

## ГЕОМЕТРІЯ ДОПОМАГАЄ АРИФМЕТИЦІ

Арифметика надає геометрії різноманітні послуги, дістаючи, у свою чергу, від цієї науки різноманітні імпульси.

Л. Кронекер,  
німецький математик XIX ст

Продуктивне використання ідеї «арифметика допомагає геометрії» (і навпаки) сягає сивої давнини. Так, 2,5 тис. років тому грецький мудрець Фалес Мілетський (близько 624—548 рр. до н. е.) за допомогою тині визначив висоту однієї з єгипетських пірамід. Він вибрав час, коли його власна тінь дорівнювала його зросту, і виміряв довжину тині піраміди. Зрозуміло, що в цей час висота піраміди теж дорівнювала довжині своєї тині. (Спробуйте використати цей спосіб для визначення висоти дерева і свого зросту).

Фалес знайшов також розв'язання задачі на визначення відстані від корабля, що перебуває в морі, до гавані без безпосереднього вимірювання цієї відстані.

У народі кажуть: «Що людина бачить, те вона і знає». Нині графіки, діаграми, схеми, графи досить поширені в різних галузях науки й виробництва. Не випадково, мабуть, і в самому шкільному курсі вони використовуються дедалі частіше.

У підручниках математики для чотирирічної початкової школи (автори — М. В. Богданович, Л. П. Кочина, М. М. Левшин) вміщено в середньому близько 5% вправ, де різноманітні схематичні малюнки допомагають дітям виконати суто арифметичне завдання. Вони ілюструють правила, хід міркувань, умову вправи чи задачі; за ними учні складають і розв'язують приклади (рівняння, нерівності) і задачі, пояснюють, як знайшли результат дій, називають правильні твердження, читають вирази тощо.

Схематичний малюнок виконує різноманітні дидактичні функції:

— допомагає осмислити сюжет, виявити подані величини та взаємозв'язки між ними;

— «наштовхує» на здогадку про можливий початок розв'язання, допомагає збагнути його спосіб, обґрунтувати правдивість чи раціональність;

Б о б а. Гаразд, буду думати. Загадуй далі.  
С е р г і й к о. Дуже весело мені:  
Іду верхи на ...  
Б о б а. Іду верхи на свині! Угадав! Угадав!..  
— Відгадки в риму. Останнє слово загадки має за змістом підходити і зву-  
чати складно.

У вагоні світло, чисто,  
За вагоном — темнота...  
Довго їдемо ми містом,  
Раптом поїзд виліта  
З підземелля на Дніпро.  
Гарне в Києві...

Довгонога,  
Чорно-біла,  
У гніздо на хату сіла,  
Довгим дзьобом, знай, тукоче,  
Ніби щось сказати хоче,  
— Де ж це ти була?  
— Далеко!  
— Як зовуть тебе?  
— ...

(В. Кириленко)

— Підкажіть риму:  
Відерце.

— Відерце, відерце,  
Посріблене денце,  
Скажи, де бувало,  
Кого ...?  
— Напувало городину,  
Напувало смородину,  
І вербу пелехату,  
І козу...  
І тепер не гуляю —  
Горобців ...

(Тамара Коломієць)

Отака сімейка.

У сороки-тата  
На сороці латка,  
У сороки-мама  
Фартушок з ...,  
В донечки-сороки —  
У латочках ...,  
А в сороки-сина,—  
Геть латана спина.  
Тьохка соловейко:  
«Латана...!»

(В. Ясиновський)

— Догадайтеся, які два рядочки допи-  
сати, щоб вийшли веселі віршики.

Раз цибуля вийшла з хати.  
Хто їй стрівся, мусив чхати. (О. Коваленко)  
Їв лелека  
Кашу з глека (В. Кравчук)

Якщо до кожного уроку вчитель продумає спеціальні завдання на матеріалі виучуваних текстів, то для учнів усуваються технічні труднощі, пов'язані з цим процесом, і таким чином забезпечується цілеспрямоване керівництво вдосконаленням навичок читання.

— слугує підготовчою вправою до введення правил виконання чотирьох арифметичних дій, запису різних обчислювальних алгоритмів у вигляді блок-схем;

— виступає як спосіб розв'язування задач та їх перевірки; засіб і джерело нових арифметичних знань та ін.

Розглянемо на конкретних прикладах, як геометрія допомагає арифметиці, зокрема спинимось на застосуванні графічних і графіко-обчислювальних прийомів розв'язування арифметичних задач.

