Міністерство освіти і науки України
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

Лов'янова І. В.

Методика навчання математики у запитаннях і відповідях

навчальний посібник
для підготовки студентів до атестації здобувачів вищої освіти

Кривий Ріг
2016

УДК

ББК

Рецензенти

І. А. Акуленко – доктор педагогічних наук, професор, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького

А. М. Капіносов – кандидат педагогічних наук, доцент, Державний вищий навчальний заклад «Криворізький державний педагогічний університет»

Рекомендовано до друку Вченою радою
Криворізького державного педагогічного університету
(протокол № 5 від «08» грудня 2016 року).

Лов'янова І. В.
Методика навчання математики у запитаннях і відповідях. Навчальний посібник для підготовки студентів до атестації здобувачів вищої освіти / І. В. Лов'янова. – Кривий Ріг: Криворізький державний педагогічний університет. – 2016. – 78 с.

Посібник містить матеріали для повторення, узагальнення і систематизації знань студентів з дисципліни «Методика навчання математики» і підготовки до атестації здобувачів вищої освіти. Весь зміст курсу представлено питаннями, до кожного питання подано розширений план відповіді і варіант відповіді на базовому рівні підготовки.

Посібник призначений для викладачів і студентів вищих педагогічних навчальних закладів.

УДК

ББК

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА…………………………………………………………….........4

РОЗДІЛ 1. Запитання та розгорнутий план відповідей державної атестації……………...5
1.1. Загальна методика……………………..……………………………5
1.2. Методика навчання математики в 5-6 класах …………………..6
1.3. Методика навчання алгебри…..…………………………………..6
1.4. Методика навчання планіметрії……………………………….....9
1.5. Відповіді на запитання. Базовий рівень підготовки…………..14
РОЗДІЛ 2. Логіко-математичний аналіз тем шкільного курсу математики…………………………………………………………………59
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ…..………………………………………………………..…77

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна «Методика навчання математики» за навчальним планом підготовки бакалаврів спеціальності 014 Середня освіта. Математика входить до циклу професійної підготовки.

Атестація бакалаврів передбачає перевірку знань студентів з кількох дисциплін навчального плану, до числа яких віднесена і дисципліна «Методика навчання математики». Пропонований посібник складено відповідно до робочої програми навчальної дисципліни. Питання, які виносяться на атестацію здобувачів вищої освіти, охоплюють весь курс методики навчання математики, який опановується студентами на лекціях, практичних і лабораторних заняттях, під час педагогічної практики і підготовки курсових проектів. Цей процес триває протягом чотирьох семестрів, тому нагальною є проблема узагальнення і систематизації знань студентів напередодні державної атестації, під час оглядових лекцій з дисципліни.

Пропонований посібник містить запитання та розгорнутий план відповідей атестації відповідно до змістових модулів курсу, а саме: «Загальна методика», «Методика навчання математики у 5-6 класах», «Методика навчання алгебри», «Методика навчання планіметрії», а також зразки проведення логіко-математичного аналізу теми на прикладі тем шкільного курсу математики.

Матеріали посібника можуть бути використані викладачами для проведення оглядових лекцій і організації самостійної роботи студентів на етапі їх підготовки до атестації здобувачів вищої освіти.

ЗАПИТАННЯ ТА РОЗГОРНУТИЙ ПЛАН ВІДПОВІДЕЙ ДЕРЖАВНОЇ АТЕСТАЦІЇ

1.1. Загальна методика

1. Предмет методики навчання математики. Зв'язок МНМ з іншими науками. Поняття методичної системи МНМ.

2. Поняття як форма мислення. Основні характеристики математичного поняття. Види понять. Відношення між поняттями.

3. Означення поняття. Види означень. Вимоги до означень математичних понять. Методика введення і формування математичного поняття. Класифікація математичних понять.

4. Математичні твердження та їх види. Теореми в шкільному курсі математики. Види теорем за структурою та змістом.

5. Необхідні і достатні умови в шкільному курсі математики. Різні формулювання математичних тверджень.

6. Доведення теорем. Методи доведення. Методика навчання учнів доведенню теорем.

7. Роль і види задач у навчанні математики. Методи і способи розв’язування задач. Методика навчання учнів розв’язувати задачі.

1.2. Методика навчання математики в 5-6 класах

8. Методика формування основних знань, умінь та навичок в темі «Натуральні числа».

1) перелічити основні уміння учнів;

2) розкрити формування умінь: читати багатоцифрові натуральні числа; порівнювати натуральні числа; додавати, віднімати, множити та ділити натуральні числа.

9. Методика вивчення десяткових і звичайних дробів.

1) звичайні дроби у 5 і 6 класах;

2) методичні підходи до вивчення десяткових дробів. Правила читання десяткових дробів.

14. Тотожні перетворення і рівняння в курсі математики 5-6 класу.

1) основна мета вивчення теми;

2) вимоги до знань і умінь учнів;

3) теми 5-6 класу в яких розглядаються тотожні перетворення;

4) рівняння у курсі 5-6 класів.

1.3. Методика навчання алгебри

10. Розвиток поняття про число в курсі алгебри. Наближені обчислення.

1) методика вивчення раціональних чисел в шкільному курсі алгебри

2) ірраціональні та дійсні числа, методика їх вивчення

3) комплексні числа в поглибленому курсі

4) наближені обчислення.

11. Вирази та їх види. Тотожно рівні вирази. Тотожності. Культура тотожних перетворень. Тотожні перетворення цілих виразів.

1) поняття виразу

2) види виразів, навести приклади

3) поняття тотожного перетворення, тотожно рівних виразів, тотожності

4) що розуміють під культурою тотожних перетворень

5) методика вивчення тотожних перетворень цілих виразів, формули скороченого множення.

12. Вирази та їх види. Тотожно рівні вирази. Тотожності. Культура тотожних перетворень. Тотожні перетворення раціональних виразів в курсі алгебри основної школи.

1) поняття виразу

2) види виразів, навести приклади

3) поняття тотожного перетворення, тотожно рівних виразів, тотожності

4) що розуміють під культурою тотожних перетворень

5) тотожні перетворення раціональних виразів, правило відшукання найпростішого спільного знаменника.

13. Вирази та їх види. Тотожно рівні вирази. Тотожності. Культура тотожних перетворень. Тотожні перетворення ірраціональних виразів в курсі алгебри основної школи.

1) поняття виразу

2) види виразів, навести приклади

3) поняття тотожного перетворення, тотожно рівних виразів, тотожності

4) що розуміють під культурою тотожних перетворень

5) поняття ірраціонального виразу, основні дії над ірраціональними виразами: внесення множника під знак кореня, винесення множника з-під знака кореня.

15. Методика вивчення рівнянь та їх систем в курсі алгебри 7-9 класів

1) розгортання лінії рівнянь у 7-9 класах
2) підходи до означення поняття «рівняння»
3) способи розв'язання найпростіших рівнянь
4) розв'язування окремих видів рівнянь (квадратні, дробово-раціональні)
5) системи рівнянь.

16. Методика вивчення квадратних рівнянь.

1) Означення поняття
2) види повних і неповних квадратних рівнянь
3) вивчення формул коренів квадратного рівняння способом виділення повного квадрату
4) теорема Вієта, зведені квадратні рівняння.

17. Методика вивчення нерівностей та їх систем в курсі алгебри 7-9 класів

1) розгортання поняття «нерівність» в курсі алгебри
2) числові нерівності та їх властивості в курсі алгебри 7 класу
3) нерівності з однією змінною
4) системи нерівностей.

18. Методика вивчення функцій в курсі алгебри 7-9 класів

1) вимоги до знань і умінь учнів
2) розвиток поняття функції
3) функціональна пропедевтика
4) введення поняття функції
5) методика вивчення окремих видів функцій.

19. Методика вивчення квадратичної функції та квадратних нерівностей в курсі алгебри.

1) підходи до вивчення квадратичної функції через правила перетворення графіка функції $y=x^2$
2) дослідження властивостей функції за графіком

3) розв'язування квадратних нерівностей.

1.4. Методика навчання планіметрії

20. Методика проведення перших уроків геометрії: найпростіші фігури, формування понять, аксіоми планіметрії.

1) Найпростіші фігури в планіметрії, дедуктивна побудова курсу планіметрії
2) Система аксіом планіметрії (по групам)
3) Доведення перших теорем
4) Особливості системи задач перших уроків планіметрії

21. Методика вивчення ознак рівності трикутників.

1) Сформулювати означення рівних трикутників
2) Теореми-ознаки рівності трикутників
3) Методичні підходи до доведення ознак рівності трикутників

22. Методика вивчення теми «Рівнобедрений трикутник».

1) Означення
2) Теореми-властивості з доведенням
3) Теореми-ознаки рівнобедреного трикутника
4) Властивості елементів рівнобедреного трикутника

23. Методика вивчення теми «Прямокутний трикутник». Розв'язування прямокутних трикутників.

1) Розгортання теми «Прямокутний трикутник» в курсі геометрії 7-8 класів
2) Теорема Піфагора, навести приклад двох альтернативних доведень теореми
3) Типові задачі розв'язування прямокутних трикутників: розв'язати трикутник за:
   - катетом і гострим кутом
   - катетом і гіпотенузою
   - двома катетами

24. Методика вивчення геометричних величин. Площа трикутника.

1) Поняття величина, місце величини в ШКМ
2) Методика формування понять: «довжина відрізка», «міра кута», «відстань»
3) Лема про площу фігури
4) Формули площі трикутника. Довести формулу $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a$

25. Методика вивчення ознак паралельності прямих на площині.

1) Нові поняття теми, введення означень понять: «внутрішні односторонні кути», «внутрішні різносторонні кути», «зовнішній кут трикутника»
2) Аксіома паралельності прямих, означення паралельних прямих
3) Ознаки паралельності прямих, методична схема вивчення ознак паралельності прямих

26. Задачі на побудову в курсі планіметрії. Методика розв'язування задач на побудову. Геометричне місце точок.

1) Елементарні задачі на побудову
2) Етапи розв'язування задач на побудову: аналіз, побудова, доведення, дослідження. Навести приклад
3) Поняття ГМТ, приклади ГМТ, які використовуються при розв'язуванні задач. Навести приклад

27. Методика вивчення теми «Кут, вписаний в коло». Властивості хорд кола, січних і дотичних, проведених до кола з однієї точки.

1) Поняття «хорда», «січна», «дотична до кола», задача-теорема 1 про дві січні кола, задача-теорема 2 про січну і дотичну до кола
2) Поняття вписаного і центрального кута, система прикладів і контр прикладів
3) Теорема про вимірювання вписаного кута, розглянути всі випадки доведення

28. Вписані і описані чотирикутники. Правильні многокутники.

1) Основні поняття, факти теми, приклад вписаних і описаних чотирикутників
2) Означення, властивості, види правильних многокутників
3) Зв'язок між стороною правильного многокутника і радіуса описаного R і вписаного r кіл

29. Методика вивчення довжини кола, довжини дуги. Площа круга та його елементів.

1) Суть ідеї граничного переходу при вивченні довжини кола, формула довжини дуги кола
2) Виведення формули площі круга радіуса R
3) Сектор, сегмент, формули площі сектора і сегмента

30. Методика формування понять «паралелограм», «прямокутник». Вивчення властивостей і ознак паралелограма, прямокутника.

1) Означення паралелограма
2) Теореми-властивості паралелограма (1 з доведенням)
3) Ознаки паралелограма (1 з доведенням)
4) Види паралелограмів, їх класифікація, означення прямокутника, властивості прямокутника

31. Теорема Фалеса. Формування поняття «середня лінія трикутника». Теорема про середню лінію трикутника.

1) Теорема Фалеса, робота з теоремою, доведення теореми (логіко-математичний аналіз 4-5 таблиці)
2) Робота з означенням поняття «середня лінія трикутника»
3) Доведення теореми про середню лінію трикутника

32. Методика вивчення теореми Піфагора та різних способів її доведення.

1) Доведення теореми Піфагора за діючими підручниками

2) Навести приклади різних способів доведення теореми (≥2)

33. Формування поняття «пропорційні відрізки». Теореми про пропорційні відрізки. Вивчення властивостей бісектриси трикутника та точки перетину медіан трикутника.

1) Робота з означенням поняття «пропорційні відрізки»
2) Теорема про пропорційні відрізки, провести логіко-математичний аналіз (таблиці 4-5)
3) Властивості бісектриси трикутника (з доведенням)
4) Властивості медіан трикутника (з доведенням)

34. Методика вивчення декартових координат в курсі планіметрії.

1) Пропедевтика вивчення декартових координат
2) Введення поняття декартових координат точки в курсі геометрії
3) Основні факти теми: координати середини відрізка з заданими координатами його кінців (з обґрунтуванням), відстань між двома точками із заданими координатами

35. Методика вивчення векторів в шкільному курсі геометрії основної школи.

1) Різні можливі означення векторів
2) Методика введення основних понять теми
3) Вивчення дій над векторами

36. Методика вивчення рухів.

1) Найважливіші перетворення площини, мета вивчення геометричних перетворень в ШКМ, основні поняття теми
2) Методика вивчення симетрії і повороту

37. Методика вивчення перетворень подібності.

1) Найважливіші перетворення площини, мета вивчення геометричних перетворень в ШКМ, основні поняття теми
2) Методичні особливості вивчення перетворень подібності

38. Методика вивчення елементів аналітичної геометрії: рівняння прямої, рівняння кола.

1) Методичні особливості вивчення теми
2) Робота з фактами теми: «рівняння прямої»
3) Вивчення рівняння кола в ШКГ

39. Координатний метод розв’язування геометричних задач та його застосування.

1) Мета вивчення координатного методу в ШКМ
2) Правило-орієнтир координатного методу доведення тверджень
3) Таблиця переведення мови геометрії на мову координат
4) Навести приклад доведення твердження координатним методом

40. Векторний метод розв’язування геометричних задач та його застосування.

1) Мета вивчення векторного методу в ШКМ
2) Характеристика уміння виконувати доведення векторним методом
3) Правило-орієнтир доведення векторним методом
4) Таблиця переходу з мови геометрії на мову векторів
5) Приклад доведення твердження векторним методом

8. Методика формування основних знань, умінь та навичок в темі «Натуральні числа».

Основні уміння:

a) Читати і записувати натуральні числа;
b) Порівнювати натуральні числа;
c) Додавати, віднімати, множити і ділити натуральні числа за правилами;
d) Формулювати властивості арифметичних дій та використовувати їх для раціонального обчислення.

Формування умінь:

a) У формуванні умінь читати та записувати багатоцифрові числа значне місце відіграє використання таблиці розрядних одиниць і одиниць класів.

Клас мільярдів			Клас мільйонів			Клас тисяч			Клас одиниць		
Сотні мільярдів	Десятки мільярдів	Одиниці мільярдів	Сотні мільйонів	Десятки мільйонів	Одиниці мільйонів	Сотні тисяч	Десятки тисяч	Одиниці тисяч	Сотні	Десятки	Одиниці

Формування уміння читати багатоцифрові натуральні числа полегшує використання правила:

1) Запис числа розбивають на три цифри справа наліво 17 025 543 607 ці групи називаються класами;
2) Число кожного класу читають як трицифрове, двоцифрове, одноцифрове, додаючи при цьому назву класу;
3) Назву класу одиниць, а також класу, усі три цифри якого – нулі, не промовляють.

Слід зауважити, що: у системі вправ досить обмежитись першими чотирма класами; повторенню і розширенню десяткової нумерації сприяють вправи, що стосуються метричної системи мір.

b) У порівнянні натуральних чисел розрізняють:

- Порівняння невеликих чисел (в межах сотні) 20 > 17, 25 < 45;

- Порівняння багатоцифрових чисел з різною кількістю цифр (чим більше цифр у записі числа тим більше число) 72 925 > 7 320;
- Порівняння багатоцифрових чисел з однаковою кількістю цифр.

Для порівняння двох багатоцифрових чисел з однаковою кількістю цифр користуються правилом:

з двох натуральних чисел з однаковою кількістю цифр (розрядів) більше те, в якого більша перша (рухаючись зліва направо) з неоднакових цифр

наприклад:

72<u>5</u>6 > 72<u>4</u>9;   582<u>6</u>47 < 582<u>8</u>79

Корисно в цій темі показати важливу властивість координатного променя: на координатному промені більше число розташоване правіше, а менше – лівіше.

c) Дії над натуральними числами.

<u>Додавання:</u>

- Обґрунтовують правило додавання багатоцифрових чисел, спираючись на запис чисел у вигляді суми розрядних одиниць.

2352 = 2тис. + 3сот. + 5дес. + 2од.
6243 = 6тис. + 2сот. + 4дес. + 3од.
переставляючи доданки і сполучаючи їх у групи дістаємо:
(2од. + 3од.) + (5дес. + 4дес.) + (3сот. + 2сот.) + (2тис. + 6тис.) =
=5од. + 9дес. + 5сот. + 8тис. = 8тис. + 5сот. + 9дес. + 5од.= 8595

з такого обгрунтування випливає зручний спосіб додавання багатоцифрових чисел у стовпчик:

$$\begin{array}{r} 2352 \\ +\ 6243 \\ \hline 8595 \end{array}$$

- Учні повинні усвідомити, що дією додавання розв`язуються дві різні за змістом задачі:

в одній – дане число збільшують на кілька одиниць;
в іншій – знаходять суму двох доданків;

- Спеціального розгляду потребує питання про зміну суми залежно від зміни доданків, що є елементом пропедевтики вивчення поняття функції у 7 класі.
- Слід повторити правила додавання натурального числа до 0, тобто $a + 0 = a$, $0 + a = a$, $0 + 0 = 0$.
- Слід звернути увагу, учнів на неоднозначність вживання терміна «сума» – як результат додавання і як вираз, що складається з кількох чисел.

<u>Віднімання:</u>

- Означається в шкільних підручниках як дія, обернена додаванню:

відняти від числа *а* число *в* означає знайти таке число *х*, яке в сумі з числом *в* дає *а,* позначається $в + х = а$;

- Важливо вдосконалити навички віднімання багатозначних натуральних чисел;
- Необхідно показати учням два способи перевірки дії віднімання: перший – додаванням від`ємника і різниці, другий – відніманням, знаходячи від`ємник за зменшуваним і різніцею.
- Обгрунтування рівностей $а – а = 0,\ а – 0 = а$ здійснюється за означенням дії віднімання.

