

Особливості розв'язань СЛАР із функціональними коефіцієнтами

Євген Костянтинівич Варакута, Анварджан Бекмуратович Бекмуратов,
Павло Олександрович Міненко*

Кафедра інформатики та прикладної математики, Криворізький
державний педагогічний університет, пр. Гагаріна, 54, м. Кривий Ріг,
50086, Україна

maestozo.1_pavel@mail.ru*

Роман Вадимович Міненко

Науково-дослідний гірничорудний інститут ДВНЗ «Криворізький
національний університет», пр. Гагаріна, 57, м. Кривий Ріг, 50086,
Україна

Анотація. *Метою дослідження є визначення впливу функціональних зв'язків між коефіцієнтами системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) на коректність розв'язків оберненої лінійної задачі магнітометрії (ОЛЗМ). Задачами дослідження є аналіз існуючих підходів до формування методів розв'язування СЛАР, визначення областей існування стійких розв'язків ОЛЗМ та напрямків розробки методів розв'язування СЛАР. Об'єктом дослідження є обернені задачі магнітометрії, які зводяться до розв'язків СЛАР із функціональними коефіцієнтами. Предметом дослідження є особливості розв'язування СЛАР із функціональними коефіцієнтами при використанні різних структур сітково-блокових моделей геологічних масивів та відповідних алгоритмів програмного забезпечення. В роботі проведені аналіз, узагальнення та систематизація досліджень з проблеми використання різних моделей та алгоритмів для розробки відповідного їм програмного забезпечення. Виділено необхідність переходу до розробки ітераційних методів розв'язування СЛАР, а прямі методи рекомендовано використовувати тільки для одношарових моделей геологічного середовища. Для оцінки ефективності створених методів використовується середньоквадратична нев'язка поля. Результати дослідження плануються використати для геологічної інтерпретації карт магнітного поля на ділянках детальних зйомок у Кривому Розі та в деяких інших районах України.*

Ключові слова: магнітометрія; лінійна обернена задача; ітераційний метод; ітераційна поправка; нев'язка поля.

E. K. Varakuta[‡], A. B. Bekmuradov[‡], P. A. Minenko^{*}, R. V. Minenko[#].
Features of solutions of SLAE with functional coefficients

Abstract. *The objective of this study is to determine the influence of*

functional relationships between the coefficients of the system of linear algebraic equations (SLAE) on the correctness of the solutions of the inverse linear magnetometry problem. *The tasks of the study* are the analysis of existing approaches to the formation of methods for solving SLAE, the determination of the areas of existence of stable solutions of the inverse linear magnetometry problem and of the directions of the development of SLAE solution methods. The *object of research* is inverse problems of magnetometry, which reduce to the SLAE solution with functional coefficients. The *subject of research* is the features of SLAE solutions with functional coefficients using different structures of grid-block models of geological arrays and corresponding software algorithms. The work analyzes, summarizes and systemizes research on the problem of using different models and software algorithms for them. The necessity of transition to the development of iterative methods for solving SLAE is singled out, and direct methods are recommended to be used only for single-layer models of the geological environment. To estimate the effectiveness of the methods created, a mean square residual of the magnetic field is used. The *results of the study* are planned to be used for geological interpretation of magnetic field maps at detailed survey sites in Kryvyi Rih and in some other regions of Ukraine.

Keywords: magnetometry; the inverse linear problem; iterative method; the iterative amendments; residual of the magnetic field.

Affiliation:

Department of Computer Science and Applied Mathematics, Kryvyi Rih State Pedagogical University, 54, Gagarin avenue, Kryvyi Rih, 50086, Ukraine^{*,#};

Scientific-research mining institute of the State Institution of Higher Education «Kryvyi Rih National University», 57, Gagarin str., Kryvyi Rih, 50086, Ukraine[#].

E-mail: maestozo.1_pavel@mail.ru^{*}.

Ряд задач математичної фізики приводяться до розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Деякі з них, наприклад, обернені лінійні задачі магнітометрії (ОЛЗМ) мають функціональні коефіцієнти (ФК). Вони розв'язуються за допомогою сітково-блокової моделі (СБМ), складеної з компактної групи блоків – прямокутних паралелепіпедів (ПП), кожен з яких займає область $V_i \{x_i \leq x \leq x_i + d_1; y_i \leq y \leq y_i + d_2; z_i \leq z \leq z_i + d_3\}$ та вміщує в собі гірську породу з інтенсивністю намагніченості J_i ($i=1, M$), де M – кількість ПП, $d_1 d_2 d_3$ – об'єм кожного ПП. Оскільки всі ПП займають компактний простір V_i , то всі вони групуються в шари, обмежені горизонтальними площинами. У такому разі ОЛЗМ зводиться до розв'язку СЛАР

$$\sum_{i=1}^M a_{ij} J_i = B_j, \quad (1)$$

де B_j – індукція магнітного поля, яка вимірюється магнітометрами на поверхні Землі у точках $W_j(x_j, y_j, z_j)$ у межах області W ;
 a_{ij} – ФК, які для найпростішої моделі мають вигляд

$$a_{ij} = \frac{(z_i - z_j)}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2]^{3/2}} d_1 d_2 \Big|_{z_i+d_3}^{z_i} \quad (2)$$

Як бачимо, ФК зв'язують магнітне поле в точках області W з намагніченими блоками – комірками СБМ, розташованими в області V , через координати точок з індексами j та i . Якби комірки СБМ були хаотично розміщені в області V , а точки виміру поля хаотично розміщені у тривимірній області W , то, при точних параметрах у формулах (1)-(2), СЛАР (1) можна було б розв'язувати відносно J_i прямими методами. Але магнітне поле вимірюють з похибками. Тому ОЛЗМ (1)-(2) можна розв'язувати чисельно, наприклад, методом найменших квадратів (МНК) при більшій кількості рівнянь у СЛАР.

