МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
В.о. завідувача кафедри
________ Д.Є.Бобилєв
«___» _____________2019 р.

Реєстраційний № _______
«___» ____________ 2019р.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ІНТЕГРАЛАМИ ТА РЯДАМИ І ВИКОРИСТАННЯ ЙОГО ДО НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм-14
ступінь вищої освіти магістр
спеціальності: 014.04 середня освіта (математика)
Бобирь Валерії Дмитрівни
Керівник:
кандидат техн. наук, професор
Корольський Володимир Вікторович
Оцінка:
Національна шкала__________________
Шкала ECTS____ Кількість балів ______
Голова ЕК_______ ___________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
Члени ЕК _______ _________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_______ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_______ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)
_______ __________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2019

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія інтегрального числення та теорія рядів досить широко використовується при вивченні та дослідженні функцій, інтегралів, а також при розв'язанні досить великої кількості задач прикладного змісту, що вказує на те, що ці розділи є одними із найважливіших в математичному аналізі.

Велике застосування теорія інтегралів та рядів має не лише серед технічних наук, математики, але і в інших галузях, таких як: фізика, економіка, хімія, електроніка, програмування і т.д. Даний спектр застосування цих теорій обумовлюється тим, що за допомогою інтегралів та рядів можливо виконувати обчислення для одержання результатів із заданою точністю.

Історія розвитку даних понять сягає у давнину. Питанням їх розвитку займались видатні вчені, а саме:

Г. Лейбніц [1], І.Ньютон [6], Л. Ейлер [6], О.Коші [15], Ж.Л. Даламбер [4], Я. Бернулі [6] та інші.

Проаналізувавши літературу різних років та авторів, можна сказати, що в більшості підручниках, посібниках та збірниках саме з математичного аналізу наявні теоретичні відомості, які в деяких викладені більш широко, а в інших стисло, наведені приклади розв'язання типових і нестандартних задач із вказаними (запропонованими) способами розв'язання, наявні методичні рекомендації та вказівки для студентів , запропоновано систему задач та різнорівневих прикладів для самостійного виконання. Однак, треба відмітити, що в контексті сказаного, майже не продемонстрований зв'язок між інтегралами та рядами. На нашу думку, після вивчення розділу «Визначений інтеграл» та під час вивчення розділу «Числові ряди» в рамках курсу «Математичний аналіз» є корисним продемонструвати студентам цей зв'язок та дослідити його для наближених обчислень.

Саме тому тема «Дослідження зв'язку між інтегралами та рядами і використання його до наближених обчислень» є актуальною.

Мета роботи: дослідження зв’язку між інтегралами та рядами, застосування його до розв’язання задач, які пов’язані з наближеним обчисленням.

Об’єкт дослідження: визначений інтеграл, числові ряди.

Предмет дослідження: зв’язок між інтегралом і рядом та використання його до наближених обчислень.

Завдання даної роботи:

1) Аналіз існуючих теоретичних відомостей, пов’язаних з інтегралом та числовими рядами;

2) Дослідити зв’язок між поняттям інтеграл та ряд;

3) Використання інтегралів та рядів до наближених обчислень трансцендентих функцій, нескінченних сум, ірраціональних чисел;

4) Розробка багатоваріантних та різнорівневих завдань для практичних занять з дисципліни «Математичний аналіз».

Методи дослідження: аналіз існуючих теоретичних відомостей, пов’язаних з інтегралами та рядами; комп’ютерні експерименти, пов’язані із наближеним обчисленням нескінченних сум рядів, визначених інтегралів, трансцендентних функцій та ірраціональних чисел.

Практичне значення дослідження: матеріали кваліфікаційної роботи можуть бути корисними для викладачів математичного аналізу у вищій школі під час вивчення теми «Числові ряди» та проведення практичних занять.

Кваліфікаційна робота виконувалася в межах науково-дослідницької діяльності проблемної групи студентів «Наближені обчислення та геометрична інтерпретація числових рядів»

Апробація дослідження:

1. Участь у X Міжнародній конференції молодих вчених «Молоді вчені 2019 – від теорії до практики» з публікацією тез «Реалізація дидактичного принципу наочності при вивченні числових рядів» , м. Дніпро, 7 березня 2019 р.

2. Участь у Міжнародній науково-методичній конференції «Проблеми математичної освіти ПМО-2019» з публікацією тез «Зв’язок рядів арифметичної прогресії та гармонічних рядів», м. Черкаси, 11-12 квітня 2019р.

3. Участь у Всеукраїнській науково-практичній конференції студентів, аспірантів і молодих учених «Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання» з публікацією тез «Застосування ІКТ при вивченні числових та степеневих рядів», м. Чернігів, 27 листопада 2019 р.

Структура магістерської роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 57 найменувань. Основний текст викладено на 94 сторінках. Повний обсяг роботи 118 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ПОНЯТТЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА І РЯДА, ЯК ПОНЯТТЯ НЕСКІНЧЕННИХ СУМ

1.1 Поняття визначеного інтеграла і історія його розвитку.

Поняття інтеграла та інтегрального числення виникли з-за потреби обчислювати площі будь-яких фігур і поверхонь та об'єми довільних тіл. Передісторія інтегрального числення походить з глибокої давнини. [9, с.102]

Великий грецький математик Евдокс Книдський (V-IV ст. до н.е) формував перше теоретичне узагальнення і обґрунтування методів обчислення площ та об'ємів, в яких неявно використовувались граничні переходи. «Метод Евдокса» був названий в XVII столітті «методом вичерпування». Ним користувались Евклід, Архімед та інші вчені давнини. В довгій еволюції, яку протягом майже 2500 років потерпіло поняття границі, «метод вичерпування» представляє собою перший етап. Евдокс довів, що різниця між площею круга та площею вписаного в нього правильного многокутника з числом сторін n може бути менше довільного заданого $\varepsilon > 0$. За допомогою свого методу Евдокс довів, що об'єм піраміди дорівнює третій частині об'єму призми з тією ж висотою і тією ж основою, а об'єм конуса дорівнює третій частині об'єму відповідного циліндра. [47, с.11]

Архімед в своїх «Началах» за допомогою «методу вичерування» доводить, зокрема, теорему про те, що об'єми двох куль відносяться як куби їх радіусів. Стискаючи коло радіуса a, Архімед отримує еліпс з піввісями a і b і доводить, що відношення площі еліпса до площі круга виражається відношенням малої піввісі до великої, і що площа еліпса дорівнює πab. «Метод вичерпування» використовувався в XVII-XVIII століттях, а в деяких навчальних посібниках і в XIX і на початку XX століття. [47, с.11]

Самим раннім по даті опублікування був «метод безпосереднього оперування з актуальними нескінченно малими величинами». З'явився він в 1615р. в творах Кеплера. У 1609-1619 рр. він відкрив закони руху планет, які й досі носять його ім'я: 1) Планети рухаються по Еліпсам; Сонце знаходиться в одному з його фокусів; 2) Радіус-вектори планети «замітають» за рівні проміжки часу рівні секторіальні площі; 3) Квадрати часу обертання планет навколо Сонця відносяться як куби середніх відстаней до Сонця.

Формулювання цих законів показує, що для математичного доведення їх істинності недостатньо володіння відомою на той час обчислювальною технікою, знання конічних перетинів і алгебраїчних засобів. Задача обчислення секторіальних площ потребувала уміння користуватися нескінченно малими величинами. Цього вміння потребували й інші задачі практичного характеру. І от стосовно однієї з таких практичних задач Кеплер, скористувавшись випадком, виклав свій метод використання нескінченно малих величин. [9, с.107]

Мова йде про знаходження найбільш доцільної форми бочок та про способи вимірювання їх вмісту. Твір, присвячений цій проблемі, так і називається: «Нова стереометрія винних бочок, переважно австрійських, які мають найбільш вигідну форму і виключно зручне вживання для них кубічної лінійки з приєднанням доповнення до архімедової стереометрії» (Лінц, 1615). Складається вона з трьох частин: частина теоретична, спеціальна стереометрія австрійської бочки, правила для виміру вмісту бочок. Найбільший інтерес представляє теоретична частина. Починається вона зі «Стереометрії правильних кривих тіл». Це є переказом твору Архімеда «Про кулю і циліндр». Кеплер приймає античний «метод вичерпування», яким користувався Архімед, називає його глибоким, але відкидає заключний етап приведення до протиріччя. Він прагне розгадати замисел Архімеда, що привів його до отримання досить таки вражаючих результатів, звільнити його від нашарувань, визваних формальними вимогами строгості. Цей замисел, на думку Кеплера, полягає в тому, що довільна фігура або тіло представляється у вигляді суми множини нескінченно малих частин. Круг, наприклад, складається з нескінченно великого числа нескінченно вузьких секторів, кожен з яких може розглядатися як рівнобедрений трикутник. Всі трикутники мають однакову висоту (радіус круга), а сума їх основ дорівнює довжині кола. Таким же чином куля виявляється складеною із нескінченної множини конусів, вершини яких сходяться в центрі кулі, а основи утворюють поверхню кулі. [39, с.154]

«Метод сумування» актуально нескінченно малих Кеплер розповсюджує і на інші нескладні геометричні фігури та тіла (конуси і циліндри) та їх частини, розглянуті у Архімеда. В деяких випадках він ще далі відходить від строгості викладу, вводячи інтуїтивні міркування. Наприклад, доведено, що бічна поверхня вписаного конуса відноситься до площі основи (великого круга кулі) як $\sqrt{2}:1$; ця поверхня вдвічі менша бічної поверхні описаного конуса. [39, с.155]

Метод обчислення об'ємів тіл обертання та їх частин був у Кеплера єдиним. По-перше, тіло, що вивчали ділили на нескінченну кількість частин, «ломтів», що займали рівноправне положення в тілі. Ці частини тіла перегруповувалися, утворюючи інше тіло, об'єм якого можна обчислити. Якщо безпосереднє підсумовування виявлялося неможливо провести, то вони попередньо замінювались іншими частинами, еквівалентними даним.

Перша спроба створити регулярний алгоритм оперування з нескінченно малими стала досить популярною. Багато вчених присвятили свої роботи вдосконаленню оперативної сторони даного методу і раціональному поясненню понять, що при цьому виникають. Найбільшу популярність отримала «геометрія неподільних», винайдена Кавальєрі. [32]

Учень Галілея, італійський математик Бонавентура Кавальєрі (1598-1647) вважається основоположником «методу неподільних» - попередником «методу нескінченно малих». У XVII-XVIII ст. багато з послідовників

Кавальєрі, в тому числі англійський математик Джон Валліс (1616-1703) вже явно ототожнюють неподільні величини з актуально нескінченно малими. Саме Валліс, як вважають, першим в арифметичній формі виклав граничний перехід, давши потужний стимул у розвиток теорії границь. Він же запропонував в 1665 р. використовувати символ ∞ для позначення нескінченності. [47, с.11]

«Метод неподільних» використовували Євангеліста Торрічеллі (1608-1647), Блез Паскаль (1623-1662) та інші вчені того часу. Створення цього методу стало одним з важливих етапів у розвитку інтегрального числення. Цей метод дозволив розв’язати багато важких задач, які раніше не піддавалися розв’язанню. Є. Торрічеллі писав, що нова геометрія неподільних переходить з рук одних вчених до інших , як чудо науки; вона, на думку Торрічеллі, переконала світ, що часи Архімеда та Евкліда були роками дитинства нині дорослої геометричної науки. Торрічеллі, активно працюючи методами Кавальєрі, перший зумів визначити об’єм тіла, утвореного в результаті обертання вітки гіперболи навколо однієї з її вісей. [47, с.12]

Визначене інтегрування в формі геометричних квадратур в першій половині XVII ст. вже зарекомендувало себе. Всі зусилля віднині були спрямовані на його уточнення та на досягнення можливо більш загальних результатів. [39, с.160]

Паскаль, наприклад, розглядав квадратури у формі, близької до тої, яку використовував Кавальєрі. Спроба уточнення полягає в тому, що він суму всіх неподільних розумів як суму елементарних площ, утворених нескінченно близькими ординатами, що були на однаковій відстані одна від одної, і обмежені відрізком осі абсцис та кривої (тобто, суму виду $\sum ydx$). В ряді задач він вводив суму всіх синусів, визначаючи її як суму добутків ординат на елементи дуги ($\sum yds$), яка у випадку кола одиничного радіуса підтверджує свою назву ($\sum sin\varphi d\varphi$). За допомогою цього геометричного еквівалента визначеного інтегрування Паскаль зумів розв'язати багато задач на визначення площ, об'ємів, статичних моментів і т.д. [39, с.160]

У випадку, коли мова йде про суму синусів, Паскаль оприлюднив думку, яка в результаті зіграла велику роль в історії математики. Він ввів допоміжний трикутник ЕКЕ, подібний ΔADI, і зберіг його в своїх роздумах навіть тоді, коли відстань мж двома сусідніми ординатами нескінченно мала [39, с.161]:

$$\Delta EKE \sim \Delta ADI; \ \frac{EE}{KE} = \frac{AD}{ID}; DI \times EE = AD \times KE, \tag{1.1}$$

або в найбільш звичних нам позначеннях: $yds = rdx$. Наступна теорема Паскаля: сума синусів довільної дуги чверті круга дорівнює відрізку основи між крайніми синусами, помноженому на радіус, легко переводиться на мову інтегрального числення.[4] Дійсно: $\int_0^s yds = r\int_0^x dx$. Оскільки

$$y = r \cdot \cos\varphi, \ x = r \cdot \sin\varphi, s = r\varphi,$$

то

$$\int_0^\varphi \mathrm{r}\cos\varphi \, d(r\varphi) = r\int_0^\varphi d(r\sin\varphi), \tag{1.2}$$

або

$$\int_0^\varphi \cos\varphi d\varphi = \int_0^\varphi d(\sin\varphi) = \sin\varphi. \tag{1.3}$$

За власним признанням Лейбніца, «трикутник Паскаля» послугував йому прообразом диференціального трикутника, складеного з диференціалів dx, dy, ds. [39, с.161]

У 1655 р. Дж. Валлісом була видана «Арифметика нескінченного». Відштовхуючись від метода Кавальєрі, він перевів на арифметичну мову відношення сум неподільних. Так, відношення степенів неподільних, які інтерпретували як інтегрування степеневої функції $\int x^n$, він представив як відношення сум чисел. Так, відношення суми неподільних трикутника до суми неподільних паралелограма з тією ж основою і висотою зводиться Валлісом до відношення:

$$\frac{0 + 1 + 2 + \cdots + n}{n + n + n + \cdots + n}, \tag{1.4}$$

яке при нескінченно зростаючому n рівне $\frac{1}{2}$. Відношення сум 2, 3, …, m степенів неподільних викладено як:

$$\frac{0^k+1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k+n^k+n^k+\cdots+n^k} \tag{1.5}$$

(k = 2,3, …, m) для нескінченно зростаючого n. Значення цих відношень до k=9 відношень отримані Кавальєрі рівні $\frac{1}{k+1}$. [39, с.163] Валліс, міркуючи за допомогою неповної математичної індукції, розповсюджує цей результат на випадок довільного цілого k. Так, ним було отримана формула еквівалентна

$$\int_0^1 x^m = \frac{1}{m+1}. \tag{1.6}$$

Валліс знав із творів Архімеда, що площа параболічного сегмента дорівнює $\frac{2}{3}$ від площі описаного паралелограма. Він і його перевів на мову відношень вказаних вище сум:

$$\frac{\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n}+\cdots+\sqrt{n}}, \tag{1.7}$$

при нескінченно зростаючому n, дорівнює $\frac{2}{3}$. Та ж неповна індукція приводить Валліса до узагальнення цього результату на всі дробові показники степені, а потім і на від’ємні. [39, с.163]

Ідеї, що включають елементи визначеного інтегрування, широко розповсюджувались серед математиків західноєвропейських країн.

Протягом XVIII ст. інтегральне числення надзвичайно швидко розвивалось. Ейлеру знадобилося в 1768-1770 рр. три великих томи, щоб дати його систематичний виклад. Перший том цієї колосальної праці складався з першої частини саме інтегрування функцій; звичайні диференціальні рівняння зайняли другу частину першого тому і весь другий том; третій том був відведений диференціальним рівнянням з частинними похідними і варіаційному численню. Проте, весь цей матеріал сприймався ще все-таки як єдине інтегральне числення. [40, с.56]

За Ейлером, який виражав загальноприйняту точку зору, інтегральне числення було методом знаходження по даному відношенню між диференціалами, відношення між самими кількостями. Дія, за допомогою якого це визначалось, називалась інтегруванням. Вихідним поняттям такого числення, звичайно, був невизначений інтеграл. Саме числення мало за мету розробку методів знаходження первісних функцій для функцій можливо більш широкого класу.

Задача на побудову числення в основному була розв'язана протягом першої половини XVIII ст. Головне досягнення в цій справі спочатку належали І. Бернуллі, який написав систематичний курс інтегрального числення (1742 р.), потім – Ейлеру. Вклад останнього в інтегральне числення надзвичайно великий. У відношенні інтегрального числення сучасні підручники є лише переробками трактату Ейлера.[40, с.57]

Інтегральне числення в частині методів невизначеного інтегрування досягло практично сучасного рівня в другій половині XVIII ст.

Формування сукупності методів знаходження первісних функцій супроводжувалося відпрацюванням загальних понять числення і відповідної зручної символіки. Ейлер, виходячи з поняття невизначеного інтеграла як основного, ввів цілу систему визначень. Інтеграл разом з довільною адитивною сталою інтегрування він називав «повним». Фіксація довільної сталої призводила до часткового інтеграла [40, с.57]. Значення останнього при деякому визначеному значенні аргумента давало еквівалент визначеного інтеграла.

Цю послідовність виявилося неможливим витримати в прикладних питаннях (у випадку, коли первісна не є елементарною функцією), і у відповідних наближених обчисленнях визначене інтегрування вводилося як сума у сенсі, що є аналогічним сучасному. Необхідна видозміна символу Лейбніца

$$\int f(x)dx \tag{1.8}$$

для випадку визначеного інтегрування теж була знайдена не одразу. Символ Ейлера

$$\int f(x)dx \begin{bmatrix} ab\ x = a \\ ad\ x = b \end{bmatrix}, \tag{1.9}$$

(де замість $f(x)$ ще було p) отримав з 1779 р., за пропозицією Лапласа, відповідний термін «визначений інтеграл» [40, с.58]. Звичний нам (і що здається таким природнім) символ

$$\int\limits_a^b f(x)dx \tag{1.10}$$

був винайденим і введеним Фур'є тільки в 1819-1822 рр.

Паралельно з розвитком інтегрального числення виникали узагальнення операції інтегрування. У 1743 р. Клеро ввів криволінійні інтеграли

$$\int P\,dx + Qdy, \tag{1.11}$$

взяті вздовж кривої, у книзі «Теория фигуры земли, основанная на началах гидростатики» (переклад російською вийшов у 1947 р.). У 1770 р. Ейлер у зв'язку з практичними задачами розробив та ввів подвійне інтегрування. Через два роки (в 1772 р.) Лагранж, розглядаючи задачу про тяжіння еліпсоїда обертання (опубліковано у 1775 р.), ввів в математику потрійні інтеграли.

У ході розвитку інтегрального числення з'явився ряд задач спеціального характеру. Спроби їх розв'язання призвели до розробки нових областей математичного аналізу. [40, с.58]

Обчислення інтегралів спеціальних видів вже на початку XVIII ст. привело до відкриття ряду факторів теорії спеціальних функцій. Одним із перших було відкриття ейлерових інтегралів першого та другого роду, тобто відповідно [40, с.59]:

бета-функції (1730-1731)

$$B(a,b)=\int_{0}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \qquad (1.12)$$

і гама-функції (1729-1730)

$$\Gamma(a)=\int_{0}^{\infty} e^{-x}x^{a-1}dx. \qquad (1.13)$$

З кількості багатьох спеціальних інтегралів можна відмітити «інтегральний логарифм»:

$$li(x)=\int_{0}^{x}\frac{dx}{\ln x}=\int_{-\infty}^{\ln x}\frac{e^{t}dt}{t}, \qquad (1.14)$$

який отримав разом з функцією $\varsigma(x)$ велике значення в аналітичній теорії чисел, наприклад при дослідженні проблеми розподілу простих чисел в натуральному ряді.

Ейлер розклав інтегральний логарифм $li(e^{-x})$ в ряд:

$$li(e^{-x})=c+\ln x-\frac{x}{1\cdot 1!}+\frac{x^2}{2\cdot 2!}-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\cdots, \qquad (1.15)$$

де c – стала Ейлера:

$$c=0{,}577215\ldots,$$

арифметична природа якої не з’ясована до теперішнього часу. [40, с.60]

У 1777-1778 рр. Л. Ейлер вперше застосував до обчислення визначених інтегралів функцію комплексної змінної. Свій вклад в розвиток інтегрального вніс також французький вчений і просвітитель Жан Д’аламбер (1717-1783).

На початку XIX ст. інтегральне числення було перебудовано на новій основі. Реформа інтегрального числення була розпочата великим французьким математиком Огюстеном Луї Коші (1789-1857). Визначений інтеграл, який розглядався як границя інтегральної суми, О. Коші представив як одне з найважливіших понять аналізу. При цьому він користувався символом (1.10), запропонований Джозефом Фур’є. Саме завдяки Коші цей символ увійшов в загальне використання і зберігся понині. Коші вперше аналітично довів існування визначеного інтеграла у неперервної функції, а також точно визначив найпростіші невласні інтеграли для необмеженого проміжку інтегрування і для функцій з скінченною кількістю точок розриву. [47, с.12-13]

Подальші узагальнення поняття інтеграла, пов'язане особливо з вивченням тригонометричних рядів, були дані Бернардом Ріманом (1826-1866), Анрі Лебегом (1875-1941) та ін. Б. Ріман перший визначив необхідні та достатні умови інтегрування обмеженої функції. Йому належить загальне визначення визначеного інтеграла, тому інтегральну суму і почали називати «рімановою», хоча по суті це поняття походить ще з Архімеда, а в сучасній формі для випадку неперервної функції ним користувався Коші. А. Лебегу належить узагальнення поняття інтеграла (інтеграл Лебега), засноване на теорії міри (міра Лебега) і, що дозволяло інтегрувати надзвичайно широкий клас функцій. [47, с.13]

В розвитку інтегрального числення в XIX ст. прийняли важливу участь також деякі російські вчені. Так, М.В. Остроградський запропонував оригінальний прийом інтегрування раціональних дробів («метод Остроградського»), що дозволяє алгебраїчно виділяти раціональну частину інтеграла (1845). Йому ж належать формули перетворення $n-$кратних інтегралів в $(n-1)-$кратні, що мають фундаментальне значення в інтегральному численні. Велику кількість спеціальних визначених інтегралів обчислив Н.І. Лобачевський (1792-1856). Математик В.Я. Буняковський (1804-1889) відкрив широко відому нерівність, яка носить його ім'я [47, с.13]:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \qquad (1.16)$$

Великі дослідження з інтегрального числення належать П.Л. Чебишеву. Серед них такі, які продовжували дослідження Н. Абеля та М.В. Остроградського, праці про інтегрування в кінцевому вигляді деяких ірраціональних функцій. Зокрема, П.Л. Чебишев довів, що відомі ще в XVIII ст. три випадки інтегрування в кінцевому вигляді біноміального диференціала є єдиними. [47]

Загальна теорія інтеграла пов'язана з розвитком теорії множин та теорії функцій дійсної змінної.

Перейдемо безпосередньо до визначеного інтеграла і основних понять.

В цьому випадку має місце так званий визначений інтеграл [25]

$$I = \int_a^b f(x)dx, \tag{1.17}$$

який за своєю сутністю є дійсним числом, що обчислюється у вигляді різниці:

$$I = F(b) - F(a), \tag{1.18}$$

де $F(x)$ – первісна для підінтегральної функції, тобто для обчислення визначеного інтегралу застосовується формула Ньютона-Лейбніца [25]:

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a). \tag{1.19}$$

Із формули (1.19) можна зробити висновок, що основними поняттями, пов'язаними з визначеним інтегралом є відрізок інтегрування, неперервна підінтегральна функція.

