ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИКИ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ
НАУК УКРАИНЫ

На правах рукописи

БЫЧ ЕЛЕНА ВИКТОРОВНА

# СИСТЕМАТИЗАЦИЯ И ОБОБЩЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР

специальность 13.00.02 - теория и методика обучения математике

Диссертация на соискание
ученой степени кандидата
педагогических наук

Научный руководитель -
кандидат педагогических наук
старший научный сотрудник
ХМАРА Т.Н.

Киев 1997

С О Д Е Р Ж А Н И Е

# ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе развития общества большое значение приобретает обеспечение должного уровня математической подготовки подрастающего поколения. Это продиктовано необходимостью быстрого развития техники и электроники, выхода отечественной науки на мировой уровень, создания новых конкурентноспособных технологий, интеграции в мировую систему образования. Именно математика имеет широкие возможности для развития логического мышления, алгоритмической культуры. В процессе изучения математики формируются умения анализировать, сравнивать, систематизировать, устанавливать причинно-следственные связи, строить математические модели реальных ситуаций. Этим актуальным арсеналом умений выпускники должны овладеть на школьной скамье.

Исследования психологов, педагогов, методистов убедительно доказывают необходимость дифференциации обучения, обеспечивающей реальные результаты базового математического образования и развитие каждого школьника с учетом его возможностей, интересов, склонностей и способностей [5, 70, 154, 177]. Школьная практика на протяжении многих лет показала несостоятельность концептуальной установки на обучение с ориентацией на одинаковый результат для всех. Необходимость дифференцированного подхода в обучении математике продиктована реально существующими различиями в темпах овладения учебным материалом, в способностях самостоятельного применения усвоенных знаний, умений и навыков разными категориями учащихся, что, в свою очередь, обусловлено объективными различиями в типе нервной системы, в психических свойствах, в скорости протекания нервных процессов, задатках и способностях. Дифференциация обучения предполагает систематическое психологическое изучение учащихся, "правильный психологический диагноз и прогноз относительно отбора оптимальных для отдельного классного коллектива и конкретного ученика форм, методов и способов обучения" [184 С.132]. В частности, особого внимания требуют учащиеся с высоким уровнем умственного развития, ранней умственной специализацией, незаурядными способностями в той или иной области познания.

В последнее время создается целая сеть школ, гимназий, лицеев с углубленным изучением предметов естественно-математического цикла, для которых идея дифференциации обучения положена в основу построения учебных планов, отбора программ и содержания образования. Дифференцированное обучение математике предполагает наличие вариативных программ, учебников, учебных пособий, дидактических средств, обеспечивающих различный объем учебного материала, уровень его теоретического обобщения и направленность, соответствующие профилю образования и интеллектуальным возможностям школьников.

Одной из важнейших целей дифференцированного обучения является помощь учащимся в сложном процессе профессионального самоопределения В исследованиях, посвященных проблемам обучения в школах и классах с углубленным изучением математики выделяется цель подготовки будущих научных кадров, формирования интеллектуального потенциала страны [68,88]. Это предъявляет требования к отбору содержания образования и методике обучения в школах и классах естественно-математической направленности.

Содержание математической подготовки в таких школах и классах должно отображать классические основы современной математики, основные направления и тенденции ее развития. Углубленный курс предполагает ознакомление учащихся с методологическими вопросами математики, наиболее важными событиями, происходившими и происходящими в науке, современными проблемами, методами, местом математики в системе наук. В последнее время ученые, изучающие развитие математической науки и, одновременно, эволюцию содержания и методов преподавания ее основ в школе, указывают на существование разрыва между современной математикой (наукой) и математикой школьной (учебным предметом). Школьная математика, как правило, основывается на достижениях математической науки прошлых столетий, в ней преобладает усвоение элементарных фактов а не математических идей, нарушено соотношение между вычислительным и идейным аспектами [112,167,185]. Учащихся, которые в будущем будут заниматься математической наукой, для которых математика станет профессией, целесообразно еще в школе ознакомить с основными идеями, методами и понятиями современной математики.

К основным понятиям современной математики относят понятия алгебраической операции, математической структуры, математической модели. Понятие математической модели широко применяется в физике и биологии, технике и социологии, астрономии и лингвистике. Весьма значительная роль математического моделирования для современной науки выдвигает соответствующие требования и к математической подготовке школьников. Целесообразно, чтобы учащиеся как можно раньше осознали идею математического моделирования. Термин "математическая модель" должен прочно войти в словарный запас школьника. Подтверждением этому является мнение А.Н.Колмогорова, отмечавшего, что в последнее время существенно изменились требования к математике с точки зрения потребностей, которые испытывают в ней современная наука, экономика, производство. А они нуждаются в людях, умеющих строить математические модели разнообразных процессов и явлений на всех возможных уровнях. Поэтому умение математического моделирования можно рассматривать как общий навык, который учащиеся должны приобрести в результате изучения курса математики в школе [87].

Математическая модель реальной ситуации в большинстве случаев представляет собой математическую структуру определенного типа [199]. Объекты этой структуры трактуются как (идеализированные) реальные "вещи" (или понятия), а абстрактные отношения между этими объектами как конкретные связи между элементами действительности. Алгебраические структуры представляют собой обобщенные модели различных явлений и процессов. Существует множество объектов, для описания которых может быть применима одна и та же структура группы или кольца. В то же время, алгебраические структуры являются примером внутриматематического моделирования - они представляют "модельный каркас", который можно заполнить определенным содержанием. Каждый раз при заполнении новым содержанием получают новую математическую теорию.

Осознание учащимися роли и места фундаментальных математических понятий и идей в системе научного познания возможно при реализации в процессе обучения принципов системности и систематизации знаний. При этом правильное усвоение научных идей могло бы ослабить перегрузку традиционного курса математики правилами, логическая связь между которыми слабо раскрывается в рамках этого курса. "Дух современной математики есть дух широких обобщений. Усвоению учащимися математики могло бы чрезвычайно помочь выдвижение на первый план ряда руководящих идей обобщающего характера" [123 С.25]. Понятие алгебраической структуры выполняет в современной математике обобщающие функции. Использование идеи алгебраических структур позволяет обобщить и систематизировать знания учащихся по содержательно-методическим линиям курса.

Высокий уровень общности и абстрактности этих фундаментальных понятий обуславливает их дидактические функции в процессе обучения. Понятия отношения, алгебраической операции, алгебраической структуры используются как средства систематизации и обобщения математических знаний, как средства обучения.

В математике мощным средством систематизации знаний, логической организации учебного материала является аксиоматический метод. В школьном курсе представления об аксиоматическом методе формируются у учащихся при изучении готовой аксиоматической теории (геометрии). Знания при таком подходе инертны и не действенны. Исходя из принципа активности учения, особенностей учебного процесса в школах и классах с углубленным изучением математики, целей и задач профильного обучения целесообразно ознакомить учащихся с процессом аксиоматизации - построением аксиоматических теорий или их фрагментов. Материал теории алгебраических структур дидактически приемлем для решения этой задачи.

Проблема систематизации и обобщения знаний рассматривалась в работах дидактов, психологов, методистов С.У.Гончаренко, В.В.Давыдова, В.А.Онищука, Д.Пойа, Н.Ф.Талызиной и др. Задачам совершенствования процесса систематизации и обобщения знаний посвящены диссертационные исследования: методике обобщающего урока - В.А.Киреева (1964г), методическим особенностям обобщающего повторения - М.И.Зайкина (1984г), Т.М.Мищенко (1984г), систематизации и обобщению знаний при решении планиметрических задач - Е.А.Василенко (1988г), использованию персональных компьютеров при организации обобщающего повторения - А.В.Якубова (1992г). Возможности использования идей и понятий алгебраических структур для систематизации и обобщения математических знаний учащихся исследователями не рассматривались.

Анализ учебной, методической литературы [10,13,25,43,49], наблюдений, результатов констатирующего эксперимента свидетельствует, что содержание действующих программ по математике имеет все предпосылки для ознакомления учащихся с идеями алгебраических структур-Эта проблема особенно интенсивно разрабатывалась учеными в 60-70 годах в рамках движения за модернизацию школьного математического образования. Целесообразность и возможность рассмотрения понятий алгебраических структур в школьном курсе математики научно обоснована П.С.Александровым, А.Н.Колмогоровым, А.Лихнеровичем, А.И.Маркушевичем, А.А.Столяром, Г.Шоке и др. Этой проблеме посвящены диссертационные исследования: И.Ю.Побережника "Формування уявлень про основні ідеї сучасної алгебри в шкільному курсі математики" (1972г.), Ф.М.Рафиковой "Методика изучения алгебраических структур на факультативных занятиях в средней школе" (1973г.), Т.Я.Федотовой "Математические структуры как основа построения единого курса математики в 8-летней школе" (1975г.) и др. Результаты этих исследований не получили должного внедрения в школьную практику, поскольку в этот период дифференциация обучения рассматривалась лишь как дидактическая идея, а не как основа построения всей системы школьного математического образования согласно новой концепции [90]. Все ранее отмеченное, а также психолого-педагогические особенности обучения учащихся в школах естественно-математического профиля определяют актуальность исследования проблемы использования понятий теории алгебраических структур для систематизации и обобщения математических знаний учащихся в школах и классах с углубленным изучением матемиатики.

Объектом исследования мы избрали процесс углубленного обучения учащихся алгебре в школах и классах естественно-математической направленности.

Предметом исследования является методика процесса систематизации и обобщения знаний учащихся по курсу алгебры на основе использования понятий теории алгебраических структур.

Цель исследования состояла в разработке научно обоснованной методики использования понятий и идей теории алгебраических структур для систематизации и обобщения знаний учащихся при углубленном изучении курса алгебры.

В основу исследования положена следующая гипотеза: если содержание основных понятий теории алгебраических структур и их обобщающую роль в построении современной математики использовать с соответствующими дидактическими целями при углубленном изучении школьного курса алгебры, то это будет способствовать повышению теоретического уровня знаний, обеспечению их целостности и обобщенности, а также развитию математической эрудиции школьников.

В соответствии с целью и гипотезой исследования ставились следующие задачи:

1. Проанализировать и выяснить психолого-педагогические основы углубленного изучения математики в контексте проблемы организации процесса систематизации и обобщения математических знаний.
2. Проанализировать содержание понятия "алгебраическая струк-

тура" в современной математике и его систематизирующие и обобщающие функции.

3. Выявить дидактические функции понятий алгебраических структур и целесообразность их использования с целью систематизации и обобщения математических знаний учащихся, обучения моделированию фрагментов дедуктивных математических теорий.
4. Разработать методические рекомендации по использованию понятий и идей теории алгебраических структур для систематизации и обобщения знаний учащиихся по курсу алгебры.
5. Экспериментально проверить эффективность разработанной методики и внести в нее необходимые коррективы.

Методологической основой исследования является теория научного познания; положения психологии и дидактики об особенностях математических способностей, о взаимосвязи обучения, развития и воспитания; закономерности формирования знаний, умений и навыков на основе дифференцированного подхода к обучению; концепция математического образования в Украине.

В процессе исследования для решения поставленных задач и проверки гипотезы использовались следующие методы:
теоретические: анализ психолого-педагогической, математической, методической литературы, учебных программ, пособий, учебников; изучение и обобщение опыта работы учителей школ с углубленным изучением математики и собственного опыта работы в лицее и гимназии; анализ и обработка результатов опытно-экспериментальной работы с использованием методов математической статистики;
эмпирические: наблюдение за учебным процессом, беседы с учителями и учащимися, тестирование, анкетирование, педагогичес-

кий эксперимент.

Научная новизна и теоретическая значимость исследования заключается в выявлении педагогических возможностей изучения понятий алгебраических структур в школьном курсе математики; теоретическом и экспериментальном обосновании методики использования понятий теории алгебраических структур для систематизации и обобщения математических знаний учащихся при углубленном изучении алгебры.

Практическая значимость исследования состоит в разработке конкретных методических рекомендаций и системы упражнений для систематизации и обобщения знаний учащихся и использования обобщающих функций понятий алгебраических структур при обучении учащихся математическому моделированию. Дидактические материалы окажут помощь учителям при организации самостоятельной творческой деятельности учащихся.

Апробация и внедрение результатов исследования. Экспериментальная проверка предлагаемой методики осуществлялась в 1992-1995 годах автором исследования, учителями математики областной педагогической гимназии, Саксаганского естественно-научного лицея, СШ №88 г. Кривого Рога, СШ №203, №24, г. Киева, Желтоводского естественно-научного лицея.

Результаты исследования докладывались и обсуждались на межвузовских научно-практических конференциях в г. Днепропетровске (1994г), Черкассах (1995г), Сумах (1995г), Кривом Роге (1995г), Полтаве (1995г), на заседаниях методических объединений ряда школ г.Кривого Рога (1992-1995гг), на отчетных научных конференциях Института педагогики АПН Украины (1993-1995гг), на заседаниях лаборатории обучения физике и математике Института педагогики АПН Украины (1992-1995гг).

О б о с н о в а н н о с т ь  и  д о с т о в е р н о с т ь результатов исследования обеспечивается методологией исходных позиций исследования, соответствием применения методов исследования его целям и задачам, количественной и качественной обработкой полученных данных.

Н а  з а щ и т у  в ы н о с я т с я:

1. Положение о целесообразности применения понятий алгебраических структур для систематизации и обобщения математических знаний учащихся при углубленном изучении.
2. Методика систематизации и обобщения знаний учащихся профильных школ и классов по курсу алгебры на основе понятий теории алгебраических структур.

# ГЛАВА I. ПРЕДМЕТ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОБЛЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

## §1.1. Содержание понятия "алгебраическая структура" в современной математике. Его систематизирующие и обобщающие функции

Понятие математической структуры пришло в математику в конце XIX, начале XX века, и большую роль в этом сыграли работы Н.Бурбаки. В XIX веке алгебру рассматривали, в основном, как науку об уравнениях и способах их решения. В 1885 году крупный математик Ж.А.Серре следующим образом описывал предмет алгебры: "Алгебра, по существу говоря, - анализ уравнений; все различные части теории, ее составляющие в большей или меньшей степени связаны с этим основным вопросом" [191, С.122]. Решительный поворот произошел примерно в 20-х годах XX века и был связан с осознанием обобщающей роли теорий, построеных для отдельных типов структур - групп, колец, полей, векторных пространств. Таким образом алгебра из "науки об уравнениях " превратилась в "науку о математических структурах".

Частный вид математической структуры нашел свое отражение еще в работах Э.Галуа. Общего определения математической структуры по мнению французского математика А.Картана, - одного из основателей школы Бурбаки, дать очень сложно. Тем не менее математиками подмечены ее основные характеристики. Н.Бурбаки так определяет математическую структуру: "Общей чертой различных понятий, объединенных названием математической структуры является то, что они применимы ко множеству элементов, природа которых не определена. Чтобы определить структуру задают одно или несколько отношений, в которых находятся его элементы, затем постулируют, что данное отношение или данные отношения удовлетворяют некоторым условиям, которые перечисляются и которые являются аксиомами рассматриваемой структуры" [36,С.251]. По мнению А.Э.Тельгмаа, математической структурой называется множество с некоторыми отношениями, именуемыми основными для данной структуры. Основные отношения и элементы рассматриваемого множества (основные объекты) или само множество - начальные понятия структуры. Содержание начальных понятий (природа основных объектов и отношений) определяется аксиомами неоднозначно; остается некоторая неопределенность; представителями (моделями) данной структуры являются все те (и только те) совокупности множеств и отношений, которые удовлетворяют аксиомам этой структуры [129].

А.А.Столяр, Н.М.Рогановский под математической структурой понимают $(1+k+m+n)$-ку:
$(M: a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, P_1^{(r_1)}, \ldots, P_m^{(r_m)}, f_1^{(s_1)}, f_2^{(s_2)}, \ldots, f_n^{(s_n)})$,
где $M$ - непустое множество, носитель структуры; $a_1, a_2, \ldots, a_k$ - выделенные элементы из $M$; $P_1^{(r_1)}, P_2^{(r_2)}, \ldots, P_m^{(r_m)}$ - отношения, определяемые во множестве $M$.

$P_1^{(r_1)}$ - $r_1$-арное ($r_1$-местное) отношение, нижний индекс - номер отношения, верхний - число аргументов; $f_1^{(s_1)}, f_2^{(s_2)}, \ldots, f_n^{(s_n)}$ - операции во множестве $M$.

$f_1^{(s_1)}$ - $s_1$-местная операция в $M$; $f_1^{(s_1)}: M^{(s_1)} \to M$; $(1+k+m+n)$-ка, которая определяет структуру, имеет следующий смысл.

1 - означает, что имеется один носитель структуры - множество $M$ (в более сложных случаях может быть несколько множеств - носителей структуры), целое неотрицательное $k$ означает число выделенных элементов, целое неотрицательное $m$ - число отношений, целое неотрицательное $n$ - число операций [166].

И.П.Егоров определяет математическую структуру следующим образом: "Математическая структура, или, короче, структура по определению, обозначает одно или несколько множеств $M_1$, $M_2$, $M_3,\ldots,M_k$, элементы которых произвольной природы и находятся в некоторых отношениях $P_1,P_2,\ldots,P_k$, описываемых свойствами (аксиомами) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n$, выраженными в терминах теории множеств. Указанные множества называются базисными множествами математической структуры, а $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n$ - ее аксиомами" [76, С.5].

Понятие математической структуры возникло из стремления к объединению математики, к установлению общих закономерностей, подчиняющих себе ее различные сферы деятельности.

Н.Бурбаки определял математику как науку о математических структурах. Характеризуя сущность современной математики Ж.Дьедонне отмечал, что математику на современном этапе интересуют не столько объекты (в смысле их конкретной природы), сколько отношения между ними и особенно операции и их основные свойства [72]. Опираясь на понятие структуры и аксиоматический метод, Бурбаки выдвинул концепцию иерархии математических структур, смысл которой заключается в том, что любую математическую теорию можно описать структурой определенного типа. Идея иерархии структур такова: в центре находятся основные типы структур, которые точно определяются и являются базисными структурами. К таким структурам, составляющим фундамент математики и не приводимым по отношению друг к другу, относятся алгебраические структуры, структуры порядка и топологические структуры. В каждом из этих типов существует достаточное многообразие, но имеется наиболее общая структура данного типа, остальные же получаются в результате дополнения к этой общей структуре дополнительных аксиом, каждая из которых ведет за собой определенную совокупность следствий. За пределами этого ядра находится оболочка, состоящая из сложных структур, представляющих собой органически связанные две или несколько базисных структур при помощи одной или нескольких связывающих аксиом. В такой интерпретации математика представляет собой стройную и глубокую совокупность знаний о математических структурах со своими проблемами, с собственными путями развития. Можно сказать, что математика - область человеческого знания, в которой изучаются математические структуры [199, С.52]. Одним из наиболее важных следствий создания языка математических структур явилось возникновение концепций, объединяющих совершенно разнородные части математики. В этом аспекте математические структуры являются важным средством обобщения и систематизации математических фактов, теорий.

Основой в определении типа структуры являются отношения. По своей природе они могут быть весьма разнообразными. Отношение - одно из важнейших философских понятий, которое имеет особое значение в изучении структуры окружающего мира. Общность отношений сделала их предметом изучения логиков и математиков. Употребление слова "отношение" в обычном языке указывает на существование связи между объектами или на определенное свойство предметов. В математике термин "отношение" употребляется в двух значениях. В первом случае отношением называют результат кратного сравнения чисел, т.е. понятие отношения является синонимом понятия "частное двух чисел". Во втором "отношение" - одно из основных понятий теории множеств. Математическая наука оперирует не только множествами некоторых объектов или элементов, а и отношениями между этими элементами. В математике часто в понятие отношения вкладывают такой же логический смысл как и в понятие соответствия. Нет единого подхода и в формальных определениях этого понятия. Одни ученые считают отношениями тройки $\langle A, X, Y\rangle$, где $A \in X\times Y$ - множество пар вида $\langle x, y\rangle$, где $x \in X$, $y \in Y$. Другие называют отношениями только пары $\langle A, M\rangle$, такие что $A \subseteq M\times M$, т.е. в этом случае отношения являются отдельным случаем соответствия, или таким соответствием, которое задано на одном множестве.

Второй подход к определению понятия отношения сужает его объем и противоречит практике применения этого понятия в других науках. Так "быть учеником класса" в логике считают бинарным отношением, хотя элементы, пребывающие в данном отношении принадлежат разным множествам. В этом смысле понимал понятие отношения и Н.Бурбаки, объясняя, что элементы множества могут "пребывать между собою или с элементами других множеств в некоторых отношениях" [34, С.53]. Таким образом, отношения характеризуются совокупностью (множеством) двоек, троек, и вообще n-ок элементов или подмножеством декартового произведения $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$ множеств $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, которые могут и совпадать.

В школьном курсе термин "отношение" употребляют в первом значении, т.е. как синоним частного двух чисел. Изучение отношения как связи между понятиями предусматривалось программами по математике после реформы 1964-1966 годов. Однако впоследствии этот вопрос был исключен из программы.

В современной математике понятие отношения является важнейшим как раз во втором значении: оно тесно связано со многими математическими понятиями, такими как соответствие, функция, свойство, операция, изоморфизм. О связи понятий отношения и соответствия говорилось выше. Понятие отношения также связано с понятием свойства. Элементы составляют n-ки определенным образом, т.е. согласно какому-то свойству или правилу. В логике рассматривают отношения как свойство двух или более вещей, т.е. как двуместный или многоместный предикат, в то время как обычное свойство представляет одноместный предикат. Связь понятий отношения и свойства проявляется и в способах задания множеств. Характеристическое свойство объектов служит определяющим фактором некоторого множества, а отношение "принадлежать множеству" для любого элемента имеет место тогда и только тогда, когда этому элементу присуще данное характеристическое свойство множества.

Математические формальные определения понятий "отношение" и "свойство" имеют тот же логический смысл, что и соответствующие философские понятия. "Отношению R (x, y) между элементами $x \in X$ и $y \in Y$ соответствует свойство R $(пр_1 z, пр_2 z)$ элемента $z \in X \times Y$. Подмножество произведения $X \times Y$, что состоит из элементов, которые обладают этим свойством, есть множество пар $\langle x, y \rangle$, для которых выполняется R(x,y) [36, С.16]. Тут $пр_1 z$ - первая проекция элемента или его первая компонента, $пр_2 z$ - вторая проекция элемента или его вторая компонента. Таким образом, один элемент характеризуется некоторым свойством, два или несколько элементов находятся в определенном отношении. Отсюда отношение понимается как связь между двумя или большим числом элементов. Если эта связь такова, что для каждого x из множества X существует единственный элемент y из Y, который находится с x в данном отношении, то имеет смысл говорить о функциональном отношении или о функции. Таким образом, функцию можно рассматривать как определенным образом заданное отношение на двух множествах X и Y.

Для выражения отношений между элементами одного или двух различных конечных множеств используют стрелочные диаграммы или графы. Если элементы множеств X и Y изобразить произвольными точками плоскости, а пары точек, изображающие соответствующие элементы x и y, для которых выполняется x R y, соединить непрерывными линиями со стрелками, направленными от первой компоненты ко второй, то получим геометрический образ отношения - его граф. Подобно тому, как график является геометрическим изображением функции, так и граф служит схематическим изображением отношения. Благодаря графам теория бинарных отношений широко применяется не только в математике и логике, но и в биологии, лингвистике, для решения разнообразных практических задач экономики, транспорта, строительства и т.д.

В настоящее время теория графов нашла широкое применение в программировании. При работе над составлением и анализом программ в качестве графического способа записи алгоритмов используют графы. Это связано, во-первых, с тем, что граф-схема программы идентична блок-схеме и легко перестраивается в нее, а, во-вторых, с помощью графов можно лучше понять важнейшее свойство информационной модели - ее структуру. Многие задачи конструирования, анализа и отладки программ, возникающие при оптимизации, трансляции, проверке правильности и т.д., значительно упрощаются, если их рассматривать на теоретико-графовых моделях. Это обусловлено тем, что данные задачи либо сводятся к задачам теории графов, либо используют таковые в качестве основы для решения. "Графы обладают огромной неисчерпаемой изобразительной силой, соразмерной задаче программирования" [75, С.5].

Отношения, рассматриваемые между элементами одного множества, независимо от их природы можно характеризовать свойствами рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, асимметричности, транзитивности и т.д.

Особый интерес представляют отношения, характеризующиеся некоторым комплексом свойств. К таким отношениям относится отношение порядка, которое определяет одну из базисных математических структур (по Н.Бурбаки) - структуру порядка. Это отношение на множестве, которое позволяет упорядочить элементы этого множества либо по старшинству, либо по значимости, либо по времени исполнения. В школьном курсе математики наиболее распространены отношения строгого и нестрогого порядка. Большое значение в математике имеет отношение, заданное на некотором непустом множестве, которое обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности. Такое отношение называется отношением эквивалентности. Любое отношение эквивалентности на множестве тесно связано с разбиением этого множества на классы. Теория отношений эквивалентности имеет исключительное значение там, где возникает необходимость в классификации. А классификация играет важную роль в любой науке. "Собственно науку можно считать достаточно развитой лишь тогда, когда в ней проведена более или менее полная классификация понятий, объектов или методов исследований" [175]. В то же время разбиение множества на классы, которое порождается отношением эквивалентности, позволяет при исследованиях рассматривать не все множество, а один представитель класса.

Вторым типом структур, которые Н. Бурбаки отнес к фундаментальным, являются топологические. В основе их определения лежат свойства непрерывных отношений и преобразований различных объектов, которые сохраняют целостность и форму этих объектов. В топологических структурах обобщаются понятия окрестности, предела, непрерывности числовых функций.

Отношения, которыми связаны элементы математических структур, могут быть различными. Одним из таких отношений является закон композиции. Он кладется в основу построения алгебраических структур, являющихся частным важным случаем общей математической структуры. Бурбаки определяет алгебраическую структуру следующим образом: "Алгебраической структурой в множестве $\mathcal{E}$ называется всякая структура, определяемая в $\mathcal{E}$ одним или несколькими внутренними законами композиции элементов из $\mathcal{E}$ и одним или несколькими внешними законами композиции операторов из областей операторов $\Omega$, $\Theta$,... и элементов из $\mathcal{E}$, причем эти законы могут быть заменены некоторыми условиями, или быть связаны друг с другом некоторыми отношениями" [34 С.59]. Во многих случаях закон композиции называется алгебраической операцией, а множества, в которых выполняется одна или две алгебраические операции называются алгебраическими системами. И.М.Яглом так определяет алгебраическую структуру. Под алгебраической структурой понимают основное множество М, отношения между элементами которого сводятся к определенному числу (бинарных) алгебраических операций: под действующей на множестве М бинарной операцией $\omega$ понимается отображение $\omega$: $M \times M \rightarrow M$; сопоставляющее каждым двум $x, y \in M$ третий элемент $z \in M$ - результат операции $\omega$, примененной к $x$ и $y$; при этом пишут $z = \omega(x,y)$ или $z = x \omega y$. В принципе возможно также, что элементы x и y принадлежат не одному и тому же множеству М, а разным множествам М, R. Элемент z может принадлежать и третьему множеству N. В случае, когда $x$, $z \in M$, а, скажем, $y \in R$ говорят о внешней алгебраической операции, называя множество R областью действующих на М операторов [198].

По определению венгерского математика Э.Фрида "алгебраической структурой называется система $N = \langle A, f_1 ; f_2 ; f_3 ; \dots ; f_n \rangle$, первый элемент которой представляет собой множество, а остальные элементы заданные на этом множестве операции (т.е. функции конечного числа переменных со значениями в том же множестве)" [182, С.191]. Таким образом, если отношения, рассматриваемые в математических структурах, являются алгебраическими операциями, то структуры называются алгебраическими. Анализ данных определений позволяет выделить две наиболее распространенные трактовки общего понятия "операция". В первой операция трактуется как закон композиции, во-второй - как функция.

Под законом композиции понимают правило сопоставления двум элементам множества нового элемента из этого множества. Если в множестве $M = \{a, b, c, \ldots\}$ введена операция $*$ , это означает, что для любых двух элементов $a$ и $b$ данного множества операция $*$ выполнима, т.е. существует и притом единственный элемент $c \in M$, являющийся результатом применения этой операции (закона композиции) к элементам $a$ и $b$, что означает $a * b = c$. Понимание операции как закона композиции, хотя само понятие "закон" остается не уточненным, является весьма широким. Согласно другой трактовки операция рассматривается как функция. По существу, закон композиции ставит в соответствие каждой паре элементов из $M$ точно один элемент этого же множества, т.е. осуществляется отображение множества $M^2$ всевозможных пар элементов $M$ в множество $M$ ($M^2 \rightarrow M$). Это приводит к следующему определению: операцией (точнее бинарной операцией ) $*$ в множестве $M$ называется отображение множества $M^2$ в множество $M$, ставящее в соответствие каждому элементу $(x, y) \in M^2$, т.е. каждой паре элементов из $M$ один определенный элемент $x*y \in M$. В такой трактовке операция рассматривается как отображение, т.е. функция. Н.Бурбаки также определял понятие алгебраической операции: "Общепринятое представление, связываемое с обычными алгебраическими операциями, если отвлечься от их конкретного характера, весьма просто: выполнить алгебраическую операцию над двумя элементами одного и того же множества $E$ - значит сопоставить паре $(a, b)$ вполне определенный третий элемент множества $E$. Иначе говоря, в этом понятии нет ничего кроме понятия функции: задать алгебраическую операцию - значит задать функцию на ExE и принимающую значение из E. Именно такую функцию мы называем внутренней алгебраической операцией" [35, С.13-14]. В такой трактовке понятия бинарной алгебраической операции, требование выполнимости и свойство однозначности для любой пары элементов сразу включаются в определение. Имеются операции, не подходящие под это определение. Например, скалярное произведение двух векторов. Эта операция представляет собой отображение типа $V^2 \rightarrow R$. В таком случае не имеет смысла говорить о "замкнутости" множества относительно операции. Здесь фигурируют два множества: результат операции над двумя элементами из V является объектом другой природы - элементом другого множества. Поэтому наиболее понятие бинарной операции можно сформулировать как отображение типа $A \times B \rightarrow C$, т.е. как соответствие, сопоставляющее с каждой парой элементов $(a, b) \in A \times B$ точно один элемент $c \in C$. В школьном курсе математики большая часть изучаемых операций являются внутренними, т.е. когда A=B=C (таблица 1 в приложении). Поэтому в разработанной методике использования понятий алгебраических структур для систематизации и обобщения знаний учащихся ограничились только понятием внутренней операции. Если изучать алгебраические операции на понятийном уровне, то уместнее использовать вторую трактовку. Во-первых нецелесообразно принимать за исходное понятие "закон" или "правило". Во-вторых, так как идея функциональной зависимости является одной из основных линий школьного курса математики, то естественно использовать функциональную точку зрения и при формировании общего понятия операции.

Операции не могут рассматриваться в отрыве от множеств, над элементами которых они выполняются. В зависимости от количества и свойств операций, выполняемых над элементами, получают различные виды алгебраических структур. Основными из них являются группа, кольцо, поле, векторное пространство. Группа - наиболее распространенный в математике тип алгебраической структуры.

Определение: Непустое множество $G$ называется группой, если в нем определена алгебраическая операция $*$, которая каждым двум элементам $a$, $b$ из $G$ ставит в соответствие элемент $a * b = c$ также из $G$ и обладает следующими свойствами:

1) операция $*$ ассоциативна, т.е. для любых $a$, $b$, $c$ из $G$ справедливо: $a * (b * c) = (a * b) * c$;

2) существует нейтральный элемент $e$ в $G$ такой, что для любого элемента $a$ из $G$ выполняется: $a * e = e * a = a$;

3) для каждого элемента $a$ из $G$ существует симметричный ему элемент $a'$ относительно операции $*$ такой, что: $a * a' = a' * a = e$.

Из определения группы следуют такие свойства:

Теорема 1. Нейтральный элемент в группе один.

Доказательство.

Допустим, что в группе два нейтральных элемента $e$ и $e'$. Так как свойство 2 справедливо для любых элементов группы, то оно справедливо и для $e$ и $e'$, т.е. $e * e' = e$, так как $e'$ - нейтральный элемент, но $e * e' = e'$, так как $e$ - нейтральный элемент. Отсюда $e = e'$ и нейтральный элемент единственный.

Теорема 2. Для всякого элемента группы симметричный элемент единственный.

Доказательство.

Пусть элемент $a$ группы имеет два симметричных элемента $a'$ и $a''$. Рассмотрим: $a' * a * a''$. С одной стороны $a' * a * a'' = (a' * a) * a'' = e * a'' = a''$, а с другой $a' * a * a'' = a' * (a * a'') = a' * e = a'$. Следовательно, $a'' = a'$.

Групповая операция может выполняться над элементами произвольной природы: числами, отображениями, преобразованиями, подстановками. Так группами являются следующие множества: множество целых чисел относительно сложения, множество рациональных ненулевых чисел относительно умножения, множество поворотов (самосовмещений) квадрата вокруг центра относительно определенным способом введенной операции умножения поворотов, множество $[-\pi;\pi]$ относительно операции "сложение по модулю $2\pi$". Свойствами, указанными в определении группы, обладают сложение и умножение чисел, поэтому операцию в группе обычно обозначают либо знаком "+", либо знаком "$\cdot$" и называют сложением и умножением.

Если групповую операцию называют сложением, то группу называют аддитивной, если умножением, то - мультипликативной. Нейтральный элемент называют соответственно нулем и единицей, а симметричный - противоположным или обратным. Исходя из этого доказанные теоремы утверждают, что в аддитивной группе нуль единственный и для каждого элемента а противоположный ему элемент -а единственный; соответственно для мультипликативной группы: единица одна и для всякого элемента а существует единственный обратный элемент $a^{-1}$. В случае, когда групповая операция коммутативна - группу называют коммутативной или абелевой, в честь норвежского математика Н.Г.Абеля.

Теорема 3. В группе G каждое уравнение $a * x = b$ и $y * a = b$ обладает, и притом единственным, решением.

Доказательство.

Покажем для уравнения $y * a = b$. Так как для всякого а существует симметричный ему элемент а', то применив групповую операцию к равенству и элементу а' и используя свойство ассоциативности получаем: $y * a * a' = b * a'$, $y * e = b * a'$, $y = b * a' \in G$. Покажем единственность результата. Пусть $y_1$ и $y_2$

удовлетворяют уравнению. Тогда $y_1 = b * a'$ и $y_2 = b * a'$. Следовательно $y_1 = y_2$.

В любой аддитивной группе G всегда существует единственный элемент x, удовлетворяющий уравнению $a + x = b$, т.е. всякая пара элементов (a, b) из G однозначно определяет элемент который по теореме равен: $x = -a + b$. Так как для любых числовых множеств операция сложения коммутативна, то решением уравнения $x + a = b$ будет значение $x = b + (-a)$ и эти два значения переменной равны, т.е. $b + (-a) = -a + b$ и называются разностью элементов b и a. Операцию, ставящую в соответствие паре (b, a) элемент x по указанному правилу, называют вычитанием, т.е. $b - a = b + (-a) = -a + b$.

Аналогично, множество ненулевых рациональных чисел относительно операции умножения образует коммутативную группу. Значит существует единственное решение уравнений $a \cdot x = b$ и $x \cdot a = b$. Оно определяется равенством $x = a^{-1} \cdot b = b \cdot a^{-1}$, называется частным, обозначается $b : a$ или $\frac{b}{a}$ ,а операцию называют делением.

Теория групп широко используется в различных разделах математики и ее приложениях. Понятие группы наряду с понятием функции относится к самым фундаментальным понятиям математики. В настоящее время теория групп является одним из наиболее глубоко разработанных разделов алгебры. Результаты этой теории находят применение в механике, физике, кристаллографии и других науках. Так, например, в физике с помощью теории групп можно понять и упорядочить кажущийся хаос спектральных линий, они используются для вывода законов сохранения, классификации элементарных частиц.

Понятие группы выступает как средство систематизации и обобщения знаний и теорий внутри самой математики. Плодотворность алгебраических методов в самых различных областях науки привлекала внимание методистов, разрабатывающих содержание школьной математики. В рамках реформы математического образования широко обсуждался вопрос поиска эффективной методики изложения основ теории групп в школе. Среди различных взглядов на пути введения этих понятий наибольшую разработку получили два направления:

1 - излагать основы теории групп отдельным разделом с целью знакомства учащихся с методом абстракции в математике;

2 - раскрывать содержание понятия группы на существующем фактическом программном материале, не вводя дополнительных разделов. При этом наиболее плодотворными для формирования понятия группы признавались изучение геометрических преобразований и обобщение понятия числа. Программа по математике для классов с углубленным изучением обладает большими возможностями для знакомства учащихся с теоретико-групповыми понятиями. Во-первых, введение дополнительных тем и разделов (комбинаторика, множество комплексных чисел) делает завершенной числовую линию и изучение понятий алгебраических структур позволит обобщить и перегруппировать соответствующие знания учащихся с точки зрения внутренней логики; во-вторых, увеличение количества часов на предметы математического цикла поможет избежать ненужной перегрузки учащихся.

