МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри
________ В.В. Корольський
«___» _____________2018 р.

Реєстраційний № _______
«___» ____________ 2018р.

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ТЕМИ «ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ» НА ПОГЛИБЛЕНОМУ РІВНІ В КУРСІ АЛГЕБРИ ТА ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм-13
ступінь вищої освіти магістр
спеціальності: 014.04 середня освіта
(математика)
Єременко Оксани Олександрівни
Керівник:
кандидат пед. наук, ст. викладач
Дереза Ірина Сергіївна
Оцінка:
Національна шкала__________________
Шкала ECTS____ Кількість балів ______
Голова ЕК________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Члени ЕК ________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2018

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасний період розвитку суспільства характеризується стрімким прогресом наукового знання, швидкою зміною технічних ідей, математизацією не тільки науки, а й більшості практичних видів діяльності людини, всебічним застосуванням точних математичних методів в найрізноманітніших областях. Математика пропонує загальні та досить чіткі моделі для вивчення навколишньої дійсності. Роль математичних моделей, що описують взаємозв'язок кількісних характеристик різних явищ і процесів, зросла у зв'язку з широкими можливостями використання комп'ютерної обробки даних. Також математичні знання досить часто використовуються в повсякденній практиці, при чому не тільки прості математичні розрахунки, а й елементи вищої математики, аналізу, теорії ймовірності. Таким чином, все більш широкий спектр математичних знань стає сьогодні обов'язковим елементом загальної культури сучасної людини.

Роль математики, яка повсякчас зростає, підіймає її значення як навчального предмета в загальноосвітній школі і висуває перед нею завдання виховувати людей, які здатні оперувати не тільки готовими знаннями, а і вміють орієнтуватися в зростаючому потоці наукової інформації, які володіють загальними ідеями і методами, що дозволяють охопити з загальної точки зору різноманітні факти і явища. Тому одним із завдань сучасної школи є підвищення рівня математичної культури та математичного розвитку школярів.

Однією з тем шкільного курсу математики, яка вивчається учнями в 11 класі є тема «Інтеграл та його застосування». Інтеграл з'явився в школі внаслідок реформи шкільної математичної освіти кінця 60-х початку 70-х років XX століття, саме тоді почали вводити в школі елементи математичного аналізу. Багато науковців, зокрема Г. Бевз [13], Т. Іванова [30], А. Колмогоров [55], Л. Кудрявцев [57], А. Маркушевич [67], Н. Фьодорова [89], підкреслювали, що ознайомлення учнів з поняттями і методами математичного аналізу навіть на рівні загальних уявлень має для них велике пізнавальне, розвивальне, загальнокультурне значення.

Така точка зору не втратила своєї актуальності і на сьогодні. Специфіка міркувань, властивих математичному аналізу, сприяє формуванню уявлень про математику як науку, що розвивається. Сприяє формуванню мислення, яке необхідне в даний час кожній освіченій людині, і відповідає соціальним вимогам концепції модернізації освіти, яка полягає в орієнтації не тільки на засвоєння учнями певних знань, а й на розвиток пізнавальних і творчих здібностей, успішної соціалізації в суспільстві.

Питання змісту та методики навчання теми «Інтеграл та його застосування» є об'єктом дослідження, починаючи з моменту введення цієї теми в програму загальноосвітньої школи з математики. Цьому присвячені роботи І. Бавріна [10], Н. Віленкіна [19], В. Ветрова [17], Е. Гераскина [24], М. Гальцкий [22], Г. Дорофєєва [36], А. Колмогорова [55], Л. Кудрявцева [57], А. Маркушевича [60], А. Мерзляка [1], А. Мордковича [67], Є. Неліна [68], Н. Оваєсова [70], В. Цукермана [95].

Формування навичок знаходити первісну та інтеграли є важливим аспектом при вивченні алгебри і початків аналізу, оскільки більшість учнів складають зовнішнє незалежне оцінювання з математики, в якому широко представлені завдання з даної теми. В класах з поглибленим вивченням математики зазвичай здібні діти, мотивовані до вивчення математики, але в них також виникають труднощі при вивченні цієї теми, оскільки високий рівень абстракції понять, складна логічна структура їх означень, недостатність часу для осмислення складних питань та багато іншого. В результаті це призводить до того, що знання учнів з теми носять формальний характер, відсутня структура знань. В них не складається цілісного уявлення про поняття інтеграла. Отже, актуальною на сьогодні є проблема визначення і обґрунтування можливостей удосконалення методики вивчення інтегралів у курсі алгебри і початків аналізу в класах з поглибленим вивченням математики.

Все вищезазначене і обґрунтовує вибір теми кваліфікаційної роботи та визначає її актуальність.

Мета дослідження: розробити методику компетентнісно-орієнтованого навчання теми «Інтеграл та його застосування» на поглибленому рівні в курсі алгебри та початків аналізу.

Мета реалізується в завданнях дослідження:

1. Проаналізувати навчальні програми, державні стандарти та підручники з теми дослідження для розкриття теоретичних та методичних основ компетентнісного підходу до навчання алгебри та початків аналізу.
2. Виконати логіко-математичний аналіз теми з позиції формування математичної компетентності.
3. Розробити систему рівневих завдань, орієнтованих на формування предметної математичної компетентності старшокласників при вивченні теми «Інтеграл та його застосування».
4. Розробити методичні рекомендації по впровадженню компетентнісного підходу у навчанні теми «Інтеграл та його застосування».

