$, звідси $m=-2-\sqrt{3}$ або $m=-2+\sqrt{3}$. Число $-2+\sqrt{3}\notin\left(-\infty;-1\right)\cup\left(-1;-\dfrac{3}{5}\right]\cup\left[1;+\infty\right)$. Отже, $m=-2-\sqrt{3}$ – шукане значення параметра.

5. Оскільки при $m=-1$ дане рівняння має додатний корінь $x=2$, то $m=-1$ задовольняє умову задачі. У випадку квадратного рівняння корені будуть невід’ємними тоді і тільки тоді, коли одночасно виконуються умови: $D\geq 0, \dfrac{c}{a}\geq 0, -\dfrac{b}{a}\geq 0.$ Отже, маємо систему

$$\begin{cases} 5m^2-2m-3\geq 0, \\ \dfrac{3-m}{m+1}\geq 0, \\ \dfrac{m+3}{m+1}\geq 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} m\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{5}\right]\cup\left[1;+\infty\right), \\ m\in\left(-1;3\right], \\ m\in\left(-\infty;-3\right]\cup\left[-1;+\infty\right). \end{cases}$$

Звідси $m\in\left(-1;-\dfrac{3}{5}\right]\cup\left[1;3\right]$.

Враховуючи, що $m=-1$ задовольняє умову задачі, дістанемо: $m\in\left[-1;-\dfrac{3}{5}\right]\cup\left[1;3\right]$.

6. За теоремою Вієта: $x_1+x_2=\dfrac{m+3}{m+1}$ і $x_1x_2=\dfrac{3-m}{m+1}$. Виділимо цілі частини у виразах, які містяться у правих частинах цих рівностей: $x_1+x_2=1+\dfrac{2}{m+1}$ і $x_1x_2=-1+\dfrac{4}{m+1}$. Помножимо праву і ліву частини першої рівності на –2, одержимо:

$-2x_1-2x_2=-2-\dfrac{4}{m+1}$. другу рівність залишимо без зміни: $x_1x_2=-1+\dfrac{4}{m+1}$. Додавши обидві частини останніх рівностей, дістанемо: $-2x_1-2x_2+x_1x_2=-3$ або $2\left(x_1+x_2\right)-x_1x_2=3$. Це і є шукане співвідношення між коренями.

7. Очевидно, що повинна виконуватися одна з умов $x_1=x_2^2$ або $x_2=x_1^2$. Для їх виконання необхідно і достатньо, щоб один із виразів $x_2^2-x_1, x_1^2-x_2$ дорівнював нулю.

Тобто $\left(x_2^2-x_1\right)\left(x_1^2-x_2\right)=0$ або $\left(x_1x_2\right)^2+x_1x_2-\left(x_1^3+x_2^3\right)=0$, або $\left(x_1x_2\right)^2+x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1x_2\right]=0$.

Оскільки $x_1+x_2=\dfrac{m+3}{m+1}$ і $x_1x_2=\dfrac{3-m}{m+1}$, то підставивши ці значення в останню рівність, дістанемо:

$$\left(\frac{3-m}{m+1}\right)^2+\frac{3-m}{m+1}-\left(\frac{m+3}{m+1}\right)\left(\left(\frac{m+3}{m+1}\right)^2-3\cdot\frac{3-m}{m+1}\right)=0.$$

Після відповідних спрощень одержимо рівняння $m^3+4m^2-2m-3=0$ або $\left(m-1\right)\left(m^2+5m+3\right)=0$, яке має розв’язки: $m=1$ і $m=-\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$.

Впевнюємося, що ці значення параметра задовольняють умову існування коренів.

8. Легко бачити, що значення $m=-1$ задовольняє умову задачі, бо корінь $x=2$ більший за одиницю. У випадку, коли дане рівняння є квадратним, тобто при $m\neq-1$, можна утворити відповідно до умови громіздку систему ірраціональних нерівностей і розв’язати її. Але цей шлях нераціональний. Доцільно скористатися графічною ілюстрацією даної задачі, розташувавши відповідним чином корені рівняння відносно числа 1.

Нехай $f\left(x\right)=\left(m+1\right)x^2-\left(m+3\right)x+3-m, m\neq-1$, x_1 і x_2 корені квадратного тричлена. Тоді при $m+1>0$ і $m+1<0$ відповідно маємо графіки, зображені на рисунку 24.

Звідси одержимо сукупність систем нерівностей

$$\begin{cases} m+1>0, \\ D \geq 0, \\ f(1)>0, \\ x_0>1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} m+1<0, \\ D \geq 0, \\ f(1)<0, \\ x_0>1. \end{cases}$$

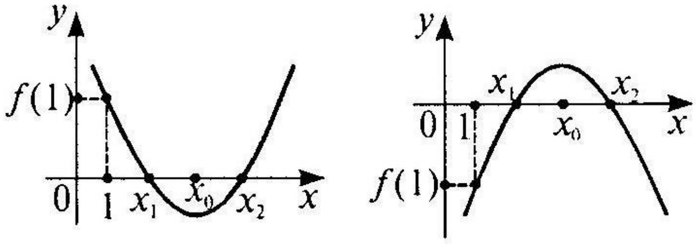

Рис. 24

Об'єднавши ці системи, дістанемо систему нерівностей

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ (m+1)f(1)>0, \\ x_0>1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 5m^2-2m-3 \geq 0, \\ (m+1)(1-m)>0, \\ \dfrac{m+3}{2(m+1)}>1, \end{cases}$$ звідси з урахуванням $m=-1$ маємо: $m \in \left[-1; -\dfrac{3}{5}\right]$.

9. Виразимо суму і добуток коренів шуканого рівняння через суму $x_1+x_2=\dfrac{m+3}{m+1}$ і добуток $x_1x_2=\dfrac{3-m}{m+1}$ коренів даного рівняння:

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}-2=$$

$$=\frac{(m+3)^2}{(m+1)^2}\cdot\frac{m+1}{3-m}-2=\frac{3m^2+2m+3}{(m+1)(3-m)},$$

$$\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_1}=1=\frac{(m+1)(3-m)}{(m+1)(3-m)}, m \neq -1, m \neq 3.$$

Отже, в шуканому квадратному рівнянні старший коефіцієнт $a=(m+1)(3-m)$, коефіцієнти $b=-\left(3m^2+2m+2\right)$ і $c=(m+1)(3-m)$.

Таким чином, рівняння

$(m+1)(3-m)x^2-\left(3m^2+2m+3\right)x+(m+1)(3-m)=0$ є шуканим.

10. Суму кубів, що стоїть у лівій частині нерівності $x_1^3 + x_2^3 \le 2$ виразимо через суму $x_1 + x_2 = \dfrac{m+3}{m+1}$ і добуток $x_1 x_2 = \dfrac{3-m}{m+1}$. Дістаємо спочатку нерівність $(x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2\right) \le 2$, а потім таку

$$\left(\frac{m+3}{m+1}\right)\left(\left(\frac{m+3}{m+1}\right)^2 - 3\cdot\frac{3-m}{m+1}\right) - 2 \le 0.$$

Після відповідних спрощень отримаємо нерівність $\dfrac{m^3 + 3m - 3m - 1}{(m+1)^3} \le 0$ або $\dfrac{(m-1)(m^2+4m+1)}{(m+3)^3} \le 0$, розв'язавши яку методом інтервалів, дістанемо: $m \in \left[-2-\sqrt{3};-1\right) \cup \left[-2+\sqrt{3};1\right]$.

Враховуючи, що корені x_1 і x_2 існують, коли $m \in (-\infty;-1) \cup \left(-1;-\dfrac{3}{5}\right] \cup [1;+\infty)$, маємо: $m \in \left(-2-\sqrt{3};-1\right) \cup \{1\}$.

Найменшим цілим значенням параметра m з цього проміжку є число –3.