Вторым типом алгебраической структуры, в которой рассматриваются две алгебраические операции - сложение и умножение, является кольцо.

Определение: Непустое множество К называется кольцом если в *нем определены две алгебраические операции: сложение, ставящее в соответствие каждым двум элементам a и b элемент a+b, называемый* их суммой, и умножение, ставящее в соответствие каждым двум элементам a и b элемент a·b, называемый их произведением, причем эти операции обладают следующими свойствами (аксиомами кольца):

1) коммутативность сложения: $a + b = b + a$;

2) ассоциативность сложения: $a + (b + c)=(a + b) + c$;

3) существование нейтрального элемента относительно сложения: $a + 0 = 0 + a = a$;

4) существование противоположного элемента относительно сложения: $a + (-a) = 0$;

5) ассоциативность умножения: $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$;

6) дистрибутивность умножения относительно сложения: $(a + b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$.

Заметим, что первые четыре свойства являются свойствами коммутативной группы. Следовательно любое кольцо является группой относительно операции сложения (аддитивной группой). А значит и все теоремы, доказанные для коммутативных групп имеют место для сложения в любом кольце: а именно в кольце единственен нуль, всякий элемент обладает единственным противоположным, всегда разрешимо, притом единственным образом, уравнение $a + x = b$, что обеспечивает выполняемость операции вычитания.

Поскольку умножение в кольце ассоциативно, то и в произведении любого числа членов скобки можно расставлять произвольно. Порядок же выполнения умножения в произвольных кольцах следует соблюдать, так как коммутативность умножения не требуется. Если операция умножения, введенная в кольце, обладает свойством коммутативности, т.е. для любых $a,b \in K$ выполняется равенство $a\cdot b = b\cdot a$, то кольцо называют коммутативным. В коммутативном кольце порядок выполнения умножения может быть произвольным.

Примеры колец.

1. Множество целых чисел.

2. Множество целых чисел, кратных 3. Покажем, что выполняются все свойства кольца.

Обозначим множество всех целых чисел кратных 3 через M. Тогда $M=\{\dots; -12; -9; -6; -3; 0; 3; 6; 9; 12; \dots\}$, т.е. все числа вида $3m$, где $m \in Z$. Покажем, что сложение и умножение являются алгебраическими операциями на множестве M.

Действительно: $3m + 3n = 3\underbrace{(m + n)}_{k} = 3k \in M$;

$$3m \cdot 3n = 3\underbrace{(3m \cdot n)}_{k} = 3k \in M.$$

Проверим выполняемость свойств.

1) $3m + 3n = 3(m + n) = 3(n + m) = 3n + 3m$ - сложение коммутативно, т.к. коммутативно сложение целых чисел.

2) $3m + (3k + 3s) = 3m + 3(k + s) = 3(m + (k + s)) = 3((m + k) + s) = 3(m + k) + 3s = (3m + 3k) + 3s$ - сложение ассоциативно, так как ассоциативно сложение целых чисел и умножение целых чисел дистрибутивно относительно сложения.

3) $0 \in M$, так как $0 = 3 \cdot 0$ и для любого числа из M:

$3m + 0 = 0 + 3m = 3m$.

4) Число, противоположное $3m$, будет $-3m$: $3m + (-3m) = 0$.

5) $3m \cdot (3k \cdot 3s) = 3m(9ks) = 27mks = (9mk) \cdot 3s = (3m \cdot 3k) \cdot 3s$ - умножение ассоциативно, так как оно ассоциативно на множестве целых чисел.

6) $3m \cdot (3k + 3s) = 3m(3(k + s)) = 9(m(k + s)) = 9(mk + ms) =$

$= 9mk + 9ms = 3m \cdot 3k + 3m \cdot 3s$ - умножение дистрибутивно относительно сложения.

Таким образом, множество M целых чисел кратных 3 образует кольцо. Это кольцо будет коммутативным, так как умножение на этом множестве обладает свойством коммутативности.

Кроме свойств, которые имеют место в коммутативных группах, в кольцах справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. В кольце умножение дистрибутивно относительно вычитания, т.е. $a \cdot (b-c) = ab - ac$ и $(b-c) \cdot a = ba - ca$.

Доказательство.

$b = b$, $c + (b-c) = b$ умножим обе части равенства на $a$: $a\cdot(c + (b-c)) = ab$. Применяя дистрибутивный закон имеем: $ac + a\cdot(b-c) = ab$. Прибавим к обеим частям $(-ac)$: $ac + a\cdot(b-c) + (-ac) = ab + (-ac)$, но $ac + (-ac) = 0$, отсюда $a\cdot(b-c) = ab + (-ac)$, $a\cdot(b-c) = ab - ac$.

Второе равенство доказывается аналогично.

Теорема 2. В кольце $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$.

Доказательство.

$a\cdot 0 = a\cdot(b-b) = ab-ab = 0$.

Аналогично доказываем $0\cdot a = 0$.

Теорема 3. В любом кольце $(-a)\cdot b = a\cdot(-b) = -ab$

$$-a\cdot(-b) = ab.$$

Доказательство.

$-ab$ является элементом, противоположным $ab$. Так как каждый элемент кольца обладает противоположным, то достаточно показать что и $((-a)\cdot b)$ и $(a\cdot(-b))$ также являются противоположными элементу $ab$. Покажем, что $a\cdot(-b)$ является элементом, противоположным $ab$. Рассмотрим сумму $ab$ и $a\cdot(-b)$: $ab+a\cdot(-b) = a\cdot(b+(-b)) = a\cdot 0 = 0$. Значит $a\cdot(-b)$ является противоположным к $ab$, а следовательно $a\cdot(-b) = -ab$. Аналогично доказываем второе равенство.

Таким образом мы видим, что правила знаков, которые употребляются при выполнении операций и хорошо известны школьникам, вполне обоснованы и следуют из основных свойств рассмотренных операций.

Говоря о свойстве нуля в кольцах и исходя из теоремы 2 определяем, что произведение любого элемента кольца на нуль равно нулю. Для числовых множеств верно и обратное утверждение: если произведение двух чисел равно нулю, то равен нулю и один из сомножителей. Для произвольных колец это обратное утверждение в общем случае неверно, так как существуют кольца, в которых произведение ненулевых элементов равно нулю. К таким кольцам, например, относятся кольцо функций, кольцо классов вычетов.

Если в кольце существует нейтральный элемент относительно операции умножения, его называют единицей, а кольцо называют кольцом с единицей. Так, множество целых чисел с операциями сложения и умножения - кольцо с единицей, а множество целых чисел кратных 3 - кольцо без единицы.

Если в кольце выполнима операция деления (кроме деления на нуль), то множество с введенными операциями имеет структуру поля.

Определение: Полем называется кольцо P, обладающее свойствами (аксиомами поля):

1-6) выполняются аксиомы кольца;

7) коммутативность умножения: $a \cdot b = b \cdot a$;

8) существование нейтрального элемента относительно операции умножения;

9) каждый элемент имеет симметричный относительно операции умножения;

10) содержит по крайней мере один элемент, отличный от нуля.

Структуру поля имеют множества рациональных, действительных, комплексных чисел с введенными в них операциями сложения и умножения.

Другими словами, поле - это алгебраическая структура с двумя операциями, такими, что относительно каждой из них множество образует коммутативную группу, причем умножение связано со сложением законом дистрибутивности. Так как обе операции коммутативны, то и для сложения, и для умножения выполняются обратные операции - вычитание и деление соответственно. Все свойства, имеющие место для колец, справедливы и для полей. Из выполнимости операции *деления следуют такие* свойства.

Теорема 1. В поле уравнение $a \cdot x = b$ $(a \neq 0)$ имеет единственное решение: $x = \frac{b}{a} = b \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot b$.

Доказательство следует из соответствующих свойств для групп.

Теорема 2. Если произведение двух элементов поля равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю.

Доказательство.

Пусть $ab = 0$ и $a \neq 0$. Умножая обе части на $a^{-1}$, имеем $a^{-1} \cdot (ab) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b = 0$

Теорема 3. Чтобы $\frac{a}{b} = \frac{c}{k}$, необходимо и достаточно, чтобы $ak = bc$.

Доказательство.

Пусть $\frac{a}{b} = \frac{c}{k}$, покажем, что $ak = bc$: $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$ и $\frac{c}{k} = c \cdot k^{-1}$. Рассмотрим: $a \cdot k$, умножим на $b \cdot b^{-1} = 1$.

$a \cdot k \cdot b \cdot b^{-1} = a \cdot b \cdot b^{-1} \cdot k = (ab^{-1}) \cdot (bk) = c \cdot k^{-1} \cdot b \cdot k = c \cdot k^{-1} \cdot k \cdot b = cb = bc$. Итак, $ak=bc$.

Пусть теперь $ak = bc$, покажем, что $\frac{a}{b} = \frac{c}{k}$. Рассмотрим: $\frac{a}{b}$; $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot a \cdot k \cdot k^{-1} = b^{-1} \cdot b \cdot c \cdot k^{-1} = c \cdot k^{-1} = \frac{c}{k}$, т.е. $\frac{a}{b} = \frac{c}{k}$.

Следствие 1.

Если оба числа отношения разделить и умножить на одно и то же число, отличное от нуля, то значение отношения не изменится.

Следствие 2.

Два отношения могут быть приведены к общему знаменателю.

Теорема 4. Сумма и разность отношений определяется по правилу: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$.

Доказательство.

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = ab^{-1} \pm cd^{-1}$

$$a \cdot b^{-1} \cdot d \cdot d^{-1} \pm c \cdot d^{-1} \cdot b \cdot b^{-1} = (ad) \cdot (b^{-1}d^{-1}) \pm (cb) \cdot (d^{-1}b^{-1}) =$$
$$= ad \cdot (bd)^{-1} \pm (cb) \cdot (bd)^{-1} = (ad \pm cb) \cdot (bd)^{-1} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

Теорема 5. Произведение и частное отношений определяется по правилам:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{и} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Доказательство.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = ab^{-1} \cdot cd^{-1} = (ac) \cdot (b^{-1}d^{-1}) = ac \cdot (bd)^{-1} = \frac{ac}{bd};$$
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = (ab^{-1}) \cdot (cd^{-1})^{-1} = (ad) \cdot (bc)^{-1} = \frac{ad}{bc}.$$

Таким образом, из перечисленных свойств видно, что правила выполнения операций над рациональными числами обоснованы и могут быть выведены из основных свойств операций умножения и сложения.

Кроме рассмотренных встречаются сложные структуры, которые называются многократными. В них входят одновременно несколько основных структур, которые связаны между собой при помощи одной или нескольких аксиом. Например, множество действительных чисел является алгебраической структурой (полем), структурой порядка, структурой топологической (при рассмотрении операции предельного перехода и непрерывности на множестве R приходят к изучению структуры топологического типа). С понятием математической структуры тесно связано понятие изоморфизма. Отношение изоморфизма не накладывает никаких требований на качественную сторону элементов структур. Изоморфные структуры могут отличаться друг от друга природой своих элементов, природой отношений между ними, но они неразличимы с точки зрения свойств этих отношений. Это открывает возможность широкого применения принципа изоморфизма при изучении и классификации математических теорий. По этому поводу Н. Бурбаки пишет: "... каждый раз, когда он (математик) замечает, что между изучаемыми им элементами имеет место отношение, удовлетворяющее аксиомам структуры определенного типа, он сразу может воспользоваться всем арсеналом общих теорем, относящихся к структурам этого типа, тогда как раньше он должен был мучительно трудиться, выковывая средства, необходимые для того, чтобы штурмовать рассматриваемую проблему" [36, С.253]. Изоморфизм между двумя структурами означает, что при помощи надлежащим образом подобранного "словаря" можно законы и свойства одной структуры перенести на другую.

Понятие математической модели - одно из важнейших для обоснования всей школьной математики. Однако проблема его статуса в ряду базисных понятий полностью не решена. Один из конкретных вопросов, все еще не нашедший окончательного решения, - имеет ли смысл включать это понятие в курс школьной математики. Многие методисты полагают это целесообразным. Однако на практике возникают некоторые трудности, связанные с определением места и средств формирования понятия математической модели. Основное содержание понятия "математическая модель" связано с прикладной функцией математического знания. Уверенное формирование этого понятия может быть проведено на основе достаточно развитых математических средств. И тот объект, для которого строится математическая модель (а это могут быть знания, теории, объекты, формируемые в другой дисциплине школьного курса), также должен быть усвоен. Необходимо также рассмотреть несколько примеров, чтобы иметь основание для выделения в них общих модельных черт. Для отдельных тем и понятий это сделать трудно. С точки зрения психологии в основе процесса математического моделирования, как и метода моделирования вообще, лежит способность человеческого сознания отражать реальный мир не во всем многообразии его свойств, внешних и внутренних связях, а в огрубленной, приближенной форме. Говоря языком математика, на каждом этапе развития строится гомоморфный образ реального мира, который приближается к изоморфному образу лишь в процессе бесконечно развивающегося познания. Поэтому "образы и представления в сознании человека в результате восприятия реальных объектов и процессов лишь в определенной степени соответствуют отражаемым явлениям, т.е. являются их моделями" [45, С.132].

Моделирование - это суть математики и весь процесс обучения математика - это обучение моделированию. Под математическим моделированием понимают процесс построения математической модели и ее использования в целях исследования моделируемого объекта, включающий в себя следующие этапы: построение математической модели реальной ситуации; изучение этой модели средствами математики; применение полученных результатов на практике.

Математика изучает математические модели, которые дают возможность исследовать процессы, протекающие в окружающем мире. А математическая модель реальной ситуации часто представляет определенную алгебраическую структуру. Поэтому использование обобщающих и систематизирующих функций понятий алгебраических структур в процессе обучения способствует пониманию сути и овладению навыками математического моделирования, а также формированию соответствующих приемов мышления.

## §1.2. Психолого-педагогический аспект проблемы обобщения и систематизации математических знаний учащихся

Обобщение и систематизация представляют собой неотъемлемое свойство всякой умственной деятельности, способствующее установлению взаимосвязей между явлениями действительности, фактами, научными понятиями и даже разными областями познания. Существенна роль этих процессов в математике, поскольку сущность математики составляют абстракции и обобщения. Математическое мышление поэтому есть в высшей степени абстрактное и обобщенное мышление [93, С.102]. Обобщение и систематизацию относят к неизбежным путям развития многих наук, в том числе и математики. В учебном процессе обобщение и систематизация выступают в двоякой роли: и как мыслительный прием, и как фактор расширения, развития знаний. Для методического аспекта важным, на наш взгляд, является мысль У.У.Сойера о взаимосвязанности этих двух функциональных сторон [163].

Проблема обобщения и систематизации исследовалась ведущими психологами, дидактами, методистами. Полифункциональностью объясняется отсутствие в научной литературе единого объяснения термина "обобщение". В логике под обобщением понимают логический прием, с помощью которого совершается мысленный переход от единичного к общему. Подобное определение можно найти в работах психологов С.Л.Рубинштейна, Б.Г.Ананьева, В.А.Крутецкого, М.М.Шардакова, В.В.Давыдова. Термин "обобщение" применительно к обучению включает не только сам процесс обобщения, но и его результат. Первый состоит в переходе от описания свойств отдельного предмета к их нахождению и выделению в классе подобных предметов. Результатом процесса обобщения является умение учащегося, абстрагируясь от частных, изменяющихся (несущественных) признаков предмета, находить групповые типичные (существенные) признаки [63].

Д.Пойа рассматривает обобщение как "переход от рассмотрения единичного объекта к рассмотрению некоторого множества, содержащего этот объект в качестве своего элемента, или переход от менее емкого множества к более емкому, содержащему первоначальное" [148, С.144]. Под процессом обобщения понимают также "выделение в предметах и явлениях действительности общего и, основанное на этом, мысленное объединение их одного с другим" [128, С.9]. Мы будем понимать под обобщением процесс выделения наиболее существенных признаков, взаимосвязей, характеристик, и т.д., для формирования и формулировки понятий и их систем, законов и закономерностей, основных теорий и ведущих идей изучаемого предмета.

Проблеме формирования приема обобщения, как одного из важных приемов мыслительной деятельности, посвящены многие исследования в психологии. Так С.Л.Рубинштейн, В.В.Давыдов [157,63] рассмотрели в своих работах обобщения, соответствующие эмпирическому и теоретическому уровням мышления. С.Л.Рубинштейн выделил два пути обобщения. "Первый путь - элементарное эмпирическое обобщение, которое совершается в результате сравнения, посредством выделения тех общих (схожих) свойств, в которых сходятся сравниваемые явления. ... Второй путь - это обобщение через анализ и абстракцию. ... До этого типа обобщения возвышается теоретическое мышление в результате раскрытия закономерностей, необходимых связей явлений" [157, С.150]. В соответствии с эмпирическим и теоретическим уровнями мышления говорят об эмпирических и теоретических обобщениях [63].

В психологии и педагогике достаточно глубоко разработана методика формирования эмпирических обобщений. Необходимым условием такого обобщения является выведение общего на основе анализа достаточного количества типичных конкретных фактов, вариация конкретного материала, облегчающая выделение существенных признаков [26]. При этом необходимым условием для формирования правильных обобщений является варьирование несущественных признаков при сохранении постоянными, неизменными существенных [111, С.24]. Несколько другой точки зрения придерживается Н.Ф.Талызина. Она полагает, что работа с несущественными признаками - неэкономичное занятие, поскольку их все равно не исчерпать. Можно сразу же формировать безошибочные понятия, если учить детей способам оперирования существенными признаками, т.к. существенные признаки варьируют среди несущественных [171].

Эмпирическое обобщение вырабатывается при сравнении предметов и представлений о них, позволяющем выделить одинаковые, общие свойства. Основная роль эмпирического обобщения - нахождение формально общего и образование класса. Оно осуществляется формально-логическим путем. Схема такого обобщения состоит в следующем: сравнение предметов --- отбор общих качеств (абстрагирование) --- перечень общих свойств (обобщение) [63, С.13]. Отмечая принципиальную слабость эмпирической схемы обобщения, В.В.Давыдов полагает, что эта схема не дает средств для выделения именно существенных особенностей самого предмета, внутренней связи всех его сторон. Поэтому она не пригодна для образования научных понятий. Противопоставление в ней "сходного" и "различного", "общего" и "частного" без указания их связи внутри предмета приводит к невозможности выразить сущность предмета [63, С.86].

Различают индуктивные и дедуктивные эмпирические обобщения,в зависимости от хода мысли "от частного к общему" или "от общего к частному". В ходе индуктивного эмпирического обобщения реализуется переход от единичного через особенное к общему [33]. Обобщению здесь предшествуют операции сравнения, элементарного анализа и абстрагирования. Прием обобщения данного вида состоит из таких операций:

1) определение цели обобщения;

2) установление различных признаков обобщаемых предметов;

3) отделение общих признаков этих объектов в соответствии с пос-

тавленной целью;

4) формулировка вывода.

Переход "от общего к частному" применяется в обобщении, когда оно включено в систему операции классификации. Здесь решается задача опознания единичных предметов. Операции такого дедуктивного обобщения осуществляются в следующей последовательности:

1) определение цели обобщения;

2) формулировка определения понятия и выделение общего признака;

3) сопоставление и сравнение предметов по этому признаку;

4) проверка наличия признака в каждом из рассматриваемых предметов;

5) отделение (абстрагирование) предметов, у которых имеется этот признак;

6) формулировка вывода.

Как было отмечено многими исследователями, эмпирическое обобщение не раскрывает сущности предмета, оно отражает лишь внешне сходное в вещах.

Внутренние существенные отношения и связи, сущность целого, содержательные общие свойства предметов отражает теоретическое обобщение. Это обобщение фиксирует связь общего с частным и выражается, прежде всего, в способах умственной деятельности, затем уже в различных символо-знаковых системах [63, С.323-324]. Схема процесса теоретического обобщения представлена В.В.Давыдовым следующим образом: вычленение существенных свойств, общего из частного (анализ) --- абстракция (раскрытие собственных, внутренних свойств объектов в закономерных зависимостях) --- обобщение (научное понятие), отображающее существенно общее в предметах и явлениях [63, С.205-206]. Таким образом, теоретическое обобщение заключается в восхождении от абстрактного к конкретному и осуществляется диалектическим путем. Отмечая, что процесс восхождения от абстрактного к конкретному (теоретическое обобщение) и сведение конкретного к абстрактному (эмпирическое обобщение) находятся в единстве, В.В.Давыдов подчеркивает, что ведущим является восхождение, выражающее природу теоретического мышления [63, С.302]. Поэтому развитие теоретического мышления учащихся, а именно оно имеет доминирующую роль в учебно-познавательном процессе, означает овладение двумя процессами обобщения с преобладанием движения от абстрактного к конкретному.

Необходимость освоения учащимися приема теоретического обобщения и методика его формирования при изучении различных вопросов школьного курса математики рассмотрены в исследованиях Е.И.Машбица, Н.С.Новиковой, Н.В.Потоцкого, Н.П.Ерастова, В.Н.Осинской, В.И.Таточенко и др. Исследователи отмечают, что формирование у школьников приема содержательного обобщения является важным условием успешной учебной деятельности и предполагает определенные изменения в методике обучения, что согласуется с мнением психологов о том, что "для формирования теоретических обобщений нужны особые способы работы учащихся с учебным материалом, отличные от разработанной в психологии и педагогике методики формирования эмпирического обобщения" [63, С.302].

Обобщение занимает в процессе обучения особое место, пронизывая все его звенья. Умение проводить обобщения формируется при наличии умений сравнивать, анализировать, выделять главное, абстрагировать. Тесную связь с процессом обобщения имеет абстракция. Если абстракция выделяет общий для разных предметов и явлений признак, то обобщение объединяет в одно понятие, в один класс, род разные предметы, понятия, явления, имеющие этот общий, выделенный в процессе абстрагирования, признак. Прием обобщения как внутренняя сущность проявляется в разнообразных видах учебной работы: нахождении идеи изучаемого материала, основных мыслей и связей; установлении причин и следствий; составлении схем, таблиц, алгоритмов, плана; построении модели математической теории или ее фрагмента, содержательной задачи; видоизменении условия задачи и др.

Кроме того, обобщение связано с синтезом, классификацией, переносом, систематизацией. Особенно тесно процесс обобщения связан с систематизацией.

Обобщение материала по теме или курсу внутренне предполагает систематизацию, как одну из мыслительных операций. Знания о материальном мире, приведенные в некоторую систему, становятся научными. Следовательно, приводить разрозненные знания в систему является необходимым умственным процессом. Через него формируется научное мировоззрение, усвоение становится осознанным. Поэтому в школьном курсе математики часто приходится прибегать к систематизации полученных знаний. В дидактике под систематизацией понимают "приведение расчлененных знаний и сведений об объектах, явлениях и законах в систему, в которой бы отличались ее компоненты и связи между ними" [127, С.30]. Суть процесса систематизации заключается в распределении объектов по видам, родам и классам на основе ряда признаков или принципов. При этом прослеживается связь систематизации и классификации. Вначале (с помощью классификации) определенный объект относится к некоторому роду или классу, а потом (благодаря систематизации) разные объекты группируются определенным образом. Систематизация часто осуществляется и без классификации. Тогда ее функции сводятся к такой организации учебного материала, согласно которой отдельные его части, располагаясь в известных отношениях друг к другу, составляют единое целое. В этом случае основная задача систематизации заключается в достижении нового результата на основе известного: отдельные знания сгруппированы в определенных отношениях и образуют систему. Для нашего исследования важен именно этот аспект систематизации. Так, например, учащиеся на протяжении ряда лет изучают различные числовые множества и их свойства. Ознакомление школьников с обобщающим понятием алгебраической структуры позволяет систематизировать эти знания, сгруппировав их определенным образом, выделив в них новые отношения и связи, обосновав их общие свойства.

Систематизация теоретического учебного материала - сложный умственный процесс. В результате систематизации происходит концентрация знаний, что создает условия для быстрого их запоминания и эффективного использования в научно-практической деятельности, благоприятствует перенесению центра обучения от запоминания к самостоятельному добыванию знаний. Учащиеся при этом осваивают математические методы познания, что особенно важно в условиях профильного обучения.

Результатом процесса систематизации и обобщения на конечном этапе является научная теория, которая включает в себя системообразующую идею, понятия, принципы, законы. Но усвоение теории - длительный процесс, на промежуточных этапах которого в качестве результата обобщения и систематизации выступают понятия, суждения. Понятие - исходная единица знаний, поэтому, прежде всего, следует привить учащимся умение обобщать и систематизировать понятия. Методически оправданной является следующая схема действий:

1) рассмотрение всех групп частных понятий данной системы;

2) выделение наиболее важных, опорных (ключевых) понятий этой системы;

3) установление связей между понятиями данной системы;

4) определение роли и места данной системы понятий в изучаемом курсе;

5) раскрытие прикладных функций данной системы понятий [127].

Причем, обобщение понятий не предполагает строгого выполнения каждый раз всех пунктов схемы. Все зависит от места, роли и функции обобщения. Для школьного курса математики характерным является то, что фундаментальные взаимосвязанные математические понятия вводятся подчас с большим расстоянием во времени. Содержание понятий развивается постепенно, на протяжении нескольких лет расширяется, обогащается. К таким понятиям относятся, в частности, понятие числа, которое формируется на протяжении всего школьного курса, понятие функции, понятие алгебраической операции, которое изучается на протяжении всего обучения и формируется на интуитивной основе. В связи с этим большой эффект дает обобщение знаний по содержательно-методическим линиям, например, числовой линии школьного курса математики.

Чрезвычайная важность процессов обобщения и систематизации математических знаний обусловила разнообразие методических подходов к их организации, в том числе и специальных уроков систематизации и обобщения знаний, так как урок является основной формой организации учебно-воспитательного процесса. Анализ результатов исследования проблемы организации и проведения обобщающих уроков [110, 128, 137, 173] позволил выделить, что проведение уроков обобщения и систематизации:

- способствует повышению эффективности обучения и качества математических знаний учащихся;
- позволяет сформировать в сознании учащихся целостную картину изучаемого материала;
- дает возможность лучше осознать структуру и содержание основ-

ных содержательно-методических линий курса;

- позволяет продемонстрировать образцы осуществления систематизации и обобщения знаний на базе конкретного материала;
- воспитывает теоретическое мышление учащихся, способствуя тем самым более гибкому, осознанному усвоению программного материала.

На специальных уроках обобщения и систематизации знаний внимание учащихся концентрируется на главных аспектах определенной учебной темы. По мнению дидактов добиться освоения приема обобщения без специально выделенных на это уроков невозможно [128, С.119]. Уроки обобщения и систематизации должны организовываться, как правило, так, чтобы учащиеся имели возможность выделить в учебном материале наиболее общие существенные понятия, законы и закономерности, ведущие идеи и основные теории, устанавливать между элементами теоретических знаний кроме содержательно-логических, причинно-следственные и функциональные связи, что определяет структуру как отдельных понятий и явлений, так и их систем~ Учащиеся должны убедиться, что "перед ними не простая сумма знаний, которая входит в учебный предмет в виде фактов, символов, знаков, понятий, формул, теорем, и т.п., а определенная наука" [135, С.93].

Формирование у школьников обобщенных и системных знаний об изученных объектах требует от учителя, наряду со специально подобранным материалом, выбора адекватных способов и методов организации познавательной деятельности учащихся. Ученые (В.В.Давыдов, В.А.Онищук, В.Ф.Паламарчук, М.М.Шардаков и др.) указывают на необходимость применять в процессе обобщения и систематизации такие методы и приемы, которые бы активизировали как мыслительную и практическую деятельность учащихся, так и мотивационные факторы.

С этой целью предлагаются следующие методы повторительно-обобщающих уроков: развернутая беседа; обзорная лекция; ученические доклады и выступления, рефераты, работа с научной и учебной литературой: составление планов, сжатых конспектов, составление схем, обобщающих таблиц, работа с моделями, решение познавательных задач. В исследованиях [128, 137, 173] в связи с применением этих методов на обобщающих уроках раскрыты их познавательные функции, выявлена положительная роль в процессе формирования умений обобщать и систематизировать материал и в процессе усвоения структуры знаний и логических связей между предметами, явлениями. Теоретически обоснована и экспериментально подтверждена зависимость эффективности применения этих методов от психолого-возрастных особенностей учащихся.

В контексте нашего исследования, исходя из специфики предлагаемого учебного материала, психолого-возрастных особенностей учащихся, широкого распространения лекционно-практической системы занятий в практике работы профильных школ и классов, одним из целесообразных методов обобщающих уроков является обзорная лекция в сочетании с различными приемами активизации познавательной деятельности учащихся. В педагогической теории и практике предлагаются различные способы повышения познавательной активности школьников, в частности, внесение элементов "новизны". При этом известный школьникам материал рассматривают в свете какой-нибудь новой идеи или в связи с решением некоторой проблемы.

В лекционно-практической системе занятий важное место занимают учебные семинары, одной из основных дидактических целей которых является систематизация и обобщение, расширение и углубление знаний, умений и навыков по теме или разделу [156]. Основным видом деятельности учащихся на семинарах является самостоятельная работа, основным методическим приемом - подготовка выступлений, рефератов, сообщений. Самостоятельная работа, выполнение которой требует независимо от способа обучения, мыслительной активности, дает возможность учащимся не только овладеть теми элементами знаний, которые по тем или иным причинам (например, ограниченностью во времени), нельзя освоить на уроке, но и систематизировать ранее полученную информацию, осмыслить ее в новых аспектах. Каждое семинарское занятие требует значительной подготовительной работы и учителя и учащихся. В задания учителя по подготовке семинара входит: выбор темы семинара; составление его плана, постановка основных и дополнительных вопросов, распределение познавательных задач между учащимися с учетом их индивидуальных возможностей, проведение консультаций и т.д. К задачам учащихся относится изучение программного материала с использованием различных источников учебной информации. Работа с дополнительной учебной, научно-популярной, научной литературой способствует формированию у учащихся интереса к самостоятельному добыванию знаний, развитию познавательных потребностей. Элементы научного исследования, присущие семинарам, развивают творческие возможности учеников, умения видеть проблему, выдвигать гипотезы, делать правильные обобщающие выводы. Семинарские занятия позволяют шире использовать проблемный, частично-поисковый, исследовательский методы обучения [172]. Во время коллективных обсуждений, докладов, рефератов, сообщений, подготовленных определенными учащимися, школьники овладевают навыками передачи учебной информации, умением критически осмысливать ее содержание. Важное значение имеют семинарские занятия для развития коммуникативных умений учащихся. В ходе эксперимента мы убедились в эффективности организации процесса обобщения и систематизации знаний и ознакомления учащихся с обобщающими понятиями современной математики в форме семинарского занятия.

Перечисленные методы и приемы позволяют охватить достаточно большой по объему материал, углубить понимание учащимися отдельных фактов, положений и идей, формировать у школьников определенные приемы мыслительной деятельности. Для организации творческой познавательной деятельности учащихся на обобщающих занятиях целесообразно применять задания продуктивного характера. Под заданиями продуктивного характера в дидактике понимают задания, выполнение которых предполагает внесение существенных изменений в структуру усвоенных учащимися знаний, способов действий или требует поиска новых знаний, новых способов действий. Такие задания обязывают учителя так организовывать учебную деятельность учащихся, чтобы процессы обобщения и систематизации знаний не сводились только к воспроизведению известного, а способствовали более глубокому проникновению в суть явлений, выявляли связи и отношения между отдельными объектами познания, синтезировали их в целостную систему. Это, в свою очередь, требует ответственного подхода к отбору учебной информации, подлежащей обобщению и систематизации. Таким образом, можно утверждать, что важным этапом в организации обобщающих уроков является выделение из всего объема материала данной темы такого, который представлял бы собой множество взаимосвязанных элементов знаний с определенным характером отношений. Конструирование содержания учебного материала должно предполагать рассмотрение его как целостного объекта усвоения.

Как известно, рассмотрение целостных объектов в науке называют системным подходом, суть которого - раскрытие целостности объекта и механизмов, обеспечивающих его существование и функционирование. Центральное понятие системного подхода - "система", под которой понимают целостный комплекс элементов с их связями и отношениями. Характеристика связей и отношений системы приводит к понятию структуры. Представление и усвоение материала в виде системы (или структуры) формирует у учащихся соответствующий способ мышления, что позволяет раскрыть внутренние закономерности изученных объектов. Для формирования такого способа мышления целесообразно соответствующие темы дополнять новыми данными, дополнительным материалом, который является логическим естественным продолжением уже известного. Большие возможности для этого создает дифференцированный подход к обучению - организация факультативных занятий, спецкурсов, классов с углубленным изучением математики, профильных школ.

Для организации учебного процесса в классах с углубленным изучением математики существенным является тот факт, что многие психологи и педагоги среди математических способностей учащихся выделяют способность к обобщению и систематизации. Так, психолог А.Ф.Лазурский, выделяя "психические функции", характеризующие мышление при изучении арифметики, назвал: систематичность и последовательность мышления; его отчетливость; способность к обобщениям и установлению связи между приобретенными математическими знаниями [112]. Американский психолог Э.Торндайк в книге "Психология алгебры" выделяет общие алгебраические способности: способность обращаться с символами; способность выбора и установления соотношений; способность к обобщению и систематизации; способность приводить в систему идеи и навыки [176].

По мнению В.А.Крутецкого успешную учебно-познавательную деятельность в области математики обеспечивают способность обобщать математический материал, вычленять главное, отвлекаясь от несущественного, видеть общее во внешне различном. В ходе экспериментов по изучению математических способностей, В.А.Крутецкий обнаружил, что способные ученики вообще не сопоставляя "сходное", не сравнивая, без специальных упражнений и указаний учителя осуществляют обобщение математических отношений, объектов, действий "с места", на основании лишь одного явления в ряду сходных явлений [93, С.288]. Причем, обобщение "с места" наблюдалось только у способных учащихся. Изучение способных к математике школьников показало, что сильной стороной их умственной деятельности является ярко выраженная способность к обобщению математического материала. К этому выводу в своих исследованиях пришел и А.А.Бодалев. Он подчеркивает, что способности к обучению определяются способностью обобщать материал в сфере соответствующего учебного предмета. Ученый указывает в этой связи, что у относительно неспособных к изучению данного предмета учащихся "обобщение возникает как результат очень большого труда или же не образуется совсем" [27, С.25]. Таким образом, для овладения приемами обобщения и систематизации знаний учащимися школ и классов математического профиля существуют реальные психологические предпосылки.

С точки зрения содержания обучения, для формирования приемов обобщения и систематизации в профильных классах создаются хорошие условия. Так, изучение отдельных тем, не входящих в программу по математике для общеобразовательных школ, позволяет проводить обобщения по содержательно-методическим линиям, которые в этом случае являются логически завершенными. В математике одним из содержательных средств обобщения и систематизации знаний являются понятия алгебраических структур. Целесообразным и естественным является использование этих понятий с аналогичными дидактическими целями в процессе обучения.

## §1.3. Целесообразность ознакомления учащихся с понятиями алгебраических структур при углубленном изучении курса алгебры

Попытки введения основных идей и понятий современной математики в школьный курс предпринимались давно. Это происходило в рамках движения за модернизацию математического образования, которое началось в конце XIX начале XX столетия. Движение, в основном, было обусловлено следующим. На протяжении XIX века оформилась традиционная международная система математического образования в которой постепенно проявились некоторые негативные тенденции.

1 - начиная со второй половины XIX века становится весьма ощутимым постоянный разрыв между математикой - наукой и сложившимся учебным предметом математики, базирующимся, в основном, на достижениях науки-математики античного и средневекового времени;

2 - упрощена цель изучения учебного предмета математики; нарушено соответствие между идейным и вычислительным его аспектами;

а) происходит усвоение исторически сложившихся элементарных фактов, а не математических идей;

б) обучение, в основном, сводится к получению навыков осуществления вычислений, преобразований и доказательств на большом числе упражнений;

в) преобладает метод обучения готовым знаниям, когда учитель их передает, а учащиеся запоминают и усваивают при решении большого числа традиционных задач [185].

