МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет фізико-математичний
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
В. о. завідувача кафедри
_____________ Д. Є. Бобилєв

Реєстраційний № _______

«___» _____________ 2019 р.

«___» ____________2019 р.

ГЕНЕРАЦІЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЇХ НА ЗБІЖНІСТЬ

Кваліфікаційна робота
студентки групи МІм-14
ступінь вищої освіти магістр
спеціальності: 014.04
середня освіта (математика)
Романова Альона Михайлівна
Керівник:
кандидат техн. наук, професор
Корольський Володимир Вікторович
Оцінка:
Національна
шкала__________________
Шкала ECTS____ Кількість балів _____
Голова ЕК_______ ___________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
Члени ЕК _______ ___________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_______ ___________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_______ ___________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_______ ___________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2019

ЗМІСТ

ВСТУП

Числові ряди широко використовуються в теоретичних дослідженнях математичного аналізу та при розв’язуванні великої кількості прикладних задач, тому цей розділ є важливим в математичному аналізі.

Також числові ряди посідають важливе місце і в архітектурі, хімії, фізиці, економіці, інженерії і т.д. Це зумовлено тим, що ми можемо виконувати наближені обчислення для отримання точних результатів.

Числові ряди часто використовують при розв’язуванні багатьох найважливіших задач, як теоретичних, так і практичних. Зокрема, застосування рядів є досить ефективним при наближених обчисленнях значень тригонометричних функцій, логарифмів тощо.

Немалий вклад в історію розвитку числових рядів зробили Жан Лерон Даламбер, Огюстен Луі Коші, Карл Фрідріх Гаус, П‘єро Менголі, Йоганн Бернулі, Готфрід Вільгельм Лейбніц.

Проаналізувавши зарубіжну та вітчизняну літературу, можна відмітити, що переважна кількість підручників, посібникув та практикумів з математичного аналізу пропонують більш старі варіанти задач.

За нашою думкою при вивченні розділу «Числові ряди» в рамках «Математичного аналізу» можна згенерувати з одного ряду безліч інших рядів та дослідити їх на збіжність.

Кваліфікаційна робота виконувалась в межах наукової проблеми групи студентів з теми: «Методи наближених обчислень та геометричних інтерпретацій числових рядів». [Науковий керівник: кандидат технічних наук, професор Корольський В.В.]

Мета роботи: одержання «сігма-моделей» числових рядів за допомогою геометричної інтерпретації членів ряду та генерація їх суміжних членів.

Об’єкт дослідження: числові ряди.

Предмет дослідження: зв'язок «сігма-моделей» числових рядів з параметрами різноманітних геометричних об'єктів, величини яких змінюються за певним правилом.

Завдання:

- аналіз існуючих теоретичних відомостей пов’язаних з числовими рядами;
- вибір геометричних об'єктів, параметри яких можна задати за певним правилом;
- одержання прикладів числових рядів, пов’язаних з геометричною інтерпретацією членів ряду;
- одержання і дослідження числових рядів за допомогою визначення $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ членів відомих числових рядів;
- дослідження зв’язку між членами рядів арифметичної прогресії та гармонічних рядів;
- створення систем завдань для практичних занять з теми «Числові ряди» в межах «Математичного аналізу» для педагогічних спеціальностей.

Методи дослідження:

- аналіз науково – методичних джерел, пов’язаних з розділом «Числові ряд»;
- пошук геометричних об'єктів зміни числових параметрів які можна задати за певним правилом;
- евристичний пошук правил, за якими змінюються величини параметрів певних геометричних об'єктів;
- чисельні експерименти пов’язані з обчисленням частинних сум одержаних числових рядів;
- геометрична інтерпретація зміни значень частинних сум одержаних за допомогою геометричної інтерпретації та відношення $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ числових рядів.

Практичне застосування:

Створена низка числових рядів, приклади яких можна застосовувати на практичних заняттях з розділу «Числові ряди» та на лабораторних заняттях з «Методів наближених обчислень» для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів.

Апробація:

1. Участь у Х Міжнародній конференції молодих вчених «Молоді вчені 2019-від теорії до практики» з публікацією тез «Реалізація дидактичного принципу наочності при вивчені числових рядів», м. Дніпро 7 березня 2019 р.

2. Участь у Міжнародній науково-методичній конференції «Проблеми математичної освіти ПМО-2019» з публікацією тез «Зв'язок рядів арифметичної прогресії та гармонічних рядів», м. Черкаси, 11-12 квітня 2019р.

Структура магістерської роботи: робота складається зі вступу, трьох розділів, висновку, списка використаних джерел, що містять 48 найменувань та додатків. Основний текст викладено на 81 сторінкі. Повний обсяг роботи 90 сторінок.

РОЗДІЛ І.ЧИСЛОВІ РЯДИ ТА ОСНОВНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ЇХ НА ЗБІЖНІСТЬ

1.1. Виникнення та етапи розвитку числових рядів

Поняття математичної нескінченості, як стверджують дослідники історії розвитку математики, з'явилося в давньогрецькій або еллінській культурі в VIII – VI ст. до н.е., як принципово новий елемент мислення. Проте, точну дату виникнення рядів дати неможливо [22].

Завдяки правилам арифметики ми можемо вичислити суму двох, трьох і взагалі будь-якого кінцевого набору чисел. Що ж робити, якщо кількість доданків буде нескінченною? [26, с. 7]

Нехай це навіть «сама найменша» нескінченність, тобто нехай число доданків можна перерахувати. Знаходження нескінченних сум було складовою частиною так званого методу «вичерпання», широко використовуваного давньогрецькими вченими для знаходження площ фігур, об'ємів тіл, довжин кривих і т. д. [26, с. 7]

Так, наприклад, Архімед для обчислення площі параболічного сегмента (тобто фігури, обмеженою прямою і параболою) знайшов суму нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $\frac{1}{4}$. Майже дві з половиною тисячі років тому грецький математик і астроном Евдокс Кнідський застосовував метод «вичерпання» до знаходження площ і об'ємів. Ідея цього методу полягає в тому, щоб досліджуване тіло розбити на зліченне число частин, площі або об'єми яких відомі, а потім ці об'єми скласти. Цей метод застосовували і Евклід, і Архімед. Природно, повного і акуратного обґрунтування методу в роботах античних математиків не було. До цього потрібно було пройти ще довгий двохтисячорічний шлях, на якому були і блискучі одкровення, і помилки, і курйози [26, с. 7].

У відомому фільмі 30-х років минулого століття «Петро Перший» цар Петро задає малому хлопчику таку задачу: «Летіла гуска, за нею половина гуски, за нею чверть гуски, за нею восьма частина гуски і тощо до нескінченності, тобто за кожною частиною гуски летить її половина. Скільки всього летіло гусок?». Маленький хлопчик знайшовся і відповів: «А половина гуски не літає». Цар Петро розсміявся, і на цьому інцидент було вичерпано. Але уявимо собі, що хлопчисько насправді спробував би розв'язати задачу, що задав цар. Що у нього вийшло б? Оскільки за кожною частиною гуски летить її половина, то для розв'язання задачі треба знайти суму [47, с. 3]:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$$

Особливість цієї суми полягає у тому, що вона містить нескінченну кількість доданків. Що розуміти під такою сумою? Чи взагалі існує вона? Розглянемо ще один приклад, вже не жартівливий, а який зустрічається в науках про Землю. Нехай є деякий резервуар, в якому послідовно накопичуються осадки. Припустимо, що з самого початку в резервуарі вже є деяка кількість a м^3 осадків. І за кожний наступний рік у резервуарі відкладається ще d м^3 осадків. Після 5 років сукупна кількість осадків буде $(a^3 + 5d$ м$^3)$, після n років – $(a + nd$ м$^3)$. Якщо спробувати скласти всі ці величини, припустивши, що n необмежено зростає, то у нас вийде:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (a + nd) + \ldots$$

Легко зрозуміти, що скінченного значення цієї суми не існує. Суми з нескінченною кількістю доданків іноді викликають із-за їх неправильного розуміння цікаві парадокси. Розглянемо наступний приклад, як міркував один середньовічний богослов при доведені існування Всемогутнього Бога.

«Запишемо в рівновеликих величинах S як нескінченну суму

$$S = 10101010 \qquad (1.1)$$

Замінимо в правій частині цієї рівності кожен нуль на суму (1 + (– 1)) :

$$S = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots \qquad (1.2)$$

Залишивши перший доданок в правій частині (1.2), об'єднаємо за допомогою дужок другий доданок з третім, четвертий з п'ятим і т.д.

Тоді $S = 1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1.$»

Почавши з рівності $S = 0$, автор приходить до того, що $S = 1$ і урочисто закінчує:

«Якщо з нуля можна за бажанням отримати одиницю, то можна допустити і припущення про створення світу з нічого!» [26, с. 7-8].

З точки зору сучасної математики, помилка автора полягає в тому, що він намагається оперувати з поняттями, яким не дав визначення (що це таке – «сума нескінченного числа доданків»), і робить перетворення (розкриття дужок, перегрупування), законність яких не була їм обґрунтована [26, с. 8-9].

Наведені приклади свідчать про те, що суми з нескінченною кількістю доданків мають властивості, які суттєво відрізняються від звичайних скінченних сум. Разом з тим суми такого типу мають дуже важливе значення як для самої математики, так і для її застосувань [47, с. 4].

Питаннями сумування рядів займалися і китайські математики.

Шень Ко (9 ст. до н.е.) в «Рассуждениях Мэн-си» підрахував кількість предметів, які складають n − шарову ступінчату усічену піраміду, в якій стороні прямокутних шарів послідовно збільшуються на одиницю. В XIII ст. Чжу Ши-цзе сумує ряди, які виникли при множенні натуральних, трикутних та квадратних чисел з членами зростаючої або спадної прогресій [48, с. 175].

В творі, написаним китайським математиком в 1303 р., зустрічається наступна таблиця чисел [28]:

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Рис.1.1.– Арифметичний трикутник

Дана таблиця містить біноміальні коефіцієнти до 8-ї степені бінома – $(1 + x)^8$ включно. Цей факт був підтверджений формулою, знайденою Ньютоном у часи, близько 1665 р.:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots +$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}x^k + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)(m-k)}{(k+1)!}x^{k+1} + \cdots +$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\dots 3\cdot 2}{(m-1)!}x^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1}{m!}x^m.$$

$$A_k = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+2)(m-k+1)}{k!}.$$

Ньютон знайшов співвідношення між коефіцієнтами двох рядів: $A_{k+1} = A_k \cdot \frac{m-k}{k+1}$, де m – степінь многочлена, k – індекс многочлена. Далі таблиця Чжу Ши-цзе не продовжується, але можна спостерігати певну закономірність, яка дозволить записувати нові рядки:

«Сума довільних двох чисел, які стоять поряд в одному і тому ж рядку, дорівнює числу яке стоїть в наступному рядку між ними».

Трикутна таблиця називається арифметичним трикутником. Відомості про арифметичний трикутник були ще у 2 ст. до н. .е у індійських математиків [28].

Формальний розвиток теорії рядів, як нескінченних сум певних доданків, починається з початку XVII століття. І одним із прикладів дослідження геометричної інтерпретації рядів є відкриття італійського математика П’єтро Менгорі (1626 –1686), який наглядно продемонстрував (рис.1.2.), за допомогою геометричного розкладання, що ряд:

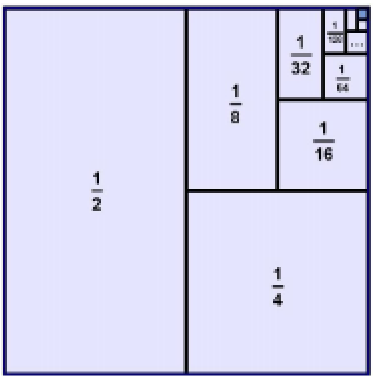


Рис. 1.2. Сума геометричного ряду

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1.$$

Математик розглядав квадрат зі стороною одиниця і, відповідно площею, яка дорівнює одиниці. Він поділив площу квадрата навпіл, потім одну з половин знову поділив навпіл і т.д., і отримав нескінчену кількість прямокутників з площами, які утворюють геометричну прогресію.

Треба відзначити, що П'єтро Менголі отримав важливі результати в області дослідження рядів, зокрема, довів розбіжність гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. В 50 – роках XVII ст. Термін «гармонічний ряд» запропонував у 1668р. Математик Броункер (1620 – 1684). Свою назву гармонічний ряд отримав з того факту, що кожний його член, починаючи з другого, є середнім гармонічним суміжних членів [1, с. 163].

Але значно раніше в 1350р. французький математик Орем довів розбіжність гармонічного ряду. Його доведення дійшло до нашого часу і використовується в сучасних підручниках. Воно полягає в тому, що Н. Орем групує члени ряду наступним чином [42]:

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots>1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

Подвоюючи число членів, зібраних в послідовні групи, отримує нескінченну кількість груп з сумами більше $\frac{1}{2}$.

Вчення про ряди більшою мірою посилилось через потребу знайти для деяких функцій раціональні вирази, які дозволяли б здійснювати інтегрування. При обчисленні таких функцій для окремих значень змінних відчувалась необхідність в дослідженні їх на збіжність. Проте, при прагненні зберегти застосовність ряду для всіх значень змінної, це відчуття було втрачене шляхом виникнення парадоксів та метафізичних міркувань. Серед небагатьох вчених, які займали строгу математичну позицію, був П. Варіньйон (1654 – 1722). В 1715 р. саме він звернув увагу на те, що члени, придатного для використання ряду, повинні безперервно зменшуватись, і остача ряду повинна ставати як завгодно малою [7, с. 138].

Одним із найважливіших методів, який був запропонований в XVII ст. для розкладу функції в ряд, був винайдений Тейлором (1685 – 1731), який фактично використав інтерполяційну формулу Ньютона, яку він представив у своїх «Началах» [8, с. 140].

У 1812 році Карл Фрідріх Гаус (1777 – 1865) дає перший зразок дослідження збіжності ряду, в 1821 році наш хороший знайомий Огюстен Луї Коші (1789 – 1857) встановлює основні сучасні принципи теорії рядів. «Рядом називають необмежену послідовність чисел одержуваних один з одного за певним законом. Нехай є сума n-перших членів, де n – будь-яке ціле число. Якщо при постійному зростанні значень n сума необмежено наближається до відомої межі S, ряд називається збіжним, а ця межа - сумою ряду. Навпаки, якщо при необмеженому зростанні n сума не наближається ні до якої певного межі, ряд буде розбіжним і не буде мати суми.» [25, с. 8-9]

У 1832 р. швейцарський математик Жозеф Раабе (1801– 1859) запропонував ознаку збіжності, яка базується на порівнянні зі збіжним узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\,(S>1)$ і розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Він будує варіанту $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. Якщо при достатньо великому $n\,(n>N)$ виконується нерівність $R_n > r,$ де $r-$ стале число більше одиниці, то ряд збігається, а при $R_n \leq 1 -$ розбігається [46].

Потреба в дослідженні збіжності рядів стала суттєвою, коли виникла полеміка про ряди з синусами та косинусами. Ейлеру неодноразово вказували на незаконність його методу, пов’язаного з використанням теорем про степеневі суми коренів рівняння [8, с. 142].

Тому вчений шукав шляхи, які виправдають його обчислення. Сам він не створив теорію про розбіжні ряди, але його більш широке розуміння сумування ряду і методи узагальнюючого сумування були виправдані, але строго обґрунтовані та розвинені лише на рубежі XIX ст. та XX ст. Е. Чезаро, Е. Борелем, Л. Фейером та іншими [8, с. 142].

Розглянемо апорію Зенона Елейського про Ахіллеса і черепаху. «Швидконогий Ахіллес ніколи не зможе наздогнати черепаху.» Нехай на початку руху їх розділяє відстань a, і Ахіллес біжить у k разів швидше за черепаху. Доки Ахіллес пробіжить цей проміжок довжиною a, черепаха встигне відповзти від нього на відстань $\frac{a}{k}$. Коли Ахіллес пробіжить і цей проміжок $\frac{a}{k}$, черепаха відповзе на відстань $\frac{a}{k^2}$, і так далі. Таким чином, Ахіллес ніколи не наздожене черепаху, бо між ними завжди буде деяка відстань. Припустимо, що в деякий момент часу Ахіллес наздожене черепаху.

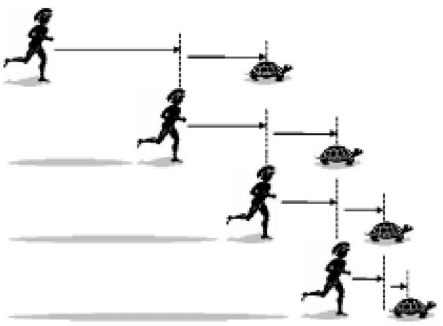


Рис. 1.3. Чи наздожене Ахіллес черепаху?

Запишемо шлях Ахіллеса

$$S = a + \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \cdots$$

і шлях черепахи

$$S = \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \cdots$$

Кожному відрізку шляху $\frac{a}{k}$, пройденого Ахіллесом, відповідає відрізок шляху $\frac{a}{k}$ черепахи. Тому до моменту зустрічі Ахіллес повинен пройти «стільки ж» відрізків шляху, скільки і черепаха. З іншого боку, кожному відрізку $\frac{a}{k}$, пройденого черепахою, можна зіставити рівний йому за величиною відрізок шляху Ахіллеса. Але, крім того, Ахіллес повинен пробігти ще один відрізок довжини а, тобто він повинен пройти на одиницю більше відрізків, ніж черепаха. Якщо кількість відрізків – n, то отримуємо

$1 + n = n$ [12, с. 280].

Дана задача призводить до поняття числового ряду.

Нехай задано послідовність чисел: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Означення

Вираз $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ називають числовим рядом, а числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ - членами ряду, a_n називають його загальним членом. Ряд часто записують у вигляді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ [38, с. 76].

1.2. Основні методи дослідження числових рядів на збіжність

1.2.1.Частинні суми членів числових рядів та їх застосування при дослідженні рядів на збіжність

Нескінченні ряди широко використовуються в теоретичних дослідженнях математичного аналізу та мають різноманітні практичні застосування. Введемо наступну інтерпретацію нескінченного числового ряду [23].

Поняття про числовий ряд розглядають ще в шкільному курсі математики при вивчені нескінченної геометричної прогресії.

Справді нехай маємо числову послідовність виду

$$u, uq, uq^2, \dots\ , uq^{n-1}, \dots$$

Таку нескінченну числову послідовність, як відомо називають *нескінченною геометричною прогресією,* а число q - *знаменником прогресії.*

Що ж тоді розуміти під сумою такої прогресії? Адже застосовувати метод послідовного додавання членів прогресії не можна, бо їх нескінченна множина. Тому введено спеціальне означення суми нескінченної геометричної прогресії [38].

Знайдемо суму S_nперших n членів прогресії. Таку суму можна знайти, бо в ній нескінченне число доданків, а саме n, і вона дорівнює:

$$S_n = u + uq + uq^2 + \dots + uq^{n-1} = \frac{u(1-q^n)}{1-q},$$

якщо $q \neq 1$ і $S_n = un$, якщо $q = 1$ [36].

Означення

Границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, якщо вона існує, називається *сумою нескінченної геометричної прогресії.*

Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Для цього розглянемо такі випадки:

1) $|q| < 1.$ Тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u(1-q^n)}{1-q} = \frac{u}{1-q};$$

2) $|q| > 1$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u(1-q^n)}{1-q} = \infty;$$

3) $q = 1$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} nu = \infty;$$

4) $q = -1$. Тоді сума $S_n = 0$, якщо n парне число, і $S_n = u$, якщо n непарне число. Границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує.

Отже, нескінченна геометрична прогресія має суму тільки тоді, коли $|q| < 1$, тобто коли вона є спадною. У цьому випадку записують

$$u + uq + uq^2 + \ldots + uq^{n-1} = \frac{u}{1-q} \text{ [40].}$$

Нехай задана послідовність (a_n) дійсних чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Вираз виду

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Називають *числовим рядом*, або просто *рядом.* Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ називають *членами ряду*, відповідно, першим членом, другим і т.д. n-м членом; a_n називають ще *загальним членом* ряду.

