

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання**

«Допущено до захисту»

Завідувач кафедри

_____ Бобилев Д. Є.

Реєстраційний № _____

« ___ » _____ 20__ р.

« ___ » _____ 20__ р.

**МЕТОДИКА УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ
СТАРШОКЛАСНИКІВ З ТЕМИ «ФУНКЦІЇ»**

Кваліфікаційна робота студентки
фізико-математичного факультету
групи МІм-16
ступінь вищої освіти — «магістр»
спеціальності: 014.04 середня освіта
Математика (Інформатика)
Лисуненко Анастасії Володимирівни
Науковий керівник:
доктор педагогічних наук, професор
Лов'янова Ірина Василівна

Оцінка:

Національна шкала _____

Шкала ECTS _____ Кількість балів _____

Голова ЕК _____

(підпис) (прізвище, ініціали)

Члени ЕК _____

(підпис) (прізвище, ініціали)

(підпис) (прізвище, ініціали)

(підпис) (прізвище, ініціали)

(підпис) (прізвище, ініціали)

(підпис) (прізвище, ініціали)

(підпис) (прізвище, ініціали)

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ І ВМІНЬ УЧНІВ З МАТЕМАТИКИ	6
1.1. Узагальнення і систематизація знань і вмінь учнів при вивченні математики.....	6
1.1.1. Види узагальнень.....	6
1.1.2. Методи і форми ефективного узагальнення знань і умінь старшокласників у навчанні математики.....	7
1.2. Методика використання комп'ютерних технологій на етапі узагальнюючого повторення в курсі алгебри і початків аналізу.....	15
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ І ВМІНЬ УЧНІВ З ТЕМИ «ФУНКЦІЇ» НА ЕТАПІ ПІДГОТОВКИ ДО ЗНО	22
2.1. Аналіз представлення теми «Функції» в завданнях ЗНО.....	22
2.2. Методика узагальнення та систематизації знань учнів про функцію та її властивості в умовах підготовки до ЗНО.....	32
2.2.1. Методика представлення основних понять і фактів про функції в курсі алгебри в узагальненій формі.....	32
2.2.2. Метод проектів.....	49
2.2.3. Системи вправ на повторення основних фактів.....	51
2.2.4. Уроки узагальнення та систематизації знань і умінь учнів з теми «Функція».....	65
ВИСНОВКИ	73
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	75
ДОДАТКИ	83
ДОДАТОК А.....	83

ВСТУП

Актуальність дослідження. У наш час науково-технічного прогресу та інформаційних технологій доводиться мати справу з великим обсягом інформації. Це вимагає від сучасної людини вмінь самостійно її опрацювати, критично мислити, використовувати набуті знання і вміння для творчого розв'язання проблем, зокрема у професійній діяльності. Одним з найважливіших завдань школи є виховання всебічно розвиненої особистості, яка здатна до самоосвіти й саморозвитку. Коменський Я. А. стверджував: «Все повинно здійснюватися так послідовно, щоб сьогоднішнє закріплювало вчорашнє і торувало шлях до завтрашнього» [24]. Тому, для високих результатів у навчанні, учні повинні вчитися самостійно знаходити, аналізувати, узагальнювати, систематизувати та застосовувати навчальний матеріал в різних ситуаціях.

Однією з головних змістових ліній курсу «Математика» в старшій школі є функціональна лінія, яка сприяє досягненню визначених цілей і може бути спрямована не лише на засвоєння знань, але і на розвиток пізнавальних сил і творчого потенціалу учня. Вивчення функціональних залежностей та дослідження властивостей функцій дає можливість ґрунтовніше пізнати навколишній світ. Більшість фактів, явищ та процесів як природничих, так і суспільних наук, можна описати за допомогою функцій. Тому тема «Функції, їх властивості та графіки» має як освітню так і прикладну значимість. У цій темі здійснюється повторення, систематизація матеріалу стосовно функцій, який вивчався в основній школі, його поглиблення і розширення, зокрема, за рахунок степеневих функцій. Головною метою опрацювання цієї теми є підготовка учнів до вивчення нових класів функцій (тригонометричних, степеневих, показникових, логарифмічних), а також мотивація необхідності розширення апарату дослідження функцій за допомогою похідної. Лейтмотивом теми має бути моделювання реальних процесів за допомогою функцій. Як зазначається у навчальній програмі з математики до головних

завдань вивчення теми слід віднести розвиток графічної культури учнів, оскільки робота з діаграмами, рисунками, графіками є одним із поширених видів практичної діяльності людини, зокрема потребує уміння «читання» графіків, тобто встановлення властивостей функції за її графіком [45, с. 7].

В курсі алгебри і початків аналізу розширюються класи функцій, які вивчалися в основній школі. У темах «Тригонометричні функції» і «Показникова та логарифмічна функції» вміння досліджувати функції закріплюються і застосовуються до моделювання закономірностей коливального руху, процесів зростання та спадання. В уявленні учнів характер фізичного процесу має асоціюватись із відповідною функцією, її графіком, властивостями [45, с. 8].

Якісне засвоєння та глибоке розуміння матеріалу функціональної лінії вимагає узагальнення та систематизації знань і умінь учнів в процесі навчання.

Мета роботи: дослідити методичні особливості узагальнення й систематизації знань та умінь учнів при вивченні функцій та їх властивостей в старшій школі.

Мета роботи конкретизується у таких **завданнях:**

1. Розкрити особливості узагальнення і систематизації знань і умінь учнів при вивченні математики.
2. Описати методи й форми ефективного узагальнення знань і умінь старшокласників у навчанні математики.
3. Розкрити методику використання комп'ютерних технологій на етапі узагальнюючого повторення в курсі алгебри і початків аналізу.
4. Розкрити методичні особливості узагальнення і систематизації знань і умінь учнів з теми «Функції» на етапі підготовки до ЗНО в курсі алгебри і початків аналізу 10-11 класів.

Об'єктом дослідження є процес навчання тем змістової лінії «Функції» в старшій школі.

Предметом дослідження є методика проведення узагальнення й систематизації знань та вмінь учнів з теми «Функції» на етапі підготовки до ЗНО в курсі алгебри і початків аналізу 10-11 класів.

Основні методи дослідження: *теоретичні:* аналіз, порівняння і узагальнення методичної та навчальної літератури з проблеми дослідження для систематизації теоретичного матеріалу, уточнення змісту основних понять змістової лінії «Функції»; *емпіричні:* бесіди з вчителями і учнями, аналіз досвіду роботи вчителів з навчання функцій та їх властивостей.

Практичне значення роботи полягає в тому, що матеріали дослідження можуть бути використані вчителями у практичній професійній діяльності, учнями основної та старшої школи при вивченні тем змістової лінії «Функції» і підготовці до ЗНО, матеріалом можуть скористатися студенти під час опрацювання питань з методики навчання математики, у процесі виробничої педагогічної практики у закладах середньої освіти.

Апробація дослідження. Результати дослідження відображені в статті «Методика узагальнення та систематизації знань учнів з теми: «Квадратична функція та її властивості» в умовах підготовки до ЗНО» [32] у електронному збірнику наукових праць молодих учених факультету математики, природничих наук та технологій Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка «Наукові записки молодих учених» [16]; а також на IX Міжнародній науково-методичній конференції «Проблеми математичної освіти ПМО – 2021» [42] з публікацією тез доповіді «Використання системи динамічної математики GEOGEBRA для узагальнення і систематизації знань старшокласників з теми «Функції»» [33, с. 145-146].

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, додатків. Повний обсяг роботи становить 83 сторінки друкованого тексту, з них 74 сторінки основного тексту. Список використаної літератури складається із 73 найменувань. Додатків у роботі 1 (додаток А).

РОЗДІЛ 1.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ І ВМІНЬ УЧНІВ З МАТЕМАТИКИ

1.1. Узагальнення і систематизація знань і вмінь учнів при вивченні математики.

1.1.1. Види узагальнень.

Нові тенденції в розвитку системи неперервної освіти вимагають приділення належної уваги саме формуванню вмінь засвоювати та використовувати інформацію, опануванню учнями механізмом мислення, що надасть можливість творчо підійти до розв'язання поставлених перед учнями проблем [5, 10].

Приведення знань в струнку систему є одним із ефективних засобів їх зміцнення й закріплення. Систематизація знань невіддільна від їх узагальнення: чим ширше узагальнення, тим більше відображено між ними зв'язків і відношень, тим більш широке коло знань об'єднується в систему [68].

Крім того, при узагальненні навчального матеріалу не тільки відтворюються найбільш важливі факти, поняття, уміння, але й встановлюються логічні зв'язки між ними. Навчальний матеріал при цьому переосмислюється повністю, що приводить не тільки до зміцнення засвоєного, але й до побудови знань в логічну, структурну систему, що підвищує якість засвоєння навчального матеріалу, розвиває розумову діяльність, виводить учнів на принципово новий рівень розуміння. Узагальнення знань дозволяє розвивати вміння розв'язувати задачі шляхом перенесення способу дій на цілий клас аналогічних задач, що є одним з основних завдань навчання взагалі [6, 60].

В залежності від ролі і місця в навчальному процесі розрізняють наступні етапи узагальнення і систематизації знань: первинні узагальнення;

міжпонятійні узагальнення; тематичні узагальнення; підсумкові узагальнення; міжпредметні узагальнення (таблиця 1.1.) [68].

Таблиця 1.1.

Характеристика видів узагальнення

Вид узагальнення	Сутність і область застосування
Первинні узагальнення	Здійснюються під час сприйняття (безпосереднього і опосередкованого) і усвідомлення навчального матеріалу. В результаті чого в пам'яті учнів утворюються загальні уявлення про предмети і явища, відбувається осмислення причинно послідовних і інших зв'язків у вивчених об'єктах, виявлення їх внутрішньої сутності.
Міжпонятійні (або поурочні) узагальнення	Полягають у визначенні між виучуваними поняттями загальних і суттєвих ознак і властивостей, в переході від менш загальних до більш загальних понять, в об'єднанні засвоєних понять в системи, в розкритті зв'язків і відношень між елементами даної системи, розміщення їх у визначеному порядку і раціональній послідовності. У навчанні дає можливість вивчені на уроці поняття звести в єдину систему і веде до засвоєння відповідних теорій і важливих ідей. Здійснюється головним чином на спеціально виділеному етапі уроку.
Тематичні узагальнення	Забезпечують засвоєння цілої системи або циклу понять, вивчених протягом певного часу, які складають зміст розширених розділів програми.
Підсумкові узагальнення	Слугують для встановлення зв'язків і відношень між системами знань, засвоєними в процесі опанування цілого курсу, засвоєння цілісної системи знань за окремими галузями науки, здійснюються з близьких предметів (наприклад математики, фізики, хімії) на спеціальних уроках міжпредметного узагальнюючого повторення.

Використання наведених видів узагальнення на уроках математики, надає можливість вчителю легко, якісно систематизувати й закріпити в учнів набуті знання, уміння і навички з вивченого матеріалу, застосовувати їх на практиці, а також забезпечує мотивацію здобуття знань з предмета та вчитися впродовж життя.

1.1.2. Методи і форми ефективного узагальнення знань і умінь старшокласників у навчанні математики.

Узагальнення й систематизація знань досягаються різними шляхами, засобами, методами. Важливо, щоб в основі їх були виявлення й осмислення учнями головного, істотних понять та їх відношень й взаємозв'язків з

іншими, уже засвоєними поняттями, ідеями, а не ілюстрація вчителем готових знань [68].

Формами й методами узагальнення знань старшокласників вважають:

- опорні конспекти у вигляді таблиць й схем,
- метод проектів,
- роботу із тестовими завданнями,
- розв'язування задач різного рівня складності,
- уроки узагальнення і систематизації знань.

Розглянемо їх більш детально.

Опорні конспекти, узагальнюючі таблиці й схеми. В узагальненні і систематизації знань особливу роль відіграють графічні зображення, які передбачають створення узагальненої наочної моделі, що відображає взаємозв'язки в об'єктах і предметах, які вивчаються. Так, графічно можна зобразити умову задачі, механізми, прилади, процеси. Графічна перевірка забезпечує розвиток пізнавального інтересу, заощаджує час, формує вміння узагальнювати, систематизувати, класифікувати вивчений матеріал, сприяє розвитку абстрактного мислення учнів, є своєрідним засобом, що надає математичній ситуації виразності, чіткості, конкретності і полегшує розумову діяльність учнів [69]. Основними формами графічної перевірки, які допомагають осмислити суть систематизації знань учням є складання таблиць, схем; побудова діаграм, графіків; створення малюнків, карток-завдань, правил-орієнтирів, алгоритмів тощо. Такі форми часто поєднуються з усною або письмовою перевіркою [68].

Систематизаційні таблиці по виконанню їх функціональної ролі розподіляють на роз'яснювальні, порівняльні і узагальнюючі (таблиця 1.2.) [57, с. 26].

Використовуючи їх, зручно ілюструвати узагальнення окремих факторів, властивостей, послідовність кроків (дій), міркувань (побудов), розглядати всі можливі випадки розв'язувань [68].

Таблиця 1.2.

Функції узагальнюючих таблиць

Вид таблиці	Функціональна роль
Роз'яснювальні таблиці	Полегшують розуміння теоретичного матеріалу, сприяють свідомому його засвоєнню і запам'ятовуванню.
Порівняльні таблиці	Дозволяють порівнювати будь-які елементи: істотні порівняльні ознаки літературних, природних, мовних і соціальних об'єктів, математичні поняття, і тому подібне.
Узагальнюючі (тематичні) таблиці	Підсумовують вивчений теоретичний матеріал, сприяють формуванню понять, перераховують основні риси явищ, подій, процесів і тому подібне.

Для підсилення наочності навчального матеріалу рекомендується використовувати схеми. Вони дозволяють учням наочно засвоїти матеріал та розвивати критичне, логічне, креативне мислення. Якщо ж опорний конспект на етапі узагальнення буде складатися разом з учнями, то вони зможуть навчитися самостійно виділяти основне та користуватися опорними сигналами [43, с. 12].

У дослідженні Півторак А. А. [57] сформульовані наступні основні правила оформлення таблиць, схем або блок-схем:

- коментарі розміщуються за принципом мінімалізму;
- поля мають відступи;
- колірна палітра не повинна бути строкатою;
- кількість обраних елементів таблиці або схеми має відповідати змісту і характеру тексту;
- малюнки використовуються як елемент оформлення схеми;
- набір шрифтів і засоби обрамлення схем є різноманітними;
- має реалізуватися ефект руху складових схеми (анімація).

Функції таблиць у презентації [57, с. 27]:

- підвищують зорову наочність, покращують сприйняття смислового фрагменту тексту;
- здійснюють порівняння двох і більше об'єктів;
- здійснюють угруповання об'єктів;

- проводять систематизацію об'єктів;
- класифікують і зв'язують компоненти в межах теми.

З метою формування в учнів реалістичного образу доцільне зіставлення схематичного зображення з іншими видами ілюстрацій. Схема може бути доповнена конкретним текстовим матеріалом, але так, щоб не ускладнити зорове сприйняття матеріалу, не знизити цінність схеми. Дозволяють розвантажити схему лаконічні умовні позначення та компактне розміщення матеріалу [57, с. 28].

Наприклад, наведемо слайд презентації на якому схематично подана узагальнююча інформація про властивості парної функції (рис. 1.1.).

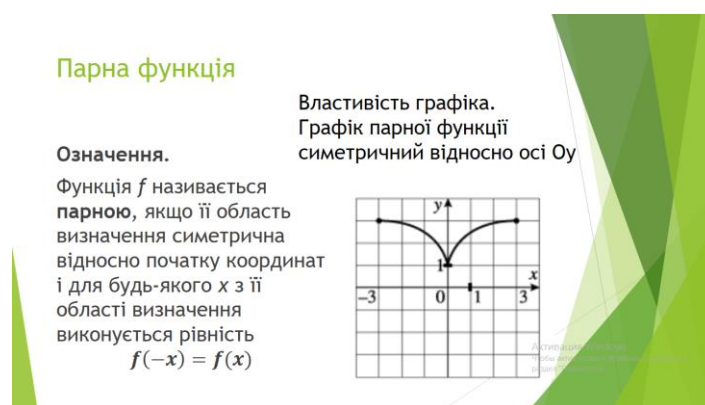


Рис. 1.1. Приклад оформлення схеми на слайді презентації

В останні роки набув поширення і популярності **метод проектів**, завдяки раціональному поєднанню теоретичних знань та можливостей їх практичного застосування для розв'язання конкретних професійних проблем у ході сумісної діяльності здобувачів освіти [25, с. 85].

Використання методу проектів дозволяє реалізувати особистісно-діяльнісний (Давидов В. В. [14], Амонашвілі Ш. А. [3, 4]) і особистісно-орієнтований підходи до освіти учнів (Якиманська І. С. [73], Бех І. Д. [7], Подмазін С. І. [58]). Ці підходи ґрунтуються на застосуванні різних дисциплін на різних етапах навчання, інтеграція в процесі роботи над проектом. Це забезпечує позитивну мотивацію і диференціацію в навчанні, активізує самостійну творчу діяльність учнів під час виконання проекту [28].

Лисицкий В. М. [31, с. 86] підкреслює, що застосування методу проектів в організації навчально-виховного процесу дозволяє стимулювати самостійну діяльність школярів, орієнтувати учнів на виконання індивідуальної, парної, групової роботи впродовж тривалого часу.

Застосування методу проектів в процесі викладання шкільного курсу математики дає можливість: перетворити абстрактну математику (такою її бачить більшість школярів) на цікаву та особистісно значущу, що сприяє розвитку творчих здібностей особистості; активізувати навчально-пізнавальну діяльність учнів при вивченні математики; забезпечити зв'язок теоретичного матеріалу з його практичним застосуванням; надати учням більш повної самостійності; формувати ключові життєві компетентності: уміння вчитися, загальнокультурну, громадянську, підприємницьку, соціальну, інформаційно-комунікативну та компетенцію збереження здоров'я; значно підвищити результативність вивчення конкретної теми [37, 38, 65].

Наприклад при вивченні теми «Функції» можливі такі навчальні проекти для учнів: «У світі чарівних функцій», «Як графіки людям допомагають?», «Лініфокус», та інші.

Робота із тестовими завданнями має за мету не тільки перевірити міцність засвоєння знань, умінь і навичок, а й розвивати певні якості особистості в процесі навчання, сприяти підвищенню якості знань школярів при підготовці їх до зовнішнього незалежного оцінювання. Формування навичок роботи з різними видами тестів при вивченні шкільних курсів алгебри зміцнює впевненість школярів у власних знаннях, генерує мотивацію та пізнавальну діяльність до самоосвіти.

Чайка В. М. [69] акцентує увагу на основних вимогах до тестів: вони мають бути короткотривалими, однозначними, правильними, відносно короткими, інформативними, зручними, стандартними; відповідати цілям навчання, виховання і розвитку учня. Та основних критеріях: об'єктивність, надійність, валідність і точність.

Наприклад: експрес контроль знань учнів у тестовій формі (таблиця 1.3.) [40].

Таблиця 1.3.

Приклади завдань експрес контролю

1.Серед запропонованих функцій вказати непарну.	А	$y = x \sin x$	2. Яка з запропонованих функцій є зростаючою на множині дійсних чисел?	А	$y = -2x + 7$
	Б	$y = x + \sin x$		Б	$y = -7x + 2$
	В	$y = x^4$		В	$y = 2$
	Г	$y = x^3 + 1$		Г	$y = 2x - 7$
	Д	$y = \frac{x^5 + x}{x}$		Д	$y = -\frac{1}{7}x + \frac{1}{2}$

Розв'язування задач різного рівня складності однозначно розвиває логічне, абстрактне й критичне мислення учнів, дозволяє краще зрозуміти теоретичний та практичний матеріал теми, якісно закріпити засвоєнні знання, уміння, навички й доводить необхідність використовувати матеріал у задачах практичного змісту. До завдань різного рівня складності відносимо наступні: завдання на відповідність, завдання з відкритою відповіддю, завдання, які потребують логічного обґрунтування виконаних дій.

Наприклад.

1. Установити відповідність між геометричними перетвореннями (1-4) графіка функції $y = \sin x$ та функціями (А-Д), одержаними у результаті цих перетворень [39].

1) Графік функції $y = \sin x$ паралельно перенесли вздовж осі x на 3 одиниці ліворуч. А $y = \sin 3x$

2) Графік функції $y = \sin x$ паралельно перенесли вздовж осі y на 3 одиниці вниз. Б $y = \frac{1}{3} \sin x$

3) Графік функції $y = \sin x$ стиснули до осі x утричі. В $y = \sin(x - 3)$

4) Графік функції $y = \sin x$ стиснули до осі y утричі. Г $y = \sin(x + 3)$

Д $y = \sin x - 3$

2. На малюнку зображено графік функції $y = \frac{k}{x}$ (рис. 1.2).

Скориставшись графіком, знайдіть [67]:

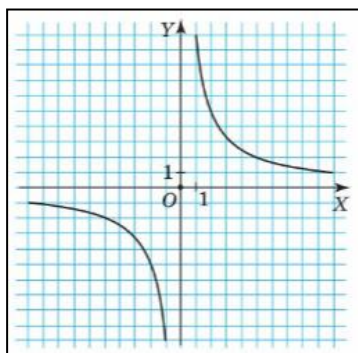


Рис. 1.2. Графік

функції $y = \frac{k}{x}$

- 1) значення y , якщо $x = -1; 2; -5; 10$;
- 2) значення x , якщо $y = 10; 5; -2$;
- 3) за яких значень аргументу значення функції додатні;
- 4) за яких значень аргументу значення функції від'ємні;
- 5) значення аргументу, за яких функція зростає;
- 6) значення аргументу, за яких функція спадає;
- 7) коефіцієнт k .