Эта система к концу XIX века вступила в противоречие с новой практикой - обязательным школьным образованием. Возникло реформистское движение за модернизацию школьного математического образования. Модернизация школьного курса - это возможное и доступное для учащихся сближение его содержания с современным научно-идейным содержанием самой науки математики, содержанием общепризнанным, неоспоримым, имеющим общеобразовательное значение [112]. Уже в начале века на IV Международном конгрессе математиков в Риме была создана Международная комиссия по математическому образованию, рассматривающая современные тенденции, касающиеся обновления содержания и методов преподавания математики. Особого размаха это движение достигло в 50-70 годах и охватило в той или иной степени почти все развитые страны мира. Обзор движения за реформу математического образования в различных стран[illegible] и в международном масштабе представлен в докладах Междуна[illegible] комиссии по математическому образованию (МКМО) на Эдинбург[illegible] (1957г), Стокгольмском (1962г) и Московском (1966г) Международных конгрессах математиков, в подготовленном ЮНЕСКО издании "Новые тенденции в преподавании математики на среднем уровне" и во многих других работах [167].

Отметим, что все проекты реформ школьного математического образования проводились с точки зрения решения двух важных задач:
- сближение основ наук, изучаемых в школе с фундаментальными идеями современной математической науки;
- развитие творческой инициативы всех учащихся, изучающих обязательный курс математики и выбирающих по собственной инициативе дополнительные курсы из современной математики.

С целью решения первой задачи предлагалось модернизировать содержание школьного курса математики посредством введения в нее основных идей, понятий современной математической науки. Для решения второй задачи разрабатывались идеи фуркации, т.е. разделения курса математики в старших классах на несколько ветвей с различными программами по математике в целях лучшего удовлетворения индивидуальных познавательных интересов и, позже, идея дифференциации обучения, что послужило основой создания сети специализированных школ и классов.

Введение в школьный курс математики основных понятий современной математики поддерживали многие ученые. В начале века активно участвовали в разработке проектов реформ профессора В.Б.Струве, Д.М.Синцов, П.А.Некрасов. Позже эти идеи разрабатывались в работах Н.Н.Лузина, Н.А.Глаголева, Б.Н.Делоне, А.Д.Александрова, А.И.Берга, Б.В.Гнеденко, А.Н.Колмогорова, А.И.Маркушевича, И.Г.Петровского и других. О необходимости модернизировать школьный курс математики, усилить его идейный аспект говорили французские ученые: Ш.Лезан, Г.Шоке, К.Гаттеньо, югославский ученый Л.Давидсон, американский математик Н.Гарднер и др. Они считали возможным и методически оправданным введение в содержание школьного математического образования основных понятий современной алгебры, в частности, понятий алгебраической структуры (группы, кольца, поля).

Первую попытку введения понятия поля в курс школьной алгебры осуществил профессор Киевского университета Д.А.Граве в своем руководстве для средних учебных заведений [60]. Д.А.Граве считал, что преподавание алгебры можно модернизировать в соответствии с достижениями науки, не нарушая целостности исторически сложившейся программы. Средством модернизации он считал введение понятий функции и поля. По его мнению это нужно было сделать "ввиду громадного значения в современной науке теории абстрактных полей" [60, С.4]. Определение числового поля дано после изучения рациональных чисел. Далее, путем расширения получались и рассматривались поля действительных и комплексных чисел.

Понятие поля использовалось и при изучении других вопросов математики. Так действия над многочленами рассматривались, опираясь на свойства поля рациональных чисел. Отметим, что для подхода Д.Граве характерно рассмотрение действий отдельно над многочленами и отдельно над одночленами. Это было связано с тем, что реальные понятия одночлена и многочлена противопоставлялись друг другу. В учебной мировой литературе учебник Д.Граве явился первой попыткой осуществить введение понятия поля в курс алгебры средней школы. Идеи построения школьного курса алгебры с опорой на алгебраические структуры были реализованы в некоторых программах и учебниках разных стран (в 50-70 гг). Так в 1960 году группой английских учителей под руководством С.Хоупа был создан так называемый Мидлендский экспериментальный проект. Его целью была разработка программы по математике и создание на ее основе учебника для учащихся I-V классов грамматической школы Англии. Учебник был создан и в нем широко представлены новые для школы разделы - векторная алгебра, арифметика вычетов, системы счисления. В учебнике заложена идея алгебраической структуры, рассматриваются в необобщенном до математического определения виде алгебраические операции, изучаются свойства коммутативности и ассоциативности алгебраических операций, вводится термин "структура", дается определение понятия группы и, на примере арифметики вычетов, понятия кольца [107].

В Швейцарии, в 60-х годах, гимназиями нескольких кантонов по инициативе директора Невшательской гимназии Л.Паули была модернизирована программа по математике для естественно-научного отделения. Программа была пронизана обобщающими идеями современной математики (структурами). Так во II классе естественно-научного отделения в курсе алгебры изучались группы, кольца, поля, векторные пространства; III класс был посвящен углубленному изучению понятия числа и алгебраических структур. Педагоги отмечали, что "учащиеся отнеслись к модернизации курса положительно, с большим интересом. Общая успеваемость по курсу математики несколько повысилась" [125, С.93].

Наиболее последовательную разработку эти вопросы получили во Франции. Здесь большое влияние оказали работы Н.Бурбаки. Идеи, разрабатываемые Н.Бурбаки, легли в основу реконструкции математического образования с первых классов школы. В математических классах во Франции в конце 50-х годов изучалась теория групп, которая давала возможность объединить в одну структуру разрозненные ветви элементарной математики. В начале 60-х годов был разработан проект перспективной программы по математике, рассчитанный на 2 цикла средней школы: первый (от 11 до 15 лет), второй (от 15 до 18 лет). Курс математики для I цикла средней общеобразовательной школы строился на основании следующих положений: а) единство математики на основе теории множеств и отношений; б) выделение роли алгебраических структур должно было обеспечить "целостность математики". Программой было предусмотрено изучение структур порядка, группы, кольца, поля, понятий бинарной операции и отношения. Позже, при обсуждении этой программы, отметили ее перегруженность, но она была принята за основу и одобрена как перспективная линия развития школьных программ [112].

В нашей стране в 1968 году была опубликована и утверждена программа по математике, построенная на основе теоретико-множественной концепции. Этой программой предусматривалось рассмотрение бинарных отношений, двудольных графов, групп движений в геометрии.

В США идеи введения некоторых понятий современной алгебры в школьный курс также нашли свое воплощение. Г.Биркгофф отмечал, что большинство американских учебников по алгебре следуют подходу Ван-дер-Вардена в принципах и построении, разве только, предваряя схему "группы, кольца, поля" более полным обсуждением "множеств и функций". Более того, многое из нынешней "новой математики" есть не что иное, как попытка познакомить школьников с этим подходом к математике [24]. В 1986 году, в США Правлением Национального Совета учителей математики была создана комиссия, разработавшая Стандарты для оценки качества программ по математике и достижений учащихся в изучении этого предмета в Североамериканских школах. Стандарты направляют и устанавливают рамки реформы школьной математики на 90-е годы. Ими предусмотрено изучение учащимися V-VIII классов числовых систем и теории чисел, математических моделей, а в IX-XII классах к традиционным содержательным линиям добавляются "дискретная математика" и "математические структуры", что позволяет старшеклассникам подняться на более высокий уровень математической абстракции [77]. Таким образом, даже небольшой анализ отечественного и зарубежного опыта свидетельствует о том, что идея введения в школьный курс математики вопросов, связанных с математическими структурами широко обсуждалась и предпринимались серьезные попытки ее реализации. Это было обусловлено, в определенной мере, тем, что установившаяся традиционная дидактическая система школьной математики не отражала научной системы современной математики [167].

Практика показала, что приведение дидактической системы школьной математики в соответствие с научной системой современной математики столкнулось с рядом серьезных затруднений, что послужило для многих ученых и педагогов причиной отказа от идей модернизации школьного образования. Однако, это не означает, что проблема неразрешима. Необходима, на наш взгляд, дальнейшая разработка дидактической системы школьной математики, в определенной мере отражающей систему современной математической науки. И в этой дидактической системе найдут отражение идеи и понятия, связанные с фундаментальными математическими структурами, к которым относятся алгебраические структуры. "При следующих реформах школьного математического образования в недалеком будущем придется решать вопросы о введении основ теории вероятностей, элементов математической логики, понятий алгебраической структуры (группы, кольца, поля), групп преобразований в геометрии и других "[112, С.39].

Введение фундаментальных структур в школьный курс математики и их использование имеет свои психолого-педагогические основания. Результаты психологических исследований существенно изменили привычные представления о возрастных особенностях усвоения знаний, выявлены значительные резервы в познавательных возможностях детей. Французский психолог Ж.Пиаже, исследовавший психологию математического мышления ребенка установил аналогию между математическими структурами и структурами мышления, лежашими в основе действий ребенка. Эта аналогия указывает, что человеческое мышление "непосредственно ориентировано на организацию определенных операторных структур, изоморфных таким же или некоторым частям математических структур" [143, С.33]. Причем, центральным понятием в структуре математического мышления является понятие "группировка", производное от "группы". Свойства группировки позволяют различать одну операцию мышления от другой. Под операцией понимают действия, которые перенесены внутрь, обратимы и скоординированы в системе, подчиняющейся законам, относящимся к системе как к целому. В построении операций Пиаже выделяет четыре основных периода, в последний из которых у ребенка вырабатывается формальное мышление. Формальное мышление означает размышление над операциями, т.е. оперирование операциями или их результатами. В некоторых ситуациях мышление ребенка выступает как познавательная структура типа группы с четырьмя преобразованиями. "Большой интерес вызывает тот факт, что если проследить до самых истоков психическое развитие арифметических и геометрических операций в сознании ребенка и, особенно, операций логических, осуществляющих в них все необходимые предварительные условия, то вновь находят все этапы - вначале фундаментальные тенденции к организации целого или системы, вне которой элементы не имеют ни значения, ни вообще существования, а затем распределение этих систем совокупностей по 3 типам, которые в точности соответствуют структурам алгебраическим, порядка и топологии" [143, С.13]. Таким образом, изучение алгебраических структур вполне психологически оправдано и будет способствовать дальнейшему развитию мышления учащихся.

Анализ школьных программ и учебников массовой школы позволяет выявить предпосылки для вполне корректного формирования понятия алгебраической структуры. Понятие множества знакомо учащимся из повседневной жизни и на интуитивном уровне достаточно хорошо сформировано. С понятием отношения учащиеся знакомятся начиная с первого класса (">", "<", "=", "больше в 2 раза", "меньше на 3", "быть делителем", "быть кратным" и т.д.) и весь школьный курс математики есть в определенной степени, изучение отношений. Различные отношения изучают и в курсах смежных дисциплин.

Результаты анкетирования, проведенного в ходе констатирующего эксперимента показывают, что на интуитивном уровне представления о математическом понятии отношения у школьников, в основном, сформированы. Об этом свидетельствует тот факт, что 76% учащихся (анкетировалось 127 человек) не зная определения этого понятия правильно привели примеры отношений, изучаемых в школьном курсе математики. Среди примеров, приводимых учащимися преобладали отношения, заданные на числовых множествах (таблица 1).

Таблица 1

| Примеры отношений школьного курса математики | символ отношения | Количество анкет с примерами данных отношений |
|---|---|---|
| 1 - равенства | = | 68,3% |
| 2 - меньше | < | 61,4% |
| 3 - больше | > | 62,3% |
| 4 - не меньше | ≥ | 47,2% |
| 5 - не больше | ≤ | 46% |
| 6 - делимости | ⋮ | 35% |

В целях осознания учащимися обобщающего характера понятия отношения в предлагаемую нами систему были включены упражнения, в которых отношения задаются на множествах нечисловой природы.

Целесообразность ознакомления учащихся с понятием отношения и его свойствами диктуется, во-первых, тем, что оно имеет широкое применение в различных областях математики. Во-вторых, весь школьный курс математики буквально пронизан разнообразными отношениями, которым традиционное преподавание не отводит такую роль, какую они играют в современной науке. В-третьих, отношения имеют первостепенное общеобразовательное значение. Язык бинарных отношений удобен для математической лингвистики, математической биологии, теории информации и ряда других областей прикладной математики. Отношения применяются и в науках, далеких от математики. Таким образом, изучать отношения в школе можно и нужно. Можно потому что это не потребует расширения объема школьного материала, посильно для детей, имеет аналогию в повседневной жизни. А нужно затем, что не достаточно изучать свойства отдельных понятий, не обращая внимания на отношения между данными понятиями, на свойства этих отношений. Изучение отношений углубит знания учащихся по математике.

Одной из основных содержательных линий школьного курса математики является числовая линия. Широкое применение числа получили благодаря тому, что в каждом числовом множестве введены как бинарные отношения так и бинарные операции над числами, порождающие в этом множестве определенную алгебраическую структуру. С операциями сложения, умножения натуральных чисел и законами этих операций учащиеся знакомятся еще в начальной школе. Затем изучаются различные операции и их свойства во множествах целых, рациональных и действительных чисел. Школьный курс математики предполагает изучение операций над нечисловыми объектами (векторами, многочленами). Определение понятия алгебраической операции, термин "операция" в школьном курсе математики не вводится. Однако, наши наблюдения показывают, что и учителя и учащиеся используют этот термин на уроках математики, причем, часто не совсем корректно. Так на уроках математики в 8-10 классах нам доводилось слышать от учащихся предложения такого плана: "операция деления многочленов", "выполним операцию вычитания" (речь шла о множестве натуральных чисел) и т.д. Это обусловлено тем, что многие школьники не различают понятия "алгебраическая операция" и "арифметическое действие". Об этом свидетельствуют результаты констатирующего эксперимента. На вопрос анкеты "Существуют ли, на ваш взгляд, различия между понятиями алгебраической операции и арифметического действия?" 73% учащихся ответили отрицательно, 12% не смогли дать ответа. Исходя из принципа научности обучения, такое некорректное использование терминологии, особенно при обучении в школах естественно-математической направленности, считаем недопустимым.

Традиционная методика обучения математике такова, что основные свойства алгебраических операций (в школьном курсе - законы арифметических действий) усваиваются учащимися формально. На это указывает то, что при анкетировании 29% учащихся ответили, что переместительный и сочетательный законы имеют место для вычитания, больше половины (56%) дали утвердительный ответ на вопрос: имеет ли место переместительный закон для возведения в степень?

Следует ли стремиться в школьном обучении к обобщениям в области изучения операций? Необходимо ли формирование общего понятия операции? Ответ на эти вопросы зависит от целей обучения. Если цель - достичь понимания учащимися значения общности и абстрактности математического формализма, возможности его различных содержательных интерпретаций, а, следовательно, и его применения в различных конкретных ситуациях - то ответ положителен.

Возможны два пути использования идей теории математических структур в школьной математике - явный и неявный. Под явным видом использования понимают формирование у учащихся понятия математической структуры (с введением определения), под неявным - применение идей теории математических структур в необобщенном до определения понятия виде.

В неявном виде идея алгебраических структур заложена в традиционном курсе алгебры средней школы [101, 146]. Каждое из рассмотренных в школе числовых множеств, а также ряд их подмножеств являются носителями отдельных видов алгебраических структур. Использование алгебраических структур в неявном виде не предполагает введения не только строгого, но и адаптированного их определения. "В таком изучении не может быть речи о догматическом изложении абстрактных теорий, но посредством многочисленных элементарных примеров можно вводить основные понятия так, чтобы приучить учеников с самого начала усваивать принципы алгебраических структур, с которыми они встречаются очень рано, но которых им не дают возможности узнать. Учащиеся, производя действия над целыми числами и производя действия над многочленами смутно чувствуют нечто общее между ними, но очень редко им объясняют причину этой общности при переходе от чисел к многочленам" [101, С.57].

Введение понятий алгебраических структур в школах и классах с углубленным изучением математики возможно, на наш взгляд, в явном виде. Этому способствует специфика организации учебного процесса в таких школах и классах.

Учебными планами специализированных школ и классов предусмотрено, за счет школьного компонента, увеличение часов на изучение профильных дисциплин на достаточно высоком теоретическом и практическом уровне. При этом распределение часов между отдельными курсами и темами соответствующих предметов осуществляют учителя в соответствии со специальными программами, разработанными Министерством образования Украины или педколлективом школы совместно с работниками высших учебных заведений, научно-исследовательских институтов [72].

При инвариантности обязательного компонента содержания образования профильных предметов достаточно вариативны расширенное ядро и содержание образования факультативного типа. Эта вариативность проявляется в наличии различных циклов спецкурсов и практикумов, тематике факультативов по профилирующим предметам и обоснована психологическими исследованиями.

Многие исследователи отмечают, что в условиях дифференциации обучения целесообразно варьировать содержание образования. Д.Б.Эльконин исходит из предположения, что возможности стимулирования умственного развития таятся прежде всего в формировании содержания учебного материала [197]. Повышение теоретического уровня учебного материала влечет за собой рост умственных способностей учащихся. "Содержание образования необходимо пополнить и углубить в соответствии с интересами, способностями и профессиональными намерениями ученика" [177, С.42]. Наши наблюдения показывают, что многие учителя, работающие в профильных школах и классах творчески подходят к процессу обучения. Существующую форму организации процесса они наполняют новым оригинальным содержанием. Многие педагоги увлечены поиском дополнительного интересного и доступного для учащихся различного уровня успеваемости учебного материала. Они вводят новые, не только отдельные научные факты, примеры, учебные задания, но и темы, ставят новые проблемы, подбирают материал различного уровня обобщенности или проблемности для способных и менее способных учащихся. При этом, как правило, вводятся темы, способствующие увеличению логической стройности и полноты школьного курса математики, дающие возможность решать интересные, красивые задачи. Материал теории алгебраических структур обладает такими возможностями.

Опыт работы физико-математических школ при университетах показывает, что учащиеся успешно овладевают идеями и понятиями теории алгебраических структур. Так, курс "алгебра" в школе-интернате при МГУ постепенно, на конкретном материале подводит учащихся к важнейшим понятиям алгебры - от арифметики кольца к кольцам и полям вычетов [88].

Действующей на протяжении последних лет программой по математике для школ и классов с углубленным теоретическим и практическим изучением математики предусматривалось ознакомление учащихся с понятием числового кольца (на примере кольца целых чисел) и числового поля (на примере поля действительных и поля комплексных чисел) [152]. Эти понятия также включены на ознакомительном уровне в раздел "Введение в курс алгебры и начала анализа" в экспериментальном учебнике [13].

Понятие группы приобретает в настоящее время господствующую позицию над самыми различными разделами математики и других областей естествознания. Все предпосылки для ознакомления учащихся с понятием группы содержатся в традиционном школьном курсе математики. "По существу понятие группы не труднее понятия функции: его можно освоить на самых первых ступенях математического образования, тем более, что сделать это можно на материале элементарной математики. Вместе с тем, знакомство с этим понятием - один из самых естественных способов первого ознакомления с современной математикой вообще" [14, С.5].

В общеобразовательной школе изучение вопросов, связанных с теорией алгебраических структур, предполагается в рамках факультативного курса по математике (таблица 2 в приложении). При этом отмечается, что распределение по темам ориентировочное; выбор тем для факультативных занятий производится учителем и зависит от индивидуальных особенностей, способностей, познавательных интересов учащихся каждого класса [151].

Наблюдения за учебно-воспитательным процессом, беседы с учителями школ, анкетирование слушателей курсов повышения квалификации при Криворожском педагогическом институте убедили нас, что вопросы, связанные с теорией алгебраических структур, редко выбирались для изучения на факультативах. Факультативные занятия часто были направлены на отработку знаний, умений и навыков по темам традиционного курса математики и превращались, по сути, в индивидуальные занятия или в практикумы решения задач. Между тем обобщающие понятия и систематизирующие идеи теории алгебраических структур обладают большими возможностями организации самостоятельной познавательной деятельности учащихся и могут быть использованы с соответствующими дидактическими функциями при углубленном изучении.

Ознакомить учащихся с этими понятиями можно в X классе при изучении раздела "Введение в курс алгебры и начала анализа" или на занятиях одного из спецкурсов. Например, в областной педагогической гимназии г.Кривого Рога эти вопросы рассматривались на занятиях спецкурса "Элементы математического моделирования".

Дифференцированный подход к организации этого процесса заключается в наличии трех уровней изучения предлагаемого материала.

Первый - ознакомительный уровень предполагает обзорно-ознакомительное изучение с целью дать учащимся представления, расширяющие их математический и общенаучный кругозор. Доминирующий метод преподавания - обзорная лекция.

Второй - идейно-обобщающий уровень: изучение научно-идейного содержания темы с иллюстрацией лишь отдельных применений. Основная форма проведения занятий на этом уровне - семинары, выполнение индивидуальных творческих работ.

Третий - операционный уровень: изучение содержания с целью формирования умений и навыков его применения при решении задач. Это достигается на практических занятиях и уроках формирования умений и навыков.

Рассмотрение алгебраических структур, на наш взгляд, имеет еще одно важное методологическое значение. Посредством алгебраических структур можно ознакомить учащихся с одним из основных методов построения математических теорий - аксиоматическим методом. Дискуссии о целесообразности ознакомления с аксиоматическим методом в общеобразовательной школе ведутся очень давно. Некоторые математики полагают, что "в школе аксиоматике даже (и тем более) несовершенной совсем не место" [97, С.146], что "изложение строгого курса геометрии в VII классе, в частности, попытка объяснить 13-летнему ребенку, только что начавшему изучать геометрию, что такое аксиома, теорема, определение - это полный абсурд" [28, С.142]. Считают целесообразным упомянуть аксиомы впервые в заключительном разделе курса XI класса "где дается представление об аксиоматическом методе", при этом имеются в виду "беседы и лекции" [28, С.143]. Оппоненты этой позиции возражают, полагая, что "десятистраничное дополнение к многолетнему курсу геометрии не может заменить постепенного, хорошо продуманного воспитания" [32, С.151-152] и, по крайней мере, в старших классах "необходимо дать систематический курс геометрии на аксиоматической основе" [103, С.153].

Осознанность и устойчивость знаний, как известно, достигается через их применение и поэтому беседа об аксиоматике в самом конце школьного курса математики в этом смысле малоэффективна, как и беглое ознакомление учащихся с понятием аксиомы и начального (неопределяемого) понятия, ограниченное изложением нескольких простых примеров. Многие высказывания в школьной математике остаются недоказанными и считаются истинными по наглядным или иным соображениям, а многие понятия полагаются известными без точных определений. Так как в большинстве такие высказывания и понятия не считаются аксиомами и начальными понятиями, то у учащихся возникает ложное представление что признаки "быть аксиомой" и "быть начальным понятием" внутренне свойственны определенным высказываниям и понятиям. Основываясь на этом, некоторые ученые предлагают вообще отказаться от рассмотрения аксиоматического метода в школе, и строить школьный курс на интуитивной основе. Оставляя в стороне дискуссионный аспект этой проблемы заметим, что широкое применение аксиоматического метода в математике делает желательным рассмотрение его на некоторой стадии обучения, в частности, при углубленном изучении математики. Это положительно влияет на развитие математического мышления, способствует пониманию сущности и значения абстрактного характера математических теорий, обеспечивающего возможность их применения в различных конкретных ситуациях. Итак, знакомить учащихся с аксиоматическим методом нужно. Решающим фактором в достижении цели является, по нашему мнению, способ изложения аксиоматики, подход к аксиоматическому методу. Традиционный способ изложения, вопреки всем стараниям, показывает в методически приемлемом виде, насколько неосуществима эта цель. Мотивировкой введения начальных понятий и аксиом при существующем способе изложения является логическая необходимость - невозможность определить все понятия и доказать (или опровергнуть) все положения в изучаемой теории. По сути дела, опирается такое объяснение на требование логической строгости. Поскольку полная логическая строгость в школьной математике недостижима и в практике никогда не осуществляется, то требование такой строгости оказывается пустой декларацией, смысл которой непонятен большинству учащихся. Серьезной преградой действительному пониманию и сознательному усвоению изложенного является противоречие между теоретическим описанием метода и его практическим применением в школьной математике.

Дидактически к аксиоматическому методу можно подойти с несколько иной позиции - рассмотреть разные теории, между некоторыми чертами которых имеется глубокое сходство [167, С.143]. Выделив эти сходственные черты и назвав их условиями, определяющими какое-то новое образование, можно на основе этих условий как аксиом, создать более общую теорию, для которой исходные теории (или части) являются частными случаями или конкретными моделями. При этом, как правило, данное образование представляет собой математическую структуру определенного типа, а связывающим звеном между разными моделями этой структуры является система ее аксиом. Например, при изучении различных числовых множеств с введенными в них операциями сложения и умножения, отмечаем общность свойств этих операций: коммутативность и ассоциативность сложения и умножения; существование нулевого элемента и для каждого числа ему противоположного. *Выделение таких свойств приводит к понятию коммутативного кольца.* При рассмотрении этих свойств (аксиом кольца) с целью обобщения знаний о числовой системе, появляется возможность раскрыть перед учащимися многие математически существенные и познавательно интересные факты (правила знаков, причину, по которой опускаются скобки в выражениях вида а + в + с и др.) и изучить с позиции аксиоматического метода различные интерпретации построенной теории: числовые системы, кольца многочленов, кольца вычетов по mod m и т.д. Отметим, что такой подход снимает неизбежное противоречие между теорией и практикой, так как в изложении уже не обязательна логическая строгость. Естественно, строгость не исключается, определяющие структуру условия-аксиомы необходимы и достаточны и все доказательства по-прежнему полностью основываются на них. Но в центре внимания оказываются иные, более важные аспекты: определительная функция аксиоматики, неоднозначность интерпретаций, упрощающее воздействие метода. Строгость же должна быть разумной, т.е. в соответствии с уровнем, достигнутым учащимися.

Если учитель считает наиболее важным логические отношения, а не идеи, которые в них заключены, то все, что кажется естественным математику, оказывается искусственным для ученика. Все существенные в школьном изложении черты аксиоматического метода можно выяснить на примере простейших алгебраических структур. Итак, рассмотрение алгебраических структур, как примера аксиоматических теорий является дидактически более удачным способом формирования представления об аксиоматическом методе, по сравнению с традиционным и имеет значительную общеобразовательную ценность.

## ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ I

Одним из принципов построения базового математического образования является дифференциация процесса обучения, обеспечивающая создание благоприятных условий для выявления и развития математических способностей учащихся, проявляющих интерес к математике.

Эффективной формой дифференциации обучения являются школы и классы с математической специализацией. Организация учебного процесса в школах и классах естественно-математической направленности должна способствовать развитию совокупности математических способностей учащихся, важнейшим компонентом которой является способность к обобщению и систематизации учебного материала. Это достигается включением в содержание образования обобщающих понятий и систематизирующих идей современной математики,обеспечивающих создание правильного и более точного представления о математике как науке и ее современном значении. К основным понятиям современной математики, на базе которых осуществляется систематизация и обобщение математических фактов, объектов, теорий относятся понятия алгебраических структур.

Доступность усвоения понятий алгебраических структур обеспечивается способностью учащихся к овладению абстрактными обобщающими понятиями математики, тем, что между математическими структурами и структурами мышления существует близкая связь.

Целесообразность ознакомления учащихся с идеями и понятиями теории алгебраических структур диктуется тем, что эти вопросы обладают большими дидактическими возможностями организации самостоятельной познавательной деятельности учащихся; способствуют расширению математического кругозора и математической эрудиции школьников,повышению теоретического уровня математических знаний; позволяют обобщить и систематизировать знания по числовой содержательно-методической линии школьного курса математики; дают возможность обосновать важные выводы и правила,которые в традиционном обучении остаются необоснованными и более экономно провести изложение некоторых тем школьного курса математики (например, теории многочленов).

Изучение алгебраических структур представляется наиболее целесообразным способом ознакомления учащихся с аксиоматическим методом и позволяет продемонстрировать аксиоматическое построение математических теорий или их фрагментов.

Разрабатывая методику применения понятий теории алгебраических структур при систематизации и обобщении знаний учащихся необходимо осмыслить имеющийся отечественный и зарубежный опыт, использовать прогрессивные идеи, не утратившие своего значения.

Высокая степень обобщенности и абстрактности этих фундаментальных понятий, их назначение в современной математике обуславливают их дидактические функции. Понятия теории алгебраических структур не являются предметом обязательного изучения, а используются в качестве средства обучения. Это предполагает наличие различных уровней усвоения этих понятий (ознакомительный, идейно-обобщающий, операционный), а также специфику форм и методов организации процесса обучения на каждом из этих уровней.

# ГЛАВА II. МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ ПОНЯТИЙ ТЕОРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР ДЛЯ СИСТЕМАТИЗАЦИИ И ОБОБЩЕНИЯ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ

## § 2.1 Понятия группы, кольца и поля как средства систематизации и обобщения знаний учащихся по числовой содержательной линии школьного курса алгебры

Учение о числе является одним из ведущих вопросов курса математики средней школы. Понятие числа последовательно расширяется и развивается, содержательно и качественно обогащаясь. В программе школьного курса алгебры числовые множества рассматриваются в разных классах, и их изучение разделено достаточно большим временным интервалом: натуральные и дробные числа знакомы учащимся еще с начальной школы, с отрицательными числами школьники встречаются в курсе математики VI класса, иррациональные числа изучаются в VIII классе. В классах с углубленным изучением математики вводятся и изучаются комплексные числа, операции над ними, свойства операций (X кл). При этом методика изучения числовых систем в школьном курсе математики отражает историческую последовательность развития понятия числа.

Эволюция понятия числа неразрывно связана с эволюцией понятия равенства чисел, операций над числами. Развитие этих понятий в математике нередко предопределяет развитие самого понятия числа. Изменяя условия равенства чисел, их суммы и произведения получают новые числа. Затем, на определенном этапе эволюции, новый вид чисел, созданный в результате развития понятий равенства, суммы, произведения чисел в применении к известным числам приобретает в единстве с этими понятиями новые качества. Эволюция понятия равенства, суммы и произведения в применении к только что созданному числу приводит к новому этапу развития понятия числа. Такова схема развития понятия числа в математической науке, где приоритетное значение имеют не сами числа, а операции, выполняемые над этими числами. В школьном курсе математики традиционно предметом изучения являются сами числа, как объекты, а не введенные в данном числовом множестве операции и отношения, определяющие его структуру. Вследствии такого подхода к изучению чисел, учащиеся подчас присваивают свойства операций определенным числам, не получая представлений о свойствах дискретности или плотности, о замкнутости множества относительно сложения, умножения, вычитания, деления и т.д. Ученики не воспринимают числовую содержательную линию школьного курса в целом; не понимают отношений между различными классами чисел, идею расширения понятия числа, не видят возможностей переноса свойств числовых систем на нечисловые объекты.

Натуральные числа являются основой для всех остальных числовых множеств: целых, рациональных, действительных, комплексных чисел. Каждое из этих множеств содержит предыдущее, т.е. представляет собой его расширение. В математике возможны различные пути осуществления расширения числовой системы. Первый путь - строят множество **B** как новое множество чисел, а затем отождествляют некоторое его подмножество с множеством **A**. Второй путь, который используется в школьной практике при расширении числовых множеств, заключается в следующем: дополняют известное числовое множество **A** (например, множество натуральных чисел и нуль) новыми, уже известными числами (в данном случае, отрицательными) и получают расширенное множество **B** (множество целых чисел). И для первого и для второго пути существенным является выполнение следующих условий:

1. Числовое множество **А** (известное) должно войти в расширенное множество **В**, как его часть и стать отдельным случаем чисел новой природы;

2. Все операции, которые выполняются в **А** определяются и в **В**, *причем, так, что применение этих операций к элементам из* **В** дает те же результаты, что и при выполнении этих операций по правилам, введенным в **А**. Свойства операций, имеющие место в **А** имеют место и в **В**;

3. В множестве В выполнима операция, которая была невыполнима в **А**;

4. Множество **В** не должно содержать подмножества, удовлетворяющего условиям 1-3, т.е. **В** должно быть минимальным [119 С.137]. В традиционном обучении мало внимания уделяется обоснованию выполнимости перечисленных требований.

Фундаментальность понятия числа в мире математики делает недопустимым наличие таких упущений в математической культуре будущих специалистов научно-технической направленности. Восполнить эти пробелы целесообразно при систематизации и обобщении знаний по числовой содержательной линии, когда учащимся уже известны различные числовые множества и накоплен достаточный опыт выполнения в них алгебраических операций.

При обобщении учебного материала по числовой содержательной линии ставилась цель обеспечить понимание учащимися:

- идеи расширения числовых множеств и, основанной на ней, логической схемы развития понятия числа;
- возможности переноса свойств числовых систем на другие объекты, в том числе и нечисловой природы, т.е., что вычислительный аппарат, разработанный для определенного числового множе-

ства обладает свойствами переноса при условии, что совокупность рассматриваемых объектов алгебраически устроена по типу известного числового множества;
- идеи о том, что при изучении различных объектов средствами математики существенным является не природа объектов, а отношения между ними.

Эти задачи реализуются в условиях дифференциации предлагаемого содержания по 3-м уровням преподавания (§ I.3 ). В качестве одной из наиболее целесообразных форм организации учебного процесса при изучении вопросов теории алгебраических структур была выбрана лекционно-практическая система занятий, позволяющая излагать материал крупными порциями, обеспечивающая приобщение учащихся к активной самостоятельной работе с учебной и научной литературой и повышение уровня их математической подготовки [172].

Непосредственному проведению занятий по ознакомлению учащихся с основными понятиями теории алгебраических структур и обобщению на их основе математических знаний школьников предшествует подготовительная работа учителя. Прежде всего, это подбор учебного материала, тщательное его планирование, выбор форм и методов организации обучения, адекватных уровню преподавания, учет психолого-педагогических особенностей классного коллектива, обеспечение учебного процесса дидактическими материалами, техническими средствами обучения, наглядностью. В результате этой работы учитель выделяет:
- вопросы данной темы, которые будут рассматриваться на лекции (ознакомительный уровень);
- материал, который следует вынести на семинары (идейно-обобщающий уровень);

- содержание, изучение которого будет доведено до формирования умений и навыков его применения (операционный уровень) на практических занятиях.

В процессе подготовки обзорной лекции учитель:

- определяет цели и задачи каждой конкретной лекции:

- отбирает содержание учебного материала в соответствии с целями и задачами, выделяет системы основных понятий и фактов. В зависимости от общего уровня подготовленности класса, учитель определяет целесообразную степень детализации и строгости обоснований, широту и глубину изложения предлагаемого материала, соотношение дедуктивного и индуктивного методов обучения;

- составляет план лекции, продумывая схемы возможных вариантов реализации этого плана (лекция в форме проблемного изложения с элементами эвристической беседы, лекция с дополняющей самостоятельной работой и т.д.);

- определяет дифференцированные требования к результатам обучения.

Так как со многими понятиями теории алгебраических структур учащиеся встречаются впервые и материал этих лекций имеет, в основном, информативный характер, то осознание новых понятий и соответствующих терминов (нейтральный элемент, кольцо и др.) происходит с опорой на конкретные примеры, известные школьникам. При этом акцентируется внимание на обобщающих функциях данных понятий. Воспроизведение учащимися строгих формулировок определений изучаемых понятий не является обязательным, достаточно, чтобы они имели представления об этих понятиях, умели их объяснять и приводить примеры. Важным этапом является подготовка методического обеспечения лекции техническими средствами и средствами наглядности.

Изучение материала на лекциях целесообразно организовывать таким образом, чтобы эта работа проходила при активном участии школьников. Активности восприятия излагаемого материала способствует разбор его вместе с учащимися, прогнозирование-предсказывание и самостоятельное формулирование выводов, приведение примеров. Эффективность работы учащихся на лекции во многом зависит от умения учителя четко организовать учебную деятельность школьников, активизировать их внимание и мотивационный фактор. С этой целью в ходе исследования экспериментировали различные методические приемы. Эксперимент показал, что целесообразно начинать лекцию с создания проблемной ситуации, разрешение которой происходит в ходе эвристической беседы с опорой на знания и умения учащихся. При этом учитель ставит проблемы, решает их, раскрывая все противоречия решения, всю его логику и доступную систему обоснований. Учащиеся следят за логикой изложения, контролируют ее, соучаствуют в процессе решения, отвечают на некоторые из поставленных вопросов учителя. Большое значение имеет логическая стройность и последовательность изложения, логические связи при переходе от одного вопроса лекции к следующему.

Активизации познавательной деятельности учащихся на лекции способствует повышение у них интереса к изучаемому материалу. Это достигается использованием сведений из истории возникновения теорий, из биографий ученых, разрабатывавших эти теории, иллюстрацией роли и значения изучаемых понятий в современной науке. Сообщения такого плана могут быть подготовлены и учащимися под руководством учителя. Сообщения не должны занимать много времени, при этом позитивное значение имеет эмоциональная окраска излагаемого материала. Более полное рассмотрение вопросов такого плана целесообразно вынести на семинарское занятие.

Лекционное изложение материала сопровождается примерами применения теоретического материала к выполнению элементарных упражнений. Систему упражнений мы рассматриваем как средство обучения, обеспечивающее достижение намеченных целей. Разрабатывая экспериментальную систему упражнений мы исходили из того, что она должна:

- удовлетворять общедидактическим требованиям (научность, системность, единство теории и практики, доступность, соответствие материала возрастным особенностям школьников);
- удовлетворять основным требованиям педагогического процесса (обеспечение активной работы на уроке и дома, вооружение учащихся навыками самоанализа и самоконтроля);
- обеспечивать условия для наиболее рационального формирования обратной связи.