Множення:

- Означення: помножити число *а* на число *в* означає знайти суму *в* доданків, кожний з яких дорівнює *а.*

доречно ввести конкретно-індуктивним способом після розв`язування учнями певної кількості прикладів;

- Множення одиниці на натуральне число $а\cdot$ $(1 \cdot а = а)$ і нуля на число $а\cdot$ $(0 \cdot а)$ обгрунтовують, виходячи з означення дії множення;
- Під час розв`язування вправ на множення багатоцифрових натуральних чисел стовпчиком слід пояснити чому при множенні на десятки результат множення зсувається на одне місце вліво і на основі якого закону відбувається множення на одиниці, а потім на десятки;
- Необхідно простежити, щоб учні раціонально записували в стовпчик множення чисел з нулями.

$$\begin{array}{r} 327 \\ \times\ \ 35 \\ \hline 1635 \\ +981\ \ \\ \hline 11445 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 3500 \\ \times 4030 \\ \hline 105\ \ \ \ \ \ \\ 140\ \ \ \ \ \ \ \ \\ \hline 14105000 \end{array}$$

Ділення:

- Дія ділення означається аналогічно дії віднімання як дія, обернена множенню:

поділити число *а* на число *в* означає знайти таке число *х*, при множенні якого на число *в* дістанемо число *а.*

- З рівності $0 \cdot а = 0$ випливає рівність $0 : а = 0$;
- Вводиться правило: «Ділити на нуль неможна»;
- Особливу увагу треба звернути на випадки ділення з нулями в частці.

d) Властивості дій над числами.

- Властивості додавання подають у вигляді буквених виразів:

$\boldsymbol{а + в = в + а}$ – переставна властивість,

(а + в) + с = а + (в + с) – сполучна властивість;

• Використовують властивості для зручного обчислення:

(42 + 37) + 58 = (37 + 42) + 58 = 37 + (42 + 58) = 37 + 100 = 137;

• Властивості множення:

а·в = в·а – переставна властивість множення,

(а·в)·с = а·(в·с) – сполучна властивість множення,

а·(в + с) = а·в + а·с – розподільна властивість множення відносно додавання,
а·(в – с) = а·в – а·с – розподільна властивість множення відносно віднімання;

• Закріплення властивостей відбувається на прикладах типу: обчисліть зручним способом:

25·867·4
329·754 + 329·246
65·246 – 65·229 – 65·17

9. Методика вивчення десяткових і звичайних дробів.

Звичайні дроби

У 5-му класі дріб трактується як частина цілого.

У 6-му – як частина від ділення двох натуральних чисел.

- Важливо розглянути зображення дробів на координатному промені.
- На координатному промені ефективно ілюструється основна властивість дробу і порівняння дробів;
- додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками виконується за правилами:
  1) Щоб додати два дроби з однаковими знаменниками, треба додати їхні чисельники, а знаменник залишити той самий.
  2) Щоб відняти два дроби з однаковими знаменниками, треба від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити той самий.
- на завершальному етапі варто виконати узагальнення і вжити записи:

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$, $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$ $a>c,\ a=c,\ b\neq 0$.

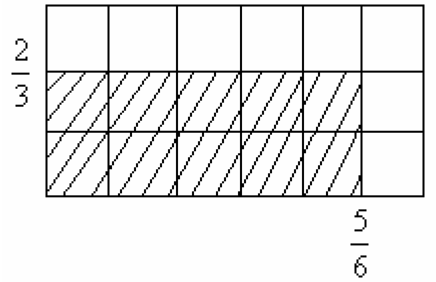
- В 6-му класі після вивчення теми: "Подільність чисел" учням пропонують розглянути правила додавання та віднімання дробів з різними знаменниками;
- свідомість і міцність навичок виконання додавання і віднімання дробів з різними знаменниками значною мірою залежить від сформованості умінь зводити дроби до спільного знаменника;
- доцільно на першому етапі розв’язування вправ вимагати докладних пояснень і розгорнутих записів.
- при вивченні дій над звичайними дробами головна мета набуття умінь та навичок виконувати дії над дробовими числами, а тому система вправ

повинна містити вправи такого характеру: віднімання правильного дробу від одиниці, від цілого числа, потім – віднімання дробового числа, що містить цілу і дробову частини, від цілого числа і, нарешті – найскладніший для учнів випадок, коли дробова частина від'ємника більша за дробову частину зменшуваного.

- Існують два підходи щодо введення дії множення на дріб.

1-й підхід: правило множення на дріб пов'язується із задачею знаходження дробу від числа, а ділення на дріб тлумачиться як знаходження числа за даним його дробом.

2-й підхід: виклад починається із введення загального правила множення дробу на дріб, а множення дробу на натуральне число і натуральне число на дріб розглядається як окремі випадки, якщо натуральне число подати у вигляді дробу із знаменником 1. Дія ділення на дріб зводиться до множення на обернений дріб; обґрунтування правила здійснюється шляхом розгляду задачі про площу прямокутника; задачі про знаходження дробу числа і числа за його дробом вводяться пізніше, ніж задачі на застосування дій множення і ділення на дріб.



- вчитель має розуміти принципову відмінність між поняттями "дріб" і "дробове число".
- у школі прийнята "історична" схема розвитку числа

$\mathbf{N}\subset\mathbf{N_0}\subset\mathbf{Q^+}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$.

Десяткові дроби

Основна мета вивчення десяткових дробів у 5 класі – сформувати вміння читати, записувати, порівнювати й округлювати десяткові дроби, виконувати чотири арифметичні дії над ними.

Відомі два підходи введення десяткового дробу.

Перший підхід. Десятковий дріб тлумачився як окремий випадок звичайного дробу.

Другий підхід. Спирався на позиційний принцип десяткової нумерації й ідею поширення вправо від одиниці основної властивості розрядних одиниць десяткової системи числення.

(одиниця кожного розряду в десять разів менша за одиницю розряду, що стоїть зліва і в десять разів більша за одиницю розряду, що стоїть справа).

Отже, десяткові дроби записуються за тим самим позиційним принципом десяткової нумерації, що і натуральні числа.

Правило читання десяткових дробів.

1) прочитати цілу частину дробу як натуральне число і додати слово "цілих";

2) прочитати дробову частину як натуральне число, не звертаючи уваги на нулі на початку дробової частини, і додати назву останнього розряду дробової частини.

Правила дій над десятковими дробами також зручно пояснювати, використовуючи співвідношення між одиницями метричної системи мір. Потім треба розглянути додавання десяткових дробів з різною кількістю десяткових знаків, додавання десяткового дробу і натурального числа.

Аналогічно можна пояснити і віднімання десяткових дробів.

Правило множення десяткових дробів зручно ілюструвати на прикладі знаходження площі прямокутника.

Ділення десяткових дробів можна виконувати двома способами: перший – замінювати і ділене і дільник натуральними числами; другий – замінювати тільки дільник натуральним числом.

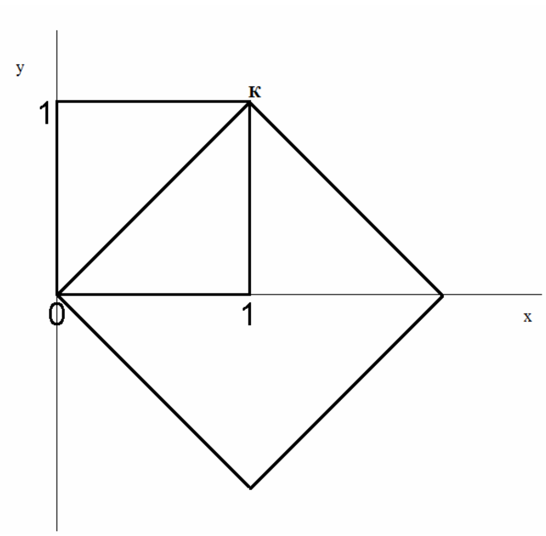
10. Розвиток поняття про число в курсі алгебри 7-9 класів.

У попередніх класах учні вже вивчали різні множини чисел. Добре відомі натуральні числа (1, 2, 3, …) – N. Якщо до натуральних чисел приєднати число 0 і всі цілі від'ємні числа, то одержиться множина цілих чисел Z. Якщо до множини Z приєднати всі дробові числа, то одержиться множина раціональних чисел – Q. Тобто всі цілі числа і дробові, і 0, називаються раціональними числами, бо кожне число можна подати у вигляді частки m/n , де m $\in$ Z, n $\in$ N.

Далі на конкретних прикладах слід пояснити, що кожній звичайний дріб можна перетворити на десятковий. При цьому в одних випадках дістанемо скінчений десятковий дріб, а в інших – нескінчений, але обов'язково періодичний.

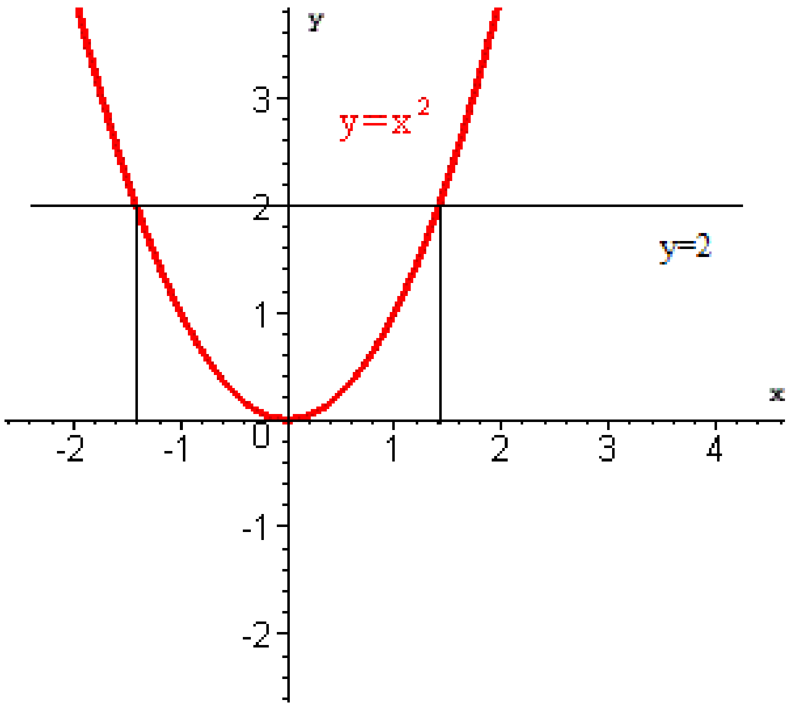
Зауваживши, що і скінчений десятковий дріб, і ціле число, можна зображувати у вигляді нескінченого періодичного дробу і з нулем в періоді.

2. На одиничному відрізку координатної прямої будується квадрат.



Ставиться за мету визначити довжину його діагоналі ОК, а відповідне число зобразити точкою Р на координатній прямій.

Ставиться питання: «Яким чином виражається координати точки К?». Щоб з'ясувати це позначимо довжину ОК = x і побудуємо ще один квадрат, стороною якого є відрізок ОК. З рис. видно, що площа цього квадрата вдвічі більше за площу одиничного квадрата. Отже, $x^2 = 2$, оскільки площа одиничного квадрата дорівнює 1. Щоб визначити x треба розв'язати одержане квадратне рівняння.



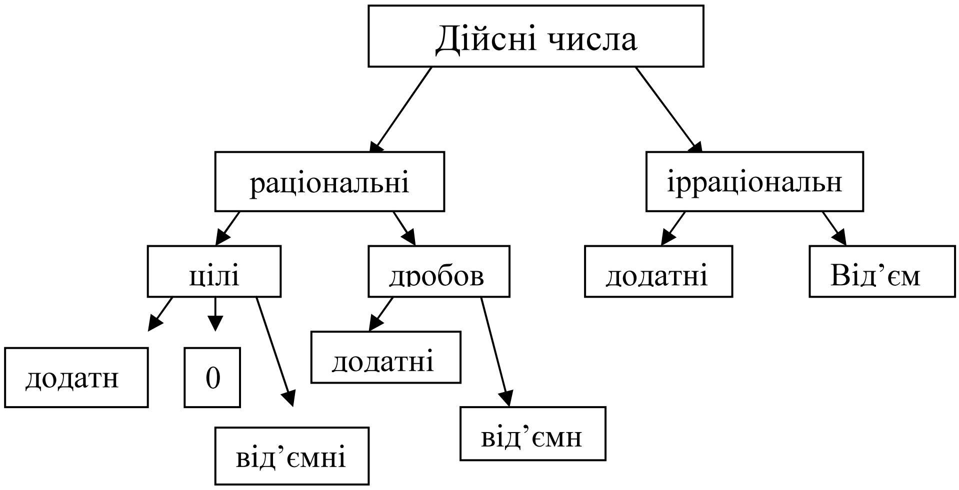
З рисунку видно, що існує два корені цього рівняння. Квадрат кожного з них дорівнює 2.

Кожне ірраціональне число можна записати у вигляді якогось нескінченого неперіодичного десяткового дробу і навпаки – кожен нескінчений періодичний десятковий дріб позначає якесь ірраціональне число. Якщо множину раціональних чисел доповнити множиною ірраціональних, то разом вони складають множину дійсних чисел.

Вводити дійсні числа можна за відомими дітям схемами: числа натуральні, 0 і протилежні натуральним разом утворюють множину цілих чисел, числа цілі і дробові становлять множину раціональних чисел, аналогічно, числа раціональні і ірраціональні становлять множину дійсних чисел.

Кожне дійсне число можна записати за допомогою нескінченого десяткового дробу (періодичного чи неперіодичного). Їх можна порівнювати за такими ж правилами, що й десяткові.

Приклад 1. Два дійсних числа вважають рівними, якщо вони мають однакові модулі і знаки.



Приклад 2. Якщо дійсні числа відрізняються або знаками, або модулями, то вони нерівні.

Приклад 3. З двох дійсних додатних чисел більше те, в якого більша ціла частина, а якщо їх цілі частини однакові, в якого більше десятих і т. д.

Приклад 4. З двох від'ємних дійсних чисел менше те, у якого модуль більший.

Приклад. $\sqrt{10}$ + 3,1623 + 3,1416 $\approx$ 6,3039 $\approx$ 6,304.

3. В курсі алгебри 9 кл., коли учні знайомі з множиною дійсних чисел, поняттям функції і окремими видами функції, вивчається тема «Числові послідовності», в якій детально розглядають 2 види числових послідовностей: арифметична і геометрична прогресія.

Починати тему доречно з наступних вправ:

1). Порівняти між собою члени кожної послідовності і напишіть формулу n-го члену для кожної послідовності:

а) 1;4;9;16;…;n^2

б) 1/2; 2/3; 3/4; 4/5; …; n/n+1

в) 1; 3/4; 5/9; 7/16; …; 2n-1/n^2

г) 0,1; 0,01; 0,0001; …; $0{,}1^n$

д) 4; -12; 36; -108; …; $4(3)^{n-1}$

Виконавши ці завдання підводимо учнів до розуміння того, що числова послідовність є функцією нат. аргументу. Треба показати різницю графічного зображення функції натурального і дійсного аргументу на прикладі першої числової послідовності.

Серед усіх послідовностей виділяють окремі види, такі як арифметична і геометрична прогресії.

Щоб ввести означення цих понять також доречно запропонувати учням систему прикладів.

До поняття арифметичної прогресії учні можуть прийти, розглядаючи запропоновані послідовності, виконуючи розумову дію порівняння і з'ясовуючи закономірність отримання кожного члену послідовності:

1) 2; 4; 6; 8; 10; …

2) -3; -5; -7; -9; -11; -15; …

3) 1; -2; 5; -8; 11; …

4) 1; 2; 3; 4; 5; 6; …

Аналогічно можна дібрати вправи для введення поняття геометричної прогресії.

При вивчення цієї теми учні також засвоюють формули n-го члена, формули суми перших n членів, властивості членів прогресії, поняття нескінченої спадної геометричної прогресії.

Типовими вправами при вивченні цієї теми є різноманітні задачі на знаходження членів арифметичної та геометричної прогресії.

Також є текстові сюжетні задачі, розв’язування яких потребує знань формул арифметичної і геометричної прогресії.

11. Вирази та їх види. Тотожно рівні вирази. Тотожності. Культура тотожних перетворень. Тотожні перетворення цілих виразів.

12. Вирази та їх види. Тотожно рівні вирази. Тотожності. Культура тотожних перетворень. Тотожні перетворення раціональних виразів в курсі алгебри основної школи.

13. Вирази та їх види. Тотожно рівні вирази. Тотожності. Культура тотожних перетворень. Тотожні перетворення ірраціональних виразів в курсі алгебри основної школи.

Вирази та їх види. Тотожно рівні вирази. Тотожності. Культура тотожних перетворень.

У курсі математики 5-6 класу змістову лінію виразів та їх перетворень представлено буквеними виразами і обчисленням їх значень, введено поняття формули. Вивчаються найпростіші перетворення виразів: розкриття дужок, зведення подібних доданків.

В курсі алгебри 7-8 класів тотожні перетворення становлять значний обсяг програми. Так у 7 класі вводиться поняття степеня з натуральним показником, одночлена, многочлена, тобто цілих раціональних виразів. Вивчаються прямі і обернені тотожні перетворення цілих виразів: зведення одночленів і многочленів до стандартного вигляду, множення одночлена на одночлен, двох многочленів та обернене перетворення (розкладання многочлена на множники). Вивчаються формули скороченого множення та їх застосування.

У 8 класі вивчаються раціональні дроби, вводиться поняття дробу, основні його властивості, додавання, віднімання, множення і ділення дробів, тотожні перетворення дробово-раціональних виразів. У зв’язку з введенням поняття квадратного кореня вивчаються його тотожні перетворення (винесення множника з-під знака кореня та обернене перетворення).

Вивчення тотожних перетворень виразів на різних етапах навчання учнів має на меті оволодіння такими знаннями, вміннями і навичками:

- формування початкових уявлень про використання букв для запису виразів і властивостей дій над числами;
- удосконалення обчислювальних навичок;
- виконання тотожних перетворень різних видів виразів;
- удосконалення умінь і навичок тотожних перетворень виразів і застосування їх до розв'язування тригонометричних, показникових, логарифмічних, ірраціональних рівнянь і нерівностей.

Тотожні перетворення виразів пронизують увесь курс навчання математики середньої школи та становлять значний обсяг програми. Тому є дуже важливим з'ясувати на якому рівні викладено матеріал даної змістової лінії.

Згідно діючої програми з математики для загальноосвітніх навчальних закладів учні поступово ознайомлюються з лінією тотожних перетворень в курсі математики 5-6 класах і алгебри 7-9 за підручниками авторів А.Мерзляк, П. Полонський, М. Якір.

На пропедевтичному етапі формування понять про вирази та їх тотожні перетворення (5-6 класи) учні повинні мати уявлення про числові і буквені вирази, знати основні властивості арифметичних дій з натуральними й раціональними числами, уміти складати числові і буквені вирази та знаходити їх значення.