3. Задано функції $f(x) = x^3$ і $g(x) = 4|x|$ [18].

- 1) Побудуйте графік функції f .
- 2) Побудуйте графік функції g .
- 3) Визначте абсциси точок перетину графіків функцій f і g .

Уроки підсумкового узагальнення і систематизації проводяться в кінці вивчення того чи іншого навчального курсу. Для систематизації добираються основні положення, ідеї, теорії, які характеризують загальні закономірності історичного розвитку природи і суспільства. Аналіз уроків узагальнення й систематизації знань і виявлення труднощів, пов'язаних з їх проведеннями, показує, що нерідко такі уроки перетворюються в уроки простого повторення, на яких формуванню системи знань, системності розуміння учнями вивченого матеріалу належної уваги не приділяється. Тому, структура уроків узагальнення і систематизації перш за все повинна відповідати структурі самого процесу узагальнення і систематизації знань: від засвоєння і узагальнення окремих факторів до формування в учнів понять, їх категорій і систем, від них – до засвоєння більш складної системи знань, до опанування основними теоріями і ведучими ідеями даної науки [68].

У таблиці 1.4. [45], опрацьований фрагмент навчальної програми з теми «Функції» у 10-11 класах та доповнений у кожній темі формами узагальнення і систематизації знань.

Таблиця 1.4.

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу	Форми узагальнення і систематизації знань
Алгебра і початки аналізу 10-й клас		
Тема 1. ФУНКЦІЇ, МНОГОЧЛЕНИ, РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ 36 годин		
<p>Учень (учениця): користується різними способами задання функцій; формулює означення числової, зростаючої та спадної, парної та непарної функцій; знаходить область визначення, значення функцій при заданих значеннях аргументу і значення аргументу, за яких функція набуває даного значення; встановлює за графіком функції її властивості; виконує і пояснює перетворення графіків функцій; досліджує функції і використовує одержані результати при побудові графіків функцій.</p>	<p>Числові функції. Способи задання функцій. Область визначення і множина значень функції. Графік функції. Парність і непарність функцій, найбільше та найменше значення функції. Властивості графіків парних і непарних функцій. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій. Оборотні та взаємно обернені функції.</p>	<p>Опорні конспекти у вигляді таблиць й схем, робота із тестовими завданнями, розв'язування задач різного рівня складності.</p>
Тема 2. СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ 30 годин		
<p>Учень (учениця): зображує графік степеневі функції.</p>	<p>Функція $y = \sqrt[n]{x}$ та її графік. Степенева функція, її властивості та графік.</p>	<p>Опорні конспекти у вигляді таблиць й схем, метод проектів, робота із тестовими завданнями, розв'язування задач різного рівня складності.</p>
Тема 3. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ 34 годин		
<p>Учень (учениця): виконує перехід від радіанної міри кута до градусної і навпаки; встановлює відповідність між дійсними числами і точками на одиничному колі; формулює означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса; властивості тригонометричних, періодичних функцій; будує графіки періодичних функцій; ілюструє властивості періодичних функцій.</p>	<p>Радіанне вимірювання кутів. Синус, косинус, тангенс, котангенс кута. Тригонометричні функції числового аргументу. Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій.</p>	<p>Опорні конспекти у вигляді таблиць й схем, робота із тестовими завданнями, розв'язування задач різного рівня складності, уроки узагальнення і систематизації знань.</p>

Продовж. таблиці 1.4.

Алгебра і початки аналізу 11 клас		
Тема 1. ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ 40 годин		
Учень (учениця): формулює означення показникової і логарифмічної функцій та їх властивості; будує графіки показникових і логарифмічних функцій; застосовує показникову та логарифмічну функції до розв'язування прикладних задач.	Показникова функція. Логарифмічна функція.	Опорні конспекти у вигляді таблиць й схем, метод проектів, робота із тестовими завданнями, розв'язування задач різного рівня складності.

Наведені форми узагальнення і систематизації знань їх розробки, зміст і сутність будуть представлені в другому розділі кваліфікаційної роботи: узагальнюючі таблиці про основні властивості функції, алгоритми дій та правила перетворень графіків функцій; розробка конспекту підсумкового уроку до теми «Тригонометричні функції їх графіки і властивості»; приклади методу проектів на теми: «У світі чарівних функцій», «Як графіки людям допомагають?», «Лініфокус»; завдання тестової форми; вправи різного рівня складності: на відповідність та з відкритою відповіддю.

1.2. Методика використання комп'ютерних технологій на етапі узагальнюючого повторення в курсі алгебри і початків аналізу.

Використання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) навчання у освітньому процесі є перспективним напрямком з точки зору розвитку особистості випускника школи, здатного до діалогу, самостійного прийняття рішень, тощо [2, 13, 36].

Лов'янова І. В. й Попель М. В. [35, 36] наголошують, що використання ІКТ у навчанні математичних дисциплін дозволяє: найбільш повно здійснювати організацію пізнавальної діяльності шляхом моделювання; реалізувати повну систему навчальних дій учня від планування до контролю і корекції; створювати нові форми освітнього процесу сприятливі організації онлайн навчання.

Застосування комп'ютерів при викладанні математики породжує нові форми навчання, специфічний навчальний зміст, нові цілі, що веде до появи інтегрованих міжпредметних комп'ютерних курсів, нових підходів до організації навчання та процесу формування знань, умінь та навичок учнів [22, 30].

При вивченні окремих тем на етапі узагальнюючого повторення в курсі алгебри і початків аналізу можна використовувати широке коло прикладних програм [26], а саме: система динамічної математики GeoGebra; графічний онлайн калькулятор Desmos; комп'ютерні презентації, зокрема Microsoft PowerPoint та Prezi; сервіси такі, як Google форми, Quizlet, Proprofs, Kahoot, Classmarker, Plickers, Easy test maker, Quizizz дозволяють подавати матеріал у тестовій формі.

Скафа О. І. й Тупова О. В. [62, с. 29] основними напрямками їх використання у процесі навчання математики вважають:

- підсилення мотивації учнів;
- активізація навчального процесу;
- індивідуалізація самостійної роботи учня;
- розширення способів одержання інформаційних даних, їх накопичення, аналіз;
- організація закріплення знань і сформованих умінь з математики;
- прискорення розрахунків при розв'язанні завдань у лабораторних роботах та ін.;
- здійснювання найпростіших обчислювальних експериментів і дослідження найпростіших математичних моделей при вивченні певних питань теорії;
- моделювання різних процесів, явищ і ситуацій, постановка і перевірка гіпотез, навіть у тому випадку, коли є велика кількість варіативних способів їх вирішення;
- перевірка знань, умінь і навичок під час контрольних робіт і опитувань

та корекція результатів навчання;

- облік результатів навчання й оперативне представлення відповідних даних учителям, адміністрації, батькам і самим учням.

Одним із засобів ІКТ навчання математики, рекомендованих навчальною програмою з математики для учнів 10-11 класів закладів загальної середньої освіти, є **система динамічної математики GeoGebra** [33]. У ній закладено великий потенціал інструментарію щодо його використання на уроках математики. Це надає навчальному процесу дослідницького характеру через використання параметрів як інструментів дослідження [17, с. 180].

GeoGebra не лише дозволяє створювати завдання, розв'язки чи динамічні демонстраційні моделі, ця система має потужний засіб для організації керування навчальним процесом. Можливість створювати робочі аркуші із завданнями, об'єднавши їх у тематичні розділи та книги дозволяє створювати навчальний контент безпосередньо у самому середовищі. Робочі аркуші можуть містити елементи різного виду: текст, відео, Geogebra аплет, зображення, веб-посилання, pdf-файл та інтерактивні тестові питання. Створення інтерактивного аплету передбачає використання динамічних рисунків з можливістю збереження результату виконання завдання як на комп'ютер, так і можливістю поділитися ним за посиланням в мережі [41].

Одним із завдань застосування системи динамічної математики «GeoGebra» є сформовані в учнів вміння шукати можливі математичні закономірності за допомогою проведення комп'ютерного експерименту на існуючих чи самостійно побудованих динамічних моделях [17, с. 180].

Наведемо приклад задачі з теми «Функції», яка пропонується учням серед завдань ЗНО і за рахунок використання GeoGebra, на етапі підготовки, прискорить процес самоперевірки.

Задача. До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження [33].

Початок речення

Закінчення речення

1. Пряма $y = 4,5x$

А є паралельною прямою $y = 2x$.

2. Пряма $y = -4$

Б не має спільних точок з графіком функції

3. Пряма $y = 2x + 4$

$y = x^2 - 1$.

4. Пряма $y = x$

В перетинає графік функції $y = 3^x$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Г є паралельною осі y .

Д є бісектрисою I і III координатних чвертей.

Дослідивши функції аналітично в зошитах за схемою, учні мають одержати результати: 1-В, 2-Б, 3-А, 4-Д.

Побудувавши функції в GeoGebra (рис. 1.3.-1.6.) та виконавши їх дослідження, результати співпали, що свідчить про правильність розв'язку.

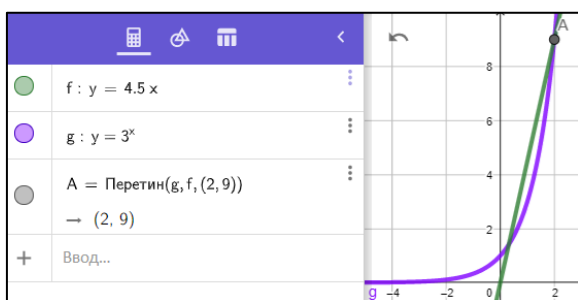


Рис. 1.3. Дослідження пункту 1-В

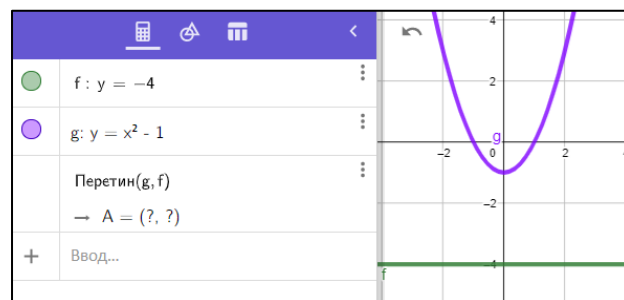


Рис. 1.4. Дослідження пункту 2-Б



Рис. 1.5. Дослідження пункту 3-А

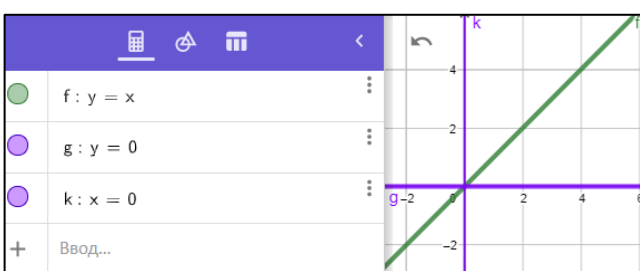


Рис. 1.6. Дослідження пункту 4-Д

Такий процес самоперевірки, дає можливість учням, запам'ятати поведінку графіків функцій та вчить порівнювати, аналізувати, узагальнювати й критично мислити.

Для кращого сприйняття, осмислення вивченого матеріалу необхідним є використання графічного онлайн калькулятора **Desmos**.

Перевагами даного сервісу є [15]:

- вільний доступ без обов'язкової реєстрації;
- простий та інтуїтивно зрозумілий україномовний інтерфейс;
- можливість побудови функцій, заданих аналітично і за допомогою таблиці;
- побудова графіка функції в декартовій та полярній системах координат;
- наявність інтерактивного інструмента;
- побудова графіків різних функцій різними кольорами;
- наявність режиму проєктора;
- можливість роздрукувати побудований графік функції.

Крім того, раціональним є використання графічного онлайн калькулятора Desmos, як і GeoGebra, на етапі підготовки до ЗНО або інших видів робіт (контрольних, самостійних), у вигляді прискорення перевірки отриманих відповідей розв'язаної задачі аналітично в зошитах.

Наприклад, розглянемо задачу, яка зустрічається у збірнику тестових завдань для підготовки до ЗНО [39] при повторенні теми: «Показникова та логарифмічна функції».

Задача. Знайти множину значень функції $y = 5^{\sin x}$.

Побудувавши графік функції у графічному онлайн калькуляторі Desmos (рис. 1.7.), відразу учні можуть побачити правильну відповідь: $[\frac{1}{5}; 5]$ та перевірити хід своїх аналітичних міркувань та рівня сформованості навичок і умінь з даної теми.

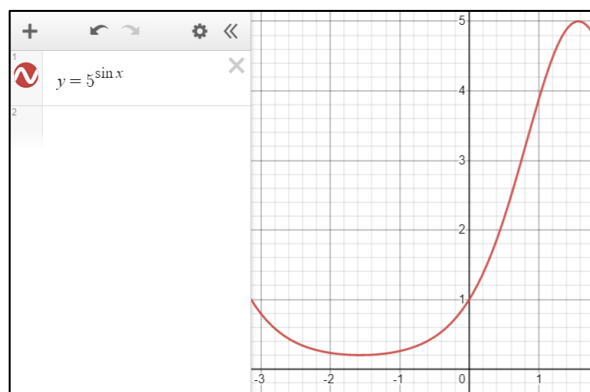


Рис. 1.7. Графік функції $y = 5^{\sin x}$ в Desmos

Педагогічний досвід вчителів показує, що вивчення деяких розділів шкільного курсу математики з використанням лише традиційних засобів навчання викликає певні труднощі в учнів щодо сприйняття та практичного застосування навчального матеріалу. До таких тем можна віднести тему «Тригонометричні функції», що вивчається в 10 класі у курсі алгебри і початків аналізу. На етапі узагальнення матеріалу корисно використовувати комп'ютерні презентації, зокрема **Microsoft PowerPoint** (рис. 1.8.) та **Prezi** (рис. 1.9.), як наочні посібники і джерело навчальної інформації. Візуальна форма подачі перевірки означень, формул, теорем, їх доведень, якісних креслень до графічних задач, подача рухомих зображень забезпечує ефективне фіксування учнями набутих знань та вмінь [72].

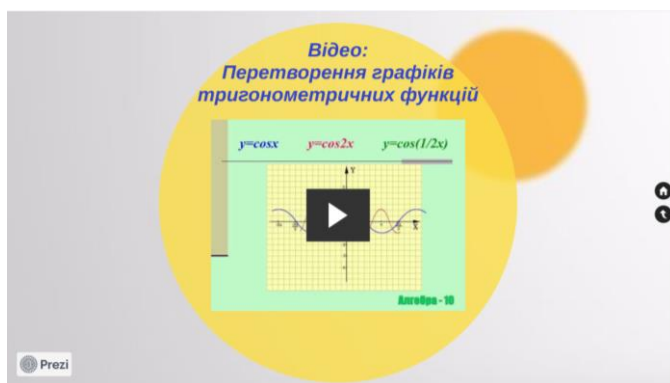


Рис. 1.8. Фрагмент презентації
в Microsoft PowerPoint

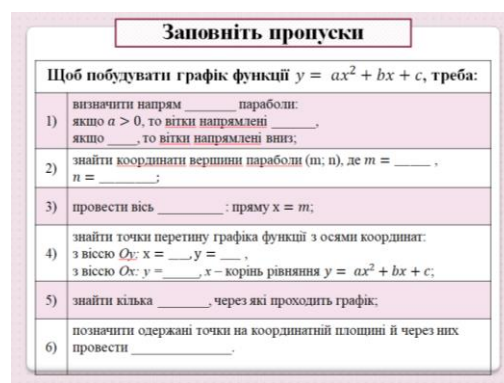


Рис. 1.9. Фрагмент презентації
в Prezi

Для узагальнення знань учнів цікавою і корисною є тестова форма перевірки знань. Наведемо приклади декількох платформ для створення завдань такого роду: Google форми, Quizlet, Proprofs, Kahoot, Class marker, Plickers, Easy test maker, Quizizz (додаток А) [61, 65].

Зокрема **Google форми** – дозволяють створювати тест з різними елементами або типами питань: текст (рядок); текст (абзац); один із списку; декілька із списку; список, що відкривається; шкала; сітка; дата [56]. Зберігає результати у форматі електронних таблиць, проводить аналіз у формі діаграм, як у самому середовищі Google, так й імпортувавши їх у MS Office. Google форми автоматично будують діаграми. Можна також використовувати MS Excel онлайн або скачати електронну таблицю та

опрацьовувати дані в звичайному MS Excel [12]. Посилання на форму генерується автоматично після її створення. Одержаний тест можна відправити учням, студентам електронною поштою або вбудувати на свій сайт за допомогою спеціального коду.

Наведемо приклад Google форми на тему: «[Властивості елементарних функцій та їх графіки](#)» (рис. 1.10.) [34].

Рис. 1.10. Фрагмент Google форми

У процесі виконання тестів формуються навички порівняння об'єктів, співставлення чи представлення об'єктів. Вони більш цікаві для учнів за видами діяльності, а для вчителя – за наповненістю змістом. Крім того, виконання завдань такого типу сприяє підготовці учнів, зокрема, психологічній, до написання державної підсумкової атестації чи зовнішнього незалежного оцінювання [72].

Підсумовуючи, можна зазначити, що маючи за мету формування сучасних випускників профільної школи, здатних не лише опанувати певний обсяг знань з математики, а й вміти скористатися ними використання сучасних ІКТ навчання є на часі. Методично виважене використання ІКТ сприяє тому, що знання та вміння стають взаємопов'язаними з ціннісними орієнтирами учня, формують його життєві компетентності, потрібні для успішної самореалізації у житті, навчанні та праці [27].

РОЗДІЛ 2.

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ І ВМІНЬ УЧНІВ З ТЕМИ «ФУНКЦІЇ» НА ЕТАПІ ПІДГОТОВКИ ДО ЗНО

2.1. Аналіз представлення теми «Функції» в завданнях ЗНО.

Програма зовнішнього незалежного оцінювання з математики передбачає, що в розділі «Функції» будуть перевірятися такі знання і уміння (таблиця 2.1.) [59].

Таблиця 2.1.

Представлення теми «Функції» в програмі ЗНО

Назва теми	Учень повинен знати	Предметні вміння та способи навчальної діяльності
Лінійні, квадратичні, степеневі, показникові, логарифмічні та тригонометричні функції, їх основні властивості. Числові послідовності.	<ul style="list-style-type: none"> - означення функції, область визначення, область значень функції, графік функції; - способи задання функцій, основні властивості та графіки функцій, указаних у назві теми; - означення функції, оберненої до заданої; - означення арифметичної та геометричної прогресій; - формули n-го члена арифметичної та геометричної прогресій; - формули суми n перших членів арифметичної та геометричної прогресій; - формула суми нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $q < 1$. 	<ul style="list-style-type: none"> - знаходити область визначення, область значень функції; - досліджувати на парність (непарність), періодичність функцію; - будувати графіки елементарних функцій, вказаних у назві теми; - встановлювати властивості числових функцій, заданих формулою або графіком; - використовувати перетворення графіків функцій; - розв'язувати задачі на арифметичну та геометричну прогресії.

Аналіз завдань ЗНО з математики за останні 5 років [18] дозволив з'ясувати, які найчастіше зустрічаються функції і рівні їх вправ. А саме, у дослідженні на основі аналізу, систематизовано завдання за видами функцій та за рівнями складності завдання: 1) тестові завдання; 2) завдання на відповідність; 3) завдання з відкритою відповіддю; 4) завдання, які

потребують логічного обґрунтування виконаних дій. В дужках біля кожного завдання вказано рік, номер завдання і вид сесії ЗНО.

1) Тестові завдання.

1. Графіком однієї з наведених функцій є пряма. Укажіть цю функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y = 2^x$	$y = x^2 - 2x$	$y = \cos(2x)$	$y = 2x$	$y = \frac{2}{x}$

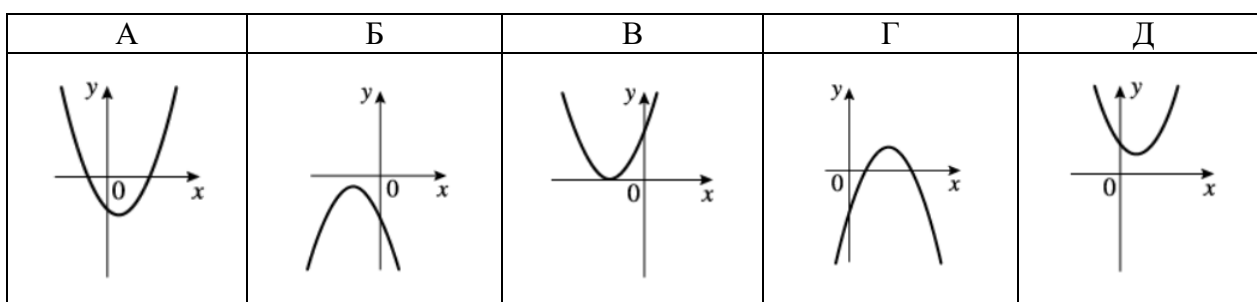
Правильна відповідь: Г (ЗНО 2016, з. 5, основна сесія (ОС)).

2. Визначте точку перетину графіка функції $y = 2x - 2$ з віссю x .