Об'єкт дослідження: процес навчання алгебри і початків аналізу на поглибленому рівні в загальноосвітніх школах.

Предмет дослідження: методика вивчення теми «Інтеграл та його застосування» в класах з поглибленим вивченням математики.

Методи дослідження:

– теоретичні: аналіз психолого-педагогічної, навчально-методичної літератури, змісту навчальних програм підручників і посібників з курсу «Алгебри і початків аналізу» для поглибленого рівня;

– емпіричні: цілеспрямовані педагогічні спостереження за процесом вивчення теми «Інтеграл та його застосування» в загальноосвітніх школах.

Практичне значення дослідження: створено навчально-методичне забезпечення для поглибленого рівня вивчення математики в старшій школі з теми «Інтеграл та його застосування», яке суттєво доповнює навчальні матеріали діючих підручників і може безпосередньо використовуватися як студентами, так і вчителями математики.

Апробація дослідження:

1. Участь у Всеукраїнській студентській науково-практичній конференції «Історія науки-майбутньому вчителеві 2018» з публікацією тез «Із історії розвитку інтегрального числення» м. Умань, 19-20 квітня.
2. Участь у Всеукраїнській студентській науковій інтернет-конференції «Сучасні інформаційні технології в освіті і науці» з публікацією тез «Використання інтерактивного середовища GeoGebra для знаходження площ криволінійних трапецій» м. Умань, 29-30 березня.
3. Публікація статті «Використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні учнів старшої школи алгебри і початків аналізу» в Віснику міжнародного дослідницького центру «Людина: мова, культура, пізнання» м. Кривий Ріг.
4. Публікація статті «Формування математичної компетентності учнів старшої школи у процесі вивчення алгебри і початків аналізу» в збірнику наукових праць Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка «Наукові записки молодих учених» м. Кропивницький.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містять 100 найменувань та додатків. Основний текст викладено на 91 сторінці. Повний обсяг роботи 147 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ»

1.1. Становлення та розвиток поняття «інтеграл» в математиці

При вивченні алгебри та початків аналізу, учні починають вивчати елементи математичного аналізу, у якому більшість фундаментальних математичних понять є дуже важливими. Інтеграл також не є виключенням, оскільки ним пронизана вся історія виникнення математики, починаючи від 1800-х років до н.е. та до сьогодення. Саме тому, для кращого опанування цим поняттям треба дослідити його історію та розвиток.

Початок інтегральних методів простежуються в працях Архімеда. В книгах з історії математики відповідні розділи так і називаються – «Інтегральні методи Архімеда» [18], хоча відкриття інтегрального числення, час, коли вперше було вимовлено слово «інтеграл», відокремлює від робіт Архімеда величезний часовий інтервал в 2000 років. За цей період математика повинна була пройти довгий шлях, на якому була створена буквена символіка, побудовано вчення про функціональні залежності, розроблено аналітичний апарат для їх вираження.

Історики – математики вважають, що напрям в математиці, який створив математичний аналіз, пішов від Евдокса (406 – 355 рр. до н. е.), розроблена ним теорія відносин і «метод вичерпування» зіграли істотну роль в побудові грецької математики.

«Метод вичерпування» Евдокса, який отримав таку назву в XVII столітті, вважається першим варіантом теорії границь.

За допомогою свого методу Евдокс строго довів наступні теореми:

1) площі двох кіл відносяться, як квадрати їх діаметрів;

2) об’єм піраміди дорівнює $\frac{1}{3}$ об’єму призми з тією ж основою і висотою;

3) об’єм конуса дорівнює $\frac{1}{3}$ об’єму циліндра з тією ж основою і висотою.

«Метод вичерпування» Евдокса був вдосконалений Архімедом і успішно використовувався ним при доведенні багатьох теорем. Архімед зумів за допомогою цього методу знайти ряд нових площ і об'ємів.

Для знаходження площ і об'ємів геометричних фігур Архімед використовував методи, які схожі до обчислень геометричних сум. Наприклад, щоб знайти об'єм тіла обертання, зокрема сфероїда, Архімед розбив його на n шарів рівної товщини. Далі розглядав суми об'ємів циліндрів, описаних навколо кожного з цих шарів і вписаних в них, показував, що різниця цих сум при збільшенні n стає як завгодно малою. Нарешті, знаходив об'єм тіла, що розглядається як спільна границя цих сум. У такий спосіб Архімед розв'язував багато задач, які тепер розв'язуються за допомогою інтегралів [18].

Таким чином, вже антична математика містила елементи інтегрування, зокрема побудову верхніх і нижніх інтегральних сум. Метод інтегральних сум давніх греків спирався на інтуїтивне, строго не визначене поняття площі нескінченної суми, а тому застосовувався для кожної конкретної задачі без виділення теоретичних основ.

Німецький астроном і математик Й. Кеплер, використовуючи ідеї Архімеда, ще більше звертався до інтуїтивних прийомів і зовсім не обґрунтовував їх. Щоб обчислити площу деякої фігури, він розбив її на нескінченну множину нескінченно малих елементів однією з нею розмірності. З цих елементів утворював нову фігуру, площу якої вже вмів обчислювати. Цей метод Й. Кеплер застосував і до обчислення об'ємів тіл [18].

Наступним етапом у становленні інтегральних методів була творчість Б. Кавальєрі (1598 – 1647). На відміну від Й. Кеплера, Б. Кавальєрі шукав загальний принцип, на основі якого можна було б вирішувати різні обчислювальні завдання.