Прийоми роботи над творчими вправами ґрунтуються на маніпулюванні предметами, фігурами, числами, цифрами, бо все, що є об'єктом необхідних для виконання завдання дій, легко сприймається, міцно й точно запам'ятовується. Вчителів слід також враховувати, що для оптимізації пошукової самостійності учнів на уроці необхідний синтез мислення, мовлення (слова) і дій.

**Число і геометричний образ у їх взаємозв'язку**

Формування понять про натуральне число й арифметичні дії розпочинається в 1 класі й організується за допомогою широкого застосування наочних і практичних методів, на основі виконання учнями різних дій з предметами. Вже від час опрацювання теми «Властивості предметів. Геометричні фігури» здійснюється підготовка дітей до вивчення чисел і дій над ними. Ось приклади таких вправ.

1. Кубик — це паровоз. Порожні сірникові коробки — вагони. Причепи до паровоза 10 вагонів. Покажи перший, другий, ..., десятий (від паровоза) вагон. Покажи останній, передостанній. Відчепи останній вагон, другий, третій з кінця.

2. Поклади в ряд 5 кружечків. Покажи перший, другий, третій. Забери останній. Скільки залишилося? Поклади 5 кружечків. Забери передостанній. Які кружечки залишилися? Скільки кружечків залишилося?

3. Добудуй прямокутник, квадрат. По скільки потрібно нових паличок (рис. 1)?

4. Склади з 3 паличок ламану лінію. Скільки утворилося кутів?

5. Порівняй 2 смужки паперу. Покажи, яка довша і на скільки? Яка коротша і на скільки?

6. Порівняй числа (рис. 2).

7. В одному ряду 6 кружечків, а в другому 2. Розмісти кружечки так, щоб у кожному ряду їх було порівну.

8. Поклади 4 трикутники. Їх на 2 менше, ніж кружечків. Більше чи менше треба покласти кружечків, ніж трикутників?

Геометричні об'єкти допомагають у ви-



Рис. 1

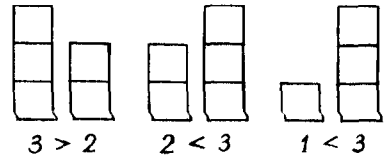
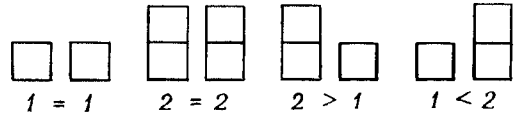


Рис. 2

конанні дидактичного завдання — розширити поняття числа, зокрема під час опрацювання теми «Утворення дробів. Чисельник і знаменник дробу. Порівняння дробів» (4 клас).

9. Перегни паперову смужку навпіл. Покажи половину смужки. Скільки половинок у цілій смужці?

10. Квадрати поділено на рівні частини (рис. 3). Назви незаштриховану частину кожного з них. Яка



Рис. 3

з цих частин найменша (найбільша)? Запиши всі частини в порядку збільшення.

11. Яку частину заштриховано в кожному прямокутнику (рис. 4)? Користуючись малюнками, порівняй виділені частини.

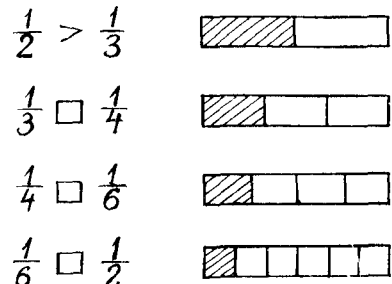


Рис. 4

12. На рис. 5 три однакових круги поділено на 6 рівних частин. За допомогою дробів запиши, яку частину кожного з них заштриховано.

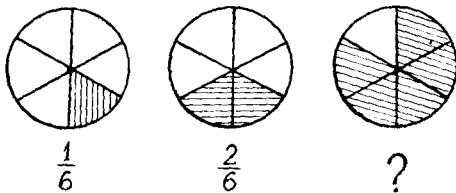
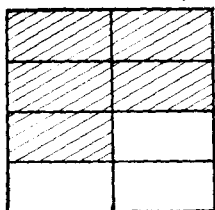


Рис. 5

13. Квадрат поділено на 8 рівних частин, 5 з яких заштриховано (рис. 6). З малюнка видно, що  $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$ . Чому  $\frac{5}{8} < 1$ ?