В 7 класі учні переходять до систематичного вивчення теми тотожних перетворень виразів: вводиться поняття цілого раціонального виразу, степеня з натуральним показником, одночлена і многочлена, тотожно рівних виразів, тотожності. На цьому етапі учні повинні навчитись зводити до стандартного вигляду одночлени і многочлени, виконувати тотожні перетворення цілих виразів та знати і вміти застосовувати формули скороченого множення. На вивчення цієї теми програмою передбачено 54 години навчального часу.

Поняття «вираз» в шкільному курсі математики не означається.

В ШКМ під виразом розуміють запис, який складається з чисел, букв, які поєднано знаками арифметичних дій і операцій.

Два вирази називають тотожно-рівними, якщо вони мають однакову область визначення і набувають однакових значень при всіх значеннях змінної з цієї області визначення.

Наприклад:

$x^2 - 4$ ***і*** $(x-2)(x+2)$ —тотожно-рівні вирази.

Тотожним перетворенням виразу називається заміна даного виразу іншим, тотожно-рівним йому.

Тотожністю на деякій множині називають рівність, яка виконується для будь-яких значень змінної на цій множині.

Основна мета навчання учнів тотожним перетворенням полягає у підготовці апарата для розв'язування рівнянь і нерівностей.

Існують чотири способи доведення тотожностей:

1 спосіб — ліву частину тотожності перетворюють до правої

2 спосіб — навпаки

3 спосіб — одночасно перетворюють ліву і праву частину

4 спосіб — доводять, що різниця лівої і правої частини рівна нулю.

Тотожні перетворення цілих виразів.

Перше тотожне перетворення в курсі алгебри — це зведення одночлена до стандартного вигляду. Теоретична основа цього перетворення така:

у разі зведення одночлена до стандартного вигляду використовується переставний, сполучний закони множення і правило множення степенів з однаковою основою.

До основних видів тотожних перетворень многочленів належать:

- зведення многочленів до стандартного вигляду;
- додавання і віднімання многочленів;
- множення одночленів на многочлен і обернене перетворення (розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки);
- множення многочлена на многочлен і обернене перетворення (розкладання многочлена на множники способом групування).

Доцільно сформулювати учням правило розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки:

1) знайти спільний множник всіх членів многочлена;
2) кожний член многочлена подати у вигляді добутку двох множників, з яких один спільний;
3) винести спільний множник за дужки, спираючись на розподільний закон множення.

Правило відшукування спільного множника членів многочлена:

1) знайти найбільший спільний дільник всіх коефіцієнтів членів;
2) помножити його на степені змінних з найменшим показником, з яким вони входять до всіх членів многочлена.

Формули скороченого множення:

$$(a \pm в)^2 = a^2 \pm 2aв + в^2$$

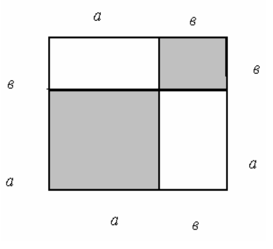
$$(a - в)(a + в) = a^2 - в^2$$

$$(a \pm в)(a^2 \pm aв + в^2) = a^3 \pm в^3$$

1) Доведення формул не викликає труднощів.

2) Запам’ятовуванню сприяє словесне формулювання формул.

3) Запам’ятовуванню сприяє геометричне тлумачення формул.



На рівні поглибленого вивчення розглядаються формули
(а ±в)³ = а ± 3а²в - 3ав² ± в³

Тотожні перетворення раціональних виразів в курсі алгебри основної школи

До тотожних перетворень раціональних виразів належать:
- скорочення раціональних дробів;
- додавання і віднімання раціональних дробів;
- множення, піднесення до степеня з натуральним показником;
- ділення дробів;
- тотожні перетворення раціональних виразів, до складу яких входять цілі і дробові вирази.

Перетворення суми і різниці раціональних дробів з різними знаменниками спирається на вміння знаходити найпростіший спільний знаменник.

Правило (алгоритм) відшукування спільного знаменника:
1) скласти добуток НСК модулів коефіцієнтів знаменників даних дробів і степенів кожної змінної з найбільшим показником, з яким змінна входить до знаменників цих дробів;
2) знайти додаткові множники даних дробів; для цього досить записати спільний знаменник у вигляді добутку двох співмножників, з яких один— знаменник даного дробу, тоді другий буде додатковим множником його;
3) знайти добуток чисельника кожного дробу на додатковий множник і записати спільний знаменник.

Тотожні перетворення ірраціональних виразів в курсі алгебри основної школи

Ірраціональним називається такий алгебраїчний вираз,який містить змінну під знаком радикала.

У курсі алгебри основної школи розглядаються перетворення ірраціональних виразів, пов’язані з вивченням арифметичного квадратного кореня, а саме: перетворення кореня із добутку, дробу, степеня, множення і ділення коренів, винесення множника з-під знака кореня, внесення множника під знак кореня, звільнення від ірраціональності в знаменнику, зведення подібних доданків, що містять корені.

Теоретичною основою перетворень ірраціональних виразів є:
1) Означення модуля числа |x|=$\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
2) Теорема $\left(\sqrt{x}\right)^2$=x , якщо x ≥ 0
3) Теорема$\sqrt{x^2}$=|x| ,якщо x - довільне число
4) Теорема $\sqrt{ab}$=$\sqrt{a}$ * $\sqrt{b}$, якщо $a \geq 0,\ b \geq 0$

5) Теорема $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$,якщо $a \geq 0, b > 0$

Розглянемо **алгоритм** винесення множника з-під знаку кореня

1. Знаходимо область визначення даного виразу.
2. Вираз під знаком радикала представити у вигляді добутку невід'ємних співмножників.
3. Використовуємо теорему $\sqrt{ab}=\sqrt{a} * \sqrt{b}$, при $a \geq 0,\ b \geq 0$
4. Використовуємо теорему $\sqrt{x^2}=|x|$, $x \geq 0$
5. Спрощуємо вираз із модулем на основі області визначення і означення модуля.

Наприклад: $\sqrt{-a^3}$, застосуємо алгоритм.

Крок 1. ОДЗ: $a \leq 0$

Крок 2. $\sqrt{-a^3} = \sqrt{(-a) * a^2}$

Крок 3. $\sqrt{(-a) * a^2} = \sqrt{a^2} * \sqrt{-a}$

Крок 4. $\sqrt{a^2} * \sqrt{-a} = |a| * \sqrt{-a}$

Крок 5. $|a| * \sqrt{-a} = -a * \sqrt{a}$

Типовими помилками є:

1) Втрата модуля на 4-му кроці алгоритма;
2) Відсутність 5-го кроку.

Розглянемо **алгоритм** внесення множника під знак радикала.

1. Знаходимо область визначення.
2. Відповідно з областю визначення і на основі означення поняття "модуль числа" множник перед радикалом замінюють його модулем.
3. Використовуємо теорему $\sqrt{x^2}=|x|$ (справа наліво)
4. Використовуємо теорему $\sqrt{ab}=\sqrt{a} * \sqrt{b}$, $a \geq 0,\ b \geq 0$
5. Використовуємо спрощення підкореневого виразу.
6. "Прикидка" знаку виразу.

Наприклад:

$$2x * \sqrt{-\frac{2}{x}}$$

Крок 1. ОДЗ : $x < 0$

Крок 2. $2x * \sqrt{-\frac{2}{x}} = -|2x| * \sqrt{-\frac{2}{x}}$

Крок 3. $-|2x| * \sqrt{-\frac{2}{x}} = -\sqrt{(2x)^2} * \sqrt{-\frac{2}{x}}$

Крок 4. $-\sqrt{(2x)^2} * \sqrt{-\frac{2}{x}} = -\sqrt{4x^2 * (-\frac{2}{x})}$

Крок 5.

$$-\sqrt{4x^2 * (-\frac{2}{x})} = -\sqrt{-8x}$$

Крок 6. $-\sqrt{-8x} = \sqrt{8x}$.

14. Тотожні перетворення і рівняння в курсі математики 5-6 класу

Основна мета вивчення елементів алгебри в 5 – 6 класах – сформувати уявлення про числові і буквені вирази, початкові уміння у використанні буквеної символіки для позначення відношень чисел, запису арифметичних дій, формул розв'язування нескладних лінійних рівнянь на основі залежності результатів дій від компонентів і шляхом перенесення членів з однієї частини рівняння в другу, функціональна пропедевтика.

Вирази та їх перетворення.

1) Звернути увагу на два можливі способи читання виразів;
2) З вивченням поняття " коефіцієнт " достатньої уваги потребують вправи на спрощення виразів, що є добутками числових і буквених виразів з коефіцієнтами.

Рівняння і нерівності.

1) У 5 класі учні розв'язують рівняння на основі залежності результатів арифметичних дій від компонентів, причому невідоме у рівнянні міститься тільки в лівій його частині.
2) У 6 класі вивчається властивість рівняння щодо додавання (віднімання) до обох частин того самого числа. З цієї властивості виводяться наслідок, який стверджує, що доданки можна переносити з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому їх знаки на протилежні.

Розглянемо як за змістовими лініями курсу математики здійснюються пропедевтичні зв'язки:

5 клас

Вирази та їх перетворення.

Залежність значення виразу від значення букви, яка входить до його складу. Складання виразів з невідомою під час розв'язування задач за допомогою рівнянь. Поглиблення уявлень учнів про буквені вирази у зв'язку з розширенням числових множин.

Рівняння та нерівності.

Лінія розвивається у зв'язку з повторенням основних понять, назви розрядів і класів, правило порівняння і округлення, компоненти при додаванні, відніманні, множенні, діленні.

6 клас

Числа і дії над ними.

Розділи: раціональні числа, додатні і від'ємні числа, модуль, порівняння чисел, додавання і віднімання раціональних чисел, множення раціональних чисел. Переставна і сполучна властивість множення; розподільча властивість. Ділення раціональних чисел. Поняття про натуральні числа і їх властивості, звичайні дроби і їх властивості; десяткові дроби і їх властивості; вміння виконувати чотири арифметичні дії над числами і дробами, округлення, порівняння.

Вирази та їх перетворення.

Лінія розвивається за допомогою повторення означення відсотків, запис відсотків у вигляді звичайного і десяткового дробу і розв'язання трьох основних задач на відсотки, залежності результатів дій від компонентів.

Рівняння та нерівності.

Лінія базується на попередніх знаннях: правила використання чотирьох арифметичних дій над додатніми числами, властивості дій, правило розкриття дужок.

Функції.

Лінія базується на знаннях: вміння будувати координатну пряму; знаходити точку за її координатами і навпаки.

Комбінаторика та елементи статистики.

Уміння виконувати чотирьох арифметичних дій. Поняття про звичайні і десяткові дроби.

15. Методика вивчення рівнянь та їх систем в курсі алгебри 7 – 9 класів

У 7 класі в курсі алгебри основної школи вводиться означення лінійного рівняння з одним невідомим через його загальний вигляд $ax = b$ і досліджується питання кількості коренів залежно від коефіцієнта a і вільного члена b.

На завершення курсу алгебри 7 класу вводиться поняття про лінійне рівняння з двома невідомими, його графік, систему лінійних рівнянь з двома невідомими і способи їх розв'язування.

Систематичне вивчення квадратних рівнянь відбувається у 8 класі. Після цього розв'язують дробово-раціональні рівняння, які зводяться до квадратних.

У 9 класі вивчаються біквадратні рівняння та системи рівнянь другого степеня.

Вивчення кожного нового виду рівнянь і їх систем супроводжується розв'язуванням текстових задач на складання рівнянь.

В математичній науці існує кілька підходів до означення поняття рівняння залежно від понять, через які воно трактується. Основні з них означають рівняння через вираз, функцію і предикат.

Означення 1. Рівнянням з однією змінною x (або з одним невідомим x) називають рівність виразів $f_1(x)$ і $f_2(x)$ тобто , $f_1(x) = f_2(x)$, що визначені відповідно на множинах, і для якої поставлено завдання відшукати множину всіх значень x, які належать спільній області визначення функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$, таких, щоб вирази $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мали однакові числові значення.

Означення 2. Рівнянням з однією змінною x (або з одним невідомим x) називають рівність $f_1(x) = f_2(x)$ двох аналітично заданих функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$ з областями визначення і областями зміни , де $Y_1 \subseteq R$, $Y_2 \subseteq R$, для якої поставлено завдання відшукати всі значення $x \in D_r \subseteq D = D_1 \cap D_2$ такі, щоб обидві функції мали однакові числові значення.

Означення 3. Предикат $f_1(x) = f_2(x)$ з множиною визначення D, для якого поставлено завдання знайти множину істинності $D_r \subseteq D$, називають рівнянням з однією змінною x (або з одним невідомим x).

В основній школі найпростішим є перше означення, оскільки родове поняття «вираз» простіше для сприймання ніж «функція» або «предикат».

У підручнику алгебри рівняння трактується як рівність, що містить змінну. Через поняття змінної подається означення кореня рівняння. Розв’язати рівняння – означає знайти всі його корені, або довести, що їх немає.

У методичній літературі докладно висвітлено такі способи розв’язування простіших рівнянь:

1) на основі залежностей між компонентами і результатами дій;
2) за властивостями рівностей;
3) за теоремами про рівносильність рівнянь;
4) графічний спосіб.

За підручником поняття рівносильних рівнянь означає так: Рівняння, що мають один і той же корінь називають рівносильними.

Способи отримання рівносильних рівнянь сформовані у теоремах:

Теорема 1. Якщо до обох частин рівняння **(1)** ***f(x)=g(x)*** додати один і той же вираз $\phi(x)$, який визначено при всіх значеннях x із області визначення рівняння (1), то одержимо рівняння $f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$ рівносильне рівнянню (1).

Теорема 2. Якщо обидві частини рівняння **(1)** ***f(x)=g(x)*** помножити або розділити на один і той же вираз $\phi(x)$, визначений при всіх значеннях x із області визначення рівняння (1) і відмінний від нуля у кожній точці цієї області, то отримаємо рівняння $f(x)\cdot\varphi(x)=g(x)\cdot\varphi(x)$ або $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{g(x)}{\varphi(x)}$ рівносильне даному.

Теорема 3. Якщо обидві частини рівняння **(1)** ***f(x)=g(x)***, де *f(x) і g(x)* не від'ємні при всіх значеннях x із області визначення рівняння (1) піднести до одного й того ж натурального степеня n, то отримаємо рівняння $f^n(x)=g^n(x)$ рівносильне рівнянню (1).

Алгоритм розв'язування квадратних рівнянь задається формулою коренів квадратного рівняння.

З метою підготовки до виведення зазначеної формули розв'язується кілька рівнянь способом виділення квадрата двочлена.

Розв’язуючи дробові раціональні рівняння доцільно запропонувати учням кілька можливих способів розв’язування залежно від теоретичної основи.

Перший спосіб полягає в тому, щоб:

1) знайти спільний знаменник дробів, що входять до рівняння;
2) помножити обидві частини рівняння на спільний знаменник;
3) розв’язати одержане ціле рівняння;
4) виключити з його коренів ті, які перетворюють на нуль спільний знаменник.

Другий спосіб

Всі члени рівняння переносять в ліву частину і одержаний там вираз зводять до дробу вигляду $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Рівняння $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$ розв’язують, скориставшись необхідного і достатнього умовами рівності нулю дробу: дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю. Такий спосіб розв’язання дає змогу учням краще усвідомити потребу позбутися коренів, які перетворюють знаменник на нуль.

До поняття системи лінійних рівнянь з двома невідомими учнів підводять в 7 класі після розгляду лінійного рівняння з двома невідомими і його графіка. Означення системи не вводять, але пояснюють на прикладі розв’язування текстової задачі і кажуть, що одержані під час розв’язування задачі рівняння утворюють систему рівнянь. Вводиться форма запису системи (фігурні дужки) і формулюється означення розв’язання системи двох рівнянь з двома невідомими.

Насамперед вводиться графічний спосіб розв’язування системи, щоб дати геометричне тлумачення розв’язків кожного з рівнянь і системи рівнянь як координат точки перетину обох графіків.

З’ясовується можлива кількість розв’язків системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими залежно від розташування графіків.

На наступних уроках в 7 класі розглядають два алгебраїчні способи розв’язування таких систем: спосіб підстановки і спосіб додавання.

У 9 класі учні повертаються до вивчення систем рівнянь. Тут уже розглядаються системи, в яких одне або обидва рівняння – другого степеня.

18. Методика вивчення функцій в курсі алгебри 7-9 класів

Характеристика змісту навчання алгебри за чинними програмами.

Зміст шкільної алгебри відрізняється від змісту науки алгебри. Спочатку "алгебру" називали науку про розв’язування рівнянь.

З XVIII ст. алгебру розглядають як науку про буквені вирази та їх перетворення і алгебраїчні рівняння та їх розв’язування. З кінця XIXст. Об’єктом вивчення алгебри стали вважати множини з аксіоматично заданими на них алгебраїчними операціями. Її важливими поняттями є групи, кільця, поля та інші абстрактні математичні структури. Навчальна програма з алгебри для основної школи, крім алгебраїчного матеріалу містить також питання з інших наук: арифметики(числові множини, дії над дійсними числами), математичного аналізу(функції, графіки), теорії ймовірностей, математичної статистики.

В курсі алгебри 7 класу для 11 – річної школи є дві основні відмінності:
1) вводиться одне з фундаментальних понять – поняття "функції". Розглядається лінійна функція та її графік.
2) вводиться поняття математичного моделювання.

Рівняння і функції розглядаються як засоби математичного моделювання реальних процесів і явищ, на цій основі розв’язуються прикладні задачі.

Введенню поняття функції має передувати вивчення раціональних чисел. Щоб стверджувати, що графіком лінійної функції є пряма, треба розглядати функцію на множині всіх дійсних чисел. А не тільки раціональних. Поєднуючи науковість і доступність викладу теми: "Функції" семикласникам в пропедевтичному плані повідомити, що крім відомих їм раціональним числам, існують числа не раціональні. Такі числа разом з раціональними утворюють множину дійсних чисел.

На координатній прямій існує безліч точок, координати яких числа – ірраціональні.

Змістове наповнення курсу алгебри 8 класу має незначні відмінності від попередніх курсів. Нова програма містить лише 3 теми, але змістове наповнення цих тем передбачає вивчення матеріалу всіх змістових ліній (числа, вирази та їх перетворення, функції, елементи прикладної математики).

Функції $y=\frac{k}{x}$, $y=x^2, y=\sqrt{x}$ на відміну від попередніх програм вивчається не в окремому розділі, а паралельно з відповідними виразами та рівняннями. Новим у вивчені математики 8 класу є виокремлення таких змістових одиниць:

1. дроби замість "алгебраїчні дроби".
2. раціональні числа.
3. числові множини.
4. етапи розвитку числа.
5. добуток і частка квадратних коренів.
6. квадратний тричлен, його корені.
7. розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.

