ВИКОРИСТАННЯ МУЛЬТИМАСШТАБНОЇ ПЕРЕСТАНОВОЧНОЇ ЕНТРОПІЇ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНІСНОСТІ

Г. Б. Данильчук, О.С. Лук'янчук, В.М.Соловйов
м. Черкаси,Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького

Вступ. Хаос, порядок і самоорганізація, як в природі, так і в суспільстві, виникають відповідно до законів складних динамічних систем.

Синергетичний підхід у дослідженнях економічних процесів зумовлює розроблення дієвих моделей попередження кризового стану економіки, що уможливлює пошук універсальних принципів самоорганізації та еволюції складних економічних систем, формулювання законів самозбереження та еволюційного розвитку [1].

Теорія складності в різних її іпостасях виходить, перш за все, з нерозривності і єдності природного і соціального, взаємодетермінації одного й іншого. Усвідомлення складності відбувається подібно голографічному процесу, здійснюючись одночасно в кількох напрямах: у природознавстві та технічному знанні, гуманітаристиці та економіці. На наш погляд, даний термін є дуже важливим і методологічно насиченим, оскільки він показує еволюцію розвитку і пізнання складного — від складності як стану об'єкта до складнісності як когерентного поєднання стану об'єкта, адекватних йому методів і засобів пізнання, у єдності із самодією і самозмінами суб'єкта. Взагалі, навіть постановка питання про складність свідчить як про певні парадигмальні зрушення, так і про трансформацію мислення.

Останні десятиріччя вчені різних галузей приділяють значну увагу проблемам складності (complexity). Відомі фундаментальні роботи у цьому напрямку з боку видатних природознавців наведені в джерелах [2–4].

Існуючі методи дослідження складних систем не дають змоги адекватно аналізувати притаманні їм властивості, і, як наслідок, в економісти запозичують нові методи, котрі виправдали себе у фундаментальних науках.

У роботі розглядається підхід до аналізу складних систем заснований на теорії детермінованого хаосу. Детермінований хаос пропонує пояснення нерегулярної поведінки та аномалій у системах, які не є стохастичними.

Ця теорія представляє широкий вибір потужних методів для аналізу складних процесів і систем, включаючи відновлення атрактора у фазовому просторі, обчислення показників Ляпунова, розрахунок різних видів ентропій та ін. [5].

Зокрема, ентропія є потужним інструментом для аналізу часових рядів [6]. Ідея розрахунку ентропії, заснованої на моделях перестановок (де перестановка визначається порядком відносин між значеннями часових рядів) в останні роки привертає значну увагу при побудові теорії складних і хаотичних систем [7].

2. Перестановочна ентропія. Перестановочна ентропія (*Permutation Entropy – PermuEn*) була введена в якості швидкого і надійного методу аналізу часових рядів [7]. Перестановочна ентропія оцінює складність часових рядів шляхом порівняння сусідніх значень і являє собою альтернативний спосіб вимірювання схожості між шаблонами (patterns) по відношенню до інших методів оцінки складності [8].

Головна ідея застосування методів хаотичної динаміки до аналізу часових рядів полягає в тому, що основна структура хаотичної системи, що містить у собі всю інформацію про систему, а саме атрактор динамічної системи (підмножина фазового простору, яка притягує траєкторії), може бути відновлена через вимірювання тільки однієї спостережуваної характеристики цієї динамічної системи, зафіксованої як часовий ряд.

Згідно із методом Грасбергера і Прокаччі процедура реконструкції фазового простору і відновлення хаотичного атрактора системи при динамічному аналізі часового ряду зводиться до побудови так званого фазового простору з певною розмірністю [9].