Для позначення ряду застосовують і такий символ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Поняття суми числового ряду $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ вводять так само, як і для нескінченної геометричної прогресії. Знайдемо суму перших n членів ряду: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

Надаючи n значень 1, 2, 3, … дістанемо таку числову послідовність

$S_1 = a_1,$

$S_2 = a_1 + a_2,$

………………………………

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$

…………………………………

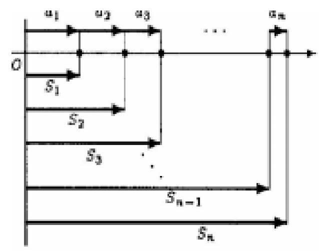


Рис. 1.4. Часткові суми ряду з додатними членами

Числа $S_1,\ S_2, \dots, S_n, \dots$ називають частинними сумами ряду $a_1 +\ a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, зокрема S_1 – першою частинною сумою, S_2 – другою, і т.д., $S_n - n$ - ю частинною сумою [39].

Означення

Скінченна границя, якщо вона існує, послідовності (S_n) частинних сум називається *сумою* числового ряду $a_1 +\ a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ (1.3)

Отже, якщо через S позначати суму ряду, то згідно з означенням,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

У цьому впадку також пишуть

$$a_1 +\ a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots =\ S$$

Означення.

Якщо послідовність (S_n) частинних сум ряду збігається, то її границю S, називають *сумою ряду,* а сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають збіжним [23, с. 283-284].

Записують

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n =\ S.$$

Якщо послідовність (S_n) не існує або дорівнює ∞, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбіжний.}$$

Якщо (S_n) дорівнює «$+\infty$», то говорять, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний до «$+\infty$», и записують $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Аналогічно для випадку коли (S_n) дорівнює «$-\infty$» , то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$ [23, с. 283-284].

Приклад.

1. Розглянемо ряд

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

Для цього ряду $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$. Отже, даний ряд розбіжний до $+\infty$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує.

2. Ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

Для цього ряду $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$. Отже, ряд збігається і його сума дорівнює 1.

Як бачимо, кожному числовому ряду можна поставити у відповідність послідовність його частинних сум. Тоді питання про збіжність ряду зводиться до дослідження збіжності (розбіжності) числової послідовності.

Виявляється, що й навпаки, кожній числовій послідовності (x_n) можна поставити у відповідність числовий ряд [39].

$$x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots$$

такий, що його частинна сума S_n дорівнює загальному члену послідовності (x_n). Справді,

$$S_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n.$$

Звідси, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ існує (ряд збігається), то й $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ існує (числова послідовність збігається), а якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує (ряд розбіжний) то й $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не існує (числова послідовність розбігається) [39].

Теорема

Для того щоб числовий ряд збігався, необхідно, щоб границя загального члена даного ряду при $n \to \infty$ дорівнювала нулю [19].

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Властивості збіжних числових рядів:

1. Відкидання чи зміна скінченного числа членів ряду не впливає на його збіжність (розбіжність).

2. Якщо члени ряду помножити на деяку константу С, його збіжність не порушиться, сума множиться на С.

3. Два збіжних ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ з сумами S_1 та S_2 можна почленно додавати або віднімати. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = S_1 \pm S_2$.

4. Якщо ряд збіжний, то його члени можна групувати за порядком їх послідовності. Отриманий ряд збігається і його сума дорівнює сумі вихідного ряду.

5. Якщо, починаючи з деякого n, члени рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ рівні між собою і один з цих рядів збіжний, то збіжний і другий.

У багатьох випадках досліджувати на збіжність (розбіжність) числовий ряд значно простіше ніж числову послідовність [19].

1.2.2. Метод дослідження рядів на збіжність за допомогою відношення (n+1)-го та n-го членів ряда (ознака Даламбера)

Теорема

Якщо в ряді з додатними членами $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ відношення (n+1)-го члена до n-го при $n \to \infty$ має границю $\lambda,$ тобто

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda,$$

то 1) при $\lambda < 1$ ряд збіжний;

2) при $\lambda > 1$ ряд розбіжний;

3) при $\lambda = 1$ ряд може бути як збіжним так і розбіжним [36, с. 15].

Доведення.

1) Нехай для досліджуваного ряду $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, $\lambda < 1$. Розглянемо число q, що задовольняє співвідношенню $\lambda < q < 1$. Тоді, починаючи з деякого номера N з визначення границі для всіх n ≥ N, виконується нерівність

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \text{ або } a_{n+1} < qa_n.$$

Запишемо нерівність для різних n, починаючи з номера N, тоді отримаємо

$$\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q \Rightarrow a_{N+2} < qa_{N+1} < q^2 a_N;$$

$$\frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} < q \Rightarrow a_{N+3} < qa_{N+2} < q^3 a_N.$$

Розглянемо два ряди. Ряд $a_1 + \ a_2 + \ a_3 + \cdots + a_N + a_{N+1} + \cdots$ (1.4) є рядом геометричною прогресії зі знаменником q: 0 < q <1. Отже, він збіжний. Так як члени ряду q$a_N \ + q^2 a_N \ + \cdots + q^3 a_N \ + \cdots$ (1.5) починаючи з a_{N+1} менше відповідних членів ряду (1.3), то на підставі ознаки порівняння ряд збіжний.

2) Нехай $\lambda > 1$. Тоді з нерівності $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ = \lambda \, (\lambda > 1)$ слідує, що, починая з деякого номера N (для $n \geq N$),буде мати місце нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ або $a_{n+1} > a_n$, а це значить, що члени ряду зростають і загальний член ряду не прямує до нуля при n → ∞, тобто порушується необхідна ознака збіжності, що призводить до розбіжності досліджуваного ряду.

3) Нехай $\lambda = 1$. В цьому випадку ознака Даламбера не дає можливості встановити, розбіжний ряд чи ні, так як в цьому випадку він може бути і збіжним і розбіжним [37, с. 15].

Приведем такі приклади.

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ – збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ – розбіжний. При цьому в обох випадках границя дробу $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ при $n \to \infty$ дорівнює 1.

Дійсно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}}{\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+3}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\dfrac{n}{n}}{\dfrac{n}{n} + \dfrac{3}{n}}\right) = 1.$$

Аналогічно розрахуємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{\dfrac{n}{n}}{\dfrac{n}{n} + \dfrac{1}{n}}}\right) = 1.$$

Теорема доведена.

Існує й інше формулювання ознаки Даламбера :

Теорема

a) Якщо існує число $q \in (0; 1)$ і номер m такі, що для всіх $n \geq m$ виконується нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ то ряд сходиться;

b) Якщо існує номер m такий, що для всіх $n \geq m$ виконується нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то ряд розбіжний [36, с. 16].

Доведення

a) З умови $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ слідує, що $a_{m+1} \leq q a_m$, $a_{m+2} \leq q^2 a_m$ можна записати $a_{m+p} \leq q^p a_m$ для будь-якого $p \in N$. Так, як ряд $\sum_{p=1}^{\infty} q^p a_m$, де $0 < q < 1$ збіжний и $a_n > 0$ для всіх $n \in N$ то ряд $\sum_{p=1}^{\infty} a_{m+p}$ збіжний, звідки слідує і збіжність ряда $\sum_{p=1}^{\infty} a_n$, який отримали із ряда $\sum_{p=1}^{\infty} a_{m+p}$, додаванням кінцевого члена $a_1, a_2, \dots, a_m$.

b) З умови $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ слідує, що $a_{m+1} \leq a_m$, $a_{m+2} \geq a_{m+1} \geq a_m$, $a_{m+3} \geq a_m$ і т.д.

Отже, $a_{m+p} \geq a_m \geq 0$ для всіх $p \in N$, тому ряд $\sum_{p=1}^{\infty} a_{m+p}$ і ряд $\sum_{p=1}^{\infty} a_n$ розбіжні, так як не виконується необхідна ознака збіжності $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Що і треба було довести [36, с. 16].

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $1 + \frac{4}{2!} + \frac{9}{3!} + \frac{16}{4!} + \cdots$.

Запишемо n-й член ряду $a_n = \frac{n^2}{n!}$. Перевіримо необхідний признак збіжності $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n*n}{(n-1)!n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(n-1)!} = 0$.

Необхідна ознака виконується, ряд може збігатися. Для встановлення збіжності застосовуємо ознаку Даламбера, для чого запишемо a_{n+1} член,

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}$$

Тоді ,

$$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} * \frac{n^2}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 n!}{n^2 (n+1)! n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0.$$

Значить, в даному випадку $\lambda = 0 < 1$ і ряд збіжний [23, с. 296-298].

1.2.3. Метод радикалів для дослідження рядів на збіжність (радикальна ознака Коші)

Теорема

Якщо для ряду з додатними членами $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, $(a_n > 0)$ величина $\sqrt[n]{a_n}$ має кінцеву межу p при $n \to \infty$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$, то:

1) при $p < 1$ ряд збіжний;

2) при $p > 1$ ряд розбіжний;

3) при $p = 1$ ця ознака не дає можливості визначити збіжність або розбіжність ряду. [37, с. 18].

Доведення

1) Нехай $p < 1$, що задовольняє співвідношенню $p < q < 1$. Починаючи з деякого номера $n = N$, буде мати місце співвідношення $\left|\sqrt[n]{a_n} - p\right| < q - p$, звідки випливає, що $\sqrt[n]{a_n} < q$ або $a_n < q^n$для всіх $n \geq N$. Розглянемо два ряди:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N + a_{N+1} \ldots$$
$$q^N + q^{N+1} + \cdots$$

Так як $q < 1$, то ряд $q^N + q^{N+1} + \cdots$ збігається. Члени ряду $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N + a_{N+1} \ldots$ менше відповідних членів ряду $q^N + q^{N+1} + \cdots$, починаючи з a_N. Отже, ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N + a_{N+1} \ldots$ збіжний на підставі ознаки порівняння з невід'ємними членами.

2) Нехай $q > 1$. Тоді, починаючи з деякого $\sqrt[n]{a_n} > 1$ або $a_n > 1$, то якщо не виконується необхідна умова збіжності ряду, ряд розбіжний [37, с. 14-15].

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд

$$1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{n+2}{2*n+1}\right)^n + \cdots$$

Розв'язання.

Визначимо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2*n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{2*n+1} = \frac{1}{2} < 1,$ ряд збіжний.

Також існує інше формулювання ознаки Коші, розглянемо його:

Теорема

Нехай дано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n > 0$ для всіх $n \in N$. Тоді:

a) якщо існує число $q \in (0,1)$ і число m такий, що для всіх $n \geq m$ виконується нерівність $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, то ряд збіжний;

b) якщо існує число m таке, що для всіх $n \geq m$ виконується нерівність $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то ряд розбіжний [37, с. 14-15].

Доведення.

a) З умови $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ слідує, що при всіх $n \geq m$ виконується нерівність $a_n \leq q$, де $0 < q < 1$, з цього слідує збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Якщо $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то $a_n \geq 1$ при всіх $n \geq m$, і тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний (не виконується необхідна ознака збіжності).

Що й треба було довести.

Примітка Ознаку Коші при дослідженні збіжності ряду з додатніми членами називають більш сильнішою ніж ознаку Даламбера. [38, с. 15-16].

1.2.4. Дослідження рядів на збіжність за допомого невласних інтегралів (інтегральна ознака Коші)

Теорема

Нехай члени ряду

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

позитивні і не зростають, тобто $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ і f (x) - неперервна не зростаюча функція, причому $f(1) = a_1$; $f(2) = a_2; \dots;$ $f(n) = a_n, \dots,$ тоді

1) якщо невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ збіжний , то збіжний і ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

2) якщо інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ розбіжний, то розбіжний і ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ [37, с. 15-16]

Доведення.

Для доведення зобразимо члени ряду

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ (1.6)

геометрично, відкладаючи по осі Ох номера $1, 2, \ldots, n,\ n + 1, \ldots$ членів ряду, а по осі ординат - відповідні значення членів ряду (1.6) (рис. 1.5).

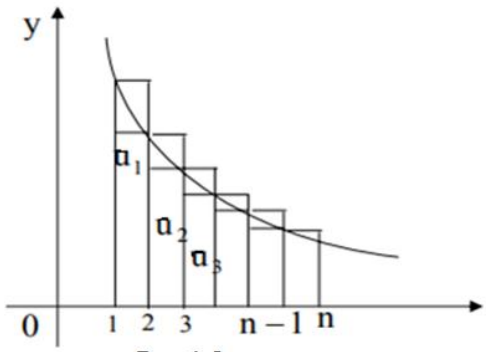


Рис. 1.5.

На цьому рисунку побудуємо графік неперервної не зростаючої функції $y = f(x)$, що задовольняє умовам теореми. Порівнюючи площі східчастих фігур, криволінійної трапеції, з геометричного сенсу певного інтеграла маємо

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) < \int_1^n f(x)dx < f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1),$$

або з урахуванням, що $f(1) = a_1$; $f(2) = a_2$; ... отримаємо

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n < \int_1^n f(x)dx < a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \quad (1.7)$$

Але так як часткова сума S_n ряду (1.6) дорівнює $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + + \cdots + a_n$, то ліва частина (1.7) є $S_n - a_1$, а права S_{n-1}, тоді

$$S_n - a_1 < \int_1^n f(x)dx < S_{n-1}. \quad (1.8)$$

1. Припустимо, що інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ збігається. Так як $\int_1^n f(x)dx < \int_1^\infty f(x)dx$ то в силу нерівності (1.8) будемо мати

$$S_{n-1} < S_n < \int_1^\infty f(x)dx + a_1,$$

тобто часткові суми обмежені при всіх значеннях n, а це значить, за теоремою про порівняння рядів з невід'ємними членами ряд (1.7) збігається.

2. Припустимо, що інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ розбіжний , тобто

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$$

З розбіжності $\int_1^{\infty} f(x)dx$ випливає, що інтеграл $\int_1^{n} f(x)dx$ необмежено зростає при n → ∞, тобто ряд розбіжний [39].

Приклад. Дослідити збіжність ряду

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots, p \in R$$

Розв'язання. 1. Розглянемо випадок, коли $p \leq 0$. Тоді $a_n = \frac{1}{n^p} = n^{-p}$

при n → ∞, так як $-p \geq 0$.

Для даного випадку необхідна умова збіжності не виконується, ряд розбіжний. Застосуємо інтегральну ознаку для випадку $p > 0$, поклавши $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Ця функція при x ≥ 1 неперервна і монотонно спадна. Розглянемо інтеграл

$$\int_1^{n} \frac{1}{\mathrm{x^p}} \mathrm{dx} = \lim_{\mathrm{a} \to \infty} \int_1^{\mathrm{a}} \mathrm{x^{-p}}\, \mathrm{dx} = \lim_{\mathrm{a} \to \infty} \begin{cases} \frac{1}{1-\mathrm{p}} \mathrm{x}^{1-\mathrm{p}} \Big|_1^{\mathrm{a}} = \frac{1}{1-\mathrm{p}} (\mathrm{a}^{1-\mathrm{p}} - 1); & \mathrm{p} \neq 1 \\ \ln \mathrm{x}|_1^{\mathrm{a}} = \ln \mathrm{a} - \ln 1 = \ln \mathrm{a}; & \mathrm{p} = 1. \end{cases}$$

2. $\mathrm{p} > 1,\ \lim_{\mathrm{a} \to \infty} \frac{1}{1-\mathrm{p}} (\mathrm{a}^{1-\mathrm{p}} - 1) = \frac{1}{1-\mathrm{p}}$ - кінцева межа, інтеграл збіжний, отже, ряд збіжний.

3. $0 < \mathrm{p} < 1,\ \lim_{\mathrm{a} \to \infty} \frac{1}{1-\mathrm{p}} (\mathrm{a}^{1-\mathrm{p}} - 1) = \infty$ - інтеграл розбіжний, ряд розбіжний.

4. $p = 1$; $\lim\limits_{\mathrm{a} \to \infty} \ln \mathrm{a} = \infty$ - інтеграл розбіжний, ряд розбіжний.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ збіжний при $\mathrm{p} > 1$ при $p \leq 0$ розбіжний. Даний ряд називається узагальненим гармонічним рядом. При $p = 1$ отримаємо гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який розбіжний.

Без доведення наводимо формулу, яка дозволяє оцінити залишок числового ряду (1.6) як зверху, так і знизу [37, с. 16-17]:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \ \leq R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)dx.$$

1.2.5. Метод порівняння при дослідження числових рядів на збіжність

Теорема

Якщо існує число n_0 таке, що для всіх $n \ \geq \ n_0$ виконується нерівність 0$\leq a_n \leq b_{n,}$ то зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ слідує збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_{n\,,}$ а із розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ слідує розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Якщо $a_n \geq 0, b_n > 0$ для всіх $n \ \geq \ n_0$і існує кінцева відмінна від нуля границя $\frac{a_n}{b_n}$, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжні або розбіжні одночасно.

Якщо $a_n \geq 0, b_n > 0$ при $n \geq n_0$ і $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ або обидва збіжні, або обидва розбіжні [25, с. 296].

Доведення.

Нехай $S_n -$часткова сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а $\sigma_n -$ часткова сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Так як ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то його часткова сума обмежена, тобто для всіх n, $S_n < M$, де М $-$ деяке число. Але так як $a_n \geq \ b_n$, то $S_n \geq \sigma_n$, а це значить , що часткова сума σ_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ також обмежена, а цього достатньо для збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ з невід'ємними членами.

Якщо ж ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ також розбіжний, так як припустивши, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається і $b_n \geq a_n$ за умовою, по вище доведеному повинен збігатися і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, що суперечить умові. Отже, ряд$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний [37, с. 11-12].

Приклад. Користуючись методом порівняння, дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n*2^n}$,

Розв'язання. Перевіримо, чи виконується для даного ряду необхідна ознака збіжності знакододатніх рядів $a_n = \frac{1}{n*2^n} = 0 -$ряд може збігатися.

Для порівняння розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, який збіжний, як ряд геометричної прогресії при $|q\,| < 1$, причому $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{n*2^n}$. Отже, за ознакою порівняння збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n*2^n}$.

<u>*Примітка.*</u> Якщо існує кінцева і відмінна від нуля границя $\frac{a_n}{b_n} = k$, то зі збіжність ряду із загальним членом a_n слідує збіжність ряду із загальним членом b_n, із розбіжність першого ряду слідує розбіжність другого [37, с. 12].

II РОЗДІЛ. ГЕНЕРАЦІЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА ПОБУДОВА ЇХ МОДЕЛЕЙ

2.1. Генерація рядів за допомогою кола

Задача 1. Розглянемо квадрат, навколо якого описане коло, в свою чергу, в цей квадрат вписане наступне коло і т.д. (рис. 2.1)

З цієї умови ми можемо згенерувати безліч задач, таких як :

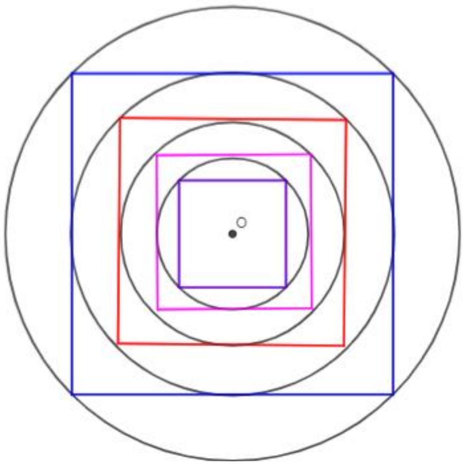


Рис. 2.1– кола описані навколо квадратів

1. Побудувати ряд довжин кіл.
2. Побудувати ряд площ кіл.
3. Побудувати ряд площ квадратів.
4. Побудувати ряд сторін квадратів.
5. Побудувати ряд відношень довжин сторін квадратів до радіусів описаних кіл.
6. Побудувати ряд відношень радіусів описаних кіл до сторін квадратів
7. Побудувати ряд діагоналей квадратів.
8. Побудувати ряд діаметрів кіл.
9. Побудувати відношення площі кола до площі квадрата

Розв'яжемо кожну із запропонованих задач.

Нехай початковий квадрат має сторону довжиною $a_1 = a$, тоді радіус першого кола (за формулою описаного кола навколо квадрата) $R_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Другий квадрат матиме сторону $a_2 = a\sqrt{2}$, тоді радіус другого кола рівний $R_2 = a$, третій квадрат має сторону довжиною $a_3 = 2a$, звідки радіус третього коло рівний $R_3 = \frac{2a}{\sqrt{2}}$ і т. д.

Маємо дві послідовності:

1) Послідовність сторін квадратів

$a, a\sqrt{2}, 2a$ ... - геометрична прогресія, де $b_1 = a, q = \sqrt{2}$.