11. Числа 1, x_1, x_2 у такому порядку будуть послідовними членами деякої арифметичної прогресії за умови виконання її основної властивості. Тобто $x_1 = \dfrac{1+x_2}{2}$ або $2x_1 - x_2 = 1$.

З урахуванням $x_1 + x_2 = \dfrac{m+3}{m+1}$ і $x_1 x_2 = \dfrac{3-m}{m+1}$ дістаємо таку систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = \dfrac{m+3}{m+1}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{3-m}{m+1}. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь системи знаходимо $x_1 = \dfrac{2m+4}{3(m+1)}$ і $x_2 = \dfrac{m+5}{3(m+1)}$, і підставивши їх у третє рівняння, матимемо рівняння відносно *m:*

$$\frac{2m+4}{3(m+1)}\cdot\frac{m+5}{3(m+1)}=\frac{3-m}{m+1}$$ або $11m^2-4m-7=0$, звідки $m=1$ або $m=-\frac{7}{11}$. Обидва знайдені значення задовольняють умову

$$m\in(-\infty;-1)\cup\left(-1;-\frac{3}{5}\right]\cup[1;+\infty).$$

Отже, при $m=1$ і $m=-\frac{7}{11}$ послідовними членами арифметичної прогресії будуть, відповідно, числа 1; 1; 1 і 1; $\frac{5}{2}$; 4. Оскільки за умовою задачі задовольняє лише $m=-\frac{7}{11}$ і числа 1; $\frac{5}{2}$; 4.

Відповідь: 1) $x=\pm\sqrt{3}$; 2) $m=1\frac{2}{5}, x=1\frac{1}{3}$; 3) якщо $m=-1$, то $x=2; m=1$, то $x=1; m=-\frac{3}{5}$, то $x=3$;
$m\in(-\infty;-1)\cup\left(-1;-\frac{3}{5}\right)\cup(1;+\infty)$, то $x_{1,2}=\frac{m+3\pm\sqrt{5m^2-2m-3}}{2(m+1)}$;
$m\in\left(-\frac{3}{5};1\right)$, то $\varnothing$; 4) $m=-2-\sqrt{3}$; 5) $m\in\left[-1;-\frac{3}{5}\right]\cup[1;3]$;
6) $2(x_1+x_2)-x_1x_2=3$; 7) $m=1, m=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$; 8) $m\in\left[-1;-\frac{3}{5}\right]$;
9) $(m+1)(3-m)x^2-(3m^2+2m+3)x+(m+1)(3-m)=0$; 10) $m=-3$;
11) При $m=-\frac{7}{11}$ маємо 1; $\frac{5}{2}$; 4.

Завдання 2. Дано рівняння $(m-2)x^2+2(m-2)x+3m+4=0$, при $m\in R$.

1. Розв’язати рівняння при $m=1$.

2. Знайти значення параметра *m*, при яких число $-\frac{2}{3}$ є коренем рівняння. Обчислити другий корінь.

3. Розв'язати рівняння відносно x.

4. При яких значеннях параметра m корені x_1 і x_2 даного рівняння задовольняють умову $x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2 = 7$?

5. Знайти значення параметра m, при яких корені рівняння є від'ємними числами.

6. Знайти співвідношення між коренями x_1 і x_2 даного рівняння, яке не залежить від параметра m.

7. При яких значеннях m один із коренів рівняння в 1,5 рази більший за другий?

8. Знайти значення параметра m, при яких корені рівняння менші за число 2.

9. Скласти рівняння, коренями якого є числа $\frac{1}{x_1 - 1}$ і $\frac{1}{x_2 - 1}$, де x_1 і x_2 – корені даного рівняння.

10. Знайти найменше ціле значення параметра m, при якому виконується нерівність $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq m$, де x_1 і x_2 – корені даного рівняння.

11. При яких значеннях параметра m числа -1, x_1, x_2 у такому порядку є послідовними членами геометричної прогресії? Знайти ці числа.

Відповідь: 1) $x_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2}$; 2) $m = -2\frac{14}{19}, x_2 = -1\frac{1}{3}$;

3) якщо $m = 2$, то $\varnothing$; $m = -3$, то $x = -1$; $m \in (-3; 2)$, то $x_{1,2} = \frac{2 - m \pm \sqrt{-2m^2 - 2m + 12}}{m - 2}$; $m \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$, то $\varnothing$; 4) $m = -\frac{1}{2}$; 5) $m \in \left[-3; -1\frac{1}{3}\right)$; 6) $x_1 + x_2 = -2$; 7) $m = -2\frac{46}{51}$; 8) $m \in [-3; 2)$; 9) $(6m - 2)x^2 + 4(m - 2)x + m - 2 = 0$; 10) $m = -3$; 11) $m = -3$ маємо -1; -1; -1; при $m = 1\frac{1}{11}$ маємо -1; 2; -4.

Завдання 3. Дано рівняння $ax^2 - 3(a + 2)x + a + 16 = 0, a \in R$.

1. Розв'язати рівняння при $a = -2$.

2. Знайти значення параметра a, при яких число $-\frac{1}{3}$ є коренем рівняння. Обчислити другий корінь.

3. Розв’язати рівняння відносно x.

4. При яких значеннях параметра a корені x_1 і x_2 даного рівняння задовольняють умову $x_1^2+x_2^2=7$?

5. Знайти значення параметра a, при яких корені рівняння є додатними числами.

6. Знайти співвідношення між коренями x_1 і x_2 даного рівняння, яке не залежить від параметра a.

7. При яких значеннях параметра a різниця коренів рівняння дорівнює одиниці?

8. Знайти значення параметра a, при яких число 2 належить проміжку $(x_1;x_2)$.

9. Скласти рівняння, коренями якого є числа $4x_1-1$ і $4x_2-1$, де x_1 і x_2 – корені даного рівняння.

10. Знайти найменше ціле значення параметра a, при якому виконується нерівність $\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}>1$, де x_1 і x_2 – корені даного рівняння.

11. При яких значеннях параметра a числа $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{x_2}$ у такому порядку утворюватимуть спадаючу арифметичну прогресію?

Відповідь: 1) $x_{1,2}=\pm\sqrt{7}$; 2) $a=-8\frac{10}{19}$, $x_2=2\frac{17}{27}$;

3) якщо $a=0$, то $=2\frac{2}{3}$; $a=2$, то $x=3$; $a=3\frac{3}{5}$, то $x=2\frac{1}{3}$; якщо $a\in(-\infty;0)\cup(0;2)\cup\left(3\frac{3}{5};+\infty\right)$,

то $x_{1,2}=\frac{3(a+2)\pm\sqrt{5a^2-28a+36}}{2a}$; якщо $a\in\left(2;3\frac{3}{5}\right)$, то $\varnothing$;

4) $a=-9$; 5) $a\in(-\infty;-16)\cup[0;2]\cup\left[3\frac{3}{5};+\infty\right)$;

6) $8\left(x_1+x_2\right)-3x_1x_2=21$; 7) $a=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{2}$; 8) $a\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$; 9) $ax^2-2\left(5a+12\right)x+5a+232=0$; 10) $a=4$; 11) при $a=5$ маємо $\dfrac{21+\sqrt{21}}{42}$; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{21-\sqrt{21}}{42}$.

Завдання 4. Дано рівняння $\left(a+2\right)x^2-\left(2a+7\right)x+a+7=0$, $a\in R$.

1. Розв'язати рівняння при $a=-1$.

2. Знайти значення параметра a, при яких число $\dfrac{1}{3}$ є коренем рівняння. Обчислити другий корінь.

3. Розв'язати рівняння відносно x.

4. При яких значеннях параметра a корені x_1 і x_2 даного рівняння задовольняють умову $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=3$?

5. Знайти значення параметра a, при яких обидва корені рівняння є додатними.