Исходя из целей и задач нашего исследования, специфики предлагаемого материала, в экспериментальную систему упражнений включались задания обобщающего характера, позволяющие систематизировать широкий спектр математических знаний учащихся. Упражнения условно делились на два типа. Первый - подготовительные упражнения, имеющие своей целью пропедевтику введения основных понятий и идей изучаемой темы. Эти упражнения предлагались учащимся для самостоятельного выполнения при фронтальной работе или индивидуально (в виде карточек, программируемых тестов и т.д.) с последующим контролем и коррекцией. Упражнения второго типа предполагают применение точных математических определений рассматриваемых понятий и используются на этапе закрепления теоретических знаний, формирования умений и навыков. Образцы решения таких упражнений показывает учитель на лекции. Полезно приготовить решение на слайдах, транспарантах для графопроектора и продемонстрировать его учащимся. Это приучает школьников грамотно и полно оформлять решения заданий, корректно использовать математическую символику. При дальнейшем изучении темы упражнения второго типа предлагаются учащимся на различных занятиях (семинарах, практических занятиях) с различными дидактическими целями.

Более детальное изучение обобщающих понятий и систематизирующих идей, иллюстрация их соответствующих функций в современной науке и школьной математике возможны в рамках семинарских занятий. При организации учебного процесса в форме семинаров исходили из общих дидактических целей проведения этих занятий:

- систематизировать материал по теме (например, по числовой содержательной линии), изучение которой разделено достаточно большими временными промежутками; сделать теоретические обобщения;
- отработать основные методы, способы, приемы решения математических задач;
- показать связь с жизнью и практической деятельностью математических понятий, фактов, теорий [98].

Наиболее целесообразным типом семинарских занятий нами был признан комбинированный (смешанный) семинар (по классификации в [156] ). Доминирующем критерием в отборе теоретического материала, предлагаемого для изучения на семинаре явилась доступность содержания для самостоятельного изучения учащимися.

Тематику семинарских занятий, основные вопросы, рассматриваемые на семинаре, список рекомендованной литературы, набор соответствующих упражнений и задач необходимо сообщить учащимся заранее. По мере ознакомления учащихся с теоретическим материалом, вопросы, выносимые на семинар могут уточняться или изменяться. При этом важным моментом является учет познавательных интересов школьников. С учетом этих интересов учитель распределяет индивидуальные или групповые задания по подготовке сообщений по истории возникновения и развития математических понятий, показа связей математических теорий с другими школьными дисциплинами, применения рассматриваемых вопросов на практике и др. Целесообразно предложить учащимся самим подобрать или составить упражнения на применение понятий, рассматриваемых на семинаре, показать возможные способы их решения. При этом, во-первых, воспитывается самостоятельность (школьники оперируют изученными и изучаемыми объектами и фактами математики, т.е. оценивают свойства, различия, характерные особенности этих объектов); во-вторых, развивается творческая мыслительная активность учеников. В ходе эксперимента практиковали составление упражнений на задание бинарных отношений, алгебраических операций, множеств, обладающих определенной структурой (например, структурой группы, кольца) и др. Эта работа, как правило, увлекает учащихся. Они приучаются критически относиться к содержанию составленных заданий, учатся рецензировать и оценивать их выполнение. Итог такой работы - неформальное, сознательное усвоение математического материала.

Работу по закреплению и углублению теоретического материала, изложенного на лекции или семинаре, формирование практических умений и навыков целесообразно продолжить на практических занятиях по теме (или уроках-практикумах). Это направление реализуется посредством выполнения системы упражнений.

Активизации познавательной деятельности учащихся на практических занятиях способствуют, с одной стороны - целенаправленный отбор содержания учебного материала (главным образом, задачного), с другой - соответствующие методы и формы организации работы учащихся, предусматривающие создание условий, в которых каждый ученик поставлен перед необходимостью самостоятельно справляться с учебными заданиями. Эксперимент показал, что на практических занятиях оправдывают себя фронтальные, групповые формы работы, использование помощи учащихся-консультантов. Большое познавательное значение имеют задания на составление обобщающих схем и систематизирующих таблиц, которые предлагались на различных этапах урока.

Наряду с традиционными функциями контроля, организуемого на всех уровнях изучения темы, нами ставилась цель выяснить доступность предлагаемого содержания, его возможности в организации самостоятельной познавательной деятельности учащихся. Текущий контроль реализовывался при выполнении самостоятельных работ, кратковременных контрольных работ с последующей проверкой и обсуждением, для чего использовались различные технические средства обучения.

Итоговый контроль по теме целесообразно организовать в форме зачета. Учащимся заранее сообщается какой теоретический материал и какие типы упражнений будут контролироваться на зачете. Ознакомительный характер данного материала и специфика дидактических целей его изучения должны быть адекватно отражены в содержании контрольных вопросов, предъявляемых на зачет. При экспериментальном обучении мы не стремились, чтобы учащиеся запоминали строгие определения математических понятий группы, кольца и т.д. Поэтому, вопросы типа: "Дайте определение понятия группы", "Что называется кольцом?" на зачет не выносились. Целесообразнее, на наш взгляд, формулировки такого плана: "Объясните, почему множество всех четных чисел образует группу относительно операции сложения", "Какие новые понятия, термины, утверждения вы узнали при изучении данного материала, как вы их понимаете?" и др. Индивидуализации процесса контроля способствуют листки с зачетными заданиями, заблаговременно разработанные для проведения зачета (см. приложение). Система упражнений, предлагаемых в этих листках, составляется с учетом познавательных возможностей каждого ученика.

При проведении зачета функции контроля и оценивания знаний можно частично переложить на учащихся. С этой целью класс делится на несколько групп и каждая группа сдает зачет ученику-консультанту (из числа тех школьников, которые активно работали на всех уроках, показали глубокое понимание материала, получили соответствующий инструктаж учителя и сдали зачет). Такая организация процесса контроля соотносится с выводами психологов о том, что формирование у учеников действия контроля и оценки результатов своей учебной деятельности происходит успешнее в условиях кооперации между ровесниками, чем в процессе общения со взрослыми [99]. При этом создаются условия для постоянного соотнесения собственной оценки своей деятельности с оценками товарищей по учебе. Самооценка становится адекватной результатам обучения, что способствует развитию уровня регуляции поведения школьников. В этом реализуются воспитательные функции контроля.

Логико-дедуктивный анализ теоретического материала теории алгебраических структур, учет общедидактических принципов научности и доступности обучения, а также возрастных психолого-педагогических особенностей школьников позволили выделить объем содержания данной темы, предлагаемый учащимся (§I.I).

Рассмотрим методические подходы к организации работы по ознакомлению учащихся профильных классов с обобщающими понятиями современной математики.

Занятие, на котором учащиеся знакомятся с понятиями бинарного отношения и алгебраической операции, рассматривают их свойства целесообразно провести в форме обзорной лекции. По характеру изложения и деятельности учащихся она может быть лекцией-беседой с дополняющей самостоятельной работой. Цель данной лекции - ознакомить учащихся с понятиями бинарного отношения и алгебраической операции, их свойствами, показать обобщающее значение данных понятий в современной математической науке и в школьной математике.

При составлении плана лекции следует учитывать, что математическое определение бинарного отношения исходит из понятия декартового произведения двух множеств, которое, в свою очередь, основывается на представлениях о множестве упорядоченных пар. Приведем один из возможных вариантов плана данной лекции.

1. Понятие упорядоченной пары. Примеры.
2. Прямое произведение двух множеств. Декартов квадрат множества.
3. Определение бинарного отношения, свойства бинарных отношений.
4. Виды бинарных отношений в школьном курсе математики.
5. Алгебраическая операция, свойства алгебраических операций.

В целях активизации познавательной деятельности учащихся можно не сообщать план лекции вначале, а дать задание самостоятельно составить план прослушанной лекции.

С понятием упорядоченной пары школьники знакомятся в

VI классе при изучении темы "Координатная плоскость". Это понятие активно используется всякий раз, когда учащиеся обращаются к координатному методу: при изучении темы "Функция. Графики функций" (VIIкл.), различных видов функций (VII-IXкл.), при решении систем двух уравнений с двумя неизвестными (VII-XI кл). Термин "упорядоченная пара" вводится без дополнительных комментариев. Один из сценариев обобщения представлений об упорядоченных парах, может быть, например, таким. Учитель фиксирует внимание учащихся на том, что два элемента, расположенные в определенном порядке, в математике принято называть парой. Для обозначения пары применяют круглые скобки. Например, (a,b); (c,d). Элементы пары иногда называют компонентами или координатами. Элемент, записанный первым называют первой компонентой, элемент, стоящий на втором месте - второй компонентой. Как правило, в математике важен порядок, в котором записаны компоненты, Например, если представить все двузначные числа в виде пар, первая компонента которых определяет количество десятков в этом числе, а вторая - количество единиц, то пара (2,5) соответствует числу 25, а пара (5,2) - числу 52. Поэтому в математике говорят об **упорядоченных** парах, т.е. парах, для которых важен порядок записи их компонент. Дальше вводится понятие равенства пар: упорядоченные пары (a,b) и (c,d) равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие компоненты. Иллюстрацией использования понятия упорядоченной пары в повседневной жизни являются примеры, приводимые учащимися: с помощью географических координат (географическая широта и долгота) находят на карте расположения необходимых объектов; упорядоченная пара (номер ряда, номер места) позволяет определять место в концертном зале и т.д. Осознание широты применения понятия упорядоченной пары в математике происходит при самостоятельном выполнении заданий такого типа.

Примеры.

1. Запишите все двузначные числа, у которых цифра десятков принадлежит множеству {1;3;4;5}, а цифра единиц - множеству {3;8;9}.

2. Запишите множество дробей, если числитель каждой дроби принадлежит множеству A={3;4;5}, а знаменатель - множеству B={2;4;7;9}.

3. Выбирая попарно числа из множества {3;5;7;9;17;19}, запишите все возможные дроби. Выпишите:

а) правильные дроби; б) неправильные дроби.

4. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющие условию:

а) $x \cdot y = 12$; б) $x + y = 8$; в) $x - y = 2$.

Ознакомить учащихся с понятием прямого (декартового) произведения двух множеств можно на примере наглядно иллюстрирующей это понятие и хорошо известной учащимся шахматной доски - каждая клетка шахматной доски обозначается парой из буквы и цифры. Так, множеству всех клеток шахматной доски соответствует множество пар, которые можно рассматривать как прямое произведение двух множеств, первое из которых состоит из букв {a,b,c,d,e,f,g,h}, а второе из цифр {1;2;3;4;5;6;7;8}. Учитель сообщает учащимся, что определение декартового (прямого) произведения множеств **A** и **B** можно записать так: $A \times B = \{ (x;y) / x \in A, y \in B\}$, а если множества **A** и **B** совпадают, то говорят о декартовом квадрате множества и обозначают $A^2$. Целесообразно рассмотреть примеры упражнений, которые ориентированы на использование определения прямого произведения двух множеств и подготавливают учащихся к введению понятия бинарного отношения как подмножества декартового произведения множеств.

Примеры.

1. Пусть $A=\{3;7;8\}$, $B=\{4;5\}$. Найдите множество $A\times B$. Элементы какого множества стоят в парах на первом месте? Запишите множество $B\times A$. Справедливо ли равенство: $A\times B = B\times A$?

2. Найдите прямое произведение множеств:

а) A и B; б) C и B; в) C и A; г) A и C,

если $A=\{m;n\}$, $B=\{p;k;l\}$, $C=\{2;4\}$.

3. Запишите множество всех пар $A^2$ чисел, если:

а) $A=\{4;5;7\}$;

б) $A=\{0;1;2;4\}$.

4. Пусть $A=\{1;3;7\}$ и $B=\{1;2;6;9;13\}$. Составить множество $A\times B$. Изобразите множество точками плоскости. Выделите из множества те пары, которые удовлетворяют следующим условиям:

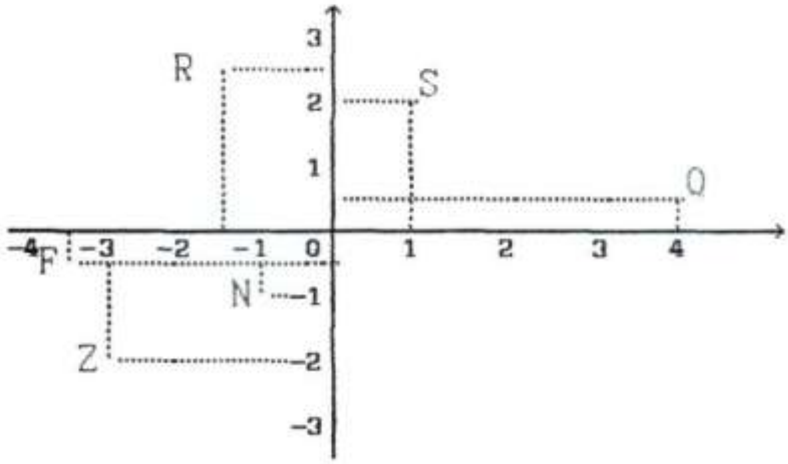
а) $x = y$; б) $x > y$;

в) $x \le y$; г) x делит y.

5. Заданы пары чисел $(1;1)$; $(0;3)$; $(-3;5)$; $(-4;-1)$; $(0;\frac{1}{3})$; $(-2;\frac{3}{2})$; $(4;0)$; $(6;-2)$; $(-\frac{1}{3};-\frac{7}{4})$. Выпишите те пары, которые принадлежат: а) $N^2$; б) $Z^2$; в) $Q^2$.

6. Определите будет ли множество $M=\{(8;4), (8;3), (8;7), (3;4), (3;7), (3;3), (5;4), (5;7), (9;4), (9;7), (9;3)\}$ - произведением множеств: $A=\{8;3;5;9\}$ и $B=\{4;7;3\}$?

7. Найдите произведение множеств A и B, если A - множество, состоящее из абсцисс точек Z, N, S, O, F, R, а B - множество, в которое входят ординаты этих точек.




8. Из множества пар (4;4), (4;6), (3;9), (-2;11), (6;6), (-7;9), (8;11), (11;9), (13;11) выпишите пары, которые удовлетворяют условиям:

а) $x = y$; б) $x < y$; в) $x \le y$; г) $x$ на 2 больше чем $y$.

Строгое определение бинарного отношения следует вводить после обобщения и систематизации накопленных учащимися сведений о различных бинарных отношениях. В процессе беседы выясняют, что в математике между элементами числовых множеств устанавливаются и изучаются известные школьникам отношения "больше", "меньше", "больше или равно", "меньше на а", "является делителем" и др. Чтобы подчеркнуть общность этого понятия целесообразно привести примеры бинарных отношений, установленных между элементами множеств нематематической природы: "быть выше", заданном на множестве учащихся класса, "быть жителем данного города", заданном для множества людей и множества городов и т.д.

Учитель сообщает, что в общем случае тот факт, что элемент x находится в некотором отношении с элементом y обозначают x R y. В математике для определенных отношений вместо этой буквы используют специальный знак (символ):

"$x > y$", "$x$ $y$", "$x \le y$" и др.

Наглядной иллюстрацией бинарных отношений, рассматриваемых в математике, являются графы. Использование графов упрощает изучение ситуации, допуская абстрактные рассуждения, остающиеся, тем не менее, близкими к действительности и способствующие формированию математического понятия бинарного отношения. Понятие графа можно ввести одновременно с понятием бинарного отношения как его геометрический образ. Учащиеся выясняют, что отношения на ммножестве некоторых его элементов задаются различными способами: словесным описанием, таблицами, перечислением множества пар, стрелками. Пусть, например, на множестве чисел {5;7;8;13} задано отношение "меньше". Если изобразить произвольными точками плоскости числа - элементы данного множества и пары точек, изображающие числа, для которых выполняется условие " $x < y$ " соединить непрерывными линиями со стрелками, направленными от первой компоненты ко второй, то полученное схематическое изображение данного отношения (рис.1) в математике называют графом.

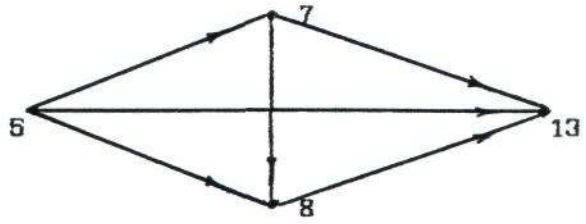



Рис. 1

В процессе экспериментального обучения, на первом этапе, мы не стремились дать строгое математическое определение графа. Важнее понимание учащимися того, что стрелками соединены только точки, которые изображают элементы, вступающие в заданное отношение. При этом стрелки не представляют собой пары, точки рисунка не являются объектами, а графы - отношениями.

Но, примененная к отношениям, терминология графов и стрелок делает процесс задания отношения более наглядным, а язык более естественным, не уменьшая ни ясности, ни строгости рассуждения. Использование графов удачно сочетает большую графическую наглядность с математической содержательностью. Графовые схемы являются довольно эффективными математическими моделями рассматриваемых отношений. Точки, стрелки, овалы (в случае двудольных графов) - элементы этих моделей просты для восприятия учащихся, что облегчает процесс формирования абстрактных математических понятий. Многократное применение рисунков ведет к развитию навыка сознательного их использования в новых ситуациях, в частности, при решении некоторых текстовых задач.

Различные способы задания бинарных отношений учитель может продемонстрировать на таблице или с помощью графопроектора (таблица 3 в приложении).

В процессе анализа данных примеров, решения упражнений на задание бинарных отношений на различных множествах, учащиеся приходят к выводу, что оптимальным способом иллюстрации отношения, заданного на бесконечном множестве, является графический способ. Отношения, заданные на конечных множествах, целесообразно представлять граф-схемами. Осознанию обобщающего характера понятия бинарного отношения способствует демонстрация взаимосвязи данного понятия с одним из ведущих математических понятий - понятием функции.

Примеры.

1. Изобразите графически множества:

а) $X \times Y = \{ (x;y) / (x;y) \in N^2$ и $x = y \}$;

б) $X \times Y = \{ (x;y) / (x;y) \in Z^2$ и $y = x+1 \}$;

в) $X \times Y = \{ (x;y) / (x;y) \in N^2$ и $x < y \}$;

г) $X \times Y = \{ (x;y) / (x;y) \in R^2$ и $x \geq y \}$;

д) $X \times Y = \{ (x;y) / (x;y) \in R^2$ и $0 \leq x \leq 4$; $1 < y \leq 2 \}$.

2. Отношение "меньше" задано на множестве $M = \{-5;-1;0;3;4\}$. Запишите множество всех упорядоченных пар этого отношения и постройте граф.

3. На множестве $A = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ определены отношения: а) больше на 4; б) меньше на 3; в) меньше в 2 раза; г) больше в 3 раза; д) составляет $\frac{1}{3}$ часть. Представьте отношения с помощью упорядоченных пар, графически, с помощью графа.

В процессе выполнения заданий такого типа учитель подводит учащихся к пониманию того, что несхожие на первый взгляд отношения имеют много общих черт. Таким образом формулируют свойства отношений и выделяют отношения, которые обладают определенным комплексом свойств - отношения эквивалентности и порядка.

Опираясь на жизненный опыт учащихся, на основании известного им из математики и других наук (ботаники, биологии) понятия классификации формируется представление об отношении эквивалентности, начиная со свойства этих отношений разбивать множество на классы эквивалентности. Обобщение достаточного количества примеров дает возможность ввести важное для логической культуры понятие классификации множества как разбиения этого множества на классы, выяснить суть понятия отношения эквивалентности.

В ходе эксперимента информация о свойствах отношений и отдельных видах отношений предлагалась учащимся в форме эвристической беседы. При этом подчеркивалось, что отношения эквивалентности имеют большое значение в обработке и систематизации данных, полученных в процессе познания окружающей действительности. Умение выделить такие отношения в каждой области знаний позволяет исследователю при изучении свойств определенного множества объектов выполнить разбиение этого множества на классы эквивалентности и ограничиться изучением одного элемента - представителя данного класса.

Прикладное значение графовых моделей, роль теории графов и теории отношений целесообразно раскрыть на семинарском занятии. Приведем примеры вопросов, по которым учащиеся готовят сообщения, рефераты, используя рекомендованную литературу.

1. Основные понятия теории графов.
2. Иллюстрация свойств бинарных отношений с помощью графов.
3. Отношения порядка и эквивалентности в школьном курсе математики.
4. Использование графов для решения экономических задач.
5. Применение графов в программировании.

Следует отметить, что предложенный перечень не претендует на полноту, не является исчерпывающим. Окончательно вопросы, выносимые на семинар, определяет учитель, учитывая при этом учебные возможности и познавательные интересы учащихся класса. Подготовка сообщений на семинары активизирует познавательную деятельность школьников, развивает их математическую эрудицию, формирует умения анализировать и обобщать знания. В процессе выступления и обсуждения выступлений учащиеся учатся последовательно, четко, аргументированно мыслить, развивают коммуникативные умения. Важным моментом в структуре данного семинара является вступительное слово учителя. Основная задача на этом этапе урока - заинтересовать учащихся содержанием вынесенных на обсуждение вопросов. Элемент творчества в учебный процесс вносит решение задач. Их может предлагать учитель или же они могут быть подготовлены (составлены) учащимися самостоятельно (это могут быть примеры транспортных задач, задачи, связанные с электрическими сетями и др.). Подобные задачи можно найти в [22], [130].

Введение понятия алгебраической операции также предполагает работу подготовительного плана. Наблюдения в ходе констатирующего эксперимента позволили выявить, что :

1) в школьном курсе математики не применяется термин "операция" и для учащихся понятие операции ассоциируется с понятием арифметического действия;

2) при изучении алгебраических операций в различных числовых множествах внимание учащихся не акцентируется на свойствах, присущих данной операции, в результате чего эти свойства приписываются рассматриваемым числам;

3) недостаточное внимание уделяется сопоставлению операций, установлению взаимосвязи между ними.

В связи с этим при организации работы по ознакомлению учащихся с понятием алгебраической операции и обобщению на его основе изученных алгебраических операций в различных числовых множествах следует:

1. Выделять идею алгебраической операции как соответствия двум элементам данного множества единственного третьего элемента этого же множества (требование замкнутости множества относительно *операции и единственности результата*).

2. Акцентировать внимание учащихся на основных свойствах алгебраических операций. При этом: выделять основные свойства (законы действий) и неосновные (их следствия); проводить доступные для учащихся обоснования; выяснять значение этих свойств в обосновании правил и упрощении вычислений.

3. Нуль и единицу рассматривать так, чтобы они воспринимались учащимися как важные свойства соответствующих операций, подчеркивать такие свойства этих чисел, как существование и единственность. Таким же образом рассматривать взаимопротивоположные и взаимообратные элементы.

Введению понятия алгебраической операции следует предпослать выполнение специально подобранной системы упражнений (таблица 4 в приложении), решение которых не выходит за рамки содержания традиционного школьного курса математики. Строгое определение алгебраической операции вводится как результат систематизации и обобщения знаний учащихся об операциях сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень на множествах натуральных, целых, рациональных чисел.

В ходе беседы учащиеся делают выводы, что сложение и умножение на множестве натуральных чисел всегда выполняются и, притом, однозначно, т.е. любым парам чисел $a$ и $в$ из множества $N$ соответствует единственное натуральное число $c$ такое, что $a+в = c$, а также натуральное $d$: $a \cdot в = d$. С введением отрицательных чисел, на множестве целых чисел $Z$ становится выполнимой операция вычитания: для любых целых чисел $a$ и $в$ всегда найдется целое число $c$ такое, что выполняется равенство $a-в = c$. Введение дробных чисел позволило всегда выполнять деление (кроме деления на нуль) в области рациональных чисел. После рассмотрения различных действий над числами делается обобщение, что если при выполнении действия всякий раз некоторой паре элементов из данного множества ставится в соответствие вполне определенный элемент этого же множества, то говорят об алгебраической операции. Важно при введении новых терминов и оборотов речи раскрывать их смысл и значение для учащихся.

Это касается не только сугубо математических терминов, толкование которых входит в задачи объяснения, но и общеречевых оборотов, которые в математике приобретают конкретный смысл. Так, следует объяснить, что словосочетание "вполне определенный" включает два условия: обязательное наличие результата операции и его единственность. После этого можно ознакомить учащихся с определением алгебраической операции как отображения декартового квадрата множества М в множество М ($M^2 \rightarrow M$). Если для элементов множества М определена алгебраическая операция, то говорят, что множество М замкнуто относительно данной алгебраической операции.

Эксперимент показал, что формирование понятий коммутативности, ассоциативности операций, нейтрального и симметричного элементов не вызывают трудностей. Обобщая умения выполнять операции сложения и умножения в различных числовых множествах следует выделить случаи, когда один из компонентов 0 или 1, и обратить внимание на то, что нуль при сложении и единица при умножении играют нейтральную роль, т.е. не изменяют соответственно слагаемого или множителя:

$a + 0 = 0 + a = a$,

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Учащиеся убеждаются, что это свойство 0 и 1 сохраняется в любом числовом множестве. Учитель подчеркивает, что сам термин "нейтральный элемент множества относительно операции" весьма наглядно отражает обозначаемое свойство: результатом выполнения алгебраической операции над произвольным элементом множества и нейтральным будет служить данный элемент.

Первые образцы решения упражнений учитель демонстрирует на лекции, обращая внимание на новые символические обозначения

( $*$, T - символы, которые используются для обозначения алгебраической операции в общем виде). Дальнейшая отработка умений и навыков определения свойств алгебраических операций происходит на практическом занятии.

С целью систематизации и обобщения известных алгебраических операций, изучаемых в школьном курсе математики, целесообразно предложить учащимся в качестве домашнего задания заполнить таблицу соответствующего содержания (таблица 1 в приложении). При заполнении таблицы учащиеся убеждаются в произвольности выбора обозначений различных операций, а также в том, что операции могут быть различными по содержанию. Существенным для всех операций является соответствие двум элементам множества третьего. Выполнение данного задания предотвращает формальное усвоение учащимися понятия алгебраической операции и ее свойств.

В математической науке часто приходится встречаться с положением, когда алгебраические операции производятся не над числами, а над объектами иной, нечисловой, природы, и сами операции отличны от привычных учащимся действий сложения, вычитания, умножения и деления. С целью осознания обобщающего характера понятия алгебраической операции в математике учащимся предлагались упражнения, в которых алгебраические операции отличались от известных им из школьного курса математики.

Примеры.

1. На множестве $M = \{0;1\}$ операции $*$ и $o$ выполняются таким образом:

а) $x * y = x + y - x \times y$,

б) $x \, o \, y = x \times y$, ( "+", "-", "x" - обычные арифметические действия). Докажите, что множество замкнуто относительно этих операций.

2. На множестве $A = \{0;1;2;3;4;5\}$ определены следующие действия:

а) действие $*$ заключается в том, что двум элементам этого множества ставится в соответствие остаток от деления суммы этих элементов на 3;

б) действие $\circ$ заключается в том, что двум элементам этого множества ставится в соответствие остаток от деления произведения этих элементов на 3.

Составьте таблицы для выполнения этих действий и определите, будут ли они алгебраическими операциями на заданном множестве?

3. Операция $*$ выражается через знакомые операции над действительными числами. Определите для каких случаев выполняются свойства коммутативности и ассоциативности.

а) $a * b = \frac{a + b}{2}$;   г) $a * b = 2a + 2b$;

б) $a * b = a\cdot(a - b)$;   д) $a * b = a$;

в) $a * b = (a + b)^3$;   е) $a * b = \frac{ab}{a + b}$, $(a \neq -b)$.

4. Какие из приведенных операций будут коммутативными в произвольном числовом множестве:

а) $a * b = |a + b|$;   в) $a * b = a + 2b$;

б) $a * b = |a - b|$;   г) $a * b = 2b$?

Дидактическая цель выполнения упражнений творческого характера заключается в том, чтобы сформировать у учащихся умения ориентироваться в различных ситуациях, четко, правильно, быстро решать проблемы на основе творческого применения приобретенных знаний и навыков в нестандартных условиях. В ходе экспериментальной работы, на практических занятиях практиковали решение упражнений на задание алгебраических операций с заведомо известными свойствами. В зависимости от подготовленности класса, такие задания могут быть предложены учителем, или составлены учащимися.

Например.

- Задайте операцию на некотором множестве, которая бы являлась коммутативной, но не ассоциативной.
- Выберите множество и задайте на нем алгебраическую операцию, которая была бы ассоциативной, но не коммутативной.

Сильным учащимся в качестве самостоятельной работы на уроке или задания на дом уместно предложить ответить и обосновать ответы на вопросы такого плана:

-Может ли операция, определяемая на множестве, иметь два нейтральных элемента? больше двух?

-Может ли какой-нибудь элемент множества М с определенной на нем алгебраической операцией иметь два или больше симметричных элементов?

При обучении математике обычно выделяют три этапа: первый - математическая организация эмпирического материала, заключающаяся в накоплении фактов с помощью наблюдений, опыта, индукции, аналогии, обобщения; второй - теоретическая организация материала, в процессе которого из накопленного материала выделяют первоначальные понятия, формулируют определения других понятий, строят теории; третий - этап применения математической теории [167]. При этом эмпирический материал подбирается таким образом, чтобы способствовать обобщению, выявлению существенных свойств, составляющих содержание формируемого понятия. Так формировалось понятие алгебраической операции. Рассматривая известные учащимся действия над различными числами (I этап), выделялось то общее, что присуще всем этим действиям, вводилось определение понятия алгебраической операции (II этап). На III этапе изучались свойства операций на различных по природе объектах. Это, в свою очередь, явилось этапом накопления фактов для введения понятий алгебраических структур: группы, кольца, поля. После рассмотрения достаточного количества примеров операций, обладающих существенными для основных алгебраических структур наборами свойств, появляется возможность выделения этих структур и фиксирования их в определениях. Изучение свойств этих структур позволяет применять их к систематизации знаний по некоторым содержательным линиям школьного курса, использовать многие "вычислительные" правила для произвольных объектов, имеющих структуру группы, кольца или поля.

В процессе эксперимента установлено, что работу по ознакомлению с основными понятиями теории алгебраических структур нужно строить при самом активном участии школьников. Они вспоминают и повторяют уже известное, делают определенные выводы, переходя при этом в интеллектуальном плане от конкретных образов к обобщенным, абстрактным. Всю работу на лекции направляет учитель.

Например, учащиеся под руководством учителя рассматривают свойства операций, заданных на определенных числовых множествах: сложение на множестве целых чисел, сложение на множестве всех четных чисел, умножение на множестве рациональных чисел, умножение на множестве {-1;1}. В процессе исследования выясняют, что все эти операции, заданные на множествах, обладают одним и тем же набором свойств: операции коммутативны, ассоциативны, в каждом множестве существует нейтральный элемент относительно операции и для каждого элемента во множестве существует ему симметричный. Учитель отмечает, что числа разных родов мы называем числами из-за того, что все их можно складывать и умножать, хотя сами операции сложения и умножения для разных типов чисел различны. Точнее, определения этих операций действительно различны (например, сложение целых чисел и сложение дробей), а вот свойства у них совершенно одинаковы. Так, для чисел любой природы справедливо:

| | |
|---|---|
| $a + b = b + a$<br>коммутативность<br>(переместительный закон)<br>сложения | $a \times b = b \times a$<br>коммутативность<br>(переместительный закон)<br>умножения |
| $(a + b) + c = a + (b + c)$<br>ассоциативность<br>(сочетательность)<br>сложения | $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$<br>ассоциативность<br>(сочетательность)<br>умножения |

Существуют такие особые числа 0 и 1, что для любого числа $a$ выполняется: $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$. Поэтому в современной алгебре изучают некоторые (причем разные) системы объектов, для которых определены операции, обладающие перечисленными выше свойствами. Свойства ассоциативности, существования нейтрального и симметричного элементов алгебраической операции на некотором множестве называют групповыми свойствами или аксиомами, говорят также, что такое множество имеет структуру группы.

Далее можно ввести определение понятия группы и предложить учащимся исследовать, образуют ли группу числовые множества натуральных, целых, рациональных чисел относительно сложения, умножения, вычитания и деления. При этом следует выяснить, что прежде чем проверять справедливость аксиом группы, необходимо убедиться, что рассматриваемое арифметическое действие является алгебраической операцией, т.е. в данном случае проверить замкнутость множеств относительно этих действий.

В процессе исследования, на конкретных примерах учителем объясняется значение терминов "аддитивная группа", "мультипликативная группа", "абелева группа", "порядок группы", "конечная группа", "бесконечная группа".

Понятия и идеи теории алгебраических структур наглядно иллюстрируют дедуктивный характер математики и, в частности, алгебры.

Доказательство - один из важных методов математики. Доказательства, помогая усвоить логическую структуру математического материала, установить связь между отдельными его частями, существенно облегчают его запоминание и усвоение. Важно, что при проведении доказательств демонстрируется применение математических идей, понятий, аксиом, математического аппарата в действии, т.е. происходит обучение учащихся самому важному: умению проводить решения задач математическими методами [114].

Углубленное изучение математики призвано осуществить более полное овладение основами математической науки, а значит и умениями проводить доказательства. Исходя из этого в ходе эксперимента некоторые свойства операций в числовых множествах, известные учащимся из традиционного курса математики, рассматривались под новым углом зрения, на более высоком уровне: они логически обосновывались и доказывались на основании структурных аксиом. Доказательства этих свойств приведены в § 1.1. С целью обеспечения активности всех учащихся в овладении навыками доказательства теорем, целесообразно варьировать степень обобщенности рассматриваемого свойства: менее подготовленным учащимся предлагать доказывать теорему для конкретного множества в аддитивной либо мультипликативной формулировке, более сильным - доказывать теоремы в общем виде. При доказательстве теорем особое внимание следует обращать на развитие правильной математической речи учащихся, овладение терминологическим аппаратом. Отметим, что уровень абстрактности теорем теории алгебраических структур достаточно высок, что вызывает у учащихся определенные затруднения при восприятии. Преодоление этих трудностей во многом зависит от мастерства учителя, от его умений обеспечить индивидуальный подход к учащимся, дифференцировать требования. Целесообразность ознакомления учащихся с теоремами теории алгебраических структур обоснована тем, что при этом иллюстрируется дедуктивный характер современной алгебры, показывается действие аксиоматического метода при построении алгебраических теорий, и на этой основе образуются условия для идейного сближения геометрических и алгебраических знаний учащихся.

Отметив, что часто приходится рассматривать множества, на которых выполняются две операции и обобщая свойства операций сложения и умножения на множествах целых чисел, рациональных чисел, целых чисел кратных 3, можно ввести понятие кольца. Учитель обращает внимание учащихся на то, что в любом кольце содержится коммутативная группа относительно сложения, а значит все свойства, справедливые для группы, будут выполняться и в кольце. Так, в любом числовом кольце 0 единственен, всякий элемент кольца обладает единственным противоположным, всегда разрешимо уравнение вида $a + x = b$, т.е. для любых элементов кольца выполняется операция вычитания. При этом следует так организовать работу, чтобы учащиеся самостоятельно обобщили эти свойства для различных числовых множеств.

При изучении теорем в хорошо подготовленных классах целесообразно применить проблемно-поисковый метод, предложив некоторые теоремы в виде задач. Это способствует повышению познавательной активности школьников, установлению логических связей в их знаниях. В качестве задания на дом можно предложить учащимся на основании аксиом кольца доказать справедливость формул сокращенного умножения, обосновывая каждый шаг доказательства.

Обобщая свойства числовых множеств, обладающих структурой кольца, отмечают, что в кольцах всегда выполняются операции сложения, умножения и вычитания. Поставив задачу исследовать, в каких числовых множествах для каждого элемента, кроме нуля, существует обратный элемент, или в каких множествах выполнима операция деления, можно подвести учащихся к понятию поля. Введение понятия поля, исследование поля рациональных чисел, рассмотрение свойств полей, вытекающих из аксиомы существования обратного элемента, позволяет обосновать правила выполнения действий над дробными числами. При этом учащиеся осознают, что известные им правила действий с дробями являются логически обоснованными следствиями основных свойств алгебраических операций.

В процессе обобщения числовой линии с использованием понятий структур последовательно раскрываются условия, выполнение которых необходимо при расширении числовых множеств. Учащимся становится понятна логическая схема развития понятия числа, знания о множествах натуральных, целых, рациональных, действительных чисел приводятся в систему, обобщаются и углубляются.

Структурный анализ различных множеств учащиеся проводят на практическом занятии при выполнении специальной системы упражнений.