2) Послідовність радіусів кіл

$\frac{a}{\sqrt{2}}, a, \frac{2a}{\sqrt{2}} \dots$ - геометрична прогресія $b_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}, q = \sqrt{2}.$

1. *Побудувати ряд довжин кіл*

Використовуючи формулу знаходження довжин кіл $C = 2\pi R$, обчислимо довжину кожного кола.

$$C_1 = 2\pi \frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$C_2 = 2\pi a,$$

$$C_3 = 2\sqrt{2}\pi a,$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$C_n = 2\pi \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}^n \pi a \qquad (2.1)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2}^n \pi a = \infty$, отже ряд розбіжний. Дослідимо ряд за допомогою ознаки Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a\pi\sqrt{2}^{n+1}}{a\pi\sqrt{2}^n} = \sqrt{2} > 1$, ряд розбіжний.

Запишемо частинну суму ряду та побудуємо графік перших десяти членів ряду.

$S_n = \pi\sqrt{2}^n$ - частинна сума ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми довжин кіл
1	4,442883
2	10,72607
3	19,61183
4	32,1782
5	49,94974
6	75,08248
7	110,6255
8	160,891
9	231,9772
10	332,5081

Рис.2.2. – графік частинних сум ряду (2.1)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

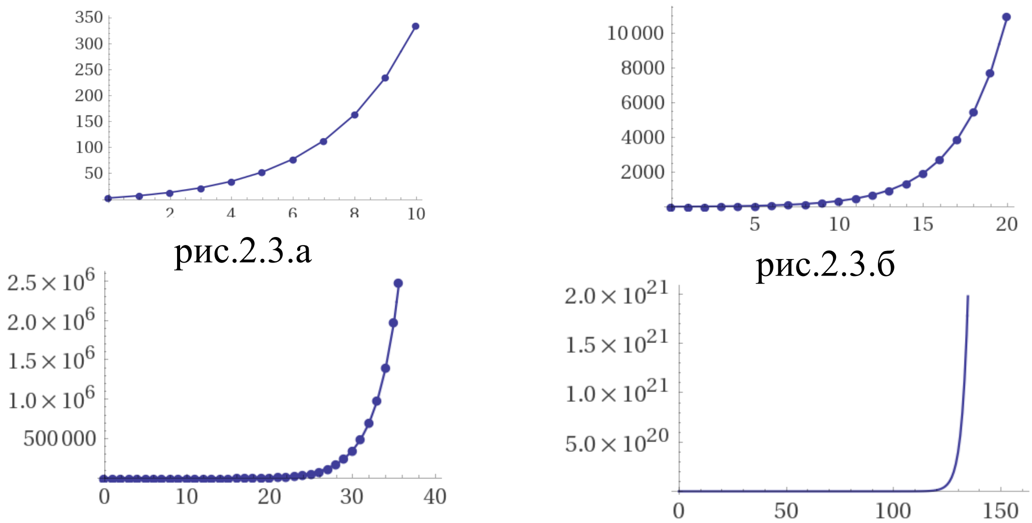


рис.2.3.а рис.2.3.б

рис.2.3.в. рис.2.3.г

Рис.2.3. – графіки зміни частинних сум для ряду (2.1)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.3.а), графік частинних сум ряду зростає більш повільно і суттєво зростає на (рис.2.3в), на (рис.2.3.г) графік набуває постійної швидкості.

2. Побудувати ряд площ кіл.

З попередньої задачі маємо послідовність радіусів кіл $\frac{a}{\sqrt{2}}, a, \frac{2a}{\sqrt{2}} \dots$

Використовуючи Формулу знаходження площ кіл $S = \pi R^2$, обчислимо площі для кожного кола.

$$S_1 = \pi \frac{a^2}{2},$$

$$S_2 = \pi a^2,$$

$$S_3 = \pi 2a^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$S_n = \pi \frac{a^2}{2}\ a^{n-1}.$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-2}\pi a^2 \quad (2.2)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{n-2}\pi a^2 = \infty$, отже ряд розбіжний. Дослідимо ряд за допомогою ознаки Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^2\pi 2^{n-1}}{a\pi 2^{n-1}} = 2 > 1$, ряд розбіжний.

Запишемо частинну суму ряду та побудуємо графік перших десяти членів ряду.

$S_n = 2^{n-2}\pi$- частинна сума ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми площ кіл
1	1,570796
2	4,712389
3	10,99557
4	23,56194
5	48,69469
6	98,96017
7	199,4911
8	400,5531
9	802,6769
10	1606,925

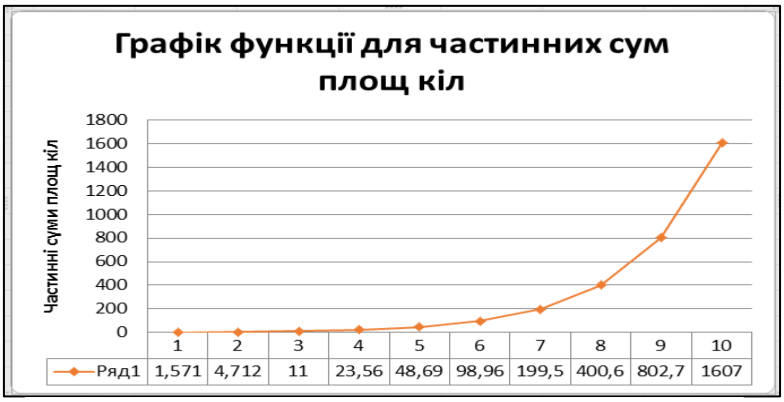


Рис.2.4. – графік частинних сум ряду (2.2)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

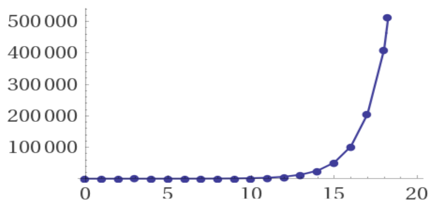


рис.2.5.а

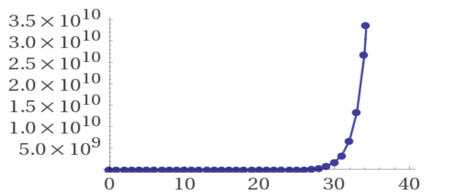


рис.2.5.б

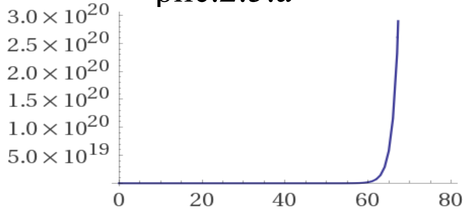


рис.2.5.в

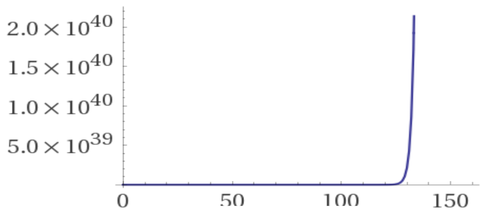


рис.2.5.г

Рис.2.5. – графіки зміни частинних сум для ряду (2.2)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.5.а), графік частинних сум ряду зростає більш повільно і суттєво зростає на (рис.2.5.в), на (рис.2.5.г) графік набуває постійної швидкості.

3. Побудувати ряд площ квадратів.

З першої задачі маємо послідовність довжин сторін квадратів $a, a\sqrt{2}, 2a \ldots$

Використовуючи формулу знаходження площ квадратів $S = a^2$, маємо такі значення площ для кожного квадрата:

$$S_1 = a^2,$$

$$S_2 = 2a^2,$$

$$S_3 = 4a^2,$$

$$\ldots \ldots \ldots$$

$$S_n = a^2 \cdot 2^{n-1}.$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a^2 \cdot 2^{n-1} \qquad (2.3)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} a^2 \cdot 2^{n-1} = \infty$, отже ряд розбіжний. Дослідимо ряд за допомогою ознаки Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^2\pi 2^n}{a^2\pi 2^{n-1}} = 2 > 1$, ряд розбіжний.

Запишемо частинну суму ряду та побудуємо графік перших десяти членів ряду. $S_n = 2^{n-1}$- частинна сума ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми площ квадратів
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
8	255
9	511
10	1023

Рис.2.6. – графік частинних сум ряду (2.3)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду

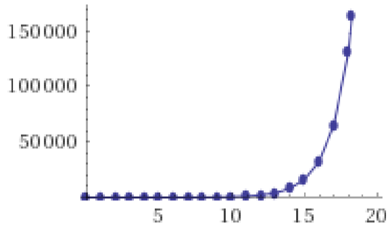


рис.2.7.а

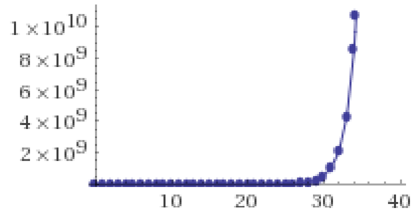


рис.2.7.б

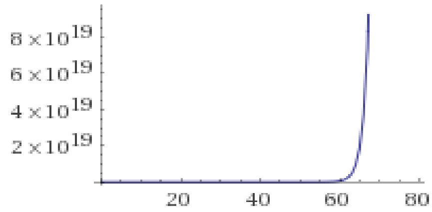


рис.2.7.в

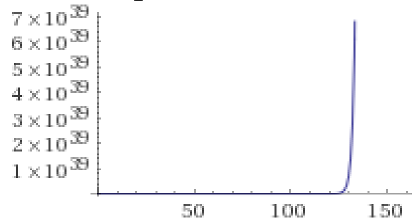


рис.2.7.г

Рис.2.7. – графіки зміни частинних сум для ряду (2.3)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.7.а), графік частинних сум ряду зростає більш повільно і суттєво зростає на (рис.2.7.в), на (рис.2.7.г) графік набуває постійної швидкості.

4. Побудувати ряд сторін квадратів.

З першої задачі маємо послідовність довжин сторін квадратів $a, a\sqrt{2}, 2a$ ...

Позначимо значення сторони за d, тоді маємо

$$d_1 = a,$$

$$d_2 = a\sqrt{2},$$

$$d_3 = 2a,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$d_n = a\sqrt{2}^{n-1},$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty} a\sqrt{2}^{n-1} \qquad (2.4)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\sqrt{2}^{n-1} = \infty$, отже ряд розбіжний. Дослідимо ряд за допомогою ознаки Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a\pi\sqrt{2}^{n}}{a\pi\sqrt{2}^{n-1}} = \sqrt{2} > 1$, ряд розбіжний.

Запишемо частинну суму ряду та побудуємо графік перших десяти членів ряду.

$S_n = \sqrt{2}^{n-1}$ - частинна сума ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми сторін квадратів
1	1
2	2,41421
3	4,41421
4	7,24264
5	11,2426
6	16,8995
7	24,8995
8	36,2132
9	52,2132
10	74,8406

Рис.2.8. – графік частинних сум ряду (2.4)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

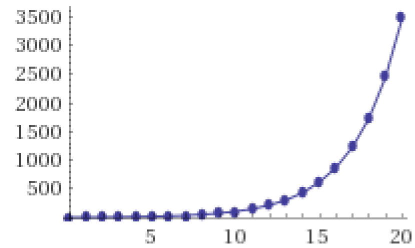


рис.2.9.а

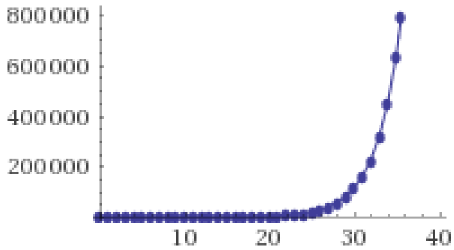


рис.2.9.б

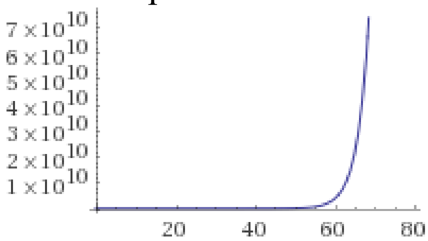


рис.2.9.в

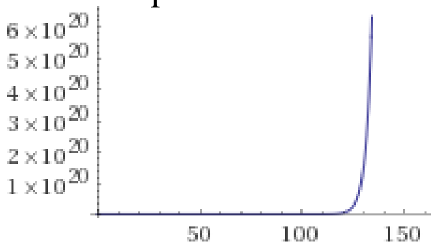


рис.2.9.г

Рис.2.9. – графіки зміни частинних сум для ряду (2.4)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.9.а), графік частинних сум ряду зростає більш повільно і суттєво зростає на (рис.2.9.в), на (рис.2.9.г) графік набуває постійної швидкості.

5. Побудувати ряд відношень довжин сторін квадратів до радіусів описаних кіл.

З першої задачі маємо послідовність довжин сторін квадратів і послідовність радіусів описаних кіл. Позначимо відношення $-K$, тоді маємо:

$$K_1 = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2},$$

$$K_2 = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2},$$

$$K_3 = \frac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$K_n = \frac{a\sqrt{2}^{n-1}}{a\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}^{n-1}} = \sqrt{2}.$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt{2} \qquad (2.5)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} n\sqrt{2} = \infty$, отже ряд розбіжний, оскільки не виконується необхідна умова збіжності.

Запишемо частинну суму ряду та побудуємо графік перших десяти членів ряду. $S_n = n\sqrt{2}$- частинна сума ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми відношень
1	1,414214
2	4,242641
3	8,485281
4	14,14214
5	21,2132
6	29,69848
7	39,59798
8	50,91169
9	63,63961
10	77,78175

Рис.2.10. – графік частинних сум ряду (2.5)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

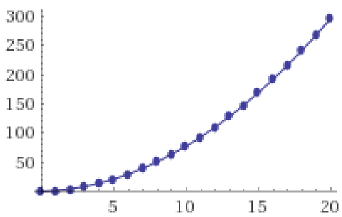


рис.2.11.а

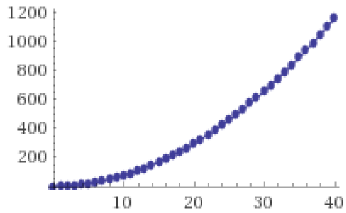


рис.2.11.б

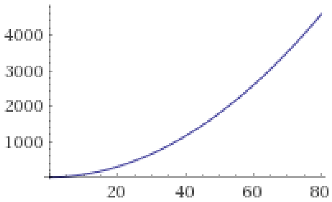


рис.2.11.в

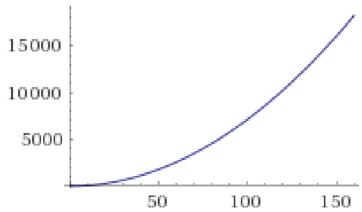


рис.2.11.г

Рис.2.11. – графіки зміни частинних сум для ряду (2.5)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.11), графіки частинних сум ряду зростають більш повільно та поступово набувають постійної швидкості.

6. Побудувати ряд відношень радіусів описаних кіл до сторін квадратів.

З першої задачі ми маємо послідовність сторін квадрата та послідовність радіусів кіл. Позначимо відношення через k, тоді маємо:

$$k_1 = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$k_2 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$k_3 = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$k_n = \frac{a\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}^{n-1}}{a\sqrt{2}^{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2}} \qquad (2.6)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$\lim\limits_{n\to\infty} k_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{2}} = \infty$, отже ряд розбіжний.

Запишемо частинну суму ряду та побудуємо графік перших десяти членів ряду. $S_n = \frac{n}{\sqrt{2}}$ - частинна сума ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми відношень радіусів описаних кіл до сторони квадрата
1	0,707106781
2	2,121320344
3	4,242640687
4	7,071067812
5	10,60660172
6	14,8492424
7	19,79898987
8	25,45584412
9	31,81980515
10	38,89087297

Рис.2.12. – графік частинних сум ряду (2.6)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

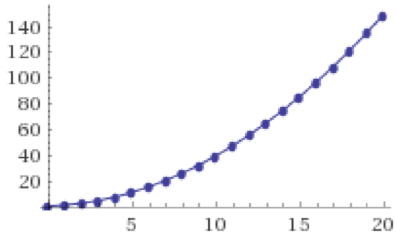


рис.2.13.а

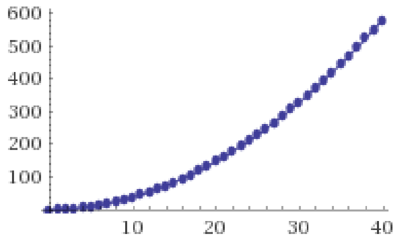


рис.2.13.б

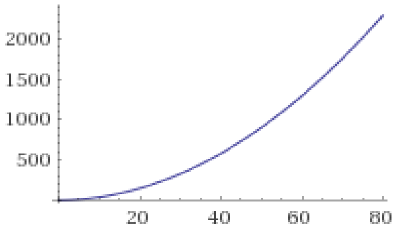


рис.2.13.в

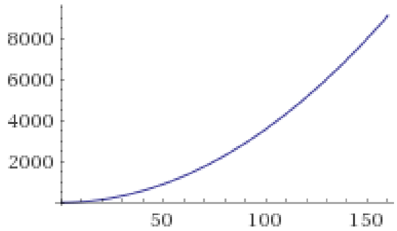


рис.2.13.г

Рис.2.13. – графіки зміни частинних сум для ряду (2.6)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.13), графіки частинних сум ряду зростають більш повільно та поступово набувають постійної швидкості.

7. Побудувати ряд діагоналей квадратів.

З першої задачі маємо послідовність довжин сторін квадратів. Використовуючи формулу знаходження довжин діагоналі квадрата $d = a\sqrt{2}$, маємо:

$$d_1 = a\sqrt{2},$$
$$d_2 = 2a,$$
$$d_3 = 2a\sqrt{2},$$
$$\dots\ \dots\ \dots$$
$$d_n = a\sqrt{2}^n.$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty} a\sqrt{2}^n \qquad (2.7)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} a\sqrt{2}^n = \infty$$, отже ряд розбіжний

Запишемо частинну суму ряду та побудуємо графік перших десяти членів ряду.

$S_n = \sqrt{2}^n$ - частинна сума ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми діагоналей квадратів
1	1,41421
2	3,41421
3	6,24264
4	10,2426
5	15,8995
6	23,8995
7	35,2132
8	51,2132
9	73,8406
10	105,841

Рис.2.14. – графік частинних сум ряду (2.7)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

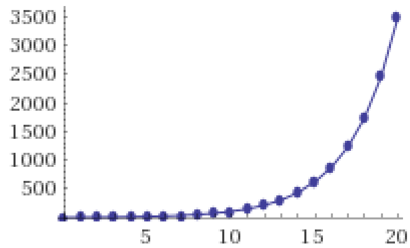


рис.2.13.а

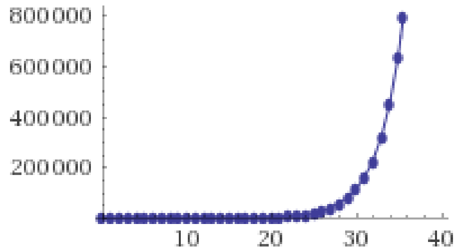


рис.2.15.б

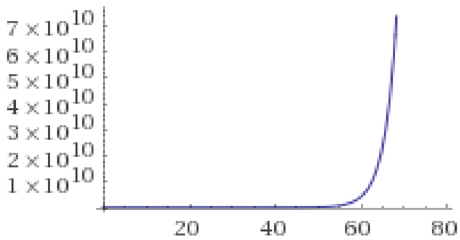


рис.2.15.в

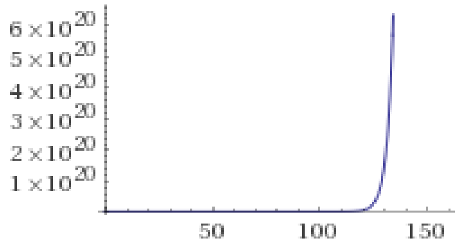


рис.2.15.г

Рис.2.15. – графіки зміни частинних сум для ряду (2.7)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.15.а), графік частинних сум ряду зростає більш повільно і суттєво зростає на (рис.2.15.в), на (рис.2.15.г) графік набуває постійної швидкості.

8. Побудувати ряд діаметрів кіл.

