

Сапцин В.М., Соловьев В.Н.

**РЕЛЯТИВИСТСКАЯ
КВАНТОВАЯ ЭКОНОФИЗИКА
*НОВЫЕ ПАРАДИГМЫ
МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ***

Сапцин В.М., Соловьев В.Н. Релятивистская квантовая эконофизика. Новые парадигмы моделирования сложных систем: Монография. – Черкассы, 2009.- с.

Монография посвящена новому, релятивистскому направлению в квантовой эконофизике, в рамках которого предлагается смена классических парадигм математического моделирования социально-экономических систем. Проводится эконофизический анализ концептуальных основ и математического аппарата классической физики, теории относительности, нерелятивистской и релятивистской квантовой механики, с учетом исторических, психологических и философских аспектов и современного состояния проблемы социально-экономического моделирования.

Работа будет полезна студентам, аспирантам, научным работникам, преподавателям, всем, кто интересуется современными идеями в области количественного анализа социально-экономических систем

Содержание

Введение

1. Об эконофизике, квантовой эконофизике и сложных системах
 2. Теоретическая физика как одна из моделей реальности и математика как формализованный язык ее описания
 3. Общая теория систем - язык и методология решения плохо формализуемых задач
 4. Иерархия концепций и моделей современной теоретической физики
 - 4.1. Классическая физика и ее парадигмы: критический анализ
 - 4.2. Нерелятивистская квантовая механика. Экспериментальные факты, постулаты и следствия
 - 4.3. Релятивистская квантовая механика: новые парадигмы в моделировании сложных систем
 5. Алгоритмические модели с дискретным временем
 - 5.1. Общая постановка задачи дискретного моделирования
 - 5.2. О необратимости времени. Модель Ферхюльста
 - 5.3. Последствие и «длинная» память в дискретных моделях с нелинейностями
 6. Новые парадигмы и проблемы математического описания сложных систем
 - 6.1. О природе неопределенностей и роли действия в математической постановке задач.
 - 6.2. Об особенностях, проблемах и корректности квантовомеханического моделирования социально-экономических систем
- Заключение
Литература

Аннотация

Настоящая работа посвящена новому, релятивистскому направлению в квантовой эконофизике, в рамках которого предлагается смена классических парадигм математического моделирования социально-экономических систем.

Классическая физика исходит из гипотезы, что существуют и в принципе могут быть точно измерены мгновенные значения всех физических величин, характеризующих состояние системы.

Нерелятивистская квантовая механика не отвергает существования мгновенных значений классических физических величин, однако не все из них могут быть измерены одновременно (принцип неопределенности).

Релятивистская квантовая механика отвергает в принципе существование мгновенных значений любых физических величин, а, следовательно, понятие состояния системы, включая и понятие волновой функции, становится строго не определяемым.

Целью данной работы является эконофизический анализ концептуальных основ и математического аппарата классической физики, теории относительности, нерелятивистской и релятивистской квантовой механики, с учетом исторических, психологических и философских аспектов и современного состояния проблемы социально-экономического моделирования.

Нами показано, что фактически и, по сути, давно, в квантовой теории приняты новые парадигмы моделирования, в рамках которых первичным фундаментальным понятием становится понятие оператора физической величины (оператор - математический образ процедуры, действия), описание динамики системы становится дискретным и принципиально приближенным, предсказать будущее, даже приближенно, в принципе невозможно без учета последствия (памяти).

С учетом проведенного в работе анализа мы предлагаем следующие парадигмы экономико-математического моделирования:

- Первичность процедуры измерения по отношению к ее результату;

- Приближенный и вторичный характер понятия «состояние системы» и понятий «мгновенные значения переменных состояния»;
- Влияние любой процедуры измерения, включая и компьютерный прогноз (косвенное измерение), на состояние и будущее поведение системы;
- Принцип неопределенности и его фундаментальная связь с длительностью процедуры измерения;
- Дискретность времени и пространства, а также любых других величин, связанных с динамикой системы;
- Последствие (память) как фундаментальное свойство любой динамической системы;
- Отказ от бесконечности как концептуального понятия;
- Необратимость времени;
- Открытость, иерархичность, эмерджентность.

Ключевые слова: эконофизика, квантовая эконофизика, квантовая механика, релятивистская квантовая механика, принцип неопределенности, сложность, теория систем.

Авторы будут признательны за любые критические замечания и предложения. Мы также открыты к диалогу и сотрудничеству во имя дорогого для нас дела, которому служим.

Сапцин Владимир Михайлович, к.ф.-м.н., доцент кафедры высш. математики и информатики Кременчугского государственного политехнического университета им. М.Остроградского

e-mail: saptsin@sat.poltava.ua

Соловьев Владимир Николаевич, д.ф.-м., профессор, заведующий кафедры экономической кибернетики Черкасского национального университета им. Б.Хмельницкого

e-mail: vnsoloviev@rambler.ru

Черкассы-Кременчуг, май, 2009 г.

Введение

Эконофизика – относительно молодое и быстро развивающееся междисциплинарное научное направление, оформившееся и получившее свое название в конце 90-х годов прошлого столетия [1]. Количество оригинальных работ, статей в интернете, обзоров и монографий, посвященных этому направлению, по нашим оценкам уже превышает тысячи, а в ведущих высших учебных заведениях ближнего и дальнего зарубежья вводятся соответствующие курсы и специальности (см. например [1-3]). На западе молодых физиков-теоретиков, ищущих приложение своим знаниям и силам не только в сугубо физических и технических областях, принимают на работу корпорации, банки, холдинги и другие субъекты национальной и мировой финансово-экономической деятельности.

В той ее части, которую уже можно считать классической, эконофизика занимается приложениями математического аппарата статистической физики, включая физику неупорядоченных систем и нелинейную физическую динамику, к исследованию социально-экономических явлений, используя те или иные физические модели и придавая соответствующую экономическую интерпретацию физическим понятиям, переменным и параметрам [1-8].

Хотя статистическая физика в своих основах и не может обойтись без квантовомеханических идей и понятий, однако преимущественная сфера ее интересов – это макроскопическое описание систем с большим количеством частиц, динамическое поведение которых не удастся свести к микроскопическим динамическим уравнениям квантовой механики для отдельных частиц без привлечения соответствующих статистических постулатов [9].

В последние годы наблюдается возрастающий поток работ, в которых для объяснения, как частных особенностей динамики современного рынка, так и функционирования экономики в целом, привлекаются детализированные модели взаимодействия участников рыночных процессов («агентов»), а также способы описания социально-экономических систем, основанные на сугубо квантовомеханических аналогиях, понятиях и терминологии (см. [10-47] и цитируемую там литературу).

Не смотря на разноразличные названия и ключевых словосочетаний – квантовая экономика [10-12], квантовые финансы [13,14], квантовые рыночные игры [15], теория квантовых игр [16,17], эволюционная квантовая теория игр [18], квантовая теория экономики [19], квантовая эконофизика [20-22] и т.д., - общим для этих работ является акцент на использование математического аппарата, исходных уравнений и моделей именно квантовой механики.

В центре внимания оказываются уравнение Шредингера для волновой функции [12], уравнение фон Неймана для матрицы плотности [21], вторичное квантование для систем с переменным числом частиц [18,23], его модификации - ультратривичное и ультратретичное квантование [10,20], спиновая модель Изинга [24-26], фейнмановские интегралы по траекториям [27,28], Бозе конденсация в квантовых жидкостях [29,30], операторное представление (Гайзенберга) и представление взаимодействия [23,31-34] и другое.

Среди авторов, целенаправленно и плодотворно работающих на стыке квантовой физики и экономики, можно отметить российского академика Маслова В.П. (см. [20,29,30,35,36] и цитируемую там литературу), исследователей из дальнего зарубежья Гонсалеса (Gonçalves, С. Pedro [18,37-43]), Хидальго (Hidalgo, E. Guevara [21,44-47]), Бааку (Baaquie В. Е., [14,28]).

Хотя первые работы, связанные с попытками применить квантовомеханические идеи к экономическим явлениям и появились еще в начале 90-х годов прошлого столетия [17,18,48], однако только сейчас можно с уверенностью утверждать, что рождается новое научное направление в математическом моделировании социально-экономических систем. Не выходя за рамки уже сложившейся терминологии, это направление логичнее всего было бы назвать, и к этому, по сути, склоняется большинство авторов упомянутых выше работ, включая и авторов настоящего исследования, квантовой эконофизикой [18,20-22].

Появление такого научного направления обусловлено, на наш взгляд, не только поисками новых применений математического аппарата квантовой механики и новыми квантовомеханическими аналогиями, но и явно обозначившимися проблемами социально-

экономического моделирования, потребовавшими их глубокого концептуального анализа и философского обобщения, в том числе и возможную смену устоявшихся математических [36] и экономических [49] парадигм. При этом, по мнению авторов, важнейшее значение в рамках нового, квантового направления в эконофизике, приобретают релятивистские аспекты в концептуальных основах квантовой физики [50-52] и их философское осмысливание, включающее критический анализ понятий измерения, состояния, памяти, времени и пространства не только в физическом, но и в психологическом и социально-экономическом контекстах [49,53]. Аргументированное изложение позиции авторов по совокупности затронутых выше вопросов и тем, которые, как нам кажется, следует отнести к компетенции специального и выделенного раздела эконофизики – *релятивистская* квантовая эконофизика - собственно и является целью настоящей работы.

1. Об эконофизике, квантовой эконофизике и сложных системах

Эконофизика, или физическая экономика, как уже отмечалось – новое, сравнительно молодое научное направление, которое недавно отметило свой десятилетний юбилей. Конечно, это не означает, что до момента официального рождения эконофизики не было работ на стыке экономики и физики, однако новое направление, как правило, формируется только тогда, когда для этого появляются условия и возникает необходимость в концентрации усилий научного сообщества на этом направлении. Квантовая эконофизика не является исключением, поэтому, хотя первая работа, которую, по мнению Гонсалеса [18], можно отнести к применению идей квантовой механики к экономическим явлениям, появилась еще в 1990 г. [48], о рождении квантовой эконофизики, как нового научного направления, можно говорить только сейчас.

Если кратко, то по состоянию на настоящий момент квантовая эконофизика включает:

а) адаптацию и использование математического аппарата квантовой механики для моделирования процессов в экономике (линейные операторы в гильбертовом пространстве, волновая функция и уравнение Шредингера, матрица плотности и уравнение Неймана, аппарат вторичного, ультравторичного и ультратретичного квантования, фейнмановские интегралы по траекториям, представление Гайзенберга и уравнения Гайзенберга и др.);

б) использование квантовомеханических моделей и аналогий (модель спиновых стекол Изинга, квантовое репродукционное эволюционное уравнение, Бозе конденсация квантовых жидкостей и др.);

в) использование квантовомеханической идеологии (принцип неопределенности, принцип дополнительности, другие элементы квантовой теории измерений, вероятностная, включая многомировую, трактовка динамики системы).

Однако, как нам кажется, не менее важным для прогресса в правильной постановке и решении проблем математического моделирования сложных систем является комплексный анализ *концептуальных* основ современной теоретической физики, базовых положений теории систем и системного анализа, как наиболее общего, по сути полуэмпирического подхода к изучению плохо формализуемых явлений действительности, с *обязательным* учетом результатов наблюдений и исследований реальных социально-экономических процессов и систем.

Сложные системы в современном понимании – это проблемные с точки зрения формализации нелинейные системы, в динамике которых наблюдаются синергетические явления, имеют место неустойчивости и плохая предсказуемость, существенную роль играет так называемое последствие и связанная с ним «длинная» память. К таким системам в первую очередь относятся социально-экономические, а также экологические, биологические и другие подобные им системы, концентрированно отражающие верхние уровни интегрированной, сложно организованной и сложно функционирующей материи.

Используя те или иные физические аналогии в моделировании сложных систем, или, как иногда кратко говорят, в моделировании

сложности, не нужно забывать, что физика, как и любая другая наука – прежде всего наука экспериментальная. Всякая физическая теория базируется исключительно на опытных фактах, а ее математический аппарат и соответствующая математическая модель – всего лишь средство для описания результатов наблюдений и/или экспериментов, всегда в той или иной степени приближенное, и, как правило, не единственное.

Модели, описывающие физические процессы, и модели, претендующие на адекватное описание социально-экономических процессов, находятся на существенно разных, в определенном смысле противоположных уровнях иерархии моделей окружающего нас мира. Если физическая картина мира, по крайней мере в ее первоосновах, остается неизменной, как минимум, уже десять миллиардов лет, то верхние, социально-экономические уровни постоянно усложняются и развиваются во времени, причем последние десятилетия – на наших глазах. Так как время необратимо – а этот опытный факт пока не опровергнут никем, – то при попытках традиционными чисто «физическими» методами смоделировать и спрогнозировать поведение социально-экономических и других сложных систем могут возникнуть проблемы из-за невозможности строго соблюдения один из основных принципов точных наук – принцип воспроизводимости результатов экспериментов и наблюдений.

Конечно, модели социально-экономических систем не должны противоречить протекающим в них физическим и другим процессам более низкого уровня, однако не все особенности социально-экономических систем могут быть получены из их физических свойств (известный в общей теории систем принцип эмерджентности). В принципе, это утверждение относится к любой разноуровневой паре из иерархии моделей, описывающих окружающий нас мир.

Прямое использование физических подходов и соответствующих им математических моделей в описании социально-экономических систем полезно, однако выход за пределы их применимости может привести к парадоксам, которые уже наблюдались в истории науки. К таким парадоксам можно отнести лапласовский детерминизм, основанный на классической

механике Ньютона, тепловую смерть Вселенной, вытекающую из основных постулатов термодинамики, парадоксы непрерывной математики, базирующейся на понятии бесконечности и др.