После того, как с позиции групповых свойств обобщен и систематизирован числовой материал школьного курса математики, полезно показать, что не только числовые множества с "привычными" операциями сложения и умножения имеют структуру группы. В том, что группу могут образовывать и элементы нечисловой природы, учащиеся убеждаются при рассмотрении таких заданий.

1. Пусть задан квадрат ABCD. Рассмотрим повороты этого квадрата около центра O, которые переводят квадрат в себя. Повороты, отличающиеся на угол, кратный $360^{\circ}$, считаем совпадающими. Таких поворотов будет 4. Обозначим их соответственно $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$. Последовательное выполнение поворотов назовем умножением. Составьте таблицу умножения поворотов на множестве: $A = \{ a_0, a_1, a_2, a_3 \}$. Будет ли это действие алгебраической операцией на множестве A? Образует ли группу множество поворотов квадрата ABCD?

2. Пусть заданы функции: $f_1(x) = x$; $f_2(x) = -x$; $f_3(x) = \frac{1}{x}$; $f_4(x) = -\frac{1}{x}$. Рассмотрим операцию суперпозиции функций, заключающуюся в том, что функция берется от функции. Взять функцию от функции - значит в аналитическое выражение первой функции подставить вместо x аналитическое выражение второй функции. Определите, будет ли данное множество с заданной операцией образовывать группу?

3. Пусть даны 4 квадрата, вырезанные из прозрачной бумаги:

Б = □ Ч = ■ П = □ Л = □

Обозначим их множество $K = \{Б, Ч, П, Л\}$. Операция $*$ заключается в наложении квадратов друг на друга, перенося их параллельно. Будет ли множество K с операцией $*$ образовывать группу?

При выполнении этих заданий обращаем внимание на то, что групповыми свойствами могут обладать как конечные, так и бесконечные множества, а также, что обязательное выполнение всех четырех свойств задает на определенном множестве структуру группы. В частности, множество К (задание 3) не обладает групповой структурой, т.к. не выполняется требование существования симметричных элементов для каждого элемента из множества.

В экспериментальную систему упражнений мы включали задания на формирование умений определять, образует ли множество с введенными операциями кольцо или поле. Приведем примеры таких упражнений.

1. Определить, образует ли кольцо данное множество с заданными операциями сложения и умножения:

а) множество целых чисел, вида $5k$, где $k$ - любое натуральное число;

б) множество чисел вида $a + b\sqrt{7}$, где $a$ и $b$ - произвольные целые числа;

в) множество целых четных чисел;

г) множество всех дробей со знаменателем 7.

2. Определить, образуют ли поле:

а) множество $Q$; б) множество $R$; в) множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a$ и $b$ - произвольные рациональные числа.

Повышению познавательного интереса учащихся способствует ознакомление их с историей возникновения теории алгебраических структур (в частности, теории группы), ее широким применением во многих областях современной науки. Рассмотрение вопросов такого плана может стать предметом подготовки рефератов.

Учитывая тот факт, что содержательное обобщение состоит, по преимуществу, в сведении многообразных явлений к их единой основе ознакомление учащихся с основными понятиями теории алгебраических структур создает условие для перехода с уровня эмпирического на уровень теоретического мышления. Важным моментом предлагаемой нами методики является развитие представлений учащихся о сущности аксиоматического метода. В процессе такой работы аксиоматизация не противопоставляется уже усвоенным действиям и знаниям как что-то принципиально новое, а максимально опирается на интуицию, знания, умения и навыки учащихся. При этом аксиоматический метод рассматривается в действии, т.е. не давая пояснений общей концепции аксиом, при обобщении знаний учащихся по числовой линии школьного курса с позиций теории алгебраических структур действуем, по сути, аксиоматически.

## §2.2. Арифметика вычетов и арифметика классов вычетов как модели аксиоматического построения математических теорий

Целесообразность рассмотрения этих арифметик в рамках проблемы систематизации и обобщения знаний учащихся по курсу алгебры обусловлена тем, что учащиеся встречаются с примерами действий, которые отличаются от обычных арифметических действий сложения, умножения, вычитания и деления, а также выполняются на множествах, элементы которых по своей природе отличаются от известных им числовых множеств. Тем самым опыт математической деятельности школьников дополняется важным для проведения обобщений материалом.

При рассмотрении этих арифметик возникает возможность организовать деятельность учащихся по построению моделей математических теорий или их фрагментов. Построение таких моделей позволяет логически завершить представления учащихся об аксиоматическом построении математических теорий не только на геометрическом материале и с использованием значительно меньшего количества аксиом. Рассматривая арифметики вычетов и арифметики классов вычетов учащиеся знакомятся с моделями математических теорий, для элементов которых выполняются законы обычных арифметики и алгебры. Это создает условия для переноса знаний, умений, приемов умственной деятельности учащихся. Они получают возможность самостоятельно применить известные приемы к новому содержанию, а также формировать на их основе новые приемы и применять их к решению задач. Так, например, школьники узнают, что с помощью этих арифметик можно легко выполнять вычисления, которые в обычной арифметике были бы очень громоздкими или выполнялись бы только с помощью вычислительных приборов. При ознакомлении с этими арифметиками создаются условия для самостоятельного математического творчества - учащиеся получают возможность построить модель и применить эту модель на практике, что способствует углублению их интересов, повышению познавательной активности, развитию математической интуиции, а также овладению навыками математического моделирования.

Данный материал представляет особый интерес в связи с возможностью организации в профильных школах цикла спецкурсов цель которых расширить и углубить математические знания школьников. Так, в областной педагогической гимназии (г.Кривой Рог), он был предложен учащимся как часть спецкурса "Элементы математического моделирования". Рассматривались такие вопросы:

1. Арифметика вычетов.

2. Действия в арифметике вычетов, кольцо вычетов.

3. Понятие классов вычетов. Сложение, вычитание, умножение классов вычетов по данному модулю.

4. Применение арифметик вычетов и арифметик классов вычетов для решения задач.

В ходе эксперимента, учебная деятельность школьников организовывалась в форме семинарских занятий и уроков-практикумов. С целью развития интереса к математической деятельности, формирования умений анализировать, подмечать закономерности, обобщать мы часто предлагали учащимся дидактические игры. Игровая деятельность способствует созданию познавательного мотива, активизации мыслительной деятельности учащихся, усиливает их внимание к содержанию изучаемого материала. В процессе эксперимента мы убедились, что включение в урок дидактических игр и игровых элементов делает процесс обучения интересным и занимательным, создает у школьников рабочее настроение, облегчает преодоление трудностей в усвоении учебного материала.

Новые для учащихся понятия - вычет, арифметика вычетов, класс вычетов осознаются ими при рассмотрении конкретных примеров, в процессе выполнения упражнений. На занятиях индивидуальную работу учащихся следует органически сочетать с коллективной работой класса. С этой целью целесообразно использование таких приемов, как предварительная беседа учителя с классом для создания положительной мотивации, атмосферы заинтересованности, совместное обсуждение образцов решения упражнений, заготовленных на таблицах, слайдах или транспарантах для графопроектора, самостоятельное выполнение заданий. Демонстрация образцов правильных решений после устных ответов учащихся, самостоятельных, контрольных работ и т.п. создает условия для своевременного самоконтроля и самокоррекции. В соответствии с концепцией П.Я.Гальперина такой прием формирует внимание учащихся. В то же время, привычка к самоконтролю положительно влияет на личность ученика.

Данный материал выходит за рамки традиционного курса математики, является для учащихся "необычным". В связи с этим на первых занятиях особое значение приобретает действие целеполагания через мотивацию предстоящей учебной деятельности школьников посредством достаточного количества наглядных примеров, иллюстрирующих применение этих арифметик в повседневной практической деятельности.

Приведем вариант мотивационного этапа первого урока по теме "Арифметика вычетов".

Учитель предлагает учащимся ответить, каким будет остаток от деления числа 7778x7779x7780x7781x7782x7783 на 7?

После короткой паузы учитель продолжает:

-Для того, чтобы решить эту задачу, необходима ЭВМ. Однако, немного настойчивости и терпения и каждый сможет решить эту задачу устно. Роль ЭВМ выполнит построенная нами новая арифметика, отличающаяся от обычной, известной вам. Эту арифметику называют арифметикой вычетов. С такой арифметикой мы сталкиваемся в жизни на каждом шагу. Вот лишь некоторые примеры:

1. Ваш счетчик электроэнергии показывает, например, 0638 КВт/час. А на самом деле, сколько электроэнергии использовано с момента установления счетчика? 638 КВт/час? Или 10638? А может 30638? По показаниям измерительного прибора этого не скажешь. После 9999 на нем опять будет 0000 и счет начнется сначала. Он задуман так, что указывает не полное количество энергии, а остаток от деления использованного числа киловатт-часов на 10000.

2. Когда вы отправлялись в школу на часах было ровно 8 часов,

когда ложились спать - часы показывали 10 часов, а 10 - 8 = 2 часа. Но разве прошло только 2 часа? Объясните эту ситуацию.
Учитель обобщает рассуждения учеников.

В математике часто рассматривают арифметики, количество элементов которых конечно и действия в которых выполняются так, что результаты этих действий никогда не превышают определенного числа.

Эксперимент показал, что такой подход эффективен, т.к. предусматривает создание проблемной ситуации, формирует у школьников интерес к изучению вопросов данной темы.

Ознакомить учащихся с конечными арифметиками (арифметики вычетов и арифметики классов вычетов) целесообразно на конкретном примере.

Пример.

Рассмотрим множество чисел A = {0; 1; 2;...; 11}. Не определяя операцию сложения в данном множестве, отметим, что она была введена так, чтобы выполнялись следующие равенства:
1 + 6 = 7; 7 + 4 = 11; 11 + 5 = 4. Наглядно проиллюстрировать результаты выполнения операции сложения можно с помощью циферблата часов. При этом заданное множество представляет собой числа этого циферблата, а сложение - последовательный поворот стрелки на заданное число единиц. Учитель сообщает учащимся, что результаты выполнения операций на таких множествах удобно представлять в виде таблицы с двумя входами, введенной английским математиком Кэли в 1854 году. Они похожи на обычные таблицы сложения и умножения. Так как для 12 элементов множества A таблица будет громоздкой, то для простоты допускаем, что "на циферблате часов" есть только 3 обозначения: 0, 1, 2, т.е. рассматриваем множество: M={0; 1; 2}. Поскольку сложение в этом множестве отличается от операции сложения в смысле обычной арифметики, то для обозначения

сложения целесообразно ввести новый символ ⊕.

После рассмотрения нескольких аналогичных примеров ученики делают вывод, что операция ⊕ заключается в том, что упорядоченной паре чисел (a, b) из множества M ставится в соответствие остаток от деления суммы a + b в смысле обычной арифметики на некоторое число (в данном случае на 3). Аналогично определяется и операция умножения. Так как она также отличается от операции умножения в обычной арифметике, для нее следует ввести новый символ - ⊗. Итак, a⊗b означает поставить в соответствие упорядоченной паре (a, b) остаток от деления обычного арифметического произведения на 3.

Учитель отмечает, что в данном случае множество M называется множеством неотрицательных вычетов по модулю 3, а арифметику в этом множестве называют арифметикой вычетов по модулю 3 или 3-арифметикой. Все пояснения следует сопроводить демонстрацией слайдов или кодопозитивов (рисунок 2).

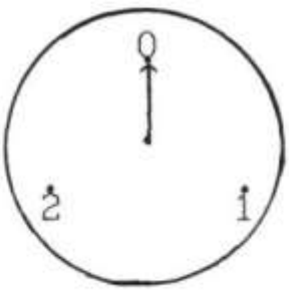



таблица сложения в 3-арифметике

| ⊕ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

таблица умножения в 3-арифметике

| ⊗ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |

Рис. 2

С целью формирования умений выполнять операции сложения и умножения в таких арифметиках, можно предложить учащимся самостоятельно построить таблицы сложения и умножения для арифметик вычетов по модулю 5, по модулю 7, по модулю 4. Учителю полезно наперед приготовить такие таблицы. Они выполняют функции контроля и коррекции (если демонстрируются непосредственно после выполнения самостоятельной работы), а также оказывают помощь учащимся, которые испытывают затруднения при выполнении соответствующих упражнений.

Анализируя данные таблицы учащиеся делают обобщающий вывод, что так можно определить сложение и умножение по любому натуральному модулю m, подразумевая под суммой двух чисел в m-арифметике - остаток от деления суммы этих чисел в смысле обычной арифметики на m. Учащиеся осознают, что построенные m-арифметики отличаются от обычной арифметики правилами выполнения операций, а также тем, что они построены на конечных множествах. Учитель предлагает проблему для самостоятельного исследования.

- Будут ли свойства операций сложения и умножения в m-арифметиках отличаться от свойств этих операций в обычной арифметике?

Учащиеся убеждаются, что свойства операций сложения и умножения в арифметике вычетов по модулю m во многом совпадают со свойствами операций обычной арифметики.

Примеры.

1. Определите, будет ли операция $\oplus$ ассоциативной и коммутативной в 3-арифметике?

2. Существует ли в 3-арифметике нейтральный элемент, относительно операции $\oplus$?

3. Для каждого элемента 3-арифметики укажите ему противоположный. Единственен ли он?

4. Определите, будет ли операция $\otimes$ в 5-арифметике коммутативной и ассоциативной? Существует ли нейтральный элемент относительно этой операции?

5. Назовите в 5-арифметике для каждого элемента обратный ему элемент. Определяется ли он однозначно?

6. Проверьте, будет ли операция $\otimes$ дистрибутивна относительно операции $\oplus$ в 3-арифметике?

7. Докажите, что 5-арифметика с операциями $\oplus$ и $\otimes$ имеет структуру коммутативного кольца.

При этом целесообразно свойства операций обосновывать исходя из таблиц сложения и умножения в конкретной m-арифметике (в данном случае в 3-арифметике и в 5-арифметике), а среди приемов доказательства использовать перебор всех возможных случаев (а их конечное число), так как "пересмотр всех возможных случаев одного за другим, поиски необходимого путем постепенного уменьшения имеющихся возможностей - все это типы математических рассуждений, имеющие первостепенное теоретическое и практическое значение" [95, С.11].

После обоснования свойств операций в определенных арифметиках, следует обобщить эти свойства для произвольной m-арифметики. Это обобщение основывается на правилах выполнения операций сложения и умножения, а также на том, что свойства ассоциативности, коммутативности, наличие нейтрального элемента и симметричного элемента присущи операциям сложения и умножения целых чисел в обычной арифметике.

В процессе такой работы необходимо стремиться, чтобы все обоснования, выводы формулировали учащиеся. Учитель направляет, руководит, контролирует и корректирует их деятельность. Стимулом для рассуждений служит постоянно звучащий вопрос: "Почему?" Этот прием рассчитан на воспитание у учащихся внутренней потребности в обоснованиях, что является важным качеством развитого мышления.

Итогом выполнения заданий исследовательского характера является вывод о том, что 3-арифметика и 5-арифметика имеют структуру кольца. Это создает условия для переноса знаний и умений учащихся на изучение новых объектов. Вычислительный аппарат, разработанный для кольца целых чисел (обратимость операции сложения, способы решения уравнений и упрощение выражений и т.д.) переносится и используется при выполнении вычислений в m-арифметиках.

Примеры.

1. Вычислите, пользуясь таблицами действий в 3-арифметике, значения выражений, если порядок выполнения действий такой, как в обычной арифметике:

а) $2^2 \oplus 1$; б) $2 \ominus 1 \otimes 2 \oplus 1$; в) $(2 \oplus 2) \odot 1 \ominus 1$;

г) $(2 \ominus 1 \otimes 2) \otimes 2 \oplus 1$; д) $(1 \oplus 2^2) \otimes (2 \ominus 1)$.

2. Решите уравнение в 3-арифметике:

а) $2 \ominus x = 1$; б) $2 \otimes x = 0$;

в) $(2 \odot x \ominus 1) \otimes 2 = 1$; г) $(2 \oplus x) \otimes 1 \oplus 2 = 0$.

3. Выполните действия в 5-арифметике:

а) $(4 \oplus 3) \otimes 2 \ominus 3$; б) $1 \otimes 2 \ominus 3 \otimes 4$;

в) $4 \oplus (2 \ominus 3) \otimes 2$.

4. Проверьте выполнение формул сокращенного умножения:

а) $a^2 \ominus b^2 = (a \ominus b) \otimes (a \oplus b)$;

б) $(a \oplus b)^2 = a^2 \oplus 2 \otimes a \otimes b \oplus b^2$;

в) $(a \ominus b)^2 = a^2 \ominus 2 \otimes a \otimes b \oplus b^2$.

5. Упростите выражения и найдите значения при $m = 4$, $n = 2$ в 5-арифметике:

а) $m \otimes (m \ominus n) \oplus n \otimes (n \ominus m)$;

б) $m^2 \ominus (n \oplus m) \otimes m$;

в) $n \otimes (n \ominus m) \oplus (m \ominus n) \otimes (m \oplus n)$.

С целью активизации учебной познавательной деятельности учащихся на этапе закрепления умений и навыков, решение примеров такого плана можно организовать в форме дидактической игры.

Например, в ходе экспериментальной работы выполнение заданий 2, 3, 5 проводилось в виде математического турнира (сценарий этой игры приведен в приложении ).

Задания творческого характера, требующие применения полученных знаний в нестандартных условиях целесообразно предложить учащимся подготовить к семинару. В рамках семинарского занятия уместно раскрыть взаимосвязь арифметик вычетов и обычной арифметики, показать возможности практического применения этих арифметик для проверки и упрощения вычислений в обычной арифметике. Задания соответствующего содержания подготавливаются учителем заранее или под его руководством подбираются учениками. Ознакомить учащихся с подобранной системой упражнений следует до проведения семинарского занятия, чтобы они могли проанализировать условия, найти наиболее рациональное решение, исследовать и оформить его. На семинаре учащиеся демонстрируют найденные способы решения, обсуждают их. Иногда полезно параллельно проанализировать правильное и неправильное решения, чтобы предостеречь учащихся от возможных ошибок в дальнейшем.

Примеры.

1. Найдите остаток от деления:

а) $3^{100}$ на 7; б) $3^{999}$ на 5; в) $2^{1000}$ на 3, 5, 11.

2. Докажите, что любое число вида $2^{4n}$ дает при делении на 5 остаток 1.

3. Найдите остаток от деления:

а) $3^{120}$ на 5; б) $3^{42}$ на 7; в) $6^{147}$ на 7.

4. Докажите, что значение выражения $3^{4n}-1$ при любом натуральном n кратно 5.

5. Докажите, что сумма кубов всех чисел из 1001-арифметики равна нулю.

В экспериментальной методике представленные выше задания рассматривались на семинарском занятии "Применение конечных арифметик для решения некоторых задач обычной арифметики".

Ознакомить учащихся с операцией умножения вычетов в $m$-арифметиках на любое натуральное число (меньше $m$) и формировать умения выполнять эту операцию целесообразно также на конкретных примерах. Учитель отмечает, что для наглядности результаты выполнения операции умножения удобно представлять в виде таблиц (подобно известной учащимся таблице умножения в обычной арифметике) или графов.

С понятием графа учащиеся уже знакомы и построение таких граф-схем не вызывает у них затруднений. Обращается внимание учеников на то, что в этом случае стрелки "указывают" во что переходит каждый элемент $m$-арифметики при умножении его на данное натуральное число. "Петля" на граф-схеме указывает, что число переходит само в себя. Например, граф-схема умножения элементов 5-арифметики на натуральное число 3 имеет вид:

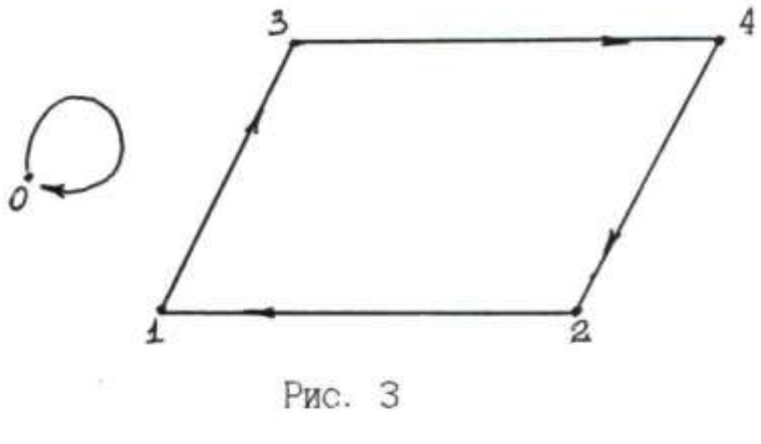



Рис. 3

Полезно предложить учащимся в виде самостоятельной работы или в качестве домашнего задания построить граф-схемы умножения в различных m-арифметиках. При этом создаются условия индивидуализации учебного процесса: можно каждому ученику задать арифметику по конкретному модулю, предложить составить и решить упражнения на выполнение действий сложения, умножения, вычитания в данной арифметике. Результаты такой работы проверяются и корректируются учителем при участии учащихся. Приведем примеры некоторых заданий для самостоятельной работы учащихся.

1. Постройте граф-схемы умножения на числа 1,2,3,5,6 в 7-арифметике. Составьте примеры на действия сложения, вычитания, умножения и выполните их, пользуясь этими схемами.
2. Постройте схемы умножения в 6-арифметике, 12-арифметике.
3. Постройте граф-схемы умножения на 2 и на 5 в 10-арифметике.

Анализируя результаты выполнения самостоятельной работы, учитель ознакамливает учащихся с понятием цикла. При этом отмечается, что если в граф-схеме последовательность изображенных в ней чисел такова, что от каждого из этих чисел до следующего и от последнего к первому идет стрелка, то граф-схема представляет собой цикл. Целесообразно предложить учащимся определить и записать циклы в построенных ими граф-схемах. Например, при умножении на 4 в 7-арифметике (см. приложение ) получаются циклы: I цикл (0); II цикл (1;4;2); III цикл (3;5;6). Обобщая наблюдения учащихся учитель делает вывод, что если модуль арифметики число m - простое, например, 5,7 и т.д. (в этом случае его обозначают буквой p и говорят о p-арифметиках), то схемы умножения на любое число из p-арифметики распадаются на циклы. Наиболее подготовленным учащимся можно предложить доказать это утверждение.

С операцией деления в конечных арифметиках учащихся можно ознакомить в процессе эвристической беседы. Взаимодействие вопросов учителя и ответов учащихся при этом образует процесс познания. Своими вопросами учитель направляет процесс мышления учащихся по определенному пути.

Приведем фрагмент такой беседы.

Учитель: Итак, мы с вами научились выполнять операции сложения, вычитания, умножения в m-арифметиках. Какое еще действие осталось рассмотреть?

Ученики: Деление.

Учитель: Как вы думаете, всегда ли можно найти результат деления двух произвольных элементов в m-арифметике?

Ученики: Нет, не всегда.

Учитель: Почему?

Ученики: Так как арифметика вычетов имеет структуру кольца, а в кольцах операция деления не всегда выполнима.

Учитель: Как, используя граф-схемы умножения, в m-арифметиках выполнить деление?

Ученики: Для этого необходимо в граф-схемах направление стрелок изменить на обратное и получим схемы деления в m-арифметике.

Учитель: Чем объясняется возможность такого преобразования?

Ученики: Тем, что операция деления является обратной к операции умножения.

Преобразовав построенные схемы умножения (в 7-арифметике, в 6-арифметике, в 10-арифметике и т.д.) на схемы деления и проанализировав их, школьники убеждаются в правильности своих рассуждений. Например, в 10-арифметике невозможно разделить 5 на 4; в 6-арифметике не существует результата деления 5 на 3 и т.д.

Далее учитель задает вопрос:

- Если деление возможно, всегда ли оно однозначно?

Наглядные примеры приводят учащихся к выводу, что деление не всегда однозначно. Так в 10-арифметике $4 \otimes 8 = 2$ и $4 \otimes 3 = 2$, значит числа 8 и 3 с равным правом могут быть названы частными от деления 2 на 4. Учащиеся осознают, что действие деления в произвольной m-арифметике не является алгебраической операцией (согласно определению этого понятия в математике); так как нарушаются условия существования или однозначности результата.

Учитель: Как вы думаете, в каких арифметиках деление на любое число, отличное от нуля всегда возможно и однозначно?

Ученики: В p-арифметиках (p-простое), так как схемы умножения, а значит и схемы деления в таких арифметиках распадаются на циклы.

Учитель: Какую алгебраическую структуру образуют арифметики по простому модулю?

Учащиеся: Поле.

Можно предложить ученикам самостоятельно обосновать данное утверждение. При этом менее подготовленные учащиеся проверяют справедливость аксиом поля для конкретной p-арифметики. Сильным учащимся предлагается обосновать данное утверждение для произвольных арифметик. Следует отметить, что такой подход приемлем только в хорошо подготовленном классе и требует гораздо больше времени, чем простое объяснение учителя, однако эти затраты окупаются эффективностью развития творческого мышления учащихся и выявления технологии этого мышления. При этом учитель получает возможность управления скрытым процессом усвоения знаний и контроля за механизмом его хода.

Умения выполнять действие деления в m-арифметиках формируется у учащихся при выполнении заданий такого типа:

1. Найдите значения выражений в 7-арифметике:

а) $5 \odot 4 \oplus 6 \mathbin{\textcircled{:}} 5 \ominus 1$;

б) $3 \oslash 4 \oplus 1 \oslash 3$;

в) $\dfrac{2 \ominus 4}{2 \ominus 3} \oplus 3 \oslash 5$;

г) $\dfrac{4 \ominus 1 \oslash (2 \oplus 3) \oslash 4}{1 \ominus 2}$.

2. Решите уравнения в 7-арифметике:

а) $x \otimes 5 = 6$; б) $x \otimes 4 \oplus 3 = 1$; в) $6 \ominus x \otimes 5 = 3 \otimes 4$.

При формировании познавательных интересов школьников немаловажную роль играет эмоциональная сторона процесса обучения, в том числе и чувство неожиданности, удивления и т.п. Еще Платон отмечал, что познание начинается с удивления.

Рассмотрение арифметик вычетов и арифметик классов вычетов по модулю m дает возможность продемонстрировать учащимся феномен "необычных" для них понятий и тем самым позволяет воздействовать на эмоциональную сферу школьников. К таким понятиям относятся понятия области целостности и делителей нуля. Так, учащиеся основной школы четко усваивают утверждение, что если произведение двух элементов равно нулю, то обязательно хотя бы один из множителей равен нулю. Это обусловлено тем, что во всех числовых множествах, изучаемых в традиционном курсе математики это утверждение действительно справедливо. Рассматривая арифметики вычетов, учащиеся впервые встречаются с множествами, в которых справедливость этого утверждения нарушается.

Проиллюстрировать этот факт можно, например, так.

Учитель предлагает учащимся самостоятельно построить таблицы умножения в 6-арифметике и в 8-арифметике и представить число 0 в виде произведения 2-х множителей всеми возможными способами. Если составление таблиц вызывает у школьников затруднения, можно приготовить их заранее и спроецировать на экран или доску.

Результат выполнения этого задания выглядит следующим образом:

таблица умножения в 6-арифметике

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 0 | 2 | 4 |
| 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| 4 | 0 | 4 | 2 | 0 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 5 | 4 | 3 | 2 | 4 |

$0 = 1 \otimes 0$;  $0 = 2 \otimes 0$;  $0 = 3 \otimes 0$;  $0 = 4 \otimes 0$;  $0 = 5 \otimes 0$;
$0 = 2 \otimes 3$;  $0 = 4 \otimes 3$.

таблица умножения в 8-арифметике

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 0 | 2 | 4 | 6 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 7 | 2 | 5 |
| 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 |
| 5 | 0 | 5 | 2 | 7 | 4 | 1 | 6 | 3 |
| 6 | 0 | 6 | 4 | 2 | 0 | 6 | 4 | 2 |
| 7 | 0 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 7 |

$0 = 1 \otimes 0$;  $0 = 2 \otimes 0$;  $0 = 3 \otimes 0$;  $0 = 4 \otimes 0$;
$0 = 5 \otimes 0$;  $0 = 6 \otimes 0$;  $0 = 7 \otimes 0$;
$0 = 2 \otimes 4$;  $0 = 4 \otimes 4$;  $0 = 4 \otimes 6$.

Отметим, что равенства записаны с учетом коммутативности умножения. Анализируя полученные результаты, учащиеся приходят к выводу, что в 6-арифметике и в 8-арифметике выполнение равенства $a \times b = 0$ возможно и при ненулевых значениях a и b. Учитель сообщает, что в этом случае числа a и b называются делителями нуля. Так, в 6-арифметике делителями нуля являются числа 2 и 3, 4 и 3; в 8-арифметике к делителям нуля относятся пары чисел 2 и 4, 4 и 6.

Понятие области целостности следует ввести в процессе обобщения сведений о различных видах колец, рассматриваемых в рамках данной темы. Учитель акцентирует внимание учащихся на том, что были рассмотрены кольца, для которых произведение элементов $a \times b = 0$ и при ненулевых a и b (например, кольцо вычетов по модулю 6) и кольца, для которых выполнение этого равенства возможно только в случае, когда хотя бы один из множителей нулевой (кольцо целых чисел, кольцо целых чисел кратных 3 и т.д.). Кольца, в которых отсутствуют делители нуля, имеют в математике специальное название - области целостности.

Формированию навыков аксиоматического построения фрагментов математических теорий способствует рассмотрение арифметик классов вычетов. Ознакомиться с учебным материалом учащиеся могут в процессе самостоятельной работы с математической литературой. Чтобы облегчить эту работу, учителю следует нацелить школьников на то, какой теоретический материал они должны рассмотреть. Подведение итогов самостоятельной работы, анализ ее результатов можно провести в форме семинарского занятия. С целью активизации познавательной деятельности учащихся используются различные приемы: постановка познавательных задач и дополнительных вопросов, акцентирование внимания на новых моментах содержания данной темы, использование заданий исследовательского характера, создание игровых моментов. Деятельность учителя и учащихся на занятии может быть организована таким образом. В начале урока целесообразно сообщить учащимся цели и задачи данного занятия, показать связь вопросов, рассматриваемых на нем с вопросами, рассмотренными раньше. Далее учитель ставит задачу:

Исследовать свойства отношения "давать одинаковый остаток при делении на 5", заданного на множестве целых чисел.

В процессе эвристической беседы, анализируя результаты выполнения данного задания, учащиеся, под руководством учителя выясняют, что заданное отношение, являясь отношением эквивалентности, разбивает множество целых чисел на непересекающиеся множества. С учетом того, что при делении на число 5 возможно 5 разных остатков: 0; 1; 2; 3; 4, записывают эти множества:

$K_0 = \{\ldots;\ -15;\ -10;\ -5;\ 0;\ 5;\ 10;\ 15;\ldots;\ 5n\}$

$K_1 = \{\ldots;\ -14;\ -9;\ -4;\ 1;\ 6;\ 11;\ 16;\ldots;\ 5n+1\}$

$K_2 = \{\ldots;\ -13;\ -8;\ -3;\ 2;\ 7;\ 12;\ 17;\ldots;\ 5n+2\}$

$K_3 = \{\ldots;\ -12;\ -7;\ -2;\ 3;\ 8;\ 13;\ 18;\ldots;\ 5n+3\}$

$K_4 = \{\ldots;\ -11;\ -6;\ -1;\ 4;\ 9;\ 14;\ 19;\ldots;\ 5n+4\}$

Осознание учащимися того, что все числа, попавшие в одно множество, дают при делении на 5 равные остатки, позволяет ввести понятие конгруэнтных по модулю m чисел и символ - знак конгруэнтности "≡".

Целесообразно предложить учащимся самостоятельно привести примеры конгруэнтных чисел по модулю 5.

$-15 \equiv 10 \pmod 5$; $\quad -11 \equiv 9 \pmod 5$; $\quad 43 \equiv 3 \pmod 5$.

Существующая аналогия между понятиями равенства чисел и конгруэнтности чисел, облегчает учащимся усвоение последнего.

Понятия класса чисел, вычета не являются для учащихся новыми, школьники вспоминают и уточняют их в процессе беседы. При этом отмечается, что в качестве представителя класса вычетов по модулю m выбирают наименьший неотрицательный вычет, т.е. числа 0, 1, 2, ..., (m-1) и соответствующие классы вычетов обозначают $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, ..., $(\overline{m-1})$. Аналогично операциям в арифметике вычетов, вводятся операции для классов вычетов. Учащиеся самостоятельно формулируют определения операций сложения и умножения классов вычетов, делают соответствующие записи.

$\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a + b}\ (\mathrm{mod}\ m)$

$\bar{a} \otimes \bar{b} = \overline{a \times b}\ (\mathrm{mod}\ m)$

Можно обосновать, что значение суммы и произведения классов вычетов не зависит от выбора конкретных представителей классов, которые использовались при нахождении суммы и произведения. Задание - подготовить доказательство этого утверждения целесообразно дать одному ученику до проведения семинара. На занятии этот ученик раскрывает суть доказательства, остальные по мере необходимости уточняют, дополняют и конкретизируют ответ. В результате такого обсуждения, учащиеся приходят к выводу, что для того, чтобы сложить (умножить) два класса вычетов по модулю m необходимо сложить (умножить) вычеты этих классов в смысле m-арифметики или сложить (умножить) эти числа в обычной арифметике и если сумма (произведение) будет больше m, найти остаток от деления этой суммы (произведения) на m.

Закрепление этих знаний и умений осуществляется в процессе выполнения упражнений. Например.

Выполнить действия в арифметике классов вычетов по модулю 5:

а) $\bar{3} \oplus \bar{4}$; б) $7 \oplus \bar{3}$; в) $\bar{4} \oplus \bar{2}$; г) $\overline{13} \oplus \bar{2}$;

д) $7 \otimes \bar{3}$; е) $\bar{4} \otimes \bar{2}$; ж) $\bar{6} \otimes \bar{3}$.

Актуализация знаний учащихся об алгебраических структурах происходит при выполнении задания на исследование структуры арифметики классов вычетов с введенными операциями $\oplus$ и $\otimes$. Решение этой задачи может осуществляться учащимися самостоятельно, учащимися с помощью учителя (или ученика-консультанта). Причем, учитель может варьировать направление и объем такой помощи. Дифференцированная помощь учащимся предлагается в виде:

- устных указаний;
- карточек, в которых указано правило-ориентир выполнения задания:

I. Установить, является ли данная арифметика коммутативной, аддитивной группой? Для этого проверить выполнимость следующих условий:

1) замкнутость арифметики относительно операции сложения;

2) ассоциативность сложения, т.е. для любых классов вычетов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ по модулю $m$ должно выполняться: $\bar{a} \oplus (\bar{b} \oplus \bar{c}) = (\bar{a} \oplus \bar{b}) \oplus \bar{c}$

3) наличие нейтрального элемента относительно операции $\oplus$;

4) наличие для каждого класса ему противоположного;

5) коммутативность сложения, т.е. для любых классов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ по модулю $m$ выполнимость условия: $\bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{b} \oplus \bar{a}$

II. Если пункт I выполняется, установить обладает ли арифметика классов вычетов по модулю $m$ структурой кольца.

С этой целью проверить:

1) замкнутость арифметики классов вычетов относительно операции умножения;

2) ассоциативность умножения: выполнимость для любых $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ равенства: $\bar{a} \otimes (\bar{b} \otimes \bar{c}) = (\bar{a} \otimes \bar{b}) \otimes \bar{c}$

3) дистрибутивность умножения относительно сложения:
$\bar{a} \otimes (\bar{b} \oplus \bar{c}) = \bar{a} \otimes \bar{b} \oplus \bar{a} \otimes \bar{c}$.

Результатом выполнения данного задания является вывод о том, что арифметика классов вычетов по модулю $m$ имеет структуру кольца. Можно предложить учащимся дополнительно проверить, является ли это кольцо коммутативным; существует ли в нем нейтральный элемент относительно операции умножения?

После установления структурной принадлежности арифметики классов вычетов, целесообразно выяснить какие законы, формулы, свойства будут иметь в ней место. В ходе эксперимента это задание предлагалось учащимся в игровой форме.

Игра-аукцион.

Кто сможет собрать больше информации о арифметике классов вычетов?

Важным моментом в данном процессе является осознание школьниками того, что арифметика классов вычетов является моделью математической теории колец. А значит математический аппарат, разработанный в теории колец применим к арифметике классов вычетов.

Предлагаемая методика обобщения математических знаний на основе понятий теории алгебраических структур позволяет ознакомить школьников с процедурой аксиоматизации. Реализация этого процесса проходит по схеме, представленной в приложении таблицей 5.

## §2.3. Изучение теории делимости многочленов с использованием понятия кольца

Изучение учащимися понятий алгебраических структур позволяет организовать процесс систематизации и обобщения знаний как на уровне понятий, так и на уровне теорий. Систематизация знаний на основе теории обеспечивает понимание явлений, законов и закономерностей в их взаимосвязи и цельности, а сама теория в силу постоянного применения оказывается прочно усвоенной [58]. Данный способ обобщения и систематизации проэкспериментирован на примере изучения теории делимости во множествах целых чисел и многочленов.