В курсі алгебри неповної середньої школи учні вивчають такі функції:

$y=kx+b$ (7 клас)

$y=kx$ (7 клас)

$y=\frac{k}{x}$ (8 клас)

$y=x^2$ (8 клас)

$y=\sqrt{x}$ (8 клас)

$y=ax^2+bx+c, a\neq 0$ (9 клас).

В результаті вивчення функції до учнів висуваються такі вимоги:

1. розуміти зміст поняття "функції".
2. знати про основні способи задання функції.
3. розуміти суттєві ознаки функції. Розпізнавати деякі функції серед інших функцій, вміти будувати їх графіки і читати за графіками властивості.

Основна мета вивчення функцій – формувати вміння будувати і читати графіки функцій, а також характеризувати за графіками функцій їхні властивості та реальні процеси, які вони описують.

В 1643 – 1727рр. ще не було явного означення функції (проте в цей період активно досліджувалось і розвивалось інтегральне і диференціальне числення).

У 1718р. Й. Бернуллі вперше означив функцію.

У 1748р. Л. Ейлер уточнив означення Й. Бернуллі.

"Функція змінної кількості – це аналітичний вираз складений якимсь чином з цієї кількості і чисел або сталих кількостей".

У 1834р. Лобачевский сформулював більше загальне означення функції.

В XX ст. поняття функції розширюється далі. Сам термін "функція" у 1694р. увів Лейбніц. З латинської функція означає виконання або здійснення.

В шкільних та Вузівських підручниках поширеними є два напрями функції: класичний і сучасний (теоретико – множинний напрям).

За класичним напрямом функцію розглядають як залежну змінну величину, функцію розглядають як закон (правило) за яким значення залежної змінної величини залежить від значення незалежної змінної величини.

Відповідність між значенням незалежних змінних величин.

Сучасний (теоретико - множинний) по – перше розглядає не саму функцію, функціональну ситуацію; функція розглядається як певного виду відповідність між множинами, або як відношення між елементами двох множин; в цьому напряму розглядають функцію як закон відповідності між множинами.

В шкільних підручниках під редакцією Колмагорова функція трактувалася на основі теоретико – множинного підходу. В навчальних посібниках під редакцією Теляковського функцію трактують на основі класичного напрямку.

Функціональна пропедевтика здійснюється на уроках математики в 5 – 6 класі. Під час вивчення звичайних і десяткових дробів, числові вирази, обчислення за формулами, буквені вирази, зображення чисел на прямій, координати точки, прямокутна система координат, таблиці, діаграми, графіки, площа прямокутника, об’єм паралелепіпеда.

У діючому підручнику "Алгебра" (Бевз Г. П.) у розділі " Функції" дано таке означення "якщо кожному значенню змінної x з деякої множини М відповідає єдине значення змінної y, то змінну y називають функцією від x.

Змінну x в цьому випадку називають аргументом даної функції, множина М – областю визначення функції, а відповідність між x і y

функціональною відповідністю. Аргумент ще називають незалежною змінною, а функцію – залежною". Таким чином вже на початку вивчення 8 класу термін "функція" вживається для назви двох понять:

1. залежності між змінними;
2. залежної змінної.

Далі пояснюють учням як задавати функцію. Питання про способи задання функції важливе значення у процесі формування поняття функції.

x	0	1	2	3
y	-1	1	3	5

$y = 2x - 1$.

Відомо 5 способів задання функції:

1. аналітичний (за допомогою формули);
2. табличний (за допомогою таблиці);
3. графічний (за допомогою графіка);
4. описовий (усне або письмове описання функції);
5. за допомогою графа.

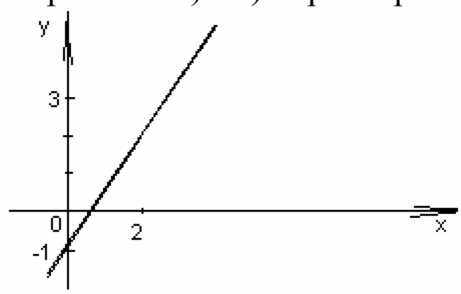
В школі вивчають перших три способи задання функції, але чомусь прийнято такий порядок вивчення окремих функцій: формула, таблиця, графік. Кожен із цих способів має свої переваги і недоліки, саме в сукупності ці способи дають можливість глибше вивчати конкретні види функцій і розуміти поняття функції взагалі.

План характеристики способів задання функції

1) компактність;
2) наочність (можливість судити про властивості одразу);
3) можливість знаходити y по заданому x.

<u>Аналітичний спосіб</u>

Переваги: 1) і 3) характеристика присутні.



<u>Табличний спосіб.</u>

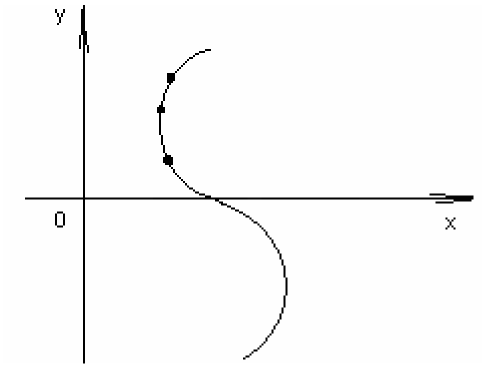
Переваги: більш наочний в порівнянні з аналітичним, відразу представленні значення y від деяких значень x, але він громіздкий.

<u>Графічний спосіб.</u>

Переваги: наочність, при необхідності для відповідних x можна знайти відповідні значення y (проте завжди точно).

Розглядаючи графічний спосіб слід відмітити, що кожній функції відповідає деяка множина точок координатної площини (графік), але не навпаки.

Контр – приклад:



Більшість функцій, що вивчаються в шкільному курсі математики мають схожі особливості, а саме: аналітичний спосіб задання, особливості графіків, область застосування. Вивчення однієї функції як члена класу відбувається за певною схемою:

1) вивчення функції як члену класу;
2) вивчення властивостей всього класу на прикладі типової функції цього класу.

Зв'язок у межах функціональної лінії при вивченні функції:

I. $y = kx + b$, $y = kx$

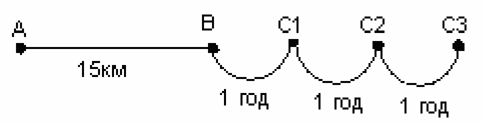
II. $y = x^2$, $y = ax^2$, $y = ax^2 + bx + c$

III. $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^n$

IV. $y = \dfrac{k}{x}$, $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Типовий і одночасно важливий для математики клас функцій: лінійні функції. Для того, щоб вивчити клас лінійних функцій в сукупності їх загальних властивостей необхідно поставити учням задачу: дослідити клас функцій $y = kx + b$, в залежності від параметрів, встановити геометричний зміст параметрів.

Розглянемо особливості вивчення функцій на прикладі лінійної функції:

Етап вивчення	Зміст матеріалу
1. Перед введенням означення має бути розглянута прикладна задача.	1. Пройшовши спочатку 15 км з пункту А в пункт В далі велосипедист їхав зі швидкістю 10км/год. Знайти відстань через годину після того, як велосипедист почав рух із точки В, через 2 години і т. д. через t годин.  $15 + 10 \cdot 1$, $15 + 10 \cdot 2$, $15 + 10 \cdot 3$, $15 + 10 \cdot t$, $S = 15 + 10t$. Робимо перехід до означення лінійної функції так: така залежність змінної S від змінної t називається лінійною функцією.

<table>
<tr><td>2. Дається строге означення функції.</td><td>2. Лінійною називається функція, яку можна задати формулою виду: $y = kx + b$, де x – незалежна змінна, k, b – дані числа.</td></tr>
<tr><td>3. З’ясовується область визначення функції, при цьому користуються аналітичним записом функції.</td><td>3. $x \in R$</td></tr>
<tr><td>4. Вибирають конкретну лінійну функцію з фіксованим значенням k,b. Складаємо таблицю для деяких її значень. Значення аргументу вибираються із множини раціональних чисел, чим більше, тим краще.</td><td>4. $y = 3x - 2$
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>$-\frac{1}{3}$</td><td>1</td><td>$\frac{1}{9}$</td><td>$-\frac{5}{3}$</td><td>-10</td></tr>
<tr><td>y</td><td>-2</td><td>-3</td><td>1</td><td>$-\frac{5}{3}$</td><td>-7</td><td>-32</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>5. За таблицею будуємо графік функції.</td><td>5. На прямокутній системі координат наносимо точки, вказані в таблиці. Учням пропонується з’ясувати як ці точки розташовані на координатній площині, після проведення прямої лінії на ній вибирається точка, координата якої не потрапили в таблицю (бажано цілі значення) знаходяться її координати і підставляються в аналітичний запис функції. Таким способом ми доводимо, що графіком лінійної функції є пряма лінія.</td></tr>
<tr><td>6. Розглядаємо властивості даної лінійної функції, досліджуючи її графік.</td><td>6. $k = 3 > 0$, графік функції утворює гострий кут з додатнім напрямом вісі х. При x=0 координата $y = -2 = b$. Це означає, що пряма перетинається в точці з координатою b.</td></tr>
</table>

20. Методика проведення перших уроків геометрії: найпростіші фігури, формування понять, аксіоми планіметрії.

а) Вступні зауваження.

До перших уроків геометрії ми відносимо навчальний матеріал,який вводить учнів у геометрію. Це відповідно:§1,2 у підручнику МерзлякаА.Г.; розділ 1 в підручнику Бевза Г.П.; §1-6 в підручнику КапіносоваА.М.

Саме тут автори розглядають первісні поняття геометрії, найпростіші геометричні фігури: відрізок, пів пряма, кут, півплощина, трикутник, паралельні та перпендикулярні прямі.

Розглядаючи властивості найпростіших геометричних фігур, учням не повідомляється термін *«аксіома».* Вводиться поняття про аксіому і теорему в окремих параграфах підручника. Наприкінці перших уроків геометрії, як правило, тут формулюються всі аксіоми, покладені в основу курсу.

Основна мета перших уроків геометрії – дати поняття про геометрію; систематизувати наочні уявлення про найпростіші геометричні фігури; ввести первісні (неозначувальні) поняття і поставити учнів перед потребою ввести означення деяких відомих їм фігур: відрізок, пів пряма, кут, трикутник, паралельні прямі; розглянути первісні та означу вальні відношення; сформулювати основні властивості найпростіших фігур і властивості вимірювання відрізків і кутів, які наприкінці теми буде названо аксіомами.

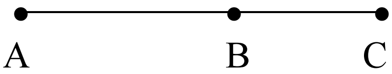
Всі діючі підручники дотримуються досягнення зазначеної мети.

б)Найпростіші фігури. Формування понять.

Щодо первісних неозначувальних понять планіметрії («точка», «пряма») , то уявлення про них учні вже повинні мати з попередніх класів. Розглянемо як формуються інші поняття. Розглянемо поняття «промінь», «доповняльні промені», «відрізок», «кут», «трикутник», « паралельні прямі» за підручником Капіносова([13]).

Специфіка викладення змісту понять в цьому підручнику є те, що автор дає терміни – синоніми до багатьох понять. Так, розглядаючи властивості належності точок і прямих, з одного боку говорять: «точка лежить на прямій», з іншого «пряма проходить через точку».

Якщо на прямій розташовані три точки, то можемо сказати, що:

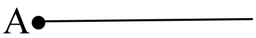


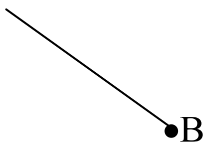
1) Одна з них (B) лежить між двома іншими (A і C);
2) Точки A і C лежать з різних боків від B;
3) Точки B і C лежать з одного боку від A.

У §2 підручника учні мають можливість ознайомитися з означеннями понять: «промінь», «доповняльні промені», «відрізок». Виконаємо логіко-дидактичний аналіз цих понять:

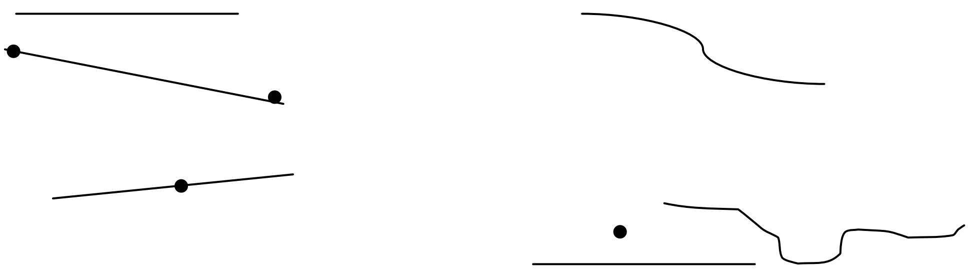
<u>Промінь</u> – частина прямої, що складається з точки, яку називають початком променя, а також з усіх точок прямої, що лежать з одного боку від вказаної точки.

Приклади:



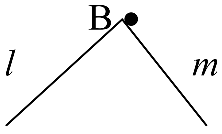


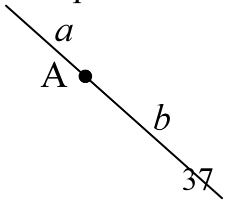
Контрприклади:



<u>Доповняльні промені</u> – два промені однієї прямої, які мають тільки одну спільну точку.

Контрприклад: Приклад





Відрізок – частина прямої, що складається з двох точок прямої, а також усіх точок прямої, які лежать між цими точками.
Кут – два промені, що мають спільний початок і частина площини, обмежена цими променями. Промені називаються сторонами кута, а їхній спільний початок –вершиною кута.
Трикутником називають частину площини, обмежену трьома відрізками, що попарно сполучають три точки, які не лежать на одній прямій.
Прямі, які лежать в одній площині та не перетинаються називаються паралельними.

Означувальні поняття на перших уроках геометрії можна вводити і конкретно-індуктивним, і абстрактно-дедуктивним методом.

Так учні можуть самостійно сформулювати означення таких понять: «відрізок», «розгорнутий кут», «паралельні прямі», «бісектриса кута», а означення таких понять, як «кут», «трикутник», «рівні трикутники», «суміжні кути», «перпендикуляр до прямої» доцільніше ввести абстрактно-дедуктивним методом.

в) Ознайомлення з аксіомами

Мерзляк	**Бевз**	**Капіносов**
1)Основна властивість прямої: через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну. **2)Основна властивість довжини відрізка**: якщо т.С є внутрішньою точкою відрізка АВ , то відрізок АВ дорівнює сумі відрізка АС і СВ, тобто АВ=АС+СВ. Якщо т.С не належить відрізку АВ, то АВ<АС+СВ. **3)Основна властивість величини кута:** Якщо промінь ОС ділить кут АОВ на два кути АОС і СОВ, то кут АОВ дорівнює сумі кутів АОС і СОВ. **4)**Для будь-яких двох точок М і Н існує єдиний відрізок, для якого ці точки є кінцями і кожен відрізок має певну довжину. **5)**Якою б не була пряма існують точки, які належать цій прямій і точки, які не належать їй.	**1. Основні властивості розміщення точок на прямій.** 1.1 Яка б не була пряма існують точки, що належать цій прямій і точки,що їй не належать. 1.2 Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну. 1.3 З трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими. **2. Основні властивості вимірювання відрізків** 2.1 Кожен відрізок має певну довжину 2.2 Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які його розбиває будь-яка внутрішня точка. **3. Основні властивості вимірювання кутів** 3.1 Кожний кут має певну міру 3.2 Міра кута дорівнює сумі	**Основні властивості точок і прямих на площині** 1. Для будь-якої прямої є точки, які належать прямій і точки,які їй не належать. 2. Із трьох точок на прямій тільки одна лежить між двома іншими. 3. Через дві точки можна провести тільки одну пряму. 4. Кожен відрізок має певну довжину більшу від нуля. 5. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які його розбиває будь-яка його внутрішня точка. 6. На даному промені від його початку завжди можна відкласти відрізок заданої довжини і до того ж тільки один.

6)Основна властивість трикутника: для даного трикутника АВС і променя А, М існує трикутник А1В1С1 рівний трикутнику АВС і такий,що АВ=А1В1,ВС=В1С1, АС=А1С1 і сторона А1В1 належить променю А1М, а вершина С1 у заданій півплощині відносно прямої А1М. **7)Основна властивість паралельних прямих**: через точку,яка лежить на даній прямій проходить тільки одна пряма, паралельна даній.	мір кутів, на які даний кут розбивається його внутрішнім променем.	7. Пряма розбиває площину на дві півплощини 8. Кожен кут має певну градусну міру 9. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які його розбиває будь-який промінь, що проходить між його сторонами. 10. У задану півплощину від даного променя завжди можна відкласти лише один кут заданої градусної міри.

г) Доведення перших теорем

Однією з методичних проблем ШКГ є ознайомлення учнів з першими логічними доведеннями геометричних тверджень. Учні не розуміють призначення доведень, а тому в них не виникає потреби доводити геометричні твердження. В зв’язку з цим, логічні обґрунтування на перших уроках планіметрії слід проводити не з метою запевнити учнів у істинності геометричних тверджень, а для пояснень нових геометричних знань з опорою на вже відомі факти і наявні знання. Тому робота з першими теоремами геометрії має починатися з експерименту, тобто з дослідної перевірки фактів; після того, як доведено теореми, слід кожного разу підкреслювати, що, оскільки теорема доведена, то відпадає необхідність у повторенні експерименту.

Процес ознайомлення учнів з теоремами, їх виникненням і прийомами доведення, має складатися з таких етапів:

I. **Експеримент**, який встановлює дослідним шляхом вірогідність справедливості того чи іншого судження,яке виникає на основі життєвого досвіду, або спостереження учнів.
II. **Доведення,** яке полягає в поясненні причин, за яких відбувається факт, сформульований в теоремі.
III. **Застосування** теореми на практиці, та при розв’язуванні задач.

Без останнього етапу засвоєння теореми не буде осмисленим і плідним.
В підручнику Мерзляка першим доводиться таке твердження:
Теорема 1.1: Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.
Обґрунтовується це твердження одразу після введення поняття «теореми» .
Слід доводити теорему 1.1 ,використовуючи метод доведення від супротивного. Пізніше наприкінці §2 підручника, у пункті «теореми»,учням

буде роз’яснено суть методу доведення від супротивного. Також у підручнику Мерзляка до перших теорем віднесено теорему 2.1: Якщо три точки A,B,C такі, що виконується рівність AB=AC+CB, то точка C є внутрішньою точкою відрізку AB.