2. Теоретическая физика как одна из моделей реальности и математика как формализованный язык ее описания

XX-й век – век триумфа новой теоретической физики – теории относительности и квантовой механики, которые не только объяснили новые явления, наблюдаемые в макро- и микромире, но и изменили, либо наполнили новым содержанием устоявшиеся физические понятия. Эти понятия веками являлись не только основой всего естествознания, но и формировали соответствующие философские концепции и представления во всех без исключения науках, в том числе и в самой философии (в основном это так называемый метафизический подход).

Хотя новые концепции и утвердились, прежде всего, технологически, как инструмент, в физике, однако, на наш взгляд, до сих пор не в полной мере осознаны и применяются в моделировании социально-экономических систем и протекающих в них процессов.

Причины этого кроются не только и не столько в отсутствии достаточного спектра физических и математических моделей, сколько в инерции, в отсутствии глубоко интегрированного анализа, касающегося не только основ классической физики, теории относительности, квантовой механики, теоретической и практической экономики, но и исторических, психологических, социальных, философских и других, сугубо «гуманитарных» аспектов проблемы.

В связи с этим решение проблем математического моделирования сложных систем следует искать на стыке различных научных направлений, включая не только математику, физику, кибернетику, информатику и т.д., но и традиционно гуманитарные дисциплины – философию, политологию, социологию, психологию, языковедение и др. – возможно, новые подходы и идеи следует черпать именно там. В качестве примеров новых междисциплинарных направлений, оказавшихся весьма

плодотворными, можно назвать синергетику [54], теорию фракталов [55], теорию хаоса [56], эконофизику [1], квантовую информатику [57,58,59], нейроэкономику [60], р-адическую математическую физику [61-63] и многое другое. К такому междисциплинарному направлению можно также отнести и обсуждаемую в данной работе квантовую эконофизику [18,20-22].

Развитие физики и математики, появление электронно-вычислительных машин и затем компьютеров, совершивших информационную революцию во всех без исключения областях человеческой деятельности, с одной стороны, создало иллюзию всесильности математики как средства описания, моделирования и решения любых задач, связанных с интеллектуальной деятельностью, с другой стороны, вскрыло и ее недостатки.

Заметим, что математика, как один из языков отражения и описания окружающей действительности, в основном развивалась в рамках точных наук, прежде всего физики и ее технических приложений, и лишь затем использовалась для решения более «гуманитарных» задач.

Однако к использованию физических аналогий в моделировании систем «нефизического» происхождения, занимающих верхние по сложности и времени возникновения уровни иерархии моделей мироустройства, следует, как уже отмечалось, подходить с определенной осторожностью.

Математика построена на аксиомах, и одной из ее особенностей является детерминированность, «жесткость» используемого ею языка. В отличие от обычного языка, математика не допускает разнотолкований и контекстов – в этом как ее сила, так и ее ограниченность.

Об этом писал еще А.А. Богданов [64,65] в своей «организационной науке» (тектологии) - политик, экономист и мыслитель (к философии как науке он относился весьма скептически), идеи которого начинают возрождаться только сейчас (в 2001 г. в Екатеринбурге создан Международный институт А.Богданова – МИАБ).

Слабую, мягко говоря, адекватность математического языка богатству окружающей нас реальности в аллегорической форме

отметил гениальный детский писатель А.Н.Толстой в своей сказке «Золотой ключик, или Приключения Буратино» (эпизоды с болезнью Буратино и его занятиями арифметикой) [66].

Впервые ограниченность математики как языка, опирающегося на замкнутую систему аксиом, была строго доказана Гедделем в 1931 г. в его знаменитой теореме о неполноте [67,68], однако истинное, в том числе и философское значение этой теоремы в полной мере начинает осознаваться только сейчас [69].

Теория вероятности, как один из разделов математики, хотя и развита для описания неопределенностей, тоже сводит постановку задачи к формально детерминированной, вводя понятие вероятности события (определенное, строго заданное число между нулем и единицей), и приобретает содержательный смысл только для повторяющегося ряда явлений. Однако не все неопределенности, наблюдаемые в реальных системах и процессах, и, прежде всего, в социально-экономических, можно описать вероятностным языком.

Отметим, что по нашему мнению, как в методическом, так и в концептуальном плане, особое значение в описании сложных систем приобретает язык дискретной математики, которая основной упор делает на алгоритмические (дискретные) модели, конструктивна в реализации, и позволяет избавиться от ряда философских парадоксов, имеющих место в непрерывной («бесконечной») математике.

Ярким примером такого философского «тупика» является известный парадокс Банаха-Тарского [70]. Принятие так называемой аксиомы выбора в строгой теории множеств позволяет так разбить шар на конечное число частей, что из них можно составить два шара, эквивалентных исходному шару. Непринятие этой аксиомы не приводит к противоречиям [71], однако существенно обедняет исследования бесконечных абстрактных структур в анализе, алгебре, топологии и других разделах математики.

3. Общая теория систем – язык и методология решения плохо формализуемых задач

Одной из попыток выйти за пределы круга задач, решаемых классической «точной» математикой, явилось создание в 1951 г. Берталанфи общей теории систем [72,73], которая в современном понимании включает саму теорию систем, системный анализ как ее методологию и математическое моделирование как технологическое средство [74-76].

Общей теории систем, которая своей неотъемлемой частью содержит и математический инструментарий, как теории в строгом математическом понимании этого слова, не существует. Именно эту особенность своей теории хотел подчеркнуть, на наш взгляд, Берталанфи, добавляя в ее определение характеристику «общая» и отмечая, что даже в рамках обычной классической механики возникают математически не разрешимые проблемы (задача трех тел), не говоря уже о более сложных системах и более «продвинутых» моделях современной теоретической физики.

Общую теорию систем можно рассматривать как эмпирический набор логически не доказуемых принципов, концепций и подходов, которые выведены из наблюдений над реальными сложными системами, в том числе и с участием человека, являются общими для объектов любой природы и оказываются полезными при проведении наблюдений, исследований и, главное, при решении практических задач.

Существуют различные определения системы. В качестве одного из возможных рабочих определений, комплексно учитывающих онтологические, гносеологические и динамические аспекты понятия системы, можно привести нижеследующее.

Система – это совокупность взаимодействующих элементов, на которые *субъект* по тем или иным признакам разделяет *объект*, для наблюдения, описания, изучения и, в конце концов, решения той или иной практической задачи, при этом взаимодействие элементов системы в процессе ее функционирования (*действие*) порождает новое качество, которым элементы системы по отдельности не обладают.

Это определение можно было бы рассматривать как вольную «интегрированную» интерпретацию определений из [75,76] и других источников, причем авторы не претендуют ни на новизну, ни на оригинальность. Однако отметим, что по самой сути общей теории систем ее положения и исходные определения не обязаны быть ни единственными, ни «жесткими», ни замкнутыми, поскольку она сама тоже есть одна из систем, и к ней применимы все ее собственные принципы.

К важнейшим принципам или положениям общей теории систем, в то же время определяющим и суть так называемого системного подхода, следует отнести:

- а) дискретность;
- б) иерархичность;
- в) эмерджентность;
- г) открытость.

Не смотря на отсутствие прямых связей между общей теорией систем, плохо поддающейся формализации, и современной теоретической физикой, основанной на использовании весьма абстрактных и конкретных математических моделей, они обе, являясь различными экспериментально обоснованными способами отражения реального и единого по своей сути мира, имеют глубокие общие корни.

Прежде всего, отметим, что из определения системы и основных положений общей теории систем следует, что в рамках системного подхода вопрос о том, существует ли объективно, т.е. не зависимо от субъекта, окружающий нас мир, лишен содержательного смысла. Конечно, мир существует независимо от нас, но любое его описание или отражение субъективно, и пара «субъект-объект» есть в соответствии с системными принципами новая система, свойства которой в силу принципа эмерджентности не сводятся ни к свойствам объекта, ни к свойствам субъекта по отдельности. (В квантовой механике подобная философская проблема системного характера возникает при анализе процедуры измерения в паре «измерительный прибор – объект измерения».)

Непрерывность, основанная на принципиально недоказуемой гипотезе о существовании бесконечности (в строгой теории множеств, например в аксиоматике Церемело-Френкеля, это есть

одна из девяти аксиом [77,78]), приводит к физическим парадоксам, и системный принцип дискретности, реализуемый и логически развиваемый в дискретной математике и теории алгоритмов, является разумной альтернативой непрерывности и основанной на ней непрерывной математике. Непрерывность, скорее всего, не является необходимым звеном не только в физическом или математическом, но и в любом другом описании действительности [79-83].

Непрерывность основных физических величин, в том числе и пространственных координат и времени – есть всего лишь гипотеза и приближение, не всегда адекватное задачам отображения окружающего нас мира. Поэтому в рамках системного подхода, если последовательно и до конца реализовывать его принципы, и эти величины должны рассматриваться как дискретные. Заметим, что в физике вопрос о дискретности или непрерывности нашего пространства и времени до сих пор носит дискуссионный характер.

Открытость любой системы в определенном смысле есть следствие принципа иерархичности, причем реально наблюдаемое наличие памяти (последствия) и учет времени как одного из системообразующих факторов делает ее формально открытой даже в тех случаях, когда с момента начала функционирования система физически изолирована. В последнем случае открытость системе придает ее предыстория, полное описание и учет которой в принципе невозможны (задание истории системы в виде совокупности начальных условий – как это делается в классической физике - весьма узкий и заведомо приближенный способ ее учета).

4. Иерархия концепций и моделей современной теоретической физики

Как уже отмечалось, теоретическая физика прошлого столетия фундаментальным образом изменила взгляд на понятия пространства и времени, на процедуры измерения и достижимую точность их результатов, на понятие предсказуемости поведения системы, поставила вопрос о причинах необратимости времени, обратила внимание на наличие последствия (памяти) в реальных физических процессах.

Одна из важнейших задач, которую следует отнести к компетенции квантовой экономифизики, состоит в том, чтобы проследить, какое влияние оказали (или могут) оказать эти изменения на постановку задач математического моделирования социально-экономических процессов и интерпретацию его результатов.

Инструментальный подход к физике как к средству предсказания результатов определенным образом подготовленных экспериментов прекрасно работает в самой физике, однако перенос ее понятий и математического аппарата на системы другой природы требует обязательного и глубокого анализа ее исходных концепций.

Отметим, что в современном понимании теоретическая физика – это иерархии структурных, полевых, динамических и других моделей физических свойств материи, начиная от классической механики Ньютона и заканчивая общей теорией относительности и современными разделами релятивистской квантовой микро- и макро- (космо-) теории, каждая из которых имеет свои особые постулаты (т.е. свою аксиоматику) и свои области применимости. В этом смысле законы Ньютона не менее фундаментальны, чем теория кварков или суперструн, а те связи, которые существуют между более общей и менее общей теорией, чаще всего носят характер кратковременных «мостиков», выполняющих функцию «строительных лесов» на этапе разработки теории, причем провести их строгое и полное обоснование, как правило, не удастся. Анализом концептуальных положений важнейших из упомянутых выше моделей, делая экскурсы в общую теорию систем и обращаясь к практике функционирования реальных сложных систем, мы и займемся.

4.1. Классическая физика и ее парадигмы: критический анализ

В классической физике предполагается, что основные физические величины можно рассматривать как величины, принимающие непрерывный ряд значений и существующие *независимо* от процедур измерения. При этом:

1. существуют *мгновенные* значения физических величин, характеризующих состояние системы;

2. в принципе существуют процедуры измерений, позволяющие измерить мгновенные значения этих физических величин;

3. влияние процедуры измерения на значение измеряемой физической величины может быть сделано сколь угодно (пренебрежимо) малым.

К числу таких величин (для простоты ограничимся механикой) относятся – масса материальной точки m , расстояние (радиус-вектор точки \vec{r} с декартовыми координатами x, y, z), сила (вектор \vec{f} с проекциями на декартовы оси координат f_x, f_y, f_z), которые могут изменяться во времени (время t абсолютно, непрерывно, физически необратимо и рассматривается как параметр). С помощью этих величин и других величин, производных от них (вектор скорости $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ с координатами $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$, вектор ускорения $\ddot{\vec{r}}$, импульс $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ и т.д.), используя соответствующие уравнения, можно описать, причем в принципе точно, поведение любой механической системы.

Математическая модель строится с использованием евклидова пространства, в котором постулируется существование инерциальной системы координат (первый закон Ньютона), уравнения движения вида:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{f} \quad (1)$$

(второй закон Ньютона для материальной точки) и третий закон Ньютона:

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21} \quad (2)$$

(сила \vec{f}_{12} , с которой материальная точка 1 действует на материальную точку 2, равна и противоположно направлена силе \vec{f}_{21} , с которой точка 2 действует на точку 1).

Математическим аппаратом для решения задач классической механики служит дифференциальное и интегральное исчисления, а в качестве независимой переменной выступает время. Состояние

системы характеризуется координатами и скоростями ее материальных точек в евклидовом пространстве, динамика системы описывается дифференциальными уравнениями.

Вместо уравнений Ньютона в современной физике используют эквивалентные им формализмы, основанные на принципе наименьшего действия для функции Лагранжа системы или на уравнениях Гамильтона [84], однако это не меняет сути рассматриваемых нами проблем.

Даже в рамках классической физики, сформулированные выше предположения 1)-3) относительно физических величин и процедур их измерения являются приближениями и должны рассматриваться как гипотезы, справедливые только при выполнении определенных условий.

Действительно, если исходить не из абстракций, а из реалий классической теории измерений, то понятие физической величины (да и любой другой величины) неразрывно связано с некоторой процедурой измерения, которая включает также и сравнение с некоторым эталоном в том или ином виде.

Так как любая процедура измерения занимает конечное время Δt , то предполагается, что в течение этого времени значения измеряемой физической величины и существенные характеристики эталона (или значения физической величины относительно существенных характеристик эталона) не меняются.