Далі введемо означення «визначеного інтегралу». [45]

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a, b], a < b$. Виконаємо наступні операції:

1. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ точками $x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_n$ на n рівних відрізків $[x_0,\ x_1], [x_1,\ x_2], \dots, [x_{i-1},\ x_i], \dots [x_{n-1},\ x_n]$;

2. В кожному із відрізків $[x_{i-1},\ x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n,$ оберемо довільну точку $\xi_i \in [x_{i-1},\ x_i]$ і обчислимо значення функції в даній точці: $f(\xi_i)$;

3. Знайдемо добуток $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, де $\Delta x_i -$ довжина відрізка $[x_{i-1},\ x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$;

4. Складемо суму, яка має назву інтегральної суми функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$:

$$I = f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + f(\xi_2)\cdot\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \qquad (1.20)$$

З геометричної точки зору інтегральна сума I представляє собою суму площ прямокутників, основами яких є відрізки $[x_0,\ x_1], [x_1,\ x_2], \dots, [x_{i-1},\ x_i]$, … , $[x_{n-1},\ x_n]$, а висоти дорівнюють відповідно $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$ (рис. 1.1). Позначимо через λ довжину найбільшого відрізка: $\lambda = \max_{1\le i\le n} \Delta x_1$;

5. Знайдемо границю інтегральної суми, коли $\lambda \to 0$.

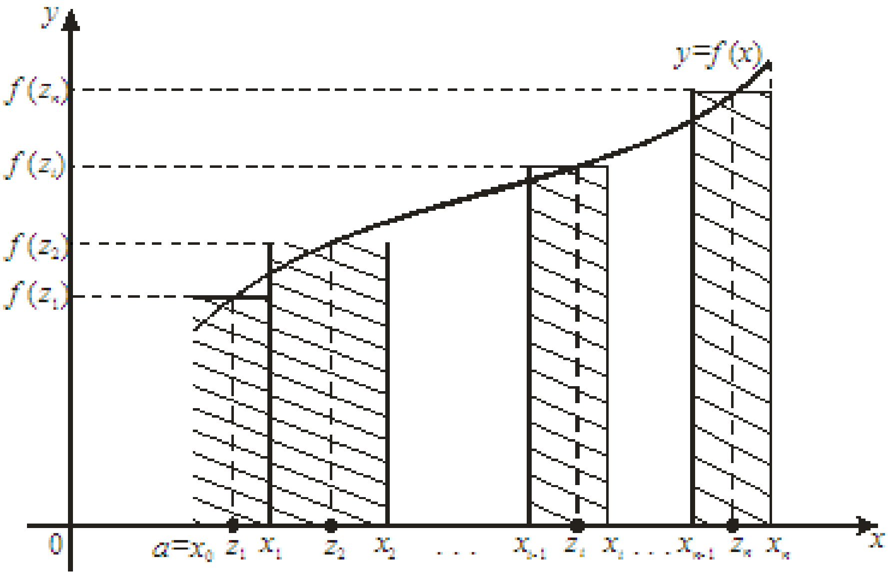

Рис. 1.1 Геометричне представлення визначеного інтеграла

Означення 1.1.1 Якщо існує кінцева границя інтегральної суми (1.20) і вона не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a,b]$ на інші відрізки, ні від вибору точок ξ_i в них, то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$, і позначається $\int_a^b f(x)dx$. [45]

Таким чином, маємо, що

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i. \qquad (1.21)$$

В даному випадку маємо, що функція $f(x)$ називається інтегрованою функцією на $[a,b]$. Числа a і b – відповідно нижньою та верхньою межею інтегрування, $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз,

x – змінна інтегрування; відрізок $[a, b]$ називається проміжком інтегрування. [45]

1.2 Поняття ряда і історія його розвитку.

Історія розвитку теорії числових рядів також сягає у давнину. Ми пропонуємо розглянути деякі етапи в дослідженні даної теорії більш детально.

Сума числових рядів цікавила багатьох індійський математиків. Окремі приклади арифметичних та геометричних прогресій є ще в «Ведах». [55, с.201] У XVI ст. Нарайана отримав більш загальну суму: якщо позначити

$$\begin{gathered} 1 + 2 + 3 + \cdots + n = S_n^{(1)}, \\ S_1^{(1)} + S_2^{(1)} + \cdots + S_n^{(1)} = S_n^{(2)}, \\ S_1^{(2)} + S_2^{(2)} + \cdots + S_n^{(2)} = S_n^{(3)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \end{gathered} \tag{1.22}$$

то можна сказати, що Нарайана отримав вираз для

$$S_n^{(m)} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m+1)}. \tag{1.23}$$

Нарайана узагальнив це правило для випадку арифметичної прогресії з даним першим членом a_1, і різницею d: в цьому випадку сума буде рівна

$$\sum\nolimits_n^{(m)} = a_1 \frac{m+1}{n-1} S_{n-1}^{(m)} + dS_{n-1}^{(m)}. \tag{1.24}$$

Найбільш визначних успіхів в області нескінченних рядів досягли південно-індійські математики в XVI ст. [55, с.202] Причиною для їх дослідження стали, судячи з усього, пошуки прийомів більш точного обчислення числа π. Нілаканта подає словесно, без доведень, розклад дуги, що рівна одній четвертій кола, у вигляді нескінченних числових рядів, отриманих з загального степеневого ряду арктангенса.

Загальний розклад в наших позначеннях має вид:

$$r\varphi = \frac{r\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{r\sin^3\varphi}{3\cos^3\varphi} + \frac{r\sin^5\varphi}{5\cos^5\varphi} - \cdots. \qquad (1.25)$$

При $r = 1$ та $\varphi = 45°$ отримуємо ряд для обчислення π, причому $\frac{\pi}{4}$ виражається частинної сумою та поправкою.

В анонімному трактаті «Каранападдхати» («Техніка обчислень») також написаному в Південній Індії в XV-XVI ст., приводяться не менш значимі правила розкладу синуса та косинуса нескінченні степеневі ряди. [55, с. 202]

Бачимо, що південно-індійські вчені передбачили багато результатів, які були знову отримані в Європі в XVII-XVIII ст. Вони передбачили не тільки кінцеві результати, але частково і методи, які до них приводять. Так, в сучасних підручниках з математичного аналізу ряд арктангенса виводять часто способом, схожим з індійським: в рівності підінтегральну функцію розкладають в степеневий ряд, а потім почленно інтегрують. [55, с.203]

У XVII ст. ґрунтом, на якій виросла теорія нескінченних рядів, було наближене обчислення та інтерполювання. Принципово новим стало використання нескінченних рядів для наближення та вираження функцій. В цьому відношенні особливу роль зіграли логарифми, і їх приклад – історично перший – представляє собою ілюстрацію тих взаємодій між обчисленнями та загальною теорією, які були однією із безпосередніх причин математичного прогресу протягом всього Нового часу. На прикладі логарифмічної функції розглянемо перші успіхи в теорії рядів, і разом з тих побачимо якими принципами керувались математики в цій області. [56, с.158]

В «Нових арифметичних квадратурах або про додавання дробів» (1650) Менголі просумував деякі числові ряди, і незалежно від Орема довів розбіжність гармонічного ряду.

Цей результат Менголі розповсюдив на узагальнені гармонічні ряди, члени яких обернені члени арифметичної прогресії. Вчений намагався дослідити і ряд обернених квадратів. Він довів його збіжність, але просумувати йому, звичайно, не вдалося, і він виразив сумнів про неможливість відобразити його в кінцевій формі. Як наслідок цей та більш загальні ряди обернених степенів були глибоко досліджені Ейлером. Числовий ряд Менголі привів в «Початках видової геометрії» (1659), в якому обчислив квадратуру кривих для натуральних. [56, с.159]

Наступним кроком в дослідженні рядів та логарифмічної функції виявилось представлення останньої у формі нескінченного степеневого ряду. Цей важливий крок зробив німецький любитель математики Микола Кауфман, більш відомий під ім’ям Меркатора. Він виклав свої дослідження у праці під назвою «Логарифмотехніка». [4]

Меркатор не перший прийшов до розкладання логарифмічної функції в степеневий ряд. До цього ж результату прийшли також Гудде у 1656 р. та Ньютон у 1665 р., але обидва цей результат залишили при собі. Тому значення публікації «Логарифмотехніки» виявилося дуже великим.

У 1668 р. Грегорі в «Геометричних етюдах» запропонував вивід ряду Меркатора в античній манері і розклад

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right), \tag{1.26}$$

придатний для обчислення логарифма довільного додатного числа $z =$ $= (1+x)/(1-x)$, оскільки тоді $x = (z-1)/(z+1)$ за абсолютною величиною менше одиниці. [56, с.162]

Розклад в ряд логарифма був не єдиним прикладом використання степеневих рядів. Багаточисельні інші розклади відкрив Дж. Грегорі. Із його листа до Коллінса 23 листопада 1670 р. бачимо, що в цей час він володів вже загальним розкладом бінома $(1+x)^{p/q}$, а до початку 1672 р. вивів ще декілька важливих розкладів, які ми запишемо в сучасній формі [56, с.166]:

1. $\varphi = \operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\varphi + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5\varphi - \cdots.$ (1.27)

Ряд арктангенса Грегорі, ймовірно, отримав почленним інтегруванням ряду, який виникає при діленні 1: $(1+x^2)$, де $x = \operatorname{tg}\varphi$.

2. $\operatorname{tg}\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3} + \frac{2\varphi^5}{15} + \cdots.$ (1.28)

3. $\ln \sec \varphi = \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{12} + \frac{\varphi^6}{90} + \cdots.$ (1.29)

Останній результат був, скоріше всього, знайдений інтегруванням членів попереднього ряду.

4. $\sec \varphi = 1 + \frac{\varphi^2}{2} + \frac{5\varphi^4}{24} + \cdots.$ (1.30)

5. $\ln \mathrm{tg}\, \varphi \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \varphi + \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{24} + \cdots.$ [56, с. 166] (1.31)

Даний ряд також виникає під час інтегрування попереднього.

Можна припустити, що в цей час Грегорі володів і більш загальним результатом – розкладом в ряд Тейлора-Маклорена, хоча прямих доказів для цього не існує.

Однак, тільки що перелічені відкриття Грегорі не мали суттєвого впливу на розвиток математичного аналізу. Про найбільш важливе з них, тобто ряд Тейлора, в ті часи ніхто й не підозрював: про нього засвідчили по рукописному спадку Грегорі лише дослідники в XX ст.

Між тим, ще в 1665-1669 рр. далеко просунувся в теорії рядів, починаючи з відкриття тієї ж теореми про біном, Ньютон, результати якого почали отримувати розповсюдження не пізніше кінця 1669 року як в Англії, так і за кордоном. [56, с.166]

Одним із його перших відкриттів в цій області був розклад степені бінома, який раніше згадувався, знайдений взимку 1664-1665 рр. Про нього досить детально Ньютон розповів у другому листі до Ольденбургу для Лейбніца від 24 жовтня 1676 р. Вивчаючи «Арифметику нескінченних» Валліса, Ньютон також зайнявся інтерполюванням площ кривих $y = (1 - x^2)^{n/2}$, але тільки на відміну від свого попередника, який розглядав послідовності, відповідні інтегралам з постійними межами 0 та 1, він проінтерполював послідовність інтегралів $\int_0^x (1 - x^2)^{n/2} dx$ зі змінною верхньою межею x для $n = 0, 2, 4, 6, \ldots,$ тобто послідовність

$$x, x - \frac{1}{3}x^3, x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5, x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7, \ldots. [56] \qquad (1.32)$$

Виявивши тут, що коефіцієнти других членів $\frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \ldots$ слідують в арифметичній прогресії, а також загальний закон утворення коефіцієнтів, він розповсюдив його на непарні значення $n = 1, 3, 5, \ldots$, а від цього перейшов до інтерполювання самої функції

$$y = (1 - x^2)^{\frac{n}{2}} \tag{1.33}$$

і потім

$$y = (1 - x^2)^m \tag{1.34}$$

при довільному m. Так був встановлений загальний мультиплікативний закон коефіцієнтів біноміального розкладу для довільного дійсного показника

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots. [56] \quad (1.35)$$

В «Аналізі за допомогою рівнянь» узагальненою формулою бінома Ньютон не скористався, і тут здійснював розклад в ряди за допомогою формально-алгебраїчних операцій: необмеженого ділення многочлена на многочлен, в тому числі ряда на ряд, та добування коренів.

Так, у формі нескінченного ряду був вперше виражений еліптичний інтеграл [56, с.231]:

$$\int \frac{\sqrt{1 + ax^2}}{\sqrt{1 - bx^2}} dx = x + \left(\frac{1}{6}b + \frac{1}{6}a\right)x^3 + \left(\frac{3}{40}b^2 + \frac{1}{20}ab - \frac{1}{40}a^2\right)x^5 + \cdots. \tag{1.36}$$

Ньютон також отримав ряд

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots. \tag{1.37}$$

Обертаючи ряд для

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \tag{1.38}$$

Ньютон виразив показникову функцію

$$e^x - 1 = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \tag{1.39}$$

однак він ще не використовував символ e^x.

Також Ньютон застосовував розклад в ряди за дробовим та від'ємним степенем аргумента. [56, с.233]

Наступним, хто зробив свій вклад в історію розвитку теорії рядів був представник англійської математики Брук Тейлор.

У XVIII ст., скориставшись формулою Ньютона, яка виражала приріст функції $f(a+n\Delta x)-f(a)$, відповідний приросту аргументу $n\Delta x$, Брук Тейлор записав її у вигляді

$$f(a+n\Delta x)-f(a)=n\Delta f(a)+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(a)+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 f(a)+\cdots+\Delta^n f(a). \qquad (1.40)$$

Саме ця формула, цей запис стало поштовхом до загальної теореми Тейлора про розклад функції в степеневий ряд. Тут $\Delta f(a)$ позначає першу різницю $\Delta f(a)=f(a+\Delta x)-f(a)$, $\Delta^2 f(a)$ - другу, тобто $\Delta(\Delta f)=f(a+2\Delta x)-$ $-2f(a-\Delta x)+f(a)$ і т.д. [54, с.225]

Ідея Тейлора полягала в переході від інтерполяційної формули Ньютона, виведеної для кінцевого приросту $h=n\Delta x$, до ряду, який виникав, коли n стає нескінченно великим, а відповідно Δx нескінченно малим. При $h=n\Delta x$ формула (1.40) отримує вид:

$$f(a+h)-f(a)=h\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}+\frac{h(h-\Delta x)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2}+\cdots$$
$$\ldots+\frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)\ldots[h-(n-1)\Delta x]}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{\Delta^n f(a)}{\Delta x^n}. \qquad (1.41)$$

Гранична поведінка перших членів в цьому розкладі при $\Delta x\to 0$ для Тейлора очевидна: $\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$ прямує до $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$, а $\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2}$ до $\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=a}$, множник $h(h-\Delta x)$ в границі дорівнює h^2 і т.д. Тому Тейлор, не боючись, що число членів розкладу нескінченно зростає, в стилі математики XVIII ст. заключає про істину для будь-якої функції $y=f(x)$ розкладу, що має в сучасному записі вигляд:

$$f(a+h) = f(a) + h\frac{df(a)}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2f(a)}{dx^2} + \cdots.[54, \text{с}. 225] \quad (1.42)$$

Наступний важливий крок вперед зробив Стірлінг, роль якого в теорії рядів досить значна.

У статті 1719 р. Стірлінг застосував інтерполяційний метод Ньютона до покращення збіжності деяких числових рядів. У книзі «Метод різниць», в першій її частині під назвою «О разностных уравнениях, определяющих ряды», серед всього розглянуто сумування узагальнених від’ємних степенів та утворення з них рядів. Серед додатків заслуговує уваги наближена сума ряду обернених квадратів $s = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, яку він обчислив з високою точністю, однак, не помітивши, що отриманий ним результат $s = 1.644934065$, правильний до передостаннього знаку, відповідає $\frac{\pi^2}{6}$, як це через декілька років виявив Ейлер.[54, с.228]

В другій частині «Методу різниць», що має заголовок «Об интерполировании рядов», Стірлінг, як він сам вказує, розповсюдив ідеї рекурентних рядів Муавра на інші ряди, члени яких слідують якомусь «регулярному закону». Його початковий принцип полягав в заміні, яка визначає послідовність $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ рекурентної шкали

$$a_n = m_1a_{n-1} + m_2a_{n-2} + \cdots + m_ka_{n-k} \quad (1.43)$$

з постійними коефіцієнтами m_i на шкалу зі змінними коефіцієнтами $m_i(n)$. [54, с.228]

Але ще більш значним був також інший результат Стірлінга, до якого він прийшов, очевидно займаючись перевіркою таблиці логарифмів $n!$ Муавра, а саме, асимптотичний ряд для суми десяткових логарифмів перших n членів арифметичної прогресії. Цей ряд, що зараз має його ім’я, Стірлінг опублікував разом з частковим випадком $\sum_{k=2}^{n}\log k = \log(n!)$ в «Методі різниць». Ще раніше, через декілька днів після виходу «Аналітичних етюдів», Стірлінг письмово представив свій ряд для $\log(n!)$ Муавру разом із вказівками на деякі неточності в його таблиці. У дещо більш сучасній формі запису і для випадку натуральних логарифмів ряд Стірлінга можна записати так [46]:

$$\ln(n!) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{2\cdot 12\left(n+\frac{1}{2}\right)} + \frac{7}{2^3\cdot 360\left(n+\frac{1}{2}\right)^3} - \frac{31}{2^5\cdot 1260\left(n+\frac{1}{2}\right)^5} + \cdots. \quad (1.44)$$

Ці результати Стірлінга та Муавра були розповсюджені на гама-функцію Ейлером, разом з тим вони представляють собою часткові випадки більш загальної формули суми Ейлера-Маклорена, яка в рівній мірі належить обчисленню кінцевих різниць і теорії рядів. [54, с.230]

Розвиток обчислення нескінченно малих та його основ йшов в тісній взаємодії з розробкою теорії нескінченних степеневих рядів.

Про внесок Тейлора в історію розвитку теорії рядів говорилося вище, однак хотілося б зазначити ще деякі факти, які за хронологією відбулися після його досліджень в цій області. Тейлор на той час ще не міг оцінити всю важливість свого відкриття, яке Кондорс в 1784 р. назвав «теоремою Тейлора» і С. Люільє в 1786 р. «рядом Тейлора»; його значення розкривалось поступово протягом XVIII ст. [54, с.294]

Новий вивід запропонував К. Маклорен в другому томі свого «Трактата про флюксії» (1742). Припускаючи, що величина y представлена рядом за степенями z, а також допускаючи можливість почленного диференціювання такого ряду, Маклорен спершу записав розклад з невизначеними коефіцієнтами

$$y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots, \quad (1.45)$$

а потім знайшов $A, B, C, D, \ldots$ шляхом послідовних підстановок $z = 0$ і диференціювань. [54, с.296] Результат, котрий зараз ми називаємо рядом Маклорена (сам він вказував на приналежність теореми Тейлору), він записав у вигляді:

$$y = E + \frac{\dot{E}z}{\dot{z}} + \frac{\ddot{E}z^2}{1 \times 2\ddot{z}^2} + \frac{\dddot{E}z^3}{1 \times 2 \times 3\dddot{z}^3} + \frac{Ez^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4z^4} + \cdots, \quad (1.46)$$

де $E, \dot{E}, \ddot{E}, \ldots$ суть значення $y,\ \dot{y},\ \ddot{y}, \ldots$ при $z = 0$.

Також, окрім Маклорена, ряд Тейлора досліджував Лагранж. Математик загальним чином поставив та розв'язав питання про оцінку точності наближень, які є частинними сумами членів ряду Тейлора. [54, с.298]

Більш звичну нам форму розкладу довільної функції за степенем приросту аргументу продемонстрував, із посиланням на Тейлора, Ейлер.

В листі до Гольдбаха від 4 липня 1744 р. він повідомляв: «Я працюю зараз над трактатом диференціального числення, в якому зробив різні цікаві відкриття стосовно рядів», - і серед результатів вказав два наступних:

$$\frac{x}{2} + \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots = \frac{\pi}{2}, \quad (1.47)$$

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots = \frac{1}{2}. \quad (1.48)$$

Як ми бачимо, результати Ейлера стосуються тригонометричних рядів. Ряд (1.47) представляв собою перший в історії математики розклад алгебраїчної раціональної функції, в даному випадку $\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$, в нескінченний ряд Фур'є. Обидві наведені формули Ейлер включив в «Диференціальне числення» (1755), причому першу він вивів за допомогою досить важких перетворень, відштовхуючись від ряда Тейлора для $arctg\, x$, а другу – диференціюванням першої. [54, с.313]

В ті ж роки тригонометричні ряди отримали застосування в працях Ейлера, Д. Бернуллі, Д'аламбера і Клеро з механіки та математичної фізики.

Лише в XIX столітті ряди стали предметом дослідження самі по собі, і критичний перегляд основ аналізу на перших порах торкнувся саме їх. Саме в цей час гостро постало питання про потребу досліджень ознак збіжності ряду. Сучасне означення поняття суми ряду та його збіжності або розбіжності, основане на понятті границі, остаточно встановилось після робіт Больцано та Коші. Ці два вчених встановили в загальній формі умову, необхідну і достатню для збіжності ряду. Дослідження стосовно збіжності ряду або його розбіжності проводили також Діріхле та Ріман. В роботі Вейєрштраса, вперше, було введено поняття і сам термін рівномірної збіжності, яке потім він використовував на своїх лекціях. Різницю між рівномірною та нерівномірною збіжністю було наведено Зайделем в 1848 р. та Стоксом в 1849 р. [57]

На цьому етапі ми і завершуємо історичний очерк історії розвитку теорії рядів та перейдемо до самого поняття «ряд», «числовий ряд» і дамо його означення.

Означення 1.2.1 Нехай задана деяка числова послідовність $\{a_n\}$, де n – натуральне число, тобто $n \in N = \{1,2, \dots ,n, \dots\}$. Вираз виду:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1.49}$$

де $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n , \dots$ – члени ряду, називається числовим рядом. [30] Вираз для n -го члена ряду при довільному n називається загальним членом ряду.

Означення 1.2.2 Сума $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ n перших членів ряду (1.49) називається n – ю частиною сумою ряду. [30]

1.3 Приклад зв'язку між визначеним інтегралом і рядом.

Питання про зв'язок ряда та інтеграла широко не розглядається в підручниках та посібниках з математичного аналізу. Однак, при вивченні розділу «Числові ряди» основним завданням є дослідити заданий ряд на збіжність. Приклади таких рядів, наведені в посібниках та збірниках задач мають, як правило, доволі штучний характер.

Але, на нашу думку, варто використовувати в практиці вивчення розділу «Числові ряди» завдання на створення ряда, а потім вже виконувати стандартне завдання дослідження збіжності (розбіжності) одержаного ряда. [3]

«Інструментом» створення прикладів рядів може бути визначений інтеграл. Підґрунтям цієї гіпотези є саме означення визначеного інтеграла і його геометрична інтерпретація: [46]

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_i^n f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \quad (1.50)$$

де $f(x)$ – неперервна функція $\forall x \in [a; b]$, точка $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}] \subset [a; b]$.

Як бачимо в правій частині рівності (1.50) під знаком границі має місце ряд $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$, доданки якого є добутком значень функції в точках ξ_i, які належать до множини точок відповідних відрізків $[x_i; x_{i+1}]$, що складають усю множину точок відрізка інтегрування $[a; b]$. Припустимо, що довільна функція $f(x)$ задана на відрізку $[a; b]$, і має графік, представлений на рис. 1.2

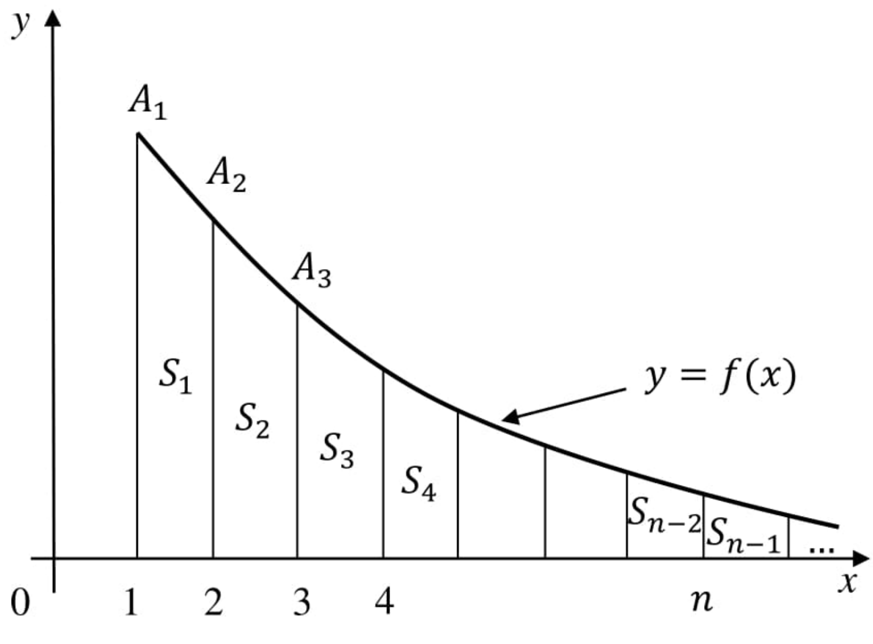

Рис.1.2 Графік довільної неперервної функції на множині точок $n = \overline{1, \infty}$

Для обчислення значень площ S_k, $k = \overline{1, \infty}$ використаємо $\int_1^\infty f(x)dx$:[46]

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = \int\limits_1^2 f(x)dx, \\ S_2 = \int\limits_2^3 f(x)dx, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_n = \int\limits_n^{n+1} f(x)dx, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (1.51)$$

За результатами виконання дій (1.51) одержуємо числовий ряд, членами якого є значення площ криволінійних трапецій (див. рис. 1.2):

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n. \quad (1.52)$$

Окрім ряда (1.52) можна одержати ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n, \quad (1.53)$$

де

$$\left.\begin{array}{l} l_1 = \int\limits_1^2 \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx \\ l_2 = \int\limits_2^3 \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_n = \int\limits_n^{n+1} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad [46](1.54)$$

Приклад 1.1 Маємо функцію $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [1; \infty[$.