Теорема 4.1: Сума суміжних кутів рівна 180 °.

Теорема 4.2: Вертикальні кути рівні.

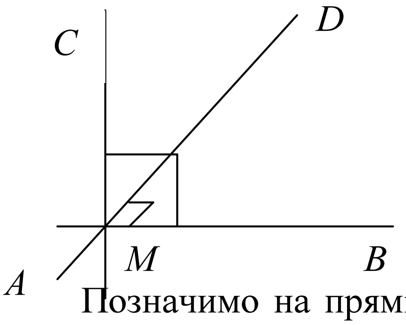
Теорема 5.1: Через кожну точку прямої проходить лише одна пряма перпендикулярна даній.

Починаючи з вивчення перших теорем слід привчати учнів до старанного запису умов і висновку теорем за наперед заготовленим рисунком. Також треба навчити учнів до культури запису на дошці і в зошиті, а саме рекомендувати запис теореми зліва, а скорочений запис теореми справа. Для скороченого запису доречно показати учням вживання деяких символів: $\notin, \in$.

Приведемо приклад скороченого запису теореми 5.1

Дано: а - пряма,
A-точка, A $\in$ а.

Довести: через т.А можна провести пряму перпендикулярну а.



Доведення

Позначимо на прямій *AB* довільну точку *M* (*за аксіомою належності точок прямій*) і побудуємо прямий кут *CMB (за аксіомою відкладання кутів).* Тоді *CM* перпендикулярна *AB*.

Припустимо, що через точку *M* проходить ще одна пряма *MD*, відмінна від *CM* і перпендикулярна до прямої *AB*.

Розглянемо випадок, коли промінь *MD* належить куту *CMB*. Тоді за основною властивістю вимірювання кутів: $\angle CMB = \angle CMD + \angle DMB$. Звідси $\angle CMB > \angle DMB$. Насправді $\angle CMB = \angle DMB = 90°$. Отже, наше припущення невірне. Розглянемо аналогічно випадок, коли промінь *MC* належить куту *DMB*.

Визначальним критерієм при перевірці засвоєної учнями теореми на задовільну оцінку є:

a) Розуміння змісту доводжуваного твердження
b) Уміння викласти загальний зміст доведення

д)особливості системи задач перших уроків.

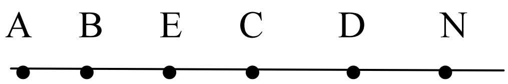
Система задач, які розв’язуються на перших уроках геометрії покликана вирішити педагогічні проблеми у геометричній підготовці учнів, а саме:

1) Найпростіші геометричні задачі повинні сприяти розумінню учнями змісту доведень математичних тверджень.

Розглянемо приклади таких задач і методику їх доведення:

Задача 1

Дано:АВ=ВС=СД=6 см.
т.Е – середина ВС
Знайти: АЕ і ЕД



Учитель ознайомлює учнів з задачею і коротко записує на дошці. Учні записують у зошит. Вчитель повинен впевнитися, що учні усвідомили умову задачі.

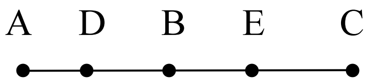
Наступним кроком учитель пропонує учням розв’язати задачу самостійно. Деякі учні знаходять довжини безпосередньо вимірюванням. Інші самостійно виконують найпростіші логічні міркування із яких слідує, що ВЕ=ЕС=3 см. (оскільки Е-середина ВС).АЕ=АВ+ВЕ=6+3=9 (см). ЕД=ЕС=3+6=9 (см).

Обидва способи правильні, але другий спосіб краще, оскільки не потрібно вимірювати.

При розв’язуванні задач другим способом , в учнів формується потреба у доведенні як необхідність впевнитися логічними міркуваннями, про те, що інтуїтивне передбачення було правильне.

2) Доречно розв’язувати такі задачі, які є з’єднуючою ланкою між задачами на доведення і на обчислення.

Приклад:
Дано: АД=1,8 см, ЕС=3 см, т.Д –середина АВ, т.Е – середина ВС.
Знайти: ДЕ і АС



3) Система задач має бути спрямована на властивості найпростіших фігур, на формування вмінь, посилатися на аксіоми, теореми і доведення у процесі доведення нових математичних тверджень.

Ніколи не було методичною проблемою розв’язування задач, які мають тренувальний характер і зводяться до застосування теореми, яку тільки вивчили. Більш складним є завдання навчити розв’язувати задачі в яких треба застосувати не одну теорему, а декілька.

Одним із методичних прийомів є пропозиція учням багатозначних геометричних задач:

Більшість задач шкільного підручника має однозначне геометричне тлумачення, а тому однозначною є і побудова малюнка, але є задачі, умови яких задовольняють різні геометричні ситуації: такі будемо називати **багатозначними**. Наведемо добірку задач на тему: «Основні властивості геометричних фігур.»

- Точки А,В,С лежать на одній прямій АВ=3см. ,ВС =5 см. Чому дорівнює довжина відрізка АС?
- Т. А,В,С лежать на одній прямій. АС у 2 рази більше,ніж ВС. АВ=15 см. Знайти АС і ВС
- $\angle AOB = 30^\circ$, $\angle BOC = 40^\circ$. Знайти $\angle AOC$.

- $\angle AOB = 100^\circ$, $\angle BOC = 120^\circ$.Зайти $\angle AOC$.
- $\angle AOB : \angle BOC = 3 : 4$, $\angle AOC = 35^\circ$.Знайти $\angle AOB$ і $\angle BOC$.

Ще одна умова якій має задовольняти система геометричних задач це урахування індивідуальних особливостей і рівня підготовки учнів.

Зручно компонувати задачі по групам складності:

1,2 група – містить задачі мінімальної складності. Для розв'язання цих задач достатньо вміти застосовувати основні геометричні факти і використовувати найпростіші алгоритми.

3,4 група – задачі середньої степені складності. Для їх розв'язання необхідне невелике відхилення від безпосереднього застосування знань, уміння робити прості узагальнення.

5,6 група – призначені для найбільш підготовлених учнів. При розв'язанні цих задач необхідно вміти застосовувати знання в ускладнених ситуаціях. Мати достатньо високий рівень обчислювальних навичок і навичок проведення алгебраїчних перетворень. Ці задачі, більш ніж задачі інших груп, спираються на попередній матеріал.

7,8 група – задачі мають творчий характер. При їх розв'язанні необхідно аналізувати складні нестандартні геометричні ситуації, самостійно відкривати нові факти.

Задачі непарних груп аналогічні за складністю задачам парних груп.

21. Методика вивчення ознак рівності трикутників

Ознаки рівності трикутників формулюються так:

- (перша ознака рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними) ***Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.***
- (друга ознака рівності трикутників за стороною і двома прилеглими до неї кутами) ***Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.***
- (третя ознака рівності трикутників за трьома сторонами) ***Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Всі тереми-ознаки сформульовано в умовній формі, що сприяє чіткому виділенню умови та вимоги кожної теореми. Проте відомо, що сформульовані у категоричній формі теореми більш лаконічні, а завдання учням переформулювати теореми в категоричну форму сприяє розвитку логічного мислення та математичної мови.

Ідея доведення ознак рівності трикутників спирається на означення рівних трикутників, я саме: ***Два трикутники називають рівними, якщо їх можна сумістити.***

Доведення перших ознак рівності трикутників доцільно організувати на трьох рівнях строгості або в «три підходи»:

1)Вчитель виконує сам. Його мета ознайомити учнів зі структурою доведення в цілому. За рисунком вчитель пояснює основну ідею доведення, називає основні твердження, з яких воно складається, без потрібних обґрунтувань.

2)При виконанні другого підходу доведення відтворюється з усіма необхідними обґрунтуваннями. В цьому разі доречно заздалегідь заготувати таблицю: в лівому стовпчику записати всі твердження, з яких складається доведення, а в правому – обґрунтування кожного з них. На початку другого підходу доведення теореми правий стовпчик має бути закритий і відкриватися в міру відповідей учнів на запитання «чому?».

3)Під час третього підходу вводиться домовленість випускати обґрунтування деяких найбільш інтуїтивних і наочно зрозумілих тверджень для скорочення доведення. З метою закріплення доведення ще раз повторює його в скороченому варіанті.

Проілюструємо методичний варіант на прикладі вивчення І-ї ознаки рівності трикутників. Теорема 8.1(за двома сторонами і кутом між ними). Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Дано: трикутник ABC і трикутник $A_1B_1C_1$; Нехай AB= A_1B_1, BC=B_1C_1, $\angle B=\angle B_1$.

Довести: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$;

Доведення:

<u>І прохід</u> – вчитель виконує сам. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, в яких AB= A_1B_1, BC= B_1C_1, $\angle B=\angle B_1$. Накладемо трикутник ABC на трикутник $A_1B_1C_1$, так щоб промінь BA сумістився з променем B_1A_1, а промінь BC – з променем B_1C_1. Це можна зробити тому, що за умовою $\angle B=\angle B_1$. Доведемо, що за таких умов вершина A збігається з вершиною A_1, вершина C – з вершиною C_1(основна ідея доведення). Оскільки за умовою BA=B_1A_1, BC=B_1C_1, то при такому накладанні сторона BA суміститься з B_1A_1, BC суміститься з B_1C_1. Отже трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ повністю сумістяться, тобто вони рівні.

<u>ІІ прохід</u> - вчитель показує учням таблицю.

Твердження	Обгрунтування
1)Накладемо трикутник ABC на трикутник $A_1B_1C_1$ так: промінь BA суміститься з B_1A_1, BC – з B_1C_1	За умовою $\angle B=\angle B_1$, за означення рівних трикутників
2)Відрізок BA суміститься з B_1A_1	За умовою, що AB=A_1B_1; за означенням рівних відрізків
3)Відрізок BC суміститься з B_1C_1	За умовою, що BC=B_1C_1; за означенням рівних відрізків
4) $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$	За доведеним і за означенням рівних трикутників

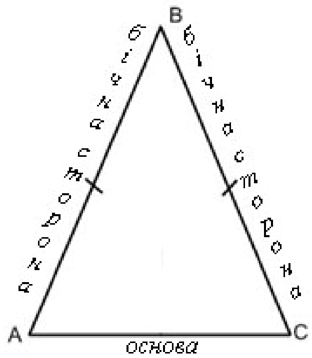
В лівому стовпчику таблиці записано всі твердження, з яких складається доведення (правий стовпчик закритий) і пропонує відповісти на запитання «чому виконується кожне твердження?». Правий стовпчик відкривається в міру відповідей учнів.

III прохід – вчитель ще раз повторює доведення в скороченому варіанті. Це по суті доведення, наведене в підручнику.

22. Методика вивчення теми «Рівнобедрений трикутник»

Рівнобедрений трикутник та його властивості вивчаються після доведення другої ознаки рівності трикутників перед третьою ознаки рівності трикутників.

Означення поняття «рівнобедрений трикутник» вводиться через найближчий рід і суттєві властивості, а саме:



Трикутник, у якого дві сторони рівні називають *рівнобедреним*.

Вводяться назви елементів рівнобедреного трикутника. Рівні сторони називають бічними, третю сторону називають основной. Спільну точку бічних сторін називають вершиною. Кут В – кутом при вершині , кути А і С – кути при основі. Ці елементи вводяться описово.

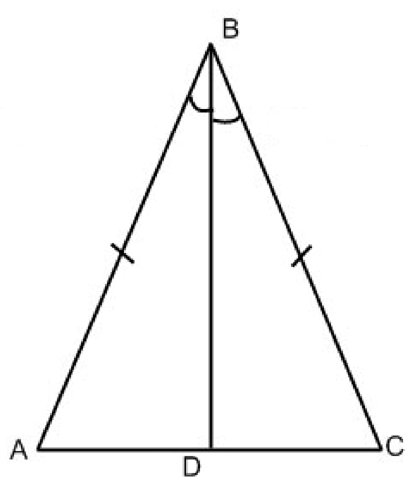
Зміст поняття «рівнобедрений трикутник» також розкривається в теоремі-властивості.

Теорема 9.1. У рівнобедреному трикутнику:

1) кути при основі рівні;

2) бісектриса кута при вершині є медіаною і висотою.

(Доведення теореми спирається на першу ознаку рівності трикутників.)



Дано: ΔABC, $AB=BC$;

BD – бісектриса $\angle ABC$;

Дов-ти: а) $\angle A=\angle C$;

б) BD – медіана і висота.

Доведення:

Крок:	Логічне обґрунтування:
а) 1. ΔBAD=ΔBCD 2. ∠BAD=∠BCD, тобто ∠A=∠C	а) 1. За першою ознакою рівності трикутників: AB=BC (за умовою), BD – спільна, ∠ABD=∠CBD (BD - бісектриса). 2. З рівності ΔBAD=ΔBCD слідує рівність відповідних елементів.
б) 1. AD=DC, тоді CD – медіана 2. ∠BDA=∠BDC=$\frac{180^\circ}{2}$=90°, тоді BD - висота	б) 1. З рівності ΔBAD=ΔBCD слідує рівність відповідних елементів, тобто, що AD=DC; з означення медіани. 2. З рівності ΔBAD=ΔBCD слідує рівність відповідних елементів, тобто, що ∠BDA=∠BDC; з властивості суміжних кутів; з означення медіани.

Теорему доведено.

З цієї теореми випливає:

1. У трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути.
2. У рівнобедреному трикутнику бісектриса, висота і медіана, проведені з його вершини збігаються.

В цьому ж параграфі вводяться означення рівнобедреного і рівностороннього трикутника, тому з'являється можливість класифікувати всі трикутники за сторонами (по кількості рівних сторін).

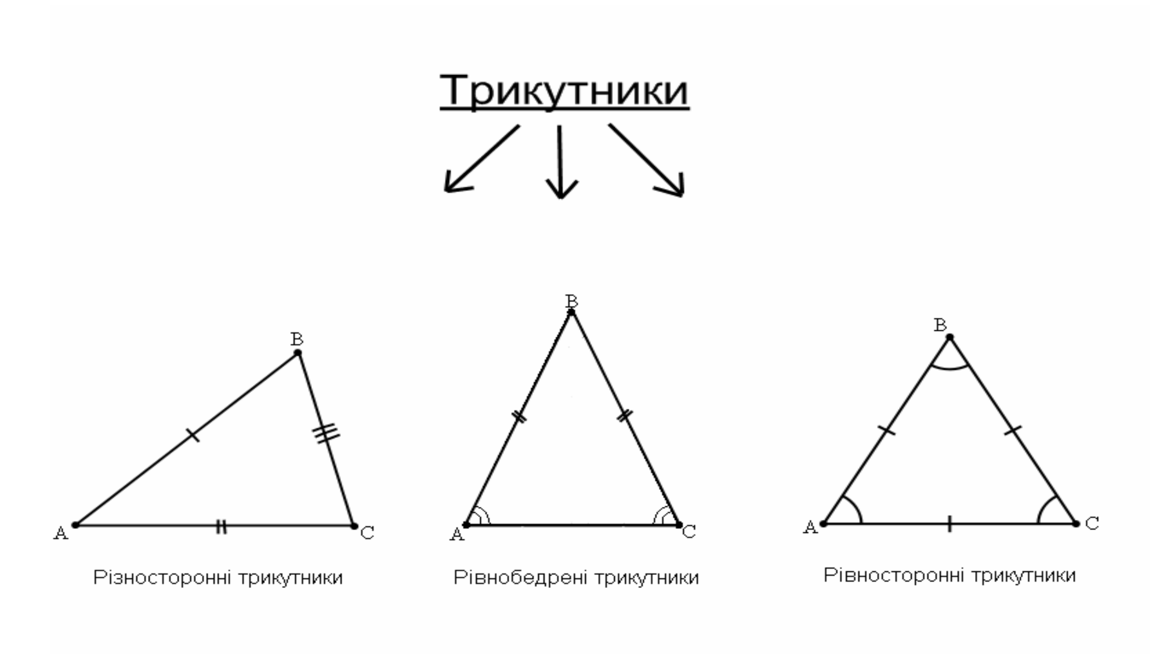
Ознаки рівнобедреного трикутника

За чинною програмою розглядають 4 ознаки рівнобедреного трикутника:

(1) Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений (доводиться теорема за допомогою властивості серединного перпендикуляра).

(2) Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений (доводиться теорема за допомогою II ознаки рівності трикутників).

(3) Якщо медіана трикутника е його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений (доводиться теорема за допомогою I ознаки рівності трикутників).



(4) Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений (доводиться теорема методом від супротивного і спирається на властивість серединного перпендикуляра).

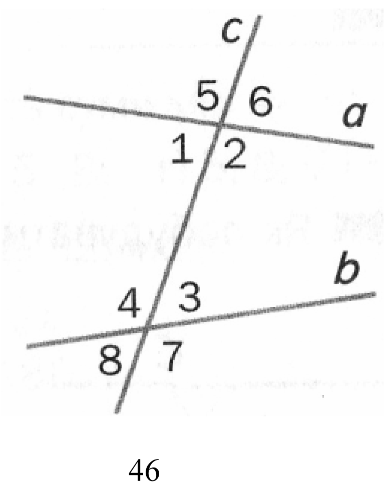
25. Методика вивчення ознак паралельності прямих на площині.

В теорії паралельних прямих учні мають змогу засвоїти означення паралельних прямих: *дві прямі називаються паралельними, якщо вони не перетинаються.*

Аксіома паралельних прямих: *через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.*

Але цих відомостей недостатньо, щоб визначити паралельність цих двох заданих прямих. Тому вчитель має пояснити учню необхідність введення теорем-ознак та відмінність ознаки від означення.

Введення означень внутрішніх односторонніх і внутрішніх різносторонніх кутів має передувати ознайомленню з цими кутами на наочному рівні із залученням рисунка.



Слід домогтися, щоб учні означали і правильно називали кути при перетині двох паралельних третьою.

Якщо дві прямі ***a*** і ***b*** перетнути третьою прямою ***c,*** то утвориться вісім кутів (рис. 1). Пряму ***c*** називають січною прямих ***a*** і ***b***.

Кути 3 і 2, 4 і 1 називають ***односторонніми***.

Кути 3 і 1, 4 і 2 називають ***різносторонніми***.

Кути 6 і 3 , 5 і 4, 2 і 7, 1і 8 називають ***відповідними***.