Так ли это на самом деле? Если задуматься, то это не совсем так, а строго говоря, совсем не так. Например, длина стержня X , в силу хотя бы тепловых колебаний составляющих его атомов (или принципиально неустранимых так называемых «нулевых» квантовых колебаний, если стержень находится при температуре, близкой к абсолютному нулю), непрерывно меняется.

Это означает, что значение измеренной длины стержня, отнесенное к моменту окончания процедуры измерения t , $x(t)$, есть некоторый *функционал* (в простейшем случае среднее значение) от значений $x(t')$ при $t' < t$:

$$x(t) = F[x(t')]; \quad t - \Delta t \leq t' < t. \quad (3)$$

Проведем логический анализ соотношения (3), оставаясь в рамках классической физики и для простоты ограничиваясь

простейшим одномерным случаем (физическая величина, характеризующая систему – скаляр).

Если определенное значение некоторой физической величины X или ее проекции в заданной системе координат (это не обязательно должна быть длина или одна из декартовых координат точки в одномерном рассмотрении) существует *изначально*, но зависит от времени, то возможны две интерпретации равенства (3):

1) в правой и левой частях (4) на самом деле фигурируют *разные* по сути величина x - неявно и *гипотетически* существующее («мгновенное») $x(t')$ (справа) и *реально* измеренное («интегральное») $x(t)$ (слева). При этом $F[x(t')]$ - неявно заданный функционал от неявно заданной функции $x(t')$, $t' < t$;

2) в обеих частях (3) фигурируют величины x одной природы, «мгновенные» $x(t)$, в таком случае (3) следует рассматривать как *функциональное уравнение* для нахождения неизвестной функции $x(t)$ с функционалом $F[x(t')]$, который должен учитывать все существенные для измерения X свойства системы, в том числе и ее память о своем прошлом, определяя, в конечном счете, функцию $x(t)$.

Таким образом, предположение о том, что точные мгновенные значения физических величин (как и любых других величин) существуют *априори* и *не зависимо* от каких либо процедур измерения – то, на чем стоит классическая механика – никакими логическими доводами, кроме наших предположений и опыта, заведомо приближенного и ограниченного наблюдениями систем определенного типа, не подтверждается.

И последнее замечание. Согласно законам Ньютона задание мгновенных значений координат и скоростей частиц системы в данный момент времени полностью определяет будущее поведение системы, что следует рассматривать как парадокс, противоречащий здравому смыслу. В такой системе отсутствует последствие, т.е. память, и вряд ли такая модель может адекватно описывать функционирование подавляющего большинства реальных сложных систем.

4.2. Нерелятивистская квантовая механика. Экспериментальные факты, постулаты и следствия

В основе квантовой нерелятивистской механики лежат экспериментально установленные факты, которые свидетельствуют о том, что:

а) имеет место принцип неопределенности, в частности нет точного понятия траектории частицы;

б) физические величины могут принимать не любые значения, в частности спектр их разрешенных значений может быть и дискретным;

в) так же как и в классической физике предполагается, что физические величины могут иметь мгновенные значения, но не всякий набор величин может быть измерен одновременно;

г) имеет место конечное влияние процедуры измерения на результат измерения, при этом состояние системы после измерения оказывается в той или иной степени неопределенным;

д) любая система является принципиально открытой, поскольку волновая функция, с помощью которой в квантовой механике характеризуют состояние системы (ее существование постулируется), формально определена и непрерывна во всем пространстве.

Существуют различные эквивалентные по сути формулировки основных положений квантовой механики, однако любой используемый математический формализм должен удовлетворять всем перечисленным выше условиям и результатам проводимых экспериментов.

К сожалению, в отличие от классической, даже нерелятивистская квантовая механика лишена наглядности и не подтверждается «здравым» смыслом, и ее достаточно глубокое изучение и понимание – пока удел физиков-теоретиков и относительно узкого круга специалистов ряда прикладных направлений. Поэтому мы считаем необходимым привести одну из наиболее кратких (и в этом ее достоинство), но не слишком распространенных (в силу исторических причин) квантовомеханических аксиоматик [52], сопровождая ее

соответствующими комментариями и проводя необходимые и полезные аналогии с практикой наблюдения и опытом теоретического обобщения поведения сложных систем.

Прежде, чем перейти к формулировкам [52], остановимся на более традиционном, исторически сложившемся подходе к изложению основ квантовой механики, и отметим его особенности.

Большинство «классических», если можно так выразиться, изложений исходных положений квантовой механики, в том числе и в известном курсе теоретической физики Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица [51], проводится по схеме:

- 1) принцип неопределенности для измеряемых значений физических величин;
- 2) волновая функция системы и принцип суперпозиции;
- 3) операторы физических величин.

Такая схема имеет историческое, психологическое и логическое объяснение. Перед известными основоположниками квантовой теории стояла не только задача разработать математический аппарат, количественно объясняющий результаты физических экспериментов, не только осознать, на базе той классической школы, в которой они выросли, качественно новую идеологию, но и донести ее до сознания всего физического сообщества.

В этих условиях (причем с неизбежностью) формулируемые концепции не могли не стоять, образно говоря, одной ногой в «старой», классической, а другой – в «новой», квантовой физике. Однако такой «половинчатый» подход рано или поздно должен был стать тормозом для непротиворечивой философской интерпретации ее законов и широкого распространения ее концепций.

Еще в 1974 г. один из авторов, обучаясь в аспирантуре физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и готовя реферат, посвященный философским проблемам квантовой механики, обратил внимание на бурный и безкомпромисный характер большинства дискуссий, касающихся различий в трактовках квантовомеханических понятий и явлений разными научными школами, но так и не понял, в чем их суть.

Насколько нам известно, дискуссии, связанные с проблемами интерпретации квантовой физики, не утихают и до сих пор, а

участие в них, вольно или не вольно, принимают не только физики и философы, но и ученые других направлений, пытающиеся использовать квантовомеханические понятия и аналогии (квантовая психология [85], квантовая социология [86], квантовая логика [87,88] и др.).

Подход к изложению основ квантовой механики, принятый в [52], как уже упоминалось выше, не является традиционным. Как отмечал в предисловии к первому изданию этой книги ее научный редактор академик Н.Н.Боголюбов, «достоинством книги является логичный и последовательный характер изложения на основе сформулированных в явном виде положений и правил». Однако, как нам кажется, именно компактное и явное изложение правил, которые можно назвать и аксиомами, или постулатами, в их логической последовательности, без излишней оглядки на классическую физику, позволяет совершенно по-другому взглянуть на концептуальные основы квантовой механики и сделать соответствующие выводы.

Приводимые ниже шесть постулатов нерелятивистской квантовой механики являются одним из лекционных вариантов изложения [52] (Кривченков В.Д., 1970 г., физический факультет МГУ).

A1. Согласно *первому постулату* всякой физической величине L (кроме времени t , которое в нерелятивистской квантовой теории, как и в классической физике, не является физической величиной и рассматривается как независимый параметр) ставится в соответствие линейный эрмитов оператор \hat{L} .

Правила сопоставления основываются на классических выражениях для физических величин и формулируются следующим образом:

- классическим координатам x, y, z сопоставляются операторы координат:

$$\hat{x} \equiv x; \quad \hat{y} \equiv y; \quad \hat{z} \equiv z \cdot \Rightarrow \vec{r} \rightarrow \hat{\vec{r}} \equiv \vec{r}; \quad (4)$$

- классическим проекциям импульса p_x, p_y, p_z сопоставляются операторы проекций импульса:

$$\hat{p}_x \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial x}; \quad \hat{p}_y \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial y}; \quad \hat{p}_z \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial z}; \quad \rightarrow \quad \vec{\hat{p}} \equiv i\hbar \vec{\nabla} \quad (5)$$

(i - мнимая единица, $\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-27}$ эрг·сек - постоянная Планка, в (4-5) используется и постулируется координатное представление операторов);

• произвольной классической физической величине $L = L(\vec{p}, \vec{r}, t)$, являющейся функцией импульсов и координат (а в общем случае и времени t), сопоставляется оператор:

$$\hat{L} \equiv L\left(\vec{\hat{p}}, \vec{r}, t\right). \quad (6)$$

Эти правила отражают так называемый *принцип соответствия*. В частности, классической полной энергии системы $E = H(\vec{p}, \vec{r}, t)$ ставится в соответствие оператор полной энергии системы (гамильтониан):

$$\hat{H} = H\left(\vec{\hat{p}}, \vec{r}, t\right). \quad (7)$$

Так как не всегда операторные выражения типа (6) могут иметь четкую и однозначную интерпретацию, то вводятся дополнительные правила.

Так, например, формально физической величине $x p_x \equiv p_x x$ можно сопоставить три различных оператора:

$$x \cdot \hat{p}_x \equiv i\hbar x \frac{\partial}{\partial x}; \quad \hat{p}_x x \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial x} x; \quad \frac{1}{2}(x \cdot \hat{p}_x + \hat{p}_x x) \equiv \frac{i\hbar}{2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} x \right), \quad (8)$$

однако эрмитовым оператором и, следовательно, оператором физической величины $x p_x$, является только последнее, симметричное выражение.

Если функция $L = L(\vec{p}, \vec{r}, t)$ относительно переменной \vec{p} не является полиномом, то используется ее формальное разложение в многомерный ряд Тейлора. Возникающие при этом вопросы сходимости бесконечных операторных и функциональных рядов и их интерпретация являются предметом специального обсуждения, а критерием выбора тех или иных представлений оператора служит

соответствие проведенных теоретических расчетов результатам экспериментов.

A2. В соответствии со *вторым постулатом* данная физическая величина L может принимать *только* собственные значения λ_i ее оператора \hat{L} :

$$\hat{L}\varphi = \lambda\varphi; \Rightarrow \lambda_i, \varphi_i; \hat{L}\varphi_i \equiv \lambda_i\varphi_i, \quad (9)$$

всегда действительные в силу эрмитовости \hat{L} (стандартная задача на собственные значения λ_i и собственные функции φ_i для линейного эрмитового оператора \hat{L}).

Из этого постулата следует, что, в отличие от классической физики, не всякое значение физической величины может быть разрешено, в частности возможен и *квантованный* (дискретный) спектр ее значений. Примером дискретного спектра является спектр разрешенных значений энергии атома водорода (единственная математически *точно* решаемая задача нерелятивистской квантовой механики, относящаяся к реальной системе).

В концептуальном плане первый и второй постулаты квантовой механики фактически дают первое подтверждение выдвигаемому нами тезису о первичности *процедуры* по отношению к *результату* ее действия, который диаметрально противоположен принятой в классической физике концепции. В дальнейшем мы будем неоднократно возвращаться к этому тезису, приводя в его пользу новые аргументы и доказательства.

Принцип соответствия можно рассматривать как иллюстрацию *генетических* аспектов, характеризующих бесконечное историческое развитие, как теоретической физики, так и научного познания в целом, и включающих следующие повторяющиеся этапы:

- наполнение старых формул и положений новым содержанием;
- генерацию новых формул и положений в результате конфликта старого и нового и происходящих при этом мутаций;
- отбор состоятельных теорий среди множества возможных.

Нам представляется важным отметить этот аспект, поскольку очень часто, даже на современном уровне, не прекращаются попытки создать «единую теорию всего», найти те универсальные

«первокирпичики», которые позволят раз и навсегда объяснить и связать воедино все, что происходит в этом мире. Такие попытки, даже в области фундаментальной физики, не говоря уже о теориях, претендующих на всеобъемлющее и вневременное описание социально-экономических явлений, на наш взгляд бесперспективны.

А3. Согласно *третьему постулату* каждому состоянию физической системы ставится в соответствие нормированная волновая функция ψ :

$$\psi = \psi(x, y, z, t); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx dy dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx dy dz = 1 \quad (10)$$

(для простоты мы рассматриваем систему из одной частицы, а также используем координатное представление ее волновой функции в соответствии с принятым выше координатным представлением для операторов физических величин).

В классической механике для системы из N частиц задание $3N$ координат и $3N$ проекций импульсов (или скоростей) частиц – $6N$ фазовых координат, которые по предположению могут быть точно измерены, полностью определяет состояние системы.

В квантовой механике состояние системы в наиболее полном виде задается волновой функцией, которая не позволяет одновременно и точно определить все классические фазовые координаты системы. Набор измерений, который позволяет определить волновую функцию системы, называется *полным*, и для системы из N частиц число таких измерений (без учета сугубо квантовых спиновых переменных) в два раза меньше, чем при классическом определении состояния системы, т.е. равно $3N$.

Так как волновая функция формально определена во всем пространстве даже для одиночной частицы, то любая реальная квантовомеханическая система фактически является *открытой*. Для описания таких систем (т.е. учета взаимодействия системы с окружением, если оно не является заведомо малым) используется представление матрицы плотности [51].

А4. *Четвертый постулат* гласит, что математическое ожидание (среднее значение) физической величины L с оператором

\hat{L} для системы, находящейся в состоянии с волновой функцией $\psi(x, y, z, t)$, определяется интегралом:

$$\langle L \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, y, z, t) \hat{L} \psi(x, y, z, t) dx dy dz. \quad (11)$$

Из этого постулата следует, что результат любого измерения имеет, вообще говоря, неоднозначный характер. Физическая величина может принимать в результате измерения детерминированное значение только в том случае, если $\psi(x, y, z, t)$ совпадает с одной из собственных функций φ_i оператора \hat{L} . В частности, величина $|\psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz$ интерпретируется как вероятность обнаружить при измерении частицу в элементе объема $dx dy dz$. Вероятностный характер, или, если быть точным, *неопределенность* результата измерения, есть принципиальная особенность квантовомеханических систем.

А5. Пятый постулат (уравнение Шредингера) определяет эволюцию системы (изменение ее волновой функции ψ) во времени:

$$i \cdot \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (12)$$

и играет ту же роль, что и второй закон Ньютона в классической механике.