Крім того, ФК обчислюються за формулою (2) неточно, бо частина комірок СБМ заповнена магнітними породами не повністю, а деяка частина з них заповнена породами зі змінною намагніченістю. Тоді ліва й права частина кожного рівняння в СЛАР ускладнюються похибками, а це означає, що кожна похибка створює нову СЛАР, яка має інший розв'язок. Він може бути дуже далеким від реального розподілу J_i у СБМ. Оскільки ми не знаємо реального розподілу похибок в точках поля й блоках моделі, і розв'язок ОЛЗМ буде невизначеним. Такий розв'язок називається нестійким.

Якщо ж модель одношарова, то маємо усереднене значення J_i по всій висоті кожного блоку і одну похибку поля над кожним блоком. Це дає можливість отримати розв'язок ОЛЗМ для одношарової СБМ, якщо над кожним блоком будуть точки поля, а під ними будуть блоки моделі. Тоді кожна похибка поля майже повністю перетвориться в намагніченість блоків, і розв'язок ОЛЗМ буде стійким. Але за умови відсутності блоків під деякою кількістю точок поля, або при відсутності точок поля над деякою кількістю блоків розв'язок СЛАР (а значить і розв'язок ОЛЗМ) буде дуже неточним і нестійким або некоректним.

Тому в [1] запропоновано виконувати розв'язання ОЛЗМ за умови, що над усіма блоками є точки поля, а під усіма точками поля є блоки моделі. Тоді ОЛЗМ буде коректно поставлена, а її розв'язок буде стійким і близьким до справжнього розподілу намагніченості у всьому геологічному масиві. Для двохшарових моделей отримати стійкий розв'язок ОЛЗМ прямими методами розв'язання СЛАР неможливо. Для

цього розроблені ітераційні методи розв'язування СЛАР із отриманням стійкого та змістовного (коректного) розв'язку ОЛЗМ [2]. В ітераційних методах задається будь-який наближений набір значень невідомих, які називаються нульовим вектором $J_{i,0}$ ($i=1, M$). Їх підставляють у систему рівнянь (1) й обчислюють нев'язки поля r_j у кожній точці $W_j(x_j, y_j, z_j)$: $r_j = (a_{i,j}, J_{i,0}) - B_j$. Вони перераховуються в ітераційні поправки (ІП) $B_{i,1,0}$ до $J_{i,0}$, а потім обчислюють нові значення $J_{i,0+1} = J_{i,0} + B_{i,1,0}$, які використовуються на наступній ітерації для обчислення нових значень нев'язок поля (НП), ІП та новіших значень (на наступному кроці ітерації) $J_{i,2} = J_{i,1} + B_{i,1,1}$.

Ітераційний процес повторюється до останнього кроку, на якому всі нев'язки поля не будуть перевищувати допустиму величину, чим і закінчується розв'язок ОЛЗМ.

Представлений огляд є основою для розробки перспективного програмного забезпечення методів пошуку корисних копалин геофізичними методами.

Список використаних джерел

1. Миненко П. А. Теоретическое обоснование преобразования моделей решения некорректной линейной задачи гравиметрии в корректную с оптимизацией итерационного процесса на основе условно-экстремальных критериев / Павел Александрович Миненко // Теория и практика геологической интерпретации гравитационных и магнитных аномалий : материалы 32-й сессии международного научного семинара им. Д. Г. Успенского (29.01-01.02.2005). – Пермь, 2005. – С. 115-118.

2. Міненко Р. В. Обернені лінійні задачі гравіметрії та магнітометрії з уточнюючими ітераційними поправками вищого порядку / Міненко Р. В., Міненко П. А. // Вісник КНУ. Геологія. – 2014. – № 1 (64). – С. 78-82.

References (translated and transliterated)

1. Minenko P. A. Teoreticheskoe obosnovanie preobrazovaniia modelei resheniia nekorrektnoi lineinoi zadachi gravimetrii v korrektnuiu s optimizatciei iteratsionnogo protcessa na osnove uslovno-ekstremalnykh kriteriev [The theoretical substantiation of the transformation of the models of the solution of the ill-posed linear gravimetric problem into the correct one with optimization of the iterative process on the basis of conditionally extremal criteria] / Pavel Aleksandrovich Minenko // Teoriia i praktika geologicheskoi interpretatsii gravitatsionnykh i magnitnykh anomalii : materialy 32-i sessii mezhdunarodnogo nauchnogo seminara im. D. G. Uspenskogo (29.01-01.02.2005). – Perm, 2005. – S. 115-118. (In Russian)

2. Minenko R. V. Oberneni liniini zadachi hravimetrii ta mahnitometrii z utochniuiuchymy iteratsiinymy popravkamy vyshchoho poriadku [Inverse problems of gravimetry and magnetometry with precise iterative corrections to the high order] / Minenko R. V., Minenko P. A. // Visnyk KNU. Heolohiia. – 2014. – # 1 (64). – S. 78-82. (In Ukrainian)