$$\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$$

$$\frac{5}{8} < 1$$

Рис. 6

До теми «Дроби зі знаменником 2, 4, 8. Порівняння дробів» (4 клас) доцільно виготовити таблицю (рис. 7) і запропонувати учням завдання виду:

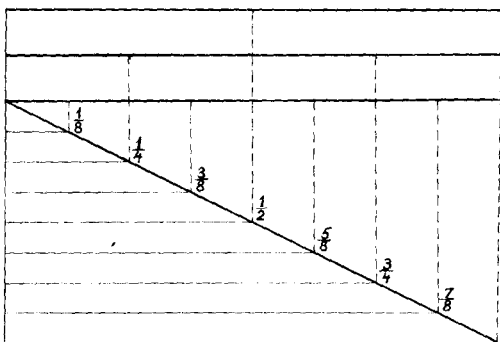


Рис. 7

14. Що показує число в знаменнику? у чисельнику?

15. Розмісти в порядку зростання дробу:  $1/2$ ,  $3/4$ ,  $5/8$ ,  $1/4$ ,  $3/8$ ,  $7/8$ ,  $1/8$ .

Порівняй дробу:  $1/2$  і  $2/4$ ,  $1/4$  і  $1/8$ ,  $5/8$  і  $1/2$ .

Що більше:  $1/2$  чи  $1/4$ ,  $3/8$  чи  $1/4$ ,  $1/2$  чи  $2/4$ ?

Як із  $1/2$  одержати  $1/4$ ? Скільки в  $1/2$  четвертих частин? Скільки в  $1/2$  восьмих частин?

16. Розглянь записи та поясни, як знайти  $2/3$  від 18 см (рис. 8).

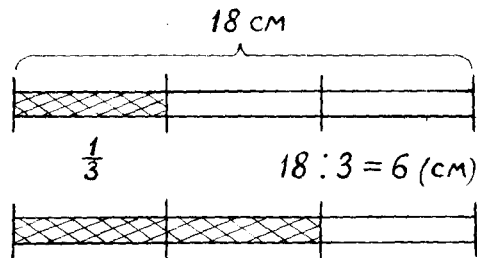


Рис. 8

17. Знайди помилку (рис. 9).

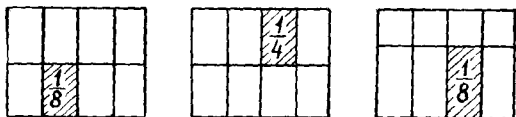
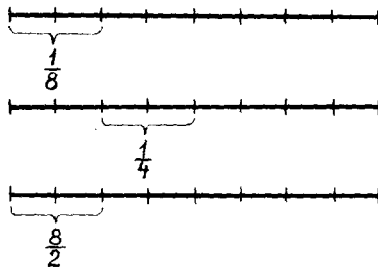


Рис. 9

Коментар. Порядок у множині цілих невід'ємних чисел інтерпретують на числовій прямій так: з двох чисел меншим вважається те, зображення якого розташоване на числовій прямій лівіше. Такий геометричний підхід до порівняння чисел залишається в силі і для множини раціональних чисел, хоч паралельно розглядаються правила порівняння десяткових і звичайних дробів за їх записом.

18. За таблицею «Цифри племені майя» (спрощений варіант) заповни порожні клітинки для чисел другого десятка (рис. 10).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
.	..	...	....	—	⏟	⏟	⏟	⏟	⏟
≡				≡		≡			
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Рис. 10

19. Одного разу Маринка помітила, що бібліотекар, ведучи облік виданих книжок, малює на аркуші паперу якісь чудернацькі квадратики. Маринка попросила пояснити їх значення. З'ясувалось, що, видаючи першу книжку, бібліотекар ставить точку, потім другу, потім третю, четверту, потім з'єднує їх попарно рисками. І коли всі 4 точки з'єднані одна з одною усіма можливими відрізками, виходить фігура, яка означає, що видано 10 книжок. Отож цифри в цій системі зображуються так (рис. 11).



Рис. 11

20. О. С. Пушкін зазначав, що всі арабські числа можна записати за допомогою такої фігури (рис. 12). Спробуй відшукати цифри від 0 до 9.

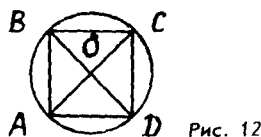


Рис. 12

Відповідь. АВ або ОСД — 1, ОВСАД — 2, ВСОДА — 3 і т. д.

21. Фросинка вирішила написати листа дідусеві. Поштовий індекс був записаний у зошиті олівцем, і окремі частини цифр стерлися. Допоможіть відновити індекс (рис. 13).