Для розрахунку *PermuEn* береться ряд $\{x(i)\ i=1,2...\}$, де m–вимірний вектор затримки вкладень, який в момент часу i розраховується як:

$$X_i^m = [x(i), x(i+\tau),..., x(i+(m-1))\tau],$$

де m – розмірність вкладення та τ – час затримки. Як правило, обирається $\tau=1$, проте дослідження показали, що оптимальне значення цього параметру може бути і іншим. Функція X_i^m має перестановки $\pi_{r_0 r_1 \dots r_{m-1}}$, якщо вона задовольняє умову:

$$x(t+r_0\tau) \le x(t+r_1\tau) \le \dots \le x(t+r_{m-1}\tau), \quad 0 \le r_i \le m-1, r_i \ne r_j.$$

Існує $m!$ перестановок для m–вимірного вектора. Для кожної перестановки π, визначаємо відносну частоту:

$$p(\pi) = \frac{Number\ \{t/t \le T-(m-1)\tau, x_t^m\}}{N-(m-1)\tau}.$$

Тоді *PermuEn* у m–вимірному фазовому просторі розраховується як:

$$H_{PermuEn} = -\sum_{\pi=1}^{m!} p(\pi)\ln(p(\pi)).$$

Максимальне значення $H_{PermuEn}(m)$ набуває при $\log(m!)$, досягається, як зазвичай, у рівноймовірнісному випадку [10]. Такі значення перестановочної ентропії може мати нескінченний ряд випадкових чисел. Мінімальне значення ентропії $H_{PermuEn}$ досягається у випадках, коли у всій вибірці реалізується тільки одна з $m!$ перестановок. Наприклад, це може бути ряд монотонно зростаючих або монотонно спадаючих значень [6].

Тому для зручності отриману величину доречно нормалізувати множником $\frac{1}{\ln(m!)}$:

$$H_{NPermuEn} = \frac{H_{PermuEn}(m)}{\ln(m!)}, \quad 0 \le H_{PermuEn} \le 1.$$

Таким чином, значення *PermuEn* залежить від вибору розмірності вкладення m та затримки τ.

3. Мультимасштабна ентропія (*Multiscale Entropy*). В загальному випадку показник ентропії (*PermuEn*) функціонально залежить від одного кроку диференціювання, тобто відображає міру невизначеності чергового відліку, який ми прогнозуємо за попередньою історією процесу. Інакше кажучи, цей вид ентропії описує міру втрати інформації на кожному подальшому кроці щодо попереднього. З цієї причини такі параметри не можуть бути застосовні до аналізу явищ, що являються за своєю природою мультимасштабними.

Для подолання цих труднощів було запропоновано використовувати мультимасштабний аналіз ентропії (*Multiscale Entropy Analysis – MSE*), де у якості міри ентропії на різних масштабах декомпозиції початкового часового ряду використовувався параметр ентропії [11]. Метод *MSE* включав дві послідовно виконувані процедури:

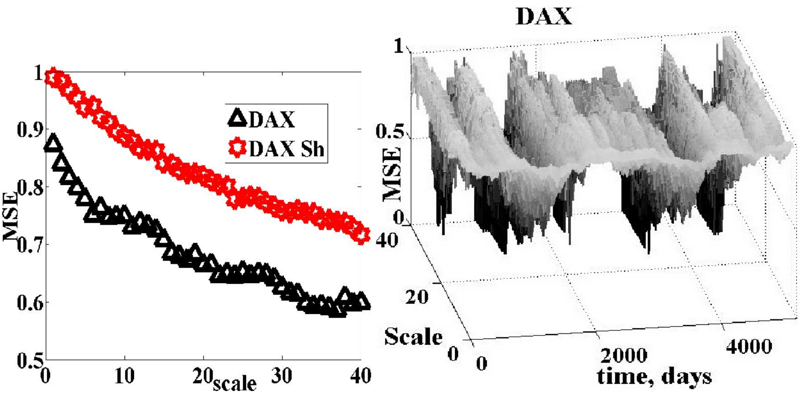
1) процес «грубого дроблення» (coarse graining) початкового часового ряду – усереднення даних на сегментах, що не перетинаються;

2) обчислення на кожному з масштабів показника ентропії.