Основним поняттям геометрії Б. Кавальєрі служать «неподільні». Наприклад, якщо при розгляді кінцевої плоскої фігури ділити її паралельними прямими на смужки, граничним становищем яких стануть відрізки прямих, то вони і є «неподільними». Таким чином, «неподільними» лініями, що мають один вимір, будуть об’єкти нульового виміру – точки; «неподільними» плоскими фігурами (два виміри) – відрізки прямих; «неподільними» просторовими фігурами (три виміри) – частини площин.

Прихильником методу «неподільних» був Еванджеліста Торрічеллі (1608 – 1647). Він істотно удосконалив метод Й. Кеплера. Це удосконалення полягало в тому, що Торрічеллі поряд з прямолінійними «неподільними» більш часто для плоских фігур застосовував дуги кривих, а для тіл ввів викривлені поверхні. Визначним досягненням Е. Торрічеллі в застосуванні методу «неподільних» було обчислення об’єму тіла, що тягнеться в нескінченність, яке він назвав «гострим гіперболоїдом».

Можна відзначити ще кілька досягнень Е. Торрічеллі, пов’язаних з поняттям інтеграла. Він розробив кінематичний спосіб побудови дотичних до кривих для випадку прискореного руху довів, що ордината графіка швидкості руху пропорційна тангенсу кута, утвореного дотичною до графіка пройденого шляху, з віссю абсцис. Це означає, що в окремому випадку прискореного руху встановлена взаємно обернена операція диференціювання та інтегрування.

У трактуванні «неподільних» Е. Торрічеллі не дотримався поглядів Б. Кавальєрі: він вважав, що неподільні мають ту ж розмірність, що і геометричний об’єкт. Цим він зробив значний крок вперед до інтегральних сум [18, с. 68].

Розвиток науки в XVI і XVII століттях вилився в наукову революцію. Вона характеризується створенням основи сучасного наукового природознавства і вдосконаленням математики як його робочого апарату. Про це писав Луї де Броль: «... в міру того як вчені XVII століття, безперервно і свідомо застосовуючи спостереження і експериментальний метод, почали осягати основні закони механіки, астрономії і деяких частин фізики, вони майже неминуче були змушені розвивати методи міркування і розрахунку, які підводили їх до аналізу нескінченно малих » [18, с. 72].

Одним з великих математиків цього часу є П'єр Ферма (1601 – 1665). Він зробив величезний внесок у розвиток багатьох областей математики. Не залишив без уваги й інтегральне числення.

П. Ферма користувався поняттям «квадратура». Під нею він розумів площу фігури, обмеженої віссю $0x$, графіком функції $f(x)$ і прямими $x = a$ і $x = b$ (саме таку фігуру при вивченні визначених інтегралів називають криволінійною трапецією).

Значний внесок у розвиток інтегральних методів вніс Б. Паскаль (1623 – 1662). Міркуючи, Б. Паскаль приходить до обчислення інтегралів від степеневих функцій при натуральних значеннях n: $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. Результат не був новим, його знали Б. Кавальєрі, П. Ферма, однак у Б. Паскаля виступають важливі особливості: він веде мову про інтегральні суми і формулює правило переходу від сум з кінцевим числом доданків до сум, число доданків яких нескінченно зростає, – правило відкидання величин вищого порядку малості [69].

Отже, перші кроки в розвитку ідеї інтеграла були пов'язані з розв'язанням частинних задач – обчисленням площ, об'ємів, визначенням центрів тяжіння плоских фігур і тіл, що і збігалося по суті зі знаходженням інтегралів. В результаті зусиль математиків, поняття «інтеграл» в незвичній для нас формі вже виникло. Але обчислювальний алгоритм, що дозволяє систематизувати формальні операції обчислення, ще не був створений.

Вирішальний етап в побудові поняття інтеграла, розвитку всієї математики та наукового природознавства пов'язаний з іменами І. Ньютона (1643 – 1727) і Г. Лейбніца (1646 – 1716).

Основні ідеї аналізу виникли у І. Ньютона в 60-і роки XVII століття. Математика для І. Ньютона не виступала як абстрактний продукт людського розуму. Він вважав, що геометричні образи – лінії, поверхні, тіла виходять в результаті руху. Ці рухи здійснюються в часі, і за скільки завгодно малий час точка, наприклад, пройде як завгодно малий шлях. Для знаходження миттєвої швидкості необхідно знайти границю відношення приросту шляху, за сучасною термінологією, до приросту часу. Так І. Ньютон ввів відшукання флюксій – похідних.

Використання теореми про взаємнообернену операцію диференціювання і інтегрування та знання похідних багатьох функцій дали І. Ньютону можливість по флюксіям отримувати флюєнти (функції), тобто інтегрувати. Якщо інтеграли безпосередньо не обчислювалися, І. Ньютон розкладав підінтегральну функцію в степеневий ряд та інтегрував його почленно. Для розкладання функцій в ряди він найчастіше користувався відкритим ним розкладанням степеня бінома, діленням чисельника на знаменник, знаходженням кореня.

У «Метод флюксій» І. Ньютон помістив дві таблиці невизначених інтегралів; в одній з них містяться інтеграли, що виражаються алгебраїчно в кінцевому вигляді, в іншій – інтеграли, які представлено через відомі.