З першої задачі маємо послідовність значень радіусів кіл. Використовуючи формулу знаходження діаметрів кіл $D = 2R$, маємо:

$$D_1 = a\sqrt{2},$$

$$D_2 = 2a,$$

$$D_3 = 2a\sqrt{2},$$

$$\dots \; \dots \; \dots$$

$$D_n = a\sqrt{2}^n,$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n = \sum_{n=1}^{\infty} a\sqrt{2}^n \qquad (2.8)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$\lim\limits_{n\to\infty} D_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\sqrt{2}^n = \infty$, отже ряд розбіжний

Запишемо частинну суму ряду та побудуємо графік перших десяти членів ряду.

$S_n = \sqrt{2}^n$ - частинна сума ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми діагоналей квадратів
1	1,41421
2	3,41421
3	6,24264
4	10,2426
5	15,8995
6	23,8995
7	35,2132
8	51,2132
9	73,8406
10	105,841

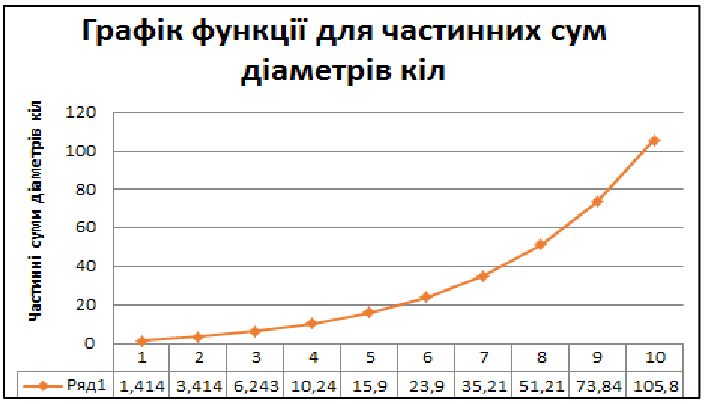


Рис.2.16. – графік частинних сум ряду (2.8)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

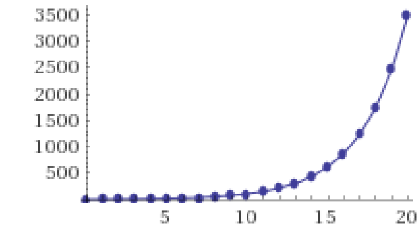


рис.2.17.а

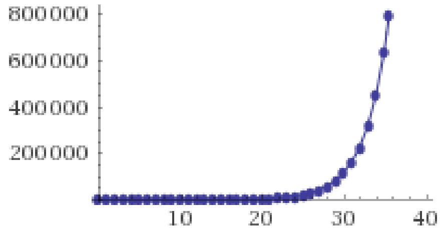


рис.2.17.б

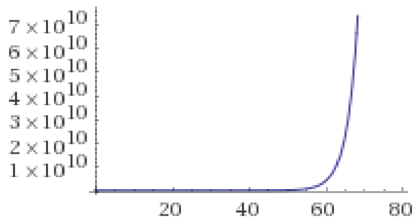


рис.2.17.в

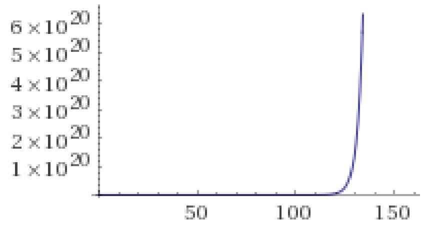


рис.2.17.г

Рис.2.17. – графіки зміни частинних сум для ряду (2.8)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.17.а), графік частинних сум ряду зростає більш повільно і суттєво зростає на (рис.2.17.в), на (рис.2.17.г) графік набуває постійної швидкості.

9. *Побудувати відношення площі кола до площі квадрата*

З третьої та другої задачі маємо такі отримані числові ряди:

1. ряд площ кіл: $\frac{a^2}{2}\pi, a^2\pi, 2a^2\pi, \dots, 2^{n-2}a^2\pi$;
2. ряд площ квадратів: $a^2, 2a^2, 4a^2, \dots, a^2\ 2^{n-1}$.

Позначимо відношення за s, тоді матимемо

$$s_1 = \frac{\frac{a^2\pi}{2}}{a^2} = \frac{\pi}{2},$$

$$s_2 = \frac{a^2\pi}{2a^2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$s_2 = \frac{2^{n-2}a^2\pi}{a^2\ 2^{n-1}} = \frac{\pi}{2}.$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} n \qquad (2.9)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} n = \infty, \text{ отже ряд розбіжний}$$

Запишемо частинну суму ряду та побудуємо графік перших десяти членів ряду.

$S_n = \frac{\pi}{2} n$ - частинна сума ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми відношенню площі кола до площі квадрата
1	1,570796327
2	4,71238898
3	9,424777961
4	15,70796327
5	23,5619449
6	32,98672286
7	43,98229715
8	56,54866776
9	70,68583471
10	86,39379797

Рис.2.18. – графік частинних сум ряду (2.9)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

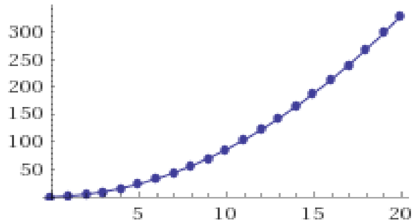


рис.2.19.а

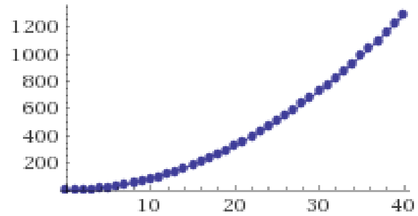


рис.2.19.б

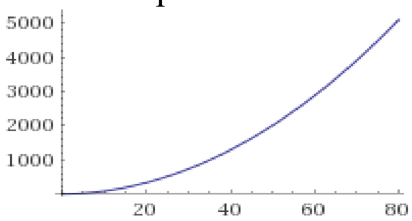


рис.2.19.в

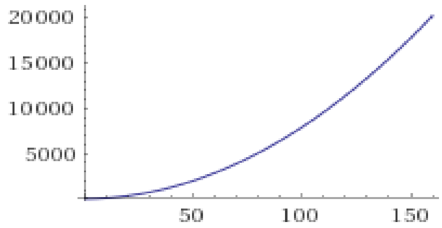


рис.2.19.г

Рис.2.19. – графіки зміни частинних сум для ряду (2.9)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.19), графіки частинних сум ряду зростають більш повільно та поступово набувають постійної швидкості.

Задача 2. Радіуси кіл змінюються за законом арифметичної прогресії.

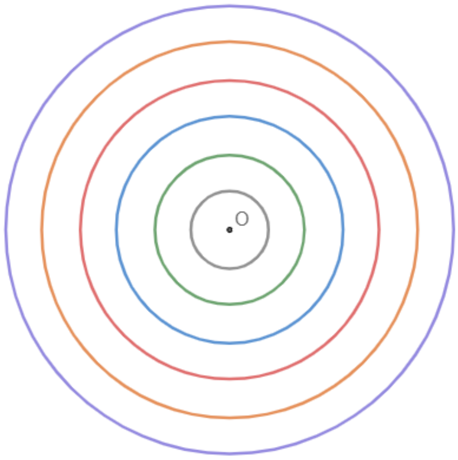


Рис.2.20.-концентричні кола

З цієї умови ми можемо згенерувати безліч задач, таких як :

1. Побудувати ряд площ кіл
2. Побудувати ряд довжин кіл
3. Побудувати ряд відношень площі кола до радіуса кола

Запишемо формулу зміни радіусів кіл $(a + (n-1)d)$

1. Побудувати ряд площ кіл

Використовуючи формулу знаходження площі кола $S = \pi R^2$, запишемо отриманий ряд

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} (a + (n-1)d)^2 \qquad (2.10)$$

Даний ряд $\lim_{n\to\infty} \pi(a + (n-1)d)^2 = \infty$ розбіжний.

Побудуємо частинні суми даного ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми площ кіл
1	3,141592654
2	15,70796327
3	43,98229715
4	94,24777961
5	172,7875959
6	285,8849315
7	439,8229715
8	640,8849013
9	895,3539063
10	1209,513172

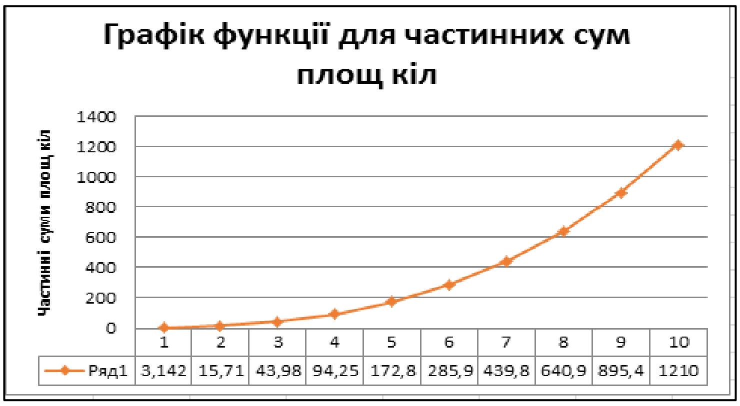


Рис.2.21. – графік частинних сум ряду (2.10)

Можемо прийти до висновку, чим більше членів містить частинна сума, тим більше її значення, та графік більш круто піднімається зі збільшенням кількості членів.

2. Побудувати ряд довжин кіл

Використовуючи формули знаходження довжини кола $C = 2\pi R$ ы формули сум арифметичної прогресії, запишемо отриманий ряд

$$2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (a + (n-1)d) \qquad (2.11)$$

Даний ряд $\lim_{n\to\infty} 2\pi(a + (n-1)d) = \infty$ розбіжний.

Побудуємо частинні суми даного ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми довжин кіл
1	6,283185307
2	18,84955592
3	37,69911184
4	62,83185307
5	94,24777961
6	131,9468915
7	175,9291886
8	226,1946711
9	282,7433388
10	345,5751919

Рис.2.22. – графік частинних сум ряду (2.11)

Можемо прийти до висновку, чим більше членів містить частинна сума, тим більше її значення, та графік більш круто піднімається зі збільшенням кількості членів.

3. Побудувати ряд відношень площі кола до радіуса кола

З попередніх задач, у нас є формули площ та радіусів кіл. Позначимо дане відношення через k, тоді маємо:

$$k = \frac{a + (n-1)d}{2}.$$

Підставимо замість n числа від 1 до ∞, отримаємо такі ряди:

$$k_1 = \frac{a}{2},$$

$$k_2 = \frac{a}{2} + \frac{d}{2},$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$k_n = \frac{a}{2} + \frac{(n-1)d}{2}.$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{2}+\frac{(n-1)d}{2}\right) \qquad (2.12)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність:

$$\delta_n = k_1 + k_2 + \cdots + k_n = \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}+\frac{d}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{a}{2}+\frac{(n-1)d}{2}\right) =$$

$$= \frac{an}{2} + d\left(\frac{\frac{1}{2}(2^n-1)}{2-1}\right) = \frac{an}{2} + \frac{(2^n-1)d}{2}.$$

Отже, даний ряд є розбіжним. Побудуємо графік частинних сум ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми відношень площі кола до радіуса кола
1	0,5
2	1,5
3	3
4	5
5	7,5
6	10,5
7	14
8	18
9	22,5
10	27,5

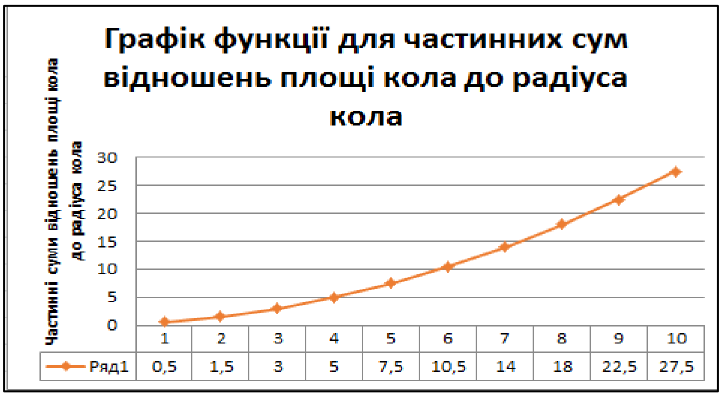


Рис.2.23. – графік частинних сум ряду (2.12)

Можемо прийти до висновку, чим більше членів містить частинна сума, тим більше її значення, та графік більш круто піднімається зі збільшенням кількості членів.

2.2. Генерація рядів за допомогою квадрата

Задача 3. Нехай навколо квадрата описано квадрат таким чином, що вершини першого квадрата лежать на серединах сторін другого квадрата, в свою чергу навколо другого квадрат аналогічно побудований третій квадрат і т.д.

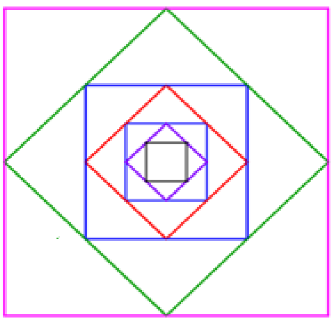


Рис.2.24. – вписані квадрати

З умови цієї задачі ми можемо згенерувати такі задачі:

1. Побудувати ряд значень сторін квадрата.
2. Побудувати ряд значень площ квадрата.
3. Побудувати ряд периметрів квадратів.

Розв'яжемо кожну із запропонованих задач.

1. Побудувати ряд значень сторін квадрата

Нехай початковий квадрат має сторону довжиною a. Позначимо значення сторони через d.

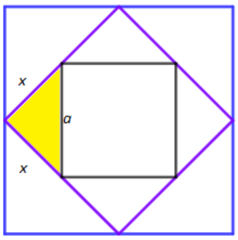


Рис.2.25.

Для першого квадрата $d_1 = a$.

Для другого квадрата розглянемо трикутник за наступним рисунком.

Маємо рівність катетів і позначимо їх за x. Тоді за теоремою Піфагора

$$x^2 + x^2 = a^2,$$

$$2x^2 = a^2,$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2},$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Тоді $d_2 = 2\text{x} = a\sqrt{2}$.

Для третього квадрата розглянемо трикутник за наступним рисунком.

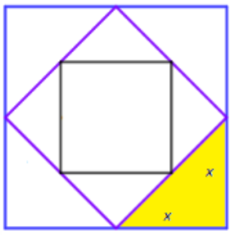


Рис.2.26

Аналогічно, як для d_2, маємо:

$$x^2 + x^2 = 2a^2,$$

$$2x^2 = 2a^2,$$

$$x^2 = a^2,$$

$$x = a.$$

Тоді $d_3 = 2\text{x} = 2a$.

Запишемо утворений ряд $a, a\sqrt{2}, 2a \ldots a\sqrt{2}^{\,n-1}$- геометрична послідовність, де $b_1 = a, q = \sqrt{2}$.

Маємо ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\sqrt{2}^{\,n-1} \qquad (2.13)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\sqrt{2}^{n-1} = \infty$, отже ряд розбіжний.

Запишемо частинну суму ряду та побудуємо графік перших десяти членів ряду.

$S_n = \sqrt{2}^{n-1}$ – частинна сума ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми значень сторін квадрата
1	1
2	2,414213562
3	4,414213562
4	7,242640687
5	11,24264069
6	16,89949494
7	24,89949494
8	36,21320344
9	52,21320344
10	74,84062043

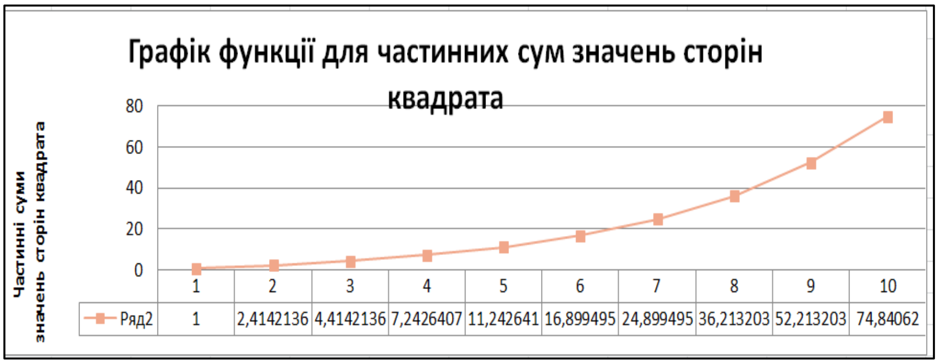


Рис.2.27. – графік частинних сум ряду (2.13)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

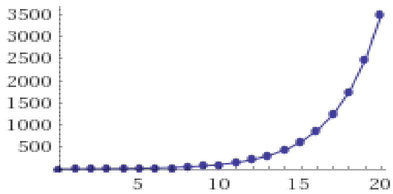


рис.2.28.а

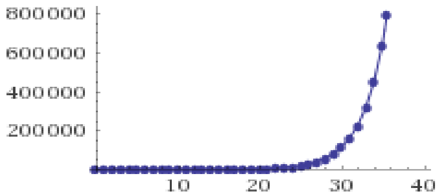


рис.2.28.б

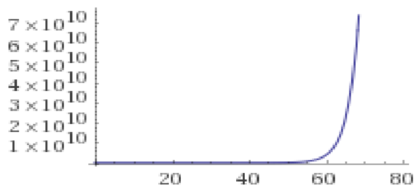


рис.2.28.в

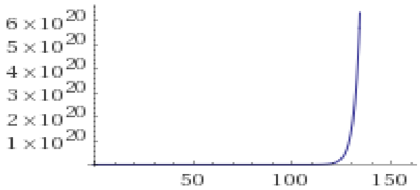


рис.2.28.г

Рис.2.28. – графіки зміни частинних сум для ряду (2.13)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.28.а), графік частинних сум ряду зростає більш повільно і суттєво зростає на (рис.2.28.в), на (рис.2.28.г) графік набуває постійної швидкості.

2. Побудувати ряд значень площ квадрата.

Маючи послідовність сторін квадратів і використовуючи формулу для знаходження площ $S = a^2$, маємо

$$S_1 = a^2,$$

$$S_2 = 2a^2,$$

$$S_3 = 4a^2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$S_n = a^2 \cdot 2^{n-1}.$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a^2 \cdot 2^{n-1} \qquad (2.14)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a^2 \cdot 2^{n-1} = \infty$, отже ряд розбіжний

Запишемо частинну суму ряду та побудуємо графік перших десяти членів ряду.

$S_n = 2^{n-1}$- частинна сума ряду.

n-й член геометрично ї прогресії	Частинні суми площ квадратів
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
8	255
9	511
10	1023

Рис.2.29. – графік частинних сум ряду (2.14)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду

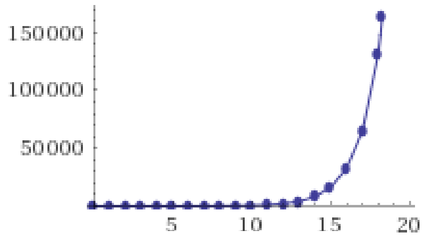


рис.2.30.а

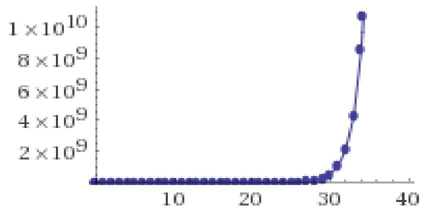


рис.2.30.б

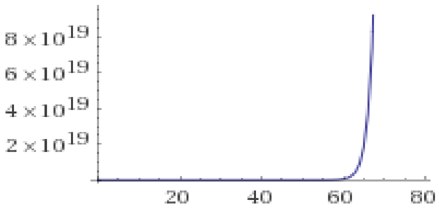


рис.2.30.в

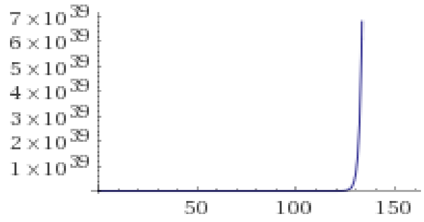


рис.2.30.г

Рис.2.30. – графіки зміни частинних сум для ряду (2.14)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.30.а), графік частинних сум ряду зростає більш повільно і суттєво зростає на (рис.2.30.в), на (рис.2.30.г) графік набуває постійної швидкості.

3. Побудувати ряд периметрів квадратів.

Маючи послідовність сторін квадратів і використовуючи формулу для знаходження периметрів $P = 4a$, маємо

$$P_1 = 4a,$$

$$P_2 = 4\sqrt{2}a,$$

$$P_3 = 8a,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P_n = 4a \cdot 2^{n-1}.$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} 4a \cdot 2^{n-1} \qquad (2.15)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} 4a \cdot 2^{n-1} = \infty$, отже ряд розбіжний

Запишемо частинну суму ряду та побудуємо графік перших десяти членів ряду.