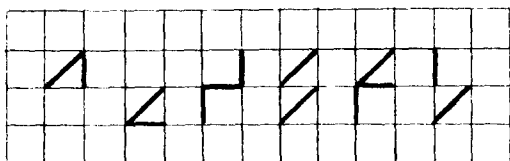


Рис. 13

**Схематичні малюнки при ознайомленні з арифметичними діями та їхніми властивостями**

22. Розглянь першу числову шкалу (рис. 14) і поясни, як за нею складено приклад:  $3 + 2 = 5$ .

За другою шкалою (рис. 15) склади приклад на додавання, а за третьою (рис. 16) — на віднімання.

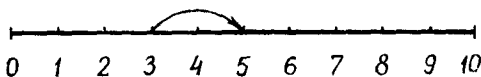


Рис. 14

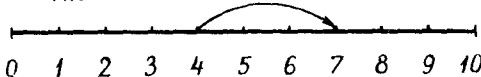


Рис. 15

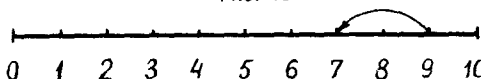


Рис. 16

23. Запиши зображені на лінійці приклади (рис. 17). За допомогою лінійки перевір, чи правильно розв'язані такі приклади:  $5 - 2 = 4$ ,  $7 - 3 = 5$ ,  $6 + 2 = 8$ .

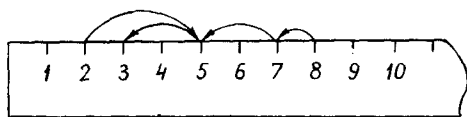


Рис. 17

24. Додати 2 натуральних числа, наприклад 9 та 3, означає знайти в натуральній послідовності число, яке займає третє місце після 9 (рис. 18). Сформулюй таке визначення додавання на прикладі дії з числами 12 та 5.

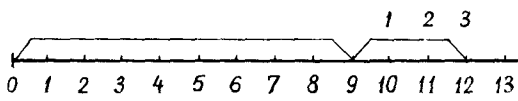


Рис. 18

25. Розглянь малюнок (рис. 19) і поясни за ним, як додати 3 до 8.

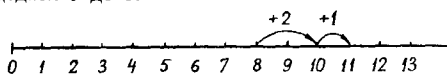
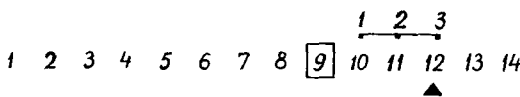


Рис. 19

Розв'язання. До 8 додали 2, дістали 10, потім до 10 додали 1, дістали 11.

26. Відняти натуральне число, наприклад, 3 від 12, означає знайти в натуральній послідовності таке число, від якого 12 стоїть на третьому місці (рис. 20). Сформулюй таке визначення віднімання на прикладі дії з числами 15 та 4.

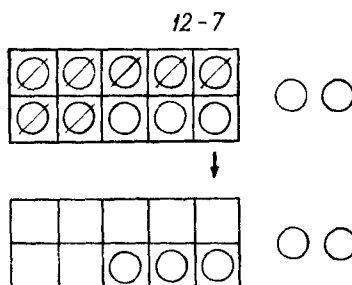


$$12 - 3 =$$

Рис. 20

27. Від числа 12 відними число 7 (рис. 21).

Розв'язання. Від 10 віднімаємо 7, маємо 3; до 3 додаємо, 2, виходить 5.



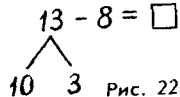
$$12 - 7 = 5 \quad \text{Рис. 21}$$

28. Поясни кожний з прийомів обчислення різниці. Який спосіб тобі сподобався?

а)  $13 - 8 = \square$

Відповідь. 13 — це 5 та 8, отже,  $13 - 8 = 5$ .

б) рис. 22



Відповідь.  $10 - 8 = 2$ ,  $2 + 3 = 5$ .

в)  $13 - 8 = \square$

Відповідь. Рис. 23.

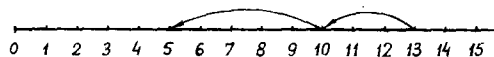


Рис. 23

29. Склади за малюнком (рис. 24) вираз на множення і знайди його значення. Відповідь перевір вимірюванням.

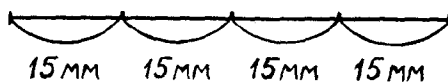


Рис. 24

Процес ділення з остачею можна проілюструвати на предметних множинах і на схематичному малюнку.