6. Знайти співвідношення між коренями x_1 і x_2 даного рівняння, яке не залежить від параметра a.

7. При яких значеннях параметра a один із коренів рівняння вдвічі менший за другий?

8. Знайти значення параметра a, при яких один із коренів рівняння менший за число –1, а другий більший за число 1.

9. Скласти рівняння, коренями якого є числа $\dfrac{1}{x_1}$ і $\dfrac{1}{x_2}$, де x_1 і x_2 – корені даного рівняння.

10. Знайти найбільше ціле значення параметра a, при якому виконується нерівність $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}\le 2$, де x_1 і x_2 – корені даного рівняння.

11. При яких значеннях параметра a числа $2x_1-1$, 4, $2x_2-1$ у такому порядку є послідовними членами геометричної прогресії? Знайти ці числа.

Відповідь: 1) $x_1=2, x_2=3$; 2) $a=-11, x_2=1\dfrac{1}{3}$; 3) якщо $a=-2$, то $x=1\frac{2}{3}$; $a=-\frac{7}{8}$, то $x=2\frac{1}{3}$; якщо $a\in(-\infty;-2)\cup\left(-2;-\frac{7}{8}\right)$, то $x_{1,2}=\frac{7+2a\pm\sqrt{-7-8a}}{2(a+2)}$; якщо $a\in\left(-\frac{7}{8};+\infty\right)$, то $\varnothing$; 4) $a=-5$; 5) $a\in(-\infty;-7)\cup\left(-2;-\frac{7}{8}\right]$; 6) $5(x_1+x_2)-3x_2x_2=7$; 7) $a=\frac{-25\pm\sqrt{513}}{2}$; 8) $a\in(-4;-2)$; 9) $(a+7)x^2-(2a+7)x+a+2=0$; 10) $a=-1$; 11) при $a=-1\frac{1}{15}$ маємо $\frac{73-\sqrt{345}}{28}$; 4; $\frac{73+\sqrt{345}}{28}$.

Завдання 5. Дано рівняння $(a+4)x^2+8x+6-a=0, a\in R.$

1. Розв'язати рівняння при $a=6$.

2. Знайти значення параметра a, при яких число $-\frac{1}{2}$ є коренем рівняння. Обчислити другий корінь.

3. Розв'язати рівняння відносно x.

4. При яких значеннях параметра a корені x_1 і x_2 даного рівняння задовольняють умову $x_1^4+x_2^4=(x_1+x_2)^4$?

5. Знайти значення параметра a, при яких обидва корені рівняння не є додатними.

6. Знайти співвідношення між коренями x_1 і x_2 даного рівняння, яке не залежить від параметра a.

7. При яких значеннях параметра a один із коренів рівняння втричі більший за другий?

8. Знайти значення параметра a, при яких корені даного рівняння лежать між числами –2 і 0.

9. Скласти рівняння, коренями якого є числа $\frac{1}{x_1^2}$ і $\frac{1}{x_2^2}$, де x_1 і x_2 – корені даного рівняння.

10. Знайти найбільше ціле від'ємне значення параметра a, при якому виконується нерівність $\frac{1-x_1}{x_2}+\frac{1-x_2}{x_1}<4$, де x_1 і x_2 – корені даного рівняння.

11. При яких значеннях параметра a числа $x_1+x_2, x_1x_2, a+5$ у такому порядку є послідовними членами арифметичної прогресії? Знайти ці числа.

Відповідь: 1) $x_1=-\dfrac{4}{5}, x_2=0$; 2) $a=4, x_2=-\dfrac{1}{2}$; 3) якщо $a=-4$, то $x=-1\dfrac{1}{4}$; $a=-2$, то $x=-2$; $a=4$, то $x=-\dfrac{1}{2}$; якщо $a\in(-\infty;-4)\cup(-4;-2)\cup(4;+\infty)$, то $x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{a^2-2a-8}}{a+4}$; якщо $a\in(-2;4)$, то $\varnothing$; 4) $a=6$; 5) $a\in(-4;-2)\cup[4;6]$; 6) $5(x_1+x_2)+4x_2x_2=-4$; 7) $a=1\pm\sqrt{13}$; 8) $a\in(4;6)$; 9) $(6-a)^2x^2+2(a^2-2a+8)x+(a+4)^2=0$; 10) $a=-2$; 11) при $a=-11$ маємо $\dfrac{8}{7}; -\dfrac{17}{7}$, –6.

Завдання 6. Дано рівняння $(m-1)x^2+2(m-3)x+m^2-9=0$, $m\in R$.

1. Розв’язати рівняння при $m=-2$.
2. Знайти значення параметра m, при яких число -2 є коренем рівняння. Обчислити другий корінь.
3. Розв’язати рівняння відносно x.
4. При яких значеннях параметра m корені x_1 і x_2 даного рівняння задовольняють умову $\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}=-16$?
5. Знайти значення параметра m, при яких корені рівняння будуть одного знака.
6. Знайти співвідношення між коренями x_1 і x_2 даного рівняння, яке не залежить від параметра m.
7. При яких значеннях параметра m різниця коренів рівняння дорівнює 3?
8. Знайти значення параметра m, при яких один із коренів рівняння менший за число –2, а другий більший за число –2, але менший за 0.
9. Скласти рівняння, коренями якого є числа $\dfrac{1}{x_1}+2$ і $\dfrac{1}{x_2}+2$, де

x_1 і x_2 – корені даного рівняння.

10. Знайти найменше ціле значення параметра m, при якому виконується нерівність $x_1^2 + x_2^2 \le 6x_1x_2$, де x_1 і x_2 – корені даного рівняння.

11. При яких значеннях параметра m числа x_1x_2, $x_1 + x_2$, $-\frac{4}{5}$ у такому порядку є послідовними членами геометричної прогресії? Знайти ці числа.

Відповідь: 1) $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{10}}{3}$; 2) $m = -1, x_2 = -2$; 3) $m = 0$, то $x = -3$; $m = 3$, то $x = 0$; якщо $m = -1$, то $x = -2$; якщо $m \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; 3)$, то $x_{1,2} = \frac{3 - m \pm \sqrt{-m^3 + 2m^2 + 3m}}{m - 1}$; якщо $m \in (-1; 0) \cup (3; +\infty)$, то $\varnothing$; 4) $m = -1\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2}$; 5) $m \in (-3; -1] \cup [0; 1]$;
6) $2(x_1 + x_2)^2 + 6(x_1 + x_2) + x_2x_2(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 = 0$; 7) $m = -3$; $m = \frac{11 \pm \sqrt{73}}{8}$; 8) $m \in (-3; -1)$;
9) $(m^2 - 9)x^2 - (4m^2 - 2m - 30)x + 4m^2 - 3m - 25 = 0$; 10) $m = -2$;
11) при $m = -9$ і $m = 2$ маємо, відповідно, $-\frac{36}{5}; -\frac{12}{5}; -\frac{4}{5}$ і –5; 2; $-\frac{4}{5}$.

§7.Групи задач з параметрами

Задачі з параметрами зі збірника [14] можна поділити на три групи.

I. Задачі на дослідження кількості розв’язків залежно від параметрів (1227, а, 1236, а, 1261, а).

II. Задачі, в яких треба визначити значення параметрів, при яких існують (або не існують) розв’язки, і знайти ці розв’язки (1251, а, 1252, а, 1289, а, б).

III. Задачі на знаходження всіх значень параметрів, при яких розв’язки задовольняють дані умови (1233, б, 1234, а, 1235, б, 1244, б, 1245, а, б, 1253, а, б, 1261, б, 1262, б, 1271, б).

Розглянемо ці задачі.

І. Дослідження кількості розв'язків.

Задачі цієї групи частіше розв'язуються графічно.

1227, а. Скільки розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$ залежно від параметра a?