Цікавою є розробка Г. Лейбніцем символіки інтегрального числення. Її можна простежити за рукописами. Так, 26 жовтня 1675 Г. Лейбніц виражав квадратуру в дусі Б. Паскаля словами omn.w (всі ординати); 29 жовтня помітив, що зручніше писати замість omn.l вираз $\int l$ (сума ліній, знак інтеграла походить від першої літери слова summa), і вказав, що тут виникає новий рід обчислення. Інтеграл Г. Лейбніц розумів як суму нескінченного числа доданків – визначений інтеграл. В одному з рукописів є запис $d\int x = x$. Це означає, що взаємообернені дії диференціювання і інтегрування у Г. Лейбніца виступали на оперативному рівні. Г. Лейбніц замість слова «інтеграл» вживав «сума»; термін «інтеграл» ввів І. Бернуллі [69, с. 112].

Таким чином, відкриття І. Ньютона і Г. Лейбніца вчинили переворот в математиці. Якщо раніше вона була доступна лише вузькому колу спеціалістів, які розв’язують кожну окрему задачу придуманими ними методами, то після створення алгоритму диференціального і інтегрального числення, що застосовується до широкого кола завдань, математика стала інструментом в руках людей, що займаються різними дослідженнями, але не володіють досить глибокими математичними даними.

Найближчими помічниками Г. Лейбніца в розвитку аналізу і інших напрямів математики стали брати Якоб (1654 – 1705) та Іоган (1667 – 1748) Бернуллі.

У творчості Якоба Бернуллі розвиток ідеї інтеграла зазнав істотних якісних змін: формувалося інтегральне числення як метод. І. Бернуллі обчислив багато невизначених інтегралів, керуючись тим, що інтегрування є операцією, зворотною до диференціювання.

Не зважаючи на стрімкий розвиток використання формули $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, вчені зіштовхнулись с деякими проблемами. Обчислення деяких інтегралів по формулі Ньютона-Лейбніца містило в собі деякі парадокси. Першим звернув на це увагу Д'Аламбер в 1768 році – помітив, що формулою Ньютона-Лейбніца не можна користуватися при обчисленні інтегралів виду $\int_a^b \frac{dx}{x^m}$, коли підінтегральна функція на проміжку інтегрування перетворюється в нескінченність. Альтернативний спосіб вирішення цієї проблеми запропонував Луї Коші. Невизначений інтеграл Л. Коші ввів як частинний випадок визначеного, при змінній верхній межі. Він довів неперервність такого інтеграла по верхній межі і теорему про те, що похідна його по верхній межі рівна підінтегральній функції. Л. Коші довів також справедливість формули Ньютона-Лейбніца [18?, с. 113]. Незважаючи на те, що деякі із зазначених властивостей застосовувалися математиками раніше, формулу Ньютона – Лейбніца обґрунтували С. Лакруа (1765 – 1843) і Б. Пуассон (1781 – 1840) заслуга Л. Коші в тому, що він сформулював і довів їх для широкого класу неперервних функцій і побудував систему.

Г. Дарбу (1842 –1917) побудував інтегральні суми, що носять його ім'я. За допомогою цих сум, умову існування певного інтеграла було сформовано по-іншому.

Останнє відкриття, яке передувало створенню математичного аналізу, зробив І. Барроу, він встановив зв'язок між двома важливими задачами: обчислення площі і проведення дотичної. На сьогоднішній день залежність, встановлена І. Барроу, є змістом основної теореми математичного аналізу, саме вона дозволяє обчислювати інтеграли за допомогою знаходження первісної, тобто використовувати операцію, обернену до диференціювання [69, с. 180].

Дослідження інтеграла після цього не припинялися, вони пішли все більш зростаючими темпами. Для подальших узагальнень інтеграла всередині самої математики повинні були дозріти умови, що допускають це. Такі умови створила розроблена в кінці XIX – початку XX століття теорія множин з важливим поняттям міри множини. Виникло нове поняття – інтеграл А. Лебега, узагальнюючий інтеграл Б. Рімана. А. Лебег (1875 – 1941) ввів дескриптивне означення інтеграла: сформулював його властивості, які не містять вказівок на побудову. Він дав також конструктивне означення інтегралу – аналітичне та геометричне. Роботи А. Лебега послужили значним імпульсом для подальших досліджень в математиці.

У 1912 році з'явилося узагальнення інтеграла А. Лебега – інтеграл А. Данжуа (1884 – 1973), що викликав новий потік досліджень. У 1930 році А. Колмогоров (1903 – 1987) опублікував роботу, в якій охоплені всі інтеграли як границі різних інтегральних сум. Інтеграл А. Колмогорова знайшов застосування в математичній фізиці, при обґрунтуванні квантової механіки [47].

Важливо відзначити, що на всіх етапах виникнення, становлення і перетворення ідеї інтеграла в строгу і розвинену математичну теорію безпосередньо наукова, математична складова тісно перепліталася з прикладними потребами і навичками, що сприяло розвитку різних підходів до введення поняття інтеграла. Це необхідно враховувати при введенні поняття інтеграла.

1.2. Логіко-математичний аналіз теми «Інтеграл та його застосування»

На вивчення теми «Інтеграл та його застосування» у класах з поглибленим вивченням математики відводиться 30 годин (календарне планування з даної теми представлене у додатку А) і по закінченню теми за державними вимогами учні повинні вміти:

- *формулювати* означення первісної і невизначеного інтеграла та їх основні властивості; властивості визначеного інтегралу;
- *описувати* поняття визначеного інтегралу;
- *знаходити* первісні та визначений інтеграл за допомогою правил знаходження первісних та перетворень;
- *застосовувати* визначений інтеграл до розв'язування геометричних задач.