Використовуємо рівності (1.51):

$$S_1 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$S_2 = \int_2^3 \frac{1}{x} dx = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$$

$$S_3 = \int_3^4 \frac{1}{x} dx = \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3} \qquad (1.55)$$

$$S_4 = \int_4^5 \frac{1}{x} dx = \ln 5 - \ln 4 = \ln \frac{5}{4}$$

і так далі.

Одержуємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \qquad (1.56)$$

Виконаємо завдання на дослідження ряда (1.56) на збіжність. Для цього використаємо фундаментальну ознаку збіжності ряда, яка полягає в обчисленні суми ряда S за формулою:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \,. [30] \qquad (1.57)$$

Відповідно до ряда (1.56) за формулою (1.57) одержуємо

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} [\ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n}{n-1}] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\ln 2 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \cdots + \ln n - \ln(n-1)] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$$

Висновок: ряд (1.56) розбіжний.

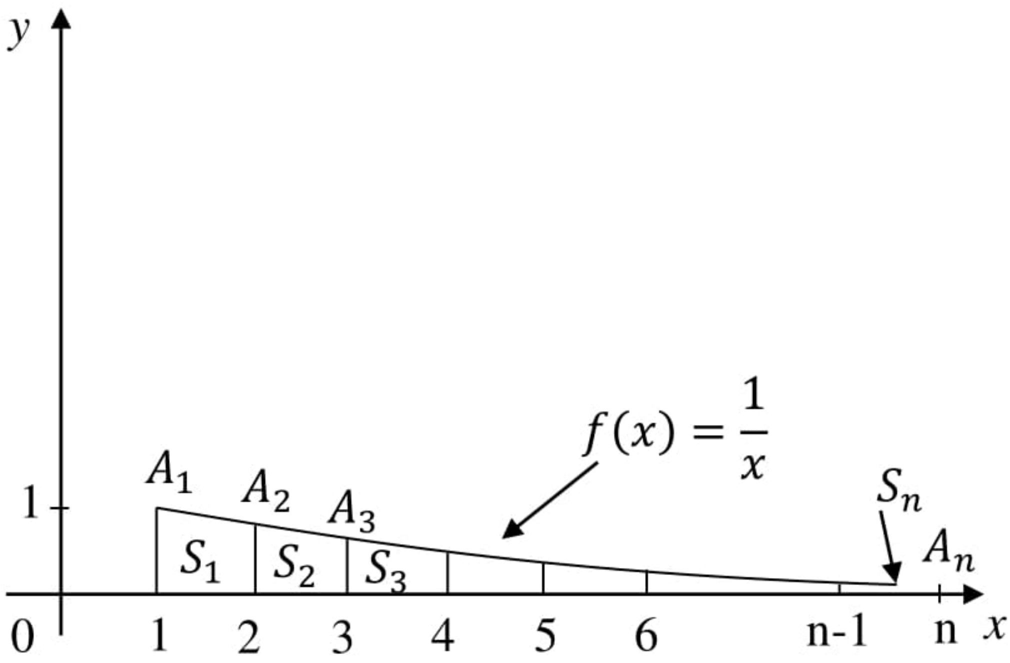

Рис. 1.3 Графік функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на множині $[1; \infty[$

($S_1, S_2, \dots S_n$ – площі криволінійних трапецій)

Приклад 1.2. Маємо функцію $f(x) = x^n, x \in [0,1]$.

Для одержання ряда використаємо інтеграл для послідовних значень показника $n \in (N \cup \{0\})$.

$$\left.\begin{array}{c} n = 0\colon \int_0^1 x^0 dx = x|_0^1 = 1 \\ n = 1\colon \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} x^2 |_0^1 = \frac{1}{2} \\ n = 2\colon \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} |_0^1 = \frac{1}{3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \forall n\colon \int_0^1 x^n dx = x|_0^1 = \frac{1}{n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} [46] \tag{1.58}$$

Сума правих частин рівності (1.58) є відомим гармонічним рядом [46]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \tag{1.59}$$

Різними методами доводиться, що ряд (1.59) є рядом розбіжним.

Ці приклади, що наведені вище, демонструють теоретичні основи зв’язку визначеного інтеграла та ряда. [3]

Висновки до розділу 1.

Проаналізувавши історичні відомості виникнення інтегралів та рядів, а також теоретичні аспекти з теорії інтегрального числення та теорії рядів, можна зазначити, що певної чіткої періодизації етапів розвитку інтегралів та рядів не має, а також не має в історії чіткої дати виникнення інтегралів, рядів. Однак, відомим є той факт, що поняття інтеграла та інтегрального числення виникли з-за потреби обчислювати площі будь-яких фігур і поверхонь та об'єми довільних тіл. Передісторія інтегрального числення та теорії рядів походить з глибокої давнини.

З'ясовано, що перше теоретичне узагальнення і обґрунтування методів обчислення площ та об'ємів, в яких неявно використовувались граничні переходи було сформовано грецьким математиком Евдоксом Книдським і названо «методом вичерпування».

Також було з'ясовано, що найпершим по даті опублікування був «метод безпосереднього оперування з актуальними нескінченно малими величинами», який з'явився у 1615 р. в творах Кеплера.

Учень Галілея, італійський математик Бонавентура Кавальєрі (1598-1647) вважається основоположником «методу неподільних», який став одним із важливих етапів у розвитку інтегрального числення. Цей метод дозволив розв'язати багато важких задач, які раніше не піддавалися розв'язанню.

Вагомий внесок у розвиток інтегрального числення зробили такі вчені, як Валліс, Ейлер, Бернуллі, Клеро.

Протягом XVIII ст. інтегральне числення надзвичайно швидко розвивалось. Ейлеру знадобилося в 1768-1770 рр. три великих томи, щоб дати його систематичний виклад.

Інтегральне числення в частині методів невизначеного інтегрування досягло практично сучасного рівня в другій половині XVIII ст.

Символ Ейлера

$$\int f(x)dx \begin{bmatrix} ab\ x = a \\ ad\ x = b \end{bmatrix}$$

(де замість $f(x)$ ще було p) отримав з 1779 р., за пропозицією Лапласа, відповідний термін «визначений інтеграл».

У ході розвитку інтегрального числення з'явився ряд задач спеціального характеру. Спроби їх розв'язання призвели до розробки нових областей математичного аналізу.

Сума числових рядів цікавила багатьох індійський математиків. Окремі приклади арифметичних та геометричних прогресій є ще в «Ведах».

У XVII ст. грунтом, на якій виросла теорія нескінченних рядів, було наближене обчислення та інтерполювання. Принципово новим стало використання нескінченних рядів для наближення та вираження функцій.

Наступним кроком в дослідженні рядів та логарифмічної функції виявилось представлення останньої у формі нескінченного степеневого ряду. Цей важливий крок зробив німецький любитель математики Микола Кауфман, більш відомий під ім'ям Меркатора.

Ще в 1665-1669 рр. далеко просунувся в теорії рядів, починаючи з відкриття тієї ж теореми про біном, Ньютон. Одним із його перших відкриттів в цій області був розклад степені бінома, знайдений взимку 1664-1665 рр.

Наступним, хто зробив свій вклад в історію розвитку теорії рядів був представник англійської математики Брук Тейлор.

У XVIII ст., скориставшись формулою Ньютона, яка виражала приріст функції $f(a + n\Delta x) - f(a)$, відповідний приросту аргументу $n\Delta x$, Брук Тейлор записав її у вигляді

$$f(a + n\Delta x) - f(a) = n\Delta f(a) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 f(a) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 f(a) + \cdots + \Delta^n f(a).$$

Саме ця формула, цей запис стало поштовхом до загальної теореми Тейлора про розклад функції в степеневий ряд.

Вагомий внесок в розвиток теорії рядів також зробили видатні вчені Стірлінг, Муавр, Маклорен, Лагранж.

Лише в XIX столітті ряди стали предметом дослідження самі по собі, і критичний перегляд основ аналізу на перших порах торкнувся саме їх. Саме в цей час гостро постало питання про потребу досліджень ознак збіжності ряду.

Також було проаналізовано більш сучасну літературу стосовно інтегралів та рядів, було розглянуто та продемонстровано теоретичні основи зв’язку між визначеними інтегралами та числовими рядами.

РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ІНТЕГРАЛАМИ ТА РЯДАМИ ДО НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ.

2.1 Використання інтегралів до наближених обчислень значень нескінченних сум рядів

В математичному аналізі, а саме в розділі «Числові та степеневі ряди» розглядаються прикладні задачі, які пов'язані із наближеним обчисленням значень рядів. Однак, є певний вид задач для якого звичайний метод розв'язання (обчислення наближеного значення) застосувати не вдається. В такому випадку беруть до розгляду зв'язок інтеграла та ряда.

В даному пункті запропоновано задачі – приклади, в яких демонструється використання інтегралів до наближених обчислень значень нескінченних сум рядів.

Задача 2.1. Знайти суму:

$$0.3 + \frac{(0.3)^2}{2} + \frac{(0.3)^3}{3} + \cdots + \frac{(0.3)^n}{n} + \cdots \qquad (2.1)$$

Розв'язання:

1) Відповідно до ряду (2.1) вводимо до розгляду степеневий ряд:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots \qquad (2.2)$$

2) Досліджуємо ряд (2.2) на збіжність за допомогою визначення радіуса збіжності R:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1 \text{ [25]}$$

3) Ставимо питання: якому степеневому ряду найбільше відповідає ряд (2.2). Зрозуміло, що ряд (2.2) найбільше відповідає ряду геометричної прогресії :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad (2.3)$$

який рівномірно збіжний $\forall x\colon |x| < 1$. В цьому разі $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (2.4), де x – є знаменником прогресії.

4) Вочевидь ряд (2.3) можна перетворити на ряд (2.2) (враховуючи його рівномірну збіжність) шляхом операції інтегрування рівності (2.4)

$$\int_0^x 1dz + \int_0^x zdz + \int_0^x z^2dz + \cdots + \int_0^x z^n dz + \cdots = (2.5) = \int_0^x \frac{1}{1-z} dz (2.6)$$

5) З рівності (2.6) одержуємо розв’язання задачі:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots = -\ln|1-x| \ (2.7)$$

Підставляємо в рівність (2.7) $x = 0.3$ і одержуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0.3)^n}{n} = -\ln|1-0.3| = -\ln 0.7 \approx 0.35$$

Використовуючи даний метод (інтегрування рівномірно збіжних степеневих рядів) можна створювати систему задач для практичних занять при вивченні рядів.

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel та за допомогою табличного процесора побудуємо графік залежності даної суми від аргумента n.

n	0,3^n/n
1	0,30000000000000
2	0,34500000000000
3	0,35400000000000
4	0,35602500000000
5	0,35651100000000
6	0,35663250000000
7	0,35666374285714
8	0,35667194410714
9	0,35667413110714
10	0,35667472159714
11	0,35667488263987
12	0,35667492692662
13	0,35667493919064
14	0,35667494260705
15	0,35667494356364
16	0,35667494383269
17	0,35667494390865
18	0,35667494393017
19	0,35667494393629
20	0,35667494393803

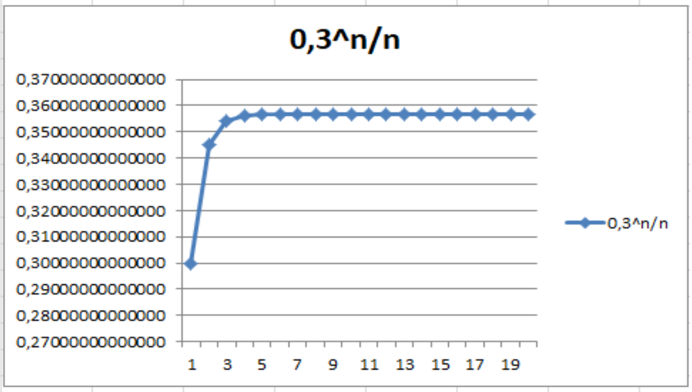

Рис. 2.1 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Окремо обчисливши значення для S_{100} та S_{1000}, одержали:

$$S_{100} = 0.35667494393873,$$

$$S_{1000} = 0.35667494393873.$$

Можемо встановити, що похибка становить 7×10^{-13} і є не значною. Таким чином можна зробити висновок, що для практичного застосування досить використовувати 20 членів даного ряду.

Задача 2.2 Обчислити суму:

$$\frac{1}{\sqrt{9-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{36-2^2}} + \frac{1}{\sqrt{81-3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9n^2-n^2}} \tag{2.8}$$

1) Маємо ряд з частинною сумою S_n:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{9\cdot 1^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{9\cdot 2^2-2^2}} + \frac{1}{\sqrt{9\cdot 3^2-3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9n^2-n^2}} \tag{2.9}$$

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{9-\frac{1}{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{9-\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{9-\left(\frac{3}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right) \tag{2.10}$$

2) Сума (2.10) є інтегральною для функції:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}(2.11), x \in [0;1] \Rightarrow \frac{1}{n} = \Delta x \Rightarrow \frac{1}{n} = dx(2.12)$$

3) Розглянемо границю, використовуючи (2.11) та (2.12):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \arcsin\frac{x}{3}\Big|_0^1 =$$

$$= \arcsin\frac{1}{3} \approx 0.339$$

Задача 2.3. Обчислити суму:

$$1 + 2\cdot 0.3 + 3\cdot(0.3)^2 + 4\cdot(0.3)^3 + \cdots + n\cdot(0.3)^{n-1} + \cdots \tag{2.13}$$

Розв'язання:

1) Ряду (2.13) можна представити до відповідності степеневий ряд виду:

$$1 + 2\cdot x + 3\cdot x^2 + 4\cdot x^3 + \cdots + n\cdot x^{n-1} + \cdots \tag{2.14}$$

2) Дослідимо ряд (2.14) на збіжність за допомогою визначення радіуса збіжності R:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1 \ \ [25] \quad (2.15)$$

Ряд (2.14) збіжний $\forall x$: $|x| < 1$.

3) Ряду (2.14) можна поставити до відповідності ряд геометричної прогресії:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1} + \cdots (2.16)$$

4) Ряд (2.16) перетворюється в ряд (2.14) шляхом операції диференціювання:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1} + \cdots)'_x = \left(\frac{1}{1-x}\right)'_x (2.17) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + (n+1)x^n + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}. (2.18)$$

За допомогою ряда (2.18) обчислюємо суму ряда (2.13):

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(0.3)^{n-1} = \frac{1}{(1-0.3)^2} = \frac{1}{0.7^2} = \frac{1}{0.49} \approx 2.04$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel та за допомогою табличного процесора побудуємо графік залежності даної суми від аргумента n. (рис. 2.2)

Окремо обчисливши значення для S_{100} та S_{500}, одержали:

$$S_{100} = 2{,}04081632653061000,$$

$$S_{500} = 2{,}04081632653061000.$$

Можемо встановити, що похибка становить 10×10^{-10} і є не значною. Таким чином можна зробити висновок, що для практичного застосування досить використовувати 20 членів даного ряду.

n	n*(0,3)^(n-1)
1	1
2	1,6
3	1,87
4	1,978
5	2,0185
6	2,03308
7	2,038183
8	2,0399326
9	2,04052309
10	2,04071992
11	2,040784874
12	2,040806132
13	2,04081304
14	2,040815272
15	2,04081599
16	2,040816219
17	2,040816293
18	2,040816316
19	2,040816323
20	2,040816325

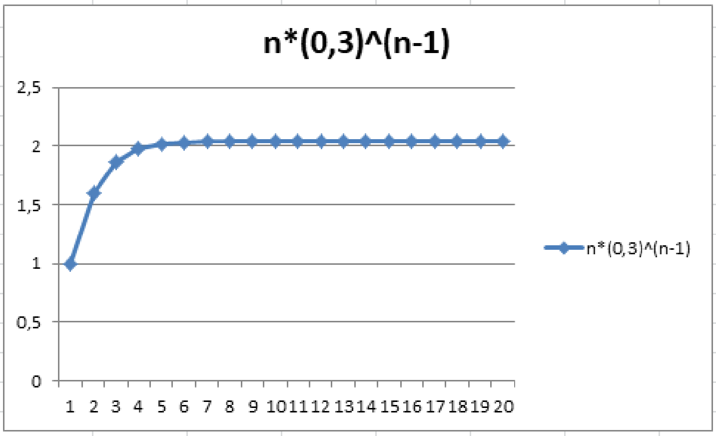

Рис.2.2 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Задача 2.4. Знайти суму:

$$1 + 2 \cdot 0.01 + 3 \cdot (0.01)^2 + \cdots + n \cdot (0.01)^{n-1} + \cdots (2.19)$$

Розв’язання:

1) Ряду (2.19) можна представити до відповідності степеневий ряд виду:

$$1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3 + \cdots + n \cdot x^{n-1} + \cdots (2.20)$$

2) Дослідимо ряд (2.20) на збіжність за допомогою визначення радіуса збіжності R:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n}\right| = 1\ [25](2.21)$$

Ряд (2.20) збіжний $\forall x\colon |x| < 1$.

3) Ряду (2.20) можна поставити до відповідності ряд геометричної прогресії:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1} + \cdots (2.22)$$

4) Ряд (2.22) перетворюється в ряд (2.20) шляхом операції диференціювання:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1} + \cdots)'_x = \left(\frac{1}{1-x}\right)'_x (2.23) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + (n+1)x^n + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}. \ (2.24)$$

За допомогою ряда (2.24) обчислюємо суму ряда (2.19):

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(0.01)^{n-1} = \frac{1}{(1-0.01)^2} = \frac{1}{0.99^2} = \frac{1}{0.9801} \approx 1.02$$

Задача 2.5. Обчислити суму:

$$\frac{1}{\sqrt{4-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{16-2^2}} + \frac{1}{\sqrt{36-3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n)^2-n^2}} + \cdots$$

Розв’язання:

1)

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{4\cdot 1^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4\cdot 2^2-2^2}} + \frac{1}{\sqrt{4\cdot 3^2-3^2}} + \frac{1}{\sqrt{4\cdot 4^2-4^2}} + \cdots + \\ + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \Rightarrow \qquad (2.25)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{3}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right) \ (2.26)$$

2) Сума (2.26) є інтегральною сумою для функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ (2.27), $x \in [0;1] \Rightarrow \frac{1}{n} = \Delta x \Rightarrow \frac{1}{n} = dx$ (2.28)

3) Використовуючи (2.27) та (2.28) розглядаємо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\Delta x\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n)^2-n^2}} = \frac{\pi}{6}$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim s As Double
```

```
Dim i As Integer
Function prim211(n As Integer) As Double
s = 0
For i = 1 To n
  s = s + 1 / Sqr((2 * n) ^ 2 - i ^ 2)
Next i
prim211 = s
End Function.
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n:

n	1 / Sqr((2 * n) ^ 2-n^2)
20	0,525572618
40	0,524575677
60	0,524247816
80	0,524084721
100	0,523987131
120	0,523922182
140	0,523875845
160	0,523841122
180	0,523814132
200	0,523792552
220	0,523774903
240	0,5237602
260	0,523747763
280	0,523737106
300	0,523727871
320	0,523719792
340	0,523712665
360	0,52370633
380	0,523700663
400	0,523695564

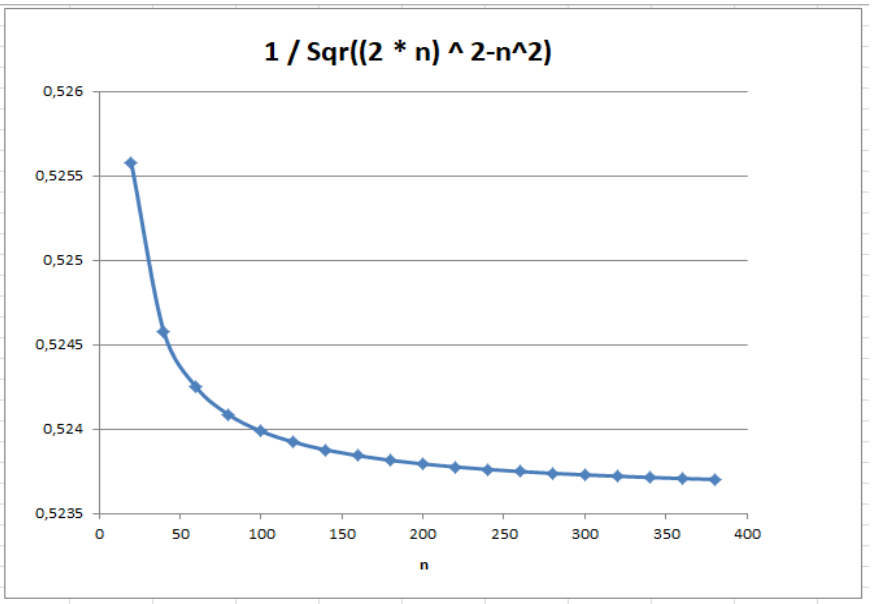

Рис.2.3 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Окремо обчисливши значення для S_{500} S_{1000}, одержали:

$$S_{500} = 0{,}52367619$$

$$S_{1000} = 0{,}523637467.$$

Як можна бачити із отриманого результату, значення суми наближається до точного значення $\frac{\pi}{6}$, і чим більша кількість членів ряду тим ближче значення суми до цього значення.

Задача 2.6. Обчислити суму:

$$\frac{1}{\sqrt{2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{8-2^2}}+\frac{1}{\sqrt{16-3^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n^2-n^2}}\ (2.29)$$

1) Маємо ряд з частинною сумою S_n:

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 2^2-2^2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3^2-3^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n^2-n^2}}\ (2.30)$$

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{2-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{2-\left(\frac{3}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)\ (2.31)$$

2) Сума (2.31) є інтегральною для функції:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}(2.32), x\in[0;1]\Rightarrow\frac{1}{n}=\Delta x\Rightarrow\frac{1}{n}=dx(2.33)$$

3) Розглянемо границю, використовуючи (2.32) та (2.33):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\bigg|_0^1=$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^2-n^2}}\approx\frac{\pi}{4}.$$

Задача 2.7. Обчислити суму:

$$\ln 2+\frac{\ln^2 2}{2}+\frac{\ln^3 2}{3}+\cdots+\frac{\ln^{\mathrm{n}} 2}{n}+\cdots\ (2.34)$$

Розв’язання:

1) Ряду (2.34) можна представити до відповідності степеневий ряд виду:

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots(2.35)$$

2) Дослідимо ряд (2.35) на збіжність за допомогою визначення радіуса збіжності R:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|;\ a_n=\frac{x^n}{n};\ a_{n+1}=\frac{x^n\cdot x}{n+1}\ ;$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n \cdot (n+1)}{x^n \cdot x \cdot n}\right| = 1\ (2.36)$$

3) Ряду (2.35) можна поставити до відповідності ряд геометричної прогресії:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1} + \cdots (2.37),$$

який рівномірно збіжний $\forall x$: $|x| < 1$. В цьому разі $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (2.38), де x – є знаменником прогресії.