А	Б	В	Г	Д
(0; -2)	(-2; 0)	(1; 0)	(0; 1)	(1; -2)

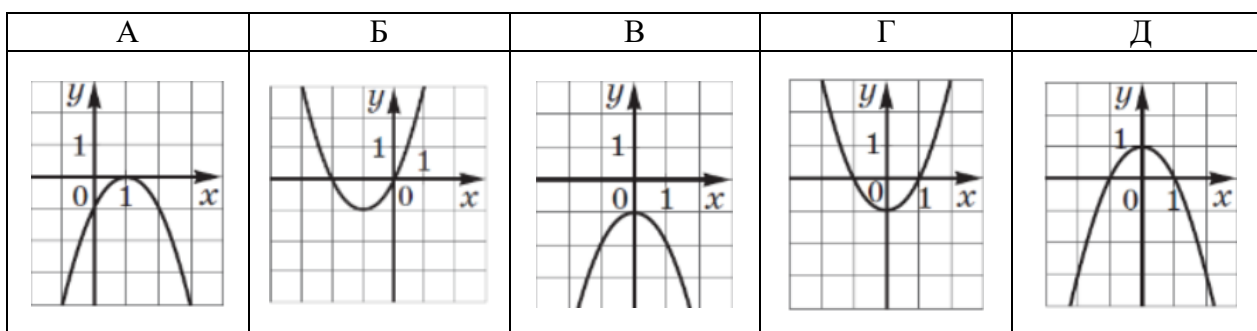
Правильна відповідь: В (ЗНО 2017, з. 6, ОС).

3. Яка з наведених парабол може бути графіком функції $y = x^2 + px + q$, якщо рівняння $x^2 + px + q = 0$ не має дійсних коренів?



Правильна відповідь: Д (ЗНО 2016, з. 18, ОС).

4. На одному з рисунків зображено графік функції $y = 1 - x^2$. Укажіть цей рисунок.



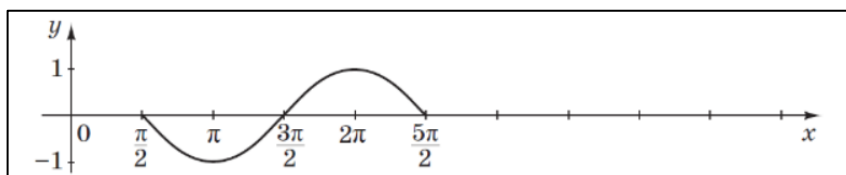
Правильна відповідь: Д (ЗНО 2017, з. 11, ОС).

5. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{x+1}{x-2}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$

Правильна відповідь: А (ЗНО 2018, з. 8, ОС).

6. На рисунку зображено фрагмент графіка періодичної функції з періодом $T = 2\pi$, яка визначена на множині дійсних чисел. Укажіть серед наведених точку, що належить цьому графіку.



А	Б	В	Г	Д
$(1; 2\pi)$	$(3\pi; 0)$	$(-1; 5\pi)$	$(5\pi; 0)$	$(5\pi; -1)$

Правильна відповідь: Д (ЗНО 2018, з. 17, ОС).

7. На якому з рисунків зображено ескіз графіка функції $y = (0,5)^x$?

А	Б	В	Г	Д

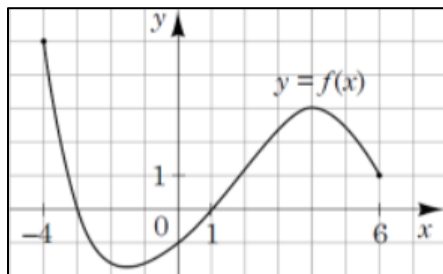
Правильна відповідь: Б (ЗНО 2020, з. 10, ОС).

8. Яку з наведених властивостей має функція $y = \sqrt{x}$?

А	Б	В	Г	Д
набуває лише невід'ємних значень	спадає на всій області визначення	парна	періодична	має дві точки екстремуму

Правильна відповідь: А (ЗНО 2019, з. 9, ОС).

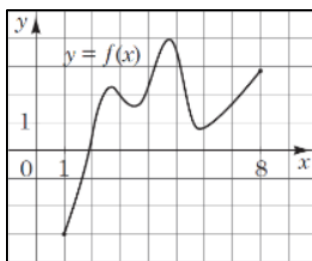
9. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 6]$. Укажіть найбільше значення функції f на цьому проміжку.



А	Б	В	Г	Д
-4	3	4	5	6

Правильна відповідь: Г (ЗНО 2018, з. 4, ОС).

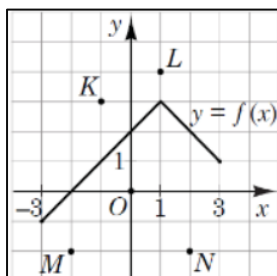
10. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[1; 8]$. Скільки нулів має ця функція на заданому проміжку?



А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	чотири

Правильна відповідь: Б (ЗНО 2019, з. 7, ОС).

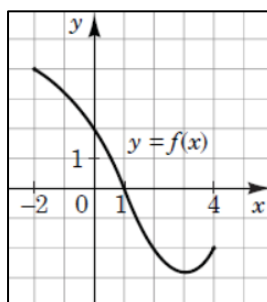
11. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-3; 3]$. Одна з наведених точок належить графіку функції $y = -f(x)$. Укажіть цю точку.



А	Б	В	Г	Д
К	Л	О	М	Н

Правильна відповідь: Д (ЗНО 2019, з. 15, ОС).

12. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-2; 4]$. Укажіть нуль цієї функції.



А	Б	В	Г	Д
$x = -2$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 4$

Правильна відповідь: В (ЗНО 2020, з. 6, ОС).

13. Графік довільної функції $y = f(x)$ паралельно перенесли вздовж осі y на 3 одиниці вниз. Графік якої з наведених функцій отримали?

А	Б	В	Г	Д
$y = f(x + 3)$	$y = f(x) + 3$	$y = 3f(x)$	$y = f(x) - 3$	$y = f(x - 3)$

Правильна відповідь: Г (ЗНО 2020, з. 13, ОС).

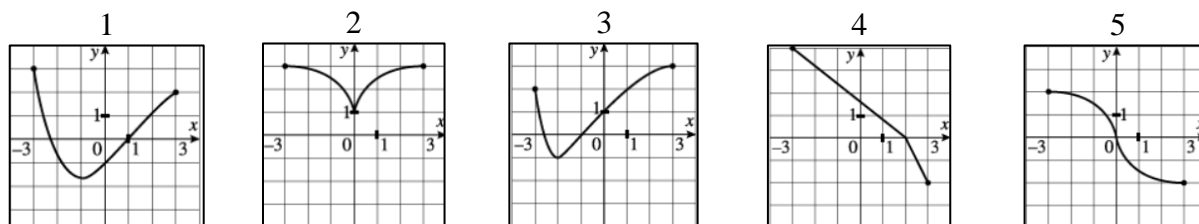
2) Завдання на відповідність.

1. До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення	Закінчення речення
1) Пряма $y = 4,5x$	А є паралельною прямою $y = 2x$.
2) Пряма $y = -4$	Б не має спільних точок з графіком функції
3) Пряма $y = 2x + 4$	$y = x^2 - 1$.
3) Пряма $y = 2x + 4$	В перетинає графік функції $y = 3^x$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.
	Г є паралельною осі y .
	Д є бісектрисою I і III координатних чвертей.

Правильна відповідь: 1-В, 2-Б, 3-А, 4-Д (ЗНО 2018, з. 21, ОС).

2. На рисунках (1-5) зображено графіки функцій, визначених на відрізку $[-3; 3]$.

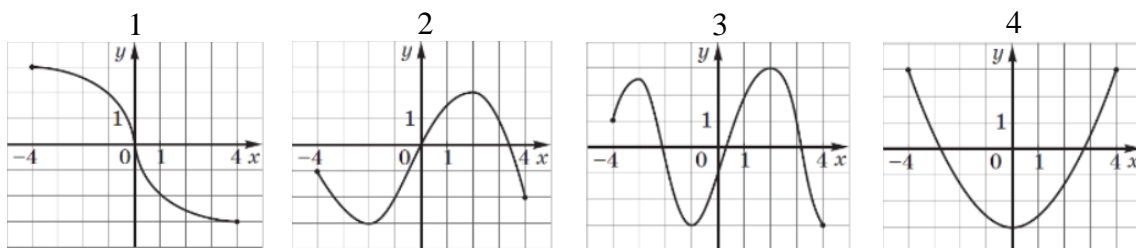


До кожного запитання (1-4) доберіть правильну відповідь (А-Д).

Запитання	Відповідь
1) На якому рисунку зображено графік функції, що проходить через точку $(1; 0)$?	А рис. 1 Б рис. 2
2) На якому рисунку зображено графік парної функції?	В рис. 3
3) На якому рисунку зображено графік функції, що має дві спільні точки з графіком функції $y = \log_{\frac{1}{3}} x$?	Г рис. 4 Д рис. 5
4) На якому рисунку зображено графік функції, що зростає на відрізку $[-2; 3]$?	

Правильна відповідь: 1-А, 2-Б, 3-Г, 4-В (ЗНО 2016, з. 21, ОС).

3. На рисунках (1-4) зображено графіки функцій, визначених на відрізку $[-4; 4]$.



До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

Закінчення речення

- | | |
|--|--|
| 1) Функція, графік якої зображено на рис. 1. | А є непарною. |
| 2) Функція, графік якої зображено на рис. 2. | Б набуває найбільшого значення, що дорівнює 4. |
| 3) Функція, графік якої зображено на рис. 3. | В є парною. |
| 4) Функція, графік якої зображено на рис. 4. | Г має три нулі. |
| | Д має дві точки локального екстремуму. |

Правильна відповідь: 1-А, 2-Д, 3-Г, 4-В (ЗНО 2017, з. 21, ОС).

4. До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

Закінчення речення

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1) Графік функції $y = 1$ | А не перетинає вісь y . |
| 2) Графік функції $y = \cos x$ | Б є симетричним відносно початку координат. |
| 3) Графік функції $y = 4 - x^2$ | В має безліч спільних точок з віссю x . |
| 4) Графік функції $y = \log_3 x$ | Г немає спільних точок з віссю x . |
| | Д проходить через точку $(1; 3)$. |

Правильна відповідь: 1-Г, 2-В, 3-Д, 4-А (ЗНО 2019, з. 21, ОС).

5. До кожного початку речення (1-3) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

Закінчення речення

1) Функція $y = \sqrt{x - 4}$

А спадає на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

2) Функція $y = x + 4$

Б невизначена в точці $x=1$.

3) Функція $y = x^3$

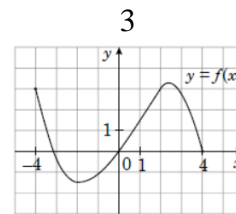
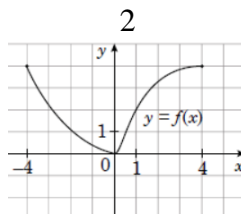
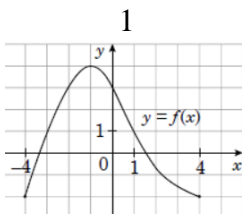
В є парною.

Г набуває додатного значення в точці $x = -3$.

Д є непарною.

Правильна відповідь: 1-Б, 2-Г, 3-Д (ЗНО 2020, з. 21, ОС).

6. Установіть відповідність між графіком (1-3) функції, визначеної на проміжку $[-4; 4]$, та її властивість (А-Д).



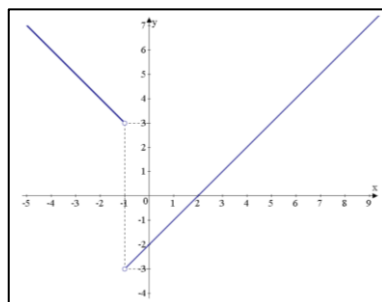
А	Б	В	Г	Д
Функція є непарною.	Найменше значення функції на проміжку $[1; 3]$ дорівнює 2.	Функція є парною.	Графік функції не має спільних точок із графіком рівняння $(x - 3)^3 + (y - 4)^2 = 4$	Графік функції тричі перетинає пряму $y = 1$.

Правильна відповідь: 1-Г, 2-Б, 3-Д (ЗНО 2021, з. 17, ОС).

3) Завдання з відкритою відповіддю.

1. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - x - 2}{|x + 1|}$. Користуючись графіком, визначте область значень цієї функції.

Правильна відповідь:



Область значень: $E(y) = (-3; +\infty)$ (ЗНО 2016, з. 31, ОС).

2. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{1}{\sqrt{56-4x}}$. У відповіді запишіть найбільше ціле двоцифрове число, що належить області визначення цієї функції.

Правильна відповідь: 13 (ЗНО 2017, з. 27, ОС).

4) Завдання, які потребують логічного обґрунтування виконаних дій.

1. Задано функції $f(x) = x^3$ і $g(x) = 4|x|$

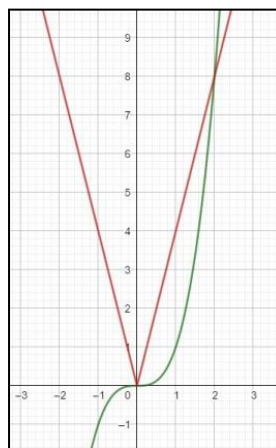
1) Побудуйте графік функції f .

2) Побудуйте графік функції g .

3) Визначте абсциси точок перетину графіків функцій f і g .

4) Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій f і g .

Правильна відповідь:



Абсциси точок перетину: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

$$S = \int_0^2 (4x - x^3) dx = \left(2x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 4 \quad (\text{ЗНО 2018, з. 31, ОС}).$$

2. Задано функції $f(x) = \frac{2}{x}$ і $g(x) = 5 - 8x$

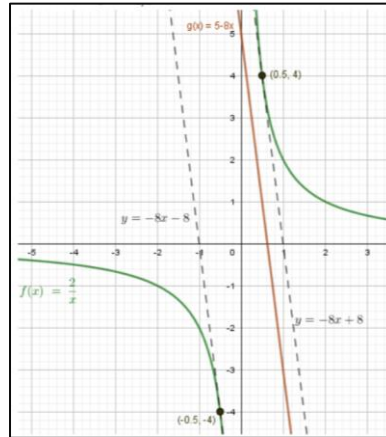
1) Побудуйте графік функції f .

2) Побудуйте графік функції g .

3) Знайдіть похідну функції f .

4) До графіка функції f проведено дотичні, паралельні графіку функції g . Визначте абсциси точок дотику.

Правильна відповідь:



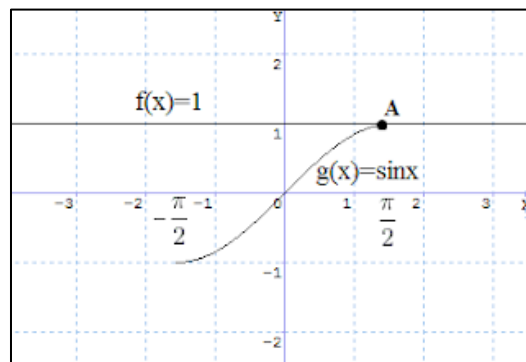
$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$$

Абсциси точок перетину: $x_0 = \pm \frac{1}{2}$ (ЗНО 2019, з. 31, ОС).

3. Задано функції $f(x) = 1$ і $g(x) = \sin x$. Завдання (1-3) виконайте на одному рисунку.

- 1) Побудуйте графік функції f .
- 2) Побудуйте графік функції g на проміжку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
- 3) Позначте на рисунку точку, що є спільною для обох побудованих графіків функцій f і g , і запишіть її координати.
- 4) Знайдіть множину всіх коренів рівняння $f(x) = g(x)$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

Правильна відповідь:



A $(\frac{\pi}{2}; 1)$ – точка перетину графіків.

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ (ЗНО 2020, з. 33, ОС).

Проаналізувавши за рівнями складності задачі, з досліджуваної теми, які зустрічаються у зовнішньому незалежному оцінюванні з математики в період 2016-2021 роки основної сесії, представимо дані у вигляді таблиці 2.2. Підкреслення років, відповідно однаковими лініями, свідчить про те, що різні функції зустрічалися в одному і тому ж самому завданні цього року.

Таблиця 2.2.

Результати дослідження

	1) тестові завдання	2) завдання на відповідність	3) завдання з відкритою відповіддю	4) завдання, які потребують логічного обґрунтування виконаних дій
Лінійна функція	2016, 2017	2018		
Квадратична функція	2016, 2017			
Дробово-лінійна функція	2018		2016	
Тригонометричні функції	2018			
Показникова функція	2020			
Степенева функція	2019		2017	
Завдання на загальні властивості функцій	2018, 2019, 2019, 2020	2017, 2021		
Серед яких зустрічаються:				
Лінійна функція	2020	2020		2019, 2020
Квадратична функція		2019		
Дробово-лінійна функція				2019
Тригонометричні функції		2019		2020
Степенева функція		2020		2018
Логарифмічна функція		2016, 2019		

Можемо зробити висновок, що в ЗНО з математики 2016-2021 роках на тему «Функції» з 24-х завдань найчастіше пропонують тестову форму, при чому на всі її види (переважно трапляється лінійна і квадратична функції); достатня кількість завдань на відповідність; рідше зустрічаються 3-го й 4-го типів. Завдання на загальні властивості функцій та лінійну функцію (окрім 2021-го року) фігурують в усіх роках ЗНО, показникова функція зустрічається один раз у 2020 році. За останні 5 років, ЗНО основної сесії 2021-го року має лише одне завдання з досліджуваної теми, а от 2019-го й 2020-го років найбільше.

2.2. Методика узагальнення та систематизації знань учнів про функцію та її властивості в умовах підготовки до ЗНО.

2.2.1. Методика представлення основних понять і фактів про функції в курсі алгебри в узагальненій формі.

Темі «Функції» приділяється досить довгий період вивчення: в основній і старшій школах. Теоретичний матеріал даної теми висвітлений в широкому спектрі науково-методичної літератури, а саме: підручники [20, 21, 47, 48, 49, 50, 51, 54, 55, 67]; дидактичні матеріали [1, 53]; навчально-методичні посібники [9, 23, 29, 46, 52, 63, 64, 70, 71], які можна використовувати на етапі підготовки матеріалу узагальнюючого повторення. В результаті, на основі цих джерел, розробили: узагальнюючі таблиці, опорні конспекти в яких представлені основні поняття й факти для організації процесу узагальнення і систематизації знань учнів на етапі підготовки до ЗНО.

Опорні конспекти

Опорний конспект 1. Функція. Що потрібно знати? Вступ [47].

Означення (числової) функції.

Нехай задано дві числові множини X та Y , а також правило f , яке кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність єдиний елемент $y \in Y$. Тоді кажуть, що задано функцію $y = f(x)$. Змінну x при цьому називають аргументом (незалежною змінною), а змінну y – функцією (залежною змінною).

Множину X називають областю визначення функції $y = f(x)$ і позначають $D(f)$ або $D(y)$.

Множину Y називають множиною значень функції $y = f(x)$ і позначають $E(f)$ або $E(y)$.

Графіком функції $y = f(x)$ називають множину точок $(x; f(x))$ на координатній площині.

Опорний конспект 2. Властивості окремих видів функцій [1, 20, 21, 44, 47, 48, 49, 50, 51, 54, 55].

Лінійна функція

Лінійна функція: $y = kx + b$.

Графіком є пряма.

Геометричний зміст параметрів: b – ордината точки перетину з віссю Oy , $k = \operatorname{tg}\alpha$, де α – кут між прямою графіка і додатним напрямком осі абсцис.

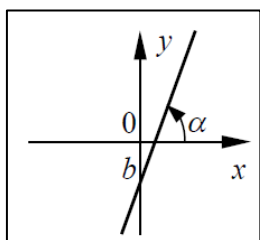


Рис. 2.1.

$$k > 0, b \neq 0$$

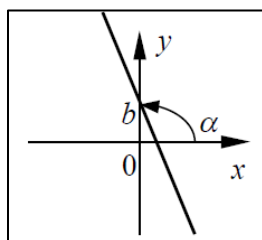


Рис. 2.2.

$$k < 0, b \neq 0$$

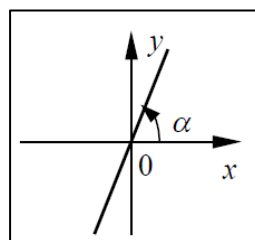


Рис. 2.3.

$$k > 0, b = 0$$

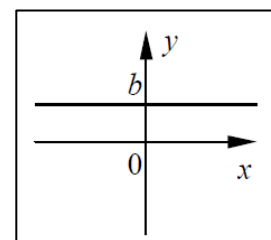


Рис. 2.4.

$$k = 0, b \neq 0$$

На рисунках 2.1.-2.4. зображено графіки лінійної функції для окремих значень k і b .

Властивості лінійної функції:

- 1) Область визначення: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Множина значень: $E(y) = (-\infty; +\infty)$ для $k \neq 0$ і $E(y) = \{b\}$ для $k = 0$.
- 3) Функція ні парна, ні непарна при $k \neq 0, b \neq 0$; непарна при $k \neq 0, b = 0$; парна при $k = 0, b \neq 0$; і парна, і непарна при $k = 0, b = 0$.
- 4) Функція неперіодична при $k \neq 0$. При $k = 0$ функція періодична, причому періодом є будь-яке дійсне число $T \neq 0$. Найменшого додатного періоду не існує.
- 5) Функція зростаюча на $D(y)$ при $k > 0$, спадна на $D(y)$ при $k < 0$, стала при $k = 0$.
- 6) Функція не має точок екстремумів.

Щоб побудувати графік лінійної функції, треба:

- 1) вибрати два довільних значення аргументу і знайти відповідні їм значення функції;

- 2) записати одержані пари чисел у вигляді $(x; y)$;
- 3) позначити на координатній площині дві точки, координатами яких є одержані пари чисел;
- 4) через позначені точки провести пряму.

Частковий випадок: пряма пропорційність.

Функція $y = kx$ при $k \neq 0$ називається прямою пропорційністю, k – кутовий коефіцієнт. Ця функція є окремим випадком лінійної функції $y = kx + b$, при $b = 0$.

Графіком є пряма, яка проходить через початок координат.

Властивості:

1) Якщо $k > 0$ (рис. 2.5.), то графік функції $y = kx$ розташований у I і III координатних кутах (чвертях).