30. а) Роздай дітям 9 цукерок по 2 цукерки кожному. Покажи, скільки дітей одержать цукерки. Скільки цукерок залишиться?

б) Намалюй 9 кружечків. Скільки разів по 2 кружечки міститься в 9? Скільки кружечків залишилось?

Таке оперування предметами (рис. 25) «перекладається» на мову математичних знаків:  $9:2=4$  (ост. 1).



Рис. 25

Підсумкова бесіда.

— Скільки всього кружечків на малюнку? (9). По скільки кружечків об'єднували в кожену групу? (По 2). Якою дією можна дізнатися, скільки дістали груп по 2 кружечки? (Діленням. Треба 9 поділити на 2). Скільки дістали груп по 2 кружечки в кожній? (4 групи). Чи всі кружечки поділили? (Ні, 1 кружечок залишився). Прочитай приклад, складений за малюнком.

Коментар. Як відомо, поділити з остачею ціле невід'ємне число  $a$  на натуральне число  $v$  означає знайти такі цілі невід'ємні числа  $q$  і  $r$ , що  $a = v \cdot q + r$  і  $0 \leq r < v$ .

Виходячи з означення ділення з остачею, слід звернути увагу дітей на те, що остача завжди повинна бути меншою від дільника. Для цього корисно виконати вправи на зіставлення малюнка з математичним записом; на виконання запису за даним малюнком; малюнка за даним записом.

Множення і ділення можна здійснити за допомогою вписаних один в одного прямокутних трикутників (відповідно рис. 26 і 27). Будуємо менший з них так, щоб один із катетів дорівнював одиниці обраного масштабу, а другий — одному з перемножуваних чисел, а відповідний катет більшого трикутника вважаємо другим множником. Тоді другий катет більшого трикутника дорівнюватиме добутку цих чисел.

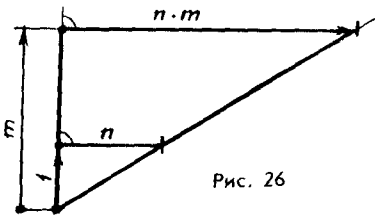


Рис. 26

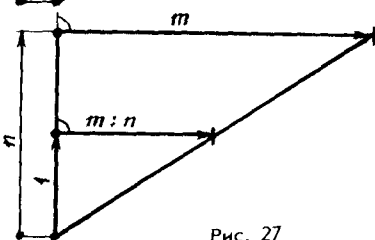


Рис. 27

При розв'язуванні прикладів на порядок дій корисно ознайомити дітей з графом обчислень. Графом називається схема, яка складається з точок і ліній, що сполучають ці точки. Термін «граф» учням не повідомляємо, а називаємо креслення «схемою».

Наприклад, обчислюючи значення виразу  $17 - (14 + 6) : 5$ , дії поєднуємо з побудовою графа (рис. 28).

У верхньому рядку розміщуємо вихідні числа (дані) в тому порядку, як вони записані в прикладі: 17, 14, 6, 5. Потім накреслюємо порядок дій (план обчислень). Спочатку треба знайти суму чисел 14 і 6 (рис. 28, а), потім одержане число поділити на 5 (рис. 28, б) і, нарешті, від 17 відняти частку (рис. 28, в). В міру виконання обчислень схема доповнюється проміжними результатами і відповіддю (рис. 28, г).

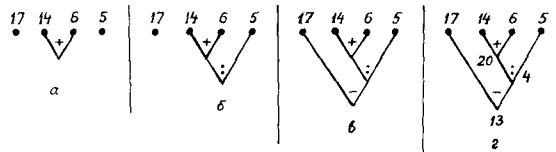


Рис. 28

31. Склади вираз за поданою схемою (рис. 29).
32. Віднови дані й обчисли відповідний вираз (рис. 30).

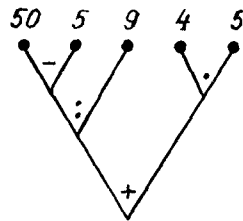


Рис. 29

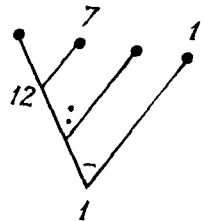


Рис. 30

Вивчаючи тему «Арифметичні дії в межах 1000», третьокласники з інтересом виконують за блок-схемою усну лічбу у формі гри в ЕОМ.