4) ряд (2.37) можна перетворити на ряд (2.35) (враховуючи його рівномірну збіжність) шляхом операції інтегрування рівності (2.38)

$$\int_0^x 1dz + \int_0^x zdz + \int_0^x z^2dz + \cdots + \int_0^x z^n dz + \cdots = (2.39) = \int_0^x \frac{1}{1-z}dz (2.40)$$

5) З рівності (2.39) одержуємо розв'язання задачі:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots = -\ln|1-x|\ (2.41)$$

Підставляємо в рівність (2.41) $x = \ln 2$ і одержуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 2}{n} = -\ln|1 - \ln 2| \approx -\ln 0.30685 \approx 1.18$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel та за допомогою табличного процесора побудуємо графік залежності даної суми від аргумента n. (рис. 2.4)

Окремо обчисливши значення для S_{100} та S_{500}, одержали:

$$S_{100} = 1{,}181387062$$

$$S_{500} = 1{,}181387062.$$

Можемо встановити, що похибка становить 5×10^{-4} . Тому можна зробити висновок, що для практичного застосування необхідно використовувати більше ніж 15 членів даного ряду.

n	(ln2)^n/n
1	0,693147181
2	0,933373688
3	1,044381905
4	1,102090679
5	1,134091219
6	1,152575456
7	1,163557424
8	1,170218029
9	1,174321833
10	1,17688192
11	1,178495117
12	1,179520118
13	1,180175942
14	1,180598055
15	1,180871135

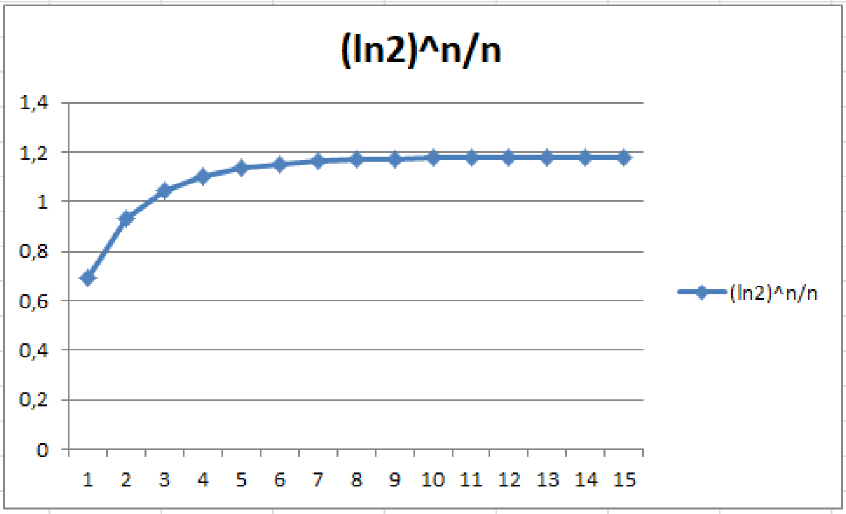

Рис.2.4 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Задача 2.8. Обчислити суму:

$$1 + 2 \cdot \sin \pi + 1 \cdot 3 \sin^2 \pi + \cdots + n \cdot \sin^{\mathrm{n}-1} \pi + \cdots \ (2.42)$$

Розв’язання:

1) Ряду (2.42) можна представити у відповідність степеневий ряд виду:

$$1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3 + \cdots + n \cdot x^{n-1} + \cdots \ (2.43)$$

2) Дослідимо ряд (2.43) на збіжність за допомогою визначення радіуса збіжності R:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1 \ (2.44)$$

Ряд (2.43) збіжний $\forall x \colon |x| < 1$.

3) Ряду (2.43) можна поставити до відповідності ряд геометричної прогресії:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1} + \cdots \ (2.44)$$

4) Ряд (2.44) перетворюється в ряд (2.43) шляхом операції диференціювання:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1} + \dots)'_x = \left(\frac{1}{1-x}\right)'_x \quad (2.45) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + (n+1)x^n + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (2.46)$$

За допомогою ряда (2.46) обчислюємо суму ряда (2.42):

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n \sin^{n-1}\pi = \frac{1}{(1-\sin\pi)^2} = 1$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel та за допомогою табличного процесора побудуємо графік залежності даної суми від аргумента n:

n	sin
1	1
2	1,000000107
3	1,000000107
4	1,000000107
5	1,000000107
6	1,000000107
7	1,000000107
8	1,000000107
9	1,000000107
10	1,000000107

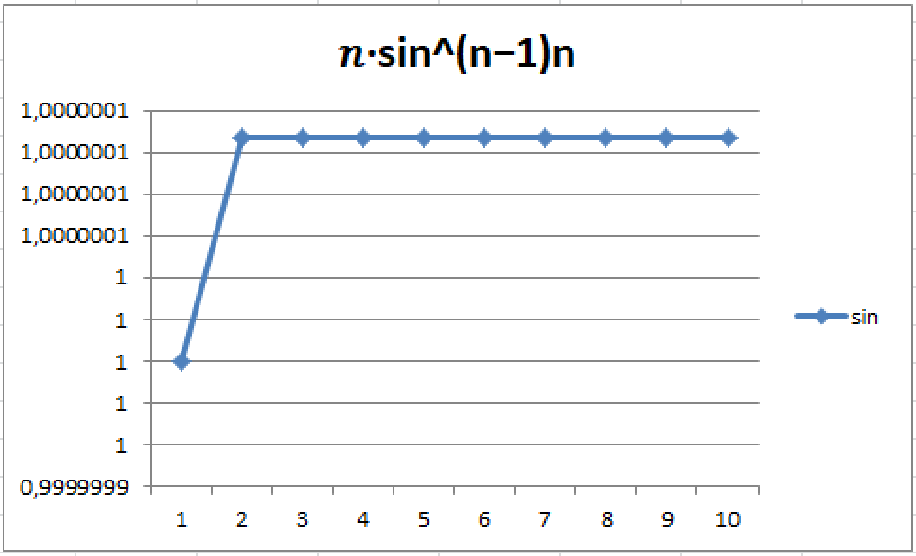

Рис.2.5 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Задача 2.9. Обчислити суму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 4n + 5} \quad [52]$$

Розв’язання:

1) Застосуємо інтегральну ознаку Коші (знаходимо інтеграл):

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{4x^2+4x+5} = \frac{1}{2}\int_{1}^{\infty} \frac{2dx}{(2x+1)^2+2^2} = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{2x+1}{2}\right)\Big|_{1}^{\infty} =$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{3}{2}\right)\right) \approx 0{,}1664.$$

2) Ряд збіжний, оскільки інтеграл збіжний. Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+4n+5} \approx 0{,}1664.$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim j As Integer
Dim sum As Double
Public Function prim212(n As Integer) As Double
sum = 0
For j = 1 To n
 sum = sum + 1 / (4 * j ^ 2 + 4 * j + 5)
Next j
prim212 = sum
End Function
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n. (рис. 2.6)

Як можна бачити із отриманого результату, значення суми наближається до більш точного значення $\frac{\pi}{8} - \frac{arctg(\frac{3}{2})}{4}$.

n	1 / (4 * n ^ 2 + 4 * n + 5)
10	0,168585511
20	0,179341591
30	0,183174106
40	0,185139079
50	0,186333954
60	0,187137228
70	0,187714294
80	0,188148906
90	0,188488015
100	0,188759983
110	0,188982953
120	0,189169073
130	0,189326779
140	0,189462117
150	0,189579531
160	0,189682359
170	0,189773162
180	0,189853932
190	0,189926244
200	0,189991361

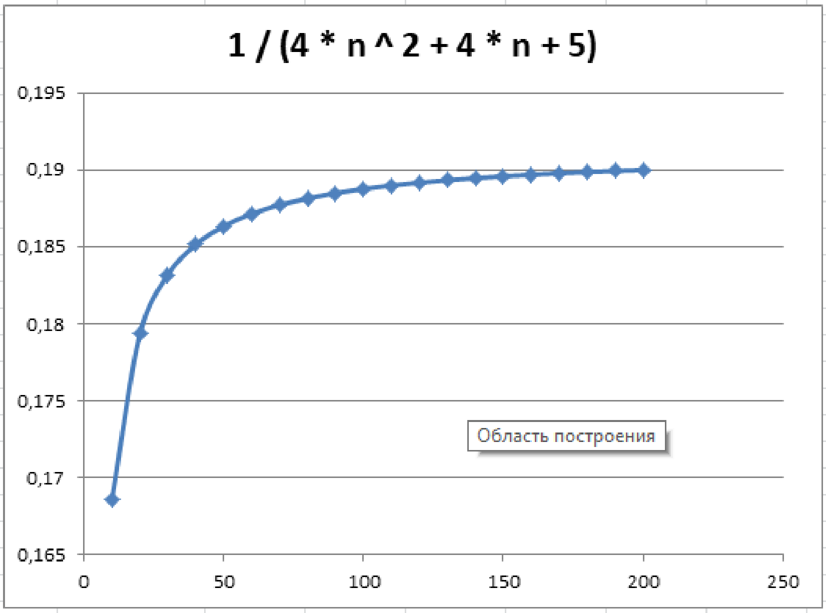

Рис.2.6 Графік залежності значення суми від аргумента n.

2.2. Використання рядів до наближених обчислень інтегралів

Окремий вид задач, який потребує уваги – це наближене обчислення визначених інтегралів, підінтегральна функція яких не є елементарною функцією. В такому випадку, дану підінтегральну функцію розкладають в ряд.

У результаті цього отримуємо розклад ряду, який можна почленно проінтегрувати або записати загальний член ряду та проінтегрувати його, тим самим наближено обчислити інтеграл. У більшості випадків необхідно задавати точність обчислень, з якою їх необхідно виконати, адже підінтегральна функція розкладається в ряд, який містить нескінченну кількість доданків.

Задача 2.10. Обчислити наближено інтеграл [27, §7]:

$$\int_0^1 \frac{arctg\, x^3}{x} dx \quad (2.47)$$

Розв’язання:

1) Функція $arctgx$ розкладається в ряд:

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

де $-1 \le x \le 1$.

2) Подамо функцію (2.47) у вигляді:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{arctg\, x^3}{x}, x \neq 0; \\ 0, \quad x = 0. \end{cases}$$

$$\frac{arctg\, x^3}{x} = x^2 - \frac{x^8}{3} + \frac{x^{14}}{5} - \frac{x^{20}}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{2n+1} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{2n+1} \ (2.48)$$

3) $$\int_0^1 \frac{arctg\, x^3}{x} dx \overset{248}{\Longrightarrow} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \int_0^1 x^{6n+2} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{x^{6n+3}}{6n+3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \cdots\right) \approx 0.31$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim s As Double
Dim i As Integer
Function pr210(n As Integer) As Double
s = 0
For i = 0 To n
  s = s + ((-1) ^ i) / (3 * (2 * i + 1) ^ 2)
Next i
```

Pr210 = s

End Function.

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента x:

n	arctan(x^3)/x
20	0,305416187
40	0,305346641
60	0,30533306
80	0,305328215
100	0,305325949
120	0,30532471
140	0,30532396
160	0,305323472
180	0,305323137
200	0,305322896
220	0,305322718
240	0,305322582
260	0,305322476
280	0,305322392
300	0,305322325
320	0,305322269
340	0,305322223
360	0,305322184
380	0,305322152
400	0,305322124

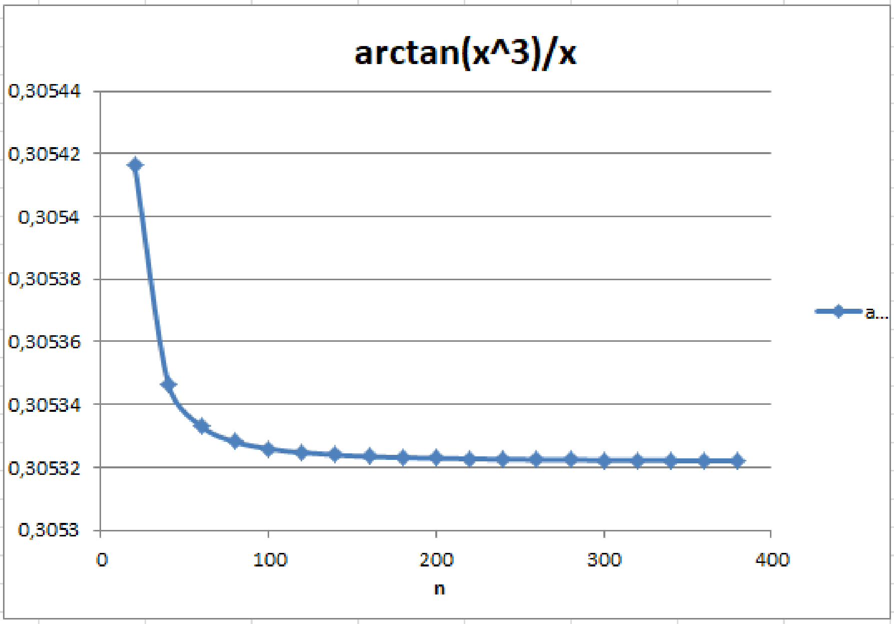

Рис.2.7 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Окремо обчисливши значення для S_{500} та S_{1000}, одержали:

$$S_{500} = 0{,}305322031$$

$$S_{1000} = 0{,}305321906.$$

Із отриманого результату можна побачити, що вже при $n = 400$, похибка обчислень не перевищує 10^{-7}.

Задача 2.11. Обчислити наближено інтеграл:

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx. \,[8, \text{с}. \,589]$$

Розв’язання:

1) Даний інтеграл не можна виразити в кінцевому вигляді через елементарні функції. Скориставшись рядом:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots, (2.49)$$

який сходиться у проміжку $(-\infty; +\infty)$, отримаємо:

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx = x - \frac{1}{1!}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\cdot\frac{1}{n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots. \quad (2.50)$$

2) Обчислимо $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ з точністю до $0.5\cdot 10^{-4}$.

Підставляючи в (2.50) значення $x = 1$, отримаємо:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75600} + \cdots \ (2.51).$$

3) Член $-\frac{1}{75600}$ і наступні відкидаємо, оскільки похибка, яка виникає при цьому набагато менша за $0.5\cdot 10^{-4}$. (ряд (2.51) – знакопочерговий зі спадними членами).

4) Обчислення введемо на п’ять – шість знаків. Отримуємо:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}7468.$$

Для даного інтеграла з межами інтегрування від 0 до 1 створимо функцію користувача на VBA в MS Excel наступного виду

```
Dim s As Double
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim sum As Double
Public Function Fakt(n As Integer) As Double
s = 1
For i = 1 To n
  s = s * i
Next i
Fakt = s
End Function
Public Function pr211(n As Integer) As Double
```

```
sum = 0
For j = 0 To n
  sum = sum + ((-1) ^ j) / (2 * j + 1) / Fakt(j)
Next j
pr211 = sum
End Function.
```

Результат побудови графіка залежності значення функції від n зображений на наступному рисунку:

n	exp(-x^2)
1	0,666666667
2	0,766666667
3	0,742857143
4	0,747486772
5	0,746729197
6	0,746836034
7	0,746822807
8	0,746824266
9	0,746824121
10	0,746824134
11	0,746824133
12	0,746824133
13	0,746824133
14	0,746824133
15	0,746824133
16	0,746824133
17	0,746824133
18	0,746824133
19	0,746824133
20	0,746824133

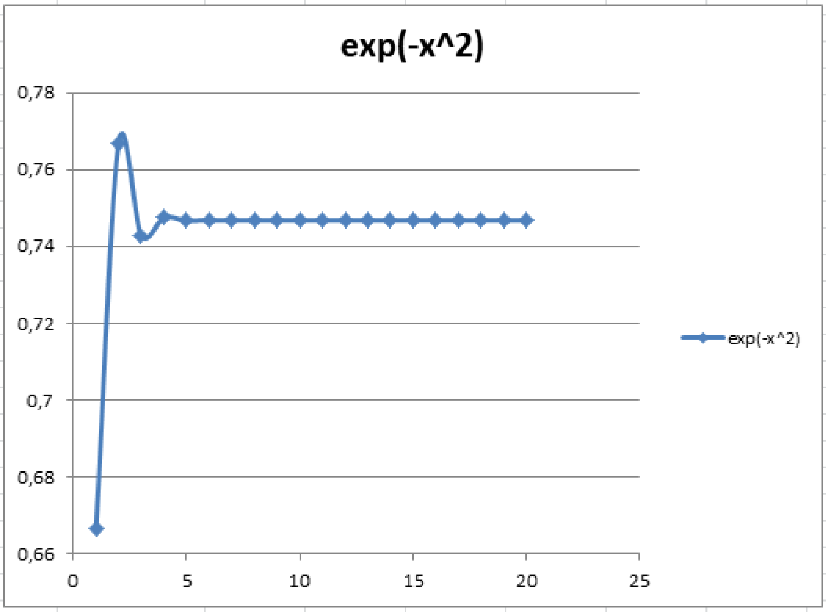

Рис.2.8 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Окремо обчисливши значення для S_{100} та S_{150}, одержали:

$$S_{100} = 0{,}746824133$$

$$S_{150} = 0{,}746824133.$$

Із отриманих результатів можна зробити висновок, що точність обчислень рівна 10^{-8} досягається вже при $n = 11$.

Задача 2.13. Обчислити з точністю 0,01 інтеграл [8, с.589]:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx$$

Розв’язання:

1) Первісна для інтеграла не виражається через елементарні функції. Розкладемо підінтегральну функцію в степеневий ряд:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots \ (2.52)$$

2) Одержуємо ряд, рівномірно збіжний на проміжку $(-\infty; \infty)$,тому його можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку, зокрема, на $\left[0; \frac{1}{3}\right]$.Тому:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots\right) dx = (2.53)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots\right) \Bigg|_0^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1^3}{3 \cdot 1! \cdot 3^3} + \frac{1^5}{5 \cdot 2! \cdot 3^5} - \frac{1^7}{7 \cdot 3 \cdot 3^7} + \cdots\right).$$

3) Одержаний ряд є рядом типу Лейбніца. Тому з точністю до 0,01 маємо:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{81} \approx 0{,}321.$$

Задача 2.14. Обчислити інтеграл з точністю до $0.5 \cdot 10^{-3}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx. \ [8, \text{с.} \ 590]$$

Розв’язання:

1) Невизначений інтеграл $\int \frac{\sin x}{x} dx$ не береться в остаточному (кінцевому) вигляді. Розкладаючи $\sin x$ в ряд, і почлено поділивши на x, отримуємо ряд:

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \cdots, \ (2.54)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{18}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{600}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 - \frac{1}{35280}\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 + \cdots. (2.55)$$

2) Перший член, який ми відкидаємо (за грубим підрахунком) є $\frac{1}{9 \cdot 9!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^9$. Він набагато менший за $0.5 \cdot 10^{-3}$.

3) Знаходимо:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{600}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 = 1.5708 + 0.0159 = 1.5867$$

$$\frac{1}{18}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{35280}\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 = 0.2153 + 0.0007 = 0.2160$$

4) Отже,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = 1.5867 - 0.2160 \approx 1.371.$$

Для даного інтеграла з межами інтегрування від 0 до $\frac{\pi}{2}$ створимо функцію користувача на VBA в MS Excel наступного виду:

```
Dim s As Double
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim sum As Double
Public Function Fakt(n As Integer) As Double
s = 1
For i = 1 To n
  s = s * i
Next i
Fakt = s
End Function
```

```
Public Function pr214(n As Integer) As Double
Pi = 3.1415926
sum = 0
For j = 0 To n
sum = sum + ((-1) ^ j) * (Pi / 2) ^ (2 * j + 1) / ((2 * j + 1) * Fakt(2 * j + 1))
Next j
pr214 = sum
End Function
```

Результат побудови графіка залежності значення функції від n зображений на наступному рисунку:

n	sin(x)/x
0	1,5707963
1	1,355474945
2	1,371413469
3	1,370744647
4	1,370762474
5	1,370762147
6	1,370762151
7	1,370762151
8	1,370762151
9	1,370762151
10	1,370762151
11	1,370762151
12	1,370762151
13	1,370762151
14	1,370762151
15	1,370762151
16	1,370762151
17	1,370762151
18	1,370762151
19	1,370762151

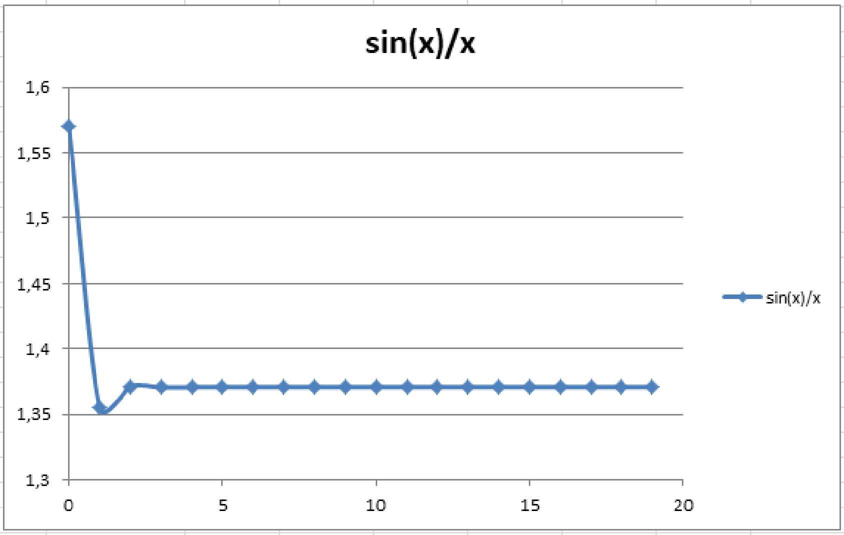

Рис.2.9 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Окремо обчисливши значення для S_{50} та S_{80}, одержали:

$$S_{100} = 1{,}370762151$$

$$S_{150} = 1{,}370762151.$$

Із отриманих результатів можна зробити висновок про те, що точність обчислень рівна 10^{-7} досягається вже при $n = 7$.

Задача 2.15. Обчислити інтеграл:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{sinx}}{x} dx.$$

Розв’язання:

1) Використаємо розклад в ряд функції e^x. Матимемо:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \frac{\sin x}{1!} + \frac{\sin^2 x}{2!} + \cdots}{x} dx.$$

2) Використаємо розклад функції $\sin x$ в ряд та виразимо $\sin^2 x$ як $\frac{1-\cos 2x}{2}$:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x} + \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{x} + \frac{1 - \cos 2x}{2x} \right) dx.$$

3) Використаємо розклад функції $\cos x$ в ряд:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x} + 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots + \frac{1}{2x} - \frac{-1 + \frac{4x^2}{2!} - \frac{16x^4}{4!} + \cdots}{2x} \right) dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} - x + \frac{x^3}{3} \right) dx$$

4) Обчислимо даний інтеграл, проінтегрувавши почленно:

$$\left(x + \ln x + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} \right)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \ln\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\pi^3}{2}}{3 \cdot 3!} + \frac{\frac{\pi^5}{2}}{5 \cdot 5!} - \frac{\frac{\pi^7}{2}}{7 \cdot 7!} - \frac{\frac{\pi^2}{2}}{2} + \frac{\frac{\pi^4}{2}}{12} +$$

$$+(-1)\left(\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{4}-\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{3\cdot 3!}+\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{5\cdot 5!}-\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^7}{7\cdot 7!}-\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{12}\right).$$

5) Обчисливши даний вираз отримаємо, що

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{sinx}}{x}dx\approx 1{,}548244$$

Задача 2.16. Обчислити інтеграл:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{sinx}{x}}dx.$$

1) Використаємо розклад функції $\sin x$ в ряд. Матимемо:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\left(\frac{x}{x}-\frac{x^3}{3!x}+\frac{x^5}{5!x}\right)}dx.$$

2) Використаємо розклад в ряд функції e^x. Отримаємо:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\frac{\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)^2}{2}\right)dx=$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{x^2}{6}\right)^2+x\left(1-\frac{x^2}{6}\right)\frac{x^4}{120}+\frac{x^8}{14400}\right)\right)dx=$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\frac{1}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{72}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{720}+\frac{x^8}{28800}\right)dx$$

3) Обчислимо даний інтеграл, проінтегрувавши почленно:

$$\left(2x-\frac{x^3}{18}+\frac{x^5}{600}+\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{8}+\frac{x^5}{360}+\frac{x^5}{600}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^9}{259200}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$= \pi - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{18} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{600} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{8} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{360} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{600} - \frac{x\left(\frac{\pi}{2}\right)^7}{5040} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^9}{259200}.$$

4) Обчисливши даний вираз отримаємо, що

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{sinx}{x}}dx \approx 3.548864$$

Задача 2.17. Обчислити інтеграл:

$$\int_0^1 cos\sqrt{x}dx \ [16]$$

Розв’язання:

1) Використаємо розклад функції $\cos x$ в ряд:

$$cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x}{4!} + \frac{x}{8!} + \cdots. (2.56)$$

Ряд (2.56) рівномірно збігається на всій числовій осі, тому його можна почленно інтегрувати на довільному проміжку.

2) Інтегруючи даний ряд, одержимо:

$$\int_0^1 cos\sqrt{x}dx = x\Big|_0^1 - \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{72}\Big|_0^1 - \frac{x^4}{2880}\Big|_0^1 + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} - \frac{1}{2880} + \cdots. (2.57)$$

3) Ряд (2.57) є знакопочерговим рядом, тому з точністю до 0,001, маємо:

$$\int_0^1 cos\sqrt{x}dx \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} \approx 1 - 0{,}25 + 0{,}014 \approx 0{,}764.$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

Dim s As Double

Dim i As Integer