Розв'язання. Графіком першого рівняння системи є квадрат із вершинами в точках $(\pm1;0),(0;\pm1)$, а другого – коло радіуса $r=\sqrt{a}$ з центром у початку координат (рис. 25).

Квадрат і коло мають 4 спільні точки, якщо $r=1$ або $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 8 спільних точок, коли $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<r<1$; не мають спільних точок для $r<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ і $r>1$. Тому, враховуючи, що $r=\sqrt{a}$, система рівнянь має чотири розв'язки, якщо $a=1$ або $a=\dfrac{1}{2}$; вісім розв'язків, якщо $\dfrac{1}{2}<a<1$; не має розв'язків, коли $a<\dfrac{1}{2}$ або $a>1$.

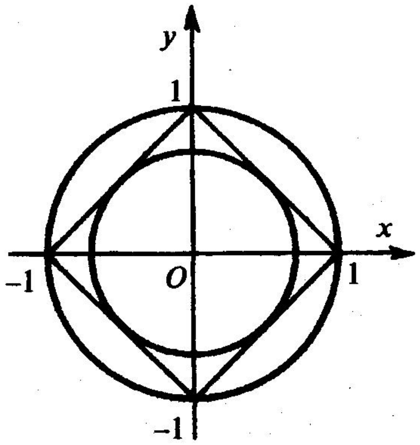

Рис. 25

1236, а. Скільки розв'язків має рівняння $|x|-5=\dfrac{a-4}{|x|}$ залежно від параметра a?

Розв'язання. Графічне розв'язування рівняння можна звести до розв'язування однієї з трьох систем:

$$\begin{cases} y=|x|-5, \\ y=\dfrac{a-4}{|x|}; \end{cases} \begin{cases} y=x^2+4, \\ y=5|x|+a, \\ x\neq 0; \end{cases} \begin{cases} y=x^2-5|x|+4, \\ y=a, \\ x\neq 0. \end{cases}$$

Побудувати графіки рівнянь системи і знайти значення параметра найлегше для третьої системи (рис. 26).

Очевидно, що система, а отже і рівняння, не має розв'язків, коли $a<-\dfrac{9}{4}$; має 2 розв'язки, коли $a=-\dfrac{4}{9}$ або $a\geq 4$, має 4 розв'язки, коли $-\frac{9}{4} < a < 4$.

Зауваження. Розв'язки легко знайти, розв'язуючи рівняння $|x|^2 - 5|x| - (a-4) = 0$, де $x \neq 0$. З формули $|x| = \frac{5 \pm \sqrt{9+4a}}{2}$ маємо: два розв'язки $\pm\frac{5}{2}$, якщо $a = -\frac{9}{4}$ і $\pm\frac{5+\sqrt{9+4a}}{2}$, якщо $a > 4$;

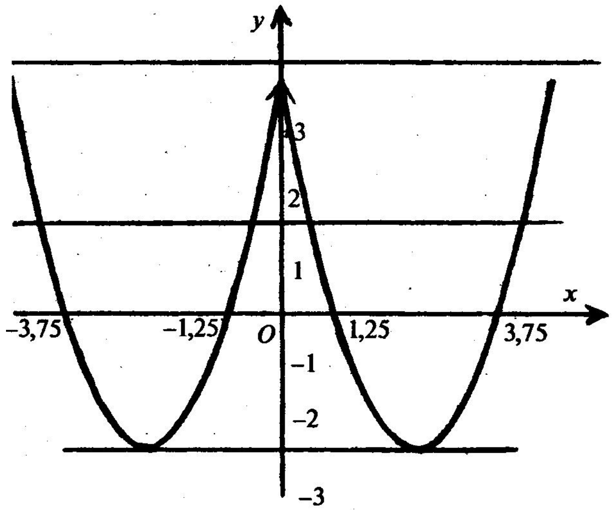

Рис. 26

чотири розв'язки $\pm\frac{5+\sqrt{9+4a}}{2}$ і $\pm\frac{5-\sqrt{9+4a}}{2}$, якщо $-\frac{9}{4} < a < 4$.

У випадку, коли $a < -\frac{9}{4}$, рівняння дійсних розв'язків не має.

1261, а. Скільки розв'язків має рівняння $x^5 = 5x + 2a$ залежно від параметра a?

Розв'язання. Зведемо рівняння до системи

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}\left(x^5 - 5x\right), \\ y = a. \end{cases}$$

Побудуємо графік функції $y = \frac{1}{2}\left(x^5 - 5x\right)$, досліджуючи її за допомогою похідної, і пряму $y = a$ (рис. 27).

Оскільки (–1; 2) – точка локального максимуму, а (1; –2) – точка локального мінімуму, то очевидно, що система, а отже й рівняння, має один розв'язок, якщо $|a| > 2$, два розв'язки, коли $|a| = 2$, і три – для $|a| < 2$.

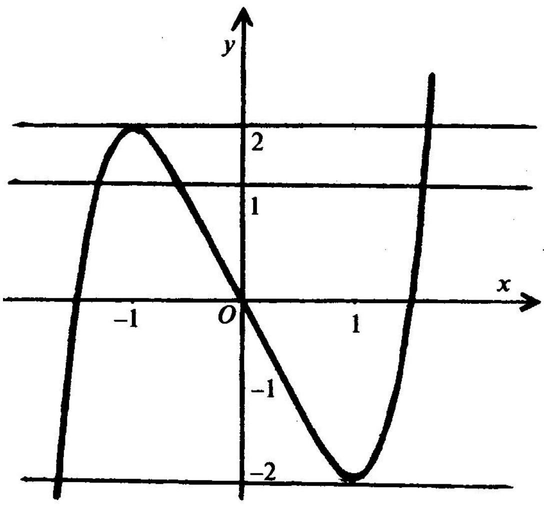

Рис. 27

ІІ. Знаходження коренів та умов їх існування.

1251, а. При яких значеннях параметра a рівняння $x^2+2x\sin ax+1=0$ має корені? Знайти ці корені.

Розв'язання.

Перший спосіб.

Очевидно, що 0 не є коренем рівняння, а функція $y=x^2+2x\sin ax+1$ – парна, тому досить дослідити існування додатних коренів цього рівняння. Для цього запишемо його так: $x+\dfrac{1}{x}=-2\sin ax.$

Оскільки $x+\dfrac{1}{x}\geq 2,$ причому рівність виконується тільки тоді, коли $x=1,$ то рівняння матиме розв'язки лише при тих значеннях параметра $a,$ при яких $-2\sin\alpha=2,$ тобто, коли $a=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k$ – ціле.

Відповідь. $x=\pm 1,$ якщо $a=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z.$

Другий спосіб.

Вважаючи $\sin ax$ сталим коефіцієнтом при змінній $x,$ розглянемо це трансцендентальне рівняння як квадратне. Тоді за формулою коренів квадратного рівняння

$$x=-\sin ax\pm\sqrt{\sin^2 ax-1}, \tag{7.1}$$

де $\sin^2 ax-1\geq 0,$ тобто $\sin ax=\pm 1,$ що є необхідною умовою існування розв'язків даного рівняння. Із співвідношення (7.1) маємо $x=\mp 1,$ після чого з рівності $\sin a=-1$ знаходимо, що $a=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,$ $k\in Z.$

1252, а. При яких значеннях параметра a рівняння $\left(a^2+2\right)\sin^2 x+4a\sin x\cos x=a^2+3$ має розв'язки?