$S_n = 4a \cdot 2^{n-1}$- частинна сума ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми периметрів квадратів
1	4
2	5,65685
3	8
4	11,3137
5	16
6	22,6274
7	32
8	45,2548
9	64
10	90,5097

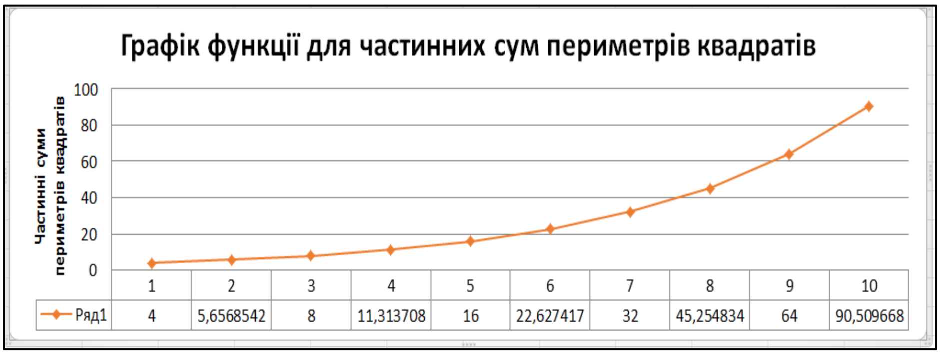


Рис.2.31. – графік частинних сум ряду (2.15)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду

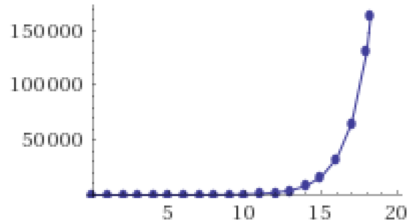


рис.2.31.а

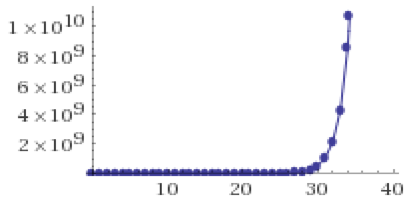


рис.2.31.б

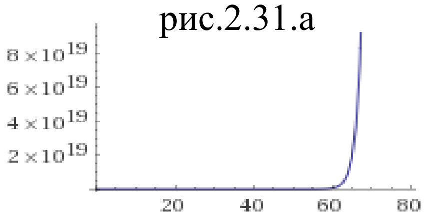


рис.2.31.б

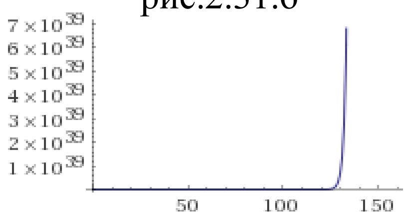


рис.2.31.г

Рис.2.32. – графіки зміни частинних сум для ряду (2.15)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.31.а), графік частинних сум ряду зростає більш повільно і суттєво зростає на (рис.2.31.в), на (рис.2.31.г) графік набуває постійної швидкості.

Задача 4. Сторона квадрата змінюється за законом гармонічного ряду (рис. 2.33).

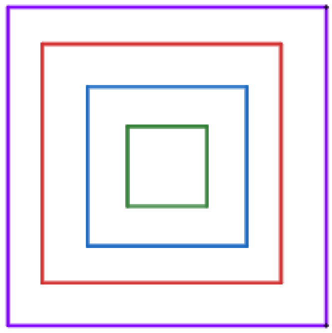


Рис.2.33-квадрати, діагоналі яких мають спільну точку перетину

З умови цієї умови ми можемо згенерувати такі задачі:

1. Побудувати ряд радіусів описаних кіл.

2. Побувати ряд відношень сторони квадрати до радіуса кола.

Розв'яжемо кожну із запропонованих задач.

1. Побудувати ряд радіусів описаних кіл.

Використовуючи формули радіуса описаного кола $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, маємо:

$$R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$R_2 = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$R_3 = \frac{\sqrt{2}}{6},$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$R_n = \frac{\sqrt{2}}{2n}.$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2n} \qquad (2.16)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність.

$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{2n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ – гармонічний ряд, а отже ряд розбіжний.

Побудуємо графік частинних сум перших десяти членів ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми радіусів описаних кіл
1	0,7071068
2	1,0606602
3	1,2963624
4	1,4731391
5	1,6145605
6	1,7324116
7	1,8334269
8	1,9218152
9	2,0003826
10	2,0710933

Рис.2.34. – графік частинних сум ряду (2.16)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

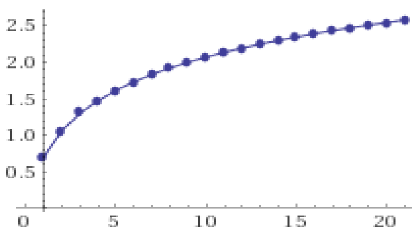


рис.2.35.а

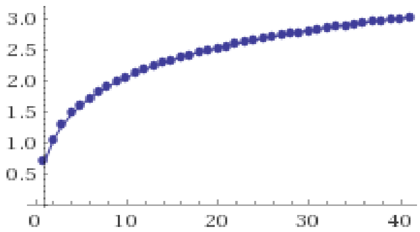


рис.2.35.б

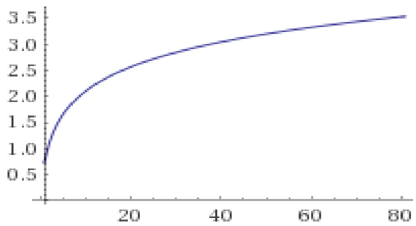


рис.2.35.в

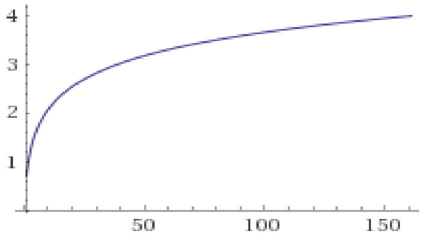


рис.2.35.г

Рис.2.35. – зміна графіка частинних сум ряду (2.16)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.35), графіки частинних сум ряду зростають більш повільно та поступово набувають постійної швидкості.

2. *Побудувати ряд відношень сторони квадрата до радіуса кола.*

Послідовність сторін має вигляд: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$, а послідовність радіусів: $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \dots, \frac{\sqrt{2}}{2n}$.

Позначимо відношення через K, тоді отримаєм:

$$K_n = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{2n}} = \sqrt{2}.$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} К_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}n \qquad (2.17)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність.

$\lim\limits_{n\to\infty} K_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2}n = \infty$, отже ряд розбіжний.

Побудуємо графік частинних сум перших десяти членів ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми відношення сторони до радіуса кола
1	1,414213562
2	4,242640687
3	8,485281374
4	14,14213562
5	21,21320344
6	29,69848481
7	39,59797975
8	50,91168825
9	63,63961031
10	77,78174593

Рис.2.36. – графік частинних сум ряду (2.17)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

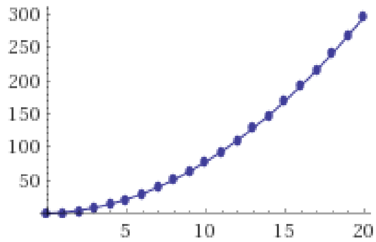


рис.2.37.а

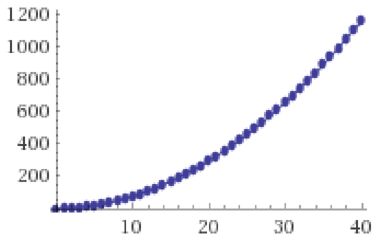


рис.2.37.б

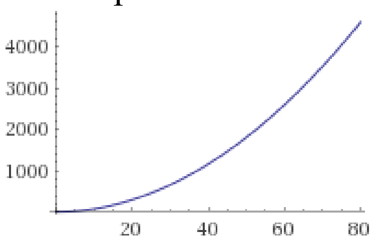


рис.2.37.в

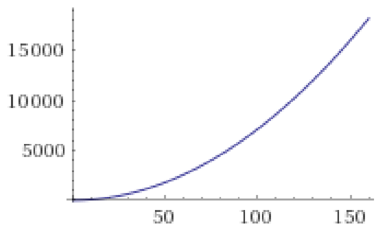


рис.2.37.г

Рис.2.37. – графіки зміни частинних сум ряду (2.17)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.37), графіки частинних сум ряду зростають більш повільно та поступово набувають постійної швидкості.

Задача 5. Сторона квадрата змінюється за законом геометричної прогресії. В квадрат вписано рівнобедрений трикутник (рис. 2.24)

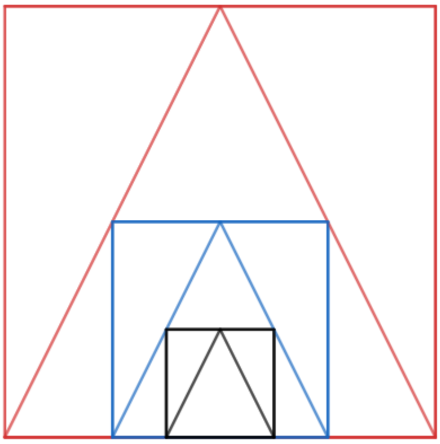


Рис.2.38. – графік вписаного трикутника в квадрат

З умови цієї задачі ми можемо згенерувати такі задачі:

1. Побудувати ряд відношень сторони квадрата до сторони трикутника.
2. Побудувати ряд відношень площі квадрата до площі трикутника.
3. Побудувати ряд відношень периметрів квадрата до периметрів трикутника.

Розв'яжемо кожну із запропонованих задач.

1. Побудувати ряд відношень сторони квадрата до сторони трикутника.

Сторони квадрата утворюють послідовність: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \ldots; \frac{1}{2^{n-1}}$.

Для знаходження сторін трикутника використаємо формулу: $c = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, звідси маємо:

$$c_1 = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$c_2 = \frac{\sqrt{5}}{4},$$

$$c_3 = \frac{\sqrt{5}}{8},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_n = \frac{\sqrt{5}}{2^n}.$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{2^n} \qquad (2.18)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність.

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5}}{2^n} = \|\text{за озн. Даламбера}\| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n \cdot 2} = \frac{1}{2},$$

отже ряд розбіжний.

Побудуємо графік частинних сум перших десяти членів ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми відношенння сторони квадрата до сторони трикутника
1	1,118033989
2	1,677050983
3	1,95655948
4	2,096313729
5	2,166190853
6	2,201129415
7	2,218598696
8	2,227333337
9	2,231700657
10	2,233884317

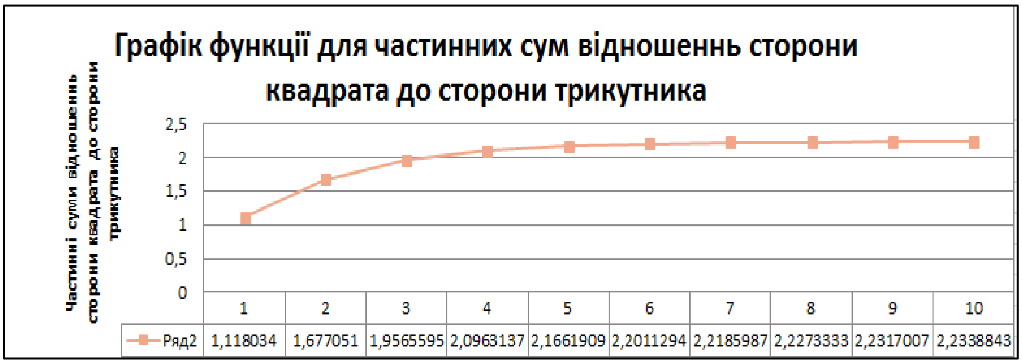


Рис.2.39. – графік частинних сум ряду (2.18)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду

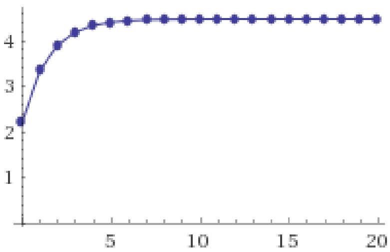


рис.2.40.а

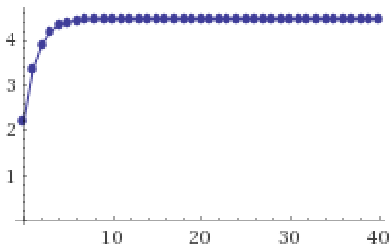


рис.2.40.б

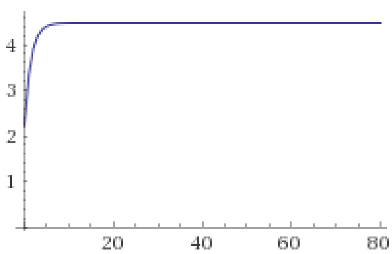


рис.2.40.в

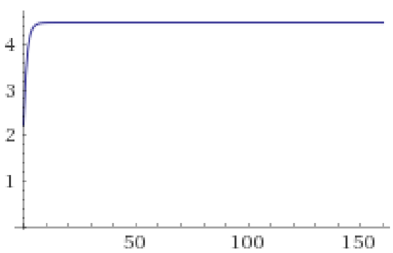


рис.2.40.г

Рис.2.40. – графіки зміни частинних сум ряду (2.18)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.40.а), графік частинних сум ряду зростає більш повільно і суттєво зростає на (рис.2.40.в), на (рис.2.40.г) графік набуває постійної швидкості.

2. *Побудувати ряд відношень площі квадрата до площі трикутника.*

Використовуючи формули для знаходження площ квадрата $S_к = a^2$ і площ трикутника $S_т = \frac{a^2}{2}$, маємо:

1. Послідовність площ квадрата: $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2^{2n-2}}$.
2. Послідовність площ трикутників: $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}$ $, \dots, \frac{1}{2^{2n-1}}$.

Позначимо відношення за k, тоді маємо

$$k_n = \frac{\frac{1}{2^{2n-2}}}{\frac{1}{2^{2n-1}}} = 2.$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \qquad (2.19)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність.

$\lim\limits_{n\to\infty} k_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2n = \infty$, отже ряд розбіжний.

Побудуємо графік частинних сум перших десяти членів ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми відношенны площ
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110

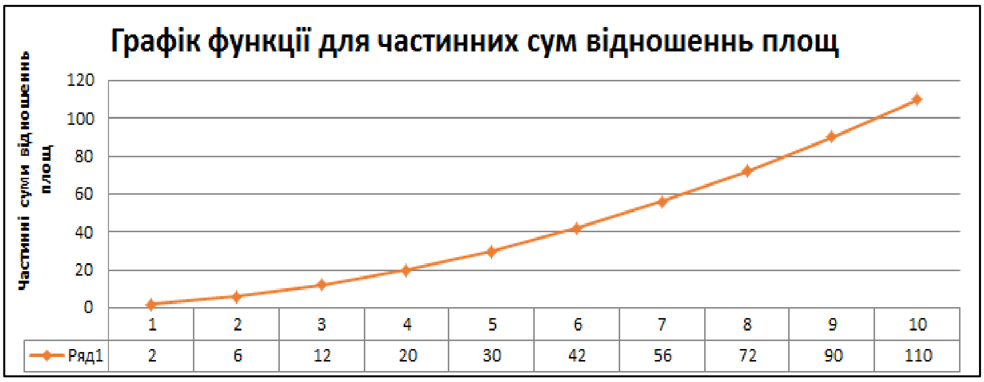


Рис.2.41. – графік частинних сум ряду (2.19)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

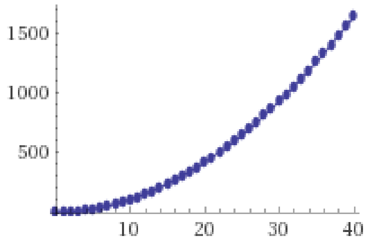


рис.2.42.а

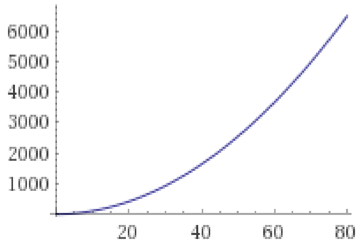


рис.2.42.б

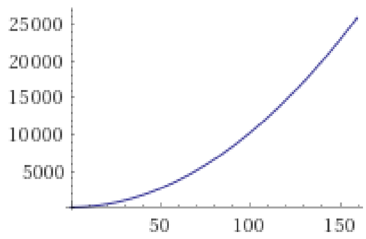


рис.2.42.в

Рис.2.42. – графіки зміни частинних сум ряду (2.19)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.42), графіки частинних сум ряду зростають більш повільно та поступово набувають постійної швидкості.

3. *Побудувати ряд відношень периметрів квадрата до периметрів трикутника.*

Використовуючи формули для знаходження периметрів квадрата $P_к = 4a$ і периметрів трикутника $Р_т = a + 2b = a(1+\sqrt{5})$, маємо:

1. Послідовність периметрів квадрата: $4,2,1,\dots,2^{3-n}$
2. Послідовність периметрів трикутників:

$(1+\sqrt{5}), \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\ , \dots , \frac{(1+\sqrt{5})}{2^{n-1}}$.

Позначимо відношення за k, тоді маємо

$$k_n = \frac{2^{3-n}}{\frac{(1+\sqrt{5})}{2^{n-1}}} = \frac{4}{1+\sqrt{5}}.$$

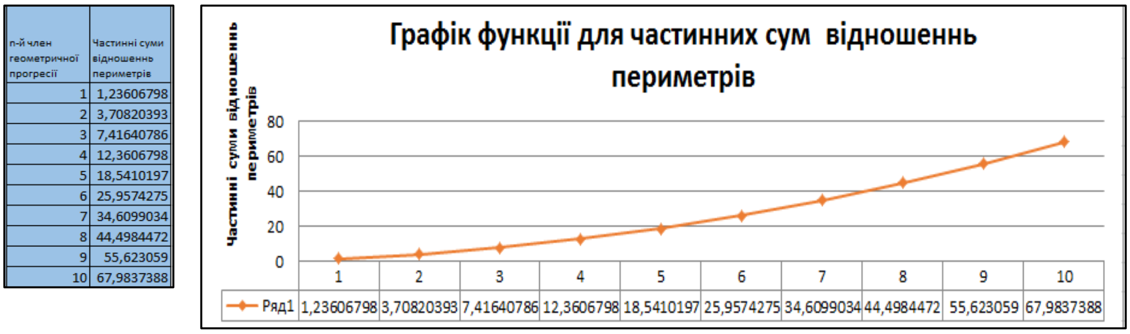
Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{1+\sqrt{5}} \cdot n \qquad (2.20)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність.

$\lim\limits_{n\to\infty} k_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{1+\sqrt{5}} \cdot n = \infty$, отже ряд розбіжний.

Побудуємо графік частинних сум перших десяти членів ряду.



n-й член геометричної прогресії	Частинні суми відношення периметрів
1	1,23606798
2	3,70820393
3	7,41640786
4	12,3606798
5	18,5410197
6	25,9574275
7	34,6099034
8	44,4984472
9	55,623059
10	67,9837388

Рис.2.43. – графік частинних сум ряду (2.20)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду

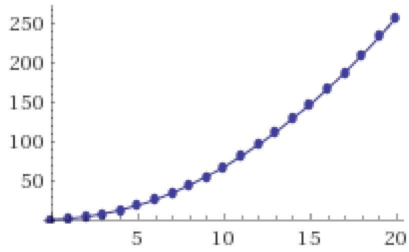


рис.2.44.а

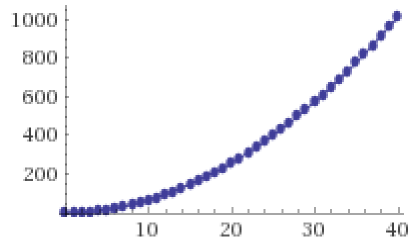


рис.2.44.б

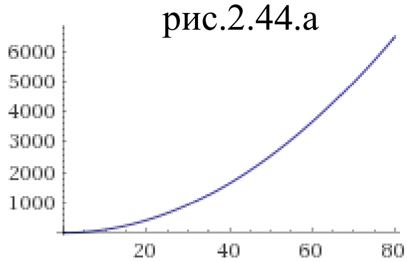


рис.2.44.в

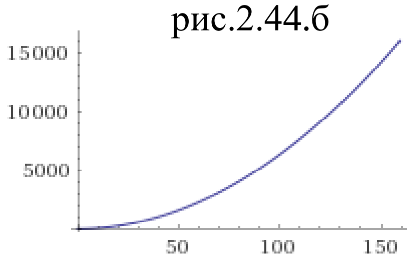


рис.2.44.г

Рис.2.44. – графіки зміни частинних сум ряду (2.20)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.44), графіки частинних сум ряду зростають більш повільно та поступово набувають постійної швидкості.