До теорем-ознак паралельності прямих в підручнику [4] автори відносять наступні теореми:

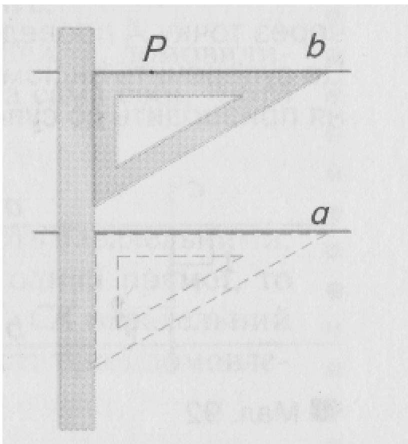
1) Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.
2) Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.
3) Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.
4) Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 180°, то прямі паралельні.
5) Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

Вивчення ознак паралельності прямих, методична схема:

1) Підвести учнів до теореми і сформулювати її.
2) Повідомити ідею і план доведення.
3) Провести доведення за планом, закріпити кожен з етапів.
4) Закріпити доведення шляхом його повного повторення.
5) Застосувати теореми до розв'язування задач.

Теореми теми мають велике практичне значення.

Після доведення теореми 1 (дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні) з'являється змога за допомогою лінійки і косинця будувати паралельні прямі.



Наслідок з теореми 1: Через дану точку *M*, яка не належить прямій *a*, можна провести пряму *b* паралельну *a.*

Але цей наслідок не завжди зрозумілий учням, оскільки вони не розрізняють теорему і аксіому паралельних.

<u>Доведення теорем.</u>

Теорема 14.1. ***Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.***

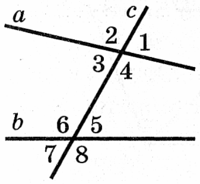


Рис. 204

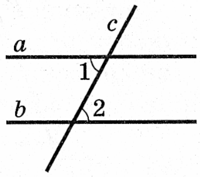


Рис. 205

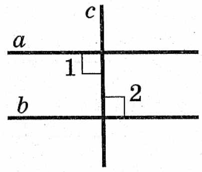


Рис. 206

Д о в е д е н н я. ⊙ На рисунку 205 пряма c є січною прямих a і b, $\angle 1 = \angle 2$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Якщо $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ (рис. 206), то паралельність прямих a і b випливає з теореми 13.1.

Нехай тепер пряма c не перпендикулярна до жодної з прямих a і b. Позначимо точку M — середину відрізка AB (рис. 207). Через точку M проведемо перпендикуляр ME до прямої a. Нехай пряма ME перетинає пряму b у точці F. Маємо: $\angle 1 = \angle 2$ за умовою; $\angle 3$ і $\angle 4$ рівні як вертикальні. Отже, $\Delta AME = \Delta BMF$ за другою ознакою. Звідси $\angle AEM = \angle MFB = 90^\circ$. Ми показали, що прямі a і b перпендикулярні до прямої EF, отже, вони паралельні. ▲

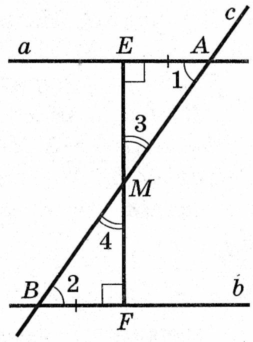


Рис. 207

Т е о р е м а 14.2. ***Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 180°, то прямі паралельні.***

Д о в е д е н н я. ⊙ На рисунку 208 пряма c є січною прямих a і b, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Кути 1 і 3 суміжні, отже, $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$. Тоді $\angle 2 = \angle 3$. Але вони різносторонні. Тому за теоремою 14.1 $a \parallel b$. ▲

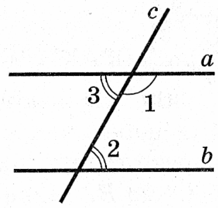


Рис. 208

Т е о р е м а 14.3. ***Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.***

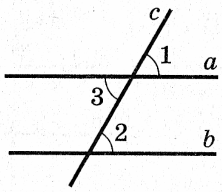


Рис. 209

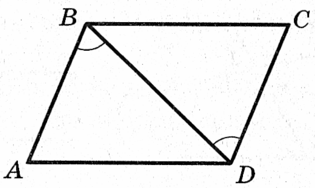


Рис. 210

Д о в е д е н н я. ⊙ На рисунку 209 пряма c є січною прямих a і b, $\angle 1 = \angle 2$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Кути 1 і 3 рівні як вертикальні. Отже, $\angle 3 = \angle 2$. Але вони різносторонні. Тому за теоремою 14.1 $a \parallel b$. ▲

Приклад. На рисунку 210 $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$. Доведіть, що $BC \parallel AD$.

Р о з в' я з а н н я. Розглянемо ΔABD і ΔCDB.

$AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$ — за умовою. BD — спільна сторона. Отже, $\Delta ABD = \Delta CDB$ за двома сторонами і кутом між ними.

Тоді $\angle BDA = \angle DBC$. Крім того, $\angle BDA$ і $\angle DBC$ — різносторонні при прямих BC і AD та січній BD. Отже, $BC \parallel AD$.

На завершення вивчення теми раціонально разом з учнями виділити правило-орієнтир з’ясування паралельності двох прямих:

«Щоб довести паралельність двох прямих на площині, досить довести одне з таких тверджень:

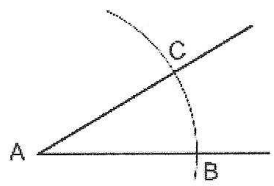
1) внутрішні різносторонні кути рівні;
2) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°;
3) відповідні кути рівні;
4) кожна з прямих паралельна третій прямій;
5) кожна з прямих перпендикулярна третій прямій».

26. Методика навчання учнів розв'язувати задачі на побудову.

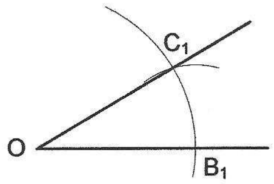
а) Побудова кута рівного даному

Задача. Відкласти від даної пів прямої в даній півплощині кут, що дорівнює даному куту.

Розв'язання



а)



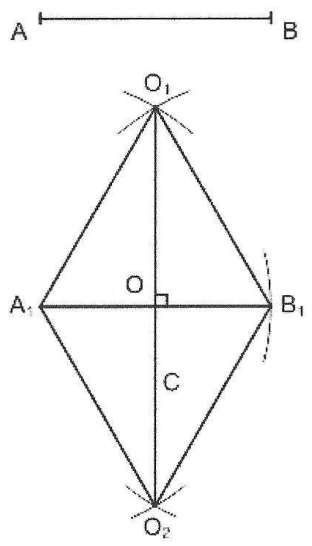
б)

Проведемо довільне коло з центром у вершині A даного кута (мал. а). Нехай B и C – точки перетину кола зі сторонами кута. Проведемо коло радіуса AB з центром у точці O – точці даної пів прямої (мал. б). Точку перетину цього кола з даною пів прямою позначимо B_1, отримаємо коло з центром B_1 і радіусом BC. Точка C перетину побудована в даній півплощині кіл лежить на стороні шуканого кута. Для доведення треба зазначити, що ΔABC і ΔOB_1C_1 є рівними трикутниками з відповідно рівними сторонами. Кути A і O відповідними кутами цих трикутників.

б) Побудова серединного перпендикуляра даного відрізка

Задача. Провести серединний перпендикуляр заданого відрізка.

Розв'язання

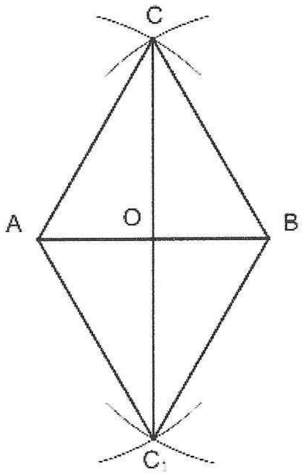


Нехай дано відрізок AB. Проведемо до нього серединний перпендикуляр C. Проведемо коло радіуса AB з центром у точці A_1 – початковій точці даної півпрямої. Точку перетину цього кола з даною півпрямою позначимо B_1. Отримаємо відрізок рівний даному. Проведемо два кола однакового радіуса з центром у точках A_1 і B_1. З'єднавши дві точки перетину кіл прямою C, одержимо серединний перпендикуляр C до даного відрізка A_1B_1. Для доведення досить зазначити, що трикутники з відповідно рівними сторонами O_1A, O_1B_1, A_1O_2, B_1O_2 – радіуси однакових кіл, O_1O_2 – спільна.

в) Поділ даного відрізка навпіл

Задача. Поділити відрізок пополам.

Розв'язання



Нехай AB – даний відрізок. З точки A і B радіусом AB описуємо кола. Нехай C і C_1 – точки перетину цих кіл. Вони лежать у різних півплощинах відносно прямої AB. Відрізок CC_1 перетинає пряму AB у деякій точці O. Ця точка і є серединою відрізка AB. Справді ΔCAC_1 і CBC_1 рівні, за 3-ю ознакою рівності трикутників. Звідси випливає рівність кутів ACO і BCO. Трикутники ACO і BCO рівні за першою ознакою рівності трикутників. Сторони AO і BO трикутників відповідні й тому рівні. Таким чином, O – середина відрізка AB.

г) Побудова прямої перпендикулярної даній

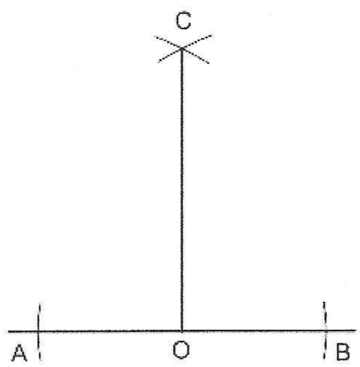
Задача. Через дану точку O провести пряму, перпендикулярну до даної прямої *a*.

Розв'язання

Можливі два випадки:

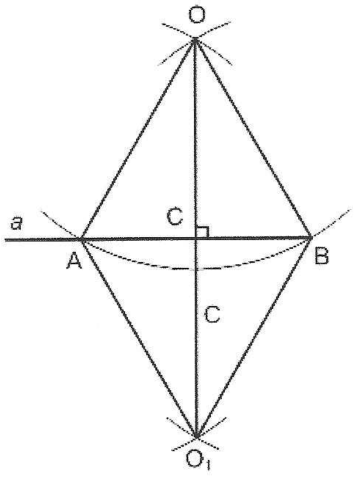
1) точка O лежить на прямій *a*;

2) точка O не лежить на прямій *a*.



а)

1) З точки O довільним радіусом проведемо коло. Воно перетинає пряму *a* у 2-х точках A і B. З точок A і B проведемо коло радіусом AB. Нехай C точка їх перетину. Шукана пряма проходить через точки O і C. Перпендикулярність прямих OC і AB випливає з рівності кутів при вершині O трикутників ACO і BCO. Ці трикутники рівні за 3-ю ознакою рівності трикутників.



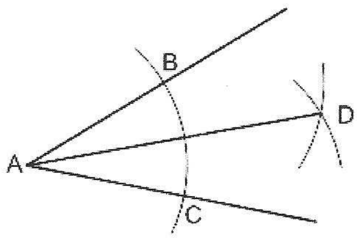
б)

2) З точки O проведемо коло, що перетинає пряму *a*. Нехай A і B – точки перетину його з прямою *a*. З точок A і B таким самим радіусом проведемо кола. Нехай O_1 – точка їх перетину, що лежить у півплощині, відмінній від тієї, у якій лежить точка O. Шукана пряма проходить через точки O і O_1. Доведемо це. Позначимо через C точку перетину прямих AB і OO_1. Трикутники AOB і AO_1B рівні за 3-ю ознакою рівності трикутників, тому $\angle OAC$ дорівнює $\angle O_1AC$. Тоді ΔOAC і ΔO_1AC рівні за 1-ю ознакою рівності трикутників. Отже їх кути ACO і ACO_1 рівні. Оскільки ці кути суміжні, то вони прямі. Таким чином OC – перпендикуляр, опущений з точки O на пряму *a*.

д) Побудова бісектриси кута

Задача. Побудувати бісектрису даного кута.

Розв’язання

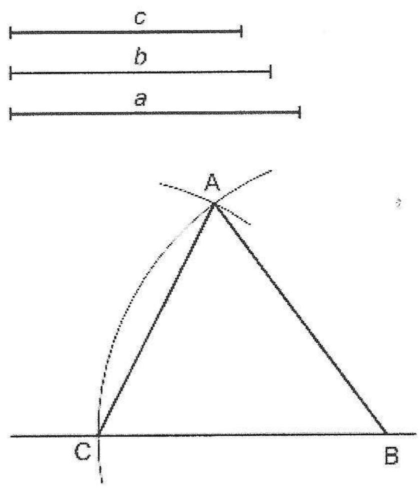


З вершини A даного кута, як з центра, описуємо коло довільного радіуса. Нехай B і C – точки перетину цього кола із сторонами кута. З точок B і C таким самим радіусом описуємо кола. Нехай D – точка їх перетину, відмінна від A. Пів пряма AD ділить кут BAC навпіл. Це випливає з рівності ΔABD і ΔACD, у яких кути DAB і DAC відповідні.

є) Побудова трикутника за трьома даними його сторонами

Задача. Побудувати трикутник з даними сторонами *a*, *b*, *c*.

Розв’язання



За допомогою лінійки проведемо довільну пряму. Позначимо на ній довільну точку В. Розмахом циркуля, що дорівнює a, отримаємо коло з центром В і радіусом a. Нехай С – точка перетину цього кола з прямою. Тепер розмахом циркуля, що дорівнює b, отримаємо коло з центром у точці С. Нехай А – точка перетину цих кіл. Проведемо відрізки АВ і АС. ΔАВС має сторони, які дорівнюють a, b, c.

Оскільки передує вивченню елементам задач на побудову

III. Для задач на побудову специфічним є те, що розв’язання кожної задачі складається з наступних етапів:

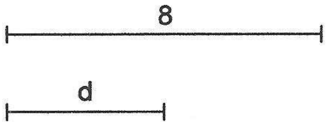
1) Аналіз (припускаємо, що задана геометрична фігура побудована і з’ясовуємо, які елементарні побудови слід використати виходячи із умови задачі і властивостей шуканої геометричної фігури).

2) Побудова (перелік послідовностей елементарних побудов для отримання кінцевого результату).

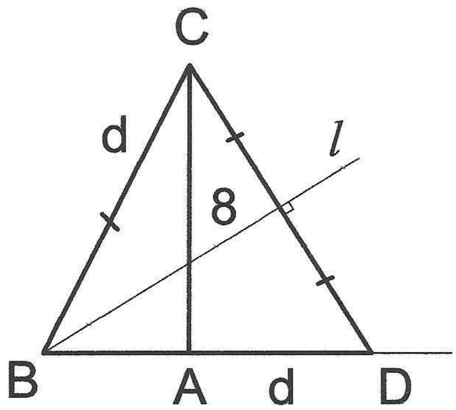
3) Доведення (обґрунтування на основі 1 і 2 етапів, що отримана геометрична фігура задовольняє умову задачі).

4) Дослідження (з’ясування кількості можливих розв’язків задачі у залежності від співвідношення між заданими лінійними і кутовими величинами).

Задача: Побудувати прямокутний трикутник за катетом і різницею двох інших сторін.



Аналіз

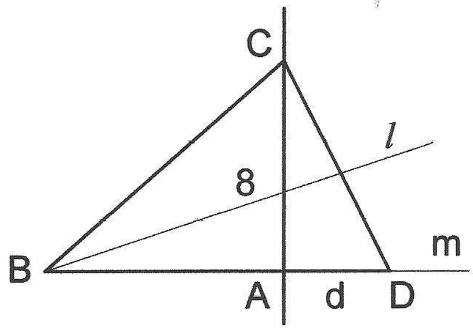


Нехай у ΔABC: $\angle A$ – прямий, $AC=8$, $BC-AB=d$. Продовжимо сторону AB за сторону A відкладемо BC .

Тоді $AD=BD-AB=BC-AB=d$. Отже, в ΔACD: відомі два катети: $AC=8$, $AD=d$, $\angle CAD=90°$. Тому ΔACD можна побудувати.

На продовжені сторони А за т. А буде лежати т. D – вершина шуканого трикутника, але т. В знаходиться також на однаковій відстані від точок D і C, тому вона лежить на серединному перпендикулярі, проведеному до сторони CD, отже, т. B є точкою перетину AD і серединного перпендикуляра *l*.

Побудова



1. Проведемо AC=8. Побудуємо прямий $\angle CAD$ (пряму m $\perp$ AC в точці A). На m відкладемо AD=d. Сполучимо точки C і D. Отримаємо допоміжний ΔCAD. Побудуємо серединний перпендикуляр *l* до CD, до перетину з продовженням сторони AD в т. B. Сполучимо т. B і C, одержимо шуканий ΔABC.

Доведення

У ΔABC: $\angle A$ – прямий, оскільки від суміжний з $\angle CAD$, який прямий за побудовою, BC-AB=d. Тому BC-AB==AD=d, BD=BC, AC=8 – за побудовою, отже, ΔABC задовольняє умову задачі.

Дослідження

Задача має тільки один розв'язок, існує тільки один трикутник, який задовольняє умову задачі, оскільки перетин серединного перпендикуляра *l* з прямою AD може бути лише в одній точці.

Задача не матиме розв'язку, якщо 8>d, оскільки не існує трикутника у якого різниця двох сторін дорівнює третій стороні або більше за нуль.

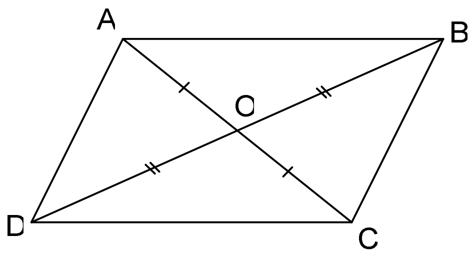
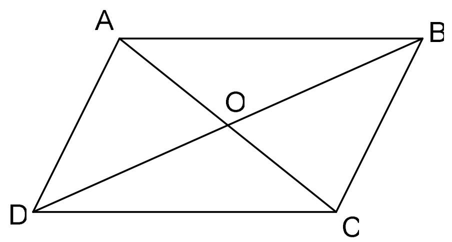
30. Методика формування понять «паралелограм», «прямокутник», вивчення властивостей і ознак паралелограма і прямокутника.