```
Dim j As Integer
Dim sum As Double
Public Function Fakt(nn As Integer) As Double
s = 1
For i = 1 To nn
   s = s * i
Next i
Fakt = s
End Function
Public Function pr217(n As Integer) As Double
sum = 0
For j = 1 To n
 sum = sum + ((-1) ^ (j + 1)) / (j * Fakt(2 * (j - 1)))
Next j
pr217 = sum
End Function.
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n. (рис. 2.10)

Окремо обчисливши значення для S_{50} та S_{80}, одержали:

$$S_{50} = 0{,}763546581$$

$$S_{80} = 0{,}763546581.$$

Як бачимо з результату, точність 10^{-6} досягається вже при $n = 7$.

n	cos(x^1/2)
1	1
2	0,75
3	0,763888889
4	0,763541667
5	0,763546627
6	0,763546581
7	0,763546581
8	0,763546581
9	0,763546581
10	0,763546581
11	0,763546581
12	0,763546581
13	0,763546581
14	0,763546581
15	0,763546581
16	0,763546581
17	0,763546581
18	0,763546581
19	0,763546581
20	0,763546581

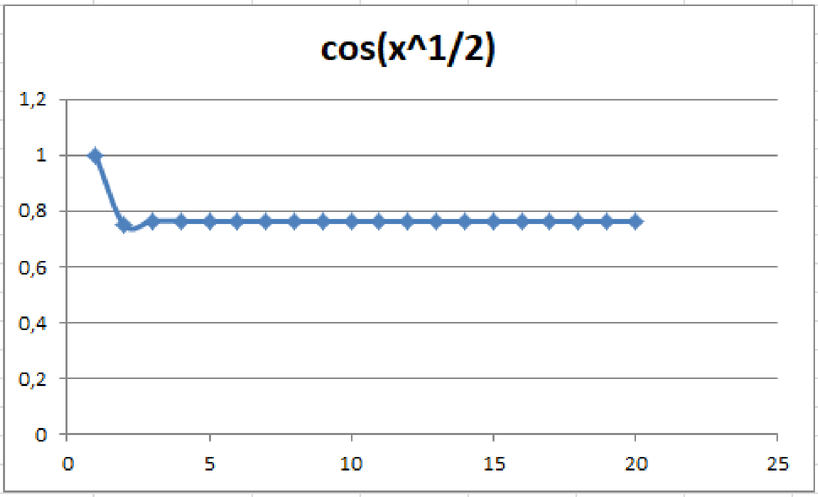

Рис.2.10 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Задача 2.18. Обчислити інтеграл [27, §7]::

$$\int_0^3 e^{-x^2} dx$$

Розв’язання:

1) В даному випадку первісна не є елементарною функцією. Скористаємось рядом:

$$e^{-x} dx = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots (2.58)$$

2) Інтегруючи обидві частини рівності (2.58) в межах від 0 до 3, з точністю 0,1 одержимо:

$$\int_0^3 e^{-x^2} dx = \left(x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \cdots \right) \Big|_0^3 = (2.59) =$$

$$= 3 - \frac{3^3}{1! \cdot 3} + \frac{3^5}{2! \cdot 5} - \frac{3^7}{3! \cdot 7} + \cdots \approx 3 - \frac{27}{1 \cdot 3} + \frac{243}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{2187}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} + \cdots \approx$$

$$\approx 0.8$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim s As Double
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim sum As Double
Public Function Fakt(n As Integer) As Double
s = 1
For i = 1 To n
  s = s * i
Next i
Fakt = s
End Function
Public Function pr218(n As Integer) As Double
sum = 0
For j = 1 To n
  sum = sum + ((-1) ^ (j - 1) * 3 ^ (2 * j - 1)) / (Fakt(j - 1) * (2 * j - 1))
Next j
pr218 = sum
End Function
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n:

n	e^(-x^2)
0	0
1	3
2	-6
3	18,3
4	-33,77142857
5	57,35357143
6	-76,8487013
7	93,48495255
8	-96,3154046
9	92,08936169
10	-76,48332393
11	60,78300579
12	-41,75982551
13	28,99472808
14	-16,36075499
15	10,78550705
16	-4,451427126
17	3,599907409
18	-0,418994031
19	1,481837731

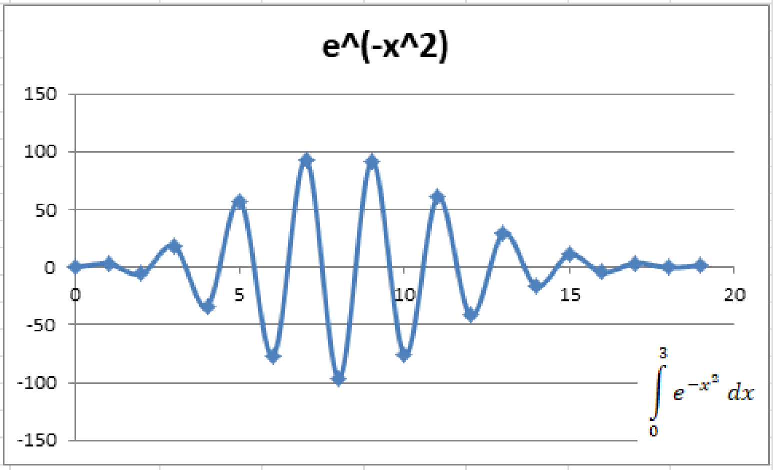

Рис.2.11 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Окремо обчисливши значення для S_{100} та S_{150}, одержали:

$$S_{100} = 0{,}886207348$$

$$S_{150} = 0{,}886207348.$$

Як бачимо з результату, для $n < 20$ сума ряду є знакозмінною величиною з великою амплітудою значень. Та при досить великих значеннях n похибка обчислень стає все меншою та значення суми наближається до свого точного значення.

Задача 2.19. Обчислимо з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ інтеграл [27, §7]::

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx$$

Розв'язання:

1) Розкладемо функцію $\arcsin x$ у ряд Маклорена:

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!\cdot 2^3}x^6 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!\cdot 2^n}x^{2n} + \ldots\right) dx =$$

$$= x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2! \cdot 2^2} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n! \cdot 2^n \cdot (2n+1)} x^{2n+1} + \cdots = (2.60) =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n)!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \le 1.$$

2) Розділимо ряд (2.60) на x і проінтегруємо на відрізку $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, що належить області збіжності ряду та отримаємо:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3}{40} x^4 + \frac{5}{102} x^6 + \frac{35}{1152} x^8 + \cdots + \frac{(2\mathrm{n}-1)!}{(2\mathrm{n})! \cdot (2\mathrm{n}+1)} x^{2\mathrm{n}} + \cdots \right) dx =$$

$$= \left(x + \frac{x^3}{18} + \frac{3}{200} x^5 + \frac{5}{714} x^7 + \cdots + \frac{(2n-1)!}{(2n)! \cdot (2n+1)^2} x^{2n+1} + \cdots \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{144} + \frac{3}{6400} + \cdots + \frac{(2n-1)!}{(2n)! \cdot (2n+1)^2 \cdot 2^{2n+1}} + \cdots$$

3) Оцінимо n-ий залишок ряду:

$$\left| r_n\left(\frac{1}{2}\right) \right| \le \frac{(2n-1)!}{(2n)! \cdot (2n+1)^2 \cdot 2^{2n+1}} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots \right) =$$

$$= \frac{(2n-1)!}{3 \cdot (2n)! \cdot (2n+1)^2 \cdot 2^{2n-1}}.$$

Нерівність $\left| r_{\mathrm{n}}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \le 10^{-3}$ виконується при $n \ge 2$, тому беремо 2 члени ряду для обчислення інтеграла з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{144} \approx 0{,}507.$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim s As Double
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim sum As Double
Public Function Fakt(n As Integer) As Double
s = 1
For i = 1 To n
   s = s * i
Next i
Fakt = s
End Function
Public Function pr219(n As Integer) As Double
sum = 0
For j = 0 To n
   sum = sum + Fakt(2 * j - 1) / (Fakt(2 * j) * (2 * j + 1) ^ 2 * 2 ^ (2 * j + 1))
Next j
pr219 = sum
End Function
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n. (рис. 2.12)

Окремо обчисливши значення для S_{100} та S_{150}, одержали:

$$S_{100} = 0{,}507287007$$

$$S_{150} = 0{,}507287007.$$

Як бачимо з результату, точність 10^{-8} досягається вже при $n = 7$.

n	arcsin(x)/x
1	0,506944444
2	0,507256944
3	0,507283518
4	0,507286532
5	0,507286935
6	0,507286995
7	0,507287005
8	0,507287007
9	0,507287007
10	0,507287007
11	0,507287007
12	0,507287007
13	0,507287007
14	0,507287007
15	0,507287007
16	0,507287007
17	0,507287007
18	0,507287007
19	0,507287007
20	0,507287007

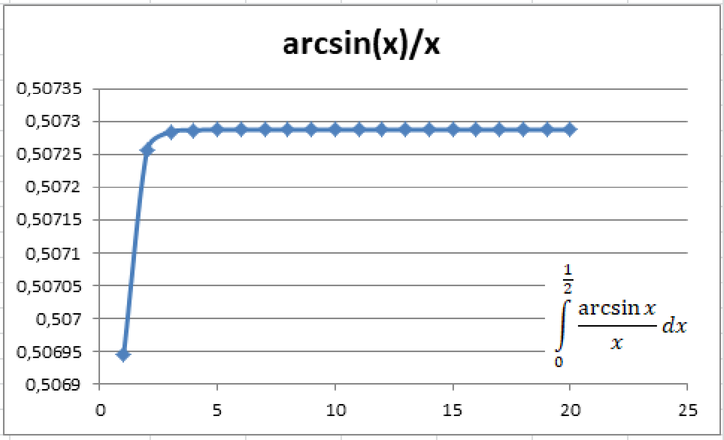

Рис.2.12 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Задача 2.20. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ інтеграл [27, §7]::

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$$

Розв'язання:

1) Розкладемо підінтегральну функцію у ряд Маклорена:

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{n} \quad (2.61)\text{, при } |x| \leq 1.$$

2) Проінтегруємо ряд (2.61) на відрізку $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$, який належить області його збіжності. Отримаємо:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{n(2n-1)} dx \Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2n-1)} \left(\frac{1}{2^{2n-1}} - \frac{1}{3^{2n-1}}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^{2n-1} - 2^{2n-1}}{n(2n-1) \cdot 6^{2n-1}} \quad (2.62)$$

3) Ряд (2.62) є рядом Лейбніца, тому для оцінки похибки використовується нерівність:

$$|r_n| \leq \frac{3^{2n+1} - 2^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)\cdot 6^{2n+1}} < 10^{-3},$$

яка виконується при $n \geq 3$.

4) Таким чином,

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx \approx \frac{1}{6} - \frac{19}{1296} + \frac{211}{116640} \approx 0{,}154$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim j As Integer
Dim sum As Double
Public Function pr220(n As Integer) As Double
sum = 0
For j = 1 To n
sum = sum + (-1) ^ (j - 1) * (3 ^ (2 * j - 1) - 2 ^ (2 * j - 1)) / (j * (2 * j - 1) * 6 ^ (2 * j - 1))
Next j
pr220 = sum
End Function
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n. (рис. 2.13)

Окремо обчисливши значення для S_{100} та S_{150}, одержали:

$$S_{100} = 0{,}153588554$$

$$S_{150} = 0{,}153588554.$$

Як бачимо з результату, точність 10^{-9} досягається вже при $n = 10$.

n	ln(1+x^2)/x^2
1	0,166666667
2	0,152006173
3	0,153815158
4	0,15355247
5	0,153594744
6	0,153587431
7	0,153588766
8	0,153588512
9	0,153588562
10	0,153588552
11	0,153588554
12	0,153588553
13	0,153588554
14	0,153588554
15	0,153588554
16	0,153588554
17	0,153588554
18	0,153588554
19	0,153588554
20	0,153588554

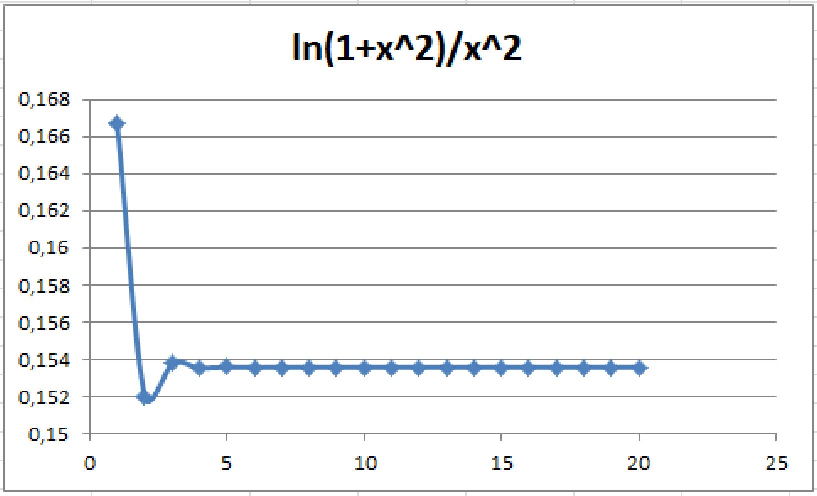

Рис.2.13 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Задача 2.21. Обчислити з точністю 0,001 визначений інтеграл [27, §7]::

$$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

Розв'язання:

1) Замінимо у підінтегральному виразі $\ln(1+x)$ його розкладом у ряд:

$$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx =$$

$$= \int_0^{0,1} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots}{x} dx = \int_0^{0,1} \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \cdots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{16}x^4 + \cdots\right) \Big|_0^{0,1} = 0,1 - \frac{1}{4} \cdot 0,01 + \frac{1}{9} \cdot 0,001 - \cdots \approx 0,098$$

2) Таким чином:

$$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \approx 0.098$$

Задача 2.22. Обчислити з точністю до 0,0001 визначений інтеграл [13]:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$$

Розв'язання:

1) Замінимо у підінтегральному виразі $\cos x$ його розкладом у степеневий ряд:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\cdots}{x^2}dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\cdots\right)dx = \left(\frac{1}{2!}x-\frac{x^3}{4!\cdot 3}+\frac{x^5}{6!\cdot 5}-\cdots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2!\cdot 2}-\frac{1}{4!\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{1}{6!\cdot 5\cdot 2^5}-\cdots \approx\ 0{,}25-0{,}0017.$$

2) Таким чином:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\cos x}{x^2}dx \approx 0{,}2483.$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim s As Double
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim sum As Double
Public Function Fakt(n As Integer) As Double
s = 1
For i = 1 To n
```

```
  s = s * i
Next i
Fakt = s
End Function
Public Function pr222(n As Integer) As Double
sum = 0
For j = 1 To n
  sum = sum + ((-1) ^ (j + 1)) / (Fakt(2 * j) * (2 * j - 1) * 2 ^ (2 * j - 1))
Next j
pr222 = sum
End Function
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n:

n	(1-cosx)/x^2
1	-0,00625
2	-0,005761719
3	-0,005806108
4	-0,005801748
5	-0,005802197
6	-0,005802149
7	-0,005802155
8	-0,005802154
9	-0,005802154
10	-0,005802154
11	-0,005802154
12	-0,005802154
13	-0,005802154
14	-0,005802154
15	-0,005802154
16	-0,005802154
17	-0,005802154
18	-0,005802154
19	-0,005802154
20	-0,005802154

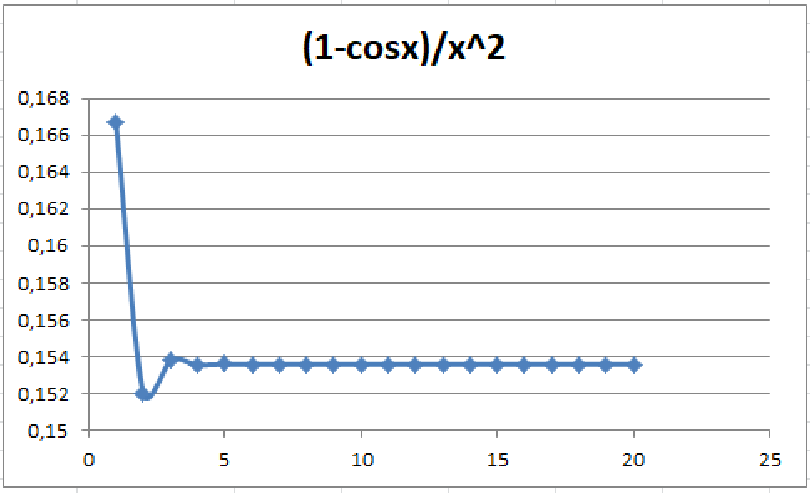

Рис.2.14 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Окремо обчисливши значення для S_{100} та S_{150}, одержали:

$$S_{100} = 0{,}248272542$$

$$S_{150} = 0{,}248272542.$$

Як бачимо з результату, точність 10^{-6} досягається вже при $n = 4$.

Задача 2.23. Обчислити інтеграл [27, §7]::

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

Розв'язання:.

1) Цей інтеграл можна розв'язати за допомогою звичайних замін, використовуючи арифметичні функції. Однак раціональнішим способом буде визначити підінтегральну функцію як розклад деякого ряду. Отримаємо:

$$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^6 - x^{12} + \cdots (2.63)$$

2) Якщо під час обчислення обмежитися двома першими елементами ряду (2.63), то відповідь є такою:

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{9} - \cdots$$

3) Маємо:

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^4}\,dx \approx 0{,}4938.$$

2.3. Використання рядів та інтегралів до обчислення значень трансцендентних функцій

В курсі математичного аналізу певну частину завдань, пов'язаних із наближеним обчисленням розглядають для обчислення значень трансцендентних функцій. Дані результати, отримані під час розв'язання певного прикладу можна порівняти із іншими результатами, наприклад, таблицею значень тригонометричних функцій певних кутів (таблиця Брадіса), обчисленнями, виконаними на калькуляторі і т.д.

Таким чином можна зробити висновок про точність виконаних обчислень із використанням рядів та інтегралів.

Задача 2.24. Обчислити наближено значення $\sin 40°$.[8]

1) Запишемо значення функції у вигляді: $\sin 18° = \sin\frac{\pi}{10}$.

2) Використаємо розклад функції в ряд:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots.$$

3) Підставляючи значення отримаємо:

$$\sin\frac{\pi}{10} \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5 - \cdots \approx 0.314 - 0.00516 + 0.0000255$$

4) Отже, $\sin 18° = 0{,}3088$.

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel та засобами табличного процесора побудуємо графік залежності значення суми від аргумента n. (рис. 2.15)

n	sin 18
1	-2,823282708386
2	2,344429807209
3	-0,205734015163
4	0,393530442601
5	0,311384568601
6	0,318754998164
7	0,318288695462
8	0,318310610809
9	0,318309815604
10	0,318309838553
11	0,318309838013
12	0,318309838024
13	0,318309838024
14	0,318309838024
15	0,318309838024
16	0,318309838024
17	0,318309838024
18	0,318309838024
19	0,318309838024
20	0,318309838024

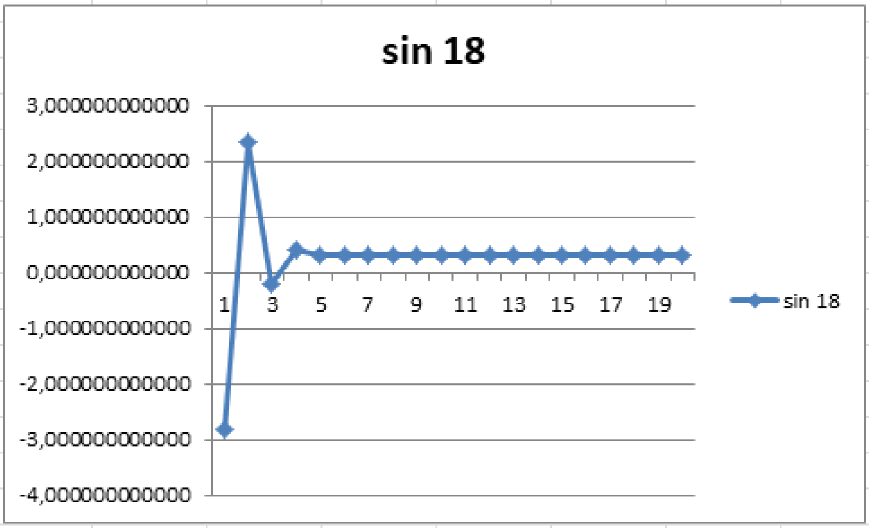

Рис. 2.15 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Задача 2.25. Обчислити наближено значення $\ln(1.75)$

1) Використаємо розклад натурального логарифма в ряд:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, x \in (-1; 1).$$

2)Підставляючи значення отримаємо:

$$\ln(1+0.75) \approx 0.75 - \frac{(0.75)^2}{2} + \frac{(0.75)^3}{3} - \frac{(0.75)^4}{4} + \cdots \approx 0.530275$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel та засобами табличного процесора побудуємо графік залежності значення суми від аргумента n. (рис. 2.16)

n	ln(1,75)
1	0,75000000
2	0,46875000
3	0,60937500
4	0,53027344
5	0,57773438
6	0,54807129
7	0,56714042
8	0,55462630
9	0,56296904
10	0,55733769

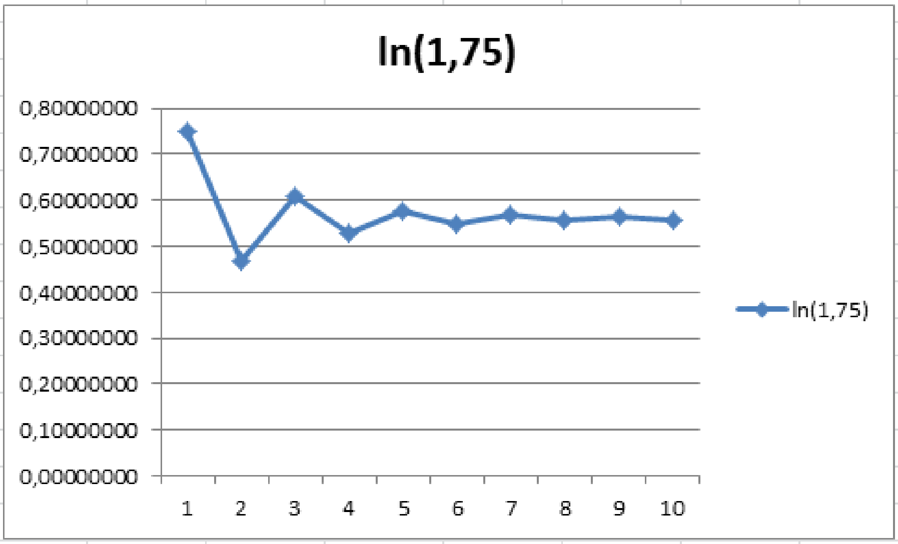

Рис. 2.16 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Задача 2.26. Обчислити наближено значення $\arcsin\left(\frac{2}{9}\right)$

1) Використаємо розклад функції в ряд:

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{3x^5}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 3}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \cdots,$$

$$x \in (-1; 1)$$

2) Підставляючи значення отримаємо:

$$\arcsin\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{2}{9} + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^3 + \frac{1}{40}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^5 + \cdots \approx 0.224063$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim s As Double
Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim sum As Double
Public Function Fakt(n As Integer) As Double
s = 1
For i = 1 To n
  s = s * i
Next i
Fakt = s
End Function
Public Function Fakt2(n As Integer) As Double
s = 1
For i = 1 To n Step 2
  s = s * i
Next i
Fakt2 = s
End Function
Public Function pr227(n As Integer) As Double
sum = 0
For j = 1 To n
  sum = sum + Fakt2(2 * j - 1) / (Fakt(2 * j) * (2 * j + 1) * 5 ^ (2 * j + 1))
Next j
pr227 = 2 / 9 + sum
End Function.
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n. (рис. 2.16)

Як бачимо з результату, точність 10^{-6} досягається вже при $n = 3$.

n	arcsin(2/9)
1	0,223555556
2	0,223563556
3	0,223563594
4	0,223563594
5	0,223563594
6	0,223563594
7	0,223563594
8	0,223563594
9	0,223563594
10	0,223563594
11	0,223563594
12	0,223563594
13	0,223563594
14	0,223563594
15	0,223563594
16	0,223563594
17	0,223563594
18	0,223563594
19	0,223563594
20	0,223563594

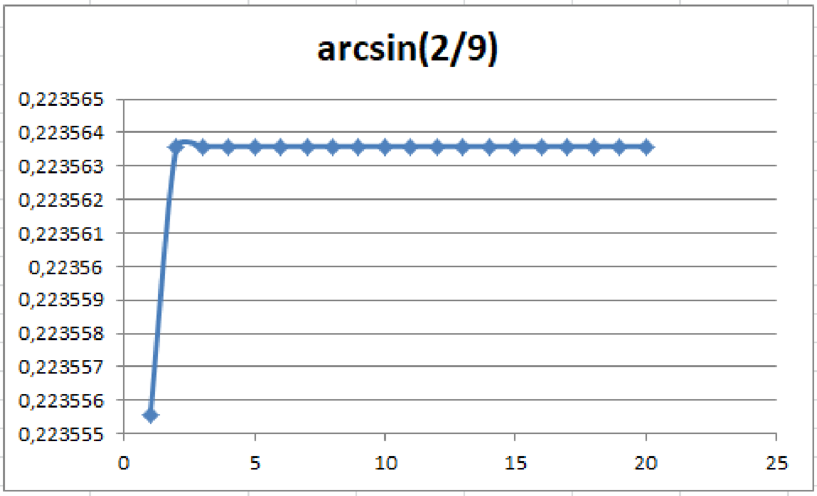

Рис. 2.16 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Задача 2.27. Обчислити наближено значення $\cos 20°$ з точністю до 0,0001.