2.3. Генерація рядів за допомогою криволінійної трапеції

Задача 6. На (рис.2.45) зображено функцію $y = x^2 (x > 0)$. Нам треба побудувати ряд з величин площ криволінійних трапецій.

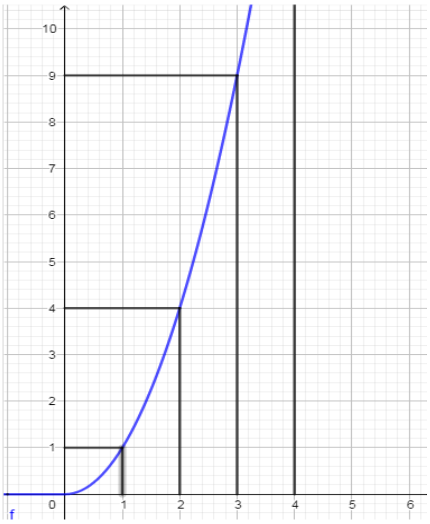


Рис.2.45. – графік функції $y = x^2$

Використовуючи формулу знаходження площі криволінійної трапеції.

$$S = \int_a^b f(x)dx,$$

маємо:

$$S_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$S_2 = \int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3},$$

$$S_3 = \int_2^3 x^2 dx = \frac{10}{3},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$S_n = \frac{n^3 - (n-1)^3}{3}.$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - (n-1)^3}{3} \qquad (2.21)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-(n-1)^3}{3}$, даний ряд можна представити у вигляді $V_n = \frac{n^3}{3}$.

Записуємо ознаку порівняння:

$$\frac{n^3 - (n-1)^3}{3} > \frac{n^3}{3} > \frac{1}{n}$$

Оскільки, гармонічний ряд $\frac{1}{n}$ розбіжний, то початковий ряд $\frac{n^3-(n-1)^3}{3}$, також розбіжний.

Запишемо частинну суму ряду та побудуємо графік перших десяти членів ряду.

$S_n = \frac{n^3-(n-1)^3}{3}$- частинна сума ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми величин площ криволінійних трапецій
1	0,333333
2	2,666667
3	9
4	21,33333
5	41,66667
6	72
7	114,3333
8	170,6667
9	243
10	333,3333

Рис.2.46. – графік частинних сум ряду (2.21)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

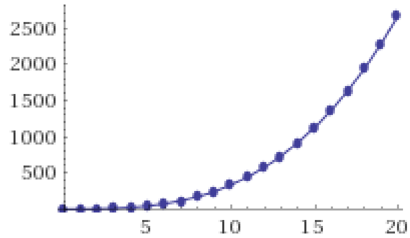


рис.2.44.а

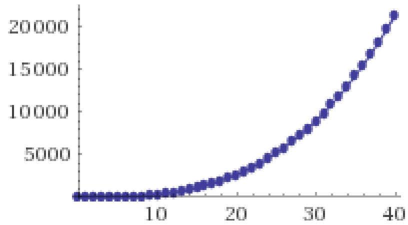


рис.2.44.б

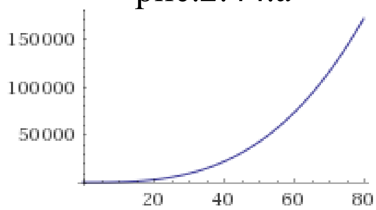


рис.2.44.в

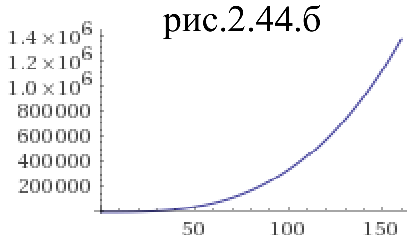


рис.2.44.г

Рис.2.47. – графіки зміни частинних сум ряду (2.21)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.44), графіки частинних сум ряду зростають більш повільно та поступово набувають постійної швидкості.

2.4. Ряди пов'язані з графіком гіперболи $y = \frac{1}{x}$ *і* $y = \ln x$

Задача 7. На рисунку нам задано два графіка $y = \frac{1}{x}$ *і* $y = \ln x$.

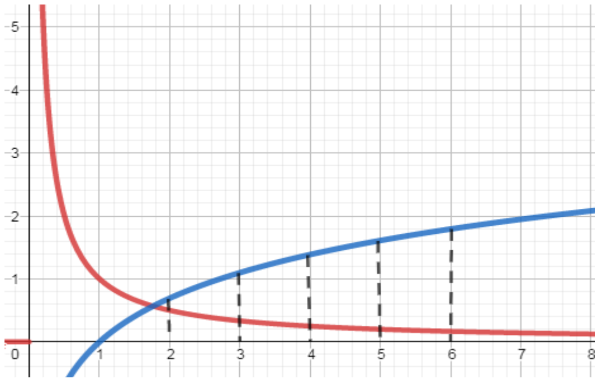


Рис.2.48. – графіки функцій $y = \frac{1}{x}$ $і\ y = ln\,x$

Перед нами постають такі завдання:

1. Побудувати ряд площ обмежених цими графіками.
2. Побудувати ряд з довжин $d_1, d_2, \dots$

Розв'яжемо поставлені завдання.

1. *Побудувати ряд площ обмежених цими графіками*

Використовуючи формули знаходження площі обмеженої графіками функцій

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx,$$

маємо:

$$S_1 = \int_2^3 \left(\ln x - \frac{1}{x}\right) dx = \left\|\int \ln x = uv - \int vdu\right\| = \int_2^3 \ln x\,dx - \int_2^3 \frac{dx}{x} =$$

$$= x\ln x|\,_2^3 - \int_2^3 dx - \ln x|\,_2^3 = 2\ln 3 - \ln 2 - 1 = \ln\frac{3^2}{2e}$$

$$S_2 = \int_3^4 \left(\ln x - \frac{1}{x}\right) dx = \left\|\int \ln x = uv - \int vdu\right\| = \int_3^4 \ln x\,dx - \int_3^4 \frac{dx}{x} =$$

$$= x\ln x|\,_3^4 - \int_3^4 dx - \ln x|\,_3^4 = 4\ln 4 - 3\ln 3 - 1 - \ln 4 + \ln 3 = \ln\frac{4^3}{3^2 e}, \text{і т.д.}$$

$$S_n = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n e}.$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n e} \qquad (2.22)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n e}.$$

За допомогою радикальної ознаки Коші за пишемо

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n e}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+2)^n (n+2)}{(n+1) e^{\frac{1}{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^{\frac{1}{n}+1}}{(n+1) e^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1,\text{отже}$$

ряд розбіжний.

Запишемо частинну суму ряду та побудуємо графік перших десяти членів ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми площ обмежених графіками функцій
1	1,655457
2	4,271489
3	7,864062
4	12,44107
5	18,007
6	24,56463
7	32,11583
8	40,66188
9	50,20372
10	60,74207

Рис.2.49. – графік частинних сум ряду (2.22)

$S_n = \frac{(n+2)^{n+1}}{e(n+1)^n}$- частинна сума ряду.

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

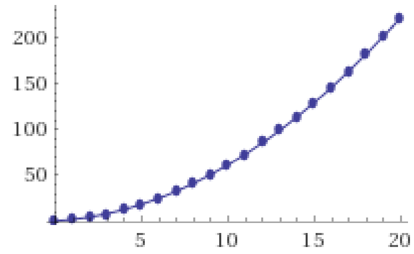


рис.2.50.а

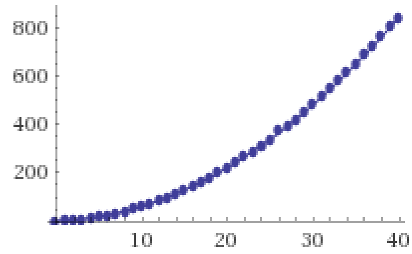


рис.2.50.б

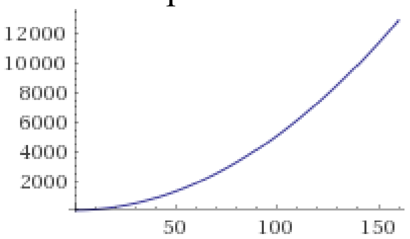


рис.2.50.в

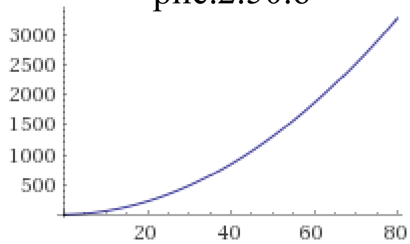


рис.2.50.г

Рис.2.50. – графіки зміни частинних сум ряду (2.22)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінюються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.2.50), графіки частинних сум ряду зростають більш повільно та поступово набувають постійної швидкості.

2. Побудувати ряд з довжин $d_1, d_2, \ldots$

Для знаходження довжин скористаємось формулою $d = \ln(\mathrm{x}_0) - \frac{1}{\mathrm{x}_0}$, отже маємо:

$$d_1 = \ln 2 - \frac{1}{2},$$

$$d_2 = \ln 3 - \frac{1}{3},$$

$$d_3 = \ln 4 - \frac{1}{4},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$d_n = \ln(n+1) - \frac{1}{n+1}.$$

Маємо ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln(n+1) - \frac{1}{n+1} \right) \qquad (2.23)$$

Досліджимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\left(\ln(n+1) - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln(n+1) - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}.$$

Досліджуємо, кожну з границь окремо.

$$\lim_{n\to\infty}\ln(n+1) = (\text{за ознакою Даламбера}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = 1.$$

Оскільки $q = 1$, то вираз можна спростити до $v_n = n$.

Досліджимо за інтегральною ознакою Коші.

$$\int_1^{\infty} n dn = \frac{n^2}{2}\Big|_1^{\infty} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2} - \frac{1}{2} = \infty.$$

$$\int_1^{\infty}(n+1)dn = \left(\frac{n^2}{2} + n\right)\Big|_1^{\infty} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2} + n - \frac{5}{2}\right) = \infty,$$ ряд розбіжний

Запишемо частинну суму ряду та побудуємо графік перших десяти членів ряду.

$S_n = \ln(n+1) - \frac{1}{n+1}$- частинна сума ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми довжин d1, d2...
1	0,193147
2	0,958426
3	2,09472
4	3,504158
5	5,129251
6	6,932304
7	8,886746
8	10,97286
9	13,17544
10	15,48243

Рис.2.51. – графік частинних сум ряду (2.23)

Можемо прийти до висновку, чим більше членів містить частинна сума, тим більше її значення, та графік більш круто піднімається зі збільшенням кількості членів.

РОЗДІЛ ІІІ. ГЕНЕРАЦІЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ВІДНОШЕННЯ n-го ЧЛЕНА ДО (n+1)-го ЧЛЕНА ВІДОМОГО РЯДА

3.1. Генерація рядів арифметичної прогресії в гармонічні ряди

В теорії числових рядів є низка рядів, які мають важливе значення для теоретичних досліджень і практичного застосування. Одним з таких важливих рядів є гармонічні ряди і ряди, пов'язані з поняттям арифметичної прогресії [40].

Будь–який числовий ряд за означенням є нескінченною сумою доданків, які знаходяться між собою в такому відношенні, що кожен з них може бути одержаний з одного або кількох попередніх за певним визначеним законом.

Гармонічні ряди створюються за допомогою поняття гармонічного середнього. Наприклад, якщо задано два дійсних числа a і c, то середнє гармонічне число визначається за формулою

$$b = \frac{2ac}{a+c} \qquad (3.1)$$

Класичним прикладом гармонічного ряду є ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \qquad (3.2)$$

«Сігма–модель» ряду (3.2) має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad (3.3)$$

де $\frac{1}{n}$ – загальний член ряду [40].

Ряд арифметичної прогресії створюється шляхом використання поняття середнього арифметичного. Наприклад, якщо взяти два дійсних числа a і c, то середнє арифметичне буде число b , яке визначається за формулою

$$b = \frac{a+c}{2} \qquad (3.4)$$

Класичним прикладом ряду арифметичної прогресії є ряд

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots \qquad (3.5)$$

«Сігма–модель» ряду (3.5) наступна

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \qquad (3.6)$$

де $n -$ загальний член ряду.

Візуально спостерігаємо, що між загальними членами рядів (3.3) і (3.6) існує взаємозв'язок, за яким шляхом обернення членів одного ряду можна одержати члени іншого ряду. Неважко перевірити, що шляхом відношення $\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)}$ член гармонічного ряду генеруються в члени ряду арифметичної прогресії (3.5) і навпаки, члени ряду арифметичної прогресії генеруються в гармонічний ряд $\frac{1}{n}$ [40].

В загальному випадку ряд арифметичної прогресії за означенням середнього арифметичного має наступну «сігма–модель» (термін «сігма–модель» ми пов'язуємо з завданням числового ряду за допомогою символу

«$\sum$ »):

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a+(n-1)d) \qquad (3.7)$$

де $a -$перший член, $n \in N, d$– різниця арифметичної прогресії;

$a+(n-1)d$ – загальний член ряду.

Далі розглянемо зв'язок для більш загального випадку рядів арифметичної прогресії і гармонічних рядів.

Нехай наступний ряд (3.7) є рядом арифметичної прогресії

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots \qquad (3.7)$$

Для членів ряду (3.7) за законом арифметичної прогресії виконується рівність:

$$\frac{1}{a_n}=\frac{(n-1)a_1-(n-2)a_2}{a_1 a_2} \qquad (3.8)$$

З рівності (3.8) одержуємо

$$a_n = \frac{a_1 a_2}{(n-1)a_1 - (n-2)a_2} \qquad (3.9)$$

Оскільки ряд є гармонічним то за допомогою рівностей:

$$\left.\begin{array}{l} n = 1: a_1 \\ n = 2: a_2 \\ n = 3: a_3 = \dfrac{a_1 a_2}{2a_1 - a_2} \\ n = 4: a_4 = \dfrac{a_1 a_2}{3a_1 - 2a_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (3.10)$$

можна довести, що a_2 є середнім гармонічним між a_1 і a_3, а a_3 середнє гармонічне між a_2 і a_4 і т.д.

Таким чином за допомогою ряду арифметичної прогресії (3.7) можна одержувати множину гармонічних рядів і використовувати їх при дослідженні числових рядів на збіжність, а також для складання практичних завдань при вивчені розділу «Числові ряди» в межах курсу «Математичний аналіз» [40].

Розглянемо приклади:

Приклад 1. Нехай дано арифметичну прогресію $4, 7, 10, 13, 16, \ldots, n+3$

Згенеруємо з даного ряду, гармонічний ряд $\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{\mathrm{n}+3}$

Перевіримо за законом середнього гармонічного, тобто чи виконується формула (3.1):

1) перевіримо для $\frac{1}{7}$

$$\frac{1}{7} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{10}}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{5}{20} + \frac{2}{20}}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{7}{20}}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{7}$$

2) перевіримо для $\frac{1}{10}$

$$\frac{1}{10} = \frac{2 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{13}}{\frac{1}{7} + \frac{1}{13}}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{13}}{\frac{13}{91} + \frac{7}{91}}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{\frac{2}{91}}{\frac{20}{91}}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

Отже можемо прийти до висновку, що згенерований ряд $\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{\mathrm{n}+3}$ є гармонічним.

Дослідимо ряд на збіжність, за допомогою інтегральної ознаки Коші. Замінимо n на x тоді отримаємо: $f(x) = \frac{1}{x+3}$.

Знайдемо $\int_0^\infty f(x) = \int_1^\infty \frac{dx}{\mathrm{x}+3} = \left\| \begin{matrix} x+3=t, \\ x=1, t=4 \\ x \to \infty, t \to \infty \\ dx = dt \end{matrix} \right\| = \int_4^\infty \frac{dt}{t} = \ln t|_4^\infty =$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \ln a - ln4 = \infty$, ряд розбіжний, оскільки невласний інтеграл дорівнює ∞.

Побудуємо частинні суми даного ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми
1	0,25000
2	0,45000
3	0,61667
4	0,75952
5	0,88452
6	0,99563
7	1,09563
8	1,18654
9	1,26988
10	1,34680

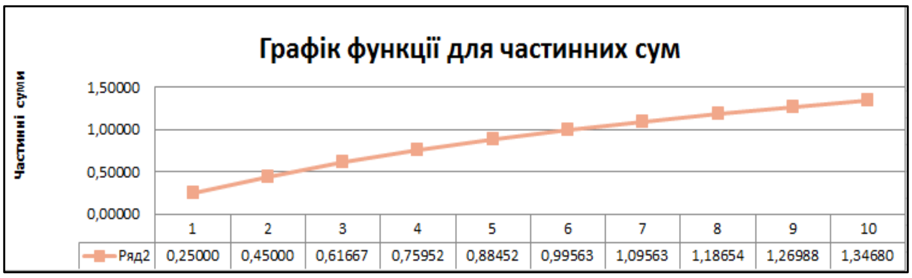


Рис.3.1. – графік частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{n}+3}$

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

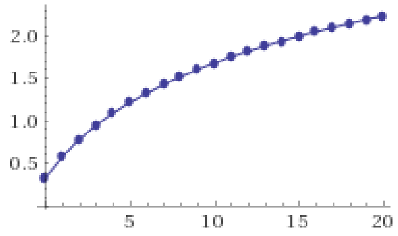


рис.3.2.а

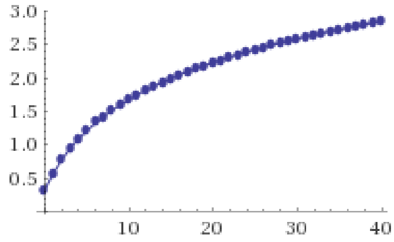


рис.3.2.б

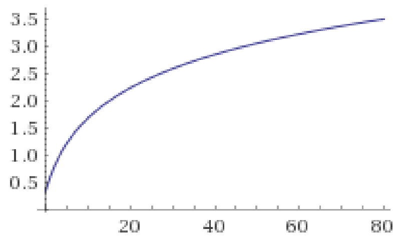


рис.3.2.в

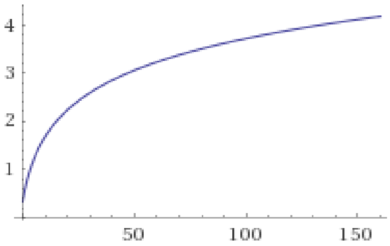


рис.3.2.г

Рис.3.2. – графіки зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.3.2), графіки частинних сум ряду зростають більш повільно та поступово набувають постійної швидкості.

<u>Приклад 2.</u> Нехай дано арифметичну прогресію $6, 10, 14, 18, 22, \dots, 4n + 2$

Згенеруємо з даного ряду, гармонічний ряд $\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14}, \frac{1}{18}, \frac{1}{22}, \dots, \frac{1}{4n+2}$

Перевіримо за законом середнього гармонічного, тобто чи виконується формула (3.1):

1) перевіримо для $\frac{1}{10}$

$$\frac{1}{10} = \frac{2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{14}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{14}}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7}}{\frac{7}{42} + \frac{3}{42}}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{\frac{1}{42}}{\frac{10}{42}}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

2) перевіримо для $\frac{1}{18}$

$$\frac{1}{18} = \frac{2 \cdot \frac{1}{22} \cdot \frac{1}{14}}{\frac{1}{22} + \frac{1}{14}}$$

$$\frac{1}{18} = \frac{\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{14}}{\frac{7}{154} + \frac{11}{154}}$$

$$\frac{1}{18} = \frac{\frac{1}{154}}{\frac{18}{154}}$$

$$\frac{1}{18} = \frac{1}{18}$$

Отже можемо прийти до висновку, що згенерований ряд $\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14}, \frac{1}{18}, \frac{1}{22}, \dots, \frac{1}{4n+2}$ є гармонічним.

Дослідимо ряд на збіжність, за допомогою інтегральної ознаки Коші. Замінимо n на x тоді отримаємо: $f(x) = \frac{1}{4x+2}$.