Логічний аналіз теми зводиться до встановлення логічної організації навчального матеріалу в темі, з'ясування, які твердження доводяться, які вводяться як факти, визначення рівня логічної строгості доведень, методів використаних для доведень, виділення нових теоретичних тверджень, які вводяться при розв'язання математичних завдань [80].

Математичний аналіз теми зводиться до з'ясування основної математичної ідеї теми, з'ясування математичних обґрунтувань виконуваних перетворень, досліджень, доведень, осмислення застосованих у темі математичних прийомів і методів.

Результатом виконання логіко-математичного аналізу є визначення основного матеріалу теми, логічної строгості його вивчення і математичних методів та прийомів вивчення цього матеріалу.

Виконаємо логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу; формулювань означень нових понять; аналіз форми, виду та способу доведення математичного твердження; орієнтовну будову системи вправ для введення нового поняття; структуру формулювання математичного твердження за підручником для класів з поглибленим вивченням математики «Алгебра 11 клас» А. Мерзляк, В. Полонський, М. Якір.

Таблиця 1.1

Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу теми «Інтеграл та його застосування»

Поняття	Факти	Способи діяльності
1.Первісна 2.Невизначений інтеграл 3.Криволінійна трапеція 4. Визначений інтеграл	1. Основна властивість первісної 2. Теорема про суму первісних 3. Теорема про первісну від добутку функції і константи 4. Теорема про первісну від складеної функції 5. Теорема про площу криволінійної трапеції	• Знаходження первісних • Знаходження невизначених інтегралів • Знаходження площ плоских фігур • Знаходження об'ємів тіл • Розв'язання практичних задач

Таблиця 1.2

Логіко-математичний аналіз формулювань означень нових понять теми «Інтеграл та його застосування»

Поняття	Формулювання означень	Вид означення, характеристичні властивості
1.Первісна	Функцію F(x) називають первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо для всіх x із цього проміжку $F\,'$(x) $= f(x)$.	*Вид:* через найближчий рід і видові ознаки. *Рід:* функція. *В-ть:* визначена на деякому проміжку і для всіх x із цього проміжку $F\,'$ (x) $= f(x)$.
2.Невизначений інтеграл	Сукупність усіх первісних функції $y = f(x)$ на проміжку I називається невизначеним інтегралом і позначається $\int f(x)dx$.	*Вид:* через найближчий рід і видові ознаки. *Рід:* первісна. *В-ть:* сукупність первісних на проміжку *I*.
3.Криволінійна трапеція	Фігуру, яка обмежена графіком функції $f(x)$ і прямими $y = 0,\ x = a,\ x = b$ називають криволінійною трапецією.	*Вид:* через найближчий рід і видові ознаки. *Рід:* фігура. *В-ть:* обмежена графіком функції і прямими.

Продовження таблиці 1.2

4.Визначений інтеграл	Нехай задано неперервну функцію $y = f(x)$, визначену на проміжку $[a; b]$. Тоді визначеним інтегралом від a до b функції $f(x)$ називають приріст первісної $F(\mathrm{x})$ для цієї функції. Позн. $\int_a^b f(x)dx$.	*Вид*: конструктивне означення.

Таблиця 1.3

Орієнтовна будова системи вправ для введення нового поняття

Види вправ	**Номери з підручника**			
	Первісна	***Криволінійна трапеція***	***Невизначений інтеграл***	***Визначений інтеграл***
1.Вправи для створення мотивації для введення нового поняття.	—	—	—	—
2.Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань і умінь.	—	—	—	—
3.Вправи спрямовані на виділення суттєвих властивостей та на побудову об'єктів, які мають ці властивості.	№26.1,№26.6	—	—	—
4.Вправи на базі яких відбувається ілюстрація поняття, що вводиться.	№26.2,№26.17 №26.18	№28.1,№28.2	—	№28.3,№28.4

Продовження таблиці 1.3

5.Вправи для забезпечення. розпізнавання об'єктів, що входять до обсягу нового поняття.	№26.2	—	№26.6	№28.7
6.Вправи спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння тексту задачі.	№26.4,№26.5, №26.12–26.15 №26.23	№28.5,№28.10 №28.6,№28.11 №28.22	—	№28.8,№28.20 №28.9,№28.21

Таблиця 1.4

Логіко-математичний аналіз системи вправ підручника призначених для формулювання способів діяльності

Способи діяльності	**Відпрацювання операцій, які формують спосіб діяльності**	**Відпрацювання операцій, які входять у спосіб діяльності**	**Застосування способу діяльності (різні рівні)**
Знаходження первісних	№26.8 – 26.11 №27.1 – 27.6	№27.7 – 27.10 №27.12, №27,14 №27.17 – 27.25	№27.11, №27.12 №28.14, №27.26
Знаходження площі плоских фігур	№28.1, №28.2 №28.5 – 28.7	№28.10, №28.12 №28.14 – 28.17 №28.22 – 28.25	№28.26, №28.27
Обчислення об'ємів тіл	№29.1, №29.2	—	№29.3 – 29.5
Обчислення невизначеного інтегралу	№26.19, №26.20 №27.15, №27.16	—	—
Обчислення визначеного інтегралу	№28.3, №28.4, №28.8 №28.9	№28.20, №28.21 №28.35 – 28.38	№28.13, №28.18 №28.19, №28.42 №28.28 – 28.40 №28.43

Таким чином, проаналізувавши завдання підручника з даної теми (таблиця 1.3, таблиця 1.4), ми бачимо, що є велика кількість завдань на відпрацювання навичок обчислення визначеного інтегралу, знаходження первісної та знаходження площ плоских фігур, завдання різноманітні за рівнем складності та за дидактичними цілями. Проте, зовсім немає вправ на актуалізацію та повторення базових знань та умінь, а також вправ для створення мотивації введення нового поняття. Також в учнів можуть виникати труднощі при обчисленні невизначених інтегралів та при знаходженні об'ємів тіл, оскільки в підручнику не достатня кількість завдань на відпрацювання таких навичок. Зважаючи на це, потрібно доповнити систему завдань, для того, щоб удосконалити ці навички.