Вказівка. Використовуючи тригонометричну одиницю, зводимо рівняння до однорідного $-\sin^2 x+4a\cos x\sin x-\left(a^2+3\right)\cos^2 x=0.$

Відповідь. $x = \operatorname{arctg}\left(2a \pm \sqrt{3\left(a^2 - 1\right)}\right) + \pi k,$ де $k \in Z,$ якщо $|a| \geq 1.$

1289. Знайти всі значення параметра $a,$ при яких системи

а) $\begin{cases} y\sqrt{1-x^2} - x^2 = 2a - 1, \\ y^2 + y\sqrt{1-x^2} = 2a - a^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^x\left(y+1\right)\left(1 - y2^x\right) = a^3, \\ \left(1+2^x\right)\left(1 - y2^x\right) = a \end{cases}$ не мають розв'язків.

Розв'язання. З'ясуємо, при яких значеннях параметра система сумісна та визначимо ті значення параметра, при яких система розв'язків не має.

а) Додамо рівняння системи і, виділивши квадрат двочлена в цьому рівнянні, прийдемо до рівносильної системи, яку запишемо так:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2}\left(y + \sqrt{1-x^2}\right) = 2a, \\ \left(y + \sqrt{1-x^2}\right)^2 = 4a - a^2. \end{cases} \tag{7.2}$$

Ця система не сумісна, коли $a \in \left(-\infty; 0\right) \cup \left(4; +\infty\right),$ бо при цих значеннях параметра права частина другого рівняння системи від'ємна. Дослідимо сумісність системи на проміжку $\left[0; 4\right].$ Якщо $a = 0,$ то система має безліч розв'язків $\left(x; -\sqrt{1-x^2}\right),$ де $|x| \leq 1;$ якщо $a = 4,$ то розв'язків немає.

Для $a \in \left(0; 4\right)$ із системи (7.2) спочатку знаходимо

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{2a}{\sqrt{4a-a^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 = \dfrac{4a}{4-a}, \\ 1 - x^2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{4-5a}{4-a}, \\ 0 \leq \dfrac{4-5a}{4-a} \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{4-5a}{4-a}}, \\ 0 < a \leq \dfrac{4}{5}, \end{cases}$$

а потім $y=\frac{2a-a^2}{\sqrt{4a-a^2}}$. Отже, система має один розв'язок $\left(0;\frac{3}{5}\right)$, якщо $a=\frac{4}{5}$; два розв'язки $\left(\pm\sqrt{\frac{4-5a}{4-a}};\frac{2a-a^2}{\sqrt{4a-a^2}}\right)$, якщо $a\in\left(0;\frac{4}{5}\right)$; безліч розв'язків $\left(x;\sqrt{1-x^2}\right)$, $|x|\le 1$, якщо $a=0$.

Відповідь. Система не має розв'язків, коли $a\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{4}{5};+\infty\right)$.

б) Оскільки $1+2^x\ne 0$, запишемо систему, рівносильну даній: $\begin{cases}1-y2^x=\frac{a}{2^x+1},\\ \frac{2^x a(y+1)}{2^x+1}=a^3.\end{cases}$ Якщо $a=0$, то пари чисел $\left(x;\frac{1}{2^x}\right)$, де $x\in R$, будуть розв'язками системи; якщо $a\ne 0$, то матимемо таку систему:

$$\begin{cases}y=a^2\frac{2^x+1}{2^x}-1,\\ \left(2^x+1\right)^2\left(1-a^2\right)=a.\end{cases}\qquad(7.3)$$

Коли $a=\pm 1$, ця система не має розв'язків. Нехай $a\ne\pm 1$. Тоді з другого рівняння системи (7.3) маємо: $2^x+1=\sqrt{\frac{a}{1-a^2}}$. (7.4)

Розв'язуючи нерівність $\frac{a}{1-a^2}>1$, яка випливає з (7.4), знаходимо ті значення параметра, для яких система (7.3) має розв'язки, і приходимо до висновку, що дана система не має розв'язків, коли $a\in\left(-\infty;-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup[-1;0)\cup\left(0;\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]\cup[1;+\infty)$.

III. Знаходження параметрів, при яких розв'язки задовольняють дані умови.

Щоб розв'язати задачі 1233, б і 1234, а, доведемо лему.

Лема. Корінь кратності k багаточлена є коренем кратності $k-1$ його похідної.

Доведення. Нехай x_0 – корінь кратності k багаточлена $P(x)$. Тоді $P(x)=(x-x_0)^k Q(x)$, де $Q(x)$ – деякий багаточлен, для якого $Q'(x_0)\neq 0$, $P'(x)=(x-x_0)^{k-1}\left(kQ(x)+(x-x_0)Q'(x)\right)$.

Оскільки $Q_1(x_0)=kQ(x_0)\neq 0$, де $Q_1(x)=kQ(x)+(x-x_0)Q'(x)$, то x_0 – корінь кратності $k-1$ похідної багаточлена $P(x)$. Лему доведено.

1233, б. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $3x^4+4x^3-6x^2-12x+a=0$ має кратний корінь. Знайти цей корінь та його кратність.

Розв'язання. Похідну $12x^3+12x^2-12x-12$ лівої частини рівняння після перетворень запишемо у вигляді $12(x+1)^2(x-1)$. звідси, на підставі леми, випливає, що –1 може бути коренем кратності 3, а 1 – коренем кратності 2 рівняння. Підставляючи їх у рівняння, знайдемо, що в першому випадку $a=-5$, у другому $a=11$; при цьому рівняння відповідно запишеться так: $(x+1)^3(3x-5)=0$ або $(x-1)^2\left(3x^2+10x+11\right)=0$.

Отже, –1 є коренем кратності 3 рівняння, коли $a=-5$;
1 – корінь кратності 2, якщо $a=11$.

1234, а. При яких значеннях p та q рівняння $x^5+px^4+q=0$ має корінь кратності 2?

Розв'язання. Похідна лівої частини рівняння має вигляд $5x^3(x+0{,}8p)$, звідки випливає, що коренем кратності 2 може бути тільки $-0{,}8p$ за умови $p\neq 0$. Для цього треба, щоб виконувалася рівність $(-0{,}8p)^5+p(-0{,}8p)^4+q=0$. Звідси знаходимо співвідношення між параметрами $4^4p^5+5^5q=0, q\neq 0$, при якому $-0{,}8p$ є коренем кратності 2 даного рівняння.

1235, б. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $2x^2-(3a+2)x+12=0$ та $4x^2-(9a-2)x+36=0$ мають спільний корінь.

Розв'язання. Нехай x_0, x_1 – корені першого, а x_0, x_2 – корені другого рівняння. Тоді за теоремою Вієта:

$$x_0+x_1=\frac{3a+2}{2}, x_0+x_2=\frac{9a-2}{4}, x_0x_1=6, x_0x_2=9.$$

Виключимо з перших двох рівностей параметр і одержимо систему: $\begin{cases} x_0+3x_1-2x_2=4, \\ x_0x_1=6, \\ x_0x_2=9, \end{cases}$ з якої знаходимо $x_0=4, x_1=1,5,$ $x_2=2,25.$ Тоді відповідне значення параметра дорівнює 3.

Відповідь. $a=3.$

1244, б. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$ має два корені, причому один із них більший за 3, а другий менший від 2.

Розв'язання. Нехай α, β – корені рівняння, причому $\alpha<\beta.$ Тоді, використовуючи умову $\alpha<2,$ $\beta>3,$ одержимо систему нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{a+3-\sqrt{9+14a-3a^2}}{a-2}<2, \\ \dfrac{a+3+\sqrt{9+14a-3a^2}}{a-2}>3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7-a-\sqrt{9+14a-3a^2}}{a-2}<0, \\ \dfrac{9-2a+\sqrt{9+14a-3a^2}}{a-2}>0. \end{cases} \qquad (7.5)$$

Із системи нерівностей $\begin{cases} 9+14a-3a^2\ge 0, \\ a-2\ne 0 \end{cases}$ знайдемо область допустимих значень параметра a : $\left(\dfrac{7-\sqrt{76}}{3};2\right)\cup\left(2;\dfrac{7+\sqrt{76}}{3}\right).$

Застосуємо метод інтервалів до нерівностей системи (7.5) і отримаємо $a\in(2;5).$

Відповідь. $a\in(2;5).$

1245, а. Знайти всі значення параметра a, при яких множиною розв'язків системи $\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2, \\ \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} > -3 \end{cases}$ є вся числова пряма.