Знайдемо $\int_0^\infty f(x) = \int_1^\infty \frac{dx}{4x+2} = \left\| \begin{matrix} 4x+2=t, \\ x=1, t=6 \\ x \to \infty, t \to \infty \\ 4dx = dt \end{matrix} \right\| = \frac{1}{4}\int_6^\infty \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln t|_6^\infty =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \ln a - ln6 = \infty$, ряд розбіжний, оскільки невласний інтеграл дорівнює ∞. Побудуємо частинні суми даного ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми
1	0,16667
2	0,26667
3	0,33810
4	0,39365
5	0,43911
6	0,47757
7	0,51090
8	0,54031
9	0,56663
10	0,59044

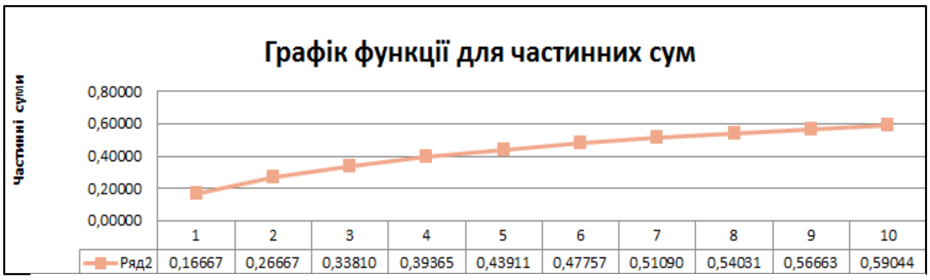


Рис.3.3. – графік частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+2}$

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

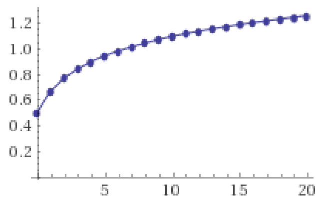


рис.3.4.а

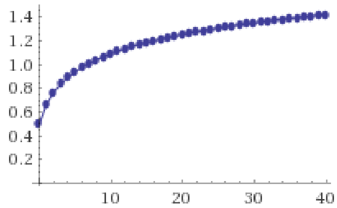


рис.3.4.б

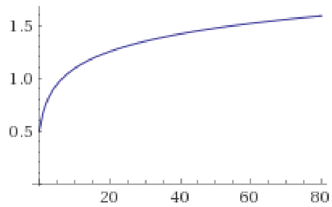


рис.3.4.в

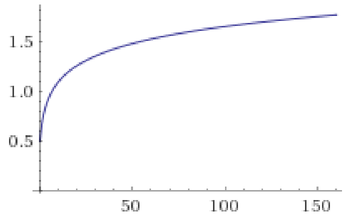


рис.3.4.г

Рис.3.4. – графіки зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+2}$

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.3.4), графіки частинних сум ряду зростають більш повільно та поступово набувають постійної швидкості.

Приклад 3. Нехай дано арифметичну прогресію 5, 16, 27, 38, 49, …, 11n-6

Згенеруємо з даного ряду, гармонічний ряд $\frac{1}{5},\frac{1}{16},\frac{1}{27},\frac{1}{38},\frac{1}{49},\dots,\frac{1}{11n-6}$

Перевіримо за законом середнього гармонічного, тобто чи виконується формула (3.1):

1) перевіримо для $\frac{1}{16}$

$$\frac{1}{16}=\frac{2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{27}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{27}}$$

$$\frac{1}{16}=\frac{\frac{2}{135}}{\frac{27+5}{135}}$$

$$\frac{1}{16}=\frac{2}{135}\cdot\frac{135}{32}$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

2) перевіримо для $\frac{1}{38}$

$$\frac{1}{38} = \frac{2 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{49}}{\frac{1}{27} + \frac{1}{49}}$$

$$\frac{1}{38} = \frac{\frac{2}{1323}}{\frac{27+49}{1323}}$$

$$\frac{1}{38} = \frac{\frac{2}{1323}}{\frac{76}{1323}}$$

$$\frac{1}{38} = \frac{1}{38}$$

Отже можемо прийти до висновку, що згенерований ряд $\frac{1}{5}, \frac{1}{16}, \frac{1}{27}, \frac{1}{38}, \frac{1}{49}, \dots, \frac{1}{11\mathrm{n}-6}$ є гармонічним.

Дослідимо ряд на збіжність, за допомогою інтегральної ознаки Коші. Замінимо n на x тоді отримаємо: $f(x) = \frac{1}{11x-6}$.

Знайдемо $\int_0^{\infty} f(x) = \int_1^{\infty} \frac{dx}{11x-6} = \left\| \begin{matrix} 11\mathrm{x} - 6 = t, \\ x = 1, t = 6 \\ x \to \infty, t \to \infty \\ 11dx = dt \end{matrix} \right\| = \frac{1}{4}\int_6^{\infty} \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \ln t|_6^{\infty} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \ln a - ln6 = \infty$, ряд розбіжний, оскільки невласний інтеграл дорівнює ∞. Побудуємо частинні суми даного ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми
1	0,20000
2	0,26250
3	0,29954
4	0,32585
5	0,34626
6	0,36293
7	0,37701
8	0,38921
9	0,39996
10	0,40958

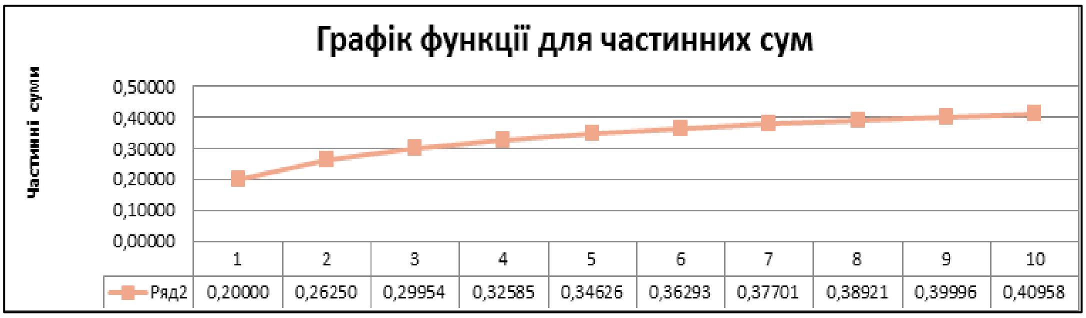


Рис.3.5. – графік частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{11\mathrm{n}-6}$

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

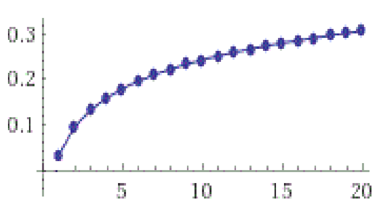


рис.3.6.а

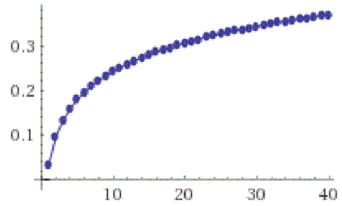


рис.3.6.б

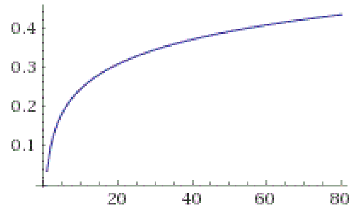


рис.3.6.в

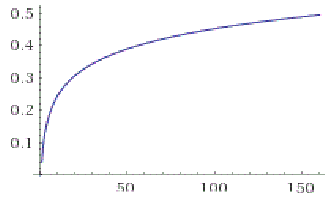


рис.3.6.г

Рис.3.6. – графіки зміни частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{11n-6}$

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.3.6), графіки частинних сум ряду зростають більш повільно та поступово набувають постійної швидкості.

3.2. Генерація числових рядів за допомогою відношення членів відомого гармонічного ряда

Якщо нам заданий гармонічний ряд з то за допомогою певних відношень членів відомого ряду, можемо отримати безліч числових рядів.

Проілюструємо це на прикладах.

Приклад 4. Нехай задано гармонічний ряд виду $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\ \left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{k}\right)$. Можемо згенерувати нові ряди за таким законом:

1. $\frac{a_1}{a_2},\frac{a_2}{a_3},\frac{a_3}{a_4},\dots$
2. $\frac{a_2}{a_1},\frac{a_3}{a_2},\frac{a_4}{a_3},\dots$
3. $\frac{a_1}{a_2},\frac{a_2}{a_4},\frac{a_3}{a_6},\dots$

Де $a_1,a_2,a_3,\dots a_n$ — це члени нашого заданого гармонічного ряду.

Дослідимо дані генерації.

1. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_3}{a_4}, \dots$

Підставимо наші значення

$$\frac{1}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}, \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}, \dots$$

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}$$

Отримаємо таку «сігма-модель» ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \qquad (3.11)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, отже ряд розбіжний

Побудуємо графік частинних сум перших десяти членів ряду.

n-й член геометричної прогресії	частинні суми
1	2,00
2	3,50
3	4,83
4	6,08
5	7,28
6	8,45
7	9,59
8	10,72
9	11,83
10	12,93

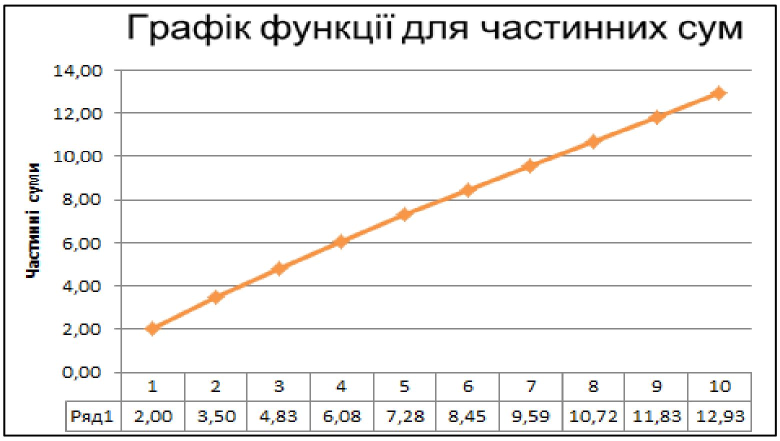


Рис.3.7. – графік частинних сум ряду (3.11)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

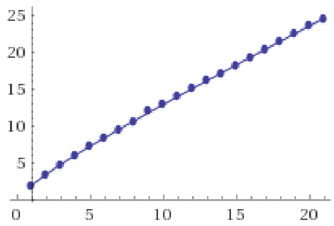


рис.3.8.а

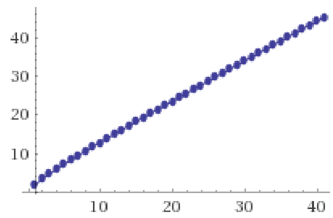


рис.3.8.б

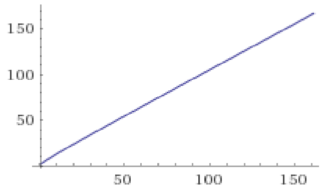


рис.3.8.в

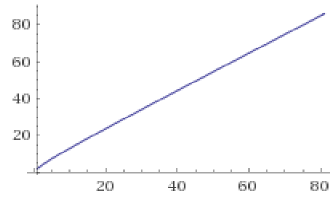


рис.3.8.г

Рис.3.8. – графіки зміни частинних сум ряду (3.11)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.3.8), графіки частинних сум ряду зростають більш повільно та поступово набувають постійної швидкості.

2. $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, \dots$

Підставимо наші значення:

$$\frac{\frac{1}{2}}{1}, \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}, \dots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}$$

Отримаємо таку «сігма-модель» ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \qquad (3.12)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, отже ряд розбіжний

Побудуємо графік частинних сум перших десяти членів ряду.

n-й член геометричної прогресії	частинні суми
1	0,50
2	1,17
3	1,92
4	2,72
5	3,55
6	4,41
7	5,28
8	6,17
9	7,07
10	7,98

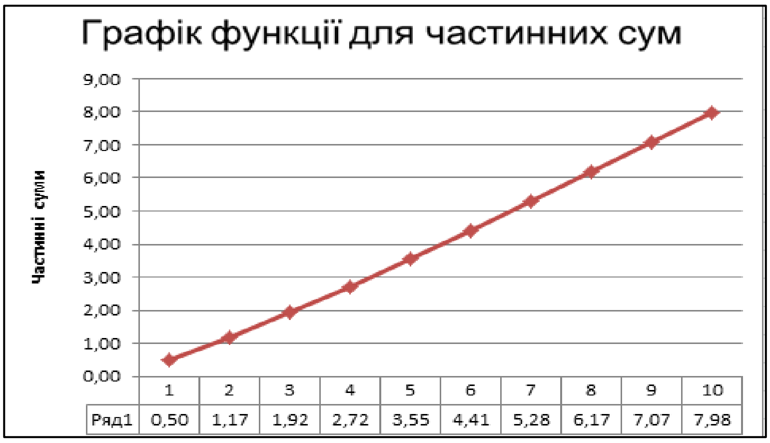


Рис.3.9. – графік частинних сум ряду (3.12)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

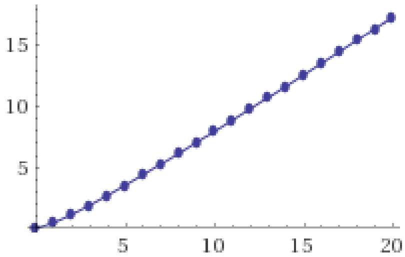


рис.3.10.а

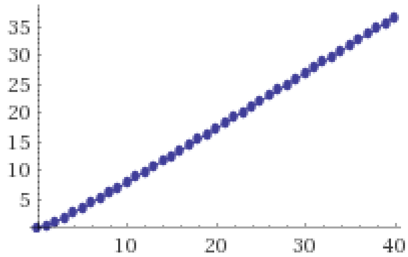


рис.3.10.б

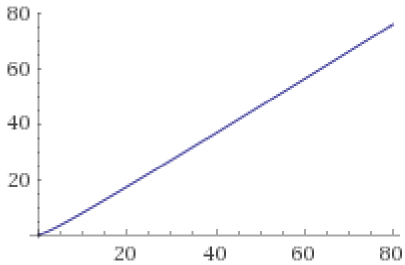


рис.3.10.в

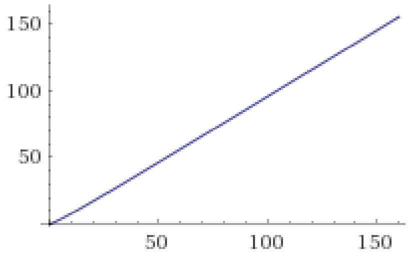


рис.3.10.г

Рис.3.10. – графіки зміни частинних сум ряду (3.12)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.3.10), графіки частинних сум ряду зростають більш повільно та поступово набувають постійної швидкості.

3. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_4}, \frac{a_3}{a_6}, \ldots$

Підставимо наші значення

$$\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}, \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}, \dots$$

$$2, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \dots, 2n$$

Отримаємо таку «сігма-модель» ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n \qquad (3.13)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$\lim\limits_{n\to\infty} 2n = \infty$, отже ряд розбіжний.

Побудуємо графік частинних сум перших десяти членів ряду.

n-й член геометричної прогресії	частинні суми
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18
10	20

Рис.3.11. – графік частинних сум ряду (3.13)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

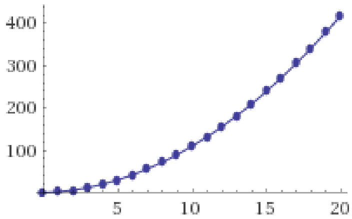


рис.3.12.а

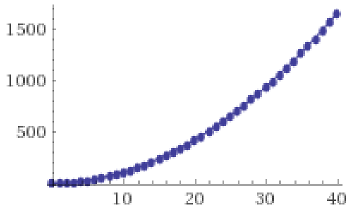


рис.3.12.б

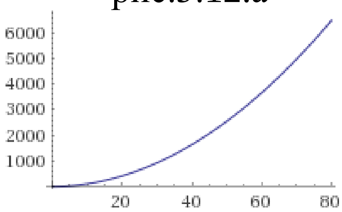


рис.3.12.в

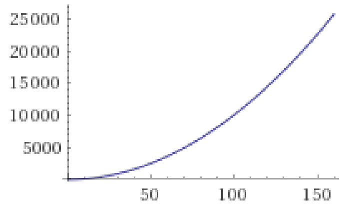


рис.3.12.г

Рис.3.12. – графіки зміни частинних сум ряду (3.13)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.3.12), графіки частинних сум ряду зростають більш повільно та поступово набувають постійної швидкості.

Приклад 5. Нехай задано гармонічний ряд виду $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\dots,\frac{1}{k^2}\right)$. Можемо згенерувати нові ряди за таким законом:

1. $\frac{a_2}{a_1},\frac{a_3}{a_2},\frac{a_4}{a_3},\dots$
2. $\frac{a_2}{a_1},\frac{a_4}{a_2},\frac{a_6}{a_3},\dots$

Де $a_1,a_2,a_3,\dots a_n -$ це члени нашого заданого гармонічного ряду.

Дослідимо дані генерації.

1. $\frac{a_2}{a_1},\frac{a_3}{a_2},\frac{a_4}{a_3},\dots$

Підставимо наші значення

$$\frac{\frac{1}{4}}{1},\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{4}},\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{9}},\dots$$

$$\frac{1}{4},\frac{4}{9},\frac{9}{16},\dots,\frac{(n+1)^2}{n^2}$$

Отримаємо таку «сігма-модель» ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} \qquad (3.14)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1$, отже ряд розбіжний

Побудуємо графік частинних сум перших десяти членів ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми
1	4
2	6,25
3	8,027777778
4	9,590277778
5	11,03027778
6	12,39138889
7	13,69751134
8	14,96313634
9	16,19770424
10	17,40770424

Рис.3.13. – графік частинних сум ряду (3.14)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

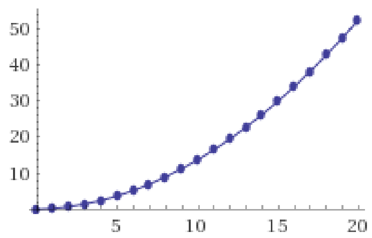


рис.3.14.а

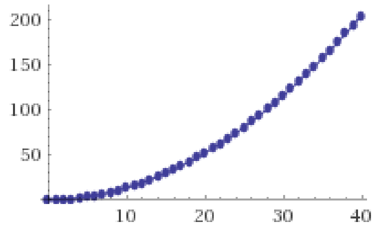


рис.3.14.б

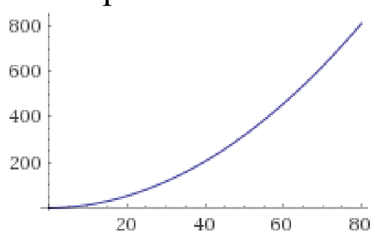


рис.3.14.в

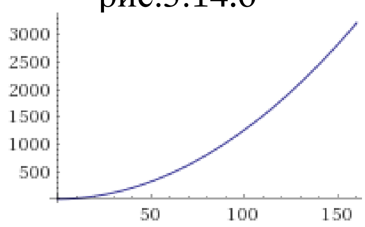


рис.3.14.г

Рис.3.14. – графіки зміни частинних сум ряду (3.14)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.3.14), графіки частинних сум ряду зростають більш повільно та поступово набувають постійної швидкості.

2. $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_4}{a_2}, \frac{a_6}{a_3}, \ldots$

Підставимо наші значення

$$\frac{1}{4}, \frac{4}{16}, \frac{9}{36}, \ldots$$

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}n$$

Отримаємо таку «сігма-модель» ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}n \qquad (3.15)$$

Дослідимо даний ряд на збіжність, тобто перевіримо виконання необхідної ознаки:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4}n = \infty$, отже ряд розбіжний

Побудуємо графік частинних сум перших десяти членів ряду.

n-й член геометричної прогресії	Частинні суми
1	0,25
2	0,5
3	0,75
4	1
5	1,25
6	1,5
7	1,75
8	2
9	2,25
10	2,5

Рис.3.15. – графік частинних сум ряду (3.15)

За допомогою онлайн сервісу wolframalpha, ми можемо прослідкувати зміну графіка частинних сум для перших ста членів ряду.