Характерна точка $(0; 0)$.

2) Якщо $k < 0$ (рис. 2.6.), то графік функції $y = kx$ розташований у II і IV координатних кутах (чвертях).

Характерна точка $(0; 0)$.

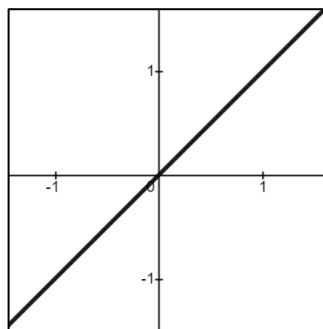


Рис. 2.5. Графік функції $y = kx$
при $k > 0$.

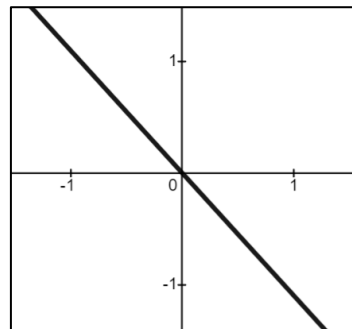


Рис. 2.6. Графік функції $y = kx$
при $k < 0$.

Функція $y = \frac{k}{x}$ (Обернена пропорційність)

Оберненою пропорційністю називається функція, яку можна задати формулою $y = \frac{k}{x}$, де k – число, що не дорівнює нулю. Число k називається коефіцієнтом пропорційності.

Графіком є крива, яка називається гіперболою. Гіпербола складається з двох окремих частин, симетричних відносно початку координат, і проходить через точки $(1; k)$ та $(-1; -k)$ (рис. 2.7, 2.8).

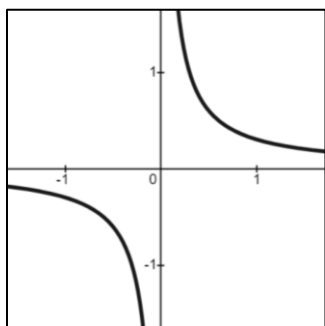


Рис. 2.7. Графік функції $y = \frac{k}{x}$
при $k > 0$.

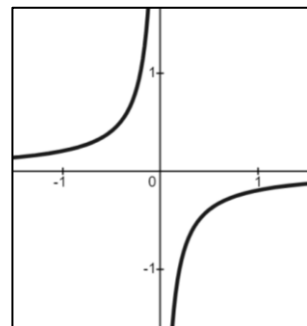


Рис. 2.8. Графік функції $y = \frac{k}{x}$
при $k < 0$.

Властивості функції $y = \frac{k}{x}$:

- 1) Область визначення: x – будь-яке число, крім нуля ($x \neq 0$).
- 2) Область значень: y – будь-яке число, крім нуля ($y \neq 0$).
- 3) При $k > 0$ графік функції розташований у I та III координатних чвертях.

Якщо $k > 0$, то $x > 0$ відповідає $y > 0$; $x < 0$ відповідає $y < 0$.

- 4) При $k < 0$ графік функції розташований у II та IV координатних чвертях.

Якщо $k < 0$, то $x > 0$ відповідає $y < 0$; $x < 0$ відповідає $y > 0$.

- 5) При $k > 0$ функція спадна, при $k < 0$ – зростаюча.
- 6) Функція непарна, графік симетричний відносно початку координат.

Частковий випадок: дробово-лінійна функція.

Дробово-лінійна функція: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, де $c \neq 0$.

Щоб побудувати графік дробово-лінійної функції, треба: виділити цілу частину (тобто записати у вигляді $y = m + \frac{k}{x-n}$) і виконати паралельне перенесення графіка $y = \frac{k}{x}$ (вздовж осі Ox на n одиниць і вздовж осі Oy на m одиниць).

Квадратична функція

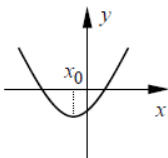
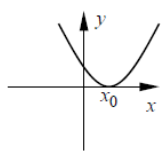
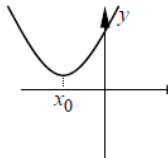
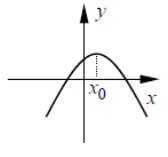
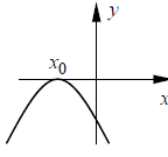
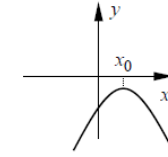
Квадратична функція: $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

Графіком є парабола.

Геометричний зміст параметрів: c – ордината точки перетину з віссю Oy ; a і b визначають координати вершини параболи – точки $(x_0; y_0)$, де $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ або $y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$; параметр a визначає напрям віток параболи – при $a > 0$ вітки напрямлені вгору, при $a < 0$ – вниз (таблиця 2.3.).

Таблиця 2.3.

Графіки квадратичної функції для окремих значень параметрів

	$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

На малюнках зображено графіки квадратичної функції для окремих значень параметрів.

Властивості квадратичної функції:

- 1) Область визначення: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Множина значень: $E(y) = [y_0; +\infty]$ для $a > 0$ і $E(y) = (-\infty; y_0]$ для $a < 0$.
- 3) Функція ні парна, ні непарна при $b \neq 0$; парна при $b = 0$.
- 4) Функція неперіодична.
- 5) При $a > 0$ функція спадна на $(-\infty; x_0)$ і зростаюча на $(x_0; +\infty)$; при $a < 0$ функція зростаюча на $(-\infty; x_0)$ і спадна на $(x_0; +\infty)$.
- 6) При $a > 0$ точка x_0 є точкою мінімуму, при $a < 0$ точка x_0 є точкою максимуму.

Щоб побудувати графік функції $y = ax^2 + bx + c$, треба:

- 1) визначити напрям віток параболи: якщо $a > 0$, то вітки напрямлені вгору; якщо $a < 0$, то вітки напрямлені вниз;
- 2) знайти координати вершини параболи $(m; n)$, де $m = -\frac{b}{2a}$,
 $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ або $n = y(m) = am^2 + bm + c$;
- 3) провести вісь симетрії – пряму $x = m$;
- 4) знайти точки перетину графіка функції з осями координат: з віссю Oy : $x = 0, y = c$; з віссю Ox : $y=0$; x – корінь рівняння $y = ax^2 + bx + c$;
- 5) знайти кілька точок, через які проходить графік;
- 6) позначити одержані точки на координатній площині й через них провести параболу.

Степенева функція

Степенева функція $y = x^\alpha$ (α – деяке дійсне число).

Найпоширеніші види степеневих функцій (в залежності від значення α):

1. $\alpha = n \in \mathbb{N}, n > 1$, тобто $y = x^n$.

Графіком є параболу двох видів (рис. 2.9., 2.10.):

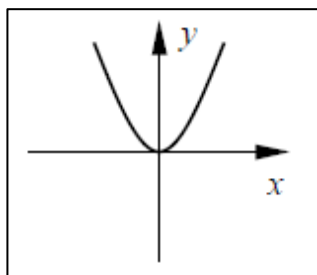


Рис. 2.9. n – парне число

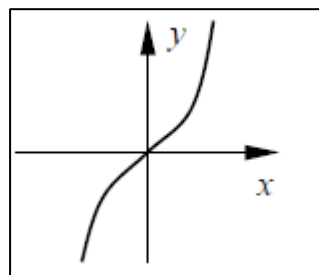


Рис. 2.10. n – непарне число

Властивості:

- 1) Область визначення: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Множина значень: $E(y) = [0; +\infty)$ при парному n і
 $E(y) = (-\infty; +\infty)$ при непарному n .
- 3) Функція парна при парному n і непарна при непарному n .
- 4) Функція неперіодична.

5) При парному n функція спадна на $(-\infty; 0)$ і зростаюча на $(0; +\infty)$; при непарному n функція зростаюча на $(-\infty; +\infty)$.

6) При парному n точка $x_0 = 0$ є точкою мінімуму, при непарному n екстремумів не має.

2. $\alpha = -n, n \in N$, тобто $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

Графіком є гіперболи двох видів (рис. 2.11., 2.12.):

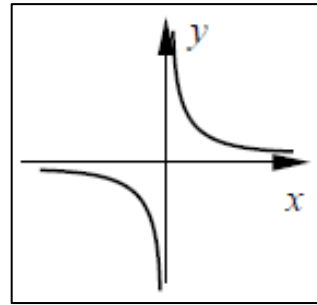
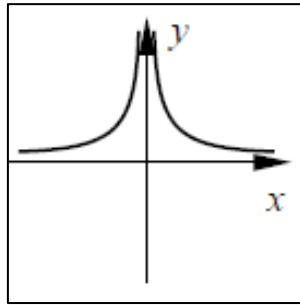


Рис. 2.11. n – парне число Рис. 2.12. n – непарне число

Властивості:

1) Область визначення: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) Множина значень: $E(y) = (0; +\infty)$ при парному n і

$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ при непарному n .

3) Функція парна при парному n і непарна при непарному n .

4) Функція неперіодична.

5) При парному n функція зростаюча на $(-\infty; 0)$ і спадна на $(0; +\infty)$; при непарному n функція спадна на $(-\infty; 0)$ і на $(0; +\infty)$.

6) Функція точок екстремумів не має.

3. $\alpha = \frac{1}{n}, n \in N, n > 1$.

Графіком є параболи або частини параболів (рис. 2.13., 2.14.):

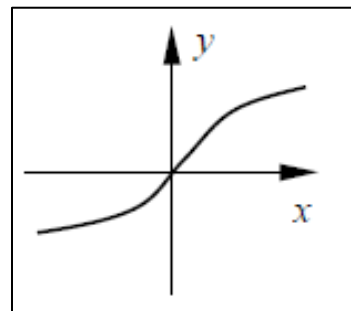
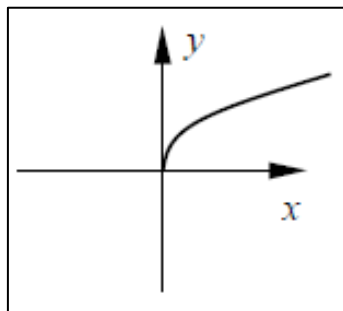


Рис. 2.13. n – парне число

Рис. 2.14. n – непарне число

Властивості:

- 1) Область визначення: $D(y) = [0; +\infty)$ при парному n і $D(y) = (-\infty; +\infty)$ при непарному n .
- 2) Множина значень: $E(y) = [0; +\infty)$ при парному n і $E(y) = (-\infty; +\infty)$ при непарному n .
- 3) Функція ні парна, ні непарна при парному n і непарна при непарному n .
- 4) Функція неперіодична.
- 5) При парному n функція зростаюча на $(0; +\infty)$, при непарному n функція зростаюча на $(-\infty; +\infty)$.
- 6) Функція точок екстремумів не має.

Розглянемо далі окремі випадки степеневі функції.

Функція $y = \sqrt{x}$ (рис. 2.15.)

Властивості:

- 1) $D(y) = [0; +\infty)$.
- 2) $E(y) = [0; +\infty)$.
- 3) Якщо $x = 0, y = 0$, точка $(0;0)$ – точка перетину графіка з осями координат.
- 4) Функція ні парна, ні непарна.
- 5) Функція зростаюча.

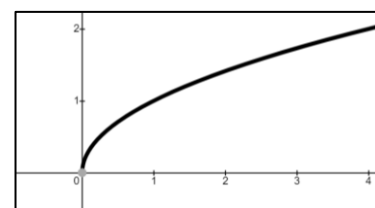


Рис. 2.15. Графік функції

$$y = \sqrt{x}$$

Кубічна функція $y = x^3$ (рис. 2.16.)

Властивості:

- 1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 3) Якщо $x = 0$, то $y = 0$, точка $(0;0)$ – точка перетину графіка з осями координат.
- 4) Функція непарна, графік симетричний відносно початку координат.
- 5) Функція зростаюча.

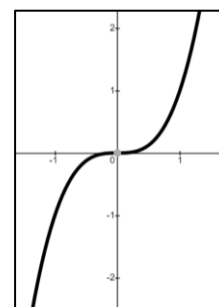


Рис. 2.16. Графік функції

$$y = x^3$$

Функція $y = x^2$ (рис. 2.17.)

Властивості:

- 1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) $E(y) = [0; +\infty)$.
- 3) Якщо $x = 0$, то $y = 0$. Точка $(0; 0)$ – вершина параболи.
- 4) Функція парна. Графік симетричний відносно осі Oy .
- 5) При $x \in (-\infty; 0]$ функція спадає, при $x \in [0; +\infty)$ – зростає.

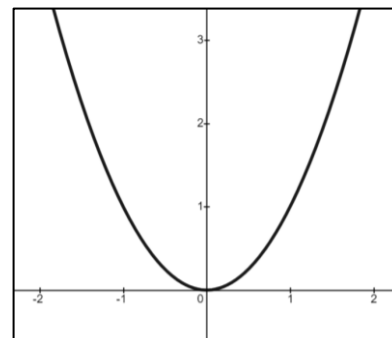


Рис. 2.17. Графік функції $y = x^2$

Тригонометричні функції

Функція $y = \sin x$

Графіком є синусоїда (рис. 2.18.).

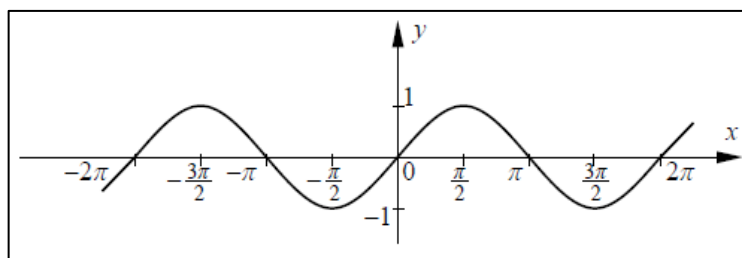


Рис. 2.18. Графік функції $y = \sin x$

Властивості:

- 1) Область визначення: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Множина значень: $E(y) = [-1; 1]$.
- 3) Функція непарна: $\sin(-x) = -\sin x$.
- 4) Функція періодична, найменший додатний період $T = 2\pi$.
- 5) Функція зростає на проміжках $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in Z$, спадає на проміжках $(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in Z$.
- 6) Точки мінімуму: $x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $f(x_{min}) = -1$, точки максимуму: $x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $f(x_{max}) = 1$.

Функція $y = \cos x$

Графіком є косинусоїда (рис. 2.19.).

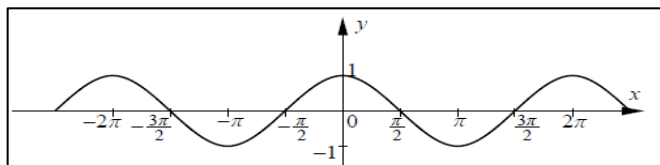


Рис. 2.19. Графік функції $y = \cos x$

Властивості:

- 1) Область визначення: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Множина значень: $E(y) = [-1; 1]$.
- 3) Функція парна: $\cos(-x) = \cos(x)$.
- 4) Функція періодична, найменший додатний період $T = 2\pi$.
- 5) Функція зростає на проміжках $(-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in Z$, спадає на проміжках $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$.
- 6) Точки мінімуму: $x_{min} = \pi + 2\pi n$, $f(x_{min}) = -1$, точки максимуму: $x_{max} = 2\pi n$, $f(x_{max}) = 1$.

Функція $y = \operatorname{tg} x$

Графіком є тангенсоїда (рис. 2.20.).

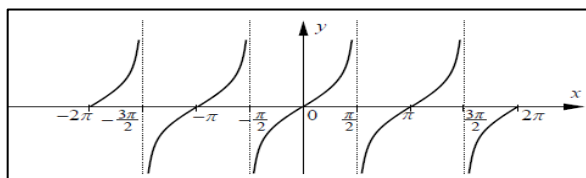


Рис. 2.20. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$

Властивості:

- 1) Область визначення: $D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$.
- 2) Множина значень: $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 3) Функція непарна: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.
- 4) Функція періодична, найменший додатний період $T = \pi$.
- 5) Функція зростає на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$.
- 6) Функція не має точок екстремуму.
- 7) Прямі $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ є вертикальними асимптотами.

Функція $y = ctgx$

Графіком є котангенсоїда (рис. 2.21.).

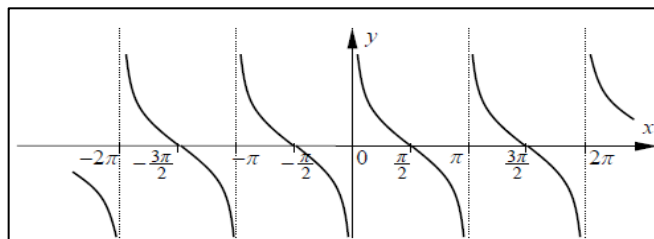


Рис. 2.21. Графік функції $y = ctgx$

Властивості:

- 1) Область визначення: $D(y) = (\pi n; \pi + \pi n), n \in Z$.
- 2) Множина значень: $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 3) Функція непарна: $ctg(-x) = -ctgx$.
- 4) Функція періодична, найменший додатний період $T = \pi$.
- 5) Функція спадає на кожному з проміжків $(\pi n; \pi + \pi n), n \in Z$.
- 6) Функція не має точок екстремуму.
- 7) Прямі $x = \pi n, n \in Z$ є вертикальними асимптотами.

Показникова функція $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

Графіком є експонента (рис. 2.22., 2.23.).

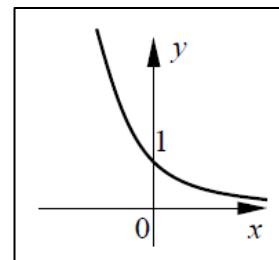
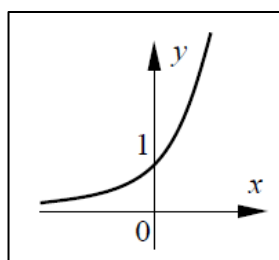


Рис. 2.22. Графік функції при $a > 1$ Рис. 2.23. Графік функції при $0 < a < 1$

Властивості:

- 1) Область визначення: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Множина значень: $E(y) = (0; +\infty)$.
- 3) Функція ні парна ні непарна.
- 4) Функція неперіодична.
- 5) При $a > 1$ функція зростає на R , при $0 < a < 1$ функція спадає на R .
- 6) Функція не має точок екстремуму.

Логарифмічна функція $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

Графіком є експонента (рис. 2.24., 2.25.).

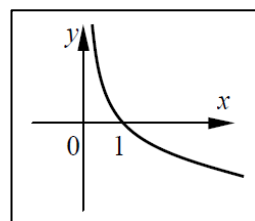
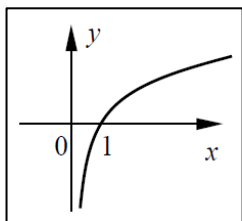


Рис. 2.24. Графік функції при $a > 1$ Рис. 2.25. Графік функції при $0 < a < 1$

Властивості:

- 1) Область визначення: $D(y) = (0; +\infty)$.
- 2) Множина значень: $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 3) Функція ні парна ні непарна.
- 4) Функція неперіодична.
- 5) При $a > 1$ функція зростає на R , при $0 < a < 1$ функція спадає на R .
- 6) Функція не має точок екстремуму.

Логарифмічна функція $g(x) = \log_a x$ є оберненою до показникової функції $f(x) = a^x$ на $(-\infty; +\infty)$, бо $f(g(x)) = a^{\log_a x} = x$ і, навпаки показникова функція $f(x) = a^x$ є оберненою до логарифмічної функції $g(x) = \log_a x$, бо $g(f(x)) = \log_a a^x = x$.

Опорні конспекти у вигляді таблиць й схем

Основні властивості функції представлені у таблицях 2.4.-2.8. [1, 23, 29, 46, 53, 70, 71].

Таблиця 2.4.

Парні і непарні функції

Парна функція	Непарна функція
Означення. Функція f називається парною , якщо її область визначення симетрична відносно початку координат і для будь-якого x з її області визначення $f(-x) = f(x)$	Означення. Функція f називається непарною , якщо її область визначення симетрична відносно початку координат і для будь-якого x з її області визначення $f(-x) = -f(x)$
Властивість	Властивість
Графік парної функції симетричний відносно осі Oy	Графік непарної функції симетричний відносно початку координат
Існують функції, які є: парними; непарними; ні парними, ні непарними; і парними, і непарними.	

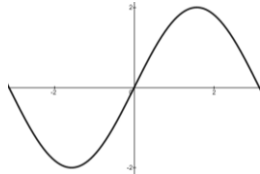
Таблиця 2.5.

Періодичні функції

Означення. Функція f називається періодичною з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x з області визначення числа $x + T$ і $x - T$ також входять до області визначення і $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$	
Властивості	
1	Якщо число T - період функції f , то число $k \times T$ ($k \in \mathbb{N}$) також періодом цієї функції.
2	Якщо функція $y = f(x)$ періодична з періодом T , то функція $y = Af(kx + b)$ також є періодичною і її період дорівнює $\frac{T}{ k }$ (A, k, b - постійні числа і $k \neq 0$).
3	Якщо функція $y = f(x)$ періодична з періодом T , то складена функція (функція від функції) $y = \varphi(f(x))$ є також періодичною з періодом T (хоч, можливо, цей період і не є найменшим за абсолютною величиною).
4	Для побудови графіка періодичної функції з періодом T ($T > 0$) досить побудувати графік на відрізку довжиною T , а далі - паралельно перенести цей графік уздовж осі Ox на відстань nT ($n \in \mathbb{N}$) ліворуч і праворуч.

Таблиця 2.6.

Проміжки знакосталості функції

Означення. Проміжками знакосталості функції називають проміжки області визначення, на яких функція набуває або тільки додатних значень, або тільки від'ємних.	
Наприклад. Функція $y = f(x)$, графік якої зображено на рисунку, набуває додатних значень (тобто $f(x) > 0$) при $x \in (0; 3)$; набуває від'ємних значень (тобто $f(x) < 0$) при $x \in (-3; 0)$.	