33. Обчисли за схемою (рис. 31).

Розв'язання. У блок-схему вводять число  $4 \cdot 4 \cdot 7 = 28$ . Результат:  $28 < 35$ . Отже, до 28 слід додати 180. Відповідь: 208.

Коли ввести число 8, то доведеться виконати такий ланцюжок обчислень:

$8 \cdot 7 = 56$ ,  $56 > 35$ , отже,  $56 - 42 = 14$ .

Давньогрецький математик Піфагор Самоський (близько 580—500 рр. до н. е.) придумав цікавий спосіб доведення загальних тверджень про числа: він почав зображати числа точками. Наприклад, число 5 зображається так: ....., а число 8 так: ....., Одержував картинки 2 видів — на одних була середня точка (як

4, 9, 3, 7, 2, 5, 6, 8, 10, 0

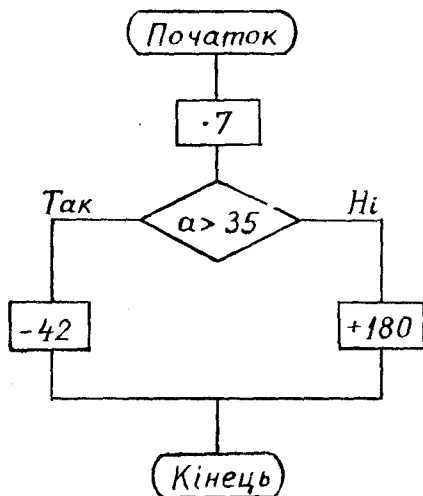


Рис. 31

у числа 5), а на других такої точки не було (як у числа 8). Перші числа були непарними, а другі — парними.

Для доведення, що добуток двох непарних чисел непарний, Піфагор будував з точок прямокутник, як показано на рис. 32.

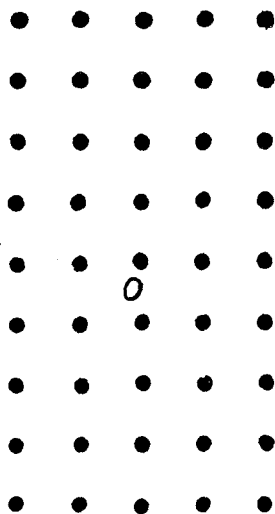


Рис. 32

Оскільки обидві складені з точок сторони прямокутника мають середні точки, то знайдеться вона і на площині прямокутника (точка 0).

Тоді очевидно, що для кожної точки прямокутника, крім цієї середньої, є пара. Отже, число точок у прямокутнику непарне, тобто добуток двох непарних чисел непарний.

34. Зробивши необхідні побудови, доведіть справедливність тверджень:

а) сума двох парних чисел є число парне;

б) сума двох непарних чисел є число парне;  
в) сума парного і непарного чисел є число непарне;

г) якщо один із множників парний, то й добуток парний.

Властивості арифметичних дій добре ілюструються схематичними малюнками.

35. За зразком (рис. 33) склади ще 4 числові рівності. Який можна зробити висновок?



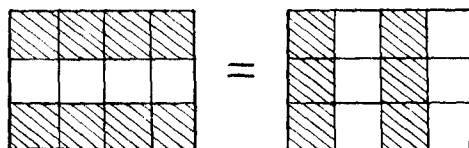
$$1 + 4 + 3 = 8$$

$$1 + 3 + 4 = 8$$

Рис. 33

Відповідь. Додавати числа можна в будь-якому порядку.

Переставний закон множення зручно проілюструвати за допомогою рис. 34: площа однієї й тієї ж самої фігури залишається сталою, як би ми її не обчислювали — за рядами чи за стовпцями одиничних квадратів.



$$4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$$

$$\Delta \cdot \square = \square \cdot \Delta$$

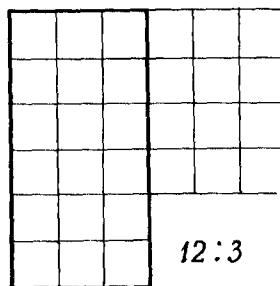
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Рис. 34

36. Розглянь, як можна поділити суму на число іншим способом (№ 1183, 3 клас).

$$(18 + 12) : 3 = 18 : 3 + 12 : 3 = 6 + 4 = 10.$$

Відповідь. Щоб поділити суму на число, можна поділити на це число кожний доданок і знайдені частки додати (рис. 35).



$$18 : 3$$

Рис. 35

(Закінчення буде)