Розв'язання. Зважаючи на те, що $x^2-x+1>0$ для всіх $x \in (-\infty;+\infty)$, одержимо рівносильну систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2-(a+2)x+4>0, \\ 4x^2-(3-a)x+1>0. \end{cases}$$

Нерівності системи будуть завжди виконуватися, якщо

$$\begin{cases} a^2+4a-12<0, \\ a^2-6a-7<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6<a<2, \\ -1<a<7; \end{cases} \Leftrightarrow -1<a<2.$$

Відповідь. $a \in (-1;2)$.

1245, б. Знайти всі значення параметра a, при яких всі розв'язки нерівності

$$x^2-a\left(1+a^2\right)x+a^4<0 \qquad (7.6)$$

є розв'язками нерівності $x^2+4x+3<0$.

Розв'язання. Розв'язки другої нерівності утворюють інтервал $(-3;-1)$. Квадратний тричлен, що стоїть у лівій частині першої нерівності, має коренями a і a^3. Оскільки нерівність $a<a^3$ виконується тоді, коли $a \in (-1;0)\cup(1;+\infty)$, то множина розв'язків нерівності (7.6), які утворюють інтервал $\left(a;a^3\right)$, не може належати проміжку $(-3;-1)$. Якщо $a \in (-\infty;1)\cup(0;1)$, то $a^3<a$, і розв'язки нерівності (7.6), які утворюють інтервал $\left(a;a^3\right)$, можуть належати інтервалу $(-3;-1)$. Це буде тоді, коли

$$\begin{cases} a^3>-3, \\ a<-1; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a>-\sqrt[3]{3}, \\ a<-1. \end{cases}$$

Відповідь. $a \in \left(-\sqrt[3]{3};-1\right)$.

1253. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $\cos\dfrac{2\pi}{x^2+x-a}=0$ має: а) лише два різних розв'язки; б) лише три різних розв'язки.

Розв'язання. Розв'язками рівняння будуть ті значення змінної x, при яких $\dfrac{2\pi}{x^2+x-a}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z,$ звідки $x^2+x-a-\dfrac{4}{1+2k}=0,$ $k\in Z,$ розв'язки якого обчислюються за формулами:

$$x=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{1+4a+\frac{16}{1+2k}}\right),k\in Z. \qquad (7.7)$$

а) Ці формули визначатимуть тільки два корені даного рівняння, якщо нерівність

$$1+4a+\frac{16}{1+2k}>0\Leftrightarrow\frac{(1+4a)(1+2k)+16}{1+2k}>0,k\in Z \qquad (7.8)$$

має тільки один цілий розв'язок. Знайдемо значення параметра a, при яких це станеться. Якщо $a=-\dfrac{1}{4},$ то розв'язками нерівності (7.8) будуть всі цілі невід'ємні числа. Нехай $a>-\dfrac{1}{4}.$ Тоді від нерівності (7.8) перейдемо до рівносильної нерівності $\dfrac{k+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{8}{1+4a}\right)}{k+\dfrac{1}{2}}>0,$ розв'язками якої буде нескінченна множина цілих чисел з об'єднання інтервалів $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}-\dfrac{8}{1+4a}\right)\bigcup\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right).$

Зупинимося на випадку, коли $a<-\dfrac{1}{4}$ і нерівність (7.8) буде рівносильна нерівності

$$\frac{k+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{8}{1+4a}\right)}{k+\dfrac{1}{2}}<0. \qquad (7.9)$$

Її розв'язки містяться в інтервалі $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}-\dfrac{8}{1+4a}\right),$ причому серед них буде тільки один цілий, а саме $k=0$, якщо $0<-\frac{1}{2}-\frac{8}{1+4a}<1$. Розв'язками подвійної нерівності будуть $a\in\left(-\frac{17}{4};-\frac{19}{12}\right)$. При цих значеннях параметра a нерівність (7.8) має тільки два корені $\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{17+4a}\right)$.

Відповідь. $a\in\left(-\frac{17}{4};-\frac{19}{12}\right)$.

б) Якщо $a=-\frac{19}{12}$, то з (7.7) маємо:

$$x=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{\frac{32(1-k)}{3[1+2k]}}\right),\text{ де } k=0;\ 1.$$

Звідси одержуємо три корені рівняння: $-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{\frac{32}{3}}\right)$.

Відповідь. $a=-\frac{19}{12}$.

1261, б. Знайти всі значення параметра a, при яких функції $f_1(x)=2x^3+3ax^2+6x+1$ і $f_2(x)=2x^3+3ax^2+6ax-1$ мають хоча б одну критичну точку.

Розв'язання. Похідні $f_1'(x)=6\left(x^2+ax+1\right)$ $f'_2(x)=6(x^2+ax+a)$ і даних функцій мають нулі, а отже, дані функції мають критичні точки, якщо дискримінанти $D_1=a^2-4$ і $D_2=a^2-4a$ квадратних тричленів x^2+ax+1 і x^2+ax+a будуть невід'ємними. Це буде тоді, коли $a\in(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$.

1262, б. При яких значеннях a функція $y=3(a-1)x^5-20x^3+15(a+2)x-4$ монотонна на R?

Розв'язання. Функція буде монотонною на множині дійсних чисел, якщо на цій множині її похідна $y'=15(a-1)x^4-60x^2+15(a+2)$ не буде змінювати знак.

Якщо $a=1$, то похідна $y'=-60x^2+45$ не є знакосталою, а отже, функція не є монотонною.

Нехай $a \neq 1$. Тоді $y' = 15(a-1)\left(\left(x^2 - \dfrac{2}{a-1}\right)^2 + \dfrac{(a+3)(a-2)}{(a-1)^2}\right)$.

Звідси випливає, що функція буде монотонною, якщо $a \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$, при цьому вона зростає для $a \geq 2$ і спадає, коли $a \leq -3$.

1271, б. Через точку, що належить параболі $y = x^2$, проведено пряму $y = ax + b$, яка перпендикулярна до дотичної до параболи в цій точці. Яку найменшу площу може мати фігура, задана умовами $x^2 \leq y \leq ax + b$?

Розв'язання. Нехай $P(t; t^2)$ – дана точка параболи, де $t \neq 0$ (не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $t > 0$); d – дотична, l – січна, перпендикулярна до дотичної (рис. 28).

Тоді $k = y'(t) = 2t$ – кутовий коефіцієнт дотичної, $-\dfrac{1}{2t}$ – кутовий коефіцієнт січної, а $y = \dfrac{1}{2t}x + b$ – її рівняння. Оскільки пряма l проходить через точку P, то $t^2 = -\dfrac{1}{2t}x + t^2 + \dfrac{1}{2}$.

Розв'язуючи систему $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -\dfrac{1}{2t}x + t^2 + \dfrac{1}{2}, \end{cases}$

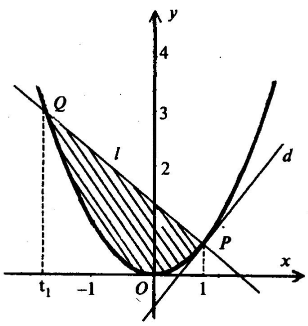

Рис. 28

знаходимо абсцису $t_1 = -\left(\dfrac{1}{2t} + t\right)$ точки Q. Позначимо через $S(t)$ площу параболічного сегмента QOP. Тоді $S(t) = \int\limits_{t_1}^{t}\left(\left(-\dfrac{1}{2t} + t^2 + \dfrac{1}{2}\right) - x^2\right)dx.$

Після обчислень маємо: $S(t) = \dfrac{4}{3}t^3 + t + \dfrac{1}{4t} + \dfrac{1}{48t^3}$.