Схема – орієнтир проведеного логіко-математичного аналізу структури формулювання математичного твердження

Таблиця 1.5.1

Основна властивість первісної

Етапи проведення аналізу	Результати
1.Формулювання твердження	Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку I та C – довільне число, то функція $y = F(x) + C$ також є первісною функції $f(x)$ на проміжку I.
2.Встановлення виду твердження	Складне твердження.
3.Виділення роз'яснювальної частини	Множина функцій.
4.Виділення умови	Функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку I та C – довільне число.
5.Виділення вимоги	Функція $y = F(x) + C$ також є первісною функції f на проміжку I.
6.Формулювання твердження рівносильного даному	Кожна з первісних для функції $f(x)$ на заданому проміжку має вид $F(x) + C$, де $F(x)$ – одна з цих первісних, $C = const$.

Таблиця 1.5.2

Теорема про суму первісних

Етапи проведення аналізу	Результати
1.Формулювання твердження	Якщо функції $F(x)$ і $G(x)$ є відповідно первісними функцій $f(x)$ і $g(x)$ на проміжку I, то на цьому проміжку функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$.
2.Встановлення виду твердження	Складне твердження.
3.Виділення роз'яснювальної частини	Множина функцій.
4.Виділення умови	Функції $F(x)$ і $G(x)$ є відповідно первісними функцій $f(x)$ і $g(x)$ на проміжку *I*.
5.Виділення вимоги	На проміжку функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$.
6.Формулювання твердження рівносильного даному	Функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$, коли функції $F(x)$ і $G(x)$ є відповідно первісними функцій $f(x)$ і $g(x)$ на проміжку *I*.

Таблиця 1.5.3

Теорема про первісну від добутку функції і константи

Етапи проведення аналізу	Результати
1.Формулювання твердження	Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку I та k – деяке число, то на цьому проміжку функція $y = k \cdot F(x)$ є первісною функції $y = k \cdot f(x)$.
2.Встановлення виду твердження	Складне твердження.
3.Виділення роз'яснювальної частини	Множина функцій і чисел.
4.Виділення умови	Функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку I та k – деяке число.
5.Виділення вимоги	На проміжку I функція $y = k \cdot F(x)$ є первісною функції $y = k \cdot f(x)$.

Продовження таблиці 1.5.3

6.Формулювання твердження рівносильного даному	Число k – деяке число, функція $y = k \cdot F(x)$ є первісною функції $y = k \cdot f(x)$, коли функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку I

Таблиця 1.5.4

Теорема про первісну від складеної функції

Етапи проведення аналізу	Результати
1.Формулювання твердження	Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку I та k – деяке число, відмінне від нуля, то на цьому проміжку функція $y = \frac{1}{k}F(kx+b)$ є первісною функції $y = f(kx+b)$.
2.Встановлення виду твердження	Складне твердження.
3.Виділення роз'яснювальної частини	Множина функцій і чисел.
4.Виділення умови	Функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку I та k – деяке число, відмінне від нуля.
5.Виділення вимоги	На проміжку функція $y = \frac{1}{k}F(kx+b)$ є первісною функції $y = f(kx+b)$.
6.Формулювання твердження рівносильного даному	Число k, яке відмінне від 0 і належить проміжку I функції $y = \frac{1}{k}F(kx+b)$ є первісною функції $y = f(kx+b)$, коли функція $F(x)$ є первісною функції *f(x)*.

Таблиця 1.5.5

Теорема про площу криволінійної трапеції

Етапи проведення аналізу	Результати
1.Формулювання твердження	Площу S криволінійної трапеції (фігура, обмежена графіком неперервної додатної на проміжку $[a, b]$ функції $f(x)$, віссю Ox та прямими $x = a, x = b$) обчислюють

Продовження таблиці 1.5.5

	за формулою $S = F(b) - F(a)$.
2.Встановлення виду твердження	Складне твердження.
3.Виділення роз'яснювальної частини	Множина функцій.
4.Виділення умови	Криволінійна трапеція обмежена графіком функції і прямими.
5.Виділення вимоги	Площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою $S = F(b) - F(a)$.
6.Формулювання твердження рівносильного даному	Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком функції $f(x)$ і прямими $x = a, x = b$, то площу можна обчислити за формулою $S = F(b) - F(a)$.