Процес «грубого дроблення» («грануляція») полягає в усереднені послідовних відліків ряду в межах вікон, що не перетинаються, а розмір яких w– збільшується при переході від масштабу до масштабу. Кожен елемент «гранульованого» часового ряду $y_j^{(w)}$ знаходиться у відповідності до виразу:

$$y_j^{(w)} = \frac{1}{w} \sum_{i=(j-1)w+1}^{jw} x_i \;, 1 < j < N / w \,,$$

де w характеризує масштабний фактор. Довжина кожного «гранульованого» ряду залежить від розміру вікна і рівна w/N. Для масштабу рівного 1 «гранульований» ряд просто тотожний оригінальному. Для кожного з отриманих часових рядів обчислювався показник ентропії (*MSE*) як функція масштабу (scale) (рис.1а) [12]. Мірою складності будемо вважати величину площі під кривою *MSE* (scale).



a) b)

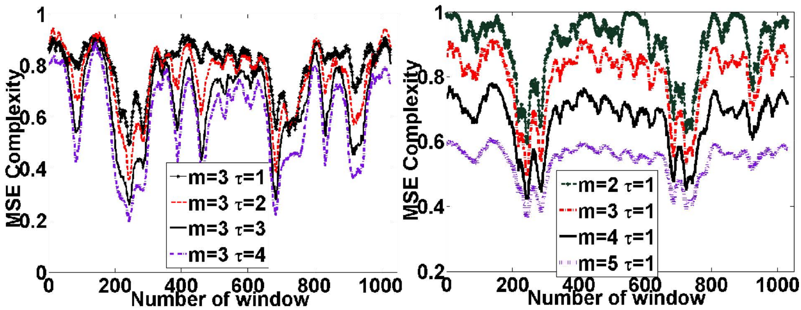
Рис.1. а) Залежність мультимасштабної ентропії *MSE* від масштабу scale; b) динаміка *MSE*(scale) для ковзного вікна шириною у 500 днів, яке переміщується з кроком у 1 день для індексу фондового ринку Німеччини (DAX) за період 26.11.1990р. – 01.04.2013р. [14].

Введена міра складності є статичною характеристикою часових рядів. Але зрозуміло, що з плином часу в системі відбуваються зміни, які впливають на ступінь складності системи. Тому відстежимо ці зміни шляхом розрахунку перестановочної ентропії у рамках процедури ковзного вікна. В цьому випадку перестановочна мультимасштабна ентропія розраховуються для підряду заданої довжини (вікна), після чого робиться крок вздовж ряду (вікно зміщується) у додатному напряму і процедура повторюється до вичерпання значень часового ряду.

На рис. 1b зображена поверхня *MSE* (scale), розрахована для фондового ринку Німеччини за допомогою алгоритму рухомого вікна.

Оскільки перестановочна ентропія максимальна для випадкового ряду, зрозуміло, що складність вихідного часового ряду менша від складності перемішаного (sh) (рис. 1a). Відсутність експоненціального спаду залежності *MSE* (scale) говорить на користь мультимасштабного підходу для перестановочної ентропії. При цьому будемо розраховувати міри складності на першому масштабі і середню за всіма масштабами. Різниця між ними очевидно свідчить про можливість даного виду ентропії виявляти мультифрактальні властивості складної системи.

4. Результати проведених досліджень. Метод розрахунку *PermuEn* є чутливим до вхідних параметрів. Нагадаємо, що при підрахунку перестановочної ентропії задаються параметри m – розмірність вкладення та τ – час затримки. Було проведено дослідження впливу параметрів m і τ на величину *PermuEn* на прикладі історичних даних індексу DAX. Результати зображено на рис. 2.



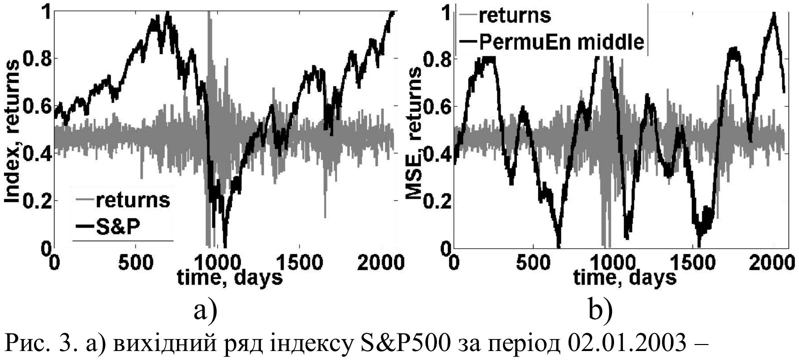
a) b)

Рис.2. Зміна динаміки MSE в залежності від параметрів: а) часу затримки τ ; b) розмірності вкладення m .