Таблиця 2.7.

Зростаючі і спадні функції

Зростаюча функція		Спадна функція	
Означення. Функція f називається зростаючою на деякій множині P , якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає більше значення функції $f(x) - \text{зростає,}$ якщо для будь-яких $x_1 \in P, x_2 \in P$ $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$		Означення. Функція f називається спадною на деякій множині P , якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає менше значення функції $f(x) - \text{спадає,}$ якщо для будь-яких $x_1 \in P, x_2 \in P$ $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	
Властивості			
1	Якщо функція f зростає на деякій множині P , то більшому значенню функції відповідає <i>більше</i> значення аргументу з цієї множини $f(x) - \text{зростає (на } P);$ $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$	1	Якщо функція f спадає на деякій множині P , то більшому значенню функції відповідає <i>менше</i> значення аргументу з цієї множини $f(x) - \text{спадає (на } P);$ $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$

Продовж. таблиці 2.7.

2	Сума кількох зростаючих на даній множині функцій є зростаючою функцією на цій множині.	2	Сума кількох спадних на даній множині функцій є спадною функцією на цій множині.
3	Якщо функція f зростає, то обернена до неї функція також зростає.	3	Якщо функція f спадає, то обернена до неї функція також спадає.
Зростання і спадання деяких складених функцій (функцій від функцій)			
4	Якщо у складеній функції $y = f(u(x))$ функція $u = u(x)$ зростає і функція $y = f(u)$ зростає, то і функція $y = f(u(x))$ зростає. Коротше: композиція (тобто результат послідовного застосування) двох зростаючих функцій – зростаюча функція.	4	Якщо у складеній функції $y = f(u(x))$ функція $u = u(x)$ спадає і функція $y = f(u)$ спадає, то і функція $y = f(u(x))$ спадає. Коротше: композиція (тобто результат послідовного застосування) двох спадних функцій – спадна функція.
5	Композиція (тобто результат послідовного застосування) зростаючої і спадної функцій (або спадної і зростаючої) є функція спадна.		
6	Будь-яка зростаюча (або спадна) на заданій множині функція набуває кожного свого значення лише в одній точці з цієї множини $f(x)$ – зростаюча (або спадна) функція $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$		
Ознака зростання функції		Ознака спадання функції	
Якщо $f'(x) > 0$ в кожній точці інтервалу I , то функція f зростає на цьому інтервалі		Якщо $f'(x) < 0$ в кожній точці інтервалу I , то функція f спадає на цьому інтервалі	

Таблиця 2.8.

Точки екстремуму функції

Означення. Точки максимуму та мінімуму функції називають точками екстремуму функції	
Означення. Точку $x_0 \in D(f)$ називають точкою максимуму функції $y = f(x)$, якщо ця функція є зростаючою на проміжку $(x_0 - a; x_0)$ і спадною на проміжку $(x_0; x_0 + a)$ (a - деяке невелике додатне число)	Означення. Точку $x_0 \in D(f)$ називають точкою мінімуму функції $y = f(x)$, якщо ця функція є спадною на проміжку $(x_0 - a; x_0)$ і зростаючою на проміжку $(x_0; x_0 + a)$ (a - деяке невелике додатне число)

Алгоритми дій представлені у таблицях 2.9.-2.12. [1, 23, 29, 46, 53, 70, 71].

Таблиця 2.9.

Як знайти область визначення функції?

№	Вид функції	Обмеження ($f(x)$ і $g(x)$ існують!)	Формулювання
1	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$	Знаменник дроби не дорівнює нулю

Продовж. табл. 2.9.

2	$y = \sqrt[2k]{f(x)}$	$f(x) \geq 0$	Під знаком кореня парного степеня може стояти лише невід'ємний вираз
3	$y = \lg(f(x))$	$f(x) > 0$	Під знаком логарифма може стояти лише додатний вираз
4	$y = \log_{f(x)} a,$ ($a > 0$)	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$	В основі логарифма може стояти лише додатний вираз, що не дорівнює одиниці
5	$y = \operatorname{tg}(f(x))$	$f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ $k \in Z$	Під знаком тангенса може стояти лише вираз, що не дорівнює $\frac{\pi}{2} + \pi k$ (k – ціле)
6	$y = \operatorname{ctg}(f(x))$	$f(x) \neq \pi k$ $k \in Z$	Під знаком котангенса може стояти лише вираз, що не дорівнює πk (k – ціле)
7	$y = \arcsin(f(x))$	$ f(x) \leq 1$	Під знаком арксинуса і арккосинуса може стояти лише вираз, модуль якого менше або дорівнює одиниці
8	$y = \arccos(f(x))$		
9	$y = x^\alpha, \alpha \in R$		
	а)	α – натуральне	x – будь-яке
	б)	α – ціле від'ємне або нуль	$x \neq 0$
	в)	α – додатне не ціле число	$x \geq 0$
	г)	α – від'ємне не ціле число	$x > 0$

Таблиця 2.10.

Як знайти нулі функції?

Означення. Нулем функції називається значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю	
Щоб знайти нулі функції $y = f(x)$, треба:	
1	записати рівняння, ліва частина якого – функція, виражена через змінну x , а права частина – нуль (тобто рівняння $f(x) = 0$);
2	розв'язати записане рівняння. Знайдені корені рівняння – нулі даної функції. Якщо рівняння коренів не має, то дана функція нулів не має.

Таблиця 2.11.

Як дослідити функцію на монотонність?

Означення. Проміжки зростання чи спадання функції називають проміжками монотонності.	
Щоб дослідити функцію на монотонність, треба:	
1	вибрати з області визначення будь-які два значення x_1 і x_2 , такі, що $x_2 > x_1$;
2	скласти різницю $f(x_2) - f(x_1)$, з'ясувати (якщо це можливо), чи буде вона додатною (від'ємною), і, користуючись означенням числової нерівності, переконатися, що $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$).

Таблиця 2.12.

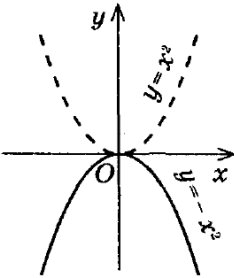
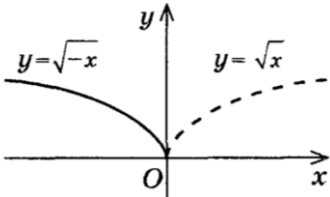
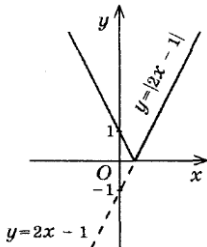
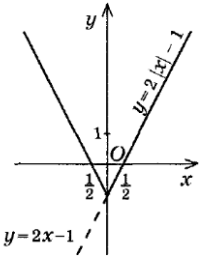
Як дослідити функцію на парність чи непарність?

Щоб дослідити функцію на парність чи непарність, треба:	
1	знайти область визначення функції $y = f(x)$ та переконатися, що вона симетрична відносно нуля;
2	перевірити виконання умови $f(-x) = f(x)$ або $f(-x) = -f(x)$.

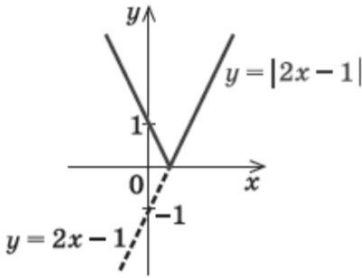
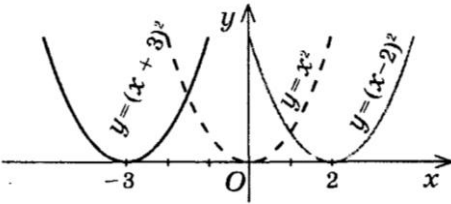
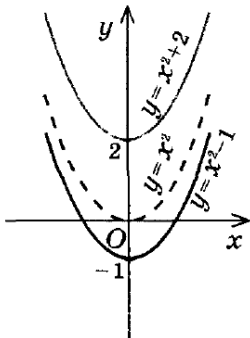
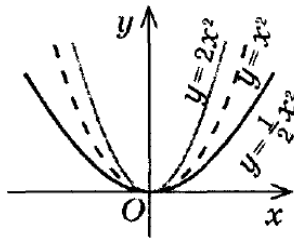
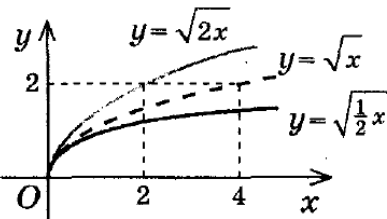
Правила перетворень графіків функцій представлені у таблиці 2.13. [53, с. 41].

Таблиця 2.13.

Елементарні перетворення графіка функції $y = f(x)$

№	Формула залежності	Приклад	Перетворення
1	$y = -f(x)$		Симетрія відносно осі Ox
2	$y = f(-x)$		Симетрія відносно осі Oy
3	$y = f(x) $		Вище від осі Ox (і на самій осі) – без зміни, нижче від осі Ox – симетрія відносно осі Ox
4	$y = f(x)$		Праворуч від осі Oy (і на самій осі) – без зміни і ця ж сама частина – симетрія відносно осі Oy

Продовж. таблиці 2.13.

5	$ y = f(x)$		Вище від осі Ox (і на самій осі) – без зміни і ця ж сама частина - симетрія відносно осі Ox
6	$y = f(x - a)$		Паралельне перенесення вздовж осі Ox на a одиниць
7	$y = f(x) + c$		Паралельне перенесення вздовж осі Oy на c одиниць
8	$y = kf(x)$ ($k > 0$)		Той самий вигляд, що й графіка $y = f(x)$, тільки розтягнуто або стиснено вздовж осі Oy (при $k > 1$ розтягнуто, при $0 < k < 1$ стиснено)
9	$y = f(\alpha x)$ ($\alpha > 0$)		Той самий вигляд, що й графіка $y = f(x)$, тільки розтягнуто або стиснено вздовж осі Ox (при $\alpha > 1$ стиснено, при $0 < \alpha < 1$ розтягнуто)

Послідовність виконання перетворень: спочатку слід виконати всі симетрії, потім – стиски, а лише після них – паралельні перенесення. Паралельні перенесення вздовж обох осей можна виконувати одночасно.

Для функцій, що містять знак модуля, питання про послідовність виконання перетворень вирішується для кожної функції окремо.

2.2.2. Метод проектів.

Проект на тему: «У світі чарівних функцій»

Опис проекту: Під час роботи над проектом, учні повинні не тільки навчитися збирати первинну інформацію, а й удосконалювати та поглиблювати свої знання із теми «Функції». Виявляти зв'язок математики з іншими науками. Відкривати для себе багато нового, цікавого захоплюючого з історії математики. Навчатися критично мислити, розмірковувати, робити висновки, приймати самостійні рішення.

Ключове запитання: Чи важливе вивчення функцій?

Завдання: Під час виконання проекту клас ділиться на чотири групи. Учні першої групи «Історики» – вивчають історію виникнення функції; учні другої групи «Теоретики» – розшукують різні способи задання функції та її властивості; учні третьої групи «Практики» – розглядають питання побудови графіків функції та застосування їх до розв'язування вправ; учні четвертої групи «Лірики» – шукають вірші про функцію. Кожна група має представити свій результат роботи з використанням ІКТ на власний вибір (презентації, малюнки, графіки, відеоролики, Web-сайт і т.д.).

Проект на тему: «Як графіки людям допомагають?»

Опис проекту: Під час роботи над проектом учні активно повинні використовувати ІКТ: інтернет, тестування, анкетування та опитування за допомогою чатів та миттєвих повідомлень, збір інформації по темі «Функції» з інтернет джерел. На проміжному етапі роботи над проектом використовується метод взаємооцінювання, тестування, метою яких є контроль процесу виконання та виявлення періоду необхідності надання консультації.

Ключове запитання: Як можна застосувати математику у повсякденному житті?

Завдання: Під час виконання проекту клас ділиться на чотири групи. Учні першої групи «Фізики та астрономи» – досліджують, де графіки функції зустрічаються у фізиці та астрономії; різні фізичні явища та космічні тіла, їх

рух, де саме тут є графік функції або як його можна продемонструвати. Учні другої групи «Природознавці» – досліджують, а де ж графіки функції можуть показати себе у природі, в деревах, горах, або навіть можливо і в архітектурі. В третій групі «Медики» – учні повинні показати всім, як же графіки функції можуть продемонструвати нам стан нашого здоров'я, на яких приладах їх можна побачити, що саме вони трактують. А от учні четвертої групи «Математики» демонструють основні математичні питання, що стосуються графіків функцій для того, аби дослідники ще раз переконалися в тому, що теорію знають на відмінно. Кожна група має представити свій результат роботи з використанням ІКТ на власний вибір (презентації, малюнки, графіки, відеоролики, Web-сайт і т.д.) [8].

Проект на тему: «Лініфокус»

Опис проекту: Метою проекту є не лише поглиблення знань учнів про функції та про лінійну функцію зокрема, але й спонукання учнів до пошукової та дослідницької діяльності. Робота над проектом розвиває уміння працювати в мережі Інтернет з різними джерелами інформації, формування навичок обробки та систематизації інформації, уміння працювати з презентаціями, сайтами, блогами.

Ключове запитання: Як математика допоможе зрозуміти навколишній світ?

Завдання: Під час виконання проекту клас ділиться на три групи. Учні першої групи «Біологи» – досліджують де в біології використовують лінійну функцію, або де в біології за допомогою лінійних функцій демонструють закономірності в природі, і також повинні будуть навести приклад розв'язку задачі практичного змісту. Учні другої групи «Кримінологи» – досліджують інформацію про застосування лінійної функції в інших навчальних предметах та повинні будуть розв'язати задачу. Учні третьої групи «Домовики» – досліджують інформацію про використання лінійної функції у побуті, користь лінійних функцій у нашому житті. Кожна група має представити свій

результат роботи з використанням ІКТ на власний вибір (презентації, малюнки, графіки, відеоролики, Web-сайт і т.д.) [19].

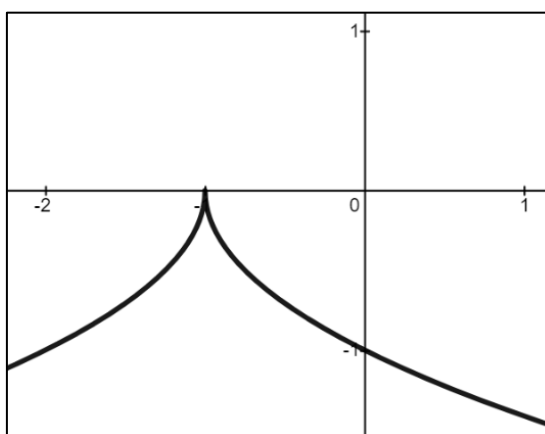
2.2.3. Системи вправ на повторення основних фактів.

На основі аналізу джерел [1, 18, 20, 21, 39, 40, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 54, 55, 67] розроблено систему вправ на повторення основних правил з теми «Функції», якою зручно користуватися під час підготовки до ЗНО, адже вона поділена на такі види завдань, які зустрічаються в бланках екзамену, а саме: тестові завдання та різного рівня складності (на відповідність їй з відкритими відповідями).

Робота із тестовими завданнями

Завдання на загальні властивості функції

1. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?



А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt{ x + 1}$	$y = \sqrt{ x - 1}$	$y = -\sqrt{ x + 1 }$	$y = -\sqrt{ x + 1}$	$y = -\sqrt{x + 1}$

Правильна відповідь: В.

2. У результаті яких послідовних перетворень із графіка функції $y = f(x)$ можна отримати графік функції $y = f(2x + 6)$?

А	Б	В	Г	Д
стиском до осі y удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 6 одиниць	розтягом від осі y удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 6 одиниць	стиском до осі y удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 3 одиниці	стиском до осі y удвічі й паралельним перенесенням праворуч на 3 одиниці	розтягом від осі y удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 3 одиниці

Правильна відповідь: В.

3. Серед запропонованих функцій вказати непарну.

А	Б	В	Г	Д
$y = x \sin x$	$y = x + \sin x$	$y = x^4$	$y = x^3 + 1$	$y = \frac{x^5 + x}{x}$

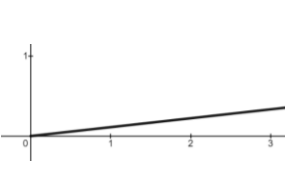
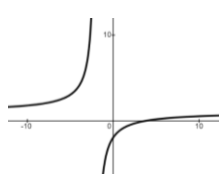
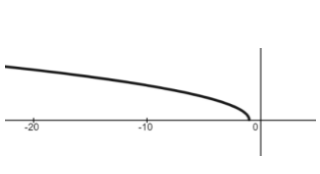
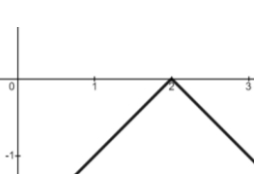
Правильна відповідь: Б.

4. Яка з запропонованих функцій є зростаючою на множині дійсних чисел?

А	Б	В	Г	Д
$y = -2x + 7$	$y = -7x + 2$	$y = 2$	$y = 2x - 7$	$y = -\frac{1}{7}x + \frac{1}{2}$

Правильна відповідь: Г.

5. Установити відповідність між функціями (1-4) та їх графіками (А-Д).

1	2	3	4
$y = \frac{x-4}{x+2}$	$y = 3^{\frac{1}{\log_x 3} - 2}$	$y = \sqrt{-1-x}$	$y = - x-2 $
А	Б	В	Г
			

Правильна відповідь: 1-Б, 2-А, 3-В, 4-Г.

Завдання на лінійну функцію

6. Графіком функції є пряма лінія, паралельна осі абсцис, що проходить через точку $(-2; 3)$. Задати функцію формулою.

А	Б	В	Г	Д
$y = 3$	$y = -2$	$x = -2$	$x = 3$	$y = -2x + 3$

Правильна відповідь: А.

7. Пряму пропорційність задано формулою $y = \frac{5}{6}x$. При якому значенні аргументу значення функції дорівнює 30?

А	Б	В	Г	Д
0	36	-36	30	25

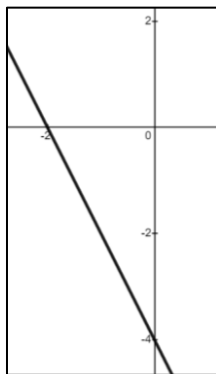
Правильна відповідь: Б.

8. Знайти координати точок перетину графіка функції $y = 1,5x + 6$ з осями координат.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 6); (4; 0)$	$(0; 6)$	$(6; 0); (0; -4)$	$(0; 6); (-4; 0)$	$(0; 4); (0; -6)$

Правильна відповідь: Г.

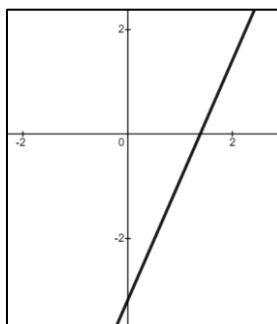
9. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?



А	Б	В	Г	Д
$y = -2x + 4$	$y = 2x - 4$	$y = 2x + 4$	$y = -2x - 4$	$y = -4x - 4$

Правильна відповідь: Г.

10. За ескізом графіка $y = ax + b$ вказати знаки параметрів a і b .



А	Б	В	Г	Д
$a > 0, b > 0$	$a > 0, b < 0$	$a < 0, b > 0$	$a < 0, b < 0$	$a > 0, b = 0$

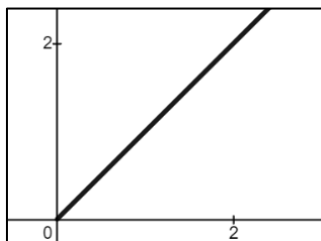
Правильна відповідь: Б.

11. Вказати функцію, обернену до функції $y = 4x - 1$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{x+1}{4}$	$y = \frac{1}{4x-1}$	$y = \frac{x}{4} + 1$	$y = 4x + 1$	$y = -4x + 1$

Правильна відповідь: А.

12. Графік якої з наведених функцій зображено на рисунку?

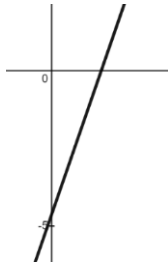
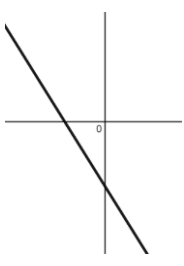
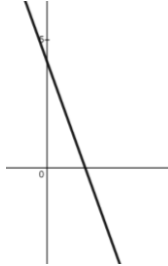
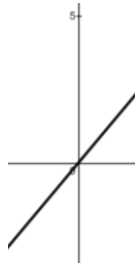
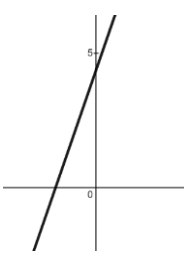


А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{x^2}{x}$	$y = \sqrt{x^2}$	$y = 10^{\lg x}$	$y = (\sqrt{x})^2$	$y = x $

Правильна відповідь: В.

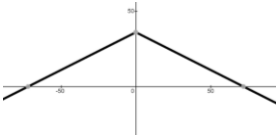
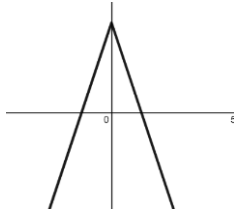

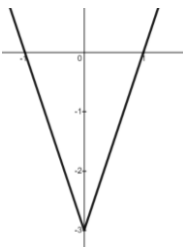
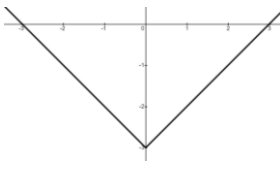
13. Дано лінійну функцію $y = ax + b$. Установити відповідність між знаками коефіцієнтів a й b (1-4) та ескізами графіків (А-Д).