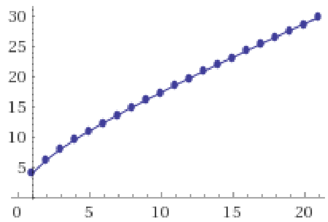


рис.3.16.а

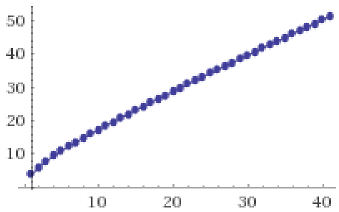


рис.3.16.б

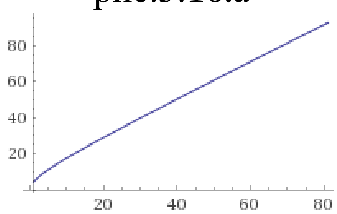


рис.3.16.в

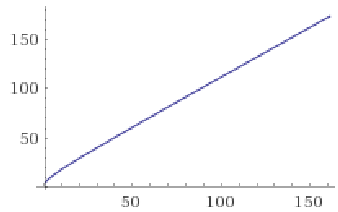


рис.3.16.г

Рис.3.16. – графіки зміни частинних сум ряду (3.15)

Можна прослідкувати з якою швидкістю змінються частинні суми ряду в залежності від кількості доданків, які утворюють даний ряд. На (рис.3.16), графіки частинних сум ряду зростають більш повільно та поступово набувають постійної швидкості.

ВИСНОВКИ

Розглянуто теоретичні відомості про числові ряди та гармонічний ряд, а також історію їх виникнення. Розкрито сутність таких понять: «числового ряд», «сума ряду», «збіжний (розбіжності) числовий ряд», «частинна сума ряду»

Точної дати виникнення числових рядів невідомо, проте, поняття математичної нескінченості, з'явилося в давньогрецькій або еллінській культурі в VIII – VI ст. до н.е.

Архімед та Евдокс намагалися застосовувати теорію рядів для розв'язання задач, наприклад Архімед застосовував для обчислення площі параболічного сегмента (тобто фігури, обмеженою прямою і параболою) та знайшов суму нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $\frac{1}{4}$. ,а Евдокс Кнідський застосовував метод «вичерпання» до знаходження площ і об'ємів

Питанням сумування рядів займалися і китайські математики. Шень Ко (9 ст. до н.е.) в «Рассуждениях Мэн-си» підрахував кількість предметів, які складають n − шарову ступінчату усічену піраміду, в якій стороні прямокутних шарів послідовно збільшуються на одиницю. Чжу Ши-цзе сумує ряди, які виникли при множенні натуральних, трикутних та квадратних чисел з членами зростаючої або спадної прогресій.

Великий вклад в XVIII – XIX століттях в історію рядів внесли у 1812 році Карл Фрідріх Гаус дає перший зразок дослідження збіжності ряду, в 1821 році Огюстен Луї Коші встановлює основні сучасні принципи теорії рядів, у 1832 р. швейцарський математик Жозеф Раабе запропонував ознаку збіжності, яка базується на порівнянні зі збіжним узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\,(S>1)$

В даній роботі розглянуті та доведені такі ознаки числових рядів, як ознака порівняння, ознака Даламбера, інтегральна та радикальна ознака Коші.

Переважна частинна підручників, посібників, та практикумів з математичного аналізу пропонують однотипні задачі, та практично відсутнє візуальне представлення членів рядів та їх збіжність. Тому були розглянуті різноманітні задачі, з геометричними об'єктами, параметри яких задавалися за певним правилом, одержано приклади числових рядів, пов'язаних з геометричною інтерпретацією членів ряду.

Проведені дослідження, які підтверджують той факт, що за допомогою формули середнього гармонійного можна згенерувати з ряду арифметичної прогресії гармонічний ряд. Одержані дослідження, що з гармонічного ряду можна отримати за допомогою визначення $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ членів відомих числових рядів, нові числові ряди.

Евристичним пошуком знайдено «сігма-моделі» числових рядів за допомогою параметрів геометричних об'єктів та досліджено їх на збіжність і побудовано частинні суми рядів.

Створена низка числових рядів, які можуть бути застосовані на практичних заняттях при вивчені розділу «Числові ряди» (див.Додаток А та Додаток Б). На лабораторних роботах розглядається змінна частинних сум ряду для $n[1: 100], n[100;\ 1000], n[1000;\ 10000]$.

Реалізовано комп'ютерні експерименти стосовно геометричної інтерпретації числових рядів за допомогою освітніх математичних програм: GeoGebra, Microsoft Excel та WolframAlpha.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Александрова Н. В. Історія математичних термінів, поняття, позначення: словар ─ довідник. вид. 3-е, дод. і випр. / Н. В. Александрова. - Москва: Вид. ЛКІ, 2008. ─ 248с.
2. Архипов Г. И. «Лекции по математическому анализу».: Учебник для университетов и пед. вузов/ Под. ред. Г. И Архипов. В. А Садовничий. В.Н. Чубариков ─ Висш. шк. 1999. ─695 с.
3. Баврин И. И. Математический анализ 2-е изд., испр. и доп. учебник и практикум для с-тов. / Под. ред. И. И. Баврин. ─ Люберцы: Юрайт, 2016. ─ 327с.
4. Баврин, И. И. Математический анализ для педагогических вузов 2-е изд., испр. и доп. учебник и практикум для прикладного бакалаврата / Под. ред. И. И. Баврин. ─ Люберцы: Юрайт, 2016. ─ 327 с.
5. Бермант А. Ф. Курс математического анализа, В 2-х томах / Под. ред. А. Ф. Бермант . Физматлит, 1959.
6. Берс Л. Математический анализ (в двух томах). Высшая Школа/ Под. ред. Л. Берс, 1975. Т. 1 ─ 520 стр. Т. 2 ─ 544 стр.
7. Бурбаки Н. Очерки по истории математики / Н. Бурбаки ; пер. с фр. И. Г. Башмакова. – Москва : Изд-тво иностранной литературы, 1963. – 292 с.
8. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Г. Вилейтнер ; пер. с нем. А. П. Юшкевич. – Москва : Гос. изд-тво физ-мат. лит-ры, 1960. – 469 с.
9. Виноградова И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу: Пособие для университетов, пед. вузов / Под. ред. И. А., Виноградова С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. В 2 ч. 3-е изд., испр. М. 2001 г.
10. Вісник Міжнагородного дослідного центру: «людина: мова, культура, пізнання»: наук. жур.:[за заг. ред. В. В. Корольського] - Кривий Ріг : КДПУ, МДЦ «ЛМКП», 2018. - Том 42. - 284с.
11. Власова Е. А. Ряды / Е. А. Власова. – 3-е изд., испр. – Москва : МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2006. – 616 с.

12. Вугальтер А.Л. Ваше открытие общества / А.Л. Вугальтер. – Днепр: Издатель «ФЛП Середняк Т.К.», 2018. – 374 с.

13. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский – 12-е изд.–М.: Наука, 1977.

14. Высшая математика: Общий курс: Учеб. – 2-е изд., перераб. / А. И. Яблонский, А. В. Кузнецов, Е. И. Шилкина и др.; Под общ. ред. С. А. Самаля. – Мн.: Выш. шк., 2000.– 351 с.

15. Зорич В. А. Математический анализ. / В. А. Зорич . Часть II. –Изд. 4-е, испр.– М.: МЦНМО, 2002. –794с.

16. Ильин В.А. Математический анализ. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий. В 2-х частях. Изд. 2-е перераб. Издательство МГУ,Часть 2. 1987 г. 358 стр

17. Ильин В.А. Математический анализ. / В. А. Ильин, В.А. Садовничий Л. И. Камынин Курс математического анализа. М.: Изд-во МГУ. Том 2: 1985 г.– 624 стр.

18. Ильин В.А. Основы математического анализа: / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. В 2-х ч. (Курс высшей математики и математической физики).

19. Камынин Л.И. Курс математического анализа. В 2-х томах. М.: Изд-во МГУ. Том 2: 1995 г.– 624 стр.

20. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числових рядів / В. В. Корольський. // Новітні комп'ютерні технології : наук.-метод. зб / редкол. : С. О. Семеріков [та ін.] . – Кривий Ріг, 2017. – Том XV. – С. 57–63.

21. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії / В. В. Корольський. // Новітні комп'ютерні технології : наук.-метод. зб / редкол. : С. О. Семеріков [та ін.] . – Кривий Ріг, 2018. – Том XVI. – С. 59–66

22. Крюков М. М. До історії розвитку і становлення теорії нескінченних числових рядів / М. М. Крюков, Т. С. Клецька // Математичне моделювання – 2013. – № 6. – С. 117 – 120.

23. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих

переменных. [Электронный ресурс] / Л.Д. Кудрявцев – Режим доступа: http://alleng.org/d/math/math98.htm

24. Кузьмина С.С. Числовые ряды / С.С. Кузьмина, О.Я. Шевалдина Екатеринбург: ГОУ−ВПО УГТУ−УПИ , 2005

25. Ляшко, И.И. Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента. Том 2. Ряды: Учебное пособие [Электронный ресурс] / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай. ─ М.: ЛКИ, 2012. ─ 224 с. – Режим доступа: http://alleng.org/d/math/math21.htm

26. Майков Е.В. Математический анализ. Числовые ряды / Е. В. Майков. Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. Фак. ВКНМ. - М. : Изд-во Моск. ун-та, 1999. - 63 с. :

27. Марков Л. Н. Высшая математика. Часть 2. Основы математического анализа и элементы дифференциальных уравнений. / Л. Н. Марков, Г. П. Размыслович – Мн.: Амалфея, 2003. – 352 с.

28. Маркушевич А. И. Ряды. Элементарный очерк / А. И. Маркушевич. – Москва – Ленинград : Изд-во НКТПСССР, 1936. – 103 с.

29. Морозова В. Д. Введение в анализ / Н. Э. Баумана, В. Д. Морозовой. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. ─ 408 с.

30. Мысливец С. Г. Математический анализ: Учеб. пособие для экон. специальностей / С. Г.Мысливец; Краснояр. гос. ун-т. Красноярск, 2004.─ 276с.

31. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. ─ М.: Наука, 2008. ─ 640 с.

32. Никольский С. М. Курс математического анализа. [Электронный ресурс] / С. М Никольский. Изд-во: М.: Наука, 1990 г. – Режим доступа: http://www.tka4.org/materials/lib/ArticlesBooks/General/MathAnalysis/NIKOLSKI1.PDF

33. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. / Письменный Д. Т. ─ 6-е изд. Часть 2. — М.: Айрис-пресс, 2008.

34. Савельева Р. Ю. Высшая математика. Теория рядов. / Р. Ю. Савельева М.: Высшая школа, 1982

35. Сачанюк-Кавецька Н. В. Теорія рядів. Навчальний посібник. / Н. В. Сачанюк-Кавецька, Л. І. Педорченко, М. Б. Ковальчук– Вінниця: ВНТУ, 2008. -138 с.

36. Том 2.Математический анализ: ряды , функции векторного аргумента / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач. ─ Москва. Едиториал УРСС,2003 ─ 224 стр

37. Трофимов В. К. Теория рядов : учебно пособие / В. К. Трофимов, Т. С. Мурзина, Т. Э. Захарова. – Новосибирск : СибГУТИ, 2013. – 145 с.

38. Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика» [Электронный ресурс]. Раздел 10. «Ряды». Теоретические основы. Методические указания для студентов. Материалы для самостоятельной работы студентов. ─ Уфа: Издательство УГНТУ, 2007. - 113 с. – Режим доступа: http://www.math.rusoil.net/files/UMKandKIM/umk10.pdf

39. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. (В 3-х томах). / Г. М. Фихтенгольц. ─ М.: Физматлит, 2003. т.1 ─ 680с.; т.2 ─ 864с.; т.3 ─ 728с.

40. Христюк А. М. Зв'язок рядів арифметичної прогресії та гармонічних рядів / В. Д. Бобирь, А. М. Христюк // Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти » (ПМО – 2019р.), м. Черкаси, 11-12 квітня 2019р. – Черкаси: Вид. ФОП Гордієнко Є. І., 2019. – 280с.

41. Христюк А. М. Реалізація дидактичного принципу наочності при вивченні числових рядів / В. Д. Бобирь, А. М. Христюк, // Х Міжнародна конференція молодих вчених «Молоді вчені 2019 – від теорії до практики», м. Дніпро, 7 березня 2019р. – Дніпро, 2019. – 404с.

42. Цейтен Г. Г. История математики в XVI и XVII веках / Г. Г. Цейтен ; пер. с нем. П. Новиков. – Москва –Ленинград : ОНТИ, 1938. – 456 с.

43. Числовые и функциональные ряды : учебное пособие / Т. Н. Титова, Т. А. Мацеевич, Е. Е. Ассеева, А. Н. Серова. – Москва : Изд-во Моск. гос. строит. ун-т, 2016. – 123 с.

44. Шкіль М. І. Математичний аналіз, ч ІІ: Посібник для пед. інститутів. / М. І. Шкіль – Києв: Вища школа. Головне видав.,1981. – 456с.

45. Шнейдер В. Е. Краткий курс высшей математики. / В. Е. Шнейдер, А. И. Слуцкий, А. С. Шумов. М.: Высш. шк., 1972

46. Щипачев А.В. Высшая математика. / А.В. Щипачев – М.: Физматлит, 2003. т.1 – 680с.

47. Щоголєв С. А. Теорія рядів: навчально-методичний посібник / С. А. Щоголєв. – Одеса : «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2015. – 76 с.

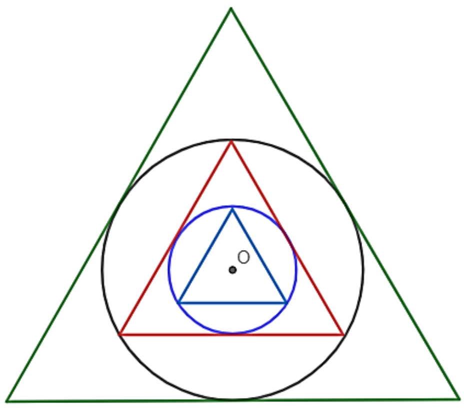
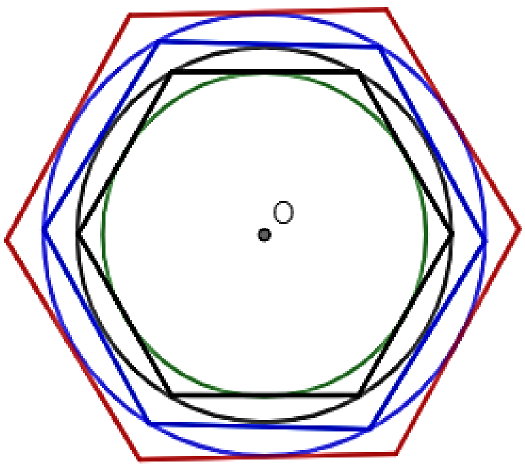
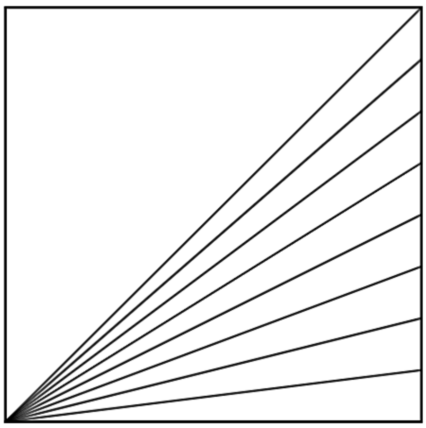
48. Юшкевич А.П. Історія математики з давніх часів і до початку XIX століття. В 3-х томах / Під ред. А.П. Юшкевича Т.3. Математика XVII століття.– Москва: Наука, 1972.– 300с.

ДОДАТКИ

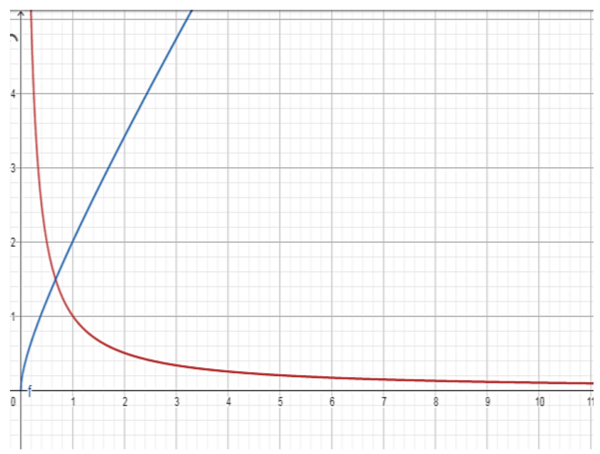
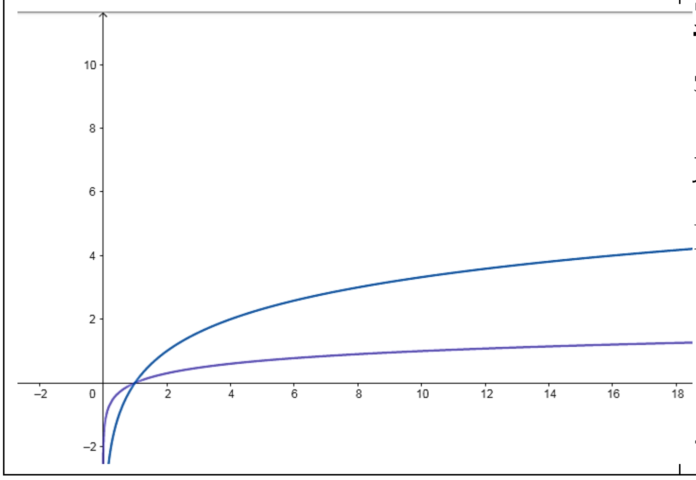
Додаток А

Приклади вправ на знаходження числових рядів за допомогою заданої генерації

Табл. А.1.

Геометрична інтерпритація	*Задачі*
	**Задача А1.** Дано правильний трикутник, сторони якого змінюються за законом гармонічного ряду $(a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{4})$. Побудувати ряди: 1. відношення радіусів описаних кіл до сторони трикутниика:. 2. відношення площі кола до периметра правильного трикутника. 3. відношення радіусів кіл до сторони правильного трикутника.
	**Задача А2.** Дано правильний шестикутник, сторони якого змінюються за законом арифметичної прогресії $(a_1 = 1)$. Побудувати ряди: 1. відношення сторони до радіуса кола. 2. відношення площі кола до площі правильного шестикутника. 3. радіусів кіл.
	**Задача А3.** Дано квадрат зі стороною рівною одиниці,, діагональ якого змінюються за законом гармонічного ряду $(a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{4})$. Побудувати ряди: 1. утворених трикутників. 2. площ утворених трикутників..

Продовж. табл. А.1.

	**Задача А4.** На рисунку нам задано два графіка $y = \frac{1}{x}$ і $y = x^{\frac{1}{2}} + x.$ Побудувати ряд: 1. Площ обмежених цими графіками. 2. Довжин $d_1, d_2, \ldots$
	**Задача А5.** На рисунку нам задано два графіка $y = \frac{1}{x}$ і $y = x^{\frac{1}{2}} + x.$ Побудувати ряд: 1. Площ обмежених цими графіками. 2. Довжин $d_1, d_2, \ldots$

«Сігма-моделі» раніше отриманих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}^{n} \pi a \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-2} \pi a^2 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a\sqrt{2}^{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^2 \cdot 2^{n-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\sqrt{2}^{n-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} n$$

$$\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a+(n-1)d)^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}n$$

$$2\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a+(n-1)d)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5}}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{2}+\frac{(n-1)d}{2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}2n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a\sqrt{2}^{\,n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{1+\sqrt{5}}\cdot n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a^2\cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-(n-1)^3}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}4a\cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n e}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln(n+1)-\frac{1}{n+1}\right)$$

Додаток Б

Приклади вправ на дослідження зв'язку між членами рядів арифметичної прогресії та гармонічних рядів

Задача Б.1. Задано арифметичні прогресії:

1.$a_n = 7n - 2.$

2. $a_1 = 5, d = 2.$

3. $a_n = 6n - 7$

4. $a_1 = 1, d = 2.$

5. $a_n = 3n - 7$

Згенерувати гармонічний ряд та довести, що отриманий ряд є гармонічним. Дослідити на збіжність та побудувати графік частинних сум.

Приклади вправ на одержання і дослідження числових рядів за допомогою визначення $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *членів відомих числових рядів*

Задача Б.2. Задано гармонічні ряди:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$

Згенерувати нові ряди за таким законом:

1. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_3}{a_4}, \ldots$
2. $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, \ldots$
3. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_4}, \frac{a_3}{a_6}, \ldots$
4. $\frac{a_5}{a_3}, \frac{a_7}{a_5}, \frac{a_9}{a_7}, \ldots$