З рисунку прослідковується динаміка зміни ентропійної складності при підборі оптимальних параметрів для дослідження стану фінансово-економічних систем. Значення ентропії при різних параметрах є більшим-менш стабільним, передаючи в основному динаміку практично при будь-яких співвідношеннях параметрів. Ми проводили подальші дослідження для значень параметрів: m =3 та τ =2.

Відомо, що у якості вихідного ряду можна брати не тільки нестаціонарний ряд, наприклад, індексу фондового ринку, а і стаціонарний ряд його прибутковостей. В залежності від обраної міри складності, слід обирати ту чи іншу форму вхідного ряду. В даній роботі ми проводили розрахунки для обох часових послідовностей.

На рис. 3 середнє значення пермутаційної міри складності порівнюється з часовим рядом нормалізованих прибутковостей на прикладі фондового ринку США за індексом S&P 500.



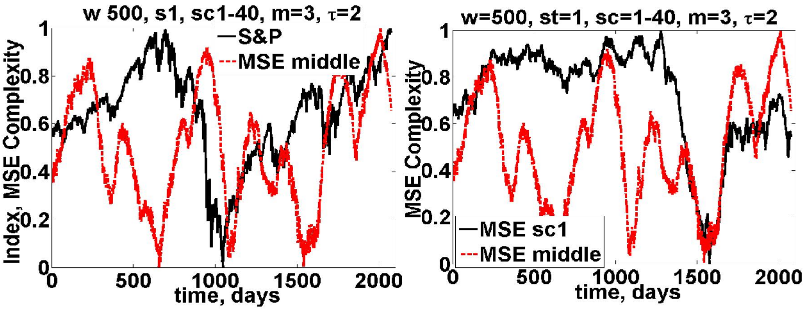
a) b)

Рис. 3. а) вихідний ряд індексу S&P500 за період 02.01.2003 –

05.04.2013р. [14] та його прибутковість; b) прибутковість індексу S&P500 та його мультимасштабна складність

З рис. 3а видно, що в період стрімких стрибків значень індексу зростають флуктуації прибутковостей. У ці періоди система хаотизується, що призводить до зростання ентропії перестановок (рис. 3b).

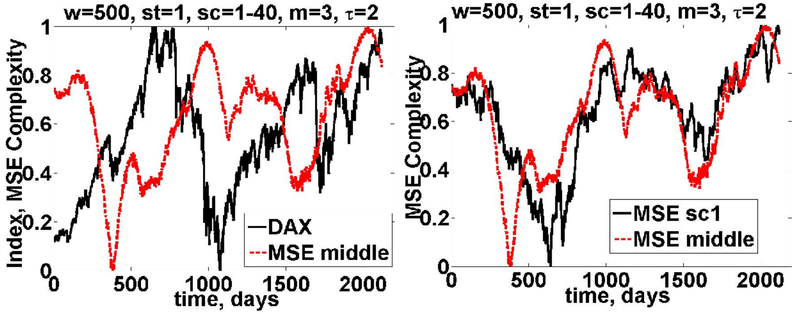
Порівняємо тепер введені міри складності з відповідною динамікою вихідного часового ряду. Для індексу S&P500 результати представлені на рис.4.



a) b)

Рис.4. Поведінка з часом мультимасштабної складності: a) значення індексу S&P 500 за період 02.01.2003– 05.04.2013р. [14] та середньої міри мультимасштабної складності; b) міра *MSE* на масштабах 1 та середнє значення для масштабів 1-40

Легко бачити, що введена міра складності ідентифікує кризові явища на фондовому ринку США, зростаючи в передкризові періоди та спадаючи у після кризові. Аналогічні результати (див. рис.5) одержуються і для індексу фондового ринку Німеччини, що свідчить про стабільність отриманих результатів.