1	2	3	4
$a > 0, b > 0$	$a > 0, b < 0$	$a < 0, b > 0$	$a < 0, b < 0$

А	Б	В	Г	Д
				

Правильна відповідь: 1-Д, 2-А, 3-В, 4-Б.

14. На якому з рисунків зображено графік функції $y = |x| - 3$?

А	Б	В	Г	Д
				

Правильна відповідь: Д.

Завдання на квадратичну функцію

15. Знайти множину значень функції $y = -x^2 + 4x - 5$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1]$	$(-\infty; -1]$	$[1; +\infty)$	$(-\infty; 5]$	$[-5; +\infty)$

Правильна відповідь: Б.

16. Вказати найменше значення функції $y = 3x^2 - 4$.

А	Б	В	Г	Д
3	-4	4	0	1

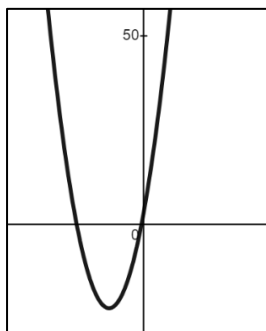
Правильна відповідь: Б.

17. Обчислити відстань від початку координат до вершини параболу $y = -x^2 + 10x - 13$.

А	Б	В	Г	Д
5	13	12	17	10

Правильна відповідь: Б.

18. За ескізом графіка функції $y=ax^2 + bx + c$ знайти значення параметрів a , b і c .



А	Б	В	Г	Д
$a>0, b>0, c>0$	$a>0, b>0, c<0$	$a>0, b<0, c<0$	$a>0, b<0, c>0$	$a<0, b<0, c<0$

Правильна відповідь: А.

19. За яких значень a парабола $y = 9x^2 - 12x + 35a$ має з віссю абсцис дві точки перетину?

А	Б	В	Г	Д
$a = \frac{4}{35}$	$a < \frac{4}{35}$	$a > \frac{4}{35}$	$a < \frac{18}{35}$	$a < \frac{16}{35}$

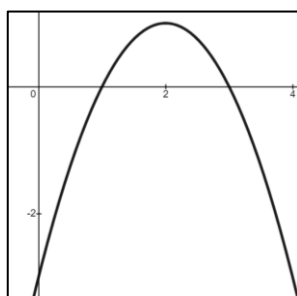
Правильна відповідь: Б.

20. Вказати функцію, обернену до функції $y = x^2 - 2, x \in [0; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{x^2 - 2}$	$y = \sqrt{x} - 2$	$y = \sqrt{x} + 2$	$y = -\sqrt{x + 2}$	$y = \sqrt{x + 2}$

Правильна відповідь: Д.

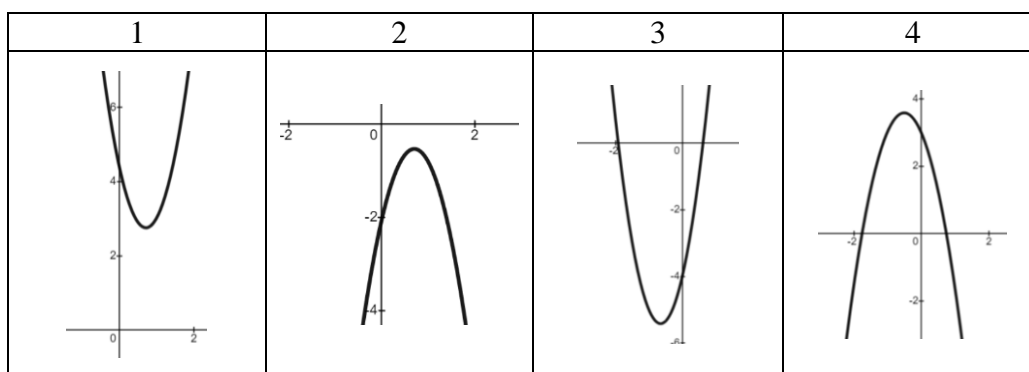
21. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?



А	Б	В	Г	Д
$y = (x + 2)^2 + 1$	$y = -(x - 2)^2 + 1$	$y = -(x - 2)^2 - 1$	$y = (-x - 2)^2 + 1$	$y = -(x - 2)^2 - 1$

Правильна відповідь: Б.

22. Дано квадратичну функцію $y=ax^2 + bx + c$. Установити відповідність між ескізами графіків функцій (1-4) та знаками коефіцієнтів a , b і c (А-Д).



А	Б	В	Г	Д
$a > 0, b > 0, c > 0$	$a > 0, b > 0, c < 0$	$a > 0, b < 0, c > 0$	$a < 0, b < 0, c > 0$	$a < 0, b > 0, c < 0$

Правильна відповідь: 1-В, 2-Д, 3-Б, 4-Г.

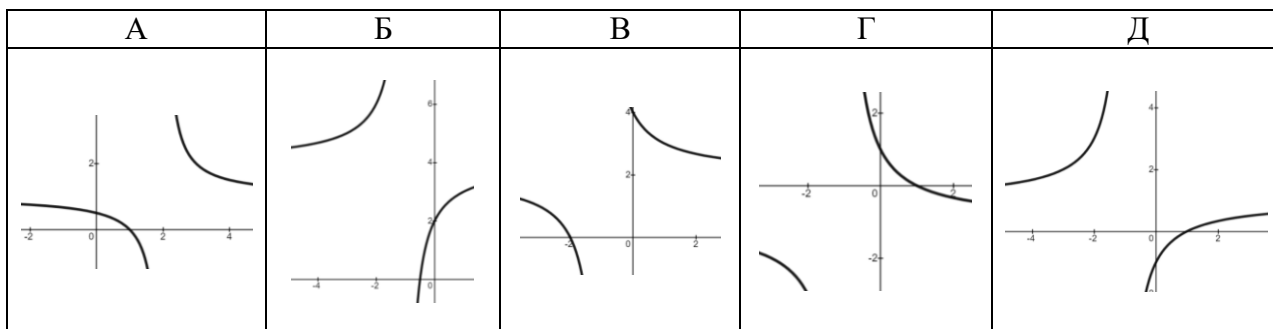
23. Знайти нулі функції: $y = x^2 + 2x - 3$.

А	Б	В	Г	Д
-1; 3	1; -3	1	-3	функція не має нулів

Правильна відповідь: Б.

Завдання на дробово-лінійну функцію

24. На якому з рисунків зображено графік функції $y = \frac{x-1}{x-2}$?



Правильна відповідь: А.

25. Знайти функцію, обернену до функції $y = \frac{2x-1}{6x-7}$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{7x-1}{6x-2}$	$y = \frac{6x-2}{7x-1}$	$y = \frac{6x-1}{7x-2}$	$y = \frac{7x-2}{6x-1}$	$y = \frac{7x-2}{6x-2}$

Правильна відповідь: А.

26. Дано функцію $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Знайти $f(x+1)$.

А	Б	В	Г	Д
$f(x+1) = \frac{x}{x+2}$	$f(x+1) = \frac{2}{1+x}$	$f(x+1) = -\frac{x}{x+2}$	$f(x+1) = \frac{1+x}{1-x}$	$f(x+1) = -\frac{2}{1+x}$

Правильна відповідь: В.

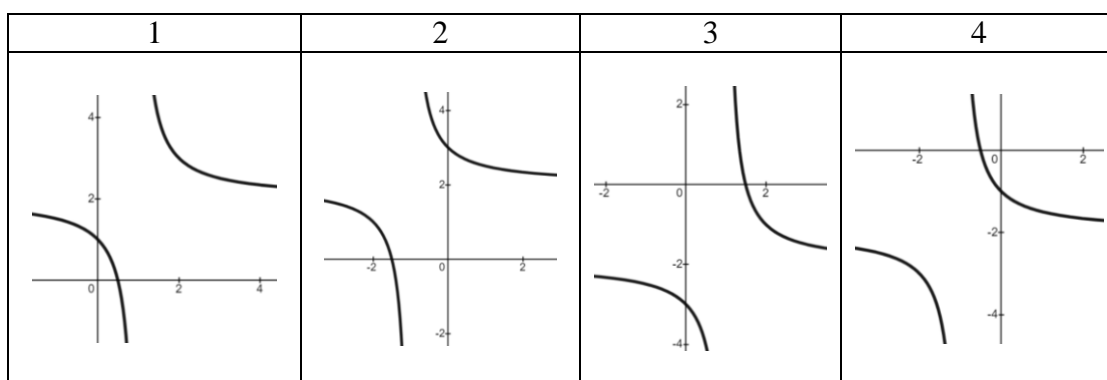
Завдання на обернено пропорційну функцію

27. Вказати формулу функції, графік якої отримують із графіка $y = \frac{1}{x}$ у результаті його паралельного перенесення в додатному напрямі осі y на 5 одиниць.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{x+5}$	$y = \frac{1}{x-5}$	$y = \frac{1}{x} - 5$	$y = \frac{1}{x} + 5$	$y = \frac{5}{x}$

Правильна відповідь: Г.

28. Установити відповідність між графіками функцій (1-4), утворених із графіка функції $y = \frac{1}{x}$, та їх формулами (А-Д).



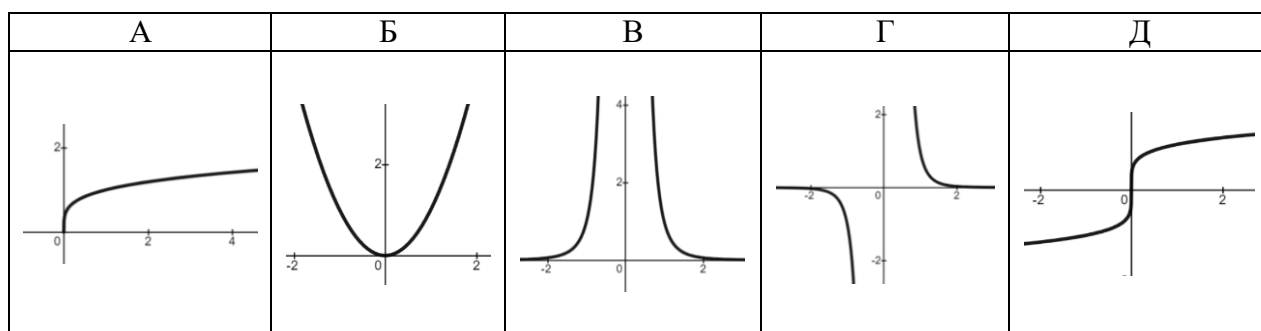
А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{x+1} + 2$	$y = \frac{1}{x-1} - 2$	$y = \frac{1}{x-1} + 2$	$y = \frac{1}{x-2} + 1$	$y = \frac{1}{x+1} - 2$

Правильна відповідь: 1-В, 2-А, 3-Б, 4-Д.

Завдання на степеневу функцію

29. Установити відповідність між функціями (1-4) та ескізами їх графіків (А-Д).

1	2	3	4
$y = \sqrt[5]{x}$	$y = \frac{1}{x^5}$	$y = \frac{1}{x^4}$	$y = \sqrt[4]{x}$



Правильна відповідь: 1-Д, 2-Г, 3-В, 4-А.

30. Вказати формулу функції, графік якої отримують із графіка функції $y = x^3$ у результаті його паралельного перенесення в додатному напрямі осі x на 4 одиниці.

А	Б	В	Г	Д
$y = (x - 4)^3$	$y = (x + 4)^3$	$y = x^3 - 4$	$y = x^3 + 4$	$y = 4x^3$

Правильна відповідь: А.

31. Вказати область визначення функції $y = \sqrt{\sin x} + \sin \sqrt{x}$.

А	Б	В
$[2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in \mathbb{N}$	$[\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k], k \in \mathbb{Z}$	$[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$

Правильна відповідь: А.

32. Знайти множину значень функції $y = -2 \cos x + 5$.

А	Б	В	Г	Д
$[-1; 1]$	$[2; 5]$	$[-2; -5]$	$[3; 7]$	\mathbb{R}

Правильна відповідь: Г.

33. Вказати функцію, в якій основний період дорівнює π .

А	Б	В	Г	Д
$y = \sin(x + \pi)$	$y = \cos(2x + 1)$	$y = \tan(3x + \pi)$	$y = \cot(4x + \pi)$	$y = \pi$

Правильна відповідь: Б.

34. Знайти основний період функції $y = \cos^2 6x$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2\pi}{3}$	3π	$\frac{\pi}{3}$	6π	$\frac{\pi}{6}$

Правильна відповідь: Д.

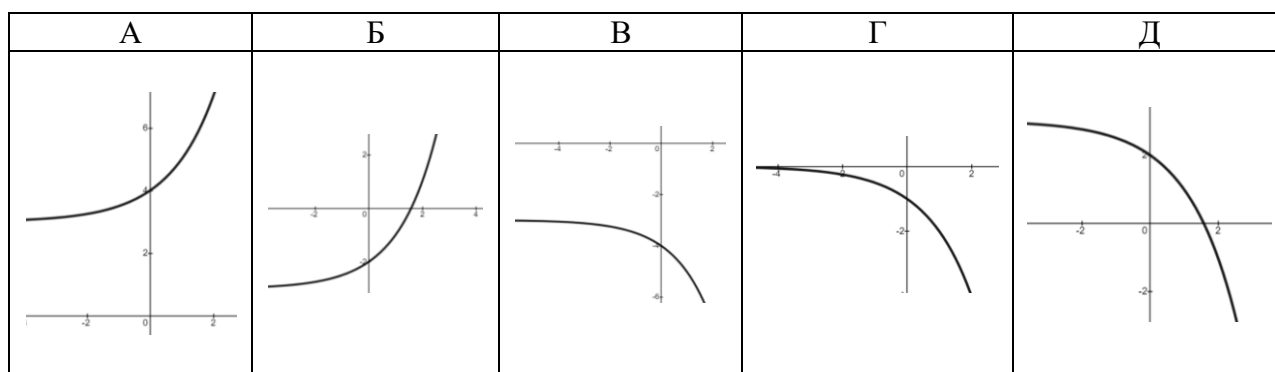
35. Вказати формулу функції, графік якої отримують із графіка $y = \cos x$ у результаті його стискування до осі x утричі.

А	Б	В	Г	Д
$y = 3 \cos x$	$y = \frac{1}{3} \cos x$	$y = \cos 3x$	$y = \cos \frac{x}{3}$	$y = \frac{1}{3} \cos \frac{x}{3}$

Правильна відповідь: Б.

Завдання на показникову функцію

36. На якому з рисунків зображено графік функції $y = -2^x$?



Правильна відповідь: Г.

37. Знайти множину значень функції $y = 5^{\sin x}$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; +\infty)$	R	$[-5; 5]$	$[\frac{1}{5}; 5]$	$[-1; 1]$

Правильна відповідь: Г.

38. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{5^{2x-3} - 1}$.

А	Б	В	Г	Д
$(1,5; +\infty)$	$[2; +\infty)$	$[1,5; +\infty)$	$[5; +\infty)$	$[3; +\infty)$

Правильна відповідь: В.

39. Знайти найменше значення функції $y = 7^{\cos x + 1} - 3$.

А	Б	В	Г	Д
-7	-3	-2	-1	0

Правильна відповідь: В.

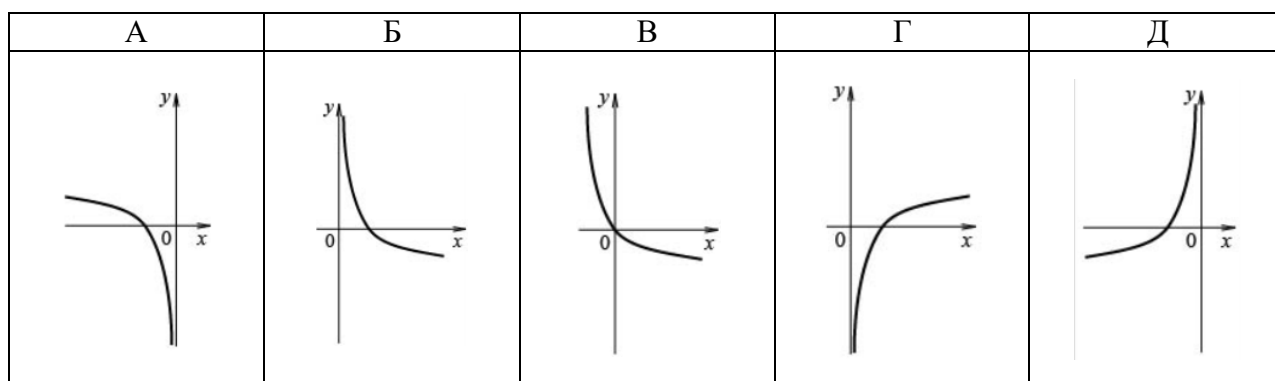
Завдання на логарифмічну функцію

40. Укажіть область визначення функції $y = \log_3 x + 9$.

А	Б	В	Г	Д
$(9; +\infty)$	$(-9; +\infty)$	$(-9; 0)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$

Правильна відповідь: Б.

41. На одному з рисунків зображений ескіз графіка функції $y = -\log_4 x$. Укажіть цей рисунок.



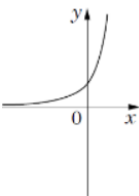
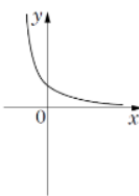
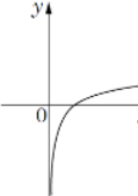
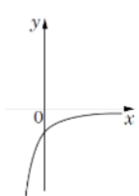
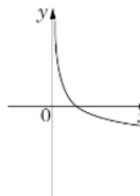
Правильна відповідь: Б.

42. Обчисліть значення функції $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 7)$ у точці $x_0 = 4$.

А	Б	В	Г	Д
-1	-2	2	3	0,5

Правильна відповідь: Б.

43. Укажіть ескіз графіка функції $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

А	Б	В	Г	Д
				

Правильна відповідь: Д.

Розв'язування задач різного рівня складності (на відповідність, та з відкритими відповідями)

Завдання на загальні властивості функції

1. Задано функцію $y = f(x)$ з множиною значень $[-2; 5]$. Установити відповідність між функціями (1-4) та їхніми множинами значень (А-Д).

- | | |
|-------------------|--------------|
| 1) $y = f(x) + 2$ | А $[0; 5]$ |
| 2) $y = -f(x)$ | Б $[-4; 10]$ |
| 3) $y = 2f(x)$ | В $[2; 5]$ |
| 4) $y = f(x) $ | Г $[0; 7]$ |
| | Д $[-5; 2]$ |

Правильна відповідь: 1-Г, 2-Д, 3-Б, 4-А.

2. Установити відповідність між функціями (1-4) та оберненими до них функціями (А-Д).

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| 1) $y = 3x$ | А $y = \frac{3}{x}$ |
| 2) $y = \frac{3}{x}$ | Б $y = -\frac{3}{x}$ |
| 3) $y = -3x$ | В $y = -3x$ |
| 4) $y = -\frac{x}{3}$ | Г $y = \frac{x}{3}$ |
| | Д $y = -\frac{x}{3}$ |

Правильна відповідь: 1-Г, 2-А, 3-Д, 4-В.

3. Установити відповідність між функціями (1-4) та їх парністю (А-Д).

- | | |
|-----------------------|--------------------------------|
| 1) $y = 0$ | А на парність не досліджується |
| 2) $y = x^3 + \tan x$ | Б парна |
| 3) $y = x^4 - \sin x$ | В непарна |
| 4) $y = x^5 \sin x$ | Г ні парна, ні непарна |
| | Д парна і непарна |

Правильна відповідь: 1-Д, 2-В, 3-Г, 4-Б.

Завдання на квадратичну функцію

4. Установити відповідність між функціями (1-4) та проміжками їх зростання (А-Д).

- | | |
|---------------------|-------------------|
| 1) $y = x^2 - 3$ | А $(-\infty; 0]$ |
| 2) $y = (x - 3)^2$ | Б $[0; +\infty)$ |
| 3) $y = -x^2 + 3$ | В $(-\infty; -3]$ |
| 4) $y = -(x + 3)^2$ | Г $[-3; +\infty)$ |
| | Д $[3; +\infty)$ |

Правильна відповідь: 1-Б, 2-Д, 3-А, 4-В.

Завдання на дробово-лінійну функцію

5. Установити відповідність між функціями (1-4) та оберненими до них функціями (А-Д).

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| 1) $y = \frac{2x-3}{x+4}$ | А $y = \frac{2-3x}{2x-1}$ |
| 2) $y = \frac{x+2}{2x+3}$ | Б $y = \frac{2x+1}{3x-2}$ |
| 3) $y = \frac{2x+1}{3x-2}$ | В $y = \frac{-4x-3}{x-2}$ |
| 4) $y = \frac{x-1}{x+2}$ | Г $y = \frac{4x+1}{2x-3}$ |
| | Д $y = \frac{2x+1}{1-x}$ |

Правильна відповідь: 1-В, 2-А, 3-Б, 4-Д.

6. Установити відповідність між функціями (1-4) та їхніми множинами значень (А-Д).

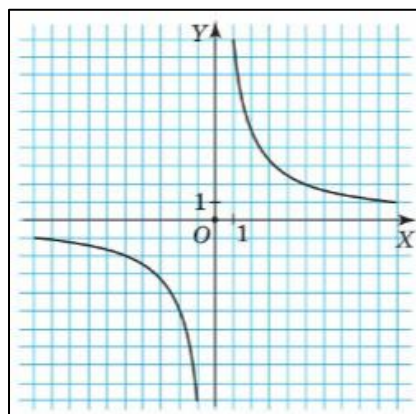
- | | |
|----------------------------|---|
| 1) $y = \frac{x+3}{x-5}$ | A $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$ |
| 2) $y = \frac{1-x}{2+x}$ | Б $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ |
| 3) $y = 3x - \frac{1}{4x}$ | В $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ |
| 4) $y = x + \frac{1}{2x}$ | Г $(-\infty; +\infty)$ |
| | Д $(-3; 3)$ |

Правильна відповідь: 1-В, 2-Б, 3-Г, 4-А.