Теория многочленов в школьном курсе математики изучается в рамках функциональной содержательно-методической линии, линии тождественных преобразований выражений и линии уравнений и неравенств. Это связано с существованием в математике двух точек зрения на понятие многочлена: алгебраической и функциональной.

Исторически понятие многочлена возникло в элементарной алгебре в связи с переходом от уравнений I степени с одним неизвестным к квадратному уравнению, а затем и к некоторым частным типам уравнений III и IV степени. Развитие теории многочленов было связано с попытками поиска формул, которые выражали бы корни уравнений V и более высших степеней через коэффициенты этих уравнений при помощи радикалов [40, С.8]. При этом наметились два подхода к построению теории многочленов: функциональный и алгебраический. В рамках этих подходов по-разному рассматривают выражение $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ и по-разному трактуют операции сложения и умножения многочленов.

Если под значением символа x в выражении $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ понимать конкретное число, взятое из того же множества, которому принадлежат коэффициенты $a_0$, $a_1$,..., $a_n$ (множества действительных чисел) и операции сложения и умножения рассматривать как операции над числами, то под выражением $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ следует понимать функцию f(x), заданную в поле действительных чисел. Функциональная точка зрения на многочлен характерна для математического анализа. Для алгебры такое понимание не совсем удобно и не всегда возможно. Это связано с тем, что многочлены играют важную роль в теории колец и полей, и существуют конечные кольца и поля, над которыми многочлены нецелесообразно рассматривать как непрерывные функции. Поэтому при алгебраическом подходе к построению теории многочленов в математике вначале дают определение многочлена, связанное с понятием кольца многочленов над полем, обосновывают существование такого кольца, его единственность с точностью до изоморфизма, доказывают, что в таком кольце элементы представимы в виде $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, где $a_0$, $a_1,\ldots,$ $a_n$ принадлежат числовому полю, над которым рассматривается кольцо многочленов [153].

Эти два подхода, сложившиеся в математической науке, естественно нашли отражение в школьной математике в соответствующей методической обработке. Так, изучение тождественных преобразований многочленов, разложение многочлена на множители, рассмотрение действий над многочленами является реализацией алгебраического подхода, а рассмотрение многочленов как функций действительной переменной, определение значений этих выражений при заданном значении аргумента, определение промежутков знакопостоянства, монотонности - является реализацией функционального подхода к изучению теории многочленов. Для школьной алгебры представляют интерес оба подхода. "Нельзя отказаться или недооценить ни один из них. В одних случаях приходится сосредотачивать внимание на алгебраической стороне вопроса; в других, интерес представляет функциональная сторона" [156, С.167].

До 60-х годов в учебниках алгебры для 7 класса средней общеобразовательной школы рассматривался вопрос - деление многочленов с остатком. В дальнейшем он был исключен из программы. По мнению некоторых методистов (Бевз Г.П., Виленкин Н.Я. и др.) это сделало раздел "Многочлены" незавершенным. Авторы пробных учебников и учебных пособий [178] предлагают различные подходы к рассмотрению действия деления многочлена на одночлен (или многочлен) в традиционном школьном курсе. Так, например, Фадеев Д.К. сначала выделяет признак, по которому можно определить, имеет ли место деление многочленов. Далее, анализируя операцию умножения двух многочленов, делается вывод о том, что деление можно производить путем составления разности и последовательного вычисления членов частного, используя при этом схему, напоминающую схему деления многозначных чисел [178].

Более детальное изучение делимости многочленов предусмотрено программой по математике школ и классов естественно-математического профиля. Рассмотрение вопросов делимости многочленов (деление с остатком, теорема Безу и др.) позволяет при изучении теории многочленов использовать аналогию с множеством целых чисел, т.к. множество многочленов и множество целых чисел имеют одинаковую структуру и образуют относительно операций сложения и умножения, введенных в этих множествах, кольцо. Установление структурной принадлежности множества многочленов от одной переменной с рациональными коэффициентами и введенными на этом множестве операциями сложения и умножения, аналогия между рассматриваемым множеством и кольцом целых чисел (как различными интерпретациями одной и той же математической модели) позволяет яснее увидеть взаимосвязь и значение различных свойств многочленов и целых чисел, устраняет многократное и утомительное повторение одних и тех же рассуждений, что в конечном итоге, является реализацией на практике принципа экономности мышления. Следует отметить, что установление принадлежности множества многочленов к структуре кольца позволяет довести алгебраический подход к теории многочленов до логического завершения.

Программой для школ и классов с углубленным теоретическим и практическим изучением математики предусматривалось изучение элементов теории делимости многочленов в X классе в теме "Многочлены от одной переменной" [152]. В настоящее время некоторые учебные заведения работают по индивидуальным учебным планам и программам.

Анализ учебных планов и программ по математике ряда учебных заведений естественно-математического профиля (Саксаганского естественно-научного лицея г. Кривого Рога, областной педагогической гимназии, Желтоводского естественно-научного лицея и др.) позволил выделить следующее: при некоторой существующей вариативности содержания образования, различном распределении часов между отдельными курсами и темами математики, наличии цикла разных спецкурсов и практикумов изучение элементов теории делимости многочленов программами по математике, в основном всех учебных заведений, предусмотрено в X классе. Поэтому предлагаемая методика изучения делимости многочленов разрабатывалась:

1) с учетом аналогии между множеством многочленов от одной переменной и множеством целых чисел, обладающих одной и той же структурой кольца;

2) с ориентацией на изучение этих вопросов на старшей ступени обучения (X класс).

Подготовка к изучению данной темы включает в себя повторение и обобщение соответствующих знаний и умений учащихся по курсу неполной средней школы. При этом особое внимание следует уделить таким вопросам:

1) определение понятия многочлена, степени многочлена, корня многочлена, понятие многочлена нулевой степени и нулевого многочлена;

2) выполнение операций над многочленами;

3) элементы теории делимости в кольце целых чисел.

Различие в уровне сформированности у учащихся необходимых для дальнейшего изучения теории многочленов, умений и навыков обуславливает дифференцированный подход к процессу обучения на данном этапе. Он выражается в вариативном выборе заданий, дозировании помощи со стороны учителя, своевременном контроле и коррекции знаний и умений учащихся. Повышению эффективности учебной деятельности школьников способствует применение современных вычислительных средств.

Использование компьютерной поддержки обеспечивает ускорение проведения вычислений, повышение роли самостоятельного исследовательского характера учебной деятельности, способствует реализации межпредметных связей математики и информатики. В лицеях и гимназиях, где существует соответствующая материально-техническая база, к 10 классу учащиеся, в основном, ознакомлены с основами программирования, алгоритмическим методом, понятием алгоритма и владеют необходимыми навыками работы на компьютере. Поэтому для коррекции умений и навыков учащихся целесообразно использовать обучающие программы: "Сложение многочленов", "Умножение многочлена на одночлен", "Умножение многочленов". Если при изучении теории многочленов в 7-9 классах не использовалась компьютерная поддержка, считаем целесообразным уделить этому время и внимание при обобщающем повторении в 10 классе. Это связано с тем, что формирование умений производить действия над многочленами опирается на решение большого количества однотипных задач. Однако, установлено, что явное выделение алгоритмических предписаний, пригодных для некоторого класса задач, значительно эффективнее чем, решение большого числа однотипных задач из этого класса [66]. Поэтому полезно ознакомить учащихся с основными видами алгоритмов, используемых при изучении темы "Многочлены", а также научить их не только работать с готовыми программами, но и составлять простейшие программы для решения математических задач. При изучении данной темы учащиеся работают с двумя видами алгоритмов: учебными (немашинными) и машинными. Первые ориентированы на исполнителя человека, вторые на компьютер. Для записи немашинных алгоритмов используют словесное описание и язык блок-схем, при записи машинных - язык блок-схем и языки программирования.

Рассмотрим один из возможных вариантов обучения учащихся составлению алгоритмов и программ на примере сложения многочленов. Отметим, что решение задачи на основе алгоритмизации включает следующие этапы:

1) выделение основных шагов решения задачи;

2) составление алгоритмов в словесной форме;

3) перевод его на язык блок-схем;

4) перевод алгоритма с языка блок-схем на язык программирования.

Так, при решении конкретных примеров на сложение многочленов внимание учащихся акцентируется на основных действиях, которые приходится выполнять. Этим реализуется I этап решения задач алгоритмическим методом - выделяются основные шаги решения. Далее при ведущей роли учителя составляется алгоритм в словесной форме: 1 начало алгоритма; 2 ввод двух многочленов; 3 обработка данных - сложение коэффициентов, стоящих на одних местах; 4 вывод результата - суммы многочленов; 5 конец алгоритма.

Следующим шагом является запись алгоритма в виде блок-схемы. При этом особое внимание следует уделить нахождению тех отличий и изменений, которые необходимо внести в алгоритм в связи с переходом к использованию его компьютером. В рассматриваемом примере входными и выходными данными являются многочлены. Для машины это одномерные массивы коэффициентов многочленов:

$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \longrightarrow (a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n)$

$g(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n \longrightarrow (b_0;\ b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n)$

Обработка данных состоит в сложении коэффициентов, стоящих на одинаковых местах, а именно:

$$a_0+ b_0;\ a_1+ b_1;\ a_2+ b_2;\ \ldots;\ a_n+ b_n.$$

Так как при этом многократно повторяется вычисление суммы для различных номеров коэффициентов, то возникает необходимость использования алгоритма циклической структуры. Таким образом, машинный алгоритм записывается на языке блок-схем следующим образом:

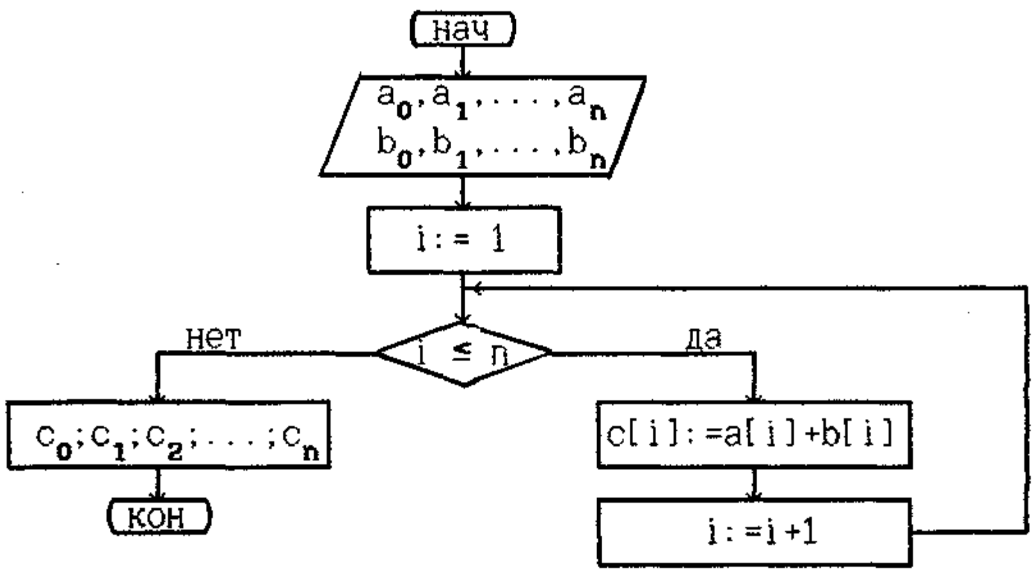



Рис. 4

Запись алгоритма на известном учащимся языке программирования не вызывает особых затруднений. Например, на Бейсике программа будет выглядеть так:

```
 10 INPUT k
 20 DIM a(k), b(k)
 30 REM ввод массивов
 40 FOR i=1 TO k
 50 PRINT "Введите a[",i,"] и b[",i,"]"
 60 INPUT a(i), b(i)
 70 REM вычисление суммы
 80 LET c(i)=a(i)+b(i)
 90 PRINT "c[",i,"]=",c(i)
100 NEXT
110 END.
```

Составленную таким образом программу можно использовать при решении большого числа стандартных упражнений.

В ходе эксперимента выявлено, что в классах, где учащиеся ознакомлены с основами программирования и имеют навыки составления алгоритмов, написания программ и работы на компьютере, уроки обобщающего повторения по теме "Многочлены" проходят эффективно, в хорошем темпе. Использование обучающих программ, работающих в режиме тренажера и в режиме контроля позволяет проводить работу дифференцированно, с учетом возможностей и способностей каждого ученика. В классах же, в которых информатика читается только на старшей ступени обучения (это, прежде всего, классы с углубленным изучением математики, которые создаются в средней школе, начиная с 8 или 10 класса на базе данной школы), формирование навыков составления алгоритмов и решения математических задач с использованием компьютера требует дополнительных затрат времени и вызывает определенные трудности. Преодоление этих трудностей возможно при взаимосвязанном изучении информатики и математики. Учителям этих предметов необходимо согласовать между собой перечень возможных точек соприкосновения, сроки прохождения темы, порядок совместной работы над теоретическим и задачным материалом. Очень важна здесь хорошо налаженная связь и взаимная заинтересованность в результатах этой работы.

Перейдем к описанию возможных вариантов организации учебного процесса при изучении элементов теории делимости многочленов. Специфика предлагаемого методического подхода по отношению к традиционной методике изучения данной темы проявляется на этапе объяснения нового материала. Рассмотрим методические особенности организации этого этапа учебной деятельности.

Заметим, что теория делимости может быть содержательно развита для большого числа колец, к которым относятся кольца многочленов и целых чисел. Теории делимости в них являются частными случаями одной общей теории. Поэтому естественным, а значит, и эффективным является использование аналогии, существующей между этими теориями. Основой для установления этой аналогии является обоснование тождественности структур множества целых чисел и множества многочленов. В целях целостности восприятия материала теории делимости многочленов, целесообразна подача информации крупным блоком. Это, в свою очередь, делает возможным уроки по изучению теоретического материала данной темы провести в форме лекции.

Учащимся, обучающимся по нашей методике известно, что множество целых чисел с введенными в нем операциями сложения и умножения образует кольцо, и что вычислительный аппарат, разработанный для целых чисел может быть перенесен на изучение других объектов, при условии, что множество этих объектов также обладает структурой кольца. Поэтому изучение теоретического материала данной темы можно начать с исследования структуры множества многочленов с рациональными коэффициентами относительно операций сложения и умножения.

При определении рода структуры многочлены и результаты выполнения операций целесообразно представить в общем виде:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

$$f(x)+g(x) = (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0),$$

$$f(x)\cdot g(x) = (a_n\cdot b_n)x^{2n} + (a_{n-1}b_n + a_n b_{n-1})x^{2n-1} + \ldots + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \\ +(a_0+b_0).$$

Учителю следует обратить внимание учащихся на то, что доказательство справедливости аксиом кольца для операций, введенных в множестве многочленов таким образом, основывается на соответствующих свойствах операций сложения и умножения рациональных чисел.

После обоснования структурной принадлежности множества многочленов от одной переменной с введенными операциями сложения и умножения целесообразно предложить учащимся выяснить, что можно сказать о выполнимости деления в кольце многочленов? Аналогия с каким множеством поможет это выяснить? Поиск ответов на данные вопросы стимулирует познавательную деятельность учащихся. Результатом этой деятельности является вывод о том, что:

1) деление в множестве многочленов от одной переменной выполняется не всегда, т.е. не для любых 2-х многочленов $f(x)$ и $g(x)$ существует многочлен $q(x)$, такой, что: $f(x)=g(x)\cdot q(x)$;

2) структурная однотипность множества многочленов и множества целых чисел дает возможность установить и использовать между ними аналогию.

Это позволяет при изложении материала теории делимости многочленов осуществить наиболее целесообразное соединение активности учителя и активности учащихся, что, в данном случае, выражается в обеспечении максимальной степени самостоятельности школьников.

Реализация данного подхода дает возможность рассмотреть с учащимися некоторые наиболее важные свойства делимости многочленов. При этом эффективна и полезна максимальная опора на соответствующие свойства делимости целых чисел. Так, знание того факта, что в множестве целых чисел деление возможно только когда целое число с большим модулем делится на число с меньшим модулем, позволяет учащимся по аналогии, самостоятельно сформулировать следующий вывод: в множестве многочленов ненулевой многочлен меньшей степени не делится на многочлен большей степени. Например, невозможно выполнить деление многочлена $f(x) = x^2 + 2$ на многочлен $g(x) = x^3 + 1$.

Эксперимент показал, что понятен и не вызывает у учащихся затруднений и алгоритм выполнения операции деления многочленов "углом", так как навыки выполнения деления по этому алгоритму многозначных целых чисел у них хорошо сформированы.

Учителю целесообразно заранее подготовить таблицу (или транспарант для графопроектора), где будут приведены основные свойства делимости в множестве Z (таблица 2). Учащиеся, по возможности самостоятельно, формулируют и записывают соответствующие свойства делимости многочленов. Деятельность школьников на этом этапе контролирует учитель. Он направляет мыслительный процесс учащихся в нужном направлении, концентрирует их внимание на главном, помогает выяснить особенности и отличия, обусловленные спецификой рассматриваемого множества, корректирует, при необходимости, выводы учащихся.

Таблица 2

Основные свойства делимости

| целых чисел | многочленов |
|---|---|
| 1. любое целое число всегда делится на 1. | 1. каждый многочлен $f(x)$ делится на любой многочлен нулевой степени. |
| 2. если $a \vdots b$ , то либо $a = 0$, либо $\lvert a \rvert \geq \lvert b \rvert$ | 2. если $f(x) \vdots g(x)$, то либо $f(x)=0$, либо ст $f(x) \geq$ ст $g(x)$ |
| 3. если $a \vdots b$, то для любого $c \in Z$: $a \cdot c \vdots b$ | 3. если $f(x) \vdots g(x)$, то для любого многочлена $h(x)$ $f(x) \cdot h(x) \vdots g(x)$ |
| 4. если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то $(a \pm c)\ \ b$ | 4. если $f(x) \vdots g(x)$ и $h(x) \vdots g(x)$, то $(f(x) \pm h(x)) \vdots g(x)$ |
| 5. если $ac \vdots b$ и $a \not\vdots b$, то $c \vdots b$ | 5. если $f(x) \cdot h(x) \vdots g(x)$ и $f(x) \not\vdots g(x)$ то $h(x) \vdots g(x)$ |
| | 6. если $c \cdot f(x) \vdots g(x)$, где $c$ - число отличное от нуля (многочлен нулевой степени), то $f(x) \vdots g(x)$ |

ст $f(x)$ - степень многочлена $f(x)$

В классах с хорошей подготовкой и достаточным уровнем логического развития можно предложить доказать некоторые из перечисленных свойств. На этапе закрепления изложенного теоретического материала или в качестве дифференцированного домашнего задания учащимся с высоким уровнем познавательной активности полезно предложить задания на доказательство других свойств делимости многочленов. Это будет способствовать расширению и углублению знаний учащихся, повышению их теоретического уровня.

Примеры.

1. Докажите, что:

а) если $f(x) \vdots g(x)$ и $g(x) \vdots h(x)$, то $f(x) \vdots h(x)$

б) если $(f(x) \pm h(x)) \vdots g(x)$ и $f(x) \vdots g(x)$, то $h(x) \vdots g(x)$

в) если $f(x) \vdots g(x)$, то $(h(x) \cdot f(x)) \vdots h(x) \cdot g(x)$ для любого ненулевого многочлена $h(x)$

г) если $f(x)\vdots g(x)$ и $g(x)\vdots f(x)$, то $f(x)=c\cdot g(x)$ для некоторого числа $c$.

2. Докажите, что:

а) нулевой многочлен делится на любой многочлен ненулевой степени;

б) всякий многочлен $n$-й степени имеет бесконечно много делителей $n$-й степени.

Отметим, что умение рассуждать по аналогии формируется успешнее при условии использования этого приема в комплексе с другими приемами мыслительной деятельности, и в первую очередь, с приемом сравнения и конкретизации. Поэтому при изучении данного материала учителю нужно учить школьников выявлять не только сходное в рассматриваемых вопросах, но и улавливать существенные различия. Следует обратить внимание учащихся на то, что наряду со "сходными" чертами множества целых чисел и множества многочленов, существуют различия, источником которых является специфика элементов этих множеств, представляющих собой две конкретные модели одной математической теории. Осознание этого факта стимулирует познавательную деятельность учащихся на выявление и уяснение этих различий. Это способствует пониманию учащимися, что для того, чтобы дать определение какому-нибудь понятию теории многочленов, недостаточно механически "перенести" определение соответствующего понятия из теории целых чисел, заменяя при этом термин "целое число" термином "многочлен". Так, например, необходимым условием выполнимости деления во множестве целых чисел является то, что модуль делимого должен быть не меньше модуля делителя. Для многочленов данное определение не подходит, т.к. многочлены нельзя сравнивать по величине (для них не существует понятий "больше", "меньше"). Сравнивать можно лишь степени многочленов. Поэтому при установлении аналогии понятию "модуль числа" соответствует понятие "степень многочлена".

Выяснение сходства и различия делимости многочленов и целых чисел позволяет подвести учащихся к самостоятельному формулированию определений некоторых понятий и теорем данной темы (таблица 3).

Таблица 3

Использование аналогии между теориями делимости в кольце целых чисел и в кольце многочленов

| теоремы, определения понятий в множестве целых чисел | теоремы, определения понятий в множестве многочленов |
|---|---|
| ТЕОРЕМА О ДЕЛЕНИИ С ОСТАТКОМ | |
| Для любых целых чисел a и b, $b \neq 0$ всегда существуют числа q и r, такие, что выполняется равенство: $a = b \cdot q + r$, $0 \leq r < \lvert b \rvert$. | Для любых многочленов f(x) и g(x) всегда найдутся два таких многочлена q(x) и r(x), что выполняется равенство: $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ и, либо $r(x)=0$, либо ст $r(x) <$ ст $g(x)$. |
| ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЩЕГО ДЕЛИТЕЛЯ | |
| Общим делителем чисел a и b называется такое число d, что $a \vdots d$ и $b \vdots d$. | Общим делителем многочленов f(x) и g(x) называется такой многочлен d(x), что $f(x) \vdots d(x)$ и $g(x) \vdots d(x)$. |
| ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОД | |
| Наибольшим общим делителем 2-х чисел называется наибольший из их общих делителей. | Наибольшим общим делителем 2-х многочленов называется их обший делитель самой большой степени. |
| ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЩЕГО КРАТНОГО | |
| Общим кратным чисел a и b называется такое число s, что $s \vdots a$ и $s \vdots b$. | Общим кратным многочленов f(x) и g(x) называется такой многочлен s(x), что $s(x) \vdots f(x)$ и $s(x) \vdots g(x)$. |
| ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОК | |
| Наименьшим общим кратным 2-х чисел называется наименьшее из их общих кратных. | Наименьшим общим кратным 2-х многочленов называется их общее кратное наименьшей степени. |

В ходе эксперимента убедились, что самостоятельное "открытие" новых знаний (формулировок теорем, определений понятий) повышает интерес к изучаемому материалу, способствует развитию творческих способностей учащихся. Целесообразно приучать школьников иллюстрировать формулировки соответствующими примерами, которые подтверждают выводы, сделанные по аналогии.

При таком изложении теоретического материала нет необходимости еще раз обосновывать правила, которые учащимся известны из теории целых чисел. Так, в экспериментальном обучении задания на нахождение наибольшего общего делителя многочленов предлагали учащимся без предварительного обсуждения способов его вычисления. Тот факт, что большая часть учеников самостоятельно применила алгоритм Евклида для выполнения данного задания указывает на глубину и отчетливость понимания взаимосвязи множества многочленов и множества целых чисел.

Отметим, что данный методический подход предполагает использование эвристического метода обучения. Однако этот метод требует значительных затрат времени и не всегда уместен. В классах, где уровень познавательной активности учащихся недостаточно высок, целесообразнее другой вариант изложения теоретического материала.

Учитель сам формулирует новые определения понятий, свойства, теоремы и сосредотачивает усилия учащихся на их усвоении и закреплении. Затем предлагает ученикам сравнить данные формулировки с соответствующими определениями для целых чисел. При этом можно предложить учащимся составить таблицы, подобные таблицам 2, 3 (или воспользоваться готовыми). Выделив сходное и установив аналогии, учитель ставит перед учениками проблему: чем обусловлена данная аналогия между множеством целых чисел и множеством многочленов? В процессе анализа и решения данной проблемы учащиеся приходят к выводу, что аналогия между двумя множествами основана на глубоком внутреннем "сходстве", т.е., по существу, на одинаковости структуры множества целых чисел и множества многочленов с введенными операциями сложения и умножения. Этот вывод является только гипотезой, обосновать которую учащиеся могут актуализировав имеющиеся у них знания элементов теории алгебраических структур. Роль учителя в раскрытии и обосновании полученного утверждения будет ведущей.

Мы подробно остановились только на организации учебной деятельности на этапе введения некоторых понятий, их свойств и теорем теории делимости многочленов. Остальные этапы учебного процесса (усвоение, закрепление, формирование умений и навыков и т.д.) могут быть проведены по традиционной методике. Эффективность учебной деятельности на этих этапах обеспечивается более прочным и быстрым запоминанием теоретического материала, чему в значительной мере способствует использование аналогии и сравнения множества многочленов и множества целых чисел.

## §2.4. Организация, проведение и результаты экспериментальной проверки эффективности разработанной методики

Педагогический эксперимент использовался нами как средство разработки и подтверждения развиваемых в работе концепций по проблеме исследования. Экспериментальная проверка разработанной методики и подтверждения сформулированной гипотезы осуществлялась в 3 взаимосвязанных этапа.

На I этапе (1992-1993 гг.) осуществлялся констатирующий эксперимент, которым было охвачено 127 учащихся 9-10 классов, изучающих углубленно математику. На этом этапе изучался опыт преподавания математики в профильных школах и классах с углубленным изучением математики, учебные планы и программы различных типов школ, велись наблюдения за учебным процессом, проводились беседы с учителями и учащимися, анкетирование учащихся, учителей, слушателей курсов повышения квалификации при Криворожском педагогическом институте.

В задачи констатирующего эксперимента входило:

а) ознакомление с методикой проведения обобщающего повторения по числовой содержательно-методической линии курса алгебры при углубленном изучении;

б) определение уровня познавательной активности и самостоятельности учащихся на этом этапе обучения;

в) выявление основных форм организации и проведения занятий по обобщению и систематизации математических знаний учащихся.

Констатирующий эксперимент показал, что при рассмотрении числовой линии школьного курса математики, в основном, объектом изучения являются числа, а не соответствующие числовые системы, определяемые заданными в них операциями и отношениями. Это неблагоприятно сказывается на формировании правильных представлений о числовых множествах, изучаемых в школьном курсе математики, является причиной серьезных пробелов в знаниях учащихся ( С.72 ). Традиционная методика обобщающего повторения по числовой линии школьного курса не способствует устранению этих пробелов. Было установлено, что при проведении уроков по систематизации и обобщению деятельность учащихся организуется на репродуктивном уровне и основное внимание уделяется повторению и обобщению вычислительных умений и навыков школьников. Идейный аспект данной темы, как правило, не рассматривается.

Наблюдения за учебным процессом показали, что в практике работы многих учителей не нашли должного применения формы и методы организации и проведения обобщающих занятий, обеспечивающие высокую творческую активность и самостоятельность школьников.

В процессе проведения бесед с учащимися выяснили, что многие школьники не понимают дедуктивного характера современной алгебры. Так, на вопрос: "Какие вы знаете теоремы школьной алгебры?" большая часть опрошенных не могла дать ответа. Те же учащиеся, кто отвечал, называли, в основном, теорему Виета. Почти никто из учеников не смог привести примеры аксиом алгебры.

Результаты констатирующего эксперимента послужили базой для проведения поискового этапа экспериментального исследования. Этот этап проводился в 1993-1994 гг. и был направлен на поиск путей и средств более эффективной организации обобщения и систематизации математических знаний учащихся, способствующих устранению негативных моментов, выявленных на первом этапе.

Эксперимент проводился в 2-х направлениях:
- изучение состояния разработанности исследуемой проблемы в психолого-педагогической, методической литературе;
- практическое исследование.

Результатом теоретического анализа исследуемой проблемы явилось предположение о возможности использования понятий теории алгебраических структур как средства систематизации и обобщения математических знаний учащихся.

В рамках практического исследования были:
1. Посещены и проанализированы уроки алгебры, занятия спецкурсов, индивидуальные занятия в профильных школах, а также факультатив-

ные занятия по математике в 8-10 классах основной школы.
2. Изучена документация (учебные планы, рабочие программы по математике, программы спецкурсов и практикумов) школ нового типа.
3. Проведены беседы с учителями математики профильных школ, анкетирование учащихся, изучен и обобщен опыт отдельных учителей, работающих наиболее результативно.

Выводы, полученные в ходе поискового и констатирующего эксперимента, были положены в основу разрабатываемой нами методики.

Цель формирующего эксперимента состояла в проверке гипотезы исследования, утверждающей, что если содержание основных понятий теории алгебраических структур и их обобщающую роль в построении современной математики использовать с соответствующими дидактическими целями при углубленном изучении школьного курса алгебры, то это будет способствовать повышению теоретического уровня знаний, обеспечению их целостности и обобщенности, а также развитию математической эрудиции, школьников.

Эксперимент проводился в естественных условиях педагогического процесса. Им было охвачено 250 учащихся Саксаганского естественно-научного лицея, СШ № 88, школы-гимназии № 95 г.Кривого Рога, областной педагогической гимназии, СШ № 203 г.Киева, Желтоводского естественно-научного лицея.

Поскольку предлагаемая методика предполагает расширение содержательного компонента методической системы, то изучение отобранного нами учебного материала организовывалось, в основном, на занятиях спецкурсов (профильные школы) и на факультативных занятиях (классы с углубленным изучением математики базовой школы).

Программа одного из спецкурсов с вариантом тематического планирования приведена в приложении.

В связи с тем, что данный материал в традиционном обучении не рассматривается, в нашем исследовании на данном этапе сравнительный эксперимент не проводился. Мы не выбирали контрольных классов, так как было бы педагогически неоправданным требовать от учащихся знание вопросов, которые ими не изучались.

Учителя экспериментальных классов были ознакомлены с задачами эксперимента и обеспечены:

1. Методическими указаниями по организации обучения в условиях эксперимента.

В этих материалах была раскрыта сущность основных понятий теории алгебраических структур, их обобщающая функция в современной математике, целесообразность и возможность использования этих понятий как средства обобщения и систематизации математических знаний учащихся. Указана цель исследования, даны указания по организации обучения в экспериментальных классах: обоснована целесообразность лекционно-практической системы организации занятий, предложены практические советы по подготовке семинарских занятий и рекомендации относительно контроля и оценки знаний учащихся.

2. Методическими рекомендациями по использованию понятий теории алгебраических структур для систематизации и обобщения математических знаний учащихся. Разработка методических рекомендаций и системы упражнений осуществлялась в соответствии с положениями, характеризующими методику обобщения и систематизации знаний учащихся на основе понятий теории алгебраических структур, изложенными во II главе диссертации.

3. Дидактическими материалами для организации самостоятельной познавательной деятельности учащихся.

4. Наборами таблиц, кодопозитивов.

В начале эксперимента с каждым учителем экспериментальных классов проводилась беседа. В ходе беседы учителя были ознакомлены с программой спецкурса, излагалась цель эксперимента и сущность предлагаемой методики, давались указания по организации и проведению лекций, практических и семинарских занятий, советы по руководству деятельностью учащихся при подготовке ими реферативных сообщений, написании индивидуальных творческих работ. Часть занятий была проведена автором данной работы.

Контроль за ходом проведения эксперимента осуществлялся путем посещения занятий, бесед с учителями и учащимися, анализа результатов контрольных работ, зачета. В ходе эксперимента происходило совершенствование дидактических материалов, определялся оптимальный комплекс упражнений, уточнялись методические приемы изложения материала и организационные формы проведения занятий.

Оценка итогов экспериментального обучения была сделана на основании:

а) количественного и качественного анализа результатов выполнения учащимися контрольно-проверочных работ;

б) систематических наблюдений за процессом обучения, бесед, отзывов учителей-экспериментаторов об основных итогах экспериментального обучения и целесообразности предлагаемой методики.

В задачи эксперимента входило - проверить доступность предлагаемого содержания для изучения (в том числе и самостоятельного) его учащимися. Для решения данной задачи, по разработанной программе спецкурса обучались учащиеся 9 классов (122) и учащиеся 10 классов (128). Классы выбирались с приблизительно одинаковым уровнем знаний, умений и навыков по математике. Методика обучения в этих возрастных группах существенно не отличалась. О доступности содержания данного спецкурса судили непосредственно в ходе наблюдений за учебным процессом и опосредованно - по результатам выполнения контрольных работ и итогам зачета. Контрольно-зачетные задания содержали вопросы теоретического и практического характера. По количественному и качественному анализу результатов выполнения практических заданий на зачете и контрольных работах определяли доступность предлагаемого содержания.

Приведем тексты контрольных работ по одному из равноценных вариантов.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА по теме "Бинарные отношения и алгебраические операции".

1. На множестве A={-7;-4;-2;0;1;2;4;7;9;12;14;18} определены отношения:

   а) больше на 3;   б) меньше в 3 раза;

   в) является делителем.

   Задайте отношения с помощью упорядоченных пар, графически, с помощью графа.
2. Задайте 6 отношений, которые можно установить между парой чисел (3;81).
3. Назовите пропущенные элементы и соответствующую операцию (рассмотрите все возможные варианты):

   а) (-5; ...) $\rightarrow$ 28;

   б) (17; ...) $\rightarrow$ 17;

   в) (...; -3) $\rightarrow$ 7;

   г) (...; 13) $\rightarrow$ 1.
4. Определите, какие арифметические действия будут алгебраическими операциями на множестве чисел вида $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$, где a, b, c - произвольные целые числа.
5. Докажите, что операции вычитания целых чисел и деления рациональных чисел, не равных нулю не ассоциативны.

Таблица 4

Результаты контрольной работы в процентах (9 класс)

| | задание | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | V |
| Приступили к выполнению задания | 100 | 100 | 97 | 95 | 91 |
| Выполнили задание полностью | 95 | 92 | 94 | 90 | 84 |
| Выполнили задание частично | 3 | 8 | 3 | - | - |

Таблица 5

Результаты контрольной работы в процентах (10 класс)

| | задание | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | V |
| Приступили к выполнению задания | 100 | 100 | 100 | 100 | 95 |
| Выполнили задание полностью | 100 | 90 | 92 | 90 | 90 |
| Выполнили задание частично | - | 10 | 8 | 4 | - |

По результатам этой контрольной работы мы судили о сформированности у учащихся представлений об обобщающем характере понятий бинарного отношения и алгебраической операции в математике. Из таблиц видно, что учащиеся и 9 и 10 классов успешно справились с заданиями контрольной работы. Существенным является то, что спектр отношений и операций, называемых учащимися при выполнении второго и третьего заданий, достаточно широк. Так, при выполнении задания № 3 в качестве алгебраических операций, кроме арифметических действий сложения, умножения, вычитания и деления назывались следующие операции:

нахождение наименьшего общего кратного:

9 класс - 78%   10 класс - 82%

нахождение наибольшего делителя:

9 класс - 73%   10 класс - 80%

нахождение минимального из 2-х чисел:

9 класс - 68%   10 класс - 67%

нахождение максимального из 2-х чисел:

9 класс - 70%   10 класс - 73%

Это в определенной мере свидетельствует о более глубоком осознании общности математических понятий, о повышении теоретического уровня знаний учащихся.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА по теме "Аксиоматическое построение фрагментов математических теорий".

1. Постройте арифметику вычетов по модулю 4 и установите структуру данной арифметики.
2. Найдите значения выражений в 4-арифметике:

   а) $(2 \oplus 3 \otimes 2 \oplus 3^3)$;

   б) $\frac{0 \ominus 3}{0 \ominus 1} \otimes 2 \oplus 3^2$.
3. Решите уравнения в 4-арифметике:

   а) $x \oslash 3 \oplus 2 = 0$;

   б) $3 \ominus x \otimes 2 = 0 \ominus 3$;

   в) $x \oslash 2 \oplus 3 = 1$.