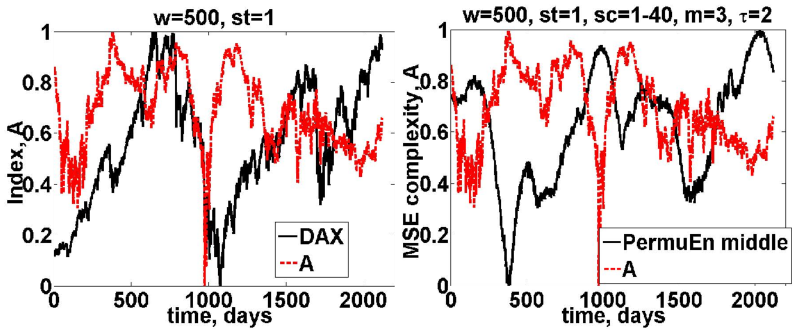
a) b)

Рис.5. Поведінка у часі мультимасштабної складності: a) власне індексу DAX за період з 02.01.2003р. і по 05.04.2013р. [14] та середньої міри мультимасштабної складності; b) міра мультимасштабної складності на масштабах 1 та середнє значення

Як і очікувалося результати корелюють з результатами для фондового індексу США.

Нарешті, ми порівняли динаміку перестановочної ентропії з динамікою функції автокореляції (рис. 6).

З рис.6 видно, що при наближенні до кризи функція автокореляції спадає, в той час як перестановочна ентропія зростає, що вказує на посилення хаотичної компоненти системи.



a) b)

Рис.6. Порівняльний аналіз з функцією автокореляції A: a) власне індексу DAX за період з 02.01.2003р. і по 05.04.2013р. [14];
b)середньої міри мультимасштабної складності

Висновки. Таким чином, у рамках парадигми економічної складності проаналізовано нову міру складності – мультимасштабну перестановочну ентропію.

Показано, що в умовах кризи вказана міра помітно зменшується. Цей факт дає змогу використовувати її у якості індикатора-передвісника кризових явищ. Наведено теоретичні засади їх розрахунку та область використання. Проілюстровано результати застосування віконної процедури для оцінки складності системи та передбачення кризових явищ на реальних часових рядах фондових індексів.

Подальші дослідження полягатимуть у формалізації інших мір складності, зокрема, мережеподібних, з огляду на те, що вони є найбільш поширеною формою структурної організації складних соціально-економічних систем.

Список використаної літератури:

1. Князева Е.Н. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем / Е.Н. Князева, С.П. Курдюмов. // М.: Наука. – 1994. – 236 с.
2. Gell–Mann M. What Is Complexity? / M.Gell–Mann // Complexity. – 1995. –V.1, No 1.– P.16–18.
3. Николис Г. Познание сложного. Введение. / Г. Николис, И. Пригожин // М.: ЛКИ.– 2008.– 354 с.
4. Пригожин И. От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках / И. Пригожин // Перевод с английского. Серия «Синергетика: от прошлого к будущему». – Изд. 3. –М.: URSS.– 2006. –296 с.
5. Берже П. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности / П. Берже, И. Помо, К. Видаль // М.: Мир.– 1991.– 368 с.
6. Чумак О . В . Энтропии и фракталы в анализе данных. — М.– Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2011. — 164 с.
7. Bandt C. Permutation entropy — A natural complexity measure for time series / C. Bandt, B. Pompe // Phys. Rev. Lett..– 2002.– v. 88. — P. 174102–174102.
8. Plastino A. Rosso, O.A. Entropy and statistical complexity in brain activity. / O.A. Rosso, A. Plastino // Eur. News.– 2005.– V.36.– 224–228.

9. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка / Э. Петерс // [2–е изд.]. – : Мир.– 2000. – 333 с.
10. Wu S.D. Bearing Fault Diagnosis Based on Multiscale Permutation Entropy and Support Vector Machine / S.D. Wu, P. H. Wu, C.W. Wu, J.J. Ding, C.C. Wang. // Entropy.–2012.–V.14.–P. 1343–1356.
11. Costa M. Multiscale entropy analysis of biological signals / M. Costa, A.L. Goldberger, C.–K. Peng // Phys Rev E. – 2005.–V.71.–P.021906.
12. Aziz W. Multiscale permutation entropy of physiological time series. / W. Aziz M. Arif // In Proceedings of 9th IEEE International Multitopic Conference, Pakistan.–24–25 December.–2005.
13. Дербенцев В.Д., Сердюк О.А., Соловйов В.М., Шарапов О.Д. Синергетичні та еконофізичні методи дослідження динамічних та структурних характеристик економічних систем – Черкаси: Брама-Україна, 2010. – 300 с.
14. Джерело статистики індексів світового фондового ринку [Електронний ресурс] – режим доступу: http://finance.yahoo.com