Завдання на обернено пропорційну функцію

7. На малюнку зображено графік функції $y = \frac{k}{x}$. Скориставшись графіком, знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = -1; 2; -5; 10$;
- 2) значення x , якщо $y = 10; 5; -2$;
- 3) за яких значень аргументу значення функції додатні;
- 4) за яких значень аргументу значення функції від'ємні;
- 5) значення аргументу, за яких функція зростає;
- 6) значення аргументу, за яких функція спадає;
- 7) коефіцієнт k .



8. Дано функцію:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| 1) $y = \frac{1}{x}$; | 5) $y = \frac{0,01}{x}$; |
| 2) $y = -\frac{13}{x}$; | 6) $y = -\frac{1}{9x}$; |
| 3) $y = \frac{0,5}{x}$; | 7) $y = \frac{3}{7x}$; |
| 4) $y = \frac{5}{4x}$; | 8) $y = \frac{1}{0,1x}$. |

Знайдіть:

- 1) область визначення функції;
- 2) область значень функції;
- 3) коефіцієнт k ;
- 4) значення y , якщо $x = -1; 1; 10$;
- 5) значення x , якщо $y = 1; -1; -2$;
- 6) за яких значень аргументу значення функції додатні;
- 7) за яких значень аргументу значення функції від'ємні;
- 8) значення аргументу, за яких функція зростає;
- 9) значення аргументу, за яких функція спадає.

3. Знайдіть значення k , якщо графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через

точку:

- | | |
|--------------|----------------|
| 1) A (-1;1); | 3) C (-4; -5); |
| 2) B (3;7); | 4) D (7; 2). |

9. Чи правильно, що функція $y = \frac{k}{x}$ зростає, якщо:

- | | |
|----------------|------------------|
| 1) $k = 2$; | 5) $k = 0,9$; |
| 2) $k = -7$; | 6) $k = 1,6$; |
| 3) $k = 15$; | 7) $k = -42$; |
| 4) $k = -11$; | 8) $k = -0,25$? |

Завдання на степеневу функцію

10. Чи правильно, що графік функції $y = \sqrt{x}$ проходить через точку:

- 1) A(16; 4); 2) B(1; 1); 3) C(2,25; -1,5); 4) D(-4; 2)?

Правильна відповідь: 1) Так; 2) Так; 3) Ні; 4) Ні.

11. Чи перетинає графік функції $y = \sqrt{x}$ пряма:

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| 1) $x = 4$; | 3) $x = 49$; | 5) $y = -4$; |
| 2) $x = -9$; | 4) $y = 1$; | 6) $y = 3$? |

Правильна відповідь: 1) Так; 2) Ні; 3) Так; 4) Так; 5) Ні; 6) Так.

12. Установити відповідність між функціями (1-4) та їхніми найменшими додатними періодами (А-Д).

- | | |
|---|--------|
| 1) $y = \sin(2\pi x - 0,5) + \pi$ | А 0,75 |
| 2) $y = \cos(4\pi x - \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{2}$ | Б 0,5 |
| 3) $y = \tan 4\pi x - \pi$ | В 0,25 |
| 4) $y = \cot(2 - \frac{5\pi}{3}) + 8$ | Г 1 |
| | Д 0,6 |

Правильна відповідь: 1-Г, 2-Б, 3-В, 4-Д.

13. Установити відповідність між функціями (1-4) та їх найменшими додатними періодами (А-Д).

- | | |
|---------------------------|-------------------|
| 1) $y = \tan \frac{x}{2}$ | А $\frac{\pi}{4}$ |
| 2) $y = \cot 2x$ | Б $\frac{\pi}{2}$ |
| 3) $y = \cos \frac{x}{2}$ | В π |
| 4) $y = \sin 2x$ | Г 2π |
| | Д 4π |

Правильна відповідь: 1-Г, 2-Б, 3-Д, 4-В.

14. Установити відповідність між геометричними перетвореннями графіка функції $y = \sin x$ (1-4) та функціями, одержаних у результаті цих перетворень (А-Д).

- | | |
|---|----------------------------|
| 1) Графік функції $y = \sin x$ паралельно перенесли вздовж осі x на 3 одиниці ліворуч | А $y = \sin 3x$ |
| 2) Графік функції $y = \sin x$ паралельно перенесли вздовж осі y на 3 одиниці вниз | Б $y = \frac{1}{3} \sin x$ |
| 3) Графік функції $y = \sin x$ стиснули до осі x утричі | В $y = \sin(x - 3)$ |
| 4) Графік функції $y = \sin x$ стиснули до осі y утричі | Г $y = \sin(x + 3)$ |
| | Д $y = \sin x - 3$ |

Правильна відповідь: 1-Г, 2-Д, 3-Б, 4-А.

2.2.4. Уроки узагальнення та систематизації знань і умінь учнів з теми «Функція».

Конспект уроку на тему: «Тригонометричні функції їх графіки і властивості»

Тема уроку. Тригонометричні функції їх графіки і властивості.

Мета уроку:

- *навчальна:* узагальнити й систематизувати знання учнів з вивченої теми; удосконалити вміння використовувати властивості тригонометричних функцій; визначати парність і непарність; досліджувати функції на монотонність; будувати графіки аналітично та в системі динамічної математики GeoGebra, проходити тест в сервісі Quizizz;
- *розвивальна:* розвивати просторову уяву, увагу, логічне мислення, пам'ять учнів, формувати вміння виділяти головне в досліджуваному матеріалі;
- *виховна:* виховувати в учнів точність, акуратність при побудові графіків тригонометричних функцій, стимулювати пізнавальну активність учнів, усвідомлення важливості математики, як універсальної мови науки, уміння оперувати числовою інтерпретацією.

Тип уроку: узагальнення й систематизація знань, умінь, навичок.

Обладнання до уроку: індивідуальні картки з задачами, 4 смартфони, ноутбук.

Дидактичне забезпечення: підручник Алгебра і початки аналізу (профільний рівень), 10 клас [50].

Програмне забезпечення: система динамічної математики GeoGebra, онлайн-сервіс Quizizz.

ХІД УРОКУ

I. Організація навчальної діяльності.

Вітання з учнями та перевірка присутніх.

II. Повідомлення теми та мети заняття.

Вчитель оголошує тему та мету заняття.

III. Мотивація навчальної діяльності.

Представлення керуючих підгруп і повідомлення завдань.

Напередодні уроку учні, щоб об'єднатися в групи, тягнуть зі скриньки картки певних кольорів (наприклад рожевого, білого, червоного, синього). На початку уроку групи розсідаються згідно з кольорами й функцією.

Рожевий: $y = \sin x$.

Білий: $y = \cos x$.

Червоний: $y = \operatorname{tg} x$.

Синій: $y = \operatorname{ctg} x$.

Група, яка перемаже, розв'язавши правильно найбільше завдань протягом уроку, отримає гарні оцінки.

IV. Узагальнення, систематизація й застосування набутих знань, вмінь і навичок.

Заслуховується звіт кожної підгрупи про властивості й графік відповідної функції представлений у вигляді узагальнюючих таблиць (наприклад: 2.14.-2.17.), які учні складають самостійно користуючись підручником (вчитель вносить рекомендації за потреби).

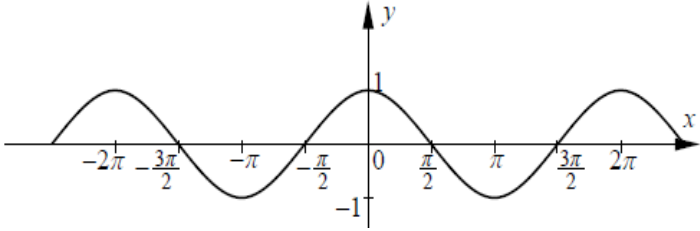
Таблиця 2.14.

Функція $y = \sin x$

Графіком є синусоїда.		
Властивості		
1.	Область визначення	$D(y) = (-\infty; +\infty)$
2.	Множина значень	$E(y) = [-1; 1]$
3.	Парність та непарність	Непарна: $\sin(-x) = -\sin x$.
4.	Періодичність	Періодична, найменший додатний період $T = 2\pi$.
5.	Зростання і спадання	Зростає на проміжках $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in Z$, спадає на проміжках $(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in Z$.
6.	Точки екстремуму	Точки мінімуму: $x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $f(x_{min}) = -1$, точки максимуму: $x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $f(x_{max}) = 1$.

Таблиця 2.15.

Функція $y = \cos x$

Графіком є косинусоїда.		
Властивості		
1.	Область визначення	$D(y) = (-\infty; +\infty)$
2.	Множина значень	$E(y) = [-1; 1]$
3.	Парність та непарність	Парна: $\cos(-x) = \cos(x)$.
4.	Періодичність	Періодична, найменший додатний період $T = 2\pi$.
5.	Зростання і спадання	Зростає на проміжках $(-\pi + 2\pi n; 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$, спадає на проміжках $(2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.
6.	Точки екстремуму	Точки мінімуму: $x_{\min} = \pi + 2\pi n, f(x_{\min}) = -1$, точки максимуму: $x_{\max} = 2\pi n, f(x_{\max}) = 1$.

Таблиця 2.16.

Функція $y = \operatorname{tg} x$

Графіком є тангенсоїда.		
Властивості		
1.	Область визначення	$D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$
2.	Множина значень	$E(y) = (-\infty; +\infty)$
3.	Парність та непарність	Непарна: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.
4.	Періодичність	Періодична, найменший додатний період $T = \pi$.
5.	Зростання і спадання	Зростає на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.
6.	Точки екстремуму	Не має точок екстремуму.
7.	Асимптоти	Прямі $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ є вертикальними асимптотами.

Таблиця 2.17.

Функція $y = ctgx$

Графіком є котангенсоїда.		
Властивості		
1.	Область визначення	$D(y) = (\pi n; \pi + \pi n), n \in Z$
2.	Множина значень	$E(y) = (-\infty; +\infty)$
3.	Парність та непарність	Непарна: $ctg(-x) = -ctgx$.
4.	Періодичність	Періодична, найменший додатний період $T = \pi$.
5.	Зростання і спадання	Спадає на кожному з проміжків $(\pi n; \pi + \pi n), n \in Z$.
6.	Точки екстремуму	Не має точок екстремуму.
7.	Асимптоти	Прямі $x = \pi n, n \in Z$ є вертикальними асимптотами.

Після звіту кожної підгрупи, члени іншої команди, в разі необхідності роблять доповнення до відповідей і виправляють помилки.

Наступний етап полягає у тому, що кожна підгрупа одержує індивідуальні картки й виконує завдання з детальним обґрунтуванням дій [20].

Група «Рожевих»

1. Знайти значення виразу: 1) $\sin 390^\circ$, 2) $\sin(-390^\circ)$.
2. Дослідити функцію на парність: $y = x \sin x$.
3. Чи проходить графік функції $y = \sin x$ через точку:
 - 1) $A(-\frac{\pi}{2}; -1)$, 2) $B(\frac{\pi}{2}; \frac{1}{2})$, 3) $C(\pi; -1)$, 4) $D(\frac{23\pi}{6}; -\frac{1}{2})$?
4. Порівняйте: 1) $\sin 20^\circ$ і $\sin 21^\circ$, 2) $\sin \frac{10\pi}{9}$ і $\sin \frac{25\pi}{18}$, 3) $\sin 2$ і $\sin 2,1$, 4) $\sin \frac{5\pi}{9}$ і $\sin \frac{17\pi}{18}$, 5) $\sin(-\frac{7\pi}{30})$ і $\sin(-\frac{3\pi}{10})$.
5. Розташуйте в порядку спадання: $\sin(-0,2)$, $\sin 0,2$, $\sin 1,5$, $\sin 1$, $\sin 0,9$.

6. Побудувати графік функції $y = \frac{1}{2} \sin(4x - 2)$ аналітично, а потім перевірити у системі динамічної математики GeoGebra (рис. 2.26.), вказати проміжки зростання й спадання цієї функції.

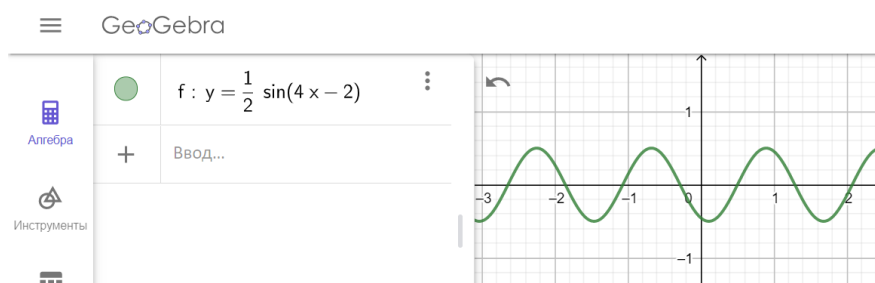


Рис. 2.26. Графік $y = \frac{1}{2} \sin(4x - 2)$ в GeoGebra

Група «Білих»

1. Знайти значення виразу: 1) $\cos 120^\circ$, 2) $\cos(-750^\circ)$.
2. Дослідити функцію на парність: $y = x + \cos x$.
3. Чи належить графіку функції $y = \cos x$ точка:
 - 1) $A(-\frac{\pi}{2}; -1)$, 2) $B(\frac{9\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2})$, 3) $C(-4\pi; -1)$, 4) $D(\frac{11\pi}{3}; \frac{1}{2})$?
4. Порівняйте: 1) $\cos 1,6\pi$ і $\cos 1,68\pi$, 2) $\cos 20^\circ$ і $\cos 21^\circ$,
3) $\cos \frac{10\pi}{9}$ і $\cos \frac{25\pi}{18}$, 4) $\cos 5,1$ і $\cos 5$, 5) $\cos \frac{\pi}{9}$ і $\cos \frac{4\pi}{9}$.
5. Розташуйте в порядку зростання: $\cos 3,5$, $\cos 4,8$, $\cos 6,1$, $\cos 5,6$, $\cos 4,2$.

6. Побудувати графік функції $y = 2 \cos(2x - 2)$ аналітично, а потім перевірити у системі динамічної математики GeoGebra (рис. 2.27.), вказати проміжки зростання й спадання цієї функції.

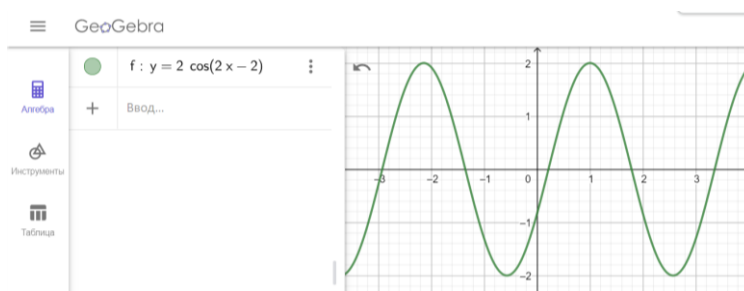


Рис. 2.27. Графік $y = 2 \cos(2x - 2)$ в GeoGebra

Група «Червоних»

1. Знайти значення виразу: 1) $\operatorname{tg}(-210^\circ)$, 2) $\operatorname{tg}780^\circ$.

2. Дослідити функцію на парність: $y = x - tgx$.
3. Чи проходить графік функції $y = tgx$ через точку:
- 1) $A(-\frac{\pi}{4}; 1)$, 2) $B(-\frac{\pi}{3}; -\sqrt{3})$, 3) $C(\pi; 0)$, 4) $D(\frac{7\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{3})$?
4. Порівняйте: 1) $tg(-38^\circ)$ і $tg(-42^\circ)$, 2) $tg \frac{2\pi}{5}$ і $tg \frac{7\pi}{15}$,
- 3) $tg130^\circ$ і $tg150^\circ$, 4) $tg 0,9\pi$ і $tg 1,2\pi$, 5) $tg 1$ і $tg 1,5$.
5. Розташуйте в порядку спадання: $tg 0,5$, $tg 1,2$, $tg(-0,4)$, $tg 0,9$.
6. Побудувати графік функції $y = tg2x - 2$ аналітично, а потім перевірити у системі динамічної математики GeoGebra (рис. 2.28.), вказати проміжки зростання й спадання цієї функції.

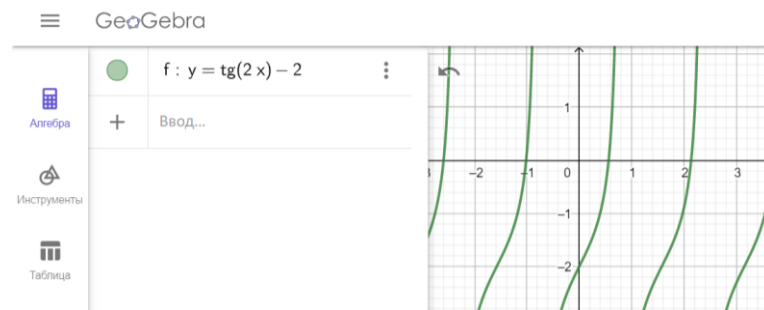


Рис. 2.28. Графік $y = tg2x - 2$ в GeoGebra

Група «Синіх»

1. Знайти значення виразу: 1) $ctg405^\circ$, 2) $ctg225^\circ$.
2. Дослідити функцію на парність: $y = x + ctg x$.
3. Чи належить графіку функції $y = ctg x$ точка:
- 1) $A(\frac{\pi}{4}; 1)$, 2) $B(\frac{3\pi}{2}; 0)$, 3) $C(-\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{3})$, 4) $D(\frac{4\pi}{3}; \sqrt{3})$?
4. Порівняйте: 1) $ctg 24^\circ$ і $ctg 28^\circ$, 2) $ctg \frac{\pi}{7}$ і $ctg \frac{3\pi}{7}$,
- 3) $ctg(-40^\circ)$ і $ctg(-60^\circ)$, 4) $ctg 0,4\pi$ і $ctg 1,4\pi$, 5) $ctg 2$ і $ctg 3$.
5. Розташуйте в порядку зростання: $ctg(-0,7)$, $ctg(-2,4)$, $ctg(-2,8)$, $ctg(-1,4)$.
6. Побудувати графік функції $y = ctg(2x + 2)$ аналітично, а потім перевірити у системі динамічної математики GeoGebra (рис. 2.29.), вказати проміжки зростання й спадання цієї функції.

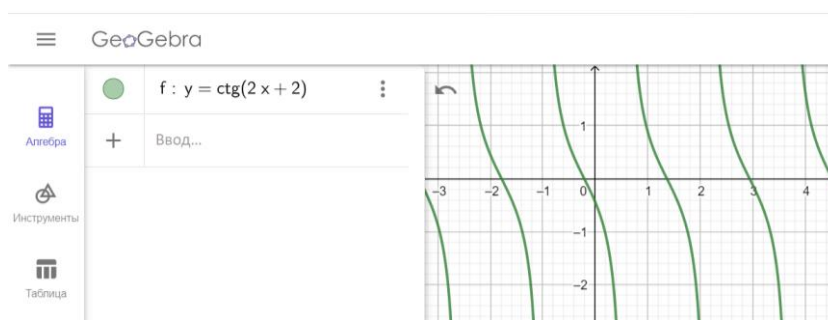


Рис. 2.29. Графік $y = ctg(2x + 2)$ в GeoGebra

Після перевірки відповідей, вчитель пропонує кожній групі відповісти на питання вікторини [11] з теми, використовуючи сервіс Quizizz. Він розпочинає її в реальному часі (рис. 2.30.) та скидає представнику кожної групи посилання, аби він зайшов зі свого смартфона та члени кожної групи обговоривши відповідь могли записати її. Представник команди при заходженні за посиланням, має підписатися, так як називається його команда (рис. 2.31.). Питання для команд:

1. Як перекласти з грецької мови слово «тригонометрія»? (Вимірювання трикутників)

2. Слово «тригонометрія» пропонували замінити на «гоніометрія» (вимірювання кутів). Чому? (Сучасна тригонометрія має справу з вимірюванням не трикутників, а кутів)

3. У давнину час визначали за сонячним годинником (рис. 2.32.). Вивчаючи залежність довжини тіні жердини від кута нахилу сонячних променів до земної поверхні, математики дійшли до введення двох нових тригонометричних функцій. Яких саме? (Тангенс і котангенс)

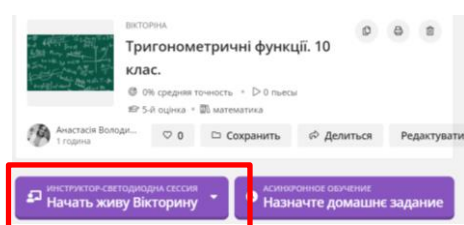


Рис. 2.30. Початок живої вікторини

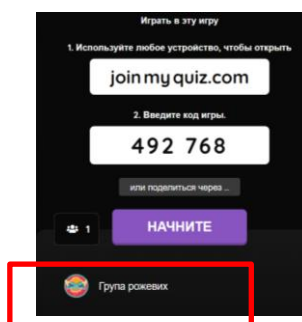


Рис. 2.31. Заходження учнів за посиланням

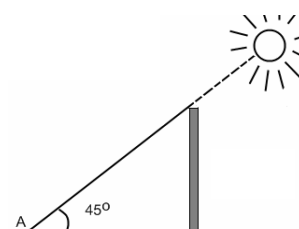


Рис. 2.32. Сонячний годинник

4. Як з латинської мови перекласти слова «синус», «косинус», «тангенс»? (Згин, кривизна; доповнення синуса; дотичний)

5. Яке слово в перекладі з латинської мови означає «діяльність, виконання»: а) функція, б) градус, в) радіан. (Правильний варіант а)

6. Кутом якої чверті є $\frac{3\pi}{2}$? ($\frac{3\pi}{2}$ не належить ні до якої чверті)

7. Який знак має добуток усіх основних тригонометричних функцій тупого кута: а) мінус, б) плюс. (Правильний варіант а)

8. Графік якої основної тригонометричної функції не перетинає вісь ординат: а) синусоїда, б) косинусоїда, в) тангенсоїда, г) котангенсоїда. (Правильний варіант г)

11. Наведіть приклад функції, яка і парна, і непарна; не зростаюча і не спадна; періодична, хоча і не має найменшого додатного періоду. ($y = 0$)

12. Рятуючись від 40 розбійників, графік функції $y = \cos x$ відбіг управо на 4π . У графік якої функції він перетвориться? ($y = \cos x - 4\pi$)

Коли учні завершили проходження тесту, вчитель автоматично бачить результати у себе на ноутбучі, але відповіді які учні формулювали і вписували самостійно, потрібно перевірити безпосередньо вчителіві.