Аналіз форми, виду, способу доведення математичного факту

Таблиця 1.6.1

Основна властивість первісної

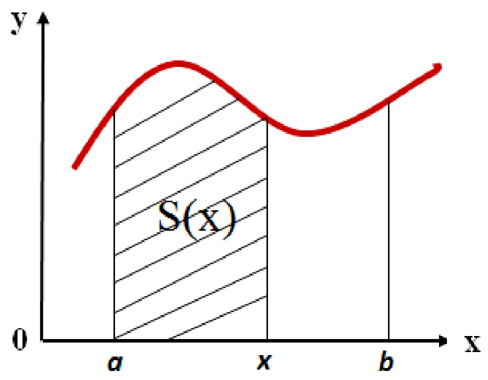
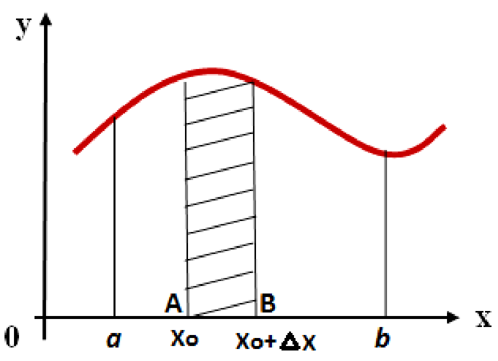
Форма доведення	Дедуктивна
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Синтетичний метод доведення
Спец. матем. метод доведення	—
Основна ідея доведення	Використання означення первісної
Етапи доведення	1) $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку I, тобто для всіх x з проміжку виконується рівність F'(x) $= f(x)$. 2) Тоді $(F(x) + C)' = F'(x) + C'$= $= f(x) + 0 = f(x)$. 3) Нехай функція $G(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$ на проміжку I. Тоді G'(x) $= f(x)$ для всіх x з цього проміжку. Маємо: $(G(x) -$ $-F(x))' = G'(x) - F'(x) = 0$. 4) Використаємо ознаку сталості функції. Отримуємо, що функція

Продовження таблиці 1.6.1

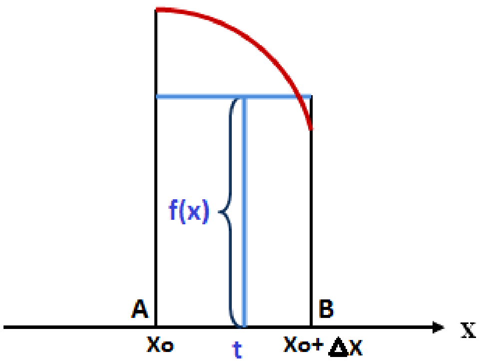
	$y = G(x) - F(x)$ є константою на проміжку I. 5) Висновок: $G(x) = F(x) + C$.

Таблиця 1.6.2

Теорема про площу криволінійної трапеції

Форма доведення	Дедуктивна
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітичний метод
Спец. матем. метод доведення	—
Основна ідея доведення	Використання означення похідної та основної властивості первісної
Етапи доведення  Рис. 1.1  Рис. 1.2	1) Розглянемо функцію $y = S(x)$, де $x \in [a; b]$: $x = a \Rightarrow S(a) = 0$ $x \in (a; b] \Rightarrow S(x)$ – площа криволінійної трапеції (Рис. 1.1). 2) Доведемо, що $S'(x) = f(x)$ для всіх $x \in [a; b]$. 3) Нехай x_0 – довільна точка відрізка $[a; b]$ і Δx – приріст аргументу x_0. 4) Розглянемо випадок, коли $\Delta x > 0$: $\Delta S = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0)$. Отримаємо, що $S(x)$ – площа криволінійної трапеції (Рис. 1.2). 5) На відрізку AB як на стороні побудований прямокутник, площа якого дорівнює ΔS (Рис. 1.3). Довжини сторін цього прямокутника дорівнюють Δx і $f(t)$, де t – деяка точка проміжку $[x_0; x_0 + \Delta x]$. $\Delta S = f(t) \cdot \Delta x \Rightarrow \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(t)$. 6) Якщо $\Delta x \to 0$, то $t \to x_0$. Оскільки функція $f(x)$ є неперервною в точці x_0, то $\lim_{\Delta x \to 0} f(t) = f(x_0)$. Таким чином, якщо $\Delta x \to 0$, то $f(t) \to f(x_0)$. Маємо:

Продовження таблиці 1.6.2

 Рис. 1.3	$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(t) =$ $= f(x_0)$. 7) Оскільки, x_0 – довільна точка області визначення функції $y = S(x)$ то для $\forall x \in [a; b]$ виконується рівність $S'(x) = f(x)$. Функція $y = S(x)$ є однією з первісних функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$. 8) Нехай $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$, тоді згідно основної властивості первісної маємо: $F(x) = S(x) + C$, де C – деяке число. $F(b) - F(a) = (S(b) + C) - (S(a) +$ $+C) = S(b) - S(a) = S(b)$. 10) Висновок: за означенням функції $y = S(x)$ шукана площа S криволінійної трапеції дорівнює $S(b)$. Отже, $S = F(b) - F(a)$.

Таблиця 1.6.3

Теорема про суму первісних

Форма доведення	Дедуктивна
Вид доведення	Пряме доведення
Метод доведення	Аналітичний метод
Спец. матем. метод доведення	—
Основна ідея доведення	Застосування правила знаходження похідної складеної функції
Етапи доведення	$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b) \cdot$ $\cdot (kx+b)' = \frac{1}{k}f(kx+b) \cdot k =$ $= f(kx+b)$.

Отже, проведений аналіз структури формулювання математичного твердження та аналіз форми, виду, способу доведення математичного факту в темі «Інтеграл та його застосування» дозволить краще орієнтуватися при підборі методів і форм роботи на уроці для засвоєння учнями відповідних математичних фактів та тверджень при поглибленому їх вивченні.