Таблица 6

Результаты контрольной работы в процентах

| | задание | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | | II | | III | |
| | 9 кл | 10 кл | 9 кл | 10 кл | 9 кл | 10 кл |
| Приступили к выполнению задания | 100 | 100 | 100 | 100 | 98 | 100 |
| Выполнили задание полностью | 92 | 97 | 100 | 100 | 93 | 95 |
| Выполнили задание частично | 6 | 2 | - | - | 4 | 3 |

Из таблицы видно, что выполнение заданий не вызывало у учащихся значительных затруднений. Это свидетельствует о том, что у учеников экспериментальных классов достаточно хорошо сформированы представления об основных типах алгебраических структур, сущности аксиоматического метода и навыки построения моделей математических теорий. Результаты выполнения заданий данной контрольной работы указывают на понимание учащимися того факта, что вычислительный аппарат, разработанный для определенной математической модели (например, множества целых чисел) обладает свойством переноса на другие объекты, если совокупность этих объектов имеет ту же алгебраическую структуру что и данная модель.

Осознанность представлений учащихся об обобщающем значении понятий теории алгебраических структур проверялась и в ходе проводимого в процессе эксперимента зачета по теме "Элементы теории алгебраических структур".

Качественный анализ ответов показал, что рассуждения учащих-

В ходе экспериментального исследования мы пришли к выводу, что наиболее целесообразно ознакомить учащихся с элементами теории алгебраических структур в 10 классе. Во-первых, ученики 10 классов испытывают значительно меньше трудностей при самостоятельной подготовке сообщений, рефератов на семинарские занятия, работе с дополнительной учебной и научной литературой и т.д. Во-вторых, изучение темы "Многочлены от одной переменной" (10 кл.) позволяет применить приобретенные учащимися знания элементов теории алгебраических структур и, тем самым, проверить их осознанность и действенность.

При изучении темы "Многочлены от одной переменной" проводился сравнительный эксперимент. На этом этапе обучение в экспериментальных классах отличалось от обучения в контрольных классах только предлагаемым методическим подходом к изучению элементов теории делимости многочленов. Все другие факторы, которые влияли на процесс обучения мы старались уравнивать: учитывали уровень классификации учителей, тип школ. Количественный состав учащихся контрольных и экспериментальных классов существенно не отличался. Уровень базовых знаний, умений и навыков учащихся экспериментальных и контрольных классов проверялся и сравнивался с помощью статистического критерия (критерия Пирсона). Так, по результатам самостоятельных работ, проведенных перед изучением данной темы проводилась оценка равномерности распределения учащихся в контрольных и экспериментальных классах.

Критерий $\chi^2$ применяется для сравнения объектов двух совокупностей по состоянию некоторого свойства на основе измерений по шкале наименований этого свойства в двух независимых выборках из рассматриваемых совокупностей.

Применяя критерий мы обеспечивали выполнение следующих требований:

- обе выборки случайны;
- выборки независимы и члены каждой выборки независимы между собой;
- шкала измерений может быть самой простой шкалой наименований с несколькими (с) категориями [59, С.96-100].

Учащиеся контрольных и экспериментальных классов были распределены на 4 категории в соответствии с оценками, полученными ими за выполнение контрольных работ.

| | Количество учащихся | получили оценку | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | "2" | "3" | "4" | "5" |
| Контрольные | 132 | 19 | 63 | 41 | 9 |
| Эксперимент. | 128 | 20 | 65 | 32 | 11 |

Сформулируем нулевую гипотезу $H_0$ и альтернативную гипотезу $H_1$:

Гипотеза $H_0$: вероятности распределения учащихся по уровню успеваемости в экспериментальных и контрольных классах равны.

Гипотеза $H_1$: вероятности распределения учащихся по уровню успеваемости в экспериментальных и контрольных классах не равны.

Используя двусторонний критерий $\chi^2$ для случая, когда изучаемое свойство имеет 4 состояния, вычислим значение статистики $T_э$ (наблюдаемое значение) по формуле:

$$T_э = \frac{1}{n_1 \cdot n_2} \cdot \sum_{1=1}^{c} \frac{(n_1 O_{21} - n_2 O_{11})^2}{O_{11} + O_{21}} = \frac{1}{n_1 \cdot n_2} \cdot \sum_{1=1}^{4} \frac{(n_1 O_{21} - n_2 O_{11})^2}{O_{11} + O_{21}} =$$

$$= \frac{1}{n_1 \cdot n_2} \cdot \left[ \frac{(n_1 O_{21} - n_2 O_{11})^2}{O_{11} + O_{21}} + \frac{(n_1 O_{22} - n_2 O_{12})^2}{O_{12} + O_{22}} + \frac{(n_1 O_{23} - n_2 O_{13})^2}{O_{13} + O_{23}} + \frac{(n_1 O_{24} - n_2 O_{14})^2}{O_{14} + O_{24}} \right], \qquad (1)$$

где $n_1$ - число учащихся в экспериментальных классах,

$n_2$ - число учащихся в контрольных классах,

$O_{1i}$ - количество учащихся экспериментальных классов, получивших оценку 5(i=4), 4(i=3), 3(i=2), 2(i=1),

$O_{2i}$ - количество учащихся контрольных классов, получивших соответствующие оценки.

$$T_э = \frac{1}{128 \cdot 132} \cdot \left[ \frac{(128 \cdot 19 - 132 \cdot 20)^2}{20 + 19} + \frac{(128 \cdot 63 - 132 \cdot 65)^2}{63 + 65} + \frac{(128 \cdot 41 - 132 \cdot 32)^2}{41 + 32} + \frac{(128 \cdot 9 - 132 \cdot 11)^2}{9 + 11} \right] \approx 1,305.$$

По таблице [59, С.130] для принятого в педагогических исследованиях уровне значимости $\alpha$ = 0,05 и числа степеней свободы $\nu$=C-1= =4-1=3, определяем критическое значение статистики $\chi^2$-$T_{кр}$ = 7,815. Поскольку $T_э$=1,305, т.е. $T_э < T_{кр}$, то гипотезу $H_1$ следует отклонить как не согласующуюся с экспериментальными данными. Таким образом, на уровне значимости $\alpha$=0,05 может быть принята гипотеза $H_0$: вероятности распределения учащихся по уровню успеваемости в экспериментальных и контрольных классах равны.

Предлагаемый методический подход к изучению элементов делимости многочленов позволил организовать познавательную деятельность учащихся на частично-поисковом уровне. Используя аналогию с множеством целых чисел, основанную на принадлежности данного множества и множества многочленов с одной переменной структуре кольца, строили учебный процесс таким образом, что учащиеся самостоятельно "вводили" многие новые понятия, формулировали определения и свойства понятий, правила вычислений. Учитель, при необходимости, уточнял, дополнял и корректировал выводы учеников. Такой подход позволяет повысить качество восприятия и осознания школьниками программного материала, способствует формированию устойчивых умений и навыков. Об этом свидетельствуют результаты выполнения учащимися контрольно-проверочных заданий. Так, после изучения элементов теории делимости многочленов, учащимся экспериментальных и контрольных классов было предложено выполнить контрольную работу из журнала "Математика в школе" и дополнительного пособия.

Приведем текст одного из вариантов контрольной работы.

1. Найдите остаток и неполное частное при делении многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$:

а) $f(x) = x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4$; $g(x) = x^2 - x + 1$;

б) $f(x) = x^6 - 4x^4 + x^3 - 2x^2 + 5$; $g(x) = x + 3$.

2. При каком значении $k$ выполняется без остатка деление многочлена $x^3 + 6x^2 + kx + 2$ на $x + 4$.

3. Остаток от деления многочлена на двучлен $x - 3$ равен 5, а на двучлен $x + 2$ равен $-3$. Найдите остаток от деления этого многочлена на $x^2 - x - 6$.

4. Найдите многочлен наибольшей степени, на который делятся одновременно многочлены $8x^4 - 28x^3 + 18x^2 + 27x - 27$ и $2x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x$. Сколько существует таких многочленов? Сколько среди них приведенных?

Таблица 7

Результаты контрольной работы

| Классы | Кол-во | написали на: | | | | сред-ний балл | % успе-ваем. | % каче-ства |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | "2" | "3" | "4" | "5" | | | |
| Контрольные | 132 100% | 20 15,2% | 67 50,8% | 38 28,7% | 7 5,3% | 3,24 | 84,8 | 34,1 |
| Эксперимен-тальные | 128 100% | 11 8,6% | 44 34,4% | 60 46,9% | 13 10,1% | 3,59 | 91,4 | 57,4 |

Для проверки достоверности результатов, получаемых при сравнении экспериментальной и традиционной методик изложения использовали статистические методы. Статистический анализ был начат с *нулевой гипотезы* ($H_0$): *различие* в результатах выполнения экспериментальными и контрольными классами одной и той же контрольной работы вызвано случайными причинами, т.е., в действительности уровень выполнения этой работы для обоих классов одинаков.

Учащихся контрольных и экспериментальных классов распределяем на 4 категории в соответствии с оценками (в баллах: 2, 3, 4, 5), полученными ими за выполнение контрольной работы.

Поскольку при сравнении эффективности экспериментальной и традиционной методик выборки учащихся случайны и независимы, члены каждой выборки также независимы между собой, свойство измерено по шкале порядка, имеющей 4 категории: плохо, посредственно, хорошо, отлично, то в нашем случае допустимо применение двустороннего критерия $\chi^2$. Для проверки нулевой гипотезы, подсчет значений статистики критерия $\chi^2$ будем производить по формуле (1), учитывая, что число категорий С = 4.

$$T_э = \frac{1}{128\cdot132}\cdot\left[\frac{(128\cdot20 - 132\cdot11)^2}{20 + 11} + \frac{(128\cdot67 - 132\cdot44)^2}{67 + 44} + \right.$$

$$\left. + \frac{128\cdot38 - 132\cdot60)^2}{38 + 60} + \frac{(128\cdot7 - 132\cdot13)^2}{7 + 13}\right] \approx 14,059.$$

Для уровня значимости $\alpha$=0,05 и числа степеней свободы $\nu$=С-1=4-1=3 критическое значение статистики $T_{кр}$=7,815. Учитывая тот факт, что $T_э > T_{кр}$ (14,059>7,815), то полученные результаты дают достаточное основание для отклонения нулевой и принятия альтернативной ей гипотезы, т.е., что предложенная экспериментальная методика повлияла на результаты выполнения контрольных заданий учащимися. Это дает право говорить об эффективности применения предлагаемой методики изучения темы: "Многочлены от одной переменной".

Проводившие эксперимент учителя дали положительную оценку предлагаемой методике использования понятий теории алгебраических структур для систематизации и обобщения математических знаний учащихся. Среди позитивных моментов они отметили то, что данный методический подход создает хорошие возможности для организации самостоятельной познавательной деятельности учащихся, обеспечивает развитие у школьников правильных представлений о природе математических понятий, позволяет продемонстрировать дедуктивный характер современной алгебры. Учителя-экспериментаторы отмечали доступность разработанной системы упражнений, ее активизирующее влияние на мышление учащихся. Они подчеркивали, что ознакомление учащихся с основными понятиями и идеями теории алгебраических структур способствует более глубокому пониманию взаимосвязи школьной и высшей математики, научной систематизации математических знаний. Таким образом, результаты экспериментального обучения в целом подтверждают правомерность выдвинутой гипотезы и практическую значимость разработанных предложений.

## ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ II

Методические подходы к построению числовой содержательной линии школьного курса математики предполагают систематизацию и обобщение соответствующих математических знаний учащихся на определенном этапе обучения. Выбор понятий теории алгебраических структур в качестве средства систематизации и обобщения знаний учащихся о числовых множествах, изучаемых в школьном курсе математики позволяет наряду с вычислительным рассмотреть достаточно полно и идейный аспект данной темы.

Реализации принципа научности в обучении, повышению теоретического уровня знаний учащихся способствует такая организация обобщения и систематизации математических знаний учащихся по числовой содержательной линии школьного курса, при которой раскрывается:

- идея расширения числовых множеств и, основанная на ней, логическая схема развития понятия числа;
- возможность и условия переноса свойств числовых систем на другие объекты;
- идея о приоритетности изучения отношений между элементами числовых множеств над изучением самих чисел.

Наиболее целесообразной формой организации учебного процесса по систематизации и обобщению математических знаний учащихся является лекционно-практическая система занятий. Она обеспечивает:

- выбор форм и методов организации процесса обучения, соответствующих уровню изучения предлагаемого материала;

- приобщение учащихся к активной самостоятельной работе с учебной и научной литературой;

- переориентацию учебного процесса с "обучения" на "учение", что способствует повышению эффективности учебно-познавательной деятельности учащихся.

Ознакомление учащихся с основными понятиями теории алгебраических структур и осуществление на их основе систематизации и обобщения математических знаний учащихся происходит в процессе:

- *изучения теоретических вопросов данной темы;*

- решения специальной системы упражнений, включающей задания двух типов: подготовительные упражнения, имеющие своей целью пропедевтику введения основных понятий и идей изучаемой темы, и упражнения, предполагающие применение строгих математических определений рассматриваемых понятий;

- подготовки сообщений, рефератов, выполнении индивидуальных творческих работ, на основе самостоятельной работы с учебной и научной литературой.

Использование понятий теории алгебраических структур в процессе обобщения математических знаний позволяет ознакомить школьников с процедурой аксиоматизации математических теорий. Реализация данного процесса предполагает организацию познавательной деятельности учащихся на следующих этапах:

- математическая организация эмпирического материала, заключающаяся в рассмотрении конкретных моделей одной и той же структуры и выявлении одинаковых свойств;

- логико-теоретическая организация материала, предполагающая аксиоматическое построение теории или ее фрагмента;

- конкретизация - реализация построенной теории в новых конкретных ситуациях, построение новых отличных от исходных моделей.

Наглядной иллюстрацией третьего этапа является построение арифметик вычетов и арифметик классов вычетов. При построении этих арифметик, представляющих собой модели основных типов алгебраических структур, создаются условия для самостоятельного математического творчества учащихся, овладения навыками математического моделирования. Изучение арифметик вычетов является примером того, как на простом, небольшом по объему материале, можно учить учащихся фундаментальным математическим идеям.

Обучающий эксперимент подтвердил гипотезу нашего исследования. Полученные результаты исследования позволяют считать использованный в диссертации подход к организации систематизации и обобщения математических знаний учащихся на основе понятий теории алгебраических структур эффективным путем повышения теоретического уровня знаний школьников.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследования были решены его главные задачи.

1. Умение систематизировать и обобщать учебный материал, с одной стороны является критерием интеллектуального развития, с другой - необходимым условием продуктивной умственной деятельности. В связи с этим исследована возможность использования понятий теории алгебраических структур как средства систематизации и обобщения математических знаний учащихся. На основе анализа литературных источников, наблюдений выяснены психолого-педагогические основы углубленного изучения математики в контексте проблемы организации процесса систематизации и обобщения математических знаний.
2. Проанализированы обобщающие и систематизирующие функции понятий теории алгебраических структур в современной математике и определены роль и место данных понятий в процессе систематизации и обобщения алгебраических знаний учащихся (при углубленом изучении).
3. Выявлены педагогические возможности и обоснована целесообразность изучения понятий теории алгебраических структур в углубленном курсе математики.
4. Исследована возможность формирования у учащихся представлений об аксиоматическом построении фрагментов математических теорий на материале курса алгебры; тем самым проэкспериментирован путь интеграции содержания школьных курсов математики средствами математических методов (в данном случае - аксиоматического).

Результаты экспериментального обучения подтверждают правомерность выдвинутой гипотезы о том, что использование содержания понятия алгебраической структуры и его обобщающей роли в построении современной математики с соответствующими дидактическими целями при углубленном изучении школьного курса алгебры способствует повышению теоретического уровня знаний, обеспечивает их целостность и обобщенность, развивает математическую эрудицию школьников и убеждают в практической значимости разработанных предложений.

Полученные нами результаты исследования могут быть использованы при разработке содержания курса алгебры основной и средней школы, спецкурсов и спецпрактикумов для школ естественно-математической направленности, составлении методических пособий, сборников задач и упражнений.

Перспективу развития основных идей нашего исследования мы видим в:

- последовательной реализации идеи изучения традиционного школьного курса математики с позиции современной математической науки как в школах естественно-математической направленности, так и в общеобразовательной.

- специальном исследовании возможности интеграции школьного курса математики средствами математических методов.

# ЛИТЕРАТУРА

1. Активизация деятельности учащихся при обучении математике ∕ Под ред. И.К.Дашковского.-М.:Изд-во Акад.пед.наук,1961.-144с.
2. Актуальные вопросы методики преподавания математики.-М.: МГПИ,1975.-209с.
3. Актуальные вопросы совершенствования школьного математического образования. Сб.н.тр.-М.:НИИШ,1988.-146с.
4. Актуальные вопросы школьной и вузовской методики преподавания математики.-Алма-Ата:Каз-Пи,1985.-87с.
5. Актуальные прблемы дифференцированного обучения ∕ Л.Н.Рожина, И.А.Цыркун, А.В.Василевский и др.: Под ред. Л.Н.Рожиной.-Минск:Нар.асвета,1992.-191с.
6. Алгебра в 7 кл. ∕ Под ред. А.И.Маркушевича.-М.:Просвещение, 1973.-255с.
7. Алгебра в 8 кл. ∕ Под ред. А.И.Маркушевича.-М.:Просвещение, 1974.-272с.
8. Алгебра и начала анализа в 9 кл. ∕ Под ред. С.И.Шварцбурда.-М.:Просвещение,1975.-208с.
9. Алгебра и начала анализа в 10 кл.:Пособие для учителей. ∕ Под ред. С.И.Шварцбурда.-М.:Просвещение,1976.-240с.
10 Алгебра : Учебное пособие для IX-X кл. сред. шк. с мат. специализацией.2-е изд.-М.:Просвещение,1972.-302с.
11. Алгебра и начала анализа : Учеб.пособие для 9 кл. сред.шк. ∕ Под ред. А.Н.Колмогорова.-М.:Просвещение.1975.-222с.
12. Алгебра и начала анализа : Учеб.пособие для 10 кл. сред. шк. ∕ Под ред. А.Н.Колмогорова.-М.:Просвещение,1975.-256с.
13. Алгебра і початки аналізу : Експериментальний навчальний

посібник для 10 класу шкіл з поглибленим вивченням математики та спеціалізованих шкіл фізико-математичного профілю / М.І.Шкіль, Т.В.Колесник, Т.М.Хмара.-К.:"Освіта",1993.-237с.

14. Александров П.С. Введение в теорию групп.-М.:Наука,1980.-143с.
15. Александрова Р.А. Идеи алгебраической структуры в курсе английской средней школы // Математика в школе.-1966.-№ 2.-С.85-86.
16. Александрова Р.А. Одна из экспериментальных программ по математике для средней школы США // Математика в школе.-1967.-№ 3.-С.20-25.
17. Бабанский Ю.К. Оптимизация учебно-воспитательного процесса: Методические основы.-М.:Просвещение,1982.-192с.
18. Бабанский Ю.К. Проблемы повышения эффективности педагогических исследований.-М.:Педагогика,1982.-192с.
19. Барыбина И.А. Элементы современной алгебры на факультативных занятиях в средней школе: Автореферат дис. канд. пед. наук.-М.,1970.-21с.
20. Белов Ю.А., Казарин Л.С. Кольца, поля, Многочлены: Учеб. пособие.-Ярославль,1981.-76с.
21 Белый Б.Н. Становление и развитие советской методики математики на Украине (1917-1970гг.): Автореферат дис. д-ра пед. наук.-М.,1972.-94с.
22. Березина Л.Ю. Графы и их применение: Экспериментальное учебно-методическое пособие для факультативных занятий в 8 кл. ч.I.-М.:Просвещение,1979.-173с.
23. Березина Л.Ю. Использование графов и совершенствование среднего школьного образования: Автореферат дис. канд. пед. наук-М.,1975.-25с.

24. Биркгофф Г. Математика и психология. -М.: Сов. радио, 1977. - 96с.

25. Блох А.Я. О соотношении школьного курса алгебры и базисных математических дисциплин // Современные проблемы методики преподавания математики / Сост. Н.С. Антонов, В.А. Гусев. -М.: Просвещение, 1985. -С. 48-54.

26. Богоявленский Д.И., Менчинская Н.А. Психология усвоения знаний в школе. -М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959. -347с.

27. Бодалев А.А. К вопросу о проявлении способностей у подростка в учении // Тезисы докладов на конференции по проблеме способностей. -Л.: Изд-во ЛГЦ, 1960. -64с.

28. Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я., Яглом И.М. О содержании курса математики в средней школе // Математическое просвещение, вып. 4. -М.: Просвещение, 1959. -С. 131-143.

29. Болтянский В.Г., Глейзер Г.Д. К проблеме дифференциации школьного математического образования // Математика в школе. -1988. -№ 3. -С. 9-13.

30. Болтянский В.Г., Левитас Г.Г. Делимость чисел и простые числа // Дополнительные главы по курсу математики 7-8 классов для факультативных занятий. -М.: Просвещение, 1969. - С. 5-57.

31. Бородін О.І. та ін. Основні поняття сучасної алгебри. -К.: Рад. школа, 1976. -104с.

32. Бронштейн И.Н., Лопишиц А.М. Не изгонять из школы идей аксиоматического метода // Математическое просвещение, вып. 4. - М.: 1959. -С. 151-152.

33. Брушлинский А.В. Психологический анализ мышления как прогнозирования: Автореферат дис. д-ра псих. наук. -М., 1977. -67с.

34. Бурбаки Н. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебры. -М.: Гос. изд-во физ-мат. лит.,1962. -516с.

35. Бурбаки Н. Архитектура математики. -М.: Знание,1972. -32с.

36. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. -М.: Изд-во ин. лит.,1963. -291с.

37. Бурбаки Н. Теория множеств. -М.: Мир,1965. -456с.

38. Бурбаки Н. Элементы математики. -М.: Изд-во ин. лит.,1965. -303с.

39. Бурда М.І. Методичні основи диференційованого формування геометричних умінь учнів основної школи: Автореферат дис. д-ра пед. наук. -К.,1994. -36с.

40. Ван-дер-Варден Б.Л. Алгебра. -М.: Наука,1976. -648с.

41. Видинеев Н.В. Природа интеллектуальных способностей человека. -М.: Мысль,1989. -173с.

42. Винберг Э.Б. Алгебра многочленов: Учеб.пособие для студ.-заочников. -М.: Просвещение,1980. -175с.

43. Виленкин Н.Я. Алгебра: Учеб.пособие для IX-X кл. ср.шк. с матем. специализацией. -М.: Просвещение,1968. -336с.

44. Виленкин Н.Я. Современные проблемы школьного курса математики и их исторические аспекты // Математика в школе. -1988 № 4. -С.7-14.

45. Виленкин Н.Я., Пуркина В.Ф. Использование представлений о математическом моделировании для развития межпредметных связей в обучении // Методика преподавания математики в средней школе. -Свердловск,1981. -С.23-47.

46. Волкова Н.А. Привитие математической культуры графов на факультативных занятиях учащихся 9 кл.: Автореферат дис. канд. пед. наук. -М.,1975. -27с.

47. Воловик П.М. Теорія ймовірностей і математична статистика

в педагогіці. -К.: Рад. школа, 1969. -223с.

48. Вопросы методологии и истории математики / Под ред. И.К. Андронова. -М.: Просвещение, 1972. -159с.

49. Вопросы обоснования содержания школьного математического образования. -М.: НИИ школ, 1981. -172с.

50. Вопросы преподавания алгебры и начал анализа в средней школе. -М.: Просвещение, 1981. -255с.

51. Воскресенская Н.М. Дифференциация обучения в школах Англии // Сов. педагогика. -1988. -№ 12. -С. 118-123.

52. Выготский Л.С. Развитие высших психических функций. -М.: Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1960. -500с.

53. Выготский Л.С. Проблема обучения и умственного развития в школьном возрасте // Избранные психологические исследования. -М.: Изд-во АПН РСФСР, 1956. -С. 438-452.

54. Гальперин П.Я. Развитие исследований по формированию умственных действий / Психологическая наука в СССР. -М.: 1959. -Т. 1. -599с.

55. Гальперин П.Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий // Исследования мышления в советской психологии. -М.; 1966. -С. 236-277.

56. Галицкий М.Л. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа: Пособие для учителя. -М.: Просвещение, 1990. -351с.

57. Гельфанд М.Б. Формування математичних понять у процесі викладання алгебри і початків аналізу. -К.: Рад. школа, 1976. -143с.

58. Гончаренко С.У. Методологические и теоретические основы формирования у учащихся средней школы естественнонаучной картины мира: Автореферат дис. д-ра пед. наук. -К.,

1989.-56с.

59. Грабарь М.И., Краснянская К.А. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы.-М.:Педагогика,1977.-136с.

60. Граве Д.А. Начала алгебры.-Петроград,1915.- 207с.

61. Гроссман И., Магнус В. Группы и их графы.-М.:Мир,1971.-86с.

62. Гусев В.А. Методические основы дифференцированного обучения математике в средней школе: Автореферат дис. д-ра пед. наук.-М.,1990.-39с.

63. Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении.-М.:Педагогика, 1972.-423с.

64. Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения: Опыт теоретического и экспериментального психологического исследования.-М.:Педагогика,1986.-240с.

65. Далингер В.А. Изучение понятия отношения и его свойств на логической основе.-М.:Б.И.,1979.-22с.

66. Далингер В.А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике: Кн. для учителя.-М.:Просвещение, 1991.-80с.

67. Деменчук В.В. Многочлены и микрокалькулятор.-Минск:Вышэйшая шк.,1988.-176с.

68. Дидык Г.В. Содержание и формы углубленного изучения математики в старших классах: Дис. канд. пед. наук.-К., 1989.-163с.

69. Дидактичні аспекти альтернативної освіти.-К.:Освіта,1993.-78с.

70. Диференціація в навчанні математиці. Методичні рекомендації / Бурда М.І., Дивак В.В., Литвиненко Г.М..-К.:1992.-20с.

71. Дополнительные вопросы алгебры: Учеб. пособие для 9 кл. школ (классов) с углуб. теорет. и практ. изучением математики, лицеев, гимназий естественно-математ. профиля.-Харьков,1993.-75с.

72. Дьедонне Ж. Абстракции в математике и эволюция алгебры // Преподавание математики.-М.:Учпедгиз,1960.-С.41-54.

73. *Дьедонне Ж. Основы современного анализа.-М.:Мир,1964.-335с.*

74. Дынкин Е.Б., Успенский В.А. Математические беседы.-М.:Наука,1970.-280с.

75. Евстигнеев В.А. Применение теории графов в программировании / Под ред. А.П.Ершова.-М.:Наука,1985.-352с.

76. Егоров И.П. О математических структурах.-М.:Знание,1976.-64с.

77. Ерганжиева Л.И. Программные стандарты школьной математики в США // К концепции содержания школьного математического образованмя.-М.:Просвещение,1991.-92с.

78. Завало С.Т. Элементы анализа. Алгебра многочленов.-К.:Рад. школа,1972.-462с.

79. Зорина Л.Я. Дидактические основы формирования системности знаний старшеклассников.-М.:Просвещение,1978.-128с.

80. Забранский В.Я. Дифференцированное обучение математике учащихся 5-6 классов основной школы: Автореферат дис. канд. пед. наук.-К.,1991.-19с.

81. Иржавцева В.П., Федченко Л.Я. Систематизация и обобщение знаний учащихся в процессе изучения математики: Пособие для учителя.-К.:Рад.школа,1988.-208с.

82. История математического образования в СССР / Под ред. И.З.Штокало.-К.:Наукова думка,1975.-383с.

83. Кабанова-Меллер Е.Н. Психология формирования знаний и навы-

ков у школьников.-М.:Изд-во АПН РСФСР,1962.-376с.

84. Кабанова-Меллер Е.Н. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся.-М.:Просвещение, 1968.-288с.

85. Калмыкова З.И. Продуктивное мышление как основа обучаемости.-М.:Педагогика,1981.-27с.

86. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии / Под ред. В.А.Успенского.-М.:Наука,1991.-221с.

87. Колмогоров А.Н. Современная математика и математика в современной школе // Математика в школе.-1971.-№ 6.-С.27-30.

88. Колмогоров А.Н., Вавилов В.В., Тропин И.Т. Физико-математическая школа при МГУ.-М.:Знание,1981.-121с.

89. Коменский Я.А. Избранные педагогические произведения.-М.: Учпедгиз,1955.-651с.

90. Концепція базовоі математичноі освіти в Украіні.-К.,1993.-31с.

91. Концепция развития школьного математического образования // Математика в школе.-1990.№ 1.-С.2-14.

92. Кржемінська Г.К. Відношення в шкільному курсі математики // Методика викладання математики.-вип.7.-1971.-С.152-156.

93. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников.-М.:Просвещение,1968.-431с.

94. Крутецкий В.А. Психология обучения и воспитания школьников. Книга для учителей и классных руководителей.-М.:Просвещение,1976.-303с.

95. Кудрявцев Л.Д. Современная математика и ее преподавание: Учеб. пособие для студентов мат. спец. вузов.-М.:Наука, 1985.-170с.

96. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика?.-М.:Просвеще-

ние,1966.-558с.

97. Левин В.И. Некоторые вопросы преподавания математики // Математическое просвещение. вып.4.-М.,1959.-С.145-15[illegible]

98. Лекционно-семинарская система преподавания математики // Математика в школе.-1987.-№ 3.-С.8-17.

99. Леонтьев А.Н. Избранные психологические произведения.-Т.1./ Под ред. В.В.Давыдова и др.-М.:Педагогика,1983.-391с.

100. Лернер И.Я. Процесс обучения и его закономерности.-М.: Знание,1980.-96с.

101. Лихнерович А. Проникновение духа современной алгебры в элементарную алгебру и геометрию // Преподавание математики.-М.:Учпедгиз,1960.-С.53-68.

102. Лялькина А.Т. Методика изучения и применения элементов теории отношений в 8-летней школе: Автореферат дис. канд. пед. наук.-М.,1974.-21с.

103. Ляпунов А.А. О роли математики в среднем образовании // Математическое просвещение, вып.4.,М.,1959.-С.152-154

104. Мальований Ю.І., Слєпкань З.І. Уроки з алгебри в VI кл. Посібник для вчителя.-К.:Рад.школа,1974.-188с.

105. Малюга С.М. Тексти лекцій з алгебри за розділом "Многочлени над числовими полями".-Ніжин,1991.-360с.

106. Маркушевич А.И. Дополнительные вопросы арифметики целых чисел // Математика в школе.-1967.-№ 1.-С.13-16.

107. Математика.Миндленский экспериментальный учебник.-М.: Просвещение,1971.-413с.

108. Математика. Посібник для факультативних занять у 10 кл.-К.: Рад. школа,1970.-259с.

109. Математика. Посібник для факультативних занять у 9 кл.-

К.:Рад. школа,1972.-190с.

110. Мартишук О.І. Доведення та узагальнення в шкільному курсі алгебри і елементарних функцій.:Дис. канд. пед. наук. К.,1968.-319с.

111. Менчинская Н.А. Моро М.И. Вопросы методики и психологии обучения арифметики в начальных классах.-М.:Просвещение, 1965.-224с.

112. Метельский Н.В. Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы.-Минск:Изд-во БГУ,1982.-256с.

113. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / Ю.М.Колягин, В.А. Оганесян, В.Я.Саннинский, Г.Л. Луканин.-М.:Просвещение,1975.-462с.

114. Методика преподавания математики: Общая методика / Сост. Р.С.Черкасов, А.А.Столяр.-М.:Просвещение,1985.-336с.

115. Методологические и теоретические прблемы активизации учебно-познавательной деятельности в свете реформы школы: Межвузовский сборник научных трудов.-Л.:ЛГПИ им. А.И.Герцена,1986.-173с.

116. Методологический анализ закономерностей развития математики.-М.,1989.-220с.

117. На путях обновления школьного курса математики. Сборник статей / Сост. А.И.Маркушевич и др.-М.:Просвещение,1978.-303с.

118. Некоторые вопросы методики математики / Под ред. М.М.Тоненковой.-Горький,1972.-126с.

119. Нечаев В.И. Числовые системы: Пособие для студентов пединститутов.-М.:Просвещение,1975.-199с.

120. Нешков К.И. Школьный учебник в системе дидактического обеспечения учебного процесса // Советская педагогика.-

1982. -№ 8. -С. 41-45.

121. Нове у викладанні математики: Збірник статей / Упорядк. О.С. Дубинчук, З.І. Слєпкань. -К.: Рад. школа, 1972. -160с.

122. Новое в школьной математике. -М.: Знание, 1972. -200с.

123. Обучение в математических школах: Сборник статей / Сост. С.И. Шварцбурд, В.М. Монахов, В.Г. Ашкинузе. -М.: Просвещение, 1965. -299с.

124. Оганесян В.А., Колягин Ю.М. Развитие движения за модернизацию педагогики математики в зарубежной школе ( в 2-х частях). ч.1. -Ереван, 1973. -90с.

125. Одинцов П.К. Вопросы общей алгебры в программах и учебниках по математике гимназии Нешатель (Швейцария) // Математика в школе. -1969. -№ 4. -С. 91-93.

126. Одинцов П.К. Начала общей алгебры в курсе математики средней школы: Автореферат дис. канд. пед. наук. -Казань, 1972. -24с.

127. Онищук В.О. Активізація навчання старшокласників. -К.: Рад. школа, 1978. -128с.

128. Онищук В.О. Узагальнення та систематизація знань учнів. -К.: Рад. школа, 1970. -134с.

129. О проблемах преподавания курса математики в школах Эстонской ССР: Сборник статей / Под ред. А.Э. Тельгмаа. -Таллин, 1982. -143с.

130. Оре О. Графы и их применение. -М.: Мир, 1965. -174с.

131. Оре О. Приглашение в теорию чисел. -М.: Наука, 1980. -127с.

132. Оре О. Теория графов. -М.: Наука, 1980. -336с.

133. Осинская В.Н. Активизация познавательной деятельности учащихся на уроках математики в 9-10 классах. -К.: Рад. школа, 1980. -143с.

134. Осинская В.Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике: Книга для учителя.-К.: Рад. школа,1989.-188с.

135. Основы дидактики / Под ред. Есипова Б.П.-М.:Просвещение, 1967.-472с.

136. Особливості поглибленого вивчення математики в 10 класі: Методичні рекомендації.-К.:Освіта,1992.-112с.

137. Паламарчук В.Ф. Школа учит мыслить.-М.:Просвещение,1979.-144с.

138. Папи Ф., Папи Ж. Дети и графы.-М.:Педагогика,1974.-191с.

139. Петрова Е.С. Организация познавательной деятельности учащихся старших классов средней школы в условиях углубленного изучения математики.-Саратов,1991.-79с.

140. Перспективы развития математического образования в средней школе: Сборник научных трудов / Сост. И.А.Лурье.-М.: Ин-т содерж. и методов обучения,1975.-80с.

141. Перспективы развития математического образования в средней школе 90-х гг.: Сборник научных трудов / Под ред. Г.Г.Масловой.-М.,1977.-40с.

142. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. Психология интеллекта. Генезис числа у ребенка. Логика и психология.-М.:Просвещение,1969.-659с.

143. Пиаже Ж., Бет Э. и др. Преподавание математики.-М.:Учпедгиз,1960.-162с.

144. Пікан В.В. Формування узагальнюючих понять сучасної математики при викладанні тригонометричних функцій у середній школі: Дис. канд. пед. наук.-К.,1974.-191с.

145. Планирование учебного материала для IX кл. с углуб. изучением математики: Методические рекомендации.-М.:Б.И.,

1990. -176с.

146. Побережник І.Ю. Формування уявлень про основні ідеї сучасної алгебри в шкільному курсі: Дис. канд. пед. наук. -Вінниця,1972. -166с.

147. Повышение эффективности обучения математике в школе: Книга для учителя. -М.:Просвещение,1989. -239с.

148. Пойа Д. Как решать задачу. -Пер. с англ. / Под ред. Ю.М.Гайдука, 2-е изд. -М.:Просвещение,1961. -207с.

149. Програми середньої школи: Математика V-X класи. -К.:Рад. школа,1949. -32с.

150. Програма з математики для V-XI класів середньої загальноосвітньої школи. -К.:Рад. школа,1989. -88с.

151. Програма середньої загальноосвітньої школи: Факультативний курс з математики (VII-XI клас). -К.:Рад. школа,1988. -24с.

152. Программа школ (классов) с углубленным теоретическим и практическим изучением математики // Математика в школе. -1990. -№ 3. -С.32-40.

153. Проскуряков И.В. Числа и многочлены. -М.:Просвещение, 1965. -284с.

154. Рабунский Е.С. Индивидуальный подход в процессе обучения школьников на основе анализа их совместной учебной деятельности. -М.:Педагогика,1975. -184с.

155. Репьев В.В. Методика преподавания алгебры в 8-летней школе: Пособие для учителей. -М.:Просвещение,1967. -276с.

156. Римаренко В.Е. Семінарські заняття у школі. -К.:Рад. школа,1981. -124с.

157. Рубинштейн С.Л. Бытие и сознание. -М.:Изд-во АН СССР,1957. -328с.