А6. Шестой постулат касается системы тождественных микрочастиц и сводится к утверждению, что в такой системе частицы *неразличимы*. Постулируется также существование *спина* – новой, сугубо квантовой (релятивистской) переменной, а также деление всех известных частиц на два типа – *фермионы* (антисимметричная волновая функция, частицы с полуцелым спином) и *бозоны* (симметричная волновая функция, частицы с целым спином).

Из шестого постулата следует существование специфического квантового (обменного) взаимодействия, реализующегося только в коллективе тождественных микрочастиц и не имеющего классического аналога. В концептуальном плане этот постулат можно рассматривать как наглядную физическую иллюстрацию

одного из базовых принципов системного анализа – принципа эмерджентности.

Кратко, не затрагивая математических аспектов и опуская их детали, но подчеркивая концептуальные моменты, шесть постулатов нерелятивистской квантовой механики можно переформулировать следующим образом.

1. *Вместо* классического понятия «физическая величина L » вводится новое фундаментальное понятие «оператор физической величины \hat{L} ».

2. Возможные (разрешенные) значения физической величины L есть следствие (результат) решения математической задачи на собственные значения λ для оператора физической величины \hat{L} :

$$\hat{L}\varphi = \lambda\varphi.$$

3. Для характеристики состояния системы вводится новое понятие – *нормированная волновая функция* ψ :

$$\int \psi^* \psi d\tau = \int |\psi|^2 d\tau = 1.$$

4. Классическому значению физической величины L в состоянии с нормированной волновой функцией ψ соответствует новая величина – *среднее значение физической величины* $\langle L \rangle$, определяемое соотношением:

$$\langle L \rangle = \int \psi^* \hat{L}\psi d\tau.$$

5. Эволюция системы во времени характеризуется эволюцией ее нормированной волновой функции, которая определяется из решения уравнения Шредингера:

$$i \cdot \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi.$$

6. В системе тождественных частиц все частицы неразличимы. Приведенные выше шесть постулатов квантовой (нерелятивистской) механики (постулаты **A1-A6**), в определенном смысле аналогичные законам классической механики Ньютона и являются той базой, на которой строится весь ее теоретический аппарат и практические приложения.

Так, используя достаточно элементарные выкладки, можно показать, что из постулатов **A1-A4** вытекает фундаментальное

соотношение неопределенностей для координат и скоростей (или импульсов):

$$\Delta x \cdot \Delta v \geq \frac{\hbar}{2m}; \left(\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \right), \quad (13)$$

где Δx и Δv (Δp) - среднеквадратичные погрешности измерения координаты x и скорости $v = \dot{x}$ (импульса $p = m\dot{x}$) частицы с массой m .

Из соотношения (13) следуют, в свою очередь, пять важных для дальнейшего концептуальных выводов:

- ни координата частицы, ни ее скорость, не могут иметь точных значений, поскольку при $\Delta x = 0$ неопределенность скорости Δv , а, следовательно, и сама скорость обращается в бесконечность, При $\Delta v = 0$ частица оказывается полностью делокализованной, т.е. может быть обнаружена в любой точке физического пространства;
- не существует понятия мгновенной скорости как ньютоновского предела:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}; \quad (14)$$

- скорость и координата частицы, определяющие ее состояние в классической механике в момент времени t , могут быть определены лишь приближенно и при *конечном*, достаточно большом Δt ;

- непрерывной классической траектории частицы в действительности не существует – это приближенное понятие, имеющее смысл только при достаточно больших промежутках Δt между соседними измерениями положения частицы;

- предсказание поведения частицы, причем заведомо приближенное, определяемое парой классических фазовых переменных $(x(t), v(t))$, возможно только при учете ее истории, т.е. *последствия*, поскольку:

$$v(t) \approx \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} x(t) - \frac{1}{\Delta t} x(t - \Delta t) \quad (15)$$

и зависит как от $x(t)$, так и от $x(t - \Delta t)$.

К выводу о наличии последействия на основе анализа (15) можно подойти и с другой стороны. Сопоставляя классическое определение скорости (14) и соотношение неопределенностей (13) получаем, что в (15) либо $x(t)$, либо $x(t - \Delta t)$, либо обе эти величины одновременно, не могут быть определены *точно* (иначе существовало бы и точное значение предела (14)), причем неточность зависит от Δt , и при $\Delta t \rightarrow 0$ (исчезновение последействия) формально становится бесконечно большой (невозможность предсказания).

Квантовая механика, таким образом, ликвидирует парадокс классической механики, связанный с отсутствием последействия в используемых ею математических моделях.

Из квантовомеханического анализа процесса взаимодействия системы и измерительного «прибора» (анализа, основанного на теории возмущений) также следует, что неопределенность значения энергии системы ΔE , приобретаемая в результате такого взаимодействия, связана с его длительностью Δt соотношением [51]:

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar \quad (16)$$

Из квантовомеханического анализа процедуры измерения импульса частицы, с учетом (16), следует еще одно полезное для дальнейшего соотношение, связывающее минимальную возможную неопределенность импульса Δp с длительностью его измерения Δt и изменением скорости частицы Δv за время измерения [51]:

$$\Delta v \cdot \Delta p \cdot \Delta t \sim \hbar . \quad (17)$$

Нам представляется важным еще раз подчеркнуть, что в изложенной выше аксиоматике квантовой механики на первое место выдвигается *процедура* измерения, а не значения физических величин, как это было в классической физике. При этом результат измерения, как это следует из постулатов, в общем случае имеет вероятностный характер, не всякие значения физической величины могут быть разрешены, а состояние системы после измерения оказывается в той или иной мере неопределенным из-за принципиально неконтролируемого взаимодействия наблюдаемой системы и измерительного прибора.

Тот факт, что в нерелятивистской квантовой механике в принципе *допускается* существование мгновенных значений физических величин, и позволяет ввести в качестве характеристики текущего состояния системы ее волновую функцию или матрицу плотности (для открытых систем). При этом волновая функция может иметь различные представления (координатное, импульсное, матричное в той или иной полной системе собственных функций, в числах заполнения состояний в рамках аппарата вторичного квантования и т.д.).

Однако, как следует из вышеизложенного, анализ, проводимый даже в рамках аппарата нерелятивистской квантовой механики, свидетельствует о том, что для *реальных* систем и для *реальных* процедур измерений не существует ни мгновенных, ни точных значений физических величин. В рамках нерелятивистской квантовой механики существование мгновенных точных значений физических величин является полезной для теории и практики *гипотезой*, точно не подтверждаемой, как и в случае классической механики, никакими логическими или экспериментальными выводами.

Сделаем еще ряд важных, на наш взгляд, замечаний.

Принято считать, что нерелятивистская квантовая механика является линейной теорией (см., например, [19]), поскольку носитель информации о текущем состоянии системы – ее волновая функция – подчиняется линейному уравнению, уравнению Шредингера, а операторы физических величин суть линейные операторы. Однако это не совсем так.

Понятие линейного оператора или линейного преобразования включает принцип суперпозиции и, как минимум, предполагает, что множество входных и выходных элементов образуют линейные пространства. Однако, физический смысл имеют только нормированные волновые функции, т.е. решение уравнения Шредингера или уравнения на собственные функции и собственные значения оператора физической величины при *дополнительных* условиях нормировки. Множество *нормированных* волновых функций, хотя и принадлежит линейному пространству, само по себе линейного пространства, строго говоря, не образует.

Известно, что в рамках классической механики, которая рассматривается как частный предельный случай квантовой механики, существует множество нелинейных задач. С точки зрения здравого смысла представляется странным, каким образом, более общая, формально линейная, теория, порождает частные нелинейные задачи.

Конечно, никаких парадоксов в этом нет, и все становится на свои места, если учесть, что математический формализм квантовой механики – это, прежде всего формализм *операторов*, основой которого является алгебра операторов со специальными коммутационными соотношениями, которая отнюдь не является линейной, а волновая функция – вторичный и производный от формализма операторов математический объект.

Вообще говоря, нелинейность, как понятие, противоположное понятию линейности, является содержательным для весьма узкого класса математических моделей, в основе которых лежат линейные (векторные) пространства. Так, например, бессмысленно говорить о нелинейности булевой алгебры и построенной на ней теории вероятностей – это просто *другие* математические модели. Однако абсолютизация понятия «значение физической величины», которое является естественным элементом естественного линейного пространства, привело к абсолютизации и понятия нелинейности, в том числе и к появлению неудачного на наш взгляд термина «нелинейная наука» (т.е. наука, отличная от линейной).

Таким образом, и здесь мы, проводя историко-логический и психологический анализ понятий, в неявном виде находим аргументы в пользу тезиса о первичности в квантовой механике процедуры измерения над ее результатом, т.е. значением физической величины, которое можно рассматривать как характеристику текущего состояния системы – характеристику вторичную и заведомо подчиненную.

И последнее замечание. Известно, что время в уравнениях квантовой динамики (например, в уравнении Шредингера для волновой функции в координатном представлении) формально обратимо, но специфика квантовомеханических процедур наблюдения (измерения) делает его необратимым. Поскольку в реальности время действительно необратимо, то вполне

естественно включить необратимость времени в систему аксиом как экспериментально установленный факт. Для этого опять таки достаточно поменять акценты, приняв в качестве основного положения первичность и необходимость процедуры измерения (т.е. действия) и, соответственно, признав наличие последействия, а также влияние процедуры измерения на результат. В таком случае вопрос о том, обратимо ли время и существуют ли наборы параметров или переменных, с помощью которых можно *точно* описать состояние системы и ее эволюцию во времени, в рамках соответствующим образом сформулированной системы аксиом нерелятивистской квантовой механики теряет свою философскую актуальность.

Итак, мы считаем, что даже на основании анализа нерелятивистской квантовой механики у нас есть все основания принять высказанную ранее гипотезу (тезис) о том, что понятие состояния в квантовой физике не является ни первичным, ни фундаментальным. Эту же гипотезу, рассматривая ее как «мостик» и опираясь на принцип эмерджентности, разумно положить в основу любой теории любых достаточно сложных динамических систем.

Фактическое подтверждение этой гипотезы можно найти, внимательно анализируя реальную динамику реальных систем самой разной природы. Однако наиболее веские аргументы для таких выводов, причем аргументы именно со стороны естествознания (что очень важно с исторической, психологической и философской точек зрения), дает релятивистская квантовая физика, к анализу концепций которой мы и приступаем.

4.3. Релятивистская квантовая механика. Новые парадигмы в моделировании сложных систем

Релятивистская квантовая механика считается незавершенной до конца и до настоящего времени из-за отсутствия соответствующей экспериментальной базы (для экспериментального обоснования тех или иных теорий требуются энергии до 10^{18} эв, недоступные пока в земных условиях, хотя часть вопросов может снять запущенный недавно коллайдер [89] дающий

на встречных пучках электронов энергию взаимодействия до $14 \cdot 10^{12}$ эв). Тем не менее, полученные в ее рамках результаты подтверждают проведенный выше анализ и его выводы, придавая им не только технический, но и концептуальный характер.

Новым в релятивистской квантовой механике является фундаментальное утверждение о том, что всякая процедура измерения занимает *принципиально конечное* время Δt , поэтому *мгновенных* значений физических величин *не существует*. При этом предельная точность измерения значений любой физической величины обратно пропорциональна времени измерения и конечна при любом конечном Δt , а само значение может быть отнесено только к этому промежутку времени Δt [50].

Так, если в соотношении (17) учесть релятивистское ограничение на максимально возможное изменение скорости $\Delta v \sim c$ (c - скорость света), то придем к *релятивистскому* квантовому принципу неопределенности, выражаемому соотношением [50]:

$$\Delta p \cdot \Delta t \sim \hbar / c. \quad (18)$$

Таким образом, точное значение импульса частицы может быть получено только при времени измерения, равном бесконечности, а это означает, что точно может быть измерен только импульс свободной частицы, находящейся в таком (свободном) состоянии бесконечное время.

Для построения подавляющего большинства современных моделей релятивистской квантовой механики, включая и самые последние теории [90-93], используется математический формализм, основанный на группах Ли и алгебре Ли – алгебре операторов, подчиняющихся определенным коммутационным соотношениям [94]. Тем самым в математическом формализме релятивистской квантовой механики «узаконивается» доминирующая роль процедуры, действия, и оператор как раз и является ее математическим отображением или образом.

Как мы уже отмечали, вся нерелятивистская квантовая механика построена на принципиальной возможности мгновенного измерения тех или иных величин, характеризующих систему. Именно это предположение позволяет ввести волновую функцию как средство объективного описания состояния системы и ее

эволюции во времени [50], а, следовательно, и само понятие состояния как фундаментальную характеристику системы.

В рамках релятивистской квантовой механики такое предположение отвергается в принципе, поэтому важнейшее значение приобретает так называемая матрица рассеяния, или S-матрица. Эта матрица позволяет, если известны состояния системы невзаимодействующих (при $t = -\infty$) частиц, предсказать вероятности различных состояний системы свободных частиц после взаимодействия, при $t \rightarrow +\infty$ [50].

Такая «рафинированная» постановка задачи экспериментального исследования релятивистских квантовых эффектов вряд ли соответствует подавляющему большинству реально протекающих в природе физических процессов, хотя именно она и позволяет получить достаточно точные и воспроизводимые результаты, и весьма полезна для выяснения фундаментальных, но всего лишь физических законов природы.

Насколько нам известно, релятивистские эффекты в квантовой эконофизике в затронутых выше аспектах до настоящего времени не обсуждались. Однако это не означает, что аналоги релятивистских эффектов или их следствий не имеют места в социально-экономических процессах, поскольку величина, играющая в этих процессах роль предельной возможной скорости, не обязательно должна быть связана с физической скоростью света c .

Таким образом, исходя из концептуальных положений уже релятивистской квантовой механики, а также учитывая весь проведенный выше анализ, можно, и на наш взгляд теперь вполне обоснованно, принять гипотезу о том, что процедуры измерения *любых* величин и в социально-экономических процессах занимают конечное время, а результаты измерения зависят от процедуры измерения и являются вторичными по отношению к последней. Также вполне разумно принять гипотезу о том, что не существует мгновенных значений экономических и любых других величин и показателей, причем точность их измерения падает с уменьшением времени измерения. Последнее можно интерпретировать и как одно из подтверждений гипотезы о наличии принципиально неисключаемого последствия в системе, т.е. памяти.

Перейдем к дальнейшим «релятивистским» выводам. Предельная точность измерений возрастает с увеличением их длительности, однако это возможно только в том случае, если система находится в неизменном состоянии, поэтому для реальных, находящихся в динамике систем существует свое *оптимальное* время измерения, следовательно, оптимальное наблюдение (измерение) над системой с необходимостью должно иметь *дискретный* во времени характер. Величина шага зависит, конечно, и от того, *что* меряется, и от того, *как* меряется, а оптимальность в определенном смысле имеет и *субъективную* составляющую.

Формально, а на наш взгляд и не только формально, в социально-экономических системах к сложным *косвенным* измерениям (наблюдениям) следует отнести и любые расчеты над совокупностью исходных данных, в том числе и прогнозирование динамики, в соответствии с тем или иным алгоритмом. Таким образом, алгоритм становится *измерительной процедурой*, порождающей соответствующую ему величину, при этом реализация этой процедуры, как и всякой другой измерительной процедуры, может непредсказуемым образом изменить состояние системы и ее будущее поведение.

Чтобы придать нашим выводам еще большую убедительность, проведем следующий мысленный эксперимент. Предположим, что некоторое авторитетное и лично ни в чем не заинтересованное высшее существо («АВС»), владеющее всей информацией о нашем мире (в том числе и о его истории), способное производить любые вычисления и сколь угодно точно прогнозировать будущее, предсказывает повышение кросс-курса доллар/евро через месяц примерно на 10% (падение доллара).

Если этой информацией не обладает никто, то так оно, скорее всего, и будет. Мало что изменится в прогнозе и в том случае, если «АВС» доведет эту информацию до одного отдельно взятого, достаточно разумного бизнесмена, который, проведя без лишнего шума соответствующие банковские операции, через месяц заметно увеличит свой капитал. Если же владельцами этой весьма авторитетной, не подлежащей сомнению информации (ведь исходит от самого «АВС»!) окажутся *все*, то кросс-курс доллар/евро

возрастет не через месяц, а буквально через день-два, и не на 10%, а на десятки процентов, если не в разы.

Предположим, что «АВС», сообщив первый вариант своего прогноза всем заинтересованным участникам, тут же просчитает его второй вариант, с учетом того обстоятельства, что с первым его вариантом (который теперь можно интерпретировать как ожидания), уже все ознакомлены и приняли соответствующие решения. Если и этот вариант станет известен широкой публике, то повторится все то же самое, что и в первом случае.

Подобный «пинг-понг» между «АВС» и пользователями его информации, в рамках гипотезы о непрерывном времени и бесконечной («безвременной») скорости расчетов, может продолжаться бесконечно, что приводит к неразрешимому парадоксу не только прогнозирования, но и вообще реального протекания социально-экономической динамики.

В рамках изложенного выше подхода, если отказаться от бесконечности (и, соответственно, непрерывности) как концептуального понятия, такой парадокс попросту не возникает – любой «пинг-понг» занимает время, и предсказание будущего заведомо потеряет смысл, если к моменту предсказания это «будущее» уже оказалось в прошлом.

Заметим, что роль отнюдь не абстрактного «АВС» может играть обладатель уникальной на данный момент, достаточно быстрой технологии прогнозирования, владеющий необходимым объемом информации. Именно он, будучи лично заинтересованным, может оказаться в локальном по времени и локальном по тем или иным финансово-экономическим «координатам» выигрыше.

Совершенно очевидно, что возможности такого материализованного «АВС» зависят от накопленного данной цивилизацией исторического опыта, а также доступных и уже освоенных массовых технологий прогнозирования, поэтому социально-экономическая динамика и реалии древнего мира, средних веков, нашего времени и в той или иной степени отдаленного будущего – были, есть и будут принципиально разными вещами.

Итак, из нашего анализа, существенно опирающегося на концептуальные основы релятивистской квантовой механики, следуют новые парадигмы, которые, на наш взгляд, должны быть приняты и заложены в концептуальные основы математического моделирования любых сложных систем. В развернутом виде эти парадигмы, или концептуальные положения, можно сформулировать так:

- Первичность процедуры измерения по отношению к результату и ее неустранимое влияние на результат;
- Принципиальное отсутствие понятия мгновенного значения величины, а следовательно и понятия состояния системы как ее фундаментальной характеристики;
- Дискретность и приближенный характер временной динамики системы как последовательности ее наблюдаемых, по определению приближенных состояний;
- Наличие принципиально неустранимого последствия, т.е. памяти;
- Влияние любой процедуры измерения, в том числе наблюдения и прогноза, полученного в результате реализации той или иной алгоритмической процедуры, на состояние и будущее поведение системы;
- Отказ от бесконечности как концептуального понятия;
- Необратимость времени.

5. Алгоритмические модели с дискретным временем

Изложенные выше положения, с точки зрения не только физики, но и практики наблюдения, изучения и реального функционирования социально-экономических систем, представляются нам достаточно очевидными, и поэтому должны быть учтены при математической постановке соответствующих задач.

В связи с этим особую роль приобретают алгоритмические модели, которые по своей сути являются дискретными, как по времени, так и по другим переменным, и ставят на первое место алгоритм, т.е. процедуру, действие, с помощью которой осуществляется тот или иной процесс.

Алгоритмический подход, как известно, начал в свое время развивать А.Н.Колмогоров (Колмогоровская теория сложности, 1956) [95], предвидя за ним большое будущее. Ему также принадлежит и одно из первых указаний на приоритетность и независимость дискретного подхода (по отношению к непрерывному) в моделировании сложных систем [79].

Нам кажется, в рамках именно такого подхода, при широком использовании алгоритмических моделей, могут быть достаточно разумно учтены и реализованы все перечисленные выше концептуальные положения, касающиеся постановки и решения задач математического моделирования сложных систем. Рассмотрим одну из таких возможностей.

5.1. Общая постановка задачи дискретного моделирования

Достаточно большой класс алгоритмических моделей с дискретным временем может быть задан рекуррентным процессом вида:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}_n \left(\vec{f}_{n-1} \left(\dots \left(\vec{f}_1(\vec{x}_1) \dots \right) \right) \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

где $\vec{f}_i(\vec{x}_i)$ - некоторое нелинейное отображение многомерного вектора \vec{x}_i , i - дискретное, реальное или фиктивное, время, входной вектор \vec{x}_0 при каждой реализации процесса считается заданным. В частном случае отображение $\vec{f}_i(\vec{x})$ может и не зависеть от дискретного времени i , $\vec{f}_i(\vec{x}) \equiv \vec{f}(\vec{x})$ (автономные модели):

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Автономные модели обычно описывают системы, которые в том или ином контексте можно считать изолированными. Строго говоря, только в этом случае процесс (19) можно считать рекуррентным, хотя формально процесс (20) также можно сделать автономным, присвоив дискретному времени статус еще одной зависимой переменной $n \equiv y_n$ и добавив соотношение $y_{n+1} = y_n + 1$ (однако в этом случае новый, формально автономный процесс из-за введенной дополнительной переменной будет иметь заведомо неограниченную амплитуду).

В рамках модели (20) нас в первую очередь будут интересовать несходящиеся, ограниченные, непериодические последовательности, поскольку именно они могут отражать сложные процессы, происходящие в реальных системах без участия экзогенных (внешних) факторов.

К моделям (19,20) фактически сводятся и модели детерминированного хаоса [54,56,96], и нейронные сети [97-99], и непрерывные модели, основанные на дифференциальных и интегральных уравнениях (после реализации в рамках той или иной разностной схемы [100]).

Однако классические дифференциальные и интегральные уравнения образуют, на наш взгляд, более узкий класс моделей, не охватывающий всего спектра задач современной теории сложных систем, поскольку, как уже отмечалось, дифференциальные уравнения не включают последствия, а интегральные уравнения не учитывают всех возможных в системе нелинейностей (операция интегрирования линейна по определению). Кроме того, и те и другие основываются на принципиально непроверяемой гипотезе о существовании бесконечностей, и предполагают существование соответствующих пределов, что имеет место далеко не всегда.

Идентификация модели (19) сводится к определению функций $\vec{f}_i(\vec{x}_i)$, а отличия между моделями детерминированного хаоса и нейронных сетей связаны с видом и методами определения этих функций (в моделях нейронных сетей обычно используется достаточно узкий с математической точки зрения класс отображений $f_i(x_i)$). Устойчивость или сходимость процессов (19, 20), вообще говоря, не предполагается, а интерес может представлять как одномоментный набор компонент вектора X_i , так и динамика их изменения во времени.

Однокомпонентная модель с памятью вида:

$$x_{n+1} = f(x_n; x_{n-1}; x_{n-2}; \dots; x_{n-k}); \quad k \geq 1 \quad (21)$$

также сводится к модели (20) относительно $(k+1)$ -мерного вектора $(x_n; y_n^{(1)}; y_n^{(2)}; \dots; y_n^{(k)})$ после введения соответствующих лаговых переменных:

$$y_n^{(1)} = x_{n-1}; \quad y_n^{(2)} = x_{n-2}; \quad \dots \quad y_n^{(k)} = x_{n-k} \quad .$$

Таким образом, хотя формально модель (20) и не содержит последствий (будущее зависит только от настоящего), однако, благодаря конечной дискретизации времени, на ее основе могут быть построены и модели с памятью.

Вопрос о том, можно ли векторную модель без памяти (20) с $(k+1)$ компонентами свести к модели с памятью (21) для одной из компонент (эта процедура имеет определенную аналогию со сведением системы дифференциальных уравнений 1-го порядка к одному дифференциальному уравнению высшего порядка), требует отдельного рассмотрения, которое будет проведено ниже.

5.2. О необратимости времени. Модель Ферхюльста

В рамках модели (20) обратимость времени можно понимать как взаимно однозначное соответствие между векторами \vec{x}_n и \vec{x}_{n+1} на некотором подмножестве X_i фазового пространства системы (20) X :

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n); \quad \vec{x}_n = \vec{f}^{-1}(\vec{x}_{n+1}); \quad \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1} \in X_i \subseteq X. \quad (22)$$

При этом в общем случае X_i должно включать аттрактор системы – множество X_a , и принадлежать множеству X_0 – множеству начальных значений, из которых система притягивается к аттрактору X_a :

$$X_a \subseteq X_i \subseteq X_0 \subseteq X. \quad (23)$$

В качестве простейшего примера рассмотрим модель Ферхюльста [101-103] – нелинейное логистическое однокомпонентное отображение вида:

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n(1 + \alpha(1 - x_n)); \quad 0 < \alpha < 3; \quad x_0 \in \left(0; \frac{1+\alpha}{\alpha}\right) = X_0, \quad (24)$$

где α – заданный числовой параметр. Ограничения на α и x_0 выбраны таким образом, чтобы при любом $n > 0$ значения x_n оставались положительными.

Максимальное значение $x_{n+1} = x_{\max}$ функция $x_{n+1} = f(x_n)$ достигает в точке $x_n = \bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1+\alpha}{2\alpha}; \quad x_{\max} = \frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha}. \quad (25)$$

Обратное отображение $x_n = f^{-1}(x_{n+1})$ имеет вид:

$$x_n = \frac{1+\alpha}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha^2} - \frac{x_{n+1}}{\alpha}}; \quad x_{n+1} \in \left(0; \frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha}\right) = X_i \subseteq X_0 \quad (26)$$

и, вообще говоря, является двузначным.

Таким образом, модель Ферхюльста является моделью с необратимым дискретным временем. Однако, если выполняется условие:

$$x_{\max} \leq \bar{x}; \Rightarrow \frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha} \leq \frac{1+\alpha}{2\alpha}; \Rightarrow \alpha \leq 1, \quad (27)$$

а в качестве множества X_i выбран интервал $(0; \bar{x})$, то обратное отображение, как легко проверить, становится однозначным.

5.3. Последствие и «длинная» память в дискретных моделях с нелинейностями

Рассмотрим вопрос о том, как в принципе можно свести векторную модель (20) к скалярной модели вида (21) для одной из компонент. Начнем со случая двухкомпонентной модели:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_x(x_n, y_n); \\ y_{n+1} = f_y(x_n, y_n); \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots \quad (28)$$

Для того чтобы исключить переменные y_i , запишем систему 3-х уравнений для 5-ти переменных $x_n, y_n, x_{n+1}, y_{n+1}, x_{n+2}$, временно положив для упрощения записей $n = 0$:

$$\begin{cases} x_2 = f_x(x_1, y_1); \\ x_1 = f_x(x_0, y_0); \\ y_1 = f_y(x_0, y_0). \end{cases} \quad (29)$$

Предположим, что второе уравнение системы (29) однозначно разрешимо относительно переменной y_0 , т.е. относительно этой переменной функция $x_1 = f_x(x_0, y_0)$ имеет обратную:

$$y_0 = f_{x_0}^{-1}(x_0, x_1). \quad (30)$$

Подставляя 3-е уравнение системы (29) в ее 1-е уравнение:

$$x_2 = f_x(x_1, y_1) = f_x(x_1, f_y(x_0, y_0)) \equiv \tilde{f}_x(x_1, x_0, y_0) \quad (31)$$

и, заменяя в (31) y_0 выражением (30), получаем:

$$x_2 = \tilde{f}_x(x_1, x_0, y_0) = \tilde{f}_x(x_1, x_0, f_{x_0}^{-1}(x_0, x_1)) \equiv F_x(x_1, x_0). \quad (32)$$

Такую память, длина которой определяется числом компонент в исходной векторной модели (28) (с отсутствием последствия), можно условно назвать короткой.

Если обратное отображение (30) в области изменения фазовых переменных не является однозначным, например, имеет две ветви:

$$y_0 = f_{1x_0}^{-1}(x_0, x_1); \quad y_0 = f_{2x_0}^{-1}(x_0, x_1), \quad (33)$$

то для данной пары переменных x_0, x_1 из двух ветвей должна быть выбрана та, которая соответствует наблюдаемому (задаваемому) в рамках исходной модели (28) значению y_0 . Таким образом, отображение (32) фактически становится функцией не только x_0, x_1 , но и y_0 :

$$x_2 = \tilde{F}_x(x_1, x_0, y_0). \quad (34)$$

Аналогично:

$$x_3 = \tilde{F}_x(x_2, x_1, y_1) = \tilde{F}_x(x_2, x_1, f_y(x_0, y_0)) \equiv \tilde{F}_x(x_2, x_1, x_0, y_0);$$

$$x_4 = \tilde{F}_x(x_3, x_2, x_1, y_1) = \tilde{F}_x(x_3, x_2, x_1, f_y(x_0, y_0)) \equiv \tilde{F}_x(x_3, x_2, x_1, x_0, y_0);$$

...

$$(35)$$

Из полученной цепочки соотношений следует, что даже в двухкомпонентной системе (28) в принципе *возможна* «длинная» однокомпонентная память, определяемая нелинейными, обязательно *немонотонными* взаимодействиями компонент. Конечно, приведенные выше рассуждения можно рассматривать только как *необходимые* условия реализации сколь угодно «длинной» однокомпонентной памяти в системах (20) с ограниченным числом компонент, однако богатство наблюдаемых в численных экспериментах траекторий и фазовых портретов для подобных систем позволяет надеяться на то, что существуют и *достаточные* условия. Возможно, для достижения этих условий потребуется модель с более чем двумя компонентами, однако это не меняют сути проведенного анализа и выводов. Одним из примеров такой модели с возможностью реализации «длинной» однокомпонентной памяти является, по-видимому, известное трехкомпонентное нелинейное отображение Лоренца [104].

Рассмотрим вкратце схему рассуждений и выкладок для трехкомпонентной модели ($N = 3$):

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_x(x_n, y_n, z_n); \\ y_{n+1} = f_y(x_n, y_n, z_n); \\ z_{n+1} = f_z(x_n, y_n, z_n); \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots \quad (36)$$

Запишем систему из k уравнений

$$k = N(N-1) + 1 = 3(3-2) + 1 = 7 \quad (37)$$

для p переменных

$$p = N^2 + 1 = 3^2 + 1 = 10, \quad (38)$$

которые обозначим как $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, z_3$, положив для удобства записей, как и ранее (для случая $N = 2$), $n = 0$:

$$x_3 = f_x(x_2, y_2, z_2); \quad (39)$$

$$x_2 = f_x(x_1, y_1, z_1) \equiv f_x(\vec{r}_1); \quad (40)$$

$$y_2 = f_y(x_1, y_1, z_1) \equiv f_y(\vec{r}_1); \quad (41)$$

$$z_2 = f_z(x_1, y_1, z_1) \equiv f_z(\vec{r}_1); \quad (42)$$

$$x_1 = f_x(x_0, y_0, z_0) \equiv f_x(\vec{r}_0); \quad (43)$$

$$y_1 = f_y(x_0, y_0, z_0) \equiv f_y(\vec{r}_0); \quad (44)$$

$$z_1 = f_z(x_0, y_0, z_0) \equiv f_z(\vec{r}_0). \quad (45)$$

Подставляя в правую часть (39) выражения (41,42):

$$x_3 = f_x(x_2, y_2, z_2) = f_x(x_2, f_y(\vec{r}_1), f_z(\vec{r}_1)) \equiv f_x(x_2, x_1, y_1, z_1), \quad (46)$$

далее в (46) – выражения (44,45), получаем:

$$x_3 = f_x(x_2, x_1, y_1, z_1) = f_x(x_2, x_1, f_y(\vec{r}_0), f_z(\vec{r}_0)) \equiv f_x(x_2, x_1, x_0, y_0, z_0). \quad (47)$$

Чтобы исключить в (47) переменные y_0, z_0 , используем соотношение (40), предварительно подставив в него выражения для y_1, z_1 (44,45), и соотношение (43):

$$x_2 = f_x(x_1, y_1, z_1) = f_x(x_1, f_y(\vec{r}_0), f_z(\vec{r}_0)) \equiv f_x(x_1, x_0, y_0, z_0); \Rightarrow \begin{cases} x_2 = f_x(x_1, x_0, y_0, z_0); \\ x_1 = f_x(x_0, y_0, z_0). \end{cases} \quad (48)$$

Если отображение (48) относительно пары переменных y_0, z_0 взаимно однозначно, т.е. существует единственное решение системы (48):

$$\begin{cases} y_0 = f_y^{-1}(x_2, x_1, x_0); \\ z_0 = f_z^{-1}(x_2, x_1, x_0), \end{cases} \quad (49)$$

то, подставляя y_0, z_0 из (49) в (47), окончательно получаем:

$$x_3 = f_x(x_2, x_1, x_0, f_y^{-1}(x_2, x_1, x_0), f_z^{-1}(x_2, x_1, x_0)) \equiv F_x(x_2, x_1, x_0). \quad (50)$$

Если же обратное для (48) отображение (x_1, x_2) в (y_0, z_0) не единственно, то далее следует провести рассуждения, аналогичные случаю двухкомпонентной модели, которые опять таки приводят к возможности существования в отображении для компоненты x_n «длинной» однокомпонентной памяти.

Аналогичные выкладки и рассуждения можно провести и для $N = 4, 5, 6$ и т.д., при этом качественно выводы остаются теми же. Очевидно также, что в каждом случае вместо компоненты x_n можно рассматривать любую другую компоненту, это приводит лишь к замене обозначений, а также рассматривать группу

компонент, составляющих любую часть исходного набора компонент.

Идея сведения системы уравнений для многокомпонентной модели к одному уравнению (группе из меньшего числа уравнений) для одной из компонент (группы компонент), как уже отмечалось, аналогична идее сведения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка к одному дифференциальному уравнению (группе уравнений) высшего порядка для одной из исходных (для группы исходных) неизвестных функций. Однако есть и важное отличие: в системе дифференциальных уравнений из-за предельного перехода (величина шага по времени Δt стремится к нулю) последствий, т.е. памяти, не возникает в принципе.

На минуту, гипотетически, в порядке любопытного умозрительного эксперимента, представим себе динамическую модель Вселенной как сложную нелинейную автономную систему, начавшую функционировать в рамках дискретной модели типа (20) в некий достаточно отдаленный начальный момент времени t_0 . Принимая во внимание громадное начальное число компонент такой модели и сложный, нелинейный характер их взаимодействия, можно предположить, что достаточно долгое наблюдение над некоторой ограниченной частью ее компонент будет демонстрировать и «длинную» память, и неопределенности, и отсутствие повторяемости (рождение новой информации), и т.д. – все то, чем так богат наш мир. По крайней мере, проведенный выше анализ не исключает такую возможность, хотя реализация этой возможности является достаточно редким в нашей Вселенной явлением как во времени, так и в пространстве, требующим ряда специфических условий. Примером такой реализации могла бы быть наша Земля, достигшая к настоящему времени ноосферного (высшего на данный момент) этапа своего развития.

6. Новые парадигмы и проблемы математического описания сложных систем

В свете проведенного выше анализа и его выводов, не претендуя на всеобщность, остановимся вкратце на некоторых

проблемах философского, концептуального и технического характера, которые возникают при обсуждении и постановке задач моделирования реальных сложных систем.

6.1. О природе неопределенностей и роли действия в математической постановке задач

В попытках хотя бы в принципе и хотя бы качественно описать механизм эволюционного развития Вселенной, который бы учитывал практическую невозможность точного предсказания будущего, сталкиваются две парадигмы:

а) неполнота информации о Вселенной, включая все ее прошлое, в силу чего любая ее модель будет иметь приближенный характер;

б) вероятностный характер будущего по отношению к настоящему.

Однако обе эти парадигмы принципиально непроверяемы.

Действительно, что касается первой парадигмы, то любая информация о системе должна иметь материальный носитель, который является либо *частью* системы (и в таком случае не может содержать ее полного описания), либо *внешней* и взаимодействующей с ней системой, т.е. опять таки частью новой, более полной системы. При этом интерпретация неопределенности процессов в рамках этой парадигмы, по сути, сводится к тем или иным вариациям модели скрытых переменных [18,105-108].

Другая парадигма фактически исходит из гипотезы существования в каждый момент времени множественных, абсолютно идентичных параллельных миров (квантового ансамбля миров), каждый из которых может развиваться по своему вероятностному сценарию, но в нашем мире реализуется только один, который мы и наблюдаем [18] (впервые многомировая интерпретация была предложена в [109] с предысторией [110]). Таким образом, согласно этой парадигме динамика реального мира – это цепь или последовательность событий, имеющих *случайную* составляющую с квантовомеханическим происхождением.

Однако понятие случайного события и вероятности предполагает гипотетическую возможность бесконечной

воспроизводимости испытания в идентичных условиях, или наличия бесконечного «ансамбля» идентичных испытаний, и уже по этой причине теория вероятности должна рассматриваться лишь как одна из возможных и заведомо приближенных моделей описания наблюдаемых в мире неопределенностей.

В действительности не существует точных процедур, которые позволили бы отличить «истинную» случайную последовательность событий или величин от «псевдослучайной», т.е. похожей на случайную, например генерируемую какой-либо подходящей моделью детерминированного хаоса. В самом деле, любая «случайная» конечная последовательность в силу конечности не случайна уже по определению, а любую «неслучайную» конечную последовательность можно рассматривать как одну из возможных, хотя и редко встречающихся, выборок истинной *бесконечной* случайной последовательности. (Здесь мы опять исходим из того, что понятие бесконечности является одной из принципиально непроверяемой гипотез, которая включена в качестве одного из постулатов в аксиоматику строгой теории множеств [77].)

Более того, социально-экономические явления вообще *точно* не повторяются, а весьма малые возмущения в реальных системах могут приводить к достаточно большим и плохо предсказуемым отклонениям от нормы (кризисам, крахам, банкротствам и другим явлениям критического характера, которые, как правило, в каждом случае демонстрируют свои индивидуальные и уникальные особенности).

Обе упомянутые выше парадигмы исходят из предположения, что существует понятие *состояния* системы, и это понятие является первичным и фундаментальным. Однако, повторяя еще раз то, что уже было сказано выше, если учесть то концептуально новое, что внесла в представление о мире современная теоретическая физика, включая теорию относительности и релятивистскую квантовую механику, а также быть последовательным в применении принципов общей теории систем, то первичным и фундаментальным становится понятие *процедуры* измерения, *взаимодействия* системы и измерителя, т.е. результат *процесса, действия*. Как нам кажется, при такой постановке вопроса неопределенность состояния становится чисто технической

проблемой. В частности, в рамках квантовой механики неопределенность состояния, т.е. величин, которыми оно характеризуется, является следствием определенных коммутационных соотношений алгебры *операторов* этих величин [52].

Справедливости ради нужно отметить, что подобную точку зрения относительно основополагающей роли действия, а не состояния, отстаивал российский психолог и философ С.Л. Рубинштейн, автор фундаментального труда «Основы общей психологии» [53], написанного более сорока лет назад, но не потерявшего своей актуальности и до настоящего времени. Ученый с энциклопедическими знаниями, получивший фундаментальное образование в области естествознания, математики, психологии и философии, С.Л.Рубинштейн провел блестящий анализ исторического развития концептуальных основ научного мировоззрения. При этом, как считают авторы, он вполне сознательно не использовал математический формализм, понимая, что язык известной ему математики «состояний» и «функций» не адекватен уровню и сути решаемых им проблем.

Ученые-экономисты, обсуждающие фундаментальные проблемы современной экономической теории, даже в наше время полной «информатизации» и «компьютеризации» также с осторожностью пользуются или вообще не пользуются математическим языком, предпочитая при первом же сомнении относительно его адекватности (чтобы, как говорят, «с водой не выплеснуть и дитя») вводить свои, новые, на первый взгляд необычные понятия. Так, в монографии известного французского ученого и практика Ж.Сапира «К экономической теории неоднородных систем: Опыт исследования децентрализованной экономики» [49] для характеристики стабильного состояния социально-экономической системы вводится понятие *координации*, которое нельзя свести к таким математическим или физическим понятиям как равенство, тождественность, эквивалентность, равновесие, стационарность и т.п. Это понятие по своей сути следует считать скорее некоторой специфической характеристикой *действия, процесса*, нестационарного по определению, обеспечивающего социально-экономической системе стабильное и

устойчивое структурное существование. Здесь мы опять таки находим неявные, уже «экономические» аргументы в пользу обсуждаемого нами тезиса о первичности процедуры, действия в описании динамики сложных систем.

Достаточно убедительные свидетельства в пользу наших позиций присутствуют и в работах крупнейшего специалиста в области, как классической математики, так и математических основ современной квантовой теории, академика РАН В.П.Маслова. В своей последней работе, посвященной математической модели глобального финансового кризиса 2008 года [31], он прямо указывает на то, что теория вероятностей и теория оптимизации, на которых построена классическая экономическая наука, не являются адекватным математическим инструментарием для динамического описания современной экономики. По его мнению, в качестве альтернативы следует использовать Колмогоровскую теорию сложности [95], в основе которой лежит алгоритмический подход.

И, наконец, нельзя не отметить еще раз эмпириомонизм известного российского политика, экономиста и мыслителя А.А. Богданова [111] и его организационную науку – тектологию [64,65]. Его идеи, близкие к идеям общей теории систем и предвосхитившие кибернетику, незаслуженно забытые по политическим мотивам (как на Западе, так и у нас) почти на столетие, собственно и опередившие его время почти на столетие, только сейчас начинают по настоящему входить в современную науку. Его понимание организации как процесса, действия - основополагающего элемента функционирования любой системы, в философском плане весьма близки к нашим и другим современным концепциям, и еще раз подтверждает хорошо известную истину: новое – это хорошо забытое старое, извлеченное на свет или переоткрытое в «нужное» время и в «нужном» месте. К сожалению, он достаточно критически относился к теории относительности Эйнштейна, а также не был детально знаком с квантовой физикой. В то время она только зарождалась и была за пределами его научных интересов.

Таким образом, в основу математического моделирования динамики сложных систем любой природы должны лечь концепции, не обязательно совпадающие, или совсем не совпадающие с традиционными. Одним из источников таких

концепций может служить, как уже было показано выше, и релятивистская квантовая механика, однако и здесь требуется определенная осторожность.

6.2. Об особенностях, проблемах и корректности квантовомеханического моделирования социально-экономических систем

Большинство исследователей, привлекающих квантовомеханические модели к объяснению социально-экономических явлений, в частности динамики финансовых рынков, предполагают, что распределение множества их агентов по состояниям (под состояниями понимают стратегии) подчиняется статистике Бозе-Эйнштейна (см. например [18,20,21,23,31-34]). Это означает, что в одном состоянии (одной стратегии) может находиться (придерживаться) сколько угодно агентов. Так ли это на самом деле?

Если внимательно проанализировать реальное поведение и взаимоотношения участников рынка или любых других социально-экономических процессов, то можно сделать вывод, что состояние их равенства («равновесной» конкуренции) – не основное и относительно редкое явление. При любом взаимодействии в реальных системах быстро устанавливаются отношения *доминирования*, которые более конструктивны и стабильны. А это уже, если говорить о квантовомеханических аналогиях, скорее всего статистика Ферми-Дирака (в каждом состоянии может находиться только один агент).

Из принципа тождественности микрочастиц и уравнений квантовой механики следует специфическое квантовомеханическое обменное взаимодействие, которое реализуется в коллективе тождественных микрочастиц и осуществляется по принципу «каждый с каждым» [51,52]. Однако этот принцип имеет локальный характер и может нарушаться, если размеры системы существенно превышают произведение скорости света на время наблюдения над системой (эффекты запаздывания). Механический перенос механизма взаимодействия по принципу «каждый с каждым» на социально-экономические системы, где роль микрочастиц

выполняют агенты, а аналоги релятивистского эффекта запаздывания взаимодействия не обязательно должны быть связаны со скоростью света, на наш взгляд может быть не вполне правомочен.

Достаточно успешное объяснение некоторых статистических характеристик и динамических особенностей поведения рынка, полученное в рамках квантовомеханических расчетов с использованием статистики Бозе [18], не обязательно может быть связано с выбором именно квантовомеханической и именно такой модели. Многокомпонентные нелинейные модели, например типа (20), могут порождать весьма богатые и разнообразные сценарии динамического поведения системы, даже при относительно небольшом количестве переменных и варьируемых параметров (модели динамического хаоса [56]). Прямого отношения к уравнениям квантовой механики такие модели могут и не иметь, хотя подчеркнем: основные квантовомеханические принципы в них также заложены и в своих существенных особенностях соблюдены.

Сложные системы – это, как правило, синергетические системы с «длинной» памятью (информацией об их истории), характеризующиеся интенсивным метаболизмом (постоянной «прокачкой» энергии и вещества), способные порождать новую информацию. Формальная квантовомеханическая постановка задачи, претендующая на детальное «микроскопическое» описание такой сложной системы, может оказаться не адекватной реально происходящим в ней процессам, хотя и будет воспроизводить некоторые внешние особенности ее поведения.

По этой же причине законы сохранения, на которых базируются уравнения физической динамики и которым должны удовлетворять физические процессы, аналогов в социально-экономических процессах могут и не иметь. Действительно, в таких процессах есть информационная составляющая (включая информационную асимметрию агентов [112]), возможны транзакционные издержки («пятый» рынок [113]) и присутствует память (институты, менталитет [114,115]), происходит поступление и диссипация энергии и вещества, а также не исключены другие виды «грубого» и «тонкого» взаимодействия с окружающей средой и прошлым.

Реальные нелинейные взаимодействия в многокомпонентной социально-экономической системе могут так менять отношения агентов и порождать столь сложную динамику, что традиционный анализ по схеме «структура-состояние-взаимодействие-динамика» вряд ли что-то объяснит в динамическом поведении системы (синергетические эффекты, последствие, «длинная» память, пороговые явления, обусловленные слабыми и трудно учитываемыми взаимодействиями с внешней средой и т.д.). С другой стороны, и бесструктурные «полевые» подходы к описанию таких систем, основанные на идеях квантовой теории поля (единая теория поля), если такие и будут разрабатываться, скорее всего также окажутся не слишком продуктивными.

По нашему мнению единственным надежным источником информации о сложной системе могут быть измеренные, по определению дискретные ряды данных, приближенно характеризующие динамическое изменение состояния системы в течение некоторого достаточно длинного промежутка времени T .

В таком случае приемлемой и разумной становится постановка задачи, в рамках которой рассматривается приближенное прогнозирование поведения системы и ее информативных характеристик, и разработка алгоритмов, способных такое прогнозирование осуществить. Такая постановка характерна и для развиваемого с 1990 г. нового научного направления в прогнозировании социально-экономических процессов – анализа данных [116,117].

Относительно необратимости и дискретности времени. Как уже указывалось, необратимость времени следует рассматривать как экспериментально установленный, в рамках применимости этого понятия, факт. Время характеризует длительность процедур, процессов, явлений, т.е. *действий*, и только через длительность тех или иных действий и определяется. Минимальный промежуток времени фактически определяется минимально возможным (наблюдаемым) по длительности действием. Хотя, как следует из специальной и общей теории относительности, и это понятие (т.е. понятие длительности) следует рассматривать как относительное, локальное во времени и пространстве и зависящее от системы координат [118].

Законы сохранения энергии и импульса (момента импульса) в теоретической физике рассматриваются как фундаментальные следствия однородности нашего времени и пространства (изотропности пространства) [84]. При этом гипотезы об их непрерывности являются удобным, но не необходимым элементом для получения соответствующих законов сохранения. Например, закон сохранения энергии можно рассматривать и как универсальную постулируемую технологию выявления новых (или уже известных) взаимодействий и видов преобразования вещества и энергии в физических системах. Так, новая элементарная частица нейтрино была обнаружена как следствие формально наблюдаемого нарушения законов сохранения в экспериментах с β -распадом радиоактивных элементов. Дело в том, что связанное с нейтрино слабое взаимодействие оказалось столь «слабо», что такая частица способна пролететь толщу нашего Солнца, не испытав ни одного столкновения. Другой пример иллюстрирует соотношение Эйнштейна между энергией и массой $E = mc^2$, связавшее ранее считавшиеся разнородными физические величины.

По нашему мнению, при математическом моделировании сложных систем законы сохранения тех или иных величин, обратимость или необратимость времени, его дискретность или непрерывность, однородность или неоднородность и прочее следует рассматривать как свойства данной математической модели, прежде всего принимая во внимание степень ее адаптации к описанию *реальных* свойств и *реальной* динамики системы, историю которой следует рассматривать как единственные и не всегда повторяемые данные опыта, эксперимента. Основными критериями качества модели должны служить степень ее адекватности изучаемым процессам, максимально возможная прогнозируемость, практическая значимость.

Заключение

Подводя итоги, кратко формулируем новые парадигмы и основные концептуальные положения в моделировании сложных систем, которые вытекают из всего проведенного нами анализа.

- Первичность процедуры измерения (наблюдения, действия, взаимодействия) по отношению к ее результату.
- Вторичность и приближенный характер понятий «состояние системы» и «мгновенные значения величин», как характеристик этого состояния.
- Неустранимое влияние любой процедуры измерения, включая и компьютерный прогноз (косвенное измерение), на состояние и будущее поведение системы.
- Принцип неопределенности и его фундаментальная связь с длительностью процедуры измерения.
- Дискретность времени и пространства, а также любых других величин, связанных с понятием состояния и динамикой системы.
- Последствие (память) как фундаментальное свойство любой сложной динамической системы.
- Отказ от бесконечности как концептуального понятия.
- Необратимость времени.
- Открытость.
- Иерархичность.
- Эмерджентность.

Некоторые из приведенных выше положений совпадают с положениями общей теории систем, что, с одной стороны, не удивительно, а с другой - позволяет трактовать наш анализ и как физическое квантовомеханическое обоснование системных концепций в моделировании сложных систем [22].

В проведенном анализе и выводах существенно использованы факты и положения релятивистской квантовой физики и опыт наблюдения и исследования реальных социально-экономических систем, что и дает нам основание отнести данную работу к новому направлению в физической экономике, задекларированному в названии – релятивистской квантовой экономифизике.

Нами начаты конкретные разработки по реализации изложенных выше концепций в моделировании и прогнозировании социально-экономических процессов по данным наблюдений (истории) соответствующих временных рядов [119-121]. Одна из технологий прогнозирования базируется на использовании сложных цепей Маркова (цепей Маркова с памятью), реализована в среде Matlab 6.5 и в настоящее время проходит тестирование.

Литература

1. Mantegna R. N. , Stanley H. E. An Introduction to Econophysics. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 144 p.
2. Романовский М.Ю., Романовский Ю.М. Введение в эконофизику. Статистические и динамические модели. М.: ИКИ, 2007. - 280 стр.
3. Соловйов В.М. Математична економіка. Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни. – Черкаси: ЧНУ, 2008. – 136 с.
4. Чернавский Д.С., Старков Н.И., Щербаков А.В. О проблемах физической экономики // Успехи физических наук, Т. 172, № 9, с. 1045-1066 (2002).
5. Сорнетте Д. Как предсказывать крахи финансовых рынков. Критические события в комплексных финансовых системах // Пер с франц. – М.: 2003. - 394 с.
Изд.: SmartBook, Академия Смартбук, И-Трейд, ОМЕГА-Л, ГРУППА КОМПАНИЙ, СмартБук, 2008. - 400 с.
6. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории Хаоса в инвестициях и экономике. – М.: Интернет_Трейдинг, 2004. - 304 с.
7. J. Barkley Rosser Jr. Dynamics of Markets. Econophysics and Finance. By Joseph L. McCauley. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 209 p.
8. Ganchuk A., Derbentsev V., Soloviev V. Multifractal properties of the Ukraine stock market // arXiv:physics/0608009 v1 1 Aug 2006;
Соловйов В.М., Шарапов О.Д. Економіфізика складних систем // Тези доповідей X наук.-метод.конф. «Проблеми економічної кібернетики» м. Київ-Донецьк: ТОВ АПЕКС, 2005. - С.53-54.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Часть 1. – М.: Наука, 1976. – 584 с.
10. Маслов В.П. Квантовая экономика. - М.: Наука, 2006. – 72 с.
11. Мосейчук А. В., Мосейчук В. А. Введение в реальную квантовую экономику. М.: НТО имени академика С. И. Вампилова, 2006. –234 с.
12. Kondratenko A. Physical Modeling of economic systems. Classical and quantum economies. Novosibirsk: Nauka, 2005. – 30 p.

13. Schaden, M. Quantum finance // arXiv:physics/0203006v2 [physics.soc-ph] 6 Aug 2002.
14. B. E. Baaquie: Quantum Finance. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. - 332 p.
15. Piotrowski, E.; Śładkowski, J. Quantum market games // Physica A 312, p. 208-217, arXiv:quant-ph/010400602 (2002).
16. Iqbal, A.; Toor, A.H. Quantum repeated games // Physics Letters A 300, 6, p. 541–546 (2002).
17. Iqbal, A., 2004, Studies in the Theory of Quantum Games, PhD thesis, Quaid-i-Azam University, Department of Electronics.
18. Gonçalves C. Pedro. An Evolutionary Quantum Game Model of Financial Market Dynamics – Theory and Evidence. April 14, 2007/ http://ma.utexas.edu/mp_arc/c/07/07-89.pdf.
19. Zverev V.I. and Tishin A.M. Quantum theory of economics. Physics Department of M. V. Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, Moscow, 119992, 2008. – 38 p. .../0901.4767.pdf.
20. Маслов В.П. Квантовая эконофизика. - Москва, МИФИ, 2007. - В сб. "Эконофизика. Современная физика в поисках экономической теории". – 101 с.
21. Hidalgo, E. Guevara. Quantum Econophysics // arXiv:physics/0609245v2 [physics.soc-ph] 30 Apr 2007.
22. Соловьев В.Н., Сапцин В.М. Квантовая эконофизика – физическое обоснование системных концепций в моделировании социально-экономических процессов. В кн. Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем: Труды II Международной Школы-симпозиума АМУР-2008 (Севастополь, 12-18 сентября, 2008 г.) / под ред. О.Л.Королева, А.В.Сигала. – Симферополь, 2008, с. 94-102.
23. Bagarello F. Stock markets and quantum dynamics: a second quantized description // arXiv:0904.3210v1 [q-fin.TR] 21 Apr 2009.
24. Sornette, Didier; Zhou, Wei-Xing. Importance of positive feedbacks and over-confidence in a self-fulfilling Ising model of financial markets // arXiv:cond-mat/0503607 v2 30 Mar 2005.
25. Zhou, Wei-Xing; Sornette, Didier. Self-fulfilling Ising model of financial markets // arXiv:cond-mat/0503230v1, 2005.

26. Zhou, Wei-Xing; Sornette, Didier, 2007 Self-organizing Ising model of financial markets // *The European Physical Journal B*, vol.55, no.2, p.175-181 (2007).

27. Montagna, G.; Nicosini, O.; Passarino, G.; Moreni, N. Pricing exotic options in a path integral approach // *Quantitative Finance*, 6, p. 55–66 (2004), arXiv:cond-mat/0407321v2 [cond-mat.other] 17 May 2006.

28. Baaquie B. E. *Quantum Finance: Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interest Rates*, 1st ed. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – 348 p.

29. Maslov V.P. Approximation probabilities, the law of quasistable markets, and phase transitions from the “condensed” state. arXiv:math/0307265v1 [math.PR] 19 Jul 2003.

30. Maslov V.P. Economic law of increase of Kolmogorov complexity. Transition from financial crisis 2008 to the zero-order phase transition (social explosion) // arXiv:0812.4737v1 [q-fin.GN] 29 Dec 2008.

31. Bagarello F. An operatorial approach to stock markets // *J. Phys. A*, 39, p. 6823-6840 (2006).

32. Bagarello F. The Heisenberg picture in the analysis of stock markets and in other sociological contexts, Proceedings del Workshop How can Mathematics contribute to social sciences, Bologna 2006, Italia, in *Quality and Quantity*, 10.1007/s11135-007-9076-4.

33. Bagarello F. Stock Markets and Quantum Dynamics: A Second Quantized Description // *Physica A*, 386, 283 (2007).

34. Bagarello F. Simplified stock markets described by number operators // arXiv:0904.3213v1 [q-fin.TR] 21 Apr 2009.

35. Maslov V.P. and Nazaikinskii V.E. Mathematics underlying the 2008 financial crisis, and a possible remedy // arXiv:0811.4678v1 [q-fin.GN] 28 Nov 2008.

36. Maslov V.P. Threshold levels in Economics // arXiv:0903.4783v1 [q-fin.ST] 27 Mar 2009.

37. Gonçalves, Carlos. *Uma Teoria da Empresa Ágil Criadora de Conhecimento*. Contributos, PhD Thesis, ISCTE-Business School Gonçalves C. Pedro (2005).

38. Gonçalves, Carlos. Criação de Conhecimento e Agilidade: Novos Desafios Competitivos, Economia Global e Gestão, Vol. XI, No. 1, p. 125-139 (2006).

39. Gonçalves, C. Pedro, Herding, <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/community/Herding> (2003).

40. Gonçalves, C. Pedro. Artificial financial market <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/community/Artificial%20Financial%20Market> (2003).

41. Gonçalves, C. Pedro. Artificial financial market II – Tail risk, <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/community/Artificial%20Financial%20Market%20II%20-%20Tail%20Risk> (2005).

42. Gonçalves, C. Pedro; Curto, J.D. Risco, Agentes e Complexidade, paper presented at the seminar Grupos, Tecnologia e Criatividade, ISCTE (2005).

43. Gonçalves, C. P.; Ferreira, M. A. Self-Organized Criticality in Synchronized Loss Dynamics — A Behavioral Account, working paper presented at the seminar Mercado Financeiro Artificial: Simulação Multiagentes e Dinâmicas de Mercado, ISCTE, <http://dfc.gestao.iscte.org/seminarios/downloads.php?item=6&tipo=file> (2006).

44. Hidalgo, E. Guevara. Quantum replicator dynamics // *Physica A* 369/2, 393-407 (2006), arXiv:quant-ph/0510238v7.

45. Hidalgo, E. Guevara, 2006a, Introduction to the study of entropy in quantum games // arXiv:quant-ph/0604170 v2 26 Apr 2006.

46. Hidalgo, E. Guevara. Quantum games entropy // arXiv:quant-ph/0606045 v1 6 Jun 2006.

47. Hidalgo, E. Guevara. Quantum Games and the Relationships between Quantum Mechanics and Game Theory // arXiv:0803.0292v1 [quant-ph] 3 Mar 2008.

48. Vaga, T. The Coherent Market Hypothesis. *Financial Analysts Journal*, November/December, p. 36-49 (1990).

49. Сапир Ж. К экономической теории неоднородных систем: Опыт исследования децентрализованной экономики // Пер. с фр. под науч. ред. Н.А. Макашевой. – М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 248 с.

50. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Краткий курс теоретической физики, Кн. 2. - М.: Наука, 1972. – 368 с.

51. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – М.: Наука, 1974. – 752 с.
52. Елютин П.В., Кривченков В.Д. Квантовая механика с задачами /Под ред. академика Н.Н.Боголюбова. – М.: Наука, 1976. – 336 с.
53. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологи. – СПб.: Питер, 2007. – 713 с.
54. Хакен Г. . Синергетика. - М.: Мир, 1980. – 406 с.
55. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – Москва: Иститут компьютерных исследований, 2002. - 656 с.
56. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В. Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды. - М.: УРСС, 2006.
57. Дойч Д. Структура реальности. / Пер. с англ. под ред. Н.А. Зубченко под общей редакцией академика РАН В.А.Садовничего. РХД - Москва-Ижевск 2001.
58. Deutsch D. Qubit Field Theory // arXiv:quant-ph/0401024v1 6 Jan 2004.
59. Валиев К.А. Квантовая информатика: компьютеры, связь и криптография // Вестник российской академии наук, т. 70, № 8, с. 688-695 (2000).
60. Новая наука – нейроэкономика // Наука и жизнь, №10 (2007).
61. Kurt Hensel Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Т. 6. № 3. С. 83—88 (1897).
62. Владимиров В.С. / р-Адический анализ и математическая физика / В.С.Владимиров, И.В.Волович, Е.И.Зеленов. М.: Наука, 1994. - 352 с.
63. Волович И.В., Козырев С.В. р-Адическая математическая физика: основные конструкции, приложения к сложным и наноскопическим системам. Учебное пособие. – Самара: СГУ, 2009. – 54 с.
64. Богданов А.А. Очерки организационной науки. <http://www.uic.nnov.ru/pustyn/lib/bogdanov.ru.html>.
65. Богданов А. А. Тектология: Всеобщая организационная наука. В 2-х книгах. — М.: «Экономика», 1989.

66. Толстой А.Н. Золотой ключик или Приключения Буратино. – К.: Веселка, 1986. – 127 с.

67. Gödel K., Über formal unent scheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwander System // I, «Monatshefte Mathematic Physik», Bd 38, S. 173—198 (1931).

68. Нагель Э., Ньюмен Д.Р. Теорема Гёделя. М., 1970.

69. Хофштадтер Д. Гедель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда. - Издательство: Бахрах-М, 2001 – 752 с.

70. Томас Дж. Йех. Об аксиоме выбора. С. 35-63: Справочная книга по математической логике, Ч. II, Теория множеств. – М.: 1982.

71. Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. – М.: Мир, 1969. – 347 с.

72. L. von Bertalanffy, General System Theory—A Critical Review. - «General Systems», vol. VII, p. 1—20 (1962).

73. Берталанфи Л. Общая теория систем. – М.: Наука, 1968. – 246 с.

74. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981. – 487 с.

75. Кобринский Н. Е., Майминас Е. З., Смирнов А. Д. Экономическая кибернетика. — М.: Экономика, 1982. – 408 с.

76. Лямец В.И., Тевяшев А.Д. Системный анализ. - 2-е изд. перераб и доп. – Харьков: ХНУРЕ, 2004. – 448с.

77. Френкель А.А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. Перевод с английского. - М.: Мир, 1966.

78. Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика. — М.: УРСС, 2005. — 240 с.

79. Колмогоров А.Н. Комбинаторные основания теории информации // Успехи математических наук. – 1983. – Т. 38, № 4. – С. 27-36.

80. Моисеев Н.Н. Человек. Среда. Общество. – М.: «Наука», 1982. – 240 с.

81. Технология системного моделирования / Под общ. ред. С.В. Емельянова, В.В. Калашникова, М. Франка, А. Явора. – М.: Изд-во «Машиностроение»; Берлин: Изд-во «Техник», 1988. – 520 с.

82. Блюмин С.Л. Дискретность против непрерывности при системном моделировании во времени и/или в пространстве //

Системы управления и информационные технологии. №1(13). С. 4–9 (2004).

83. Блюмин С.Л. Дискретность против непрерывности в информационных технологиях: квантовое исчисление и его альтернативы // Системы управления и информационные технологии. № 1,2(31), С. 217-221 (2004).

84. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, том I. – М.: Наука, 1973. – 208 с.

85. Роберт Антон Уилсон. Квантовая психология. Перевод с англ. под ред. Я. Невструева. — К.: “ЯНУС”, 1999.— 224с.

86. Гречко Т. К. Применение квантовой социологии к деятельности государственного служащего // Workshop “Science: Theory and practice”/ Vol. 2. Prague: publishing house “Education and Science”, 2005.

87. Васюков В. Л. Квантовая логика. — М.: ПЕР СЭ, 2005. — 191 с.

88. Van Fraassen B.C. The Labyrinth of Quantum Logic, Logico-algebraic approach to quantum mechanics. Vol 1. Dordrecht-Boston: Reidel, 1975.

89. The ultimate guide to the LHC (англ.) — официальный FAQ по LHC.

90. Славатинский С.А. Фундаментальные частицы // СОЖ, 2001, No 2, с. 62–68.

91. Бухбиндер И.Л. Фундаментальные взаимодействия // СОЖ, 1997, No 5, с. 66–73.

92. Герштейн С.С. Что такое цветовой заряд, или какие силы связывают кварки // СОЖ, 2000, No 6, с. 78–84.

93. Lisi, A. Garrett. An Exceptionally Simple Theory of Everything // arXiv:0711.0770v1 [hep-th] 6 Nov 2007.

94. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. - М.: Мир, 1969. - 376 с.

95. Успенский В., Верещагин Н., Шень А. Колмогоровская сложность: E-print, 2004. <http://lj.streamclub.ru/books/complex/uspen.ps>.

96. Hanz-Valter Lorenz. Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion. – Springer-Verlag, 1989. – 320 p.

97. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника: теория и практика. — М.: Мир, 1992 – 238 с.

98. Суровцев И.С., Ключкин В.И., Пивоварова Р.П. Нейронные сети. — Воронеж: ВГУ, 1994. — 224 с.

99. Ежов А.А., Шумский С.А. Нейрокомпьютеринг и его применения в экономике и бизнесе. - М.: Изд. МИФИ, 1998. – 222 с.

100. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Наука, 1967. – 368 с.

101. Verhulst P.-F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement //Correspondence Mathematique et Physique.- Bruxelles. - Tome 10. - P. 113-121 (1838).

102. Verhulst P.-F. Recherches mathematiques sur la loi d'accroissement de la population//Nouveaux Memoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres de Bruxelles. - № 18. - P. 1-38 (1845).

103. Федер, Енс. Фракталы/ Пер. с англ. - М.: Мир, 1991. - 260 с.

104. Лоренц Э. Детерминированное непериодическое движение // Странные аттракторы. — М., 1981. — С. 88-116.

105. Khrennikov, A. On the cognitive experiments to test quantum-like behaviour of mind // arXiv:quant-ph/0205092v2 16 Jan 2003.

106. Khrennikov, A. A formula of total probability with interference term and the Hilbert space representation of the contextual Kolmogorovian model // arXiv:math/0609197v1 [math.PR] 7 Sep 2006.

107. Khrennikov, A., 2007, Quantum-like Probabilistic Models outside Physics // arXiv:physics/0702250v2 [physics.gen-ph] 5 Jun 2007.

108. Choustova. Toward Quantum Behavioral Finances: Bohmian Approach // arXiv:quant-ph/0109122v5 7 Jan 2007.

109. DeWitt Bryce Seligman , Graham R. Neill , eds. The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics, Princeton Series in Physics, Princeton University Press (1973). - p. 3-140.

110. Everett H. Relative State Formulation of Quantum Mechanics. - Reviews of Modern Physics vol 29, (1957) p. 454-462.

111. Богданов А. А. Эмпириомонизм, 1904—1906.
112. Stiglitz Joseph E. Information and the Change in the Paradigm in Economics. From Les Prix Nobel. The Nobel Prizes 2001, Editor Tore Frängsmyr, [Nobel Foundation], Stockholm, 2002. – p. 472 – 540.
113. Пятый рынок: экономические проблемы производства информации. — М.: МГУ, 1993. – 18 с.
114. Полтерович В.М. Стратегии институциональных реформ. Перспективные траектории. // Экономика и математические методы. Т.42. Вып.1 (2006).
115. Полтерович В.М. Стратегии институциональных реформ. Китай и Россия. // Экономика и математические методы. Т.42. Вып.2 (2006).
116. Дюк В., Самойленко А. Data Mining: учебный курс. — СПб: Изд. Питер, 2001. — 368 с.
117. Чубукова И. А. Data Mining: учебное пособие. — М.: Интернет-университет информационных технологий: БИНОМ: Лаборатория знаний, 2006. — 382 с.
118. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
119. Соловьев В.Н., Сапцин В.М., Чабаненко Д.Н. Адаптивная методика прогнозирования на основе сложных цепей Маркова. В кн. Комп’ютерні технології в будівництві / Матеріали VI міжнародної науково-практичної конференції «КОМТЕХБУД 2008»: Київ-Севастополь, 9-12 вересня 2008 р. – К.: Міністерство регіонального розвитку та будівництва України, 2008, с. 59-60.
120. Сапцин В.М. Опыт применения генетически сложных цепей Маркова для нейросетевой технологии прогнозирования. // Вісник Криворізького економічного інституту КНЕУ. - Кривий Ріг, КЕІ КНЕУ, 2009, вип. 2(18).- С.56-66.
121. Soloviev V., Sapsin V., Chabanenko D. Prediction of financial time series with the technology of high-order Markov chains // Working Group on Physics of Socio-economic Systems (AGSOE).- Drezden, 2009: <http://www.dpg-verhandlungen.de/2009/dresden/agsoe.pdf>