Використовуючи похідну, легко встановити, що $S(t)$ набуває свого найменшого значення в точці $t = 0,5$, і воно дорівнює $\frac{4}{3}$.

Відповідь. $\frac{4}{3}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Література до першого розділу

1. Вивчення теми «Модуль» в курсі математики середньої школи // Математика, № 7-9, 13, 21-22, 2000.

2. Горделадзе Ш.Г. Збірник конкурсних задач з математики / Горделадзе Ш.Г. і др. – К.: Вища школа, 1988.

3. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. ІІ. І Ірофільне навчання / Упоряд.Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна.— Х.: Вид-во «Ранок»,2011.— 384 с.— (Факультативи та курси за вибором).

4. Каплан Я.Л. Рівняння / Я.Л. Каплан . – К.: Рад. шк., 1968.

5. Концепція профільного навчання в старшій школі (з коментарями та запитаннями) // Підруч. для директора. – 2003. – №11-12. – С. 4-12.

6. Кушнир И. Неравенства / Кушнир И. – К.: Астарта, 1996.

7. Кушнир И. Уравнения / Кушнир И. – К.: Астарта, 1996.

8. Кушнир И. Функции / Кушнир И. – К.: Астарта, 1996.

9. Мерзляк А.Г. Алгебраїчний тренажер: Посіб. для школярів та абітурієнтів / А.Г.Мерзляк. – Харків: Гімназія – Ранок, 1998.

10. Немова Н. Профильная ориентация девятиклассников: элективные курсы и «образовательные информационные карты» / Н. Немова // Директор школы. – 2005. – №6. – С. 57-60.

11. Никольская И.Л. Факультативный курс по математике 7-9 кл. / И.Л. Никольская – М. Просвещение, 1981.

12. Семенов А.Я. Система тренировочных задач и упражнений по математике / А.Я. Семенов . – М.: Просвещение, 1991.

13. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике 7-9 кл. / И.Ф.Шарыгин – М. Просвещение. 1981.

14. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учебное пособие для 11 кл. ср. шк. / И.Ф.Шарыгин , В.И. Голубев – М. Просвещение, 1991.

15. Шунда Н.М. Функції та їх графіки: Посіб. для вчителів / Н.М.Шунда . – К.: Рад. шк., 1983.

Література до другого розділу.

1. Бабенко В.В. та ін. Збірник типових конкурсних тестових завдань з математики. – Львів: Ред.-вид. відділ Львівського ун-ту, 1995. – 152 с.

2. Гайштун О.Г., Литвиненко Г.М. Розв'язування алгебраїчних задач. – К.: Рад. шк., 1991. – 224 с.

3. Гетманцев В.Д. та ін. Математика: Контрольні індивідуальні завдання: Посібник для слухачів підготовчих відділень та вступників до вищих навч. закл. – К.: Либідь, 1994. – 272 с.

4. Горнштейн П.І., Полонський В.Б., Якір М.С. Зустріч з параметрами // Математика (газета для освітян). – 1999. – № 6 (18).

5. Жлуктенко В.І. та ін. Конкурсні задачі з математики для вступників до економічних вузів та факультетів. – Ірпінь: Перун, 1994. – 240 с.

6. Завало С.Т. Рівняння і нерівності. – К.: Рад. шк., 1973. – 384 с.

7. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. II. І Ірофільне навчання / Упоряд.Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна.— Х.: Вид-во «Ранок»,2011.— 384 с.— (Факультативи та курси за вибором).

8. Ігнатенко М. Тригонометричні рівняння з параметрами / М. Ігнатенко // Математика в школі. – 2000. – № 3. – С. 18–21.

9. Карлащук Л. «Природні» зустрічі з параметрами як засіб розвитку навичок дослідження // Математика в школі. – 2000. – № 3. – С. 22–23.

10. Концепція профільного навчання в старшій школі (з коментарями та запитаннями) // Підруч. для директора. – 2003. – №11-12. – С. 4-12.

11. Лейфура В.М. Про задачі з параметрами / В.М.Лейфура // У світі математики. – 1996. т. 2, випуск 1. – С. 31–41.

12. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия. – М.: Просвещение, 1991. – 352 с.

13. Литвиненко Г. Шкільний курс математики в 2000/01 навчальному році // Математика в школі. – 2000. – № 4. – С. 2–4.

14. Литвиненко Г.М., Федченко Л.Я., Швець В.О. Збірник

завдань для екзамену на атестат про середню освіту. – Ч. І. Алгебра та початки аналізу. – Львів, ВНТЛ, 1998. – 94 с.

15. Маслай Г.Є., Щоголєва Л.О. Рівняння та системи рівнянь з параметрами // Математика (газета для освітян). – 2000. – № 21–22 (81–82).

16. Немова Н. Профильная ориентация девятиклассников: элективные курсы и «образовательные информационные карты» / Н. Немова // Директор школы. – 2005. – №6. – С. 57-60.

17. Решения, указания, ответы к заданиям для экзамена по алгебре и началам анализа на аттестат о среднем образовании. – Донецк, ООО «Лебедь», 1997. – 168 с.

18. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

ДОДАТКИ

Додаток А
Перелік програм курсів за вибором для учнів старших класів

Таблиця А.1
Навчальні програми факультативних курсів та курсів за вибором для природничо-математичного і технологічного напрямів

№ з/п	Назвакурсу	Автори	Клас	Кільк. годин
1.	Обернені тригонометричні функції	ГрицикТ.А.	10	16(17)
2.	Ірраціональність у рівняннях, нерівностях і алгебраїчних виразах	ЄргінаО.В.	10	35
3.	Елементи теорії чисел	ТребенкоД.Я., ТребенкоО.О.	10	35
4.	Обчислювальний практикум	КоноваловаГ.А.	10	35
5.	Прикладні задачі на екстремум	ПоповаЛ.К.	11	8
6.	Зображення та геометричні перетворення	КугайН.В., ЗаїкаО.В.	11	35
7.	Застосування похідної до розв'язування задач	Смішко А.С.	11	35
8.	Інтеграл та його застосування	РоманухаВ.Б.	11	35
9.	Математичні моделі у фізиці	БровкоГ.В., КовтунЛ.Г. КозловаО.М.,	11	17
10.	Фізична математика	КанакінаЛ.П.	10-11	70
11.	Історія математики	БевзВ.Г.	10-11	70
12.	Побудова зображень геометричних фігур	БегерськаА.В., БойкоЛ.А.	10	17
13.	Обчислення в системах комп'ютерної алгебри	ГромкоЛ.В.	11	17

Таблиця А.2

Навчальні програми факультативних курсів та курсів за вибором для суспільно-гуманітарного напряму

№ з/п	Назва курсу	Автори	Клас	Кільк. годин
1.	Історія тригонометрії	ГрицикТ.А.	10	8
2.	Економіко-математичне моделювання	ФранчукТ.І., Шевчук Н.В.	10	35
3.	Задачі лінійного програмування	БегерськаА.В., БойкоЛ.А.	10	35
4.	Основи фінансової математики та математичної економіки	Ліпчевський Л.В.	10,11	35
5.	Математика прибутків	ЖелтухаТ.В.	10-11	70
6.	Задачі економічного змісту в математиці	ТкачЮ.М.	10-11	70
7.	Комп'ютерна математика для економістів	Сущук-Слюсаренко В.І.	11	17

Таблиця А.3

Навчальні програми факультативних курсів та курсів за вибором для поглибленого вивчення математики