158. Самарин Ю.А. Очерки психологии ума. Особенности умственной деятельности школьников.-М.:Изд-во АПН РСФСР,1962.-298с.

159. Семушин А.Д. Активизация мыслительной деятельности учащихся при изучении математики. Обучение обобщению и конкретизации.-М.:Просвещение,1978.-64с.

160. Слєпкань З.І. Методика викладання алгебри і початків аналізу.-К.:Рад. школа,1978.-224с.

161. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике:Методическое пособие.-К.:Рад. школа,1983.-193с.

162. Современная дидактика:теория-практике / Под ред. И.Я.Лернера, И.К.Журавлева.-М.,1994.256с.

163. Сойер У.У. Прелюдия к математике.-М.:Просвещение,1972.-192с.

164. Сойер У.У. Путь в современную математику.-М.:Мир,1970.-200с.

165. Столяр А.А. Как математика ум в порядок приводит.-Минск: Вышэйшая школа,1991.-207с.

166. Столяр А.А., Рогановский Н.М. Математические структуры: Основы современной школьной математики. Ч.1. Язык. Множества. Отношения. Функции. Математические структуры.-Минск:Нар.асвета,1975.-244с.

167. Столяр А.А. Педагогика математики:Учебное пособие для студентов физ-мат. фак. пед. ин-тов.-Минск:Вышэйшая школа,1986.-414с.

168. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики.-М.:Наука, 1984.-284с.

169. Стюарт Я. Концепции современной математики.-Минск:Вышэйшая школа,1980.-382с.

170. Таварткиладзе Р.К., Виленкин Н.Я. О путях совершенствования содержания и преподавания школьного курса математики.-Тбилиси:Изд-во Тбил. ун-та,1985.-356с.

171. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний.-М.: Изд-во МГУ,1975.-343с.

172. Тарасенкова Н.А. Активизация познавательной деятельности учащихся в условиях лекционно-практической системы обучения математике в школе: Автореферат дис. канд. пед. наук.-К.,1991.-19с.

173. Таточенко В.И. Методика формирования у учащихся 6-8 классов приемов умственной деятельности при обучении математике: Дис. канд. пед. наук.-К.,1989.-179с.

174. Том Р. Современная математика - существует ли она? // На путях обновления школьного курса математики.-М.,1978.-С.264-274.

175. Тоненкова М.М. Отношения между понятиями и основные операции над понятиями / Некоторые вопросы методики математики. В помощь учителю.-Горький:ГКПИ им. М.Горького, 1972.-С.75-98.

176. Торндайк А. Вопросы преподавания алгебры (Психология алгебры).-М.,1934.-231с.

177. Унт И. Индивидуализация и дифференциация обучения.-М.: Педагогика,1990.-188с.

178. Фадеев Д.К. Алгебра в 8 классе.-М.:Просвещение,1983.-272с.

179. Федотова Т.Я. Изучение отношений между элементами двух множеств // Вопросы преподавания математики в школе.-Тула,1972.-С.24-42.

180. Федотова Т.Я. Использование математических структур для осуществления внутрипредметных связей в 8-летней школе

// Преемственность в обучении математике: Пособие для учителей: Сборник статей / Сост. А.М.Пышкало.-М.,1978.-С.36-41.

181. Федотова Т.Я. Математические структуры - как основа построения единого курса математики в 8-летней школе: Автореферат дис. канд. пед. наук.-М.,1975.-24с.
182. Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру.-Пер. с венг. Ю.А.Данилова.-М.:Мир,1978.-260с.
183. Фридман Л.М. Наглядность и моделирование в обучении.-М.: Знание,1984.-80с.
184. Фурман А.В. Психодіагностика інтелекту в системі диференціації навчання:Кн. для вчителя.-К.:Освіта,1993.-224с.
185. Фуше А. Педагогика математики. Пер. с франц. М.З.Рабинович / Под ред. И.К.Андронова.-М.:Просвещение,1969.-126с.
186. Хамов Г.Г. Алгебра и теория чисел в школьной математике: Учебное пособие.-Мурманск,1991.-120с.
187. Хмара Т.М. Вивчення питань подільності чисел у восьмирічній школі: Дис. канд. пед. наук.-К.,1974.-194с.
188. Хмара Т.М. Математична хрестоматія для 6-8 кл.-К.:Рад. школа,1968.-319с.
189. Хмара Т.М. Незвичайні арифметики // У світі математики.-вип.5.-К.:Рад. школа,1974.-С.7-14.
190. Хмара Т.М. Відношення еквівалентності й арифметика лишків // Нове у викладанні математики.-К.:Рад. школа,1972.-С.34-44.
191. Хрестоматия по истории математики. Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия: Пособие для студентов физ-мат. фак. пед. ин-тов / Под ред. А.П.Юшкевич.-М.:Просвещение,

1976.-319с.

192. Черкасов В.А. Дидактические основы построения системы упражнений: Учебное пособие.-Челябинск:Челяб.ГПИ.,1978.-91с.

193. Шварцбурд С.И. Математическая специализация учащихся средней школы. Из опыта работы школы № 44 г.Москвы.-М.: Изд-во АПН РСФСР,1963.-152с.

194. Шварцбурд С.И. Проблемы повышенной математической подготовки учащихся: Автореферат дис. д-ра пед. наук.- М., 1972.-105с.

195. Шварцбурд С.И., Бокалев О.А. Углубленное изучение алгебры и анализа: Пособие для учителей.-М.:Просвещение,1977.-204с.

196. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Хмара Т.М. Розділ "Вступ до курсу алгебри і початків аналізу" (X кл) / для класів фіз-мат. профілю // Рад. школа.-1991.-№ 8.-С.65-70.

196. Эльконин Д.Б. Избранные психологические труды / Под ред. В.В.Давыдова, В.П.Зинченко.-М.:Педагогика,1989.-554с.

197. Яглом И.М. Математика и реальный мир.-М.:Знание,1978.-63с.

198. Яглом И.М. Математические структуры и математическое моделирование.-М.:Сов. радио,1980.-145с.

199. Яглом И.М. Необыкновенная алгебра.-М.:Наука,1968.-71с.

200. Якиманская И.С.,Юдашина Н.И. Особенности познавательных интересов старшеклассников в условиях дифференциации обучения // Вопросы психологии.-1989.-№ 3.-С.32-39.

201. Etudes sur l'enseignement des mathematiques. Vol 6 / Prepare sous la direction de Robert Morris.-Paris:UNESCO, 1990.-160p.

202. Matematiques bacealaureat: Exerciceet problemes resolus avec rappels de cours / O.Lachen, B. Aziz, M.Tadeb, El.A.Abdelatif.-Casablanca,1984.-268p.

203. Modernisation de l'enseignement matematiques dans les pays europeens.-Editions didactiques et pedagogiques, 1968.-572p.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Алгебраические операции в школьном курсе математики

| № | Действие, изучаемое в школьном курсе математики | Мн-во на котором рассм. действ | Замкн мн-ва относ действ. | Единств. результата | Является ли алг. опер. | Свойства операции | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | коммутативн. | ассоциативн. | существов. нейтр. эл-та | существов. сим. эл-та |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | Сложение | N | + | + | + | + | + | – | – |
| | | Z | + | + | + | + | + | + | + |
| | | Q | + | + | + | + | + | + | + |
| | | R | + | + | + | + | + | + | + |
| | | C | + | + | + | + | + | + | + |
| 2 | Вычитание | N | – | | | | | | |
| | | Z | + | + | + | – | – | – | – |
| | | Q | + | + | + | – | – | – | – |
| | | R | + | + | + | – | – | – | – |
| | | C | + | + | + | – | – | – | – |
| 3 | Умножение | N | + | + | + | + | + | + | – |
| | | Z | + | + | + | + | + | + | – |
| | | Q | + | + | + | + | + | + | + |
| | | R | + | + | + | + | + | + | + |
| | | C | + | + | + | + | + | + | + |
| 4 | Деление (кроме деления на 0) | N | – | | | | | | |
| | | Z | – | | | | | | |
| | | Q | + | + | + | – | – | – | – |
| | | R | + | + | + | – | – | – | – |
| | | C | + | + | + | – | – | – | – |
| 5 | Возведение в степень | N | + | + | + | – | – | – | – |
| | | Z | – | | | | | | |
| | | Q | – | | | | | | |
| | | R | + | + | + | – | – | – | – |
| 6 | Извлечение арифметич. квадратного корня | Q | – | | | | | | |
| | | $R^+$ | + | + | + | – | – | – | – |
| 7 | Нахождение общего делителя | Z | + | – | – | | | | |
| 8 | Нахождение общего кратного | Z | + | – | – | | | | |
| 9 | Нахождение НОД | N | + | + | + | + | + | + | + |
| 10 | Нахождение НОК | N | + | + | + | + | + | – | – |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | Нахождение наимень-шего из 2-х чисел | R | + | + | + | + | + | – | – |
| 12 | Нахождение наиболь-шего из 2-х чисел | R | + | + | + | + | + | – | – |

N - множество натуральных чисел;

Z - множество целых чисел;

Q - множество рациональных чисел;

R - множество действительных чисел;

C - множество комплексных чисел.

Таблица 2

Вопросы теории алгебраических структур в программе факультативного курса по математике

| Тема факультативных занятий | Класс | К-во часов | Содержание темы |
|---|---|---|---|
| Язык теории графов и некоторые его применения | 8 | 8 | - задачи, приводящие к понятию графа<br>- основные понятия теории графов;<br>- ориентированные графы;<br>- построение сетчатого графа;<br>- нумерация вершин графа;<br>- критический путь;<br>- нахождение кратчайшего расстояния |
| Отношения и операции | 9 | 10 | - множество, операции над множествами и их свойства;<br>- прямое (декартово) произведение множеств;<br>- отношения на множестве;<br>- интуитивное и строгое понятие отношения;<br>- примеры и основные свойства бинарных отношений. Отношение порядка и эквивалентности;<br>- функциональные отношения;<br>- алгебраические операции и их свойства. |
| Про современную алгебру и некоторые ее применения | 10 | 14 | - предмет современной алгебры;<br>- основные структуры: группы, кольца поля;<br>- связь основных структур с школьной математикой, применение в науке и на практике. |

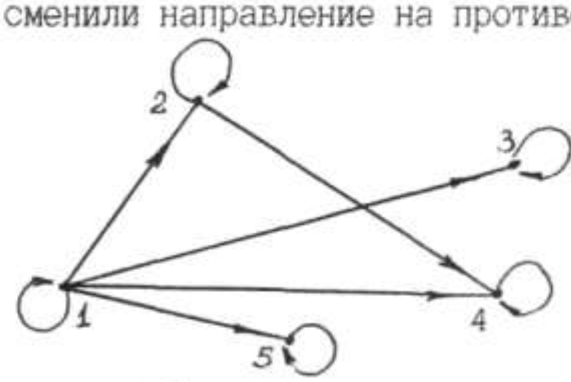
Листок с зачетным заданием по теме:

"Элементы теории алгебраических структур".

1. Определите является ли множество:

   $M = \{(1;-2),(5;-2),(8;-2),(1;0),(5;0),(8;0),(1;3),(5;3),(5;5),$
   $(8;-2),(8;0),(8;3),(8;5)\}$

   произведением множеств A и B, если $A=\{1;5;8\}$, $B=\{-2;0;3;5\}$.
2. Пусть A - множество прямых на плоскости. В каком отношении могут находиться пары прямых (a,b) принадлежащих AxA?
3. Каким отношением надо заменить отношение, заданное на графе, чтобы стрелки сменили направление на противоположное?




4. На рисунке точками изображены элементы множества $M = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$. Стрелками - отношение "а делит b" (петли опущены). Какая точка соответствует каждому числу? Как выглядят простые числа? Почему?

5. Назовите числа, противоположные данным: ab; a+b; a-b; 2a-b; $\frac{a+b}{a}$; $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}$.
6. Заданы числа 53; 144; $\frac{1}{9}$; 3.5; -26; -1; 1. Назовите три пары чисел, соответствующие им операции, по которым этим парам можно

поставить в соответствие заданные числа.

7. Проверьте, будут ли алгебраическими операциями на множестве натуральных чисел следующие действия:

   а) нахождение минимального из 2-х чисел;

   б) нахождение максимального из 2-х чисел;

   в) нахождение общего делителя двух чисел;

   г) нахождение наименьшего общего кратного 2-х чисел.

8. В каком из следующих множеств для любого его элемента содержится и симметричный ему элемент, относительно операции умножения:

   а) $A = \{\frac{1}{4};\ 0;\ 4; 7\}$; б) $B = \{-1;\ -\frac{3}{7};\ 0;\ \frac{3}{7};\ 1\}$;

   в) $C = \{-1;\ -\frac{2}{3};\ \frac{3}{2};\ 1\}$; г) $E = \{1;\ 2\}$;

   д) $D = \{1;\ \frac{3}{7};\ \frac{1}{2};\ 2;\ \frac{7}{3}\}$; е) $F = \{-2;\ -1;\ \frac{4}{7};\ 3;\ 25\}$.

9. Определите, какие из данных операций будут коммутативными и ассоциативными в произвольном числовом множестве:

   а) $a*b = \frac{a-b}{2}$; б) $a*b = b - a$;

   в) $a*b = a^2$; г) $a*b = b$.

10. Выясните, образует ли группу каждое из множеств при указанной операции над элементами:

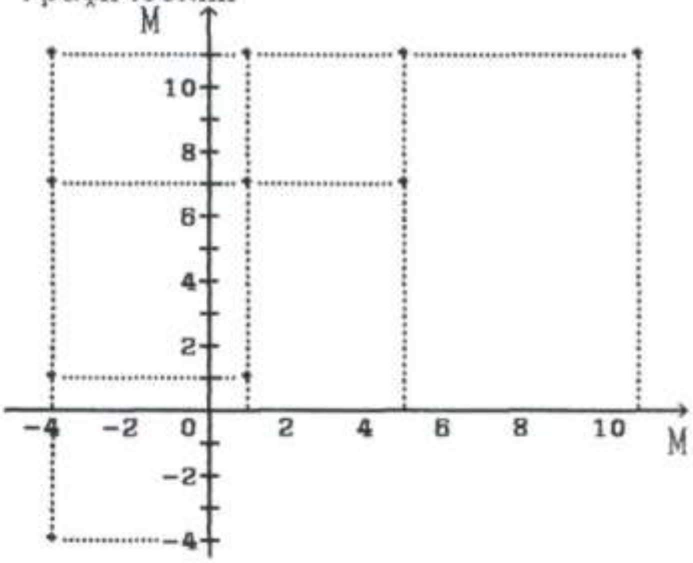
    а) степени данного действительного числа $a$; $a \neq 0$; $\pm 1$, с целыми показателями относительно умножения;

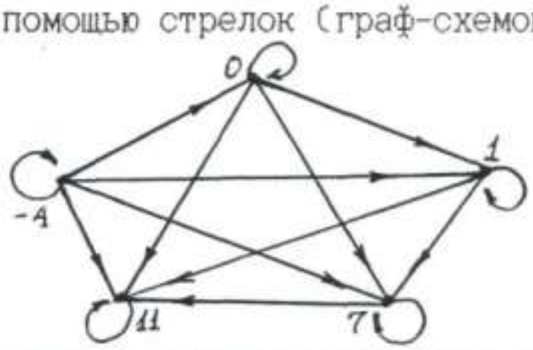
    б) рациональные числа, знаменатели которых степени числа 2 с целыми неотрицательными показателями, относительно сложения.

11. Определите, образует ли кольцо множество чисел, вида $a+b\sqrt{3}$ с рациональными $a$ и $b$ относительно операций сложения и умножения.

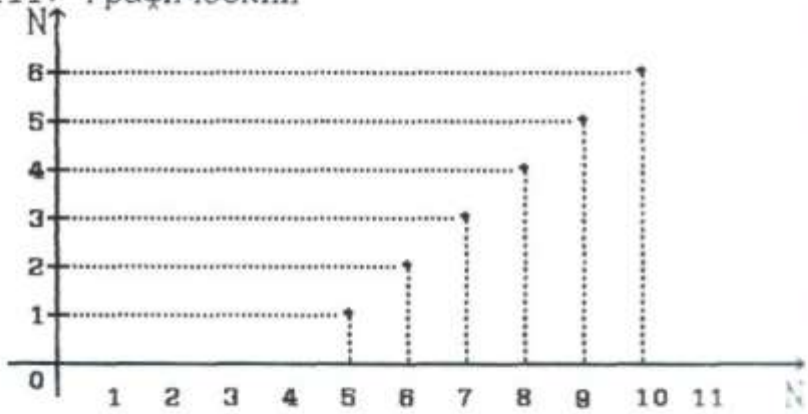
Таблица 3

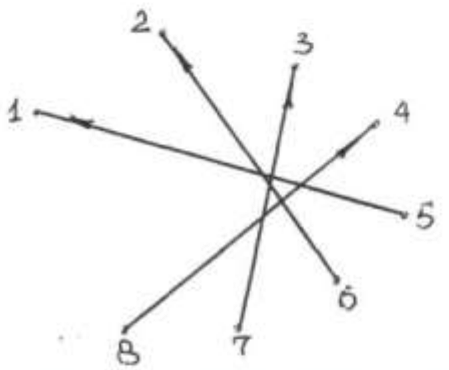
## Примеры задания бинарных отношений

<table>
<tr><th>словесное описание отношения</th><th>другие способы задания отношения</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>на множестве $M=\{-4;0;1;7;11\}$ задано отношение "не больше"</td><td>
I. перечислением пар:<br>
$K = \{\ (x;y), (x,y) \in M^2$ и $x \le y\ \}$<br>
$K = \{\ (-4;-4), (-4;0), (-4;1), (-4;7), (-4;11), (0;0), (0;1), (0;7), (0;11), (1;1), (1;7), (1;11), (7;7), (7;11), (11;11)\ \}$<br>
II. таблицей:
<table>
<tr><th>x \ y</th><th>-4</th><th>0</th><th>1</th><th>7</th><th>11</th></tr>
<tr><td>-4</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>0</td><td></td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>11</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>+</td></tr>
</table>
III. графический<br>


IV. с помощью стрелок (граф-схемой):<br>


</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th></tr>
<tr>
<td>на множестве натуральных чисел задано отношение "больше на 4"</td>
<td>
I. перечислением пар:<br>
$M = \{ (x;y), (x,y) \in N^2$ и $x=y+4 \}$<br>
$M = \{ (5;1), (6;2), (7;3), (8;4), \ldots \}$<br>
II. таблицей:
<table>
<tr><th>y \ x</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>...</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>+</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>+</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>+</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
III. графический<br>


IV. с помощью стрелок (граф-схемой):<br>


</td>
</tr>
</table>

Таблица 4

Упражнения на формирование представлений об обобщающем понятии современной алгебры - алгебраической операции

| типы упражнений | примеры упражнений данного типа |
| --- | --- |
| 1 | 2 |
| 1. на правильное понимание определения действия, понятия выполнимости действия в определенном множестве и замкнутости множества относительно некоторого действия | - Будут ли замкнуты относительно действий сложения, вычитания и умножения такие числовые множества:<br>а) {1;2;3;4} б) {0;1} в) {0} г) {1}<br>д) множество всех натуральных чисел, больших 3?<br>- Будут ли замкнуты относительно действий сложения и умножения такие множества:<br>а) всех четных чисел;<br>б) всех нечетных чисел;<br>в) всех целых чисел, кратных 5;<br>г) всех целых чисел, имеющих в своей записи последней цифрой 0;<br>д) всех простых чисел? |
| 2. на проверку справедливости законов действий в различных числовых множествах | - Какие из следующих утверждений ложны, если a, b, c - действительные числа и $a \neq b$:<br>а) $a + b = b + a$;<br>б) $(a + b) + c = a + (b + c)$;<br>в) $a \cdot b = b \cdot a$;<br>г) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;<br>д) $a - b = b - a$;<br>е) $(a - b) \cdot c = ac - bc$;<br>ж) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ ? |
| 3. на раскрытие значения основных свойств (законов) действий для вывода различных правил; тождественных преобразований | - Упростите выражение и назовите какие свойства действий сложения, умножения и вычитания применялись при этом:<br>а) $m \cdot (c + m) - c \cdot (m + c)$;<br>б) $a^2 - b \cdot (a + b) + a \cdot (b - a)$;<br>в) $a \cdot (b^2 - a) + b \cdot (a^2 - b) + (a - b)^2$.<br>- Назовите, какие свойства действий сложения, умножения и вычитания применялись при выводе формул сокращенного умножения? |

| 1 | 2 |
|---|---|
| 4. на наличие нейтральных и симметричных элементов в конкретных множествах для различных алгебраических операций | - Существует ли в множестве целых чисел, еще число, которое имеет свойство 0? Ответ обосновать.<br>- Для каждого ли целого числа существует ему противоположное? Если существует, единственно ли оно?<br>- Назовите числа, противоположные данным: $ab$; $a+b$; $a-b$; $2a-b$; $\frac{a+b}{a}$; $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}$; $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$.<br>- Существует ли в заданном множестве для каждого числа ему противоположное:<br>а) множество отрицательных чисел;<br>б) $A = \{-1;1\}$ в) $E = \{-1;0;1\}$<br>г) множество всех правильных дробей?<br>- Могут ли быть взаимнообратными числами:<br>а) два целых числа;<br>б) две правильные дроби;<br>в) два равных числа;<br>г) числа, противоположных знаков?<br>- Укажите числа, обратные данным отличным от нуля:<br>а) $a$; б) $-a$; в) $\frac{1}{a}$; г) $a + b$;<br>д) $2(a + \frac{1}{a})$; е) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. |

Дидактическая игра: Математический турнир.

Тема: Выполнение вычислений в m-арифметиках.

На проведение турнира отводится 10-15 минут.

Класс делится на две команды. Каждой команде предлагается -5 примеров. Через определенное время каждый ученик должен запи- ать в тетрадь решение примеров своей команды и уметь их объяс- ить. Допускаются консультации внутри команды. Затем начинается урнир. Капитаны команд называют участников из другой команды. ервая пара названных учеников обменивается примерами своей ко- анды (по выбору), идет к доске и начинает решение. Если позво- яет площадь доски, можно сразу вызвать три пары. По окончании бъяснений к доске идут следующие пары и т.д. Побеждает та коман- а, которая правильно решит и объяснит большее количество приме- ов другой команды. За ответом следят все ученики. Арбитром выс- упает учитель.

Примеры заданий одной из команд.

. Вычислите значение выражения в 5-арифметике, если порядок вы- олнения действий такой, как в обычной арифметике:

$$\frac{4 \otimes (2 \ominus 3)}{2 \ominus 4} \oplus 3 \otimes 2.$$

. Решите уравнение в 5-арифметике: $(4 \odot x \ominus 3) \oplus 2 = 1$.

. Упростите выражение и найдите значение при m=4, n=2 в 5-ариф- метике:

$m \otimes (m \oplus n) \ominus n \otimes (n \oplus m)$.

. Представьте выражения в виде произведения в 5-арифметике:

) $3 \otimes m \ominus 1$;

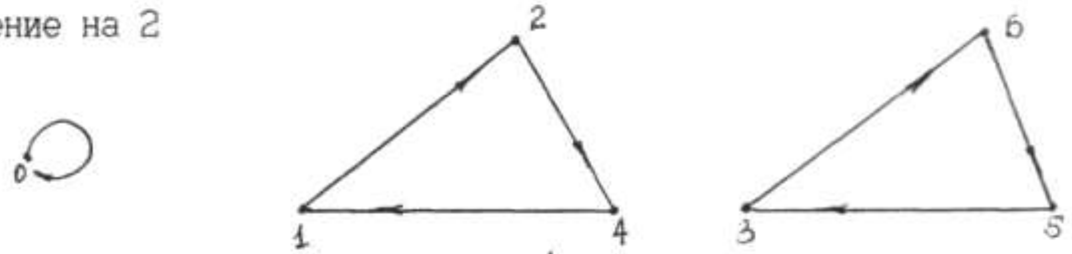
) $2 \otimes m \ominus 3$;

) $m^2 \ominus 4$.

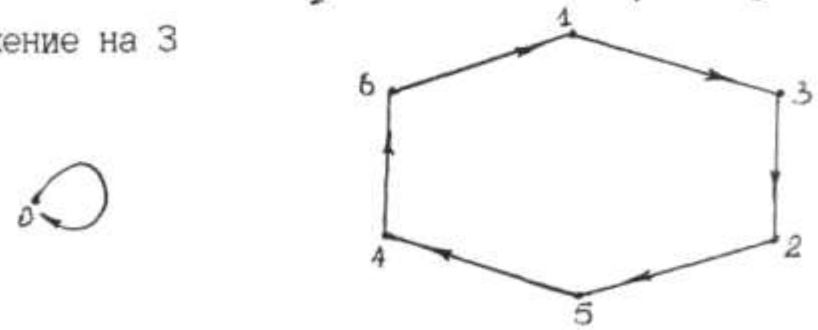
Граф-схемы умножения в 7-арифметике

умножение на 1

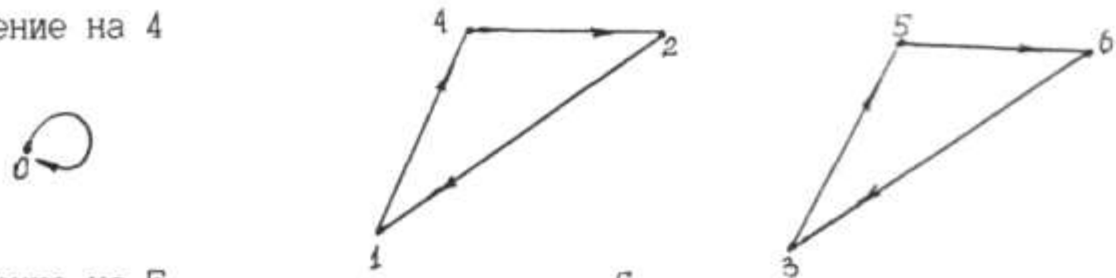

умножение на 2



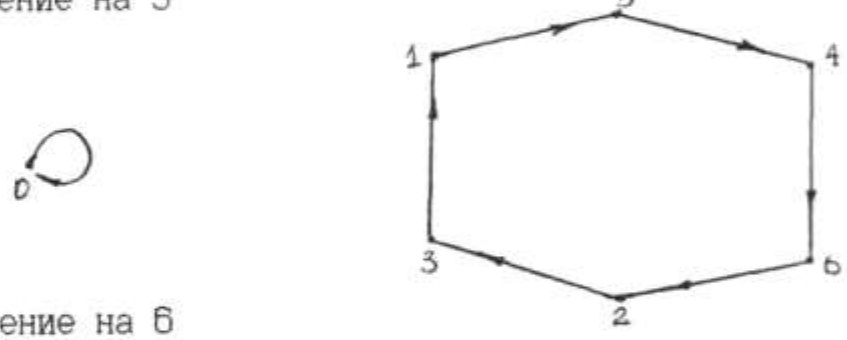

умножение на 3



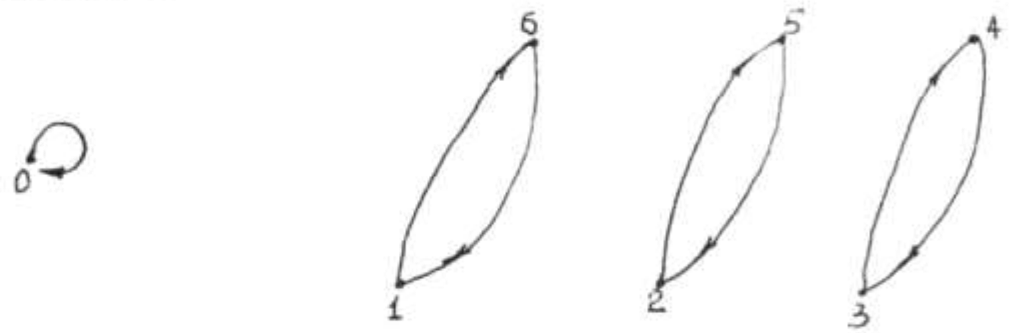

умножение на 4




умножение на 5



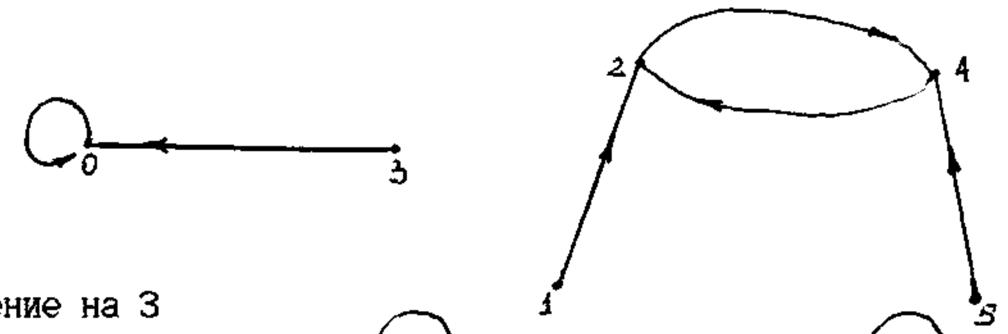

умножение на 6



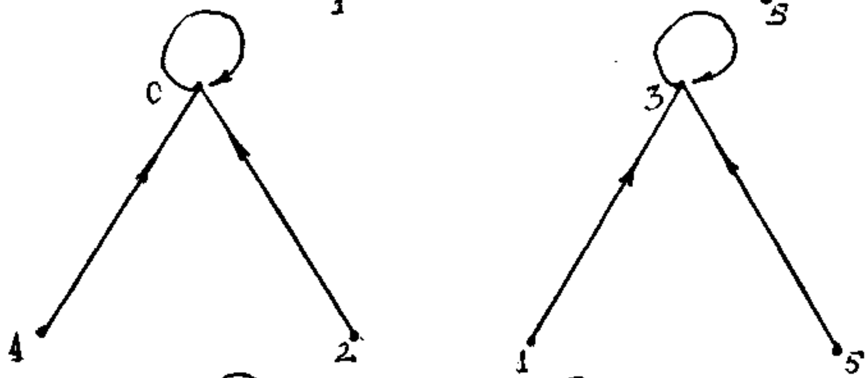
раф-схемы умножения в 6-арифметике

множение на 1

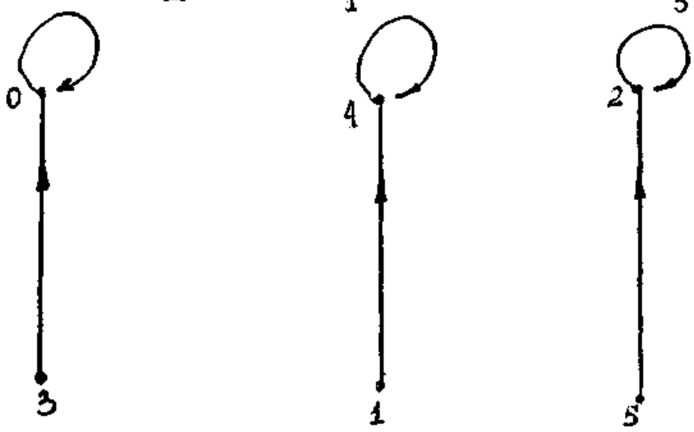

множение на 2




множение на 3




множение на 4




множение на 5

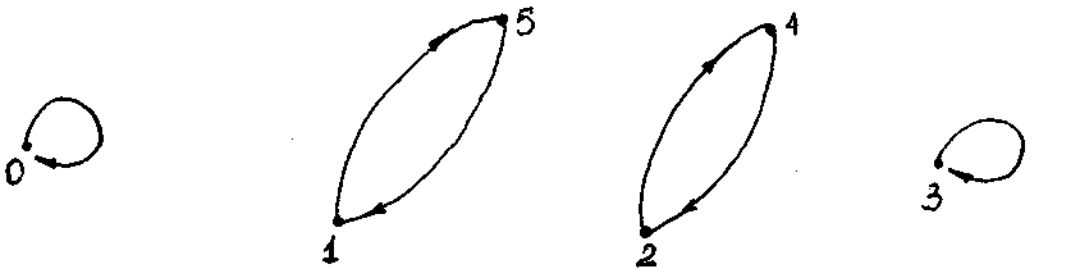


Таблица 3

Схема реализации процесса ознакомления учащихся

с процедурой аксиоматизации

| Номер этапа | Деятельность учителя и учащихся на данном этапе | Содержание этапа при построении фрагмента математической теории кольца |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| I | Рассмотрение конкретных моделей одной и той же структуры и выявление одинаковых свойств; | 1. Рассматриваются множества целых чисел, рациональных чисел, целых чисел, кратных 3 с введенными операциями умножения и сложения.<br>2. Перечисляются общие свойства данных операций в этих множествах. |
| II | Абстрагирование этих свойств от конкретных моделей, принятие их за характеристику рода структур, формулировка этих свойств на логико-математическом языке. | Выделенные на I этапе свойства операций записываются в общем виде, для произвольного множества:<br>1. $\forall a,b \in K \ \exists c \in K$: $a + b = c$;<br>2. $\forall a,b \in K \ \exists d \in K$: $a - b = d$;<br>3. $\forall a,b,c \in K$: $(a+b)+c = a+(b+c)$ – ассоциативность сложения;<br>4. $\forall a,b \in K$: $a + b = b + a$ – коммутативность сложения;<br>5. $\forall a,b,c \in K$: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – ассоциативность умножения;<br>6. существует число $0 \in K$: $\forall a \in K$: $a + 0 = a$;<br>7. $\forall a \in K \ \exists -a \in K$: $a + (-a) = 0$.<br>8. $\forall a,b,c \in K$: $(a + b) \cdot c = ac+bc$ – дистрибутивность умножения относительно сложения;<br>9. $\forall a,b \in K \ \exists x \in K$: $a + x = b$ – выполнимость операции вычитания;<br>10. $\forall a,b,c \in K$: $a \cdot (b-c) = ac-bc$ – дистрибутивность умножения относительно вычитания;<br>11. $\forall a \in K$: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$;<br>12. $\forall a,b,c \in K$: $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$;<br>13. $\forall a,b \in K$: $a = b \Rightarrow -a = -b$;<br>14. $\forall a,b \in K$: $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -ab$; $-a \cdot (-b) = ab$. |

Программа спецкурса "Элементы математического моделирован
и современной алгебры".

ТЕМА 1. Элементы теории алгебраических структур.

к-во

1. Бинарные отношения, алгебраические операции и их свойства (лекция).
2. Использование графов для задания отношений. Роль теории графов в современной науке (семинарское занятие).
3. Решение задач (практическое занятие).
4. Контрольная работа.
5. Группы, кольца, поля (лекция).
6. Алгебраические структуры в науке и в школьной математике (семинарское занятие).
7. Решение задач (практическое занятие).
8. Зачет по теме 1.

ТЕМА 2. Аксиоматическое построение фрагментов математич
теорий.

к-во

9. Арифметика вычетов. Действия в арифметике вычетов. Кольцо вычетов (практическое занятие).
10. Понятие классов вычетов, сложение, вычитание, умножение классов вычетов по данному модулю (практическое занятие).
11. Применение арифметики вычетов и арифметики классов вычетов для решения некоторых задач обычной арифметики (семинарское занятие).
12. Контрольная работа по теме 2.

Таблица 6

Результаты зачета по теме "Элементы теории алгебраических структур".

| Элементы знаний и умений, проверяемых в ходе зачета | Класс | количество и характер ответов, % | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | полные правильные ответы, ППО | неполные правильные ответы, НПО | сумма ППО + НПО | ошибочные, неточные | ответ отсутств. |
| Знание обобщающего характера понятия алгебраической операции | 9 | 36,9 | 54,3 | 91,2 | 8,8 | - |
| | 10 | 41,3 | 55,1 | 94,4 | 5,6 | - |
| Знание сути основных свойств алгебраических операций | 9 | 63,1 | 30,6 | 93,7 | 6,3 | - |
| | 10 | 67,5 | 28,7 | 96,2 | 3,8 | - |
| Умение определять наличие свойств алгебраических операций | 9 | 31,0 | 63,8 | 94,8 | 3,2 | 2,0 |
| | 10 | 33,2 | 61,5 | 94,7 | 3,0 | 2,3 |
| Знание основных типов алгебраических структур | 9 | 27,1 | 70,3 | 97,4 | 2,6 | - |
| | 10 | 28,0 | 68,5 | 96,5 | 3,5 | - |
| Умение определять структурную принадлежность определенного множества с введенными операциями | 9 | 41,3 | 43,9 | 85,2 | 11,3 | 3,5 |
| | 10 | 46,9 | 39,1 | 86 | 10,2 | 3,8 |
| Знание сущности процесса аксиоматизации математических теорий | 9 | 36,4 | 38,0 | 74,4 | 21,9 | 3,7 |
| | 10 | 32,6 | 41 | 73,6 | 23,1 | 3,3 |