1) Запишемо значення функції у вигляді: $\cos 20° = \cos\frac{\pi}{9}$

2) Розкладемо функцію $\cos x$ в степеневий ряд:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, (n \text{ з } 0)$$

3) Підставляючи значення отримаємо:

$$\cos 20° = \cos\frac{\pi}{9} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^6 \approx 0.9396.$$

Задача 2.28. Обчислити наближено значення $\arccos\left(\frac{11}{20}\right)$

1) Використаємо розклад функції в ряд:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x =$$

$$= \frac{\pi}{2} - (x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{3x^5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \cdots).$$

2) Підставивши наше значення отримаємо:

$$\arccos\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{11}{20} + \frac{1}{6}\left(\frac{11}{20}\right)^3 + \frac{1\cdot 3}{40}\left(\frac{11}{20}\right)^5\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0.55 - 0.027729 - 0.003774$$

3) В результаті маємо:

$$\arccos\left(\frac{11}{20}\right) \approx 0.98929.$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim s As Double
Dim i As Integer
Dim n As Integer
Dim sum As Double
Dim pi As Double
Dim x As Double
Public Function Fakt2(n As Integer) As Double
s = 1
For i = 1 To n Step 2
  s = s * i
Next i
Fakt2 = s
End Function.
Public Function Fakt(n As Integer) As Double
s = 1
For i = 1 To n
  s = s * i
Next i
Fakt = s
End Function.
```

```
Public Function pr229(nn As Integer) As Double
sum = 0
pi = 3.1415926
x = 11 / 20
For n = 0 To nn
  sum = sum + x ^ (2 * n + 1) * Fakt2(2 * n - 1) / Fakt(2 * n + 1)
Next n
pr229 = pi / 2 - sum
End Function.
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n:

n	arccos(11/20)
0	1,0207963
2	0,991808922
4	0,991762279
6	0,991762246
8	0,991762246
10	0,991762246
12	0,991762246
14	0,991762246
16	0,991762246

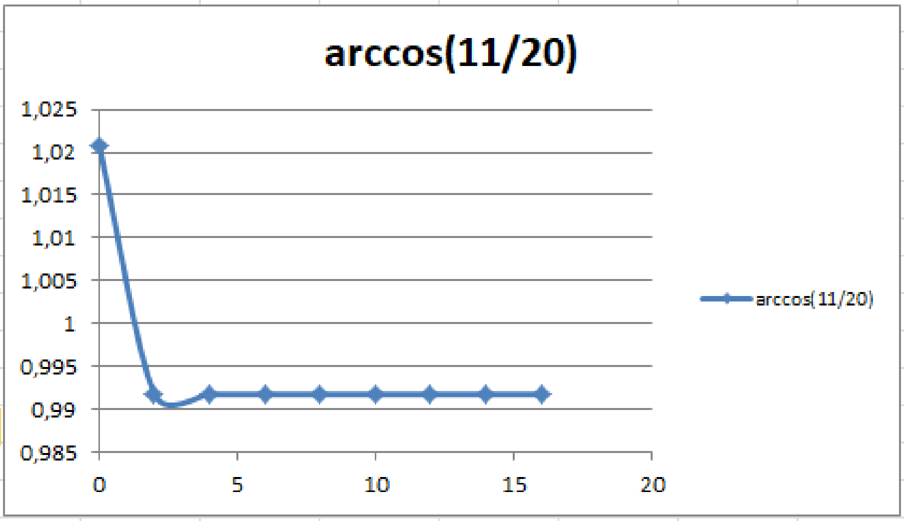

Рис. 2.17 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Як бачимо з результату, точність 10^{-5} досягається вже при $n = 4$.

Задача 2.29. Обчислити наближено значення $\tan 15°$.

1) Запишемо значення функції у вигляді: $\tan 15° = \tan\frac{\pi}{12}$

2) Використаємо розклад функції в степеневий ряд:

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots.$$

3) Підставляючи значення отримаємо:

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{12}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{\pi}{12}\right)^5 + \frac{17}{315}\left(\frac{\pi}{12}\right)^7 \approx$$

$$0.26179 + 0.00598 + 0.0001639 + 0.00000187 \approx 0.26793$$

4) Отже, $\tan 15° \approx 0.26793$.

Задача 2.30. Обчислити наближено значення $\arctan\frac{3}{16}$

1) Використаємо розклад функції в ряд:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots.$$

2) Підставляючи значення отримаємо:

$$\arctan\frac{3}{16} = \frac{3}{16} - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{16}\right)^5 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{16}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{3}{16}\right)^7 \approx 0.187423$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim n As Integer
Dim sum As Double
Dim x As Double
Public Function pr231(nn As Integer) As Double
sum = 0
x = 3 / 16
For n = 0 To nn
  sum = sum + (-1) ^ n * x ^ (2 * n + 1) / (2 * n + 1)
Next n
pr231 = sum
End Function.
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n:

n	arctan(3/16)
0	0,1875
2	0,185349083
4	0,185347951
6	0,18534795
8	0,18534795
10	0,18534795
12	0,18534795
14	0,18534795
16	0,18534795
18	0,18534795
20	0,18534795
22	0,18534795
24	0,18534795
26	0,18534795
28	0,18534795
30	0,18534795
32	0,18534795
34	0,18534795
36	0,18534795
38	0,18534795
40	0,18534795

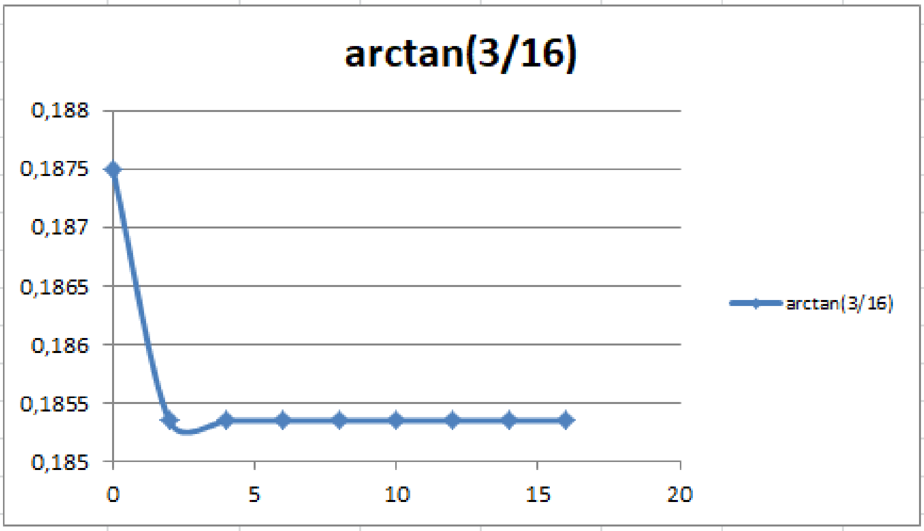

Рис. 2.18 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Як бачимо з результату, точність 10^{-9} досягається вже при $n = 20$.

Задача 2.31. Обчислити наближено значення $\ln\frac{1.675}{0.675}$

1) Використаємо розклад функції в ряд:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right)$$

2) Підставляючи значення отримаємо:

$$\ln\frac{1+0.675}{1-0.675} = 2(0.675 + \frac{0.675^3}{3} + \frac{0.675^5}{5} + \frac{0.675^7}{7} + \cdots) \approx 1.6929$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim n As Integer
Dim sum As Double
Dim x As Double
```

```
Public Function pr232(nn As Integer) As Double
sum = 0
x = 0.675
For n = 1 To nn
  sum = sum + x ^ (2 * n - 1) / (2 * n - 1)
Next n
pr232 = 2 * sum
End Function.
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n:

n	ln(1,675/0,675)
1	1,35
2	1,55503125
4	1,629323076
6	1,638197163
8	1,639493062
10	1,63970067
12	1,639735766
14	1,639741911
16	1,639743014
18	1,639743216
20	1,639743253

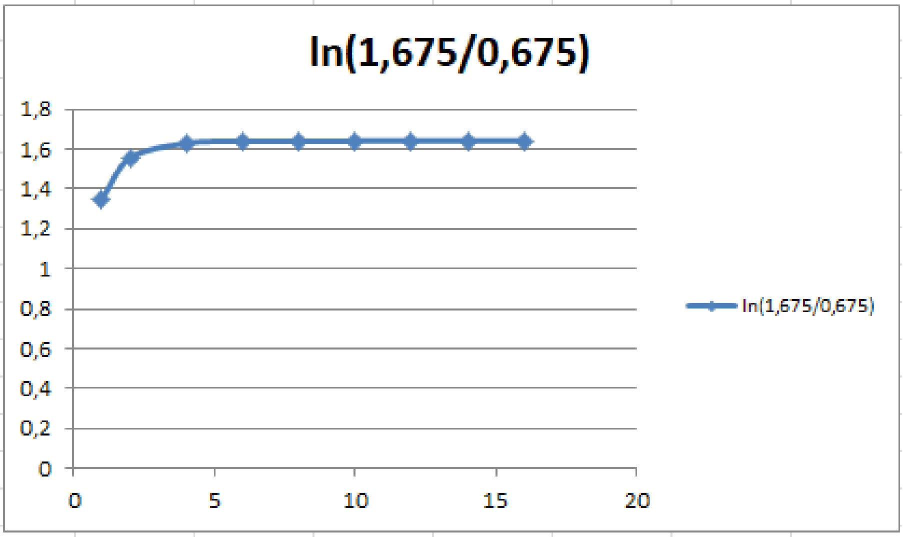

Рис. 2.19 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Як бачимо з результату, точність 10^{-7} досягається вже при $n = 16$.

Задача 2.32. Обчислити наближено значення $\ln 14$.

1) Використаємо розклад натурального логарифма в ряд:

$$\ln x = 2\left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right)$$

2) Підставляючи значення отримаємо:

$$\ln 14 = 2\left(\frac{14-1}{14+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{14-1}{14+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{14-1}{14+1}\right)^5 + \cdots\right) \approx$$

$$\approx 2\left(\frac{13}{15}+\frac{1}{3}\left(\frac{13}{15}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{13}{15}\right)^5\right) \approx 2.1904$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim n As Integer
Dim sum As Double
Dim x As Double
Public Function pr233(nn As Integer) As Double
sum = 0
x = 14
For n = 1 To nn
  sum = sum + (x - 1) ^ (2 * n - 1) / ((2 * n - 1) * (x + 1) ^ (2 * n - 1))
Next n
pr233 = 2 * sum
End Function.
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n:

n	Ln(14)
1	1,733333333
2	2,167308642
4	2,467816107
6	2,566786798
8	2,606314466
10	2,62358537
12	2,631537985
14	2,63532837
16	2,637179635
18	2,638100448
20	2,638564974

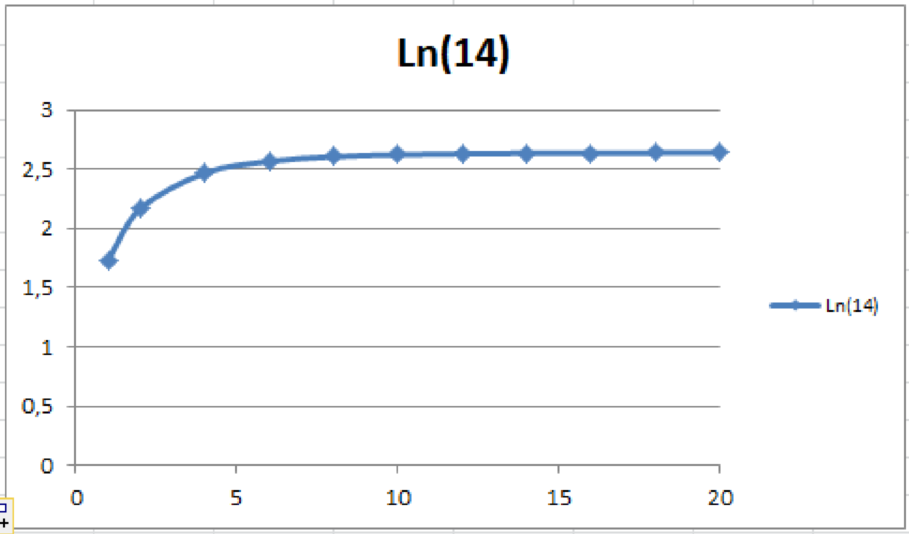

Рис. 2.20 Графік залежності значення суми від аргумента n.

З рисунку встановлюємо, що більш точне значення встановлюється при $n > 10$.

Задача 2.33. Обчислити наближено значення $\tan\frac{5\pi}{12}$.

1) Використаємо розклад функції в ряд:

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots.$$

2) Підставляючи значення отримаємо:

$$\tan\frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{3}\left(\frac{5\pi}{12}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{5\pi}{12}\right)^5 + \frac{17}{315}\left(\frac{5\pi}{12}\right)^7 \approx 3.1$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim n As Integer
Dim i As Integer
Dim s As Double
Dim sum1 As Double
Dim sum2 As Double
Dim x As Double
Public Function Fakt(n As Integer) As Double
s = 1
For i = 1 To n
  s = s * i
Next i
Fakt = s
End Function.
Public Function pr234(nn As Integer) As Double
sum1 = 0
sum2 = 0
x = 5 * 3.1415926 / 12
For n = 0 To nn
```

```
  sum1 = sum1 + (-1) ^ n * x ^ (2 * n + 1) / Fakt(2 * n + 1)
  sum2 = sum2 + (-1) ^ n * x ^ (2 * n) / Fakt(2 * n)
Next n
pr234 = sum1 / sum2
End Function.
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n:

n	tg(5∏/12)
1	6,527656274
2	3,641621965
4	3,731994389
6	3,732050467
8	3,732050474
10	3,732050474
12	3,732050474
14	3,732050474
16	3,732050474
18	3,732050474
20	3,732050474

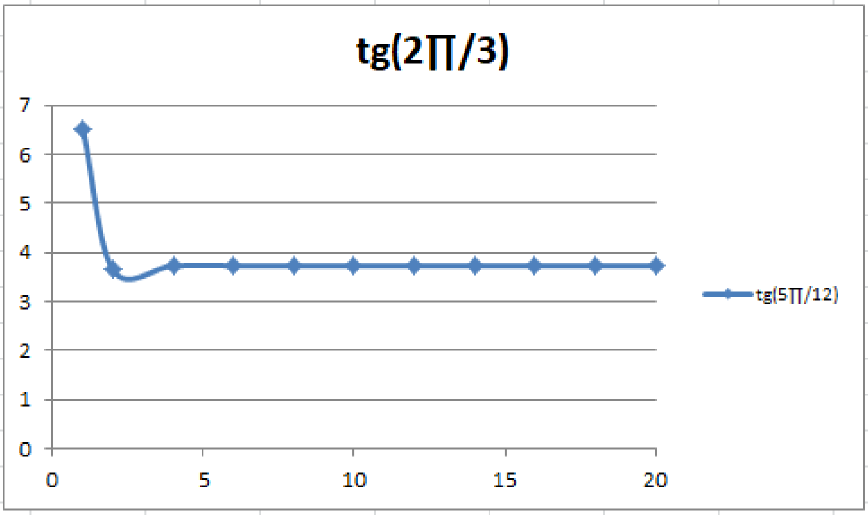

Рис. 2.21 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Як бачимо з результату, більш точне значення досягається при $n = 12$.

Задача 2.34. Обчислити наближено значення $\ln 0.85$

1) Запишемо функцію у вигляді: $\ln 0.85 = \ln(1 + (-0.15))$
2) Використаємо розклад функції в ряд:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, x \in (-1;1).$$

3) Підставляємо значення:

$$\ln 0.85 = \ln\big(1 + (-0.15)\big) = -0.15 - \frac{(-0.15)^2}{2} + \frac{(-0.15)^3}{3} - \frac{(0.15)^4}{4} \approx$$

$$\approx -0.15 - 0.01125 - 0.001125 - 0.001265 \approx -0.16364$$

Задача 2.35. Обчислити наближено значення $\sin(-\frac{3\pi}{5})$.

1) Використаємо розклад функції в ряд:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots.$$

2) Підставимо значення:

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{1!}\left(-\frac{3\pi}{5}\right) - \frac{1}{3!}\left(-\frac{3\pi}{5}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(-\frac{3\pi}{5}\right)^5 + \cdots =$$

$$= -\frac{1.8849}{1} + \frac{6.6973}{6} - \frac{23.7960}{120} \approx -1.8849 + 1.11621 - 0.1983 \approx -0.96699$$

Задача 2.36. Обчислити наближено значення $\cos\frac{4\pi}{15}$

1) Використовуємо розклад функції в ряд:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \ ,(n \text{ з } 0)$$

2) Підставляємо значення:

$$\cos\frac{4\pi}{15} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{4\pi}{15}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{4\pi}{15}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{4\pi}{15}\right)^6 + \cdots$$

3) Отже, $\cos\frac{4\pi}{15} \approx 0.669125$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim s As Double
Dim i As Integer
Dim n As Integer
Dim sum As Double
Dim x As Double
Public Function Fakt(n As Integer) As Double
s = 1
For i = 1 To n
  s = s * i
Next i
Fakt = s
End Function.
```

```
Public Function pr237(nn As Integer) As Double
sum = 0
x = 4* 3.1415926 / 15
For n = 0 To nn
   sum = sum + (-1) ^ n * x ^ (2 * n) / Fakt(2 * n)
Next n
pr237 = sum
End Function.
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n:

n	cos(4∏/15)
1	0,649080744
2	0,669604798
4	0,669130664
6	0,669130617
8	0,669130617
10	0,669130617
12	0,669130617
14	0,669130617
16	0,669130617
18	0,669130617
20	0,669130617

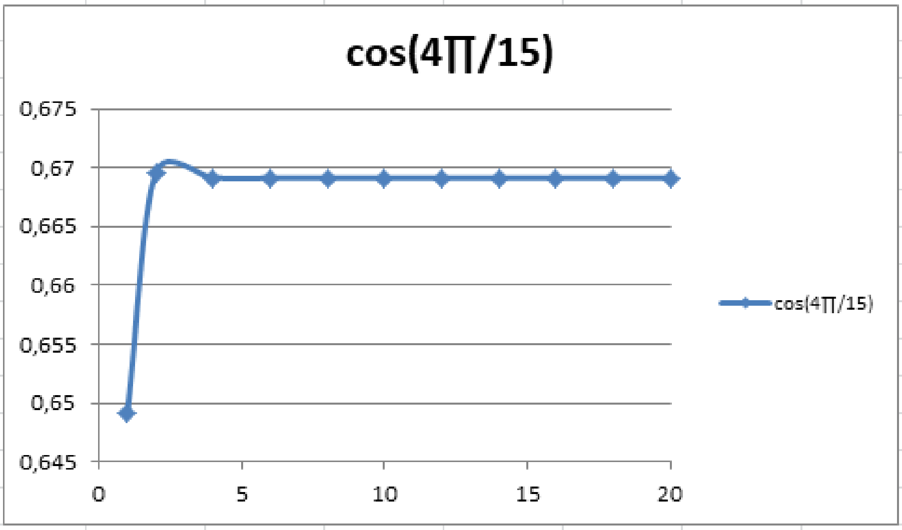

Рис. 2.22 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Як бачимо з результату, точність 10^{-9} досягається вже при $n = 12$.

Задача 2.37. Обчислити наближено значення $\arctan\frac{13}{17}$

1) Використаємо розклад функції в ряд:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

2) Підставляючи значення, отримаємо:

$$\arctan\frac{13}{17} = \frac{13}{17} - \frac{1}{3}\left(\frac{13}{17}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{13}{17}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{13}{17}\right)^7 \approx$$

$$\approx \frac{13}{17} - \frac{1}{3} \cdot 0.447 + \frac{1}{5} \cdot 0.2615 \approx 0.764 - 0.149 + 0.0523 \approx 0.6673$$

2.4. Обчислення наближених значень ірраціональних чисел

Обчислення наближених значень ірраціональних чисел також розглядається в курсі математичного аналізу. Однак, для цього використовують не досить велику кількість прикладів.

Дані результати, отримані під час обчислення наближеного значення ірраціональних чисел можна порівняти із обчисленнями на калькуляторі, та зробити висновок про точність виконаних обчислень.

Задача 2.38. Обчислити наближено значення $\sqrt[3]{10}$ з точністю $\varepsilon = 0.001$ [8]

1) Представимо число $\sqrt[3]{10}$ у вигляді:

$$\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 10}{8}} = 2\sqrt[3]{\frac{10}{8}} = 2\sqrt[3]{1 + 0.25} = 2(1 + 0.25)^{\frac{1}{3}}$$

2) Використаємо біноміальний ряд:

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots.$$

3) Маємо:

$$\sqrt[3]{10} = 2(1 + \frac{1}{3} \cdot 0.25 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2!} \cdot 0.25^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 2\right)}{3!} \cdot 0.25^3 + \cdots) \approx$$

$$\approx 2(1 + 0.0833 - 0.00694 + 0.00096) \approx 2.154$$

4) Отже, $\sqrt[3]{10} \approx 2.154$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim n As Integer
Dim sum As Double
Dim x As Double
Dim mem As Double
```

```
Public Function pr239(nn As Integer) As Double
x = 0.25
m = 1 / 3
mem = x * m
sum = 1 + mem
For n = 2 To nn
   mem = mem * (m - n + 1) * x / n
   sum = sum + mem
Next n
pr239 = 2 * sum
End Function.
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n:

n	10^(1/3)
1	2,166666667
2	2,152777778
3	2,15470679
4	2,154385288
5	2,15444423
6	2,154432769
7	2,154435089
8	2,154434605
9	2,154434708
10	2,154434686
11	2,154434691

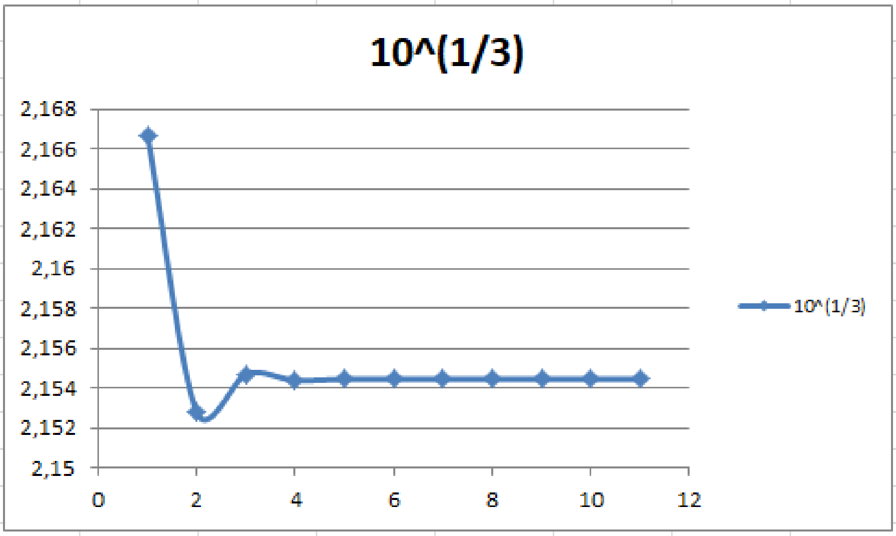

Рис. 2.23 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Як бачимо з результату, точність 10^{-7} досягається вже при $n = 11$.