№	Назва курсу	Автори	Клас	Кільк. годин
1.	Ціла і дробова частини числа	АпостоловаГ.В.	10,11	17
2.	Вища математика	Морозов О.В.	10-11	140
3.	Введення у фрактальний аналіз	ЦибкоВ.В.	11	35
4.	Елементи стохастики	ЛиходєєваГ.В.	11	17
5.	Комплексні числа та їх застосування	ШаранО.В.	11	35

Таблиця А.4

Навчальні програми факультативних курсів та курсів за вибором для універсального профілю

№ з/п	Назва курсу	Автори	Клас	Кільк. годин
1.	Раціональні функції	КравченкоН.Д.	10	35
2.	Рівняння в курсі алгебри	ДогаруГ.Г.	10-11	105
3.	Функції та алгебраїчні вирази на координатній площині	АпостоловаГ.В., ЛіпчевськийЛ.В.	10	35
4.	Методи розв'язування задач з математики	ЛахтадирЛ.І.	10-11	70
5.	Модуль числа	Апостолова Г.В. ПрокопенкоН.С.	10-11	35
6.	Розв'язування задач з параметрами	АпостоловаГ.В., ПрокопенкоН.С.	10-11	35
7.	Готуємось до ЗНО	АпостоловаГ.В.	10-11	170
8.	Факультативний курсз геометрії	Хабарова М.М., ШатилоГ.І.	11	35

Додаток Б

Програми деяких курсів за вибором на універсальному профілі

МОДУЛЬ ЧИСЛА

Програма курсу за вибором для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів

Автори:

Апостолова Галина Вадимівна, професор Київського обласного інституту післядипломної освіти педагогічних кадрів, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Прокопенко Наталія Сергіївна, головний спеціаліст Міністерстваосвіти і науки України

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Поняття «модуль числа» вводиться в курсі математики загальноосвітніх навчальних закладів у 6-му класі. Але в подальшому, навіть у програмі для класів з поглибленим вивченням математики, йому приділяється недостатньо уваги. Базові підручники містять лише окремі завдання з модулем.

Проте засвоєння поняття модуля числа потрібне не лише для оволодіння алгоритмами арифметичних дій з додатними та від'ємними числами. Воно сприяє формуванню в учнів абстрактного та алгоритмічного типів мислення, логічного мислення розгалуження (при використанні алгебраїчного змісту модуля); пошукової евристичної діяльності (при пошуку раціональних способів розв'язування). Зауважимо, що саме для перевірки рівня розвитку відповідних типів мислення абітурієнтів до завдань вступних іспитів до політехнічних вищих навчальних закладів, як правило, включають завдання на модуль числа.

Оволодіння навичками розв'язування завдань на модуль числа є необхідною умовою не лише успішного складання вступного іспиту з математики, а й подальшого вивчення курсу вищої математики.

Даний курс пропонується для роботи з учнями 10-11 класів, які раніше не вивчали курс даної тематики або вивчали цю тему поверхово. У якості основного пропонується посібник [1], успішно апробований з 2001 року у роботі очно-заочних курсів до університетської підготовки НТУУ «КПІ».

Вивчення курсу розраховано на два навчальні семестри, разом — 34 академічні години, по 1 годині на тиждень протягом одного семестру в 10-му класі та одного семестру в 11-му класі.

Розподіл годин є умовним, тематичне і дидактичне наповнення може коригуватися вчителем залежно від потреб і можливостей конкретної групи учнів.

Зауваження. Програму узгоджено з програмою курсу за вибором «Розв'язування задач з параметрами», який доцільно проводити паралельно, або почергово (по півріччю) з даним курсом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Апостолова Г. В. Хитромудрий модуль.— К.: Факт, 2006.— 256 с.

2. Апостолова Г. В. Я сам! — К.: Факт, 1997.— 202 с.

3. Голубев В. И. Абсолютная величина числа в конкурсных экзаменах по математике.— Львов: Журнал «Квантор», 1991.

4. Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами.—К.: РИА «Текст»; МП «ОКО», 1992.

5. Финкельштейн Л. П. Задачи с абсолютной величиной (модулем).— К.:Освіта, 1997.

6. Шарыгин И. Ф., Голубев В. И. Факультативный курс по математике.—М.: Просвещение, 1991.

7. Ясінський В. В. Вибрані конкурсні задачі з математики. Розділ «Алгебра».— К.: КПІ, 1995.

8. Апостолова Г. В., Ясінський В. В. Перші зустрічі з параметрами.— К.:Факт, 2008.— 324 с.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ

Програма курсу за вибором для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів

Автори:

Апостолова Галина Вадимівна, професор Київського обласного інституту післядипломної освіти педагогічних кадрів, кандидат фізико-математичних наук, доцент;

Прокопенко Наталія Сергіївна, головний спеціаліст Міністерстваосвіти і науки України.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Задачі з параметрами традиційно входять до завдань вступних іспитів з математики до вищих навчальних закладів (зовнішнього оцінювання) і мають на меті перевірку рівня логічного й абстрактного мислення абітурієнтів, здатності до аналізу й узагальнення, необхідних для подальшого навчання у вищих технічних навчальних закладах. Саме тому, що розв'язування задач з параметрами вимагає певного рівня розвитку відповідних типів мислення, формування здатності до роботи з такими завданнями вимагає часу і послідовної роботи з учнями, що майже неможливо за обмежений час останнього року навчання в школі.

Даний курс пропонується для роботи з учнями 10-11 класів, які раніше не вивчали курсу даної тематики або вивчали цю тему поверхово.

Метою курсу (спираючись на посібник [1]) є поступове адаптування учнів до завдань з параметрами, формування в них мислення розгалуження, вміння моделювати і лаконічно й прозоро записувати розв'язання таких задач, формування елементарних навичок роботи з параметрами, а пізнішей пошукового абстрактного мислення, здатності до самостійного моделювання розв'язування складніших задач з параметрами.

У якості основного пропонується посібник [1], успішно апробований з 2001 року у роботі очно-заочних курсів до унівсрситетської підготовки НТУУ «КПІ».

Вивчення курсу розраховано на 2 навчальні семестри, разом — 51 академічна година, по 2 години на тиждень протягом одного семестру в 10 класі (або по 1 годині на тиждень протягом начального року в 10 класі) та по 1 годині на тиждень протягом одного семестру в 11 класі).

Розподіл годин є умовним і може коригуватися вчителем залежно відпотреб і можливостей конкретної групи учнів.

Зауваження. Програму узгоджено з програмою курсу за вибором «Модуль числа», який доцільно вивчати паралельно або почергово (посеместру) з даним курсом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Апостолова Г. В., Ясінський В. В. Перші зустрічі з параметрами.— К.:Факт, 2008.— 324 с.

2. Апостолова Г. В. Хитромудрий модуль.— К.: Факт, 2006.— 256 с.

3. Апостолова Г. В. Я сам! — К.: Факт, 1997.— 202 с.

4. Горштейн П. І., Полонський В. Б., Якір М. С. Задачі з параметрами.— К.:РІА «Текст»; МП «ОКО», 1992.— 290 с.
5. Назаренко О. М., Назаренко Л. Д. Тисяча і один приклад. Рівності і нерівності.— Суми: Слобожанщина, 1994.— 272 с.
6. Фількенштейн Л. П. Домашній репетитор. Вибрані глави конкурсної математики в методах і задачах. Кн. 4. Параметри.— К.: Євроіндекс Лтд,1995.—210 с.
7. Ястребинецький Г. А.Задачі з параметрами.— М.: Просвещение, 1986.—128 с.
8. Лобанова Л. В., Фількенштейн Л. П. Вибрані задачі елементарної математики.— К: Вища школа, 1989.— 115 с.

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

МОДУЛЬ ЧИСЛА.
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ

(матеріали для факультативних занять та курсів за вибором)

10 КЛАС

методичний посібник

Укладач: к.п.н., доцент Лов'янова І. В.