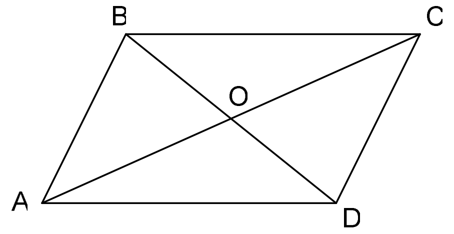
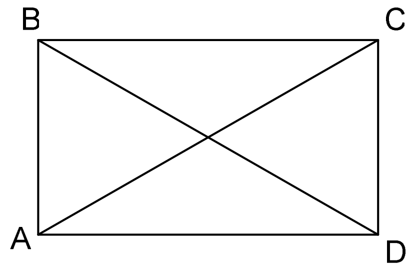
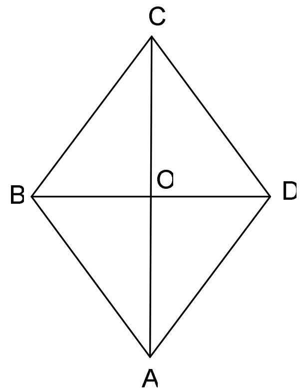
Основна мета вивчення чотирикутників і многокутників у курсі планіметрії – забезпечити учнів необхідними знаннями суттєвих ознак і властивостей окремих видів чотирикутників і навчити застосовувати здобуті знання до розв’язання різних задач.

Тема створює сприятливі умови для розвитку логічного мислення у 3-х основних напрямках:

1. Ідея дедуктивної побудови геометрії яскраво ілюструється при введені ознак ранніх видів чотирикутників, при чому, як правило, шляхом визначення роду і родової відмінності. Це створює умови для формування уміння проводити класифікацію чотирикутників і показувати структурні зв’язки між поняттями.
2. Багато властивостей чотирикутників учні мають можливість аналізуючи наочний матеріал і виконуючи безпосередні вимірювання. Разом з тим виникає природна потреба довести ці властивості.
3. Оскільки більшість теорем теми нескладні для доведення і прямо спираються на вивчення ознак рівності трикутників і паралельних прямих, то є можливість організувати самостійний пошук доведень і формування умінь проводити правильні обґрунтування і доказові міркування.

Логічна структура теми «Чотирикутники»

<table>
<tr><th>№ теор.</th><th>Варіант назви</th><th>Умова і висновок</th></tr>
<tr><td>6.1.</td><td>Ознака паралелограма</td><td>Дано: ABCD – чотирикутник, AO=OC, BO=OD
Довести: ABCD – паралелограм
</td></tr>
<tr><td>6.2.</td><td>Властивість діагоналей паралелограма</td><td>Дано: ABCD – паралелограм
Довести: AO=OC, BO=OD
</td></tr>
<tr><td>6.3.</td><td>Властивість паралелограма</td><td>Дано: паралелограм
Довести: AB=CD, AD=BC, $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$</td></tr>
</table>

		
6.4.	Властивість діагоналей прямокутника	Дано: ABCD – прямокутник Довести: AC=BD 
6.5.	Властивості діагоналей ромба	Дано: ABCD – ромб Довести: $AC \perp BD$, AC – бісектриса, BD – бісектриса 

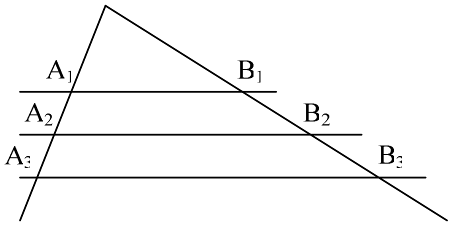
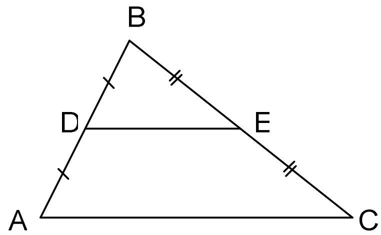
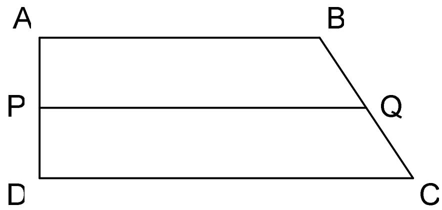
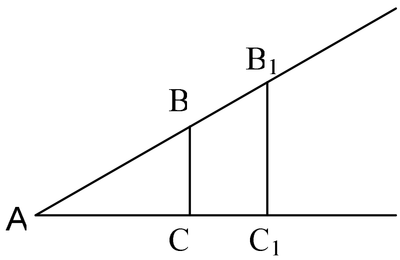
31. Теорема Фалеса. Теорема про середню лінію трикутника.

Основна мета вивчення чотирикутників і многокутників у курсі планіметрії – забезпечити учнів необхідними знаннями суттєвих ознак і властивостей окремих видів чотирикутників і навчити застосовувати здобуті знання до розв'язання різних задач.

Тема створює сприятливі умови для розвитку логічного мислення у 3-х основних напрямках:

1. Ідея дедуктивної побудови геометрії яскраво ілюструється при введені ознак ранніх видів чотирикутників, при чому, як правило, шляхом визначення роду і родової відмінності. Це створює умови для формування уміння проводити класифікацію чотирикутників і показувати структурні зв'язки між поняттями.
2. Багато властивостей чотирикутників учні мають можливість аналізуючи наочний матеріал і виконуючи безпосередні вимірювання. Разом з тим виникає природна потреба довести ці властивості.
3. Оскільки більшість теорем теми нескладні для доведення і прямо спираються на вивчення ознак рівності трикутників і паралельних прямих, то

є можливість організувати самостійний пошук доведень і формування умінь проводити правильні обґрунтування і доказові міркування.

6.6.	Теорема Фалеса	Дано: $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = A_2A_3$ Довести: $B_1B_2 = B_2B_3$ 
6.7.	Властивість середньої лінії трикутника	Дано: ΔABC, DE – середня лінія Довести: $DE \parallel AC$, $DE = \frac{1}{2} AC$ 
6.8.	Властивість середньої лінії трапеції	Дано: ABCD – трапеція, PQ – середня лінія Довести: $PQ \parallel AB \parallel CD$, $PQ = \frac{1}{2}(AB+CD)$ 
6.9.	Узагальнена теорема Фалеса	Дано: $\angle A$, $BC \parallel B_1C_1$ Довести: $\frac{AC_1}{B_1A} = \frac{AC}{AB}$ 

ЛОГІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ТЕМ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Логіко - математичний аналіз теми:

«Многокутники. Площа многокутників» за підручником «Геометрія» 8 клас авторів А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір

Програмові вимоги до вивчення теми

16	**Тема 4. МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ** Многокутник та його елементи Опуклі та неопуклі многокутники Сума кутів опуклого многокутника Многокутник, вписаний у коло, і многокутник, описаний навколо кола Поняття площі многокутника. Площі прямокутника, паралелограма, ромба, трикутника, трапеції	**Учень/учениця:** **наводить приклади** геометричних фігур, указаних у змісті **пояснює**, що таке: многокутник та його елементи; опуклий і неопуклий многокутники; площа многокутника **формулює:** • *означення:* діагоналі многокутника; многокутника, вписаного у коло, многокутника, описаного навколо кола; • *теорему:* про суму кутів опуклого многокутника; про площу прямокутника, паралелограма, трикутника, трапеції **записує та пояснює формули** площі геометричних фігур, указаних у змісті **зображує та знаходить на малюнках:** многокутник і його елементи; многокутник, вписаний у коло; многокутник, описаний навколо кола **обчислює** площі многокутників **доводить** теорему про площу: паралелограма; ромба; трикутника; трапеції **застосовує** вивчені означення й властивості до розв'язування задач

Таблиця 1

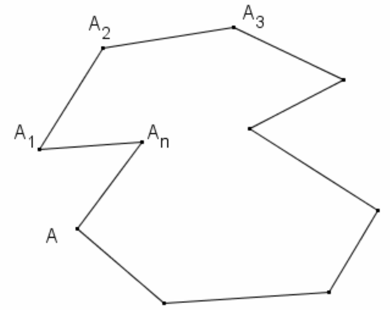
Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу.

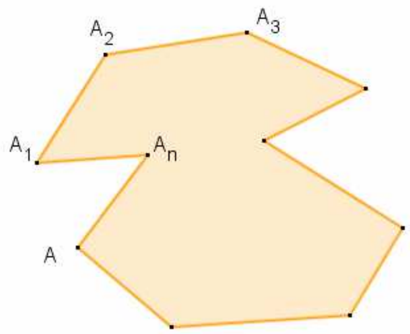
	Поняття	**Факти**	**Способи діяльності**
Нові	• Многокутник, • периметр многокутника, • діагональ многокутника, • опуклий многокутник, • вписаний многокутник, • описаний многокутник, • площа	• Теорема про суму кутів опуклого n-кутника, • лема про площу квадрата зі стороною од, теорема про площу прямокутника, • теорема про площу паралелограма, • теорема про площу трикутника, • наслідок про площу прямокутного	• Побудова рівновеликих многокутників, • Встановити чи існує многокутник за заданою сумою кутів, • Розбиття многокутника на рівновеликі многокутники,

	многокутника, • рівновеликі многокутники.	трикутника, • теорема про площу трапеції, • наслідок про площу трапеції	• Визначення виду многокутника
Базові	• Трикутник, • прямокутний трикутник, • прямокутник, • паралелограм, • трапеція	• Теорема про суму кутів трикутника, • властивості: трикутника, прямокутника, паралелограма, трапеції	Елементарні геометричні побудови

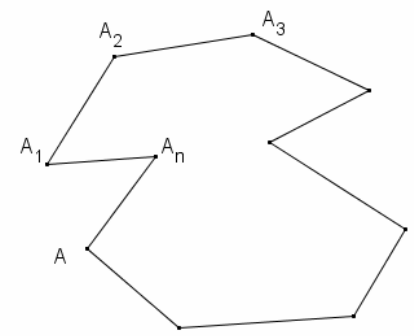
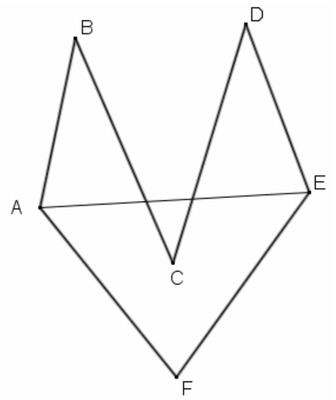
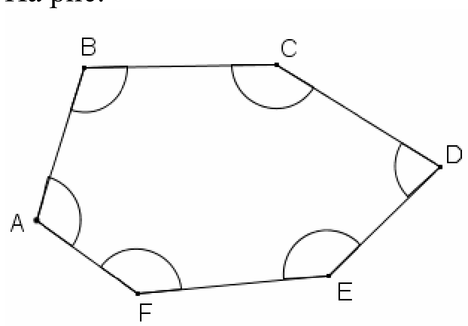
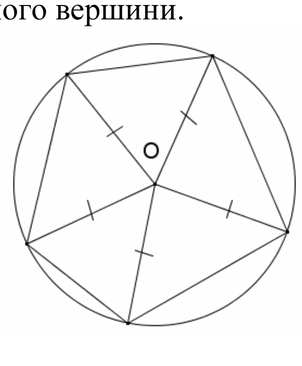
Таблиця 2

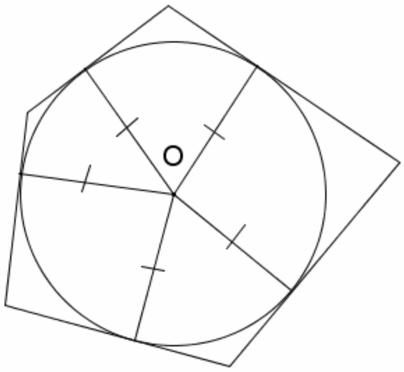
Логіко-математичний аналіз формулювання означень нових понять теми

<table>
<tr><th>Поняття</th><th>Формулювання означення</th><th>Види означень, характеристичні властивості</th></tr>
<tr><td>Многокутник</td><td>Розглянемо фігуру яка складається з точок A_1, A_2, … An і відрізків таких, що жодні два сусідні відрізки не лежать на одній прямій і ніякі два несусідні відрізки не мають спільних точок


Фігура, утворена цими відрізками, обмежує частину площини, виділену на


Цю частину площини разом з відрізками , що її обмежують, називають многокутником.</td><td>Конструктивний вид
Хар-ні властивості
1) n точок, n відрізків
2) Два сусідні відрізки не лежать на одній прямій
3) Два несусідні відрізки не мають спільних точок
4) Фігура обмежує частину площини</td></tr>
</table>

Периметр многокутника	Периметром многокутника називають суму довжин усіх його сторін.  	Описовий $P = A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots$
Діагональ многокутника	Відрізок, який сполучає несусідні вершини многокутника, називають діагоналлю.  AE - діагональ	Через найближчий рід Істотні властивості: сполучає несусідні вершини многокутника
Опуклий многокутник	На рис.  зображено многокутник, усі кути якого менші від розгорнутого. Такий многокутник називають опуклим.	Через найближчий рід Істотні властивості: усі кути якого менші від розгорнутого
Вписаний многокутник	Многокутник називають вписаним, якщо існує коло, якому належать усі його вершини.  	Конструктивний вид

Описаний многокутник	Многокутник називають описаним, якщо існує коло, яке дотикається до всіх його сторін. 	Конструктивний вид
Площа многокутника	Площею многокутника називають додатну величину, яка має такі властивості: 1) Рівні многокутники мають рівні площі; 2) Якщо многокутник складено з кількох многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників; 3) За одиницю виміру площі приймають площу одиничного квадрата, тобто квадрата зі стороною, яка дорівнює одиниці виміру довжини.	Через найближчий рід Істотні властивості: 1) Рівні многокутники мають рівні площі; 2) Якщо многокутник складено з кількох многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників; 3) За одиницю виміру площі приймають площу одиничного квадрата, тобто квадрата зі стороною, яка дорівнює одиниці виміру довжини.
Рівновеликі многокутники	Многокутники, які мають рівні площі, називають рівновеликими.	Через найближчий рід Істотні властивості: мають рівні площі

Таблиця 3

Орієнтована будова системи вправ для введення нового поняття

Види вправ	**Номери з підручника**							
	Многокутник	**периметр многокутника**	**діагональ многокутника**	**опуклий многокутник**	**вписаний многокутник**	**описаний многокутник**	**площа многокутника**	**рівновеликі многокутники**
Вправи для створення мотивації для введення нового поняття								
Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та умінь								
Вправи спрямовані на	641		641		642,	642,		791,

виділення суттєвих властивостей та на побудову обєктів, які мають ці властивості					643, 644, 645	643		792
Вправи на базі яких відбувається ілюстрація поняття, що вводиться							700	668, 699, 723
Вправи для забезпечення розпізнавання об'єктів, що входять до обсягу нового поняття								668, 699, 723
Вправи спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння тексту означення	641	669	641, 654, 655		642, 643, 644, 645	642, 643	700, 687, 688	

Представлення математичних фактів теми

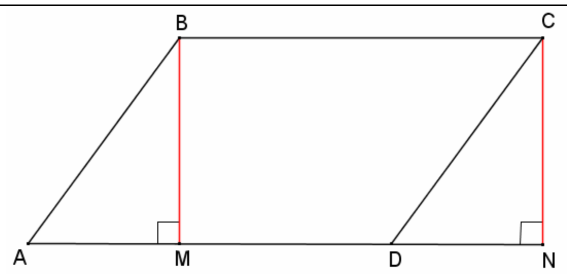
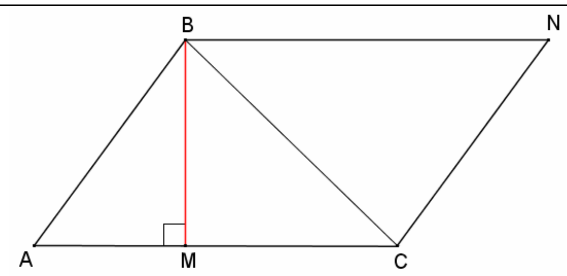
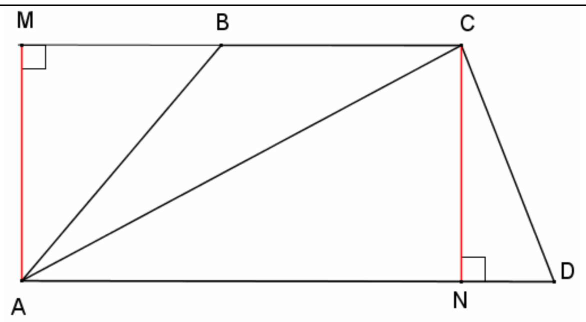
Площа паралелограма	
	$S_{ABCD} = BM \cdot BC$
Площа трикутника	
	$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM$
Площа трапеції	
	$S = S_{ABC} + S_{ACD} =$ $=\frac{1}{2}BC\,AM+\frac{1}{2}AD\,CN=$ $=\frac{1}{2}BC\,CN+\frac{1}{2}AD\,CN=$ $=\frac{1}{2}(BC+AD)CN$

Схема-орієнтир проведення логіко-математичного аналізу структури формулювання математичного твердження

Таблиця 4.1

Теорема про суму кутів опуклого n-кутника

Етапи проведення аналізу	**Результати**
1. Формулювання твердження	Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n-2)$
2. Встановлення виду твердження	Просте
3. Виділення роз’яснювальної частини	n-кутник
4. Виділення умови	Многокутник є опуклим n-кутником
5. Виділення вимоги	Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n-2)$
6. Формулювання твердження рівносильного даному	Якщо многокутник є опуклим n-кутником, то сума його кутів дорівнює $180°(n-2)$

Таблиця 4.2

Теорема про площу квадрата зі стороною $\frac{1}{n}$

Етапи проведення аналізу	**Результати**
1.	Площа квадрата зі стороною од (n – натуральнее число) дорівнює од^2.
2.	Просте
3.	Квадрат
4.	Многокутник є квадратом зі стороною од
5.	Площа многокутника дорівнює од^2
6.	Якщо многокутник є квадратом зі стороною од (n – натуральнее число), то його площа дорівнює од^2

Таблиця 4.3

Теорема про площу прямокутника

Етапи проведення аналізу	**Результати**
1.	Площа прямокутника дорівнює добутку довжин його сусідніх сторін
2.	Просте
3.	Прямокутник
4.	Многокутник є прямокутником
5.	Площа многокутника дорівнює добутку довжин його сусідніх сторін
6.	Якщо многокутник є прямокутником, то площа многокутника дорівнює добутку довжин його сусідніх сторін

Таблиця 4.4

Теорема про площу паралелограма

Етапи проведення аналізу	**Результати**
1.	Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, яка відповідає цій стороні
2.	Просте
3.	Паралелограм
4.	Многокутник є паралелограмом
5.	Площа многокутника дорівнює добутку його сторони на висоту, яка відповідає цій стороні
6.	Якщо многокутник є паралелограмом, то площа многокутника дорівнює добутку його сторони на висоту, яка відповідає цій стороні