1.3. Компетентнісний підхід до навчання математики учнів старшої школи

Головною метою освіти є формування розвинутої та творчої особистості, забезпечення можливостей для її постійного культурного та духовного самовдосконалення. Але зміст освіти недостатньо відповідає вимогам суспільства на ринку праці, тому зараз відбувається його модернізація, однією із складових якої є компетентнісний підхід, який полягає у спрямованості начального процесу на формування та оволодіння учнями компетентностями.

На відміну від традиційного навчання, де учні поступово набувають знання та формують вміння і навички, при компетентнісному підході відбувається поєднання знань та навичок; проектування життєвих ситуацій під час навчання; формування та розвиток навичок творчо використовувати набуті знання [26].

Актуальність упровадження в освітню практику компетентнісного підходу зумовлена низкою чинників – зовнішніми та внутрішніми.

До зовнішніх чинників належать, по-перше, стрімкий соціальний, технологічний і політичний розвиток світу. Сучасній людині доводиться діяти в складних і невідомих ситуаціях, в умовах конкуренції та конфліктів, суперництва і співробітництва з представниками інших культур тощо. Щоб знайти своє місце в житті, ефективно освоїти життєві та соціальні ролі, учень української школи має володіти певними якостями, вміннями:

- бути гнучким, мобільним, конкурентоздатним, уміти інтегруватись у динамічне суспільство, презентувати себе на ринку праці;
- критично мислити;
- використовувати знання як інструмент для розв’язання життєвих проблем;
- генерувати нові ідеї, ухвалювати нестандартні рішення й нести за них відповідальність;
- володіти комунікативною культурою, уміти працювати в команді;
- уміти запобігати та виходити з будь-яких конфліктних ситуацій;
- цілеспрямовано використовувати свій потенціал як для самореалізації в професійному й особистісному плані, так і в інтересах суспільства, держави;
- уміти здобувати, аналізувати інформацію отриману з різних джерел, застосовувати її для індивідуального розвитку і самовдосконалення;
- дбайливо ставитися до свого здоров’я та здоров’я інших як до найвищої цінності;
- бути здатним до вибору численних альтернатив, які пропонує сучасне життя [26].

Такі якості притаманні компетентній особистості. Саме володіння життєво важливими компетенціями дозволяють людині орієнтуватися в сучасному динамічному суспільстві, сприяють формуванню здатності швидко реагувати на запити часу. У зв’язку з цим «соціальні та педагогічні проблеми формування життєвої компетентності особистості виходять сьогодні на рівень пріоритетних в українському суспільстві» [29].

Окреслення основних ідей компетентнісного підходу спонукає до оперування поняттями «компетентність», «компетенція».

У науково-педагогічній літературі поняття «компетентність» трактують по-різному. А. Хуторський [94] визначає компетентність у певній галузі як поєднання відповідних знань, умінь та позитивного досвіду діяльності, що дають змогу обґрунтовано судити про цю сферу й ефективно діяти в ній, включають його особистісне ставлення до неї та предметної діяльності.

Таким чином, під компетентністю науковець розуміє особистісну якість, сформовану в процесі навчальної діяльності.

І. Зимня [43] тлумачить поняття «компетентність» як інтелектуально і особистісно обумовлену соціально-професійну характеристику людини, її особистісну якість.

О. Дахін [32] трактує поняття «компетентність» як наявність у людини необхідних знань і здібностей, які зумовлюють здатність аналізувати, робити висновки й приймати ефективні рішення та виконувати їх, раціонально діяти.

С. Бондар [15] визначає компетентність як загальну здатність і готовність до продуктивної діяльності, інтегровану характеристику якості особистості.

С. Раков [79] визначає компетентність як рівень досягнення компетенцій, а компетенції як еталон досвіду дій, знань, умінь, навичок, творчості, емоційно-ціннісної, який установлює суспільство.

На думку М. Голованя [29], компетентність – це інтегративне утворення особистості, що об’єднує в собі знання, уміння, навички, досвід і якості особистості, які обумовлюють прагнення, здатність і готовність розв’язувати проблеми і завдання, що виникають у реальних життєвих ситуаціях, усвідомлюючи при цьому значущість предмета і результату діяльності.

У словнику іншомовних слів [85] «компетентний» трактується (від. лат. competent (competentis) відповідний, здібний) як:

1) такий, що володіє компетенцією;
2) такий, що знає, обізнаний у деякій області.

У Великому тлумачному словнику сучасної української мови [16] наводяться такі тлумачення понять: «компетентний – який має достатні знання в якій-небудь галузі; який з чим-небудь добре обізнаний; тямущий; компетентність – властивість за значенням компетентностей».

У сучасному тлумачному психологічному словнику [99] компетентність визначається як психосоціальна якість, яка означає силу і впевненість , що виходять із почуття власної успішності й користі, які дають людині усвідомлення своєї спроможності ефективно взаємодіяти з оточенням.

У Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти (затвердженому постановою Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. № 1392) так дається тлумачення поняття «компетентність»: компетентність – набута у процесі навчання інтегрована здатність учня, що складається із знань, умінь, досвіду, цінностей і ставлення, що можуть цілісно реалізовуватися на практиці [35].

Отже, узагальнюючи наведені означення, *компетентність можна розуміти як особистісне утворення, що формується зі знань, умінь та навичок, здобутих у процесі навчання та пропущених крізь призму особистісних якостей людини, збагачених її досвідом та вбудованих в систему цінносте задля ефективної мотивації певної діяльності.*

З огляