УДК 378.016:517

КОРОЛЬСЬКИЙ Володимир, ШОКАЛЮК Світлана

Криворізький державний педагогічний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМИ БАГАТОВАРІАНТНИХ ЗАВДАНЬ З ТЕМИ «ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ»

У статті порушено проблему проектування та використання системи багатоваріантних задач з математики як засобу розвитку математичної компетенції учнів (абітурієнтів) та студентів. Запропоновано, на прикладі задач з теми «Інтегрування раціональних функцій», в основу проектування системи багатоваріантних задач покласти математичні моделі розв'язків задачі. Наведено всі етапи побудови моделей та перевірено результати аналітичного моделювання шляхом здійснення символьних розрахунків у середовищі системи комп'ютерної математики SageMathCloud. Результати моделювання подано у вигляді таблиці. Дані складеної таблиці стануть у нагоді викладачу математики при «ручному» генеруванні системи багатоваріантних задач на обчислення невизначених інтегралів від раціональної функції та полегшать процес побудови та програмної реалізації їх автоматизованого генератора, надаючи параметрам моделей розв'язків різних значень. Цілком очевидно, що моделювання системи багатоваріантних задач з курсів шкільної та вищої математики із подальшою програмною реалізацією їх генератора надасть можливість скоротити час викладача на підготовку та перевірку самостійних (контрольних) робіт для здійснення систематичного моніторингу успішності.

***Ключові слова**: генерування системи задач, модель розв'язку математичної задачі, невизначений інтеграл, система багатоваріантних задач, SageMathCloud.*

Постановка проблеми. Рівень сформованості та розвитку математичної компетентності випускників загальноосвітніх навчальних закладів та студентів перших курсів природничо-математичних спеціальностей нижчає з року в рік. Вчителі математики пояснюють даний факт невідповідністю змісту та вимог до результатів вивчення шкільної математики кількості її уроків на тиждень – учні не мають часу на ґрунтовне засвоєння теоретичних знань та формування автоматизованих навичок їх застосування. Вчителі й викладачі-методисти часткове вирішення проблеми вбачають у побудові й використанні на практиці системи багатоваріантних задач для формування й розвитку певних математичних компетенцій учнів (студентів) у тренувальному режимі як на уроках, так і в позаурочний час.

Проектування такої системи задач передбачає побудову математичної моделі умови або розв'язку задачі та «ручне» або автоматизоване генерування набору завдань, надаючи параметрам побудованої моделі різних значень [1; 2].

Аналіз актуальних досліджень. Ідея математичного моделювання системи багатоваріантних задач та програмної реалізації їх автоматизованого генератора не є новою як серед вітчизняних, так і зарубіжних науковців і методистів, серед яких В. М. Михалевич, Я. В. Крупський, О. І. Шевчук [3], І. О. Посов [4], Н. В. Рашевська, О. П. Ліннік, Г. А. Горшкова [5],С. О. Семеріков і К. І. Словак [6] та ін.

Метою статті є висвітлення ідеї математичного моделювання розв'язків математичної задачі та подальшим генеруванням («ручним» або автоматизованим) на основі побудованої моделі системи багатоваріантних задач на прикладі задач з теми «Інтегрування раціональних функцій».

Методи дослідження: аналіз, систематизація та узагальнення відомостей природничо-наукових, психолого-педагогічних та методичних джерел з проблем проектування та програмної реалізації системи багатоваріантних тренувальних математичних завдань; математичне моделювання – для побудови моделей розв'язків задачі на обчислення невизначеного інтегралу від раціональної функції; бесіда, опитування – для дослідження рівня сформованості математичних компетенцій учнів (студентів) та з'ясування причин прблеми й можливих шляхів її вирішення.

Виклад основного матеріалу. Система багатоваріантних задач на обчислення невизначеного інтегралу виду

$$J = \int \frac{kx+1}{ax^2+bx+c}dx \text{, де } k, l, a, b, c \text{ є довільні дійсні числа} \qquad (1)$$

може бути отримана в результаті надання параметрам k, l, a, b та c різних допустимих значень. Побудова *математичних моделей розв'язків* такого інтегралу надасть можливість:

– студентам уникати алгебраїчних помилок при розв'язанні задач;

– викладачам «вручну» генерувати систему багатоваріантних задач;

– математикам, які мають базові знання з основ алгоритмізації та програмування, спростити програмну реалізацію генератора-тренажера системи задач.

Оскільки знаходження інтегралу (1) залежить від значення дискримінанта рівняння $ax^2+bx+c=0$ (2), будемо різні математичні моделі розв'язків будувати припускаючи: 1) $D > 0$; 2) $D = 0$.

Нехай $D > 0$ і корені рівняння x_1 та x_2.

В цьому разі можемо використати рівність

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \qquad (3).$$

Рівність (3) дозволяє інтеграл (1) обчислювати у вигляді $J=\int\frac{kx+l}{a(x-x_1)(x-x_2)}dx$ (4).

Для побудови математичних моделей розв'язків та обчислення інтеграла (4) слід розглянути окремі випадки: 1) $k = 0, l \neq 0$; 2) $k \neq 0, l = 0$; 3) $k \neq 0, l \neq 0$.

Якщо $k = 0$, а $l \neq 0$, будемо мати вихідний інтеграл $J=\int\frac{l}{a(x-x_1)(x-x_2)}dx$ (5).

Представимо підінтегральну функцію інтеграла (5) у вигляді $\frac{l}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{1}{a}\left(\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}\right)=\frac{1}{a}\cdot\frac{Ax-Ax_2+Bx-Bx_1}{(x-x1)(x-x2)}$ (6).

З рівності (6) одержуємо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів A і B:

$$\begin{cases}A+B=0\\ -Ax_2-Bx_1=l\end{cases}\Rightarrow A=-\frac{l}{x_2-x_1},\ B=\frac{l}{x_2-x_1}$$

Використовуючи значення коефіцієнтів A і B знаходимо інтеграл (5)

$$\int\frac{l}{a(x-x_1)(x-x_2)}dx=\frac{l}{a}\left[-\int\frac{\frac{1}{x_2-x_1}}{x-x_1}dx+\int\frac{\frac{1}{x_2-x_1}}{x-x_2}dx\right]=$$

$$=\frac{l}{a}\left[-\frac{1}{x_2-x_1}\cdot\int\frac{dx}{x-x_1}+\frac{1}{x_2-x_1}\cdot\int\frac{dx}{x-x_2}\right]=\frac{l}{a(x_2-x_1)}\left[-\ln|x-x_1|+\ln|x-x_2|\right]+C$$

Математичною моделлю розв'язку інтегралу (5) є вираз

$$\int\frac{l}{a(x-x_1)(x-x_2)}dx=\int\frac{l}{ax^2+bx+c}dx=\frac{l}{a(x_2-x_1)}\left[-\ln|x-x_1|+\ln|x-x_2|\right]+C \quad (7)$$

Доказовим фактором правильності аналітично побудованої математичної моделі розв'язку може бути ілюстрація (рис. 1) її отримання засобами системи комп'ютерної математики (СКМ).

Таким чином, щоб обчислити інтеграл (5) достатньо розв'язати рівняння (2) і якщо $D > 0$, і корені рівняння $x_1 \neq x_2$, підставити корені у праву частину формули (7).

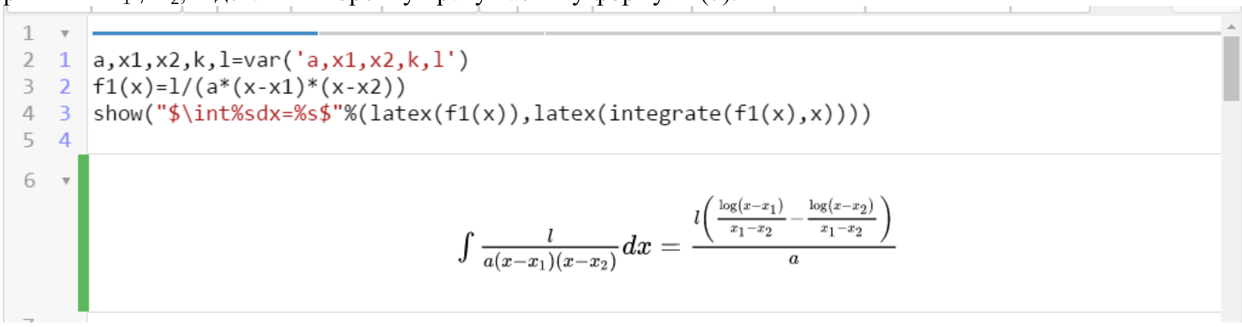

Рис. 1. Побудова математичної моделі розв'язку інтегралу виду (5) засобами системи комп'ютерної математики (СКМ) SageMath

Якщо $k \neq 0$, а $l = 0$ маємо інтеграл

$$J=\int\frac{kx}{ax^2+bx+c}dx=k\int\frac{x}{ax^2+bx+c}dx \quad (8).$$

Підінтегральну функцію представляємо у вигляді $\frac{x}{ax^2+bx+c}=$

$$=\frac{x}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}\right)=\frac{1}{a}\cdot\frac{Ax-Ax_2+Bx-Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)} \quad (9).$$

З рівності (9) одержуємо систему рівнянь для знаходження значень коефіцієнтів:

$$\begin{cases}A+B=1\\ -Ax_2-Bx_1=0\end{cases}\Rightarrow A=-\frac{x_1}{x_2-x_1},\ B=\frac{x_2}{x_2-x_1}.$$

Використовуючи знайдені значення A і B одержуємо відповідь (рис. 2) у вигляді

$$J=\int\frac{kx}{ax^2+bx+c}dx=\frac{k}{a}\left[-\frac{x_1}{x_2-x_1}\ln|x-x_1|+\frac{x_2}{x_2-x_1}\ln|x-x_2|\right]+C=$$

$$=\frac{k}{a(x_2-x_1)}\left[-x_1\ln|x-x_1|+x_2\ln|x-x_2|\right]+C \qquad (10).$$

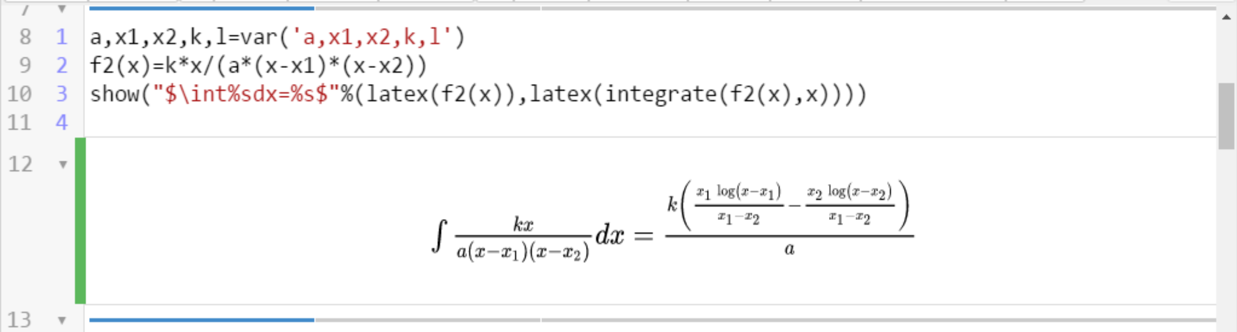

Рис. 2. Побудова математичної моделі розв'язку інтегралу виду (8) засобами СКМ SageMath

Для випадку, *коли* $k\neq 0$ та $l\neq 0$, підінтегральну функцію інтеграла (1) представляємо у вигляді $\frac{kx+l}{ax^2+bx+c}=$

$$=\frac{kx+l}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}\right)=\frac{1}{a}\cdot\frac{Ax-Ax_2+Bx-Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)} \qquad (11).$$

З рівності (11) одержуємо наступну систему рівнянь

$$\begin{cases}A+B=k\\ -Ax_2-Bx_1=l\end{cases}\Rightarrow A=-\frac{kx_1+l}{x_2-x_1},\ B=\frac{kx_2+l}{x_2-x_1}.$$

Далі відповідь одержуємо у вигляді

$$J=\int\frac{kx+l}{ax^2+bx+c}dx=\frac{1}{a}\left[-\frac{kx_1+l}{x_2-x_1}\ln|x-x_1|+\frac{x_2+l}{x_2-x_1}\ln|x-x_2|\right]+C=$$

$$=\frac{1}{a(x_2-x_1)}\left[-(kx_1+l)\ln|x-x_1|+(kx_2+l)\ln|x-x_2|\right]+C \qquad (12)$$

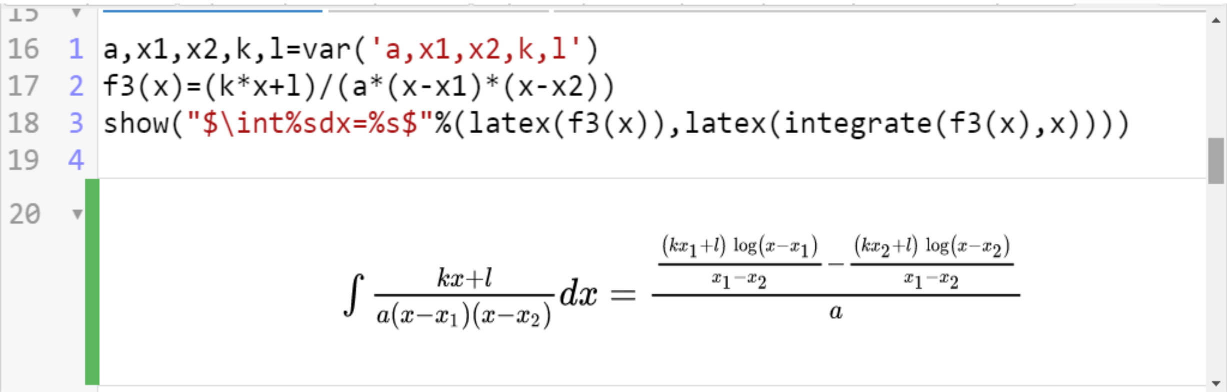

Рис. 3. Побудова математичної моделі розв'язку інтегралу виду (12) засобами СКМ SageMath

Розглядаючи випадок коли $D = 0$ маємо однакові корені рівняння (2) $x_1 = x_2 = \overline{x}$.

За таких умов маємо рівність $ax^2+bx+c=a(x-\overline{x})^2$ (13)

Інтеграл (1) у випадку рівності (13) має вигляд $J=\int\frac{kx+l}{a(x-\overline{x})^2}dx$ (14)

Для побудови математичних моделей розв'язків та обчислення інтеграла (14) слід знов-таки розглянути аналогічні випадки:

Якщо $k = 0$ та $l\neq 0$ маємо інтеграл

$$J=\int\frac{l}{a(x-\overline{x})^2}dx=\frac{l}{a}\int\frac{1}{(x-\overline{x})^2}dx=\frac{l}{a}(-1)\frac{1}{x-\overline{x}}+C \qquad (15).$$

```
a,xr,k,l=var('a,xr,k,l')
f4(x)=l/(a*(x-xr)^2)
show("$\int%sdx=%s$"%(latex(f4(x)),latex(integrate(f4(x),x))))
```

$$\int \frac{l}{a(x-xr)^2}\,dx = -\frac{l}{a(x-xr)}$$

Рис. 4. Побудова математичної моделі розв'язку інтегралу виду (15) засобами СКМ SageMath

Якщо $k \neq 0$ і $l = 0$ маємо інтеграл $J = \int \frac{kx}{ax^2 + bx + c}dx = \frac{k}{a}\int \frac{x}{a(x-\bar{x})^2}dx$. Підінтегральну функцію представляємо у вигляді $\frac{x}{x-\bar{x}} = \frac{A}{x-\bar{x}} + \frac{B}{(x-\bar{x})^2} = \frac{Ax - A\bar{x} + B}{(x-\bar{x})^2}$ (16).

З рівності (16) одержуємо систему рівнянь $\begin{cases} A = 1 \\ -A\bar{x} + B = 0 \end{cases}$.

За допомогою знайдених значень $A = 1$ і $B = \bar{x}$ одержуємо формулу

$$J = \int \frac{kx}{ax^2 + bx + c}dx = \frac{k}{a}\int \frac{dx}{(x-\bar{x})^2} = \frac{k}{a}\left[\int \frac{dx}{x-\bar{x}} + \int \frac{\bar{x}}{(x-\bar{x})^2}dx\right] =$$

$$= \frac{k}{a}\left[\ln|x-\bar{x}| - \frac{\bar{x}}{x-\bar{x}}\right] + C \qquad (17)$$

Якщо $k \neq 0$ і $l \neq 0$ матимемо рівність

$$\frac{kx + l}{a(x-\bar{x})^2} = \frac{1}{a}\left(\frac{A}{x-\bar{x}} + \frac{B}{(x-\bar{x})^2}\right) = \frac{1}{a}\frac{Ax - A\bar{x} + B}{(x-\bar{x})^2} \qquad (18).$$

```
a,xr,k,l=var('a,xr,k,l')
f5(x)=k*x/(a*(x-xr)^2)
show("$\int%sdx=%s$"%(latex(f5(x)),latex(integrate(f5(x),x))))
```

$$\int \frac{kx}{a(x-xr)^2}\,dx = -\frac{k\left(\frac{xr}{x-xr} - \log(x-xr)\right)}{a}$$

Рис. 5. Побудова математичної моделі розв'язку інтегралу виду (16) засобами СКМ SageMath

З рівності (18) одержуємо систему рівнянь $\begin{cases} A = k \\ -A\bar{x} + B = l \end{cases} \Rightarrow A = k,\ B = l + k\bar{x}$.

Використовуючи значення A і B одержуємо формулу

$$J = \int \frac{kx + l}{ax^2 + bx + c}dx = \frac{1}{a}\int \frac{kx + l}{(x-\bar{x})^2}dx = \frac{1}{a}\left[\int \frac{kdx}{x-\bar{x}} + (l + k\bar{x})\int \frac{1}{(x-\bar{x})^2}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{a}\left[k\ln|x-\bar{x}| - (l + k\bar{x})\frac{1}{x-\bar{x}}\right] + C \qquad (19)$$

```
a,xr,k,l=var('a,xr,k,l')
f6(x)=(k*x+l)/(a*(x-xr)^2)
show("$\int%sdx=%s$"%(latex(f6(x)),latex(integrate(f6(x),x))))
```

$$\int \frac{kx+l}{a(x-xr)^2}\,dx = \frac{k\log(x-xr) - \frac{kxr+l}{x-xr}}{a}$$

Рис. 6. Побудова математичної моделі розв'язку інтегралу виду (18) засобами СКМ SageMath

Для «ручного» генерування системи задач на обчислення інтегралів виду (1) та програмної реалізації генератора-тренажера такої системи зручно користуватися даними зведеної таблиці 1.

Таблиця 1

Зведені відомості щодо побудови математичних моделей розв'язків інтегралів виду

$$J = \int \frac{kx+l}{ax^2+bx+c}dx$$

Невизначений інтеграл	k	l	x_1	x_2	x	Математична модель (загальний вигляд) розв'язку
$\int \frac{l}{a(x-x_1)(x-x_2)}dx$	0	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{R}$	–	$\frac{l}{a(x_2-x_1)}\left[-\ln\lvert x-x_1\rvert+\ln\lvert x-x_2\rvert\right]+C$
$\int \frac{kx}{a(x-x_1)(x-x_2)}dx$	$\mathfrak{R}$	0	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{R}$	–	$\frac{k}{a(x_2-x_1)}\left[-x_1\ln\lvert x-x_1\rvert+x_2\ln\lvert x-x_2\rvert\right]+C$
$\int \frac{kx+l}{a(x-x_1)(x-x_2)}dx$	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{R}$	–	$\frac{1}{a(x_2-x_1)}\left[-(kx_1+l)\ln\lvert x-x_1\rvert+(kx_2+l)\ln\lvert x-x_2\rvert\right]+C$
$\int \frac{l}{a(x-\bar{x})^2}dx$	0	$\mathfrak{R}$	–	–	$\mathfrak{R}$	$\frac{l}{a}(-1)\frac{1}{x-\bar{x}}+C$
$\int \frac{kx}{a(x-\bar{x})^2}dx$	$\mathfrak{R}$	0	–	–	$\mathfrak{R}$	$\frac{k}{a}\left[\ln\lvert x-\bar{x}\rvert-\frac{\bar{x}}{x-\bar{x}}\right]+C$
$\int \frac{kx+l}{a(x-\bar{x})^2}dx$	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{R}$	–	–	$\mathfrak{R}$	$\frac{1}{a}\left[k\ln\lvert x-\bar{x}\rvert-(l+k\bar{x})\frac{1}{x-\bar{x}}\right]+C$

Висновки та перспективи подальших досліджень. Моделювання системи багатоваріантних задач з курсів шкільної та вищої математики із подальшою програмною реалізацією їх генератора надасть можливість скоротити час викладача на підготовку та перевірку самостійних (контрольних) робіт для здійснення систематичного моніторингу успішності.

У наступних публікаціях авторів планується висвітлення результатів розробки автоматизованих генераторів задач та результати їх упровадження у навчальний процес.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Башмаков А. И. Разработка компьютерных учебников и обучающих систем / Башмаков А. И., Башмакова И. А. – М.: Информационно-издательский дом «Филинъ», 2003. – 616 с.
2. Кручинин В. В. Генераторы в компьютерных учебных программах / Кручинин В. В. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. – 200 с.
3. Михалевич В. М. Математичні моделі генерування завдань з інтегрування частинами невизначених інтегралів / В. М. Михалевич, Я. В. Крупський, О. І. Шевчук // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2008. – № 1. – С. 116-122.
4. Посов И. А. Web-сайт для создания и обмена генерируемыми задачами по математике / Посов И. А. // Международный электронный журнал «Образовательные технологии и общество (Educational Technology & Society)». – 2010. – Т. 13, – № 3. – С. 360-373.
5. Рашевська Н. В. Застосування Web-СКМ для генерації завдань з вищої математики / Н. В. Рашевська, О. П. Ліннік, Г. А. Горшкова // Тези доповідей VII Всеукраїнської науково-практичної конференції «Інформаційні технології в освіті, науці і техніці» (ІТОНТ – 2010): Черкаси, 4–6 травня 2010 р. – У 2-х томах. – Черкаси: ЧДТУ, 2010 – Т. 2. – С. 27.
6. Словак К. І. Методика побудови окремих компонентів мобільного математичного середовища «Вища математика» [Електронний ресурс] / К. І. Словак // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2012. – №4 (30). – Режим доступу: http://lib.iitta.gov.ua/704364/1/687-2288-1-PB.pdf.

VOLODIMIR KOROLYSKII, SVITLANA SHOKALJUK

Kryvyi Rih State Pedagogical University

MATHEMATICAL MODELING OF MULTIVARIABLE TASKS SYSTEM TO THE THEME «INTEGRATION OF RATIONAL FUNCTIONS»

The level of formation and development of mathematical competence of graduates of secondary schools and students of the first courses of natural and mathematical disciplines nyzhchaye from year to year. Math teacher explaining the discrepancy between this fact and the content requirements for school mathematics study results the number of classes per week - students do not have time for thorough assimilation of theoretical knowledge and forming skills of automated application. Teachers and faculty-Methodists see partial solution to the problem in the construction and use of a multiple practical problems for the formation and development of certain mathematical competencies of students (students) in a training mode in class and after school.

Designing such a system task involves building a mathematical model of the condition or problem solution and «manual» or automatic generation of a set of tasks by providing parameters built models of different values.

The article describes all the stages of construction of models of solutions to the problem of calculating indefinite integral of a rational function of some kind. Models built considering all possible combinations of input data (parameters mathematical model conditions of the problem of finding an indefinite integral of a rational function).

The results of analytical modeling checked through symbolic payments in the environment of computer mathematics SageMathCloud. Output mathematical problem (indefinite integrals of rational functions specific form, function parameters) and simulation results (mathematical model solutions) presented in a summary table (see. Table 1). Data compiled table will be useful mathematics teacher at «manual» generating a multiple computing tasks on indefinite integrals of rational functions or facilitate the creation and implementation of automated software generator model parameters providing solutions to different values.

Clearly, the multivariate modeling of problems with school and courses of Mathematics followed by the implementation of program generator will allow to reduce time teacher preparation and verification of independent (control) works to carry out systematic monitoring of progress.

In these publications, the authors highlight the results planned development of automated generators objectives and results of their implementation in the educational process.

Keywords: *generating a system of tasks, model of solving result mathematical task, indefinite integral, system of multivariable problems.*

ВЛАДИМИР КОРОЛЬСКИЙ, СВЕТЛАНА ШОКАЛЮК

Криворожский государственный педагогический университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ МНОГОВАРИАНТНЫХ ЗАДАНИЙ К ТЕМЕ «ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ»

В статье затронута проблема проектирования и использования системы многовариантных задач по математике как средства развития математической компетенции учащихся и студентов. Приведены все этапы построения математических моделей результатов решений задач, а проверка их правильности выполнена в среде системы компьютерной математики SageMathCloud.

Ключевые слова: *генерирование системы задач, модель результата решения математической задачи, неопределенный интеграл, система многовариантных задач, SageMathCloud.*

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Корольський Володимир Вікторович – кандидат технічних наук, завідувач кафедри математики та методики її навчання Криворізького державного педагогічного університету.

Коло наукових інтересів: математична підготовка майбутніх учителів природничо-математичних та інформатичних дисциплін.

Шокалюк Світлана Вікторівна – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри інформатики та прикладної математики Криворізького державного педагогічного університету.

Коло наукових інтересів: теорія та методика комп’ютерно-орієнтованого навчання математичних дисциплін; теорія та методика навчання інформатики.

УДК 371.31

НАПАЛКОВ Сергей

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского (Арзамасский филиал ННГУ)

О ВОЗМОЖНОСТЯХ И ПЕРСПЕКТИВАХ ПРИМЕНЕНИЯ WEB-КВЕСТ ТЕХНОЛОГИИ В ШКОЛЬНОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Статья посвящена описанию организационно-методических аспектов реализации Web-квест технологии в совершенствовании образовательного пространства при изучении школьниками математики. Основное внимание уделено особенностям построения и возможностям использования тематических образовательных Web-квестов при организации обучения школьников. Описывается феномен поисково-познавательных заданий, составляющих основу предлагаемой Web-квест технологии. Показано применение этой технологии на занятиях по математике, построенных на базе синтеза современных информационных и задачных технологий.

Ключевые слова: *современные образовательные технологии, тематический образовательный Web-квест, поисково-познавательные задания, задачная конструкция по математике.*

Федеральные государственные образовательные стандарты последнего поколения ориентированы на становление таких важных личностных качеств выпускников средней школы, как настойчивое стремление к непрерывному самообразованию, установка на пополнение имеющихся знаний новыми, расширяющими сферу их возможного применения на практике.