Таблиця 4.5

Теорема про площу трикутника

Етапи проведення аналізу	**Результати**
1.	Площа трикутника дорівнює добутку його сторони на проведену до неї висоту
2.	Просте
3.	Трикутник
4.	Многокутник є трикутником
5.	Площа многокутника дорівнює добутку його сторони на проведену до неї висоту
6.	Якщо многокутник є трикутником, то площа многокутника дорівнює добутку його сторони на проведену до неї висоту

Таблиця 4.6

Теорема про площу прямокутного трикутника

Етапи проведення аналізу	**Результати**
1.	Площа прямокутного трикутника дорівнює півдобутку його катетів
2.	Просте
3.	Прямокутний трикутник
4.	Многокутник є прямокутним трикутником
5.	Площа многокутника дорівнює пів добутку його катетів
6.	Якщо многокутник є прямокутним трикутником, то площа многокутника дорівнює пів добутку його катетів

Таблиця 4.7

Теорема про площу трапеції

Етапи проведення аналізу	Результати
1.	Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту
2.	Просте
3.	Трапеція
4.	Многокутник є трапецією
5.	Площа многокутника дорівнює добутку півсуми його основ на висоту
6.	Якщо многокутник є трапецією, то площа многокутника дорівнює добутку півсуми його основ на висоту

Аналіз форми, виду, способу доведення математичного факту

Таблиця 5.1

Теорема про площу паралелограма

1. Форма доведення	Дедуктивна
2. Види доведення	Пряме
3. Метод доведення	Аналітичний
4. Спеціальний математичний метод доведення	
5. Основна ідея доведення	Використовуючи теорему про площу прямокутника випливає площа паралелограма
6. Етапи доведення	1) Проведемо дві висоти паралелограма BM і CN 2) Покажемо, що прямокутник MBCN рівновеликий паралелограму 3) Площа паралелограма дорівнює сумі площ трикутника ABM і трапеції MBCD 4) Площа паралелограма дорівнює сумі площ трикутника DCN і трапеції MBCD 5) Доводимо, що трикутники ABM і DCN рівні за гіпотенузою і гострим кутом, а отже вони рівновеликі. 6) Отримали, що паралелограм ABCD і прямокутник MBCN рівновеликі 7) Тоді площа прямокутника $S=BM \cdot BC$ буде площею паралелограма

Таблиця 5.2

Теорема про площу трикутника

1.	Дедуктивна
2.	Пряме
3.	Аналітичний
4.	
5.	Використовуючи теорему про площу паралелограма знаходимо площу трикутника
6.	1) Проведемо висоту BM трикутника ABC 2) Через точки B і C проведемо прямі BN || AC і CN||AB

	3) ABNC – паралелограм 4) Трикутники ABC і NCB рівні за другою ознакою рівності трикутників, тоді рівні їх площі 5) BM є висотою паралелограма ABNC, S=AC· BM 6) Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма

Таблиця 5.3

Теорема про площу трапеції

1.	Дедуктивна
2.	Пряме
3.	Аналітичний
4.	
5.	Розбивши трапецію на два трикутники, отримаємо площу трапеції, яка є сумою площ двох трикутників
6.	1) Проведемо діагональ AC в трапеції ABCD 2) Отримали два трикутники ABC і ACD 3) Висоти AM і CN цих трикутників є висотами трапеції 4) Знайдемо суму площ трикутників ABC і ACD і отримаємо площу трапеції

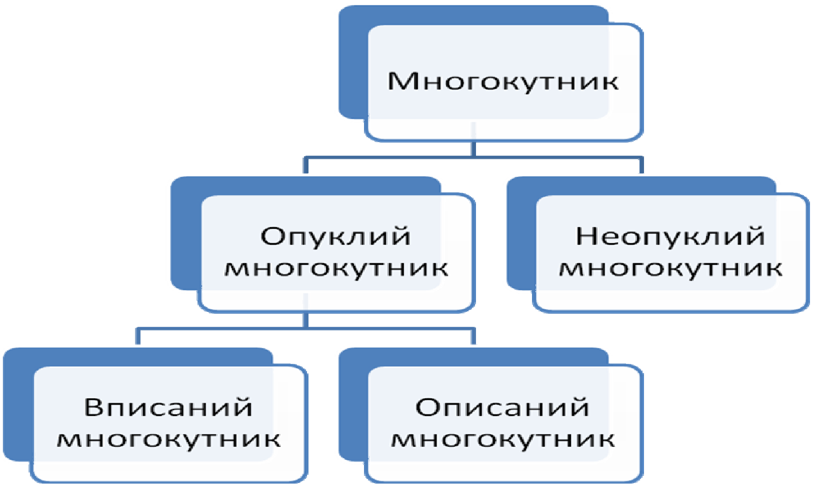
Факти сформульовані в задачах

№656	Про рівні кути многокутника вписаного в коло
№657	Про рівні сторони многокутника описаного навколо кола
№661	Про опуклий п’ятикутник, який не має паралельних сторін
№685	Про рівновеликі трикутник і прямокутник
№708	Про площу паралелограма
№716	Про найбільшу площу прямокутника
№736	Про площу трикутника
№737	Про площу рівностороннього трикутника
№738	Про площу рівнобедреного прямокутного трикутника
№743	Про площу опуклого чотирикутника
№750	Про відношення площ трикутників, на які поділено даний трикутник
№756	Про відповідність більшій стороні трикутника меншої висоти
№757	Про відношення площ трикутників
№767	Про суму відстаней від довільної точки рівностороннього трикутника до його сторін
№790	Про пряму, яка розбиває трапецію на два рівновеликі многокутники

Логіко – математичний аналіз системи вправ підручника призначений для формування способу діяльності

Основний спосіб діяльності	Відпрацювання операцій, які формують спосіб діяльності	Відпрацювання послідовності операцій, які входять у спосіб діяльності	Застосування способу діяльності (різні рівні)
Побудова рівновеликих многокутників			691, 692, 755, 791, 792
Встановити чи існує многокутник за заданою сумою кутів	649	650	
Розбиття многокутника на рівновеликі многокутники		752, 753, 754	766
Визначення виду многокутника			655, 659

Структурно-логічна модель, яка охоплює основні поняття теми



Логіко - математичний аналіз теми:

«Правильні многокутники» за підручником «Геометрія» 9 клас авторів

А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір

Програмові вимоги до вивчення теми

8	**Тема 4. ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ. ДОВЖИНА КОЛА. ПЛОЩА КРУГА** Правильний многокутник його види та властивості. Правильний многокутник, вписаний у коло та описаний навколо кола Довжина кола. Довжина дуги кола Площа круга та його частин	**Учень/учениця:** **наводить приклади** геометричних фігур, указаних у змісті **пояснює**, що таке: дуга кола; довжина кола; площа круга; правильний многокутник (трикутник, чотирикутник, шестикутник), вписаний у коло та описаний навколо кола **формулює:** • *означення*: правильного многокутника; кругового сектора; сегмента; • *теорему*: про відношення довжини кола до його діаметра; про площу круга **записує та пояснює** формулу: • радіуса кола за стороною вписаного в нього правильного многокутника (трикутника, чотирикутника, шестикутника); • радіуса кола за стороною описаного навколо нього правильного многокутника (трикутника, чотирикутника, шестикутника); • довжини кола і дуги кола; • площі круга, сектора, сегмента **будує** правильний трикутник, чотирикутник, шестикутник **обчислює:** • радіус кола за стороною вписаного в нього правильного многокутника (трикутника, чотирикутника, шестикутника) і навпаки; • радіус кола за стороною описаного навколо нього правильного многокутника (трикутника, чотирикутника, шестикутника) і навпаки; • довжини кола і дуги кола; • площі круга, сектора і сегмента **доводить** формулу: • радіуса кола за стороною вписаного в нього правильного многокутника (трикутника, чотирикутника, шестикутника); • радіуса кола за стороною описаного навколо нього правильного многокутника (трикутника, чотирикутника, шестикутника) **застосовує** вивчені означення, формули й властивості до розв’язування задач

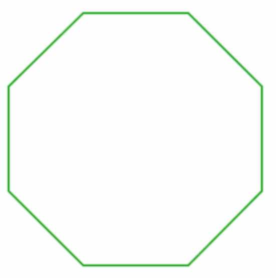
Таблиця 1

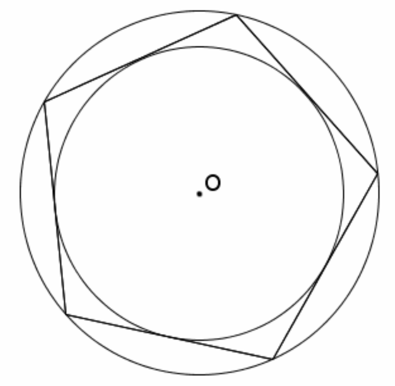
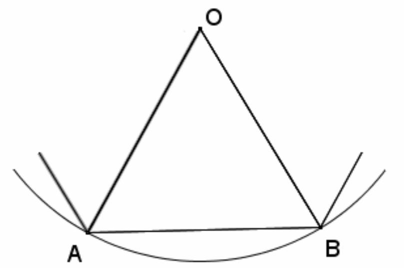
Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу.

	Поняття	Факти	Способи діяльності
Нові	• Правильний многокутник, • центр правильного многокутника, • центральний кут правильного многокутника	• Теорема про правильний опуклий многокутник, • теорема про вписаний і описаний правильний многокутник • Формула радіуса кола за стороною вписаного в нього правильного многокутника • Формула радіуса кола за стороною описаного наколо нього правильного многокутника	• Визначення виду правильного многокутника, • Знаходження сторони правильного многокутника, • Знаходження радіуса вписаного і описаного кіл правильного многокутника
Базові	• Многокутник, • рівносторонній трикутник, • квадрат, • вписаний і описаний многокутник	• Теорема про суму кутів опуклого n-кутника, • ознаки рівності трикутників	Елементарні геометричні побудови

Таблиця 2

Логіко-математичний аналіз формулювання означень нових понять теми

Поняття	Формулювання означення	Види означень, характеристичні властивості
Правильний многокутник	Многокутник називають правильним, якщо у нього всі сторони рівні і всі кути рівні. 	Через найближчий рід Істотні властивості: всі сторони рівні і всі кути рівні

Центр правильного многокутника	Точку, яка є центром вписаного і описаного кіл правильного многокутника, називають центром правильного многокутника. 	Через найближчий рід Істотні властивості: точка є центром вписаного і описаного кіл правильного многокутника
Центральний кут правильного многокутника	На рис  Зображено фрагмент правильного n-кутника з центром O і стороною AB, довжину якої позначимо a_n. Кут AOB називають центральним кутом правильного многокутника.	Конструктивний вид Хар-ні властивості 1) O – центр правильного n-кутника 2) Сторона AB

Таблиця 3

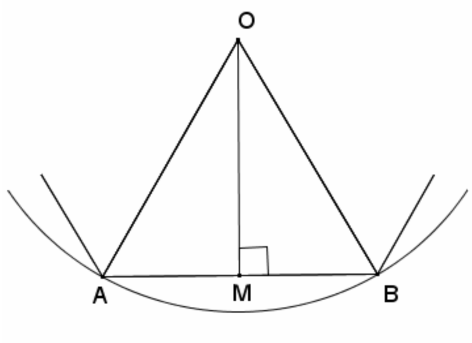
Орієнтована будова системи вправ для введення нового поняття

Види вправ	**Номери з підручника**		
	Правильний многокутник	**Центр правильного многокутника**	**Центральний кут правильного многокутника**
Вправи для створення мотивації для введення нового поняття			
Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та умінь	177, 178		
Вправи спрямовані на виділення суттєвих властивостей та на побудову обєктів, які мають ці властивості			
Вправи на базі яких відбувається ілюстрація поняття, що вводиться			
Вправи для забезпечення			

розпізнавання об'єктів, що входять до обсягу нового поняття			
Вправи спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння тексту означення	179, 180	208, 209, 210, 211	186, 187

Представлення математичних фактів теми

Формула радіуса кола за стороною вписаного в нього правильного многокутника	**Формула радіуса кола за стороною описаного навколо нього правильного многокутника**
$R_n = \dfrac{\text{Мв}}{\sin\dfrac{180°}{n}} = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$	$r_n = \dfrac{\text{Мв}}{\text{tg}\dfrac{180°}{n}} = \dfrac{a_n}{2\,\text{tg}\dfrac{180°}{n}}$



Кількість сторін правильного n-кутника	**n=3**	**n=4**	**n=6**
Радіус описаного кола	$R_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Радіус вписаного кола	$r_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \dfrac{a}{2}$	$r_6 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Схема-орієнтир проведення логіко-математичного аналізу структури формулювання математичного твердження

Таблиця 4.1

Теорема про опуклий многокутник

Етапи проведення аналізу	**Результати**
1.Формулювання твердження	Правильний многокутник є опуклим многокутником.
2. Встановлення виду твердження	Просте
3. Виділення роз'яснювальної частини	Многокутник
4. Виділення умови	Многокутник є правильним. Проста
5. Виділення вимоги	Многокутник є опуклим. Проста
6.Формулювання твердження рівносильного даному	Якщо многокутник є правильним, то він є опуклим многокутником.

Таблиця 4.2

Теорема про вписаний і описаний многокутник

Етапи проведення аналізу	Результати
1.	Будь-який правильний многокутник є одночасно вписаним і описаним, причому центри вписаного і описаного кіл збігаються.
2.	Складене, кон'юнктивна структура
3.	Многокутники
4.	Многокутник є правильним Проста
5.	Многокутник є вписаним і описаним, причому центри вписаного і описаного кіл збігаються складена
6.	Якщо многокутник є правильним, то він є одночасно вписаним і описаним, причому центри вписаного і описаного кіл збігаються.

Таблиця 4.3

Формула радіуса кола за стороною вписаного в нього правильного многокутника

Етапи проведення аналізу	Результати
1.	Радіус кола, описаного навколо правильного n-кутника, дорівнює частці від ділення сторони правильного n-кутника на подвоєний синус від $\frac{180^\circ}{n}$
2.	Категоричне
3.	n-кутник
4.	Коло описане навколо правильного n-кутника
5.	Радіус кола дорівнює частці від ділення сторони правильного n-кутника на подвоєний синус від $\frac{180^\circ}{n}$
6.	Якщо коло описане навколо правильного n-кутника, то радіус кола дорівнює частці від ділення сторони правильного n-кутника на подвоєний синус від $\frac{180^\circ}{n}$

Таблиця 4.4

Формула радіуса кола за стороною описаного навколо нього правильного многокутника

Етапи проведення аналізу	Результати
1.	Радіус кола, вписаного в правильний n-кутник, дорівнює частці від ділення сторони правильного n-кутника на подвоєний тангенс від $\frac{180^\circ}{n}$
2.	Категоричне

3.	n-кутник
4.	Коло вписане в правильний n-кутник
5.	Радіус кола дорівнює частці від ділення сторони правильного n-кутника на подвоєний тангенс від $\frac{180^\circ}{n}$
6.	Якщо коло вписане в правильний n-кутник, то радіус кола дорівнює частці від ділення сторони правильного n-кутника на подвоєний тангенс від $\frac{180^\circ}{n}$

Аналіз форми, виду, способу доведення математичного факту

Таблиця 5.1

Формула радіуса кола за стороною вписаного в нього правильного многокутника

Форма доведення	Дедуктивна
Види доведення	Пряме
Метод доведення	Аналітичний
Спеціальний математичний метод доведення	
Основна ідея доведення	Використовуючи властивість центрального кута та співвідношення у прямокутному трикутнику виводимо формулу
Етапи доведення	1) Запишемо, що $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$ 2) У рівнобедреному трикутнику проведемо висоту OM 3) $\angle AOM = \angle BOM = \frac{180^\circ}{n}$ 4) $AM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{a_n}{2}$ 5) З Δ OMB: OB = $\frac{MB}{\sin\frac{180^\circ}{n}} = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$

Таблиця 5.2

Формула радіуса кола за стороною описаного навколо нього правильного многокутника

Форма доведення	Дедуктивна
Види доведення	Пряме
Метод доведення	Аналітичний
Спеціальний математичний метод доведення	
Основна ідея доведення	Використовуючи властивість центрального кута та співвідношення у прямокутному трикутнику виводимо формулу

Етапи доведення	1) Запишемо, що $\angle AOB = \frac{360°}{n}$ 2) У рівнобедреному трикутнику проведемо висоту OM 3) $\angle AOM = \angle BOM = \frac{180°}{n}$ 4) $AM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{a_n}{2}$ 5) З Δ OMB: OM = $\frac{MB}{\operatorname{tg}\frac{180°}{n}} = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$

Факти сформульовані в задачах

№194	Про радіус кола описаного навколо правильного многокутника
№196	Про знаходження радіуса кола вписаного в многокутник
№197	Про знаходження сторони вписаного і описаного многокутника
№206	Про діагоналі правильного п’ятикутника
№207	Про діагональ правильного п’ятикутника паралельну його стороні
№212	Про довжину сторони правильного восьмикутника
№213	Про довжину сторони правильного дванадцятикутника

Логіко – математичний аналіз системи вправ підручника призначений для формування способу діяльності

Основний спосіб діяльності	**Відпрацювання операцій, які формують спосіб діяльності**	**Відпрацювання послідовності операцій, які входять у спосіб діяльності**	**Застосування способу діяльності (різні рівні)**
Визначення виду правильного многокутника	181,182, 186	184, 185, 205	204
Знаходження сторони правильного многокутника	192, 193,	195, 197, 199, 200	217, 218, 220, 221
Знаходження радіуса вписаного і описаного кіл правильного многокутника	200, 203	190, 191, 196, 198	

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики: Навчальний посібник / Г.П. Бевз – К.: Вища школа, 1989. – 367 с.

2. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е.И. Лященко, К.В.Зобкова, Т.В. Кириченко и др..; Под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.: ил.

3. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учебное пособие для студентов пед. институтов по физ.-мат. спец. / А.Я. Блох, В.А.Гусев, Г.В.Дорофеев идр. Сост. В.И.Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.

4. Рогановский Н. М. Методика преподавания математики в средней школе: Учебное пособие / Н. М. Рогановский– Мн.: Выш. шк., 1990. – 267 с.

5. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів / З. І. Слєпкань – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

6. Столяр А.А. Педагогика математики. Курс лекцій / А. А. Столяр – Минск, 1986. – 384 с.

7. Колягин Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Учебное пособие для студентов физ.-мат. спец пед. Институтов. – М: Просвещение, Ч.1 Общая методика, 1975. – 462 с. Ч.2 Частные методики, 1977. – 480 с.

8. Швець В. О. Збірник задач з методики навчання математики / В.О. Швець, А.В. Прус. – Житомир: Рута, 2011. – 388 с.

Для нотаток

Методика навчання математики
у запитаннях і відповідях

навчальне видання.