Задача 2.39 Обчислити наближено значення $e^{0.365}$

1) Використаємо розклад функції e^x в ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

2) Використовуючи розклад функції e^x в ряд підставимо $x = 0.1$:

$$e^{0.365} = 1 + 0.365 + \frac{0.365^2}{2!} + \frac{0.365^3}{3!} + \cdots \approx$$

$$\approx 1 + 0.365 + 0.0666125 + 0.008104 \approx 1.4397$$

3) Маємо:

$$e^{0.365} \approx 1.4397$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim n As Integer
Dim sum As Double
Dim x As Double
Dim mem As Double
Public Function pr240(nn As Integer) As Double
x = 0.365
mem = x
sum = 1 + mem
For n = 2 To nn
  mem = mem * x / n
  sum = sum + mem
Next n
pr240 = sum
End Function.
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n:

n	e^(0,365)
1	1,365
2	1,4316125
3	1,439717021
4	1,440456558
5	1,440510545
6	1,440513829
7	1,440514
8	1,440514008
9	1,440514008
10	1,440514008
11	1,440514008

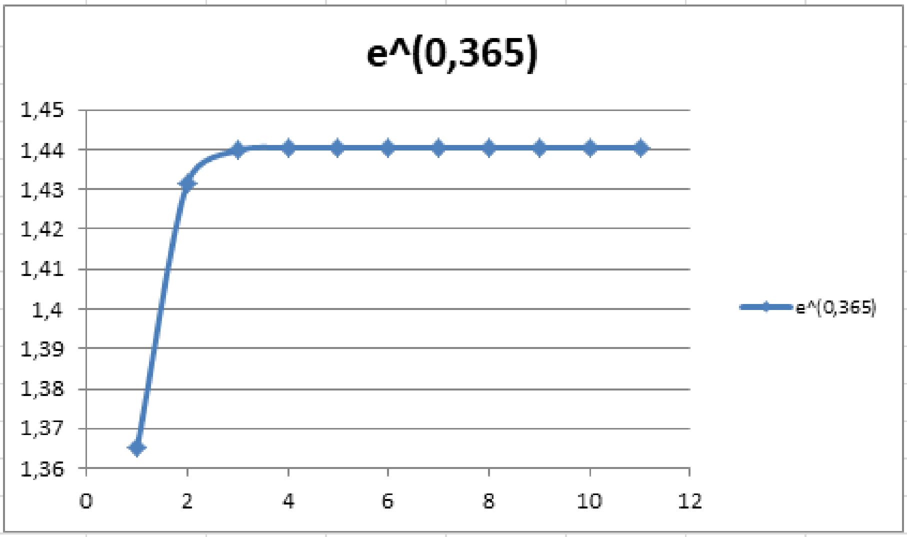

Рис. 2.24 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Як бачимо з результату, точність 10^{-9} досягається вже при $n = 9$.

Задача 2.40 Обчислити наближено значення числа π. [14]

Дане число має нескінченну кількість знаків після коми: $\pi \approx 3.141592653\ldots$. Теорія рядів надає один із самих ефективних способів знаходження цих цифр.

Наприклад:

Використовуючи значення $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ і розклад арктангенса в ряд Маклорена знайти приблизне значення числа π, використовуючи перші п'ять членів ряду.

1) Запишемо перші п'ять членів розкладу в ряд арктангенса:

$$\arctan x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} = x\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \frac{x^8}{9}\right).$$

2) В даному випадку $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\frac{\pi}{6} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{3} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4}{5} - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6}{7} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^8}{9}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - 0.111111 +$$

$$+0.022222 - 0.005291 + 0.001372) \approx \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 0.90719$$

3) В результаті $\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 0.90719$, звідки легко можна виразити приблизне значення π:

$$\pi \approx \frac{6}{\sqrt{3}}\cdot 0.90719 \approx 3.142605.$$

Даний спосіб дає два правильних знаки після коми. Очевидно, що чим більше членів ряду розглянути, тим точніше буде знайдено значення числа π.

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim n As Integer
Dim sum As Double
Dim x As Double
Dim mem As Double
Public Function pr241(nn As Integer) As Double
x = 1 / Sqr(3)
sum = 0
For n = 1 To nn
  sum = sum + (-1) ^ (n + 1) * x ^ (2 * n - 1) / (2 * n - 1)
Next n
pr241 = 6 * sum
End Function
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n:

n	П
1	3,464101615
2	3,079201436
3	3,156181472
4	3,137852892
5	3,142604746
6	3,141308785
7	3,141674313
8	3,141568716
9	3,141599774
10	3,141590511
11	3,141593305
12	3,141592454
13	3,141592715
14	3,141592635
15	3,14159266
16	3,141592652
17	3,141592654
18	3,141592653
19	3,141592654
20	3,141592654

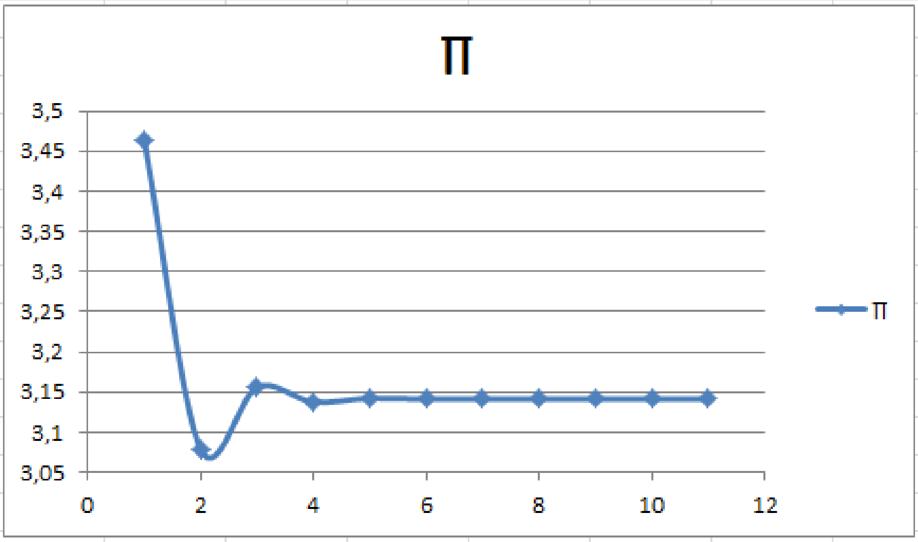

Рис. 2.25 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Як бачимо з результату, точність 10^{-8} досягається вже при $n = 17$.

Задача 2.41. Обчислити наближено значення $\sqrt{1.125}$

1) Використаємо біноміальний ряд:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} x^n, |x| \leq 1.$$

2) Маємо:

$$\sqrt{1.125} = \sqrt{1+0.125} = 1 + \frac{0.125}{2} - \frac{0.125^2}{8} + \frac{0.125^3}{16} - \frac{5 \cdot 0.125^4}{128} \approx$$

$$\approx 1 + 0.0625 - 0.00195 + 0.000122 - 0.00000953 \approx 1.06066$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim s As Double
Dim i As Integer
```

```
Dim n As Integer
Dim sum As Double
Dim pi As Double
Dim x As Double
Public Function Fakt(n As Integer) As Double
s = 1
For i = 1 To n
   s = s * i
Next i
Fakt = s
End Function
Public Function pr242(nn As Integer) As Double
sum = 0
x = 0.125
For n = 0 To nn
 sum = sum + (-1) ^ n * Fakt2(2 * n) * x ^ n / ((1 - 2 * n) * (Fakt(n)) ^ 2 * 4 ^ n)
Next n
pr242 = sum
End Function.
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n (рис. 2.26).

n	sqr(1.125)
1	1,03125
2	1,031005859
3	1,031008403
4	1,031008378
5	1,031008378
6	1,031008378
7	1,031008378
8	1,031008378
9	1,031008378
10	1,031008378
11	1,031008378
12	1,031008378

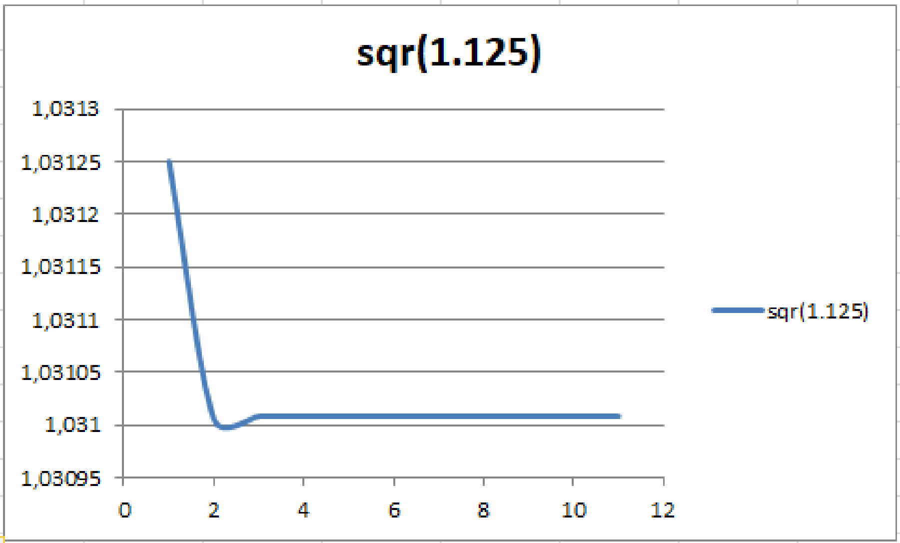

Рис. 2.26 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Як бачимо з результату, точність 10^{-9} досягається вже при $n = 5$.

Задача 2.42. Обчислити наближено значення $e^{\frac{2}{11}}$

1) Використаємо розклад функції e^x в ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

2) Використовуючи розклад функції e^x в ряд підставимо $x = \frac{2}{11}$:

$$e^{\frac{2}{11}} = 1 + \frac{\frac{2}{11}}{1!} + \frac{\left(\frac{2}{11}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{2}{11}\right)^3}{3!} \approx 1 + \frac{2}{11} + \frac{4}{121} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{1331} \cdot \frac{1}{6} \approx$$

$$\approx 1 + 0.1818 + 0.01652 + 0.001001753 \approx 1.1993$$

Задача 2.43. Обчислити наближено значення $\sqrt[5]{15}$

1) Представимо число $\sqrt[5]{15}$ у вигляді:

$$\sqrt[5]{15} = \sqrt[5]{2^5 - 17} = 2\sqrt[5]{1 - \frac{17}{32}}$$

2) Використаємо формулу розкладу в ряд Тейлора:

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + \cdots,$$

$$|x| < 1$$

$$x = -\frac{17}{32}, \alpha = \frac{1}{5}.$$

3) В результаті маємо:

$$\sqrt[5]{1-\frac{17}{32}} \approx 1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{17}{32} + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}-1\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{17}{32}\right)^2 \approx 0.871172.$$

$$2\sqrt[4]{1-\frac{1}{16}} = 2\cdot 0.9840 \approx 1.742344.$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim n As Integer
Dim sum As Double
Dim m As Double
Dim x As Double
Dim mem As Double
Public Function pr244(nn As Integer) As Double
x = -17/32
m = 1 / 5
mem = m * x
sum = 1 + mem
For n = 2 To nn
   mem = mem * (m - n + 1) * x / n
   sum = sum + mem
Next n
pr244 = 2 * sum
End Function.
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n:

n	15^(1/5)
1	1,7875
2	1,74234375
3	1,727950195
4	1,722597592
5	1,720436479
6	1,719518005
7	1,719113713
8	1,71893115
9	1,718847095
10	1,718807799
11	1,7187892
12	1,718780308
13	1,71877602
14	1,718773937
15	1,718772919
16	1,718772419
17	1,718772172
18	1,71877205
19	1,718771989
20	1,718771958

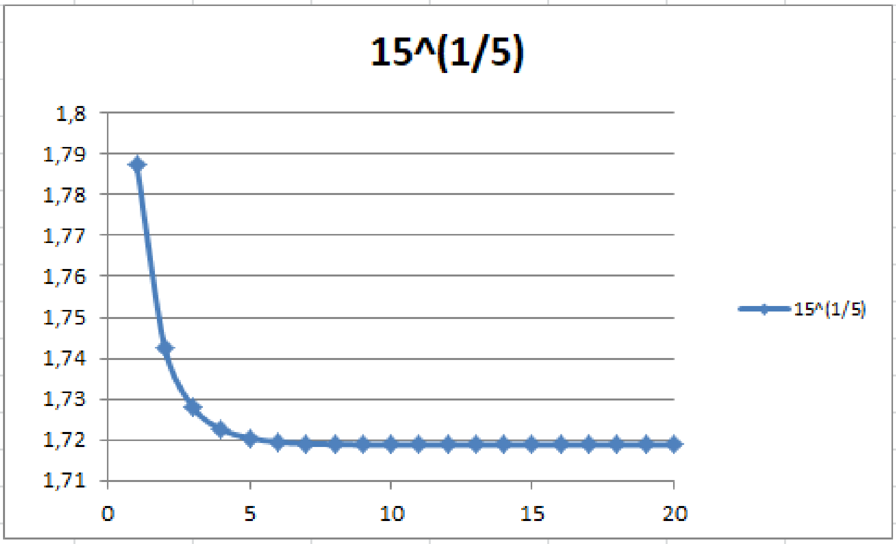

Рис. 2.27 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Як бачимо з результату, точність 10^{-9} досягається вже при $n = 15$.

Задача 2.44. Обчислити наближено значення $\frac{1}{2\sqrt{1.7}}$

1) Використаємо біноміальний ряд:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} x^n, |x| \le 1.$$

2) Використовуючи біноміальний ряд підставимо $x = 0.4$:

$$\sqrt{1+0.7} = 1 + \frac{0.7}{2} - \frac{0.7^2}{8} + \frac{0.7^3}{16} - \frac{5 \cdot 0.7^4}{128} =$$

$$= 1 + 0.35 - 0.06125 + 0.0214375 - 0.00937 = 1.300818$$

3) $2\sqrt{1+0.7} = 2 \cdot 1.300818 = 2.601639$

4) Отже, маємо:

$$\frac{1}{2\sqrt{1+0.7}} = \frac{1}{2.601639} \approx 0.3843$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim s As Double
Dim i As Integer
Dim n As Integer
Dim sum As Double
Dim pi As Double
Dim x As Double
Public Function Fakt(n As Integer) As Double
s = 1
For i = 1 To n
  s = s * i
Next i
Fakt = s
End Function.
Public Function pr245(nn As Integer) As Double
sum = 0
x = 0.7
For n = 0 To nn
  sum = sum + (-1) ^ n * Fakt(2 * n) * x ^ n / ((1 - 2 * n) * (Fakt(n)) ^ 2 * 4 ^ n)
Next n
pr245 = 1 / (2 * sum)
End Function.
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n:

n	1/2sqr(1.7)
1	0,37037037
2	0,387972842
3	0,381624767
4	0,384376304
5	0,383023111
6	0,383732347
7	0,383341943
8	0,383563888
9	0,383434389
10	0,38351143
11	0,383464851

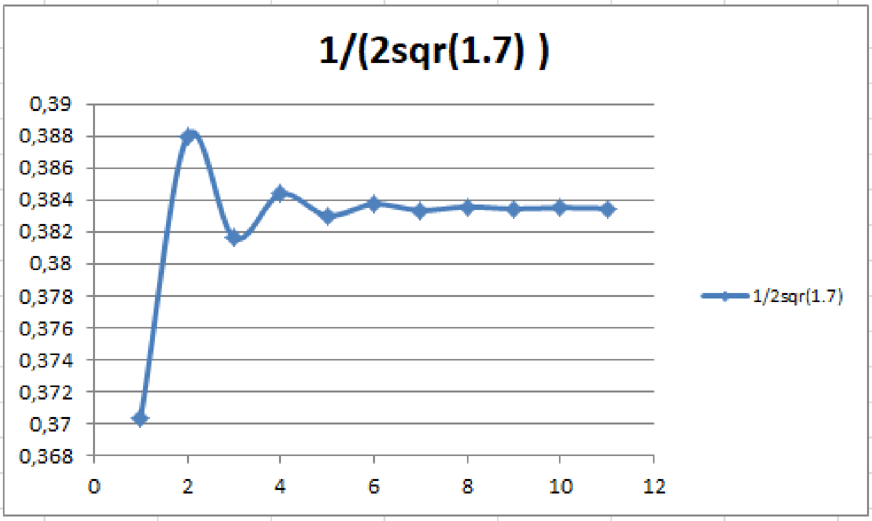

Рис. 2.28 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Як бачимо з результату, точність 10^{-6} досягається вже при $n = 11$.

Задача 2.45. Обчислити наближено значення $4 \cdot e^{\frac{3}{5}}$

1) Використаємо розклад функції e^x в ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

2) Використовуючи даний розклад отримаємо:

$$e^{\frac{3}{5}} = 1 + \frac{\frac{3}{5}}{1!} + \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^3}{3!} + \cdots \approx 1 + \frac{3}{5} + \frac{9}{25} \cdot \frac{1}{2} + \frac{27}{125} \cdot \frac{1}{6} \approx$$

$$\approx 1 + 0.6 + 0.18 + 0.036 \approx 1.816$$

3) Отже, маємо:

$$4 \cdot e^{\frac{3}{5}} \approx 4 \cdot 1.888 \approx 7.264$$

Задача 2.46. Обчислити наближено значення $\frac{7}{5 \cdot e^{\frac{2}{3}} + 2}$

Обчислимо $e^{\frac{2}{3}}$:

1) Використаємо розклад функції e^x в ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

2) Використовуючи даний розклад отримаємо:

$$e^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{3!} + \cdots = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{6} + \cdots \approx$$

$$\approx 1 + 0.666 + 0.222 + 0.049483 \approx 1.9374$$

3) Отже, маємо:

$$\frac{7}{5 \cdot e^{\frac{2}{3}} + 2} = \frac{7}{5 \cdot 1.9374 + 2} = \frac{7}{11.2704} \approx 0.5989$$

Задача 2.47. Обчислити наближено значення $\sqrt{1.35} + \frac{5}{7}$

1) Використаємо біноміальний ряд:

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1 - 2n)(n!)^2 4^n} x^n, |x| \leq 1.$$

2) Використовуючи біноміальний ряд підставимо $x = 0.35$:

$$\sqrt{1 + 0.35} = 1 + \frac{0.35}{2} - \frac{0.35^2}{8} + \frac{0.35^3}{16} - \frac{5 \cdot 0.35^4}{128} + \cdots \approx$$

$$\approx 1 + 0.175 - 0.01531 + 0.002679 + (-0.0005861) \approx 1.1617$$

3) Отже, маємо:

$$\sqrt{1.35} + \frac{5}{7} \approx 1.1617 + 0.7142 \approx 1.8759$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim s As Double
Dim i As Integer
Dim n As Integer
Dim sum As Double
Dim pi As Double
Dim x As Double
Public Function Fakt(n As Integer) As Double
s = 1
For i = 1 To n
```

```
  s = s * i
Next i
Fakt = s
End Function.
Public Function prim248(nn As Integer) As Double
sum = 0
x = 0.35
For n = 0 To nn
  sum = sum + (-1) ^ n * Fakt(2 * n) * x ^ n / ((1 - 2 * n) * (Fakt(n)) ^ 2 * 4 ^ n)
Next n
prim248 = sum + 5 / 7
End Function.
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n:

n	sqr(1.35)+5/7
1	1,889285714
2	1,873973214
3	1,876652902
4	1,87606672
5	1,876210335
6	1,876172636
7	1,876183003
8	1,876180055
9	1,876180915
10	1,876180659
11	1,876180736
12	1,876180713
13	1,87618072
14	1,876180718
15	1,876180718
16	1,876180718
17	1,876180718
18	1,876180718
19	1,876180718
20	1,876180718

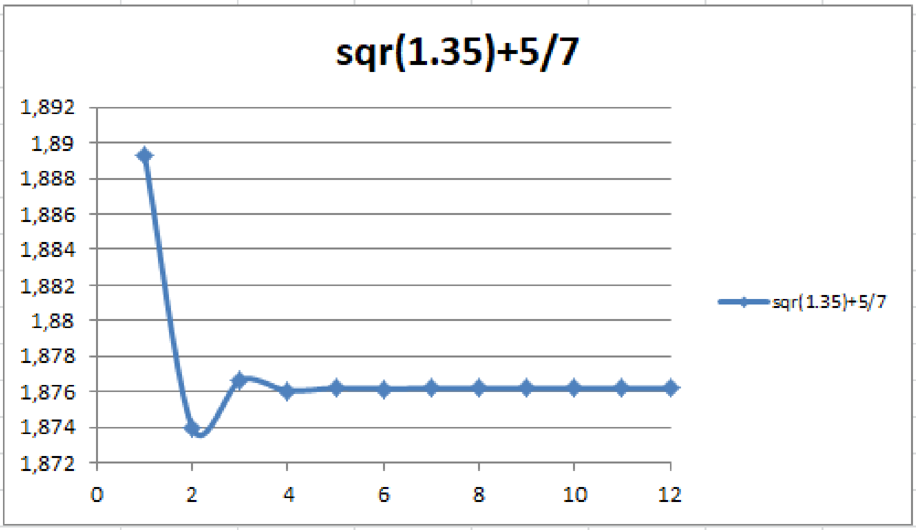

Рис. 2.29 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Як бачимо з результату, точність 10^{-9} досягається вже при $n = 14$.

Задача 2.48. Обчислити наближено значення $\sqrt[7]{220}$.

1) Представимо число $\sqrt[7]{220}$ у вигляді:

$$\sqrt[7]{128 \cdot \frac{220}{128}} = 2\sqrt[7]{\frac{220}{128}} = 2\sqrt[7]{1 + 0.71875} = 2(1 + 0.71875)^{\frac{1}{7}}$$

2) Використаємо біноміальний ряд:

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots.$$

3) Використовуючи біноміальний ряд отримаємо:

$$\sqrt[7]{220} = 2(1 + 0.71875)^{\frac{1}{7}} = 2(1 + \frac{1}{7} \cdot 0.71875 + \frac{\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7} - 1\right)}{2} \cdot 0.71875^2 +$$

$$+ \frac{\frac{1}{7}(\frac{1}{7} - 1)(\frac{1}{7} + 1)}{6} \cdot 0.71875^3 + \cdots) \approx 2(1 + 0.10267 - 0.03162 -$$

$$-0.00866) \approx 2.125$$

Задача 2.49. Обчислити наближено значення $\sqrt{0.65}$

1) Представимо число $\sqrt{0.65}$ у вигляді: $\sqrt{0.65} = \sqrt{1 - 0.35}$.