V. Рефлексія, підсумки уроку.

Продовжіть думку:

- Сьогодні на уроці я пригадав ...
- Сьогодні на уроці я дізнався ...
- З уроку мені запам'яталося ...
- На уроці мені сподобалося (не сподобалося) ...

Вчитель підводить підсумки та оцінює роботу учнів на уроці.

VI. Домашнє завдання.

Створіть кросворд на LearningApps використовуючи терміни та властивості теми: «Тригонометричні функції», так щоб ключовим словом було: синус або косинус або тангенс або котангенс.

ВИСНОВКИ

Аналіз психолого-педагогічної літератури дозволив вивчити особливості узагальнення і систематизації знань, вмінь і навичок учнів при вивченні математики. Встановлено, що систематизація знань невіддільна від їх узагальнення, оскільки чим ширше узагальнення, тим більше відображено між ними істотних взаємозв'язків, які об'єднуються в широку систему знань. Необхідна умова формування узагальнених знань – це послідовне здійснення систематизації. Такий спосіб, з використанням видів узагальнень, приводить знання старшокласників в струнку систему та є одним із ефективніших засобів їх зміцнення й закріплення.

Вивчені та описані методи і форми ефективного узагальнення знань і умінь старшокласників: опорні конспекти у вигляді таблиць й схем, метод проектів, робота із тестовими завданнями, розв'язування задач різного рівня складності, уроки узагальнення і систематизації знань у навчанні математики дозволяє стверджувати, що їх використання допомагає учням наочно засвоїти й класифікувати вивчений матеріал; формує критичне мислення; активізує самостійну творчу діяльність учнів.

У межах третього завдання розкрито методику використання ІКТ на етапі узагальнюючого повторення в курсі алгебри і початків аналізу. Які сприяють підсиленню мотивації та індивідуалізації самостійної роботи учнів, активізації навчального процесу, формуванню навичок аналізу і структурування інформації при роботі з комп'ютером. А також призводять до прискорення темпу навчання й розвитку пізнавальної активності учнів.

Запропоновано зразки наочностей, розроблених з використанням системи динамічної математики GeoGebra та графічного онлайн калькулятора Desmos, які прискорять процес самоперевірки на етапі підготовки до ЗНО (розв'язавши задачі аналітично, а потім перевіривши їх у сервісах) та сприятимуть запам'ятовуванню поведінки графіків; такий процес роботи вчить порівнювати, аналізувати, узагальнювати. Представлені

комп'ютерні презентації, зокрема Microsoft PowerPoint та Prezi рекомендовано використовувати, як наочні посібники й джерело навчальної інформації, для сприйняття та практичного застосування навчального матеріалу. Візуальна форма подачі перевірки означень, формул, теорем, їх доведень, якісних креслень до графічних задач, подача рухомих зображень забезпечує ефективне фіксування учнями набутих знань та вмінь. Google форми дозволяють створювати тестову форму завдання, при виконанні яких формуються навички порівняння, співставлення чи представлення об'єктів. Крім того, виконання завдань такого типу сприяє підготовці учнів, зокрема, психологічній, до написання ДПА чи ЗНО.

Розкриті методичні особливості узагальнення і систематизації знань учнів з теми «Функції» на етапі підготовки до ЗНО в курсі алгебри і початків аналізу 10-11 класів дозволяє зробити такі висновки. Проаналізувавши ЗНО з математики основної сесії за 2016-2021 роки, було з'ясовано, які найчастіше зустрічаються у завданнях функції і рівень їх вправ. Так от, найчастіше пропонують тестову форму роботи, в якій переважна кількість завдань на лінійну і квадратичну функції. Достатня кількість завдань на відповідність; рідше зустрічаються з відкритою відповіддю та завдання, які потребують логічного обґрунтування виконаних дій. Завдання на загальні властивості функцій та лінійну функцію (окрім 2021-го року) фігурують в усіх роках ЗНО, показникова функція зустрічається один раз у 2020 році. Найбільше завдань з теми «Функції» було у 2019 й 2020 роках, найменше – 2021 році.

В кваліфікаційній роботі, відповідно до проаналізованих джерел розроблені методичні матеріали для організації процесу узагальнення і систематизації знань учнів на етапі підготовки до ЗНО. А саме, опорні конспекти, узагальнюючі таблиці, системи вправ різного рівня складності на повторення основних фактів та приклади методу проектів й конспектів уроків можуть бути використані у реальному навчальному процесі ЗСО.

Таким чином, поставлені завдання виконані в повному обсязі, мета дослідження досягнута.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адруг Л. М. Алгебра. Матеріали для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання. Харків : Країна мрій™, 2008. 136 с.
2. Архіпова Т. Л. Вплив нових інформаційних технологій на активізацію навчально-пізнавальної діяльності підлітків : збірник наукових праць. Випуск 3 / Редкол. Київ : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2001. С. 160-167.
3. Амонашвили Ш. А. Личностно-гуманная основа педагогического процесса. Минск : Изд-во Университетское, 1990. 560 с.
4. Амонашвили Ш. А. Размышления о гуманной педагогике. Минск : Изд-во Университетское, 1996. 494 с.
5. Беседін Б. Б., Гайдар С. О. Шляхи вдосконалення узагальнення та систематизації знань при вивченні алгебри в 7-9 класах : збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. Випуск 3, 2013. С. 140–144.
6. Беседін Б. Б., Пономарьова А. О. Узагальнення та систематизація знань при вивченні алгебри 7-9 класів : збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. Випуск 3, 2013. С. 140–144.
7. Бех І. Д. Особистісно зорієнтований підхід. Науково-практичні засади виховання особистості: навчально-методичний посібник. К. : Либідь, 2003. 344с.
8. Бобирь В. Портфоліо з теми «Графіки функцій». URL : <https://text.ru/rd/aHR0cDovL3dpa2kuaXRlYWNoLmNvbS51YS%2FQn9C%2B0YDRgtGE0L7Qu9GW0L5f0JLQsNC70LXRgNGW0Zdf0JHQvtCx0LjRgNGMX9C3X9GC0LXQvNC4XyLQk9GA0LDRhNGW0LrQuF%2FRhNGD0L3QutGG0ZbQuSI%3D> (дата звернення: 15.04.2021)
9. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посібник. 3-тє вид., перероб. і допов. Київ : Вища школа, 1989. 367 с.
10. Богатинська Н. В., Голубева С. Ф. Узагальнення й систематизація - джерело знань учнів. *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики* : зб. наук. праць. Вип. 6. Т. 1, 2006. С. 103-107.

11. Бокало Г. В. Урок з алгебри для учнів 10 класу на тему «Тригонометричні функції, їх графіки та властивості». *Освітній портал «На Урок»*. 2019. URL : <https://naurok.com.ua/urok-z-algebri-dlya-uchniv-10-klasu-na-temu-trigonometriczni-funkci-h-grafiki-ta-vlastivosti-93406.html>
12. Виноходов А. А. Використання сервісів Google та хмарних технологій в навчальному процесі : навч. посіб. Нікополь, 2017. 26 с.
13. Волощук І. А., Шпонька Р. Ю. Використання ІКТ на уроках математики як засіб розвитку просторової уяви учнів. *Педагогічне Криворіжжя* : педагогічний альманах : зб. наук.-метод. праць. Вип. 3, 2017. С. 46-48.
14. Давыдов В. В. Виды обобщения в обучении (логико-психологические проблемы построения учебных предметов). М. : Педагогика, 1972. 424с.
15. Драмарецька М. Г., Лов'янова І. В. Використання онлайн сервісу DESMOS при вивченні показникових рівнянь. URL : <http://eprints.zu.edu.ua/25763/1/%D0%94%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B0%D1%80%D0%B5%D1%86%D1%8C%D0%BA%D0%B0%20%D0%9C.%D0%93..pdf>
16. Електронний збірник наукових праць молодих учених факультету математики, природничих наук та технологій Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка «Наукові записки молодих учених». URL : <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS>
17. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ / гол. ред. В. О. Надточій. Слов'янськ : Вид-во Б. І. Маторін. Вип. № 11, 2021. 228 с.
18. «ЗНО-ОНЛАЙН». Створений та підтримується інтернет-ресурсом «Освіта.ua». URL : <https://zno.osvita.ua/mathematics/>
19. Ілляшик К. Портфоліо з теми «Лінійна функція її графік та властивості». URL : <https://text.ru/rd/aHR0cDovL3dpa2kuaXRlYWNoLmNvbS51YS%2FQn9C%2B0>

YDRgtGE0L7Qu9GW0L5f0IbQu9C70Y%2FRiNC40Lpf0JrQsNGC0LXRgNC40
L3QuF%2FQt1%2FRgtC10LzQuF8i0JvRltC90ZbQudC90LBf0YTRg9C90LrRht
GW0Y8sX9GX0Zdf0LPRgNCw0YTRltC6X9GC0LBf0LLQu9Cw0YHRgtC40LL
QvtGB0YLRliI%3D (дата звернення: 15.04.2021)

20. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Київ : Генеза, 2018. 448 с.
21. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Київ : Генеза, 2019. 416 с.
22. Казанчук І. Ю. Комп'ютерно орієнтовані засоби навчання для предметів фізико-математичного циклу. Вид-во : Таврійський вісник освіти, 2013. С. 21-30
23. Каплун О. І. Математика. Формули, поняття, визначення : довідник. Х.: ПП Українське літературне агенство «УЛА», 2014. 192 с.
24. Коменський Я. А. Вибрані педагогічні твори / під ред. Піскунова О.І. та ін. М. : Педагогіка, 1982. 655 с.
25. Комишан А. І., Щокіна Н. Б. Метод проектів як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів. *Наукові записи кафедри педагогіки*. Випуск 41, 2017. С. 81-93
26. Комп'ютерно-орієнтована методика узагальнення і систематизації знань та вмінь в процесі навчання учнів геометрії: автореф. дис. канд. пед. наук : 13.00.02. Нац. пед. ун-т ім. М. Драгоманова. Вид-во : Київ, 2005. 20 с.
27. Корольський В. В., Крамаренко Т. Г., Семеріков С. О., Шокалюк С. В. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики: навч. посіб.; наук. ред. академік АПН України, д.пед.н., проф. М. І. Жалдак. Кривий Ріг : Книжкове видавництво Кирсєвського, 2009. 324 с.
28. Косович О. В. Проектна діяльність як одна з форм інноваційних методичних технологій навчання. *Серія «Педагогіка, соціальна робота»*.

Випуск 22. Ужг. : Науковий вісник Ужгородського національного університету. С. 76-78

29. Кравцев С. В., Макаров Ю. Л., Максимов М. И., Нараленков М. И., Чирский В. Г. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. Москва : Экзамен, 2001. 544 с.

30. Крамареко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером: посібник для вчителів і студентів / за ред. М. І. Жалдака. Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. 272 с.

31. Лисицький В. М. Використання проектних технологій в навчально-виховному процесі для розвитку пізнавальних потреб учнів. *Педагогічна освіта: Теорія і практика. Психологія. Педагогіка*: збірник наукових праць № 21, 2014. С. 85-90

32. Лисуненко А. В., Лов'янова І. В. Методика узагальнення та систематизації знань учнів з теми: «Квадратична функція та її властивості» в умовах підготовки до ЗНО. *Наукові записки молодих учених* : електронний збірник. Кропивницький : РВВ ЦДПУ ім. В. Винниченка, 2021. URL : <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1879>

33. Лисуненко А. В., Лов'янова І. В. *Тези доповідей IX Міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математическої освіти» (ПМО - 2021)*. Черкаси : ФОП Гордієнко Є. І., 2021. С. 145-146

34. Лисуненко А. В. Властивості елементарних функцій та їх графіки: *Google форма*. URL : https://docs.google.com/forms/d/1fgI_tUjLXBU-YPnsKiOv9ztgg8fSUPPpYVCdTyNGvCU/edit

35. Лов'янова І. В., Попель М. В. Вивчення дисципліни «Диференціальні рівняння» з використанням вільно поширюваного програмного забезпечення. *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики*: збірник наукових праць. Випуск IX, 2011. С. 94-99

36. Лов'янова І. В. Інтерактивне навчання як форма педагогічної взаємодії в системі «учитель-учень». *Вісник Житомирського педагогічного університету*, 2003. С. 111-113

37. Лов'янова І. В. Навчання студентів у малих інтерактивних групах як один із шляхів їх методичної озброєності. *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики*: зб. наук. праць. Вип. 5. Т. 1, 2005. С. 164-169.
38. Марченко О. М. Систематизація знань учнів у процесі навчання математики із застосуванням методу проектів на основі комп'ютерної підтримки. *Дидактика математики: проблеми та дослідження*. Вип. 26, 2006. С. 150–154.
39. Математика: Збірник тестових завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання / уклад. : А. Капіносов, Г. Гап'юк, Л. Кондратьєва, О. Мартинюк, С. Мартинюк. Тернопіль : Підручники і посібники, 2013. 336 с.
40. Математика. Повний повторювальний курс. Підготовка до ЗНО та ДПА. Алгебра і початки аналізу. URL : <https://subject.com.ua/mathematics/zno/250.html>
41. Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2019), м. Черкаси, 11–12 квітня 2019 р. Черкаси : Вид. : ФОП Гордієнко Є. І., 2019. 280 с.
42. Матеріали ІХ міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2021), м. Черкаси, 9–10 квітня 2021 р. Черкаси : Вид. : ФОП Гордієнко Є. І., 2021. 192 с.
43. Матеріали П'ятнадцятої студентської науково-методичної конференції «Наумовські читання», м. Харків, 23–24 листопада 2017 р. Харків : ХНПУ імені Г. С. Сковороди, 2018. 104 с.
44. Міністерство освіти і науки України. Освітні програми. Навчальні програми для 5-9 класів. URL : <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas>
45. Міністерство освіти і науки України. Освітні програми. Навчальні програми для 10-11 класів. URL : <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

46. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебраїчний тренажер: посібник для школярів та абітурієнтів. Вид. : 3-тє. Х. : Гімназія, 2016. 272 с.
47. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти. Вид. : 2-ге, переробл. Х. : Гімназія, 2020. 288 с.
48. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти. Вид. : 2-ге, переробл. Х. : Гімназія, 2021. 240 с.
49. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів : навч. посіб. Харків : Гімназія, 2017. 272 с.
50. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Гімназія, 2018. 400 с.
51. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Гімназія, 2019. 352 с.
52. Неліна О. Є. Систематизація та узагальнення знань і вмінь учнів з алгебри як засіб активізації їх пізнавальної діяльності: автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Нац. пед. ун-т ім. М. Драгоманова. Київ, 2003. 20 с.
53. Нелін Є. П. Алгебра в таблицях (з Додатком): навч. посібник для учнів 7-11-х класів. Х. : Світ дитинства, 1998. 116 с. (Додаток 56 с.)
54. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 272 с.
55. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 240 с.
56. Нехрещенюк В. П., Константиненко Л. А. Google-форми як засіб контролю біологічних знань в закладах середньої освіти. *Житомирський державний університет імені Івана Франка*. С. 418-419. URL : <http://eprints.zu.edu.ua/29637/1/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%BE1.pdf>

57. Півторак А. А. Використання ІКТ при вивченні математики. *Педагогічний дизайн*. Вінниця : ММК, 2015. 74 с.
58. Подмазин С. И. Личностно-ориентированное образование : социально-философское исследование. Запорожье : Просвіта, 2000. 250 с.
59. Програма ЗНО з математики. *Український центр оцінювання якості освіти*. URL : <https://testportal.gov.ua/progmath/>
60. Розуменко А. О. Узагальнення та систематизація знань студентів при вивченні математичної статистики. *Фізико-математична освіта (ФМО)*: науковий журнал. Випуск 2(12), 2017. С. 130-134
61. Сім платформ для створення тестів. Створений та підтримується інтернет-ресурсом «Освіта.ua». URL : <https://osvita.ua/school/method/technol/45747/>
62. Скафа О. І, Тутова О. В. Евристичне навчання математики: комп'ютерно-орієнтовані уроки : навчально-методичний посібник : 2-ге вид. Донецьк : ДонНУ, 2013. 399 с.
63. Слепкань З. І. Методика викладання алгебри і початків аналізу. К. : Рад. школа, 1978. 224с.
64. Слепкань З. І. Методика навчання математики: підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. К. : Зодіак – ЕКО, 2000. 512с.
65. Слінчук В. І. Формування життєвих компетентностей учнів засобами навчального проекту на уроках математики. URL : <http://eprints.zu.edu.ua/1610/1/20.pdf>
66. Слободянюк І. Ю., Цегольник Л. П. Використання інтернет-сервісу QUIZZ у системі засобів перевірки та оцінювання навчальних досягнень учнів. *Інноваційні технології цифрової освіти у вищій та середній школі України та країн Євросоюзу*. URL : <http://dspace.tnpu.edu.ua/bitstream/123456789/14501/1/Slobodianiuk.pdf>
67. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Алгебра: підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : УОВЦ «Оріон», 2016. 336 с.








68. Уроки узагальнення та систематизації знань. Реферат. Створений та підтримується інтернет-ресурсом «Освіта.ua». URL : <https://osvita.ua/vnz/reports/pedagog/14807>
69. Чайка В. М. Основи дидактики : навч. посіб. (Серія «Альма-матер»). К. : Академвидав, 2011. 240 с.
70. Шкіль М. І., Слепкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу: підр. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. К. : Зодіак-ЕКО, 2006. 272 с.
71. Шкіль М. І., Слепкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу: підр. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. К. : Зодіак-ЕКО, 2002. 384 с.
72. Щербакова Є. В. Використання ІКТ на уроках математики при вивченні теми «Тригонометричні функції». *Інформаційні технології та їх використання*. С. 230-238. URL : <https://osvita.ua/vnz/reports/pedagog/14807>
73. Якиманская И. С. Технология личностно-ориентированного обучения в современной школе. М. : Сентябрь, 2000. 176 с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Таблиця А. 1.5.

Платформи для створення завдань тестової форми

Назва платформи	Характеристика
	Створює тести, в яких учні будуть вибирати вірні відповіді із запропонованих, зіставляти зображення та інформацію або вписувати власні варіанти. Інтерфейс досить легкий, до того ж, сервіс підтримує російську мову і працює на Android і iOS.
	Складаючи тести може запропонувати на вибір один або кілька варіантів, попросити заповнити пропущене слово або написати розгорнуту відповідь. Сервіс дозволяє вставляти в завдання текстові документи та презентації, файли PDF, а також зображення, аудіофайли та відеофайли.
	Розрахований на застосування у класі – викладач показує матеріал на головному екрані, а в цей час школярі відповідають на питання і обговорюють інформацію, використовуючи спеціальний клієнт для комп'ютерів або браузер на смартфонах. Для того щоб увійти у віртуальну класну кімнату, учні повинні ввести спеціальний код, який надішле викладач. Сервіс дозволяє дізнатися, як відповідав на запитання кожен учень, або будувати діаграми успішності всього класу. Самі ж учні можуть стежити за своїми результатами в спеціальних таблицях.
	Дозволяє робити опитування з різними форматами відповідей – крім звичних варіантів, є есе. Для початку роботи викладачеві потрібно створити віртуальний клас і розіслати запрошувальні коди учням. ClassMarker зберігає результати всіх проведених тестів, ведучи статистику успішності. Якщо у викладача є власна веб-сторінка, він може вбудовувати тестові завдання на неї.
	Влаштує опитування прямо у класі. Учні видаються спеціальні бланки з варіантами відповідей (А, В, С і D) – почувши питання, вони піднімають потрібні картки, які вчитель сканує камерою смартфона. Сервіс дозволяє аналізувати результати окремого студента або вивчати статистику усього класу. Додаток працює на Android і iOS, а завантажується безкоштовно.
	Створює завдання, в яких потрібно вибирати вірні і помилкові твердження. Тексти можна відформатувати для зручності читання на планшеті чи завантажити у форматах .pdf або .doc, щоб провести тестування у більш традиційному форматі. Сервіс вміє перемішувати питання і варіанти відповідей, щоб учням було складніше списувати.
	Проводить оцінювання рівня знань учнів як під час занять, так і в якості домашньої роботи. Режими роботи: Play Live («гра в реальному часі») та Homework («домашня робота»). Перевагою сервісу є те, що наявність проектору не обов'язкова, оскільки на екрані пристрою учня відображаються як запитання, так і варіанти відповіді. Послідовність завдань та варіантів відповідей для кожного учня є індивідуальною, хоча банк запитань однаковий. Це дозволяє кожному працювати в зручному для себе темпі та не створює відволікаючих моментів.