2) Використаємо біноміальний ряд:

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1 - 2n)(n!)^2 4^n} x^n, |x| \le 1.$$

3) Використовуючи біноміальний ряд отримаємо:

$$\sqrt{1 - 0.35} = 1 + \frac{-0.35}{2} - \frac{(-0.35)^2}{8} + \frac{(-0.35)^3}{16} - \frac{5 \cdot (-0.35)^4}{128} \approx$$

$$\approx 1 - 0.175 - 0.0153 + (-0.00267) - 0.0005861 \approx 0.806$$

Для відображення залежності значення суми ряду від значення n, створимо функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel наступного виду:

```
Dim s As Double
Dim i As Integer
Dim n As Integer
```

```
Dim sum As Double
Dim pi As Double
Dim x As Double
Public Function Fakt(n As Integer) As Double
s = 1
For i = 1 To n
   s = s * i
Next i
Fakt = s
End Function.
Public Function prim250(nn As Integer) As Double
sum = 0
x = -0.35
For n = 0 To nn
   sum = sum + (-1) ^ n * Fakt(2 * n) * x ^ n / ((1 - 2 * n) * (Fakt(n)) ^ 2 * 4 ^ n)
Next n
prim250 = sum
End Function.
```

Побудуємо засобами MS Excel графік залежності значення даної суми від аргумента n. (рис. 2.30)

Як бачимо з результату, точність 10^{-9} досягається вже при $n = 15$.

n	sqr(0.65)
1	0,825
2	0,8096875
3	0,807007813
4	0,806421631
5	0,806278016
6	0,806240318
7	0,80622995
8	0,806227002
9	0,806226142
10	0,806225887
11	0,806225809
12	0,806225786
13	0,806225778
14	0,806225776
15	0,806225775
16	0,806225775
17	0,806225775
18	0,806225775
19	0,806225775
20	0,806225775

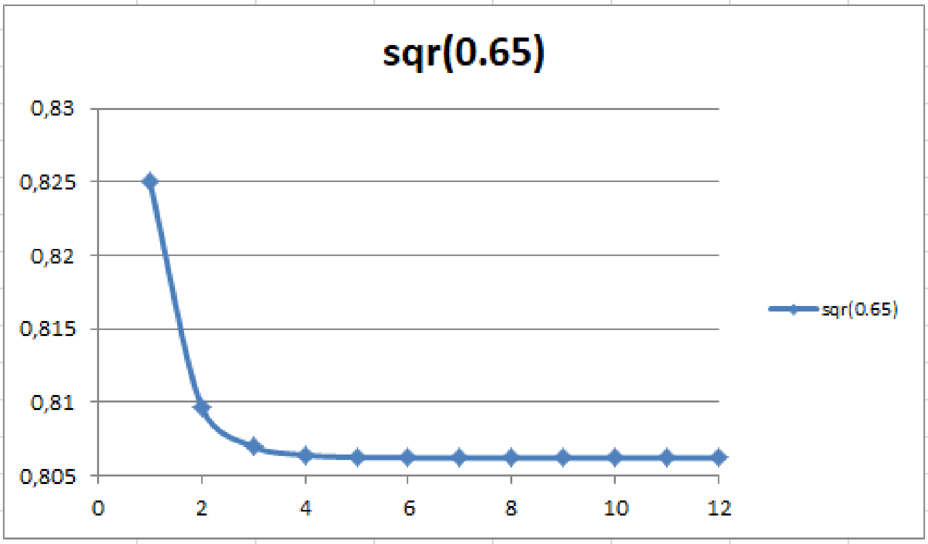

Рис. 2.30 Графік залежності значення суми від аргумента n.

Задача 2.50. Обчислити наближено значення $\frac{3}{8}\sqrt{0.55}+2.5$

1) Представимо число $\sqrt{0.55}$ у вигляді: $\sqrt{0.55}=\sqrt{1-0.45}$

2) Використаємо біноміальний ряд:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n}x^n,|x|\le 1.$$

3) Використовуючи біноміальний ряд отримаємо:

$$\sqrt{1-0.45}=1+\frac{-0.45}{2}-\frac{(-0.45)^2}{8}+\frac{(-0.45)^3}{16}-\frac{5\cdot(-0.45)^4}{128}\approx$$

$$\approx 1-0.225-0.0253+(-0.00569)-0.001601\approx 0.742409$$

4) Отже, маємо:

$$\frac{3}{8}\sqrt{0.55}+2.5=\frac{3}{8}\cdot 0.742409+1\approx 2.7784$$

Задача 2.51. Обчислити наближено значення $\frac{6\sqrt{1.9}+2}{3}$

1) Представимо число $\sqrt{1.9}$ у вигляді: $\sqrt{1.9}=\sqrt{1+0.9}$

2) Використаємо біноміальний ряд:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} x^n, |x| \le 1.$$

3) Використовуючи біноміальний ряд отримаємо:

$$\sqrt{1+0.9} = 1 + \frac{0.9}{2} - \frac{0.9^2}{8} + \frac{0.9^3}{16} - \frac{5 \cdot 0.9^4}{128} \approx$$

$$\approx 1 + 0.45 - 0.10125 + 0.04556 + (-0.0256289) \approx 1.3687$$

4) Отже, маємо:

$$\frac{6\sqrt{1.9}+2}{3} = \frac{6 \cdot 1.3687 + 2}{3} = \frac{10.212}{3} \approx 3.404$$

Задача 2.52. Обчислити наближено значення $11.55 \cdot e^{0.75} + 1$

1) Використаємо розклад функції e^x в ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

2) Використовуючи даний розклад отримаємо:

$$e^{0.75} = 1 + 0.75 + \frac{0.75^2}{2!} + \frac{0.75^3}{3!} + \cdots \approx 1 + 0.75 + 0.2812 + 0.0703 \approx 2.1015$$

3) Отже, маємо:

$$11.55 \cdot e^{0.75} + 1 \approx 11.55 \cdot 2.1015 + 1 \approx 25.272$$

Висновки до розділу 2.

1. Проведені дослідження підтверджують той факт, що визначений інтеграл та числові ряди мають теоретичний зв’язок.

2. Розв’язана достатня кількість задач, в яких демонструється використання інтегралів до наближених обчислень нескінченних сум рядів. Для реалізації дидактичного принципу наочності використано функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel, а саме – побудовано графічне зображення, яке демонструє залежність значення даної суми від аргумента та таблиця, на якій можна спостерігати результати обчислень при певних n.

3. Розв’язана достатня кількість задач, в яких демонструється використання рядів до наближених обчислень інтегралів. Для реалізації дидактичного принципу наочності використано функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel.

4. Розв’язана достатня кількість задач, в яких демонструється використання рядів та інтегралів до обчислення значень трансцендентних функцій.

5. Розв’язана достатня кількість задач, в яких демонструється використання рядів та інтегралів до обчислення значень ірраціональних чисел.

6. Дані завдання можуть бути запропоновані під час вивчення розділу «Числові ряди» на практичних заняттях з математичного аналізу, пов’язаних із наближеним обчисленням.

7. Для реалізації дидактичного принципу наочності, при вивченні числових рядів, а саме під час розгляду наближеного обчислення варто використовувати табличний процесор MS Excel.

ВИСНОВКИ

Згідно до поставленої мети та завдань було проаналізовано літературу з теми магістерської роботи та з'ясовано, що:

1. Певної чіткої періодизації розвитку інтегрального числення та теорії рядів в історії не має та дату їх виникнення встановити не можливо;

2. Поняття інтеграла та інтегрального числення виникли з-за потреби обчислювати площі будь-яких фігур і поверхонь та об'єми довільних тіл.

3. У XVII ст. ґрунтом, на якій виросла теорія нескінченних рядів, було наближене обчислення та інтерполювання.

4. «Визначений інтеграл» отримав свою назву у 1779 р. за пропозицією Лапласа.

5. Лише в XIX столітті ряди стали предметом дослідження самі по собі, і критичний перегляд основ аналізу на перших порах торкнувся саме їх.

6. В більшості підручниках, посібниках та збірниках саме з математичного аналізу наявні теоретичні відомості, які в деяких викладені більш широко, а в інших стисло, наведені приклади розв'язання типових і нестандартних задач із вказаними (запропонованими) способами розв'язання, наявні методичні рекомендації та вказівки для студентів , запропоновано систему задач та різнорівневих прикладів для самостійного виконання. Однак, треба відмітити, що в контексті сказаного, майже не продемонстрований зв'язок між інтегралами та рядами.

7. Розв'язана достатня кількість задач, в яких демонструється використання інтегралів до наближених обчислень нескінченних сум рядів, інтегралів, трансцендентних функцій та ірраціональних чисел.

8. Розв'язано достатню кількість задач, пов'язаних із наближеним обчисленням, що можуть бути запропоновані до розгляду під час вивчення розділу «Числові ряди».

9. Для реалізації дидактичного принципу наочності використано функцію користувача на VBA у табличному процесорі MS Excel, а саме –

побудовано графічне зображення, яке демонструє залежність значення даної суми від аргумента та таблиця, на якій можна спостерігати результати обчислень при певних n.

10. Розроблено систему прикладів (задач) для практичних занять з математичного аналізу на наближене обчислення нескінченних сум, визначених інтегралів, трансцендентних функцій та ірраціональних чисел під час вивчення розділу «Числові ряди». (дод. А, Б, В, Г)

В рамках нашого дослідження було обрано саме цей програмний засіб, оскільки табличний процесор MS Excel – вільно-розповсюджуваний, і до того ж, автоматично встановлений в пакеті MS Office із операційною системою Windows табличний процесор, який дозволяє обчислювати різні значення функцій, будувати графіки та діаграми на основі даних, представлених у таблиці, а також містить в собі середовище програмування, що дозволяє виконувати процеси обчислення точніше та в одному середовищі. Крім того, даний табличний процесор є зручним і має інтуїтивно зрозумілий інтерфейс, а також вивчається учнями ще в середній школі.

Тому студентам, які навчаються на фізико-математичному факультеті, може бути цікаво використати вже набуті знання з інформатики зі школи та розширити їх для виконання нових завдань, зокрема при вивченні розділу математичного аналізу «Числові ряди».

Таким чином, поставлена мета досягнута, завдання дослідження виконано.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Белл Э. Т. Творцы математики / Э.Т. Белл. — М.: Просвещение, 1979. – 256с.

2. Бобирь В.Д. Застосування ІКТ при вивченні числових та степеневих рядів/ В.Д. Бобирь, В.В. Корольський// Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання: Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів і молодих учених (Чернігів, 27 листопада 2019 р.): матер. тез – Чернігів, 2019.

3. Бобирь В.Д. Реалізація дидактичного принципу наочності при вивченні числових рядів/ В.Д. Бобирь, А.М. Христюк, В.В. Корольський// Молоді вчені 2019 – від теорії до практики: X Міжнародна конференція молодих вчених (Дніпро, 7 березня 2019 р.): матер. тез. – Дніпро, 2019. – с.249-252.

4. Боголюбов А. Н. Математики. Механики. Биографический справочник / А.Н. Боголюбов — Киев: Наукова Думка, 1983. – 639 с.

5. Бугров Я.С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С.М. Никольский – 3-е изд. - М.: Наука, 1988. - 432 с.

6. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Генрих Вилейтнер ; пер. с нем. А. П. Юшкевич. – Москва : Гос. изд-тво физ-мат. лит-ры, 1960. – 469 с.

7. Виленкин Н.Я. Математический анализ / Н.Я. Виленкин, С.Н. Шварцбурд – Москва: Просвещение, 1969 г.

8. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.:Наука, 1977. – 872 с.

9. Глейзер Г.И. История математики в школе. Пособие для учителей / Г. И. Глейзер – М.: Просвещение, 1983. – 351 с.

10. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч.1 / М.О. Давидов – К.: Вища школа, 1979. - 384 с.

11. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. II./ П.Е.Данко, А.Г.Попов — М.: Высшая школа, 2003. – 416 с.

12. Дороговцев А.Я. Математический анализ: Справочное пособие / А.Я. Дороговцев - Киев: Вища школа, 1987. – 408 с.

13. Емелин А. Приближенное вычисление определенного интеграла с помощью разложения подынтегральной функции в ряд [Электронный ресурс] / А. Емелин. – Режим доступа: https://mathprofi.net/vychislenie_integrala_razlozheniem_v_ryad.html

14. Емелин А. Приближенные вычисления с помощью рядов [Электронный ресурс] / А. Емелин. – Режим доступа: https://mathprofi.net/priblizhennye_vychislenia_s_pomoshju_ryadov.html

15. Замятин В. Н. Числовые и функциональные ряды : учебно-методическое пособие / В. Н. Замятин, С. М. Шаова. – Майкоп : АГУ, 2010. – 69 с.

16. Застосування рядів до наближених обчислень / НПУ ім. М.П. Драгоманова. – Режим доступу: https://vuzlit.ru/838582/vikoristannya_stepenevih_ryadiv_rozvyazuvannya_rivnyan_poshuku_neyavnih_funktsiy_znahodzhennya_granits#54

17. Зельдович Я. Б. Элементы прикладной математики / Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис — М.: Наука, 1972. – 593 с.

18. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I / В.А. Зорич — М.: Фазис, 1997. — 568 с.

19. Зорич В. А. Математический анализ. Часть II / В.А. Зорич — М.: Фазис, 1984. — 640 с..

20. Зубова И.К. Теория рядов. Основные понятия в их историческом развитии: Методические указания / И.К. Зубова — Оренбург: ГОУ ОГУ, 2003. — 28 с.: ил.

21. Ильин В.А. Математичний аналіз. Т.1 / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл. Х. Сендов – М., 1979. – 662 с.

22. Камынин Л.И. Курс математического анализа. Т.1 / Л.И. Камынин - М.: Изд-во МГУ, 2001. - 423 с.

23. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії / В. В. Корольський. // Новітні комп'ютерні технології : наук.-метод. зб / редкол. : С. О. Семеріков [та ін.] . – Кривий Ріг, 2018. – Том XVI. – С. 59–66.

24. Корольський В. В. Числові ряди, які пов'язані з параметрами додекаедра / В. В. Корольський, С. С. Габ // Вісник міжнародного дослідницького центру «Людина : мова, культура, пізнання» : науковий журнал / за ред.. В. В. Корольського. – Кривий Ріг, 2018. – Том 42. – С. 39–45.

25. Корольський В.В. Математичний аналіз. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної / В.В. Корольський – Кр.Ріг, 2013. – 398 с.

26. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т. 1,2 / Л.Д. Кудрявцев - М.: Высшая школа, 1973. - 704 с.

27. Ляшко И.И. Справочное пособие по высшей математике. Т.2 : Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента. / И.И. Ляшко – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 224 с.

28. Ляшко И.И. Справочное пособие по математическому анализу / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай – Киев: Вища школа, 1978. – 672 с.

29. Марков Л.Н. Высшая математика. Ч.2: Основы математического анализа и элементы дифференциальных уравнений / Л.Н. Марков, Г.П. Размыслович - Мн.: Амалфея, 2003.-352 с.

30. Маркушевич А. И. Ряды / А.И. Маркушевич— М.: Гостехиздат, 1957. – 155 с.

31. Математический анализ. Ч. 1. / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, А.Ф. Колайда – Киев: Вища школа, 1983. – 680 с.

32. Никифоровский В.А. Путь к интегралу / В.А. Никифоровский - М.: Наука, 1985. — 192с

33. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 1. / С.М. Никольский – Москва: Наука, 1975 г. – 468 с.

34. Овчинников П.П. Вища математика. Ч. 1 / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко – Київ: Техніка, 2000. – 600 с.

35. Овчинников П.Ф. Высшая математика / П.Ф. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко – Киев: Вища школа, 1987. – 552 с.

36. Очан Ю.С. Математический анализ / Ю.С. Очан, В.Е. Шнейдер - Москва, 1961. – 884 с.

37. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов — М.: Физматлит, 1961. – 416 с.

38. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. Т.2 / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1985. – 560 с.

39. Рыбников К.А. История математики. Т.1 / К.А. Рыбников – Издательство Московского Университета, 1960. – 191 с.

40. Рыбников К.А. История математики. Т.2 / К.А. Рыбников - Издательство Московского Университета, 1963. – 336 с.

41. Самарский А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин - М.:Наука,1989. – 430 с

42. Тер-Крикоров А. М. Курс математического анализа / А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин - М.: Наука, 1988. – 816 с.

43. Толстов Г. П. Ряды Фурье / Г.П. Толстов — М.: Физматлит, 1960. – 392 с.

44. Толстов Г.П. Элементы математического анализа. Т. 1 / Г.П. Толстов. – Москва: Наука, 1974. - 520 с.

45. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2 / Г.М. Фихтенгольц — М.: Наука, 1970. – 810 с.

46. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. / Г.М. Фихтенгольц Москва: Физматлит, 1962 – 616 с.

47. Хорошилова Е.В. Определённый интеграл: теория и практика вычислений / Е.В. Хорошилова, И.В. Садовничая – М.: Издательский отдел факультета ВМик МГУ им. М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2008. – 528 с.

48. Шиманський І.Є. Математичний аналіз / І.Є. Шиманський – К.: Вища школа, 1972. – 632 с.

49. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Ч.1 / М.І. Шкіль – К.: Вища школа, 1978. – 384 с.

50. Шнейдер В. Е. Краткий курс высшей математики. Учеб. пособие для вузов / В.Е. Шнейдер - М., «Высш. школа», 1972. - 640 с.

51. Штокало И.З. История отечественной математики. Т. 2 / И.З. Штокало - Киев: Наукова думка, 1967. - 616 с.

52. Щипачев В. С. Сборник задач по высшей математике / В.С. Щипачев — М.: Высшая школа, 1994. – 304 с.

53. Щоголєв С.А. Теорія рядів: навчально-методичний посібник / С. А. Щоголєв. – Одеса: «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2015. – 76 с.

54. Юшкевич А.П. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т.3 : Математика XVIII столетия / А.П. Юшкевич – М: Наука, 1972. - 496 с.

55. Юшкевич А.П. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т.1 : С древнейших времен до начала Нового времени / А.П. Юшкевич – М: Наука, 1970. - 352 с.

56. Юшкевич А.П. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т.2 : Математика XVII столетия / А.П. Юшкевич – М: Наука, 1970. - 301 с.

57. Юшкевич А.П. Хрестоматия по истории математики / А.П. Юшкевич – М.: Просвещение, 1977. – 224 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Приклади задач для практичних занять з математичного аналізу на наближене обчислення нескінченних сум під час вивчення розділу «Числові ряди».

Задача А.1. Обчислити суми:

1. $1 + 2 \cdot 0.04 + 3 \cdot (0.04)^2 + \cdots + n \cdot (0.04)^{n-1} + \cdots$
2. $1 + 2 \cdot 0.035 + 3 \cdot (0.035)^2 + \cdots + n \cdot (0.035)^{n-1} + \cdots$
3. $1 + 2 \cdot 0.8 + 3 \cdot (0.08)^2 + \cdots + n \cdot (0.08)^{n-1} + \cdots$
4. $1 + 2 \cdot 0.0016 + 3 \cdot (0.0016)^2 + \cdots + n \cdot (0.0016)^{n-1} + \cdots$
5. $1 + 2 \cdot 0.009 + 3 \cdot (0.009)^2 + \cdots + n \cdot (0.009)^{n-1} + \cdots$
6. $0.5 + \frac{(0.5)^2}{2} + \frac{(0.5)^2}{3} + \cdots + \frac{(0.5)^n}{n} + \cdots$
7. $0.44 + \frac{(0.44)^2}{2} + \frac{(0.44)^2}{3} + \cdots + \frac{(0.44)^n}{n} + \cdots$
8. $2.4 + \frac{(2.4)^2}{2} + \frac{(2.4)^2}{3} + \cdots + \frac{(2.4)^n}{n} + \cdots$
9. $0.75 + \frac{(0.75)^2}{2} + \frac{(0.75)^2}{3} + \cdots + \frac{(0.75)^n}{n} + \cdots$
10. $1.35 + \frac{(1.35)^2}{2} + \frac{(1.35)^2}{3} + \cdots + \frac{(1.35)^n}{n} + \cdots$
11. $\ln 5 + \frac{\ln^2 5}{2} + \frac{\ln^3 5}{3} + \cdots + \frac{\ln^n 5}{n} + \cdots$
12. $\ln 3 + \frac{\ln^2 3}{2} + \frac{\ln^3 3}{3} + \cdots + \frac{\ln^n 3}{n} + \cdots$
13. $1 + 2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} + 3 \cdot \sin^2\frac{\pi}{3} + \cdots + n \cdot \sin^{n-1}\frac{\pi}{3} + \cdots$
14. $1 + 2 \cdot \frac{1}{e} + 3 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^2 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} + \cdots$
15. $1 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} + \cdots$
16. $1 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} + 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{n-1} + \cdots$
17. $\frac{1}{e} + \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^3}{3} + \cdots + \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n}{n} + \cdots$

18. $$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{3}+\cdots+\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{n}+\cdots$$

19. $$\frac{1}{\sqrt{2}e}+\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}e}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}e}\right)^3}{3}+\cdots+\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}e}\right)^n}{n}+\cdots$$

20. $$\frac{1}{\ln 3}+\frac{(\ln 3)^2}{2}+\frac{(\ln 3)^3}{3}+\cdots+\frac{(\ln 3)^n}{n}+\cdots$$

Додаток Б

Приклади задач для практичних занять з математичного аналізу на наближене обчислення визначених інтегралів під час вивчення розділу «Числові ряди».

Задача Б.1. Обчислити визначений інтеграл:

1. $\int_1^4 \frac{arctgx^3}{x} dx$
2. $\int_0^2 e^{-x^2} dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx$
4. $\int_1^2 \frac{arctgx^2}{x} dx$
5. $\int_3^5 e^{-x^2} dx$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{x} dx$
8. $\int_0^5 \frac{arctgx^3}{x} dx$
9. $\int_0^2 \frac{e^{-x^2}}{x} dx$
10. $\int_0^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin x}{2x} dx$
11. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\sin x}{x^2} dx$
12. $\int_3^6 \frac{arctgx^2}{x} dx$
13. $\int_5^7 e^{-\frac{x^3}{x}} dx$
14. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$
15. $\int_0^2 \frac{1+e}{x} dx$
16. $\int_5^6 \frac{arctgx^3}{x} dx$

17. $\int_{3}^{5} \frac{e^{-x^2}}{x} dx$

18. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{2x} dx$

19. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{sinx}}{3x} dx$

20. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{sinx}}{5x} dx$

Додаток В

Приклади задач для практичних занять з математичного аналізу на наближене обчислення трансцендентних функцій під час вивчення розділу «Числові ряди».

Задача В.1. Обчислити наближено функцію:

1. $\sin 50^\circ$
2. $\ln(1.68)$
3. $\arcsin\left(\frac{2}{15}\right)$
4. $\cos 85^\circ$
5. $\ln(0.45)$
6. $\arccos\left(\frac{6}{25}\right)$
7. $1+\ln(1.8)$
8. $1+\frac{\cos 44^\circ}{2}$
9. $\frac{2}{5}-\arcsin\left(\frac{2}{5}\right)$
10. $2\ln(1.4)-\frac{\cos 80^\circ}{5}$
11. $3\arccos\left(\frac{10}{16}\right)+2$
12. $\arcsin\left(\frac{2}{15}\right)-\arccos\left(\frac{2}{18}\right)$
13. $\frac{\ln(1.5)+\ln(1.9)}{7}$
14. $\frac{5\arccos\left(\frac{15}{19}\right)+3}{4}$
15. $\frac{5\cos 47^\circ}{6}+44$
16. $18+\ln(1.8)-2\sin 66^\circ$
17. $20-\ln(1.035)-\frac{\cos 58^\circ}{5}$
18. $\ln(1.0012)-2\arcsin(0.35)$
19. $\frac{10}{21}+\frac{\ln(1.8)}{8}+2\sin 65^\circ$

20. $\frac{12}{11} + \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) - 2\cos 15° + \ln(1.11)$

21. $\left(1 + \frac{\cos 22°}{3}\right)^3$

22. $\left(2 + \frac{\sin 27°}{3}\right)^3$

23. $\left(3 + \frac{\sin 78°}{5}\right)^2 + \arcsin\left(\frac{6}{11}\right)$

Додаток Г

Приклади задач для практичних занять з математичного аналізу на наближене обчислення ірраціональних чисел під час вивчення розділу «Числові ряди».

Задача Г.1. Обчислити наближено функцію:

1. $\sqrt[3]{63}$
2. $\sqrt{1.125}$
3. $\sqrt[5]{226}$
4. $1+\sqrt[3]{111}$
5. $\frac{2}{5}\cdot\sqrt[4]{35}$
6. $\frac{2}{9}\cdot\sqrt[4]{33}+1$
7. $e^{0.2}$
8. $e^{\frac{1}{3}}$
9. $\frac{1}{5}e^{0.6}+2$
10. $\left(\frac{2}{3}e^{0.6}+4\right)^2$
11. $\left(\frac{3}{7}e^{0.5}+2\right)^2-e$
12. $\frac{1}{2\sqrt{1.4}}$
13. $3\cdot e^{\frac{2}{3}}$
14. $\frac{5}{4\cdot e^{0.6}+2}$
15. $\sqrt{1.8}+e^{0.9}$
16. $\sqrt{1.7}+2e^{\frac{2}{3}}$
17. $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{0.45}+e$
18. $\frac{5\sqrt{1.3}+4.5}{3}$

19. $\frac{4\sqrt{1.575}+6.5}{3}+e^{0.8}$

20. $\left(\sqrt[3]{132}+\frac{2}{5}e^{0.5}\right)^2$

21. $\left(\sqrt[3]{268}+\frac{4}{11}e^{0.1}\right)^2$

22. $\left(\frac{4\sqrt{1.075}+8}{11}\right)^2+e^{0.25}$

23. $\left(\frac{7\sqrt{1.07}+5}{17}\right)^3-e^{0.33}-\frac{\sqrt[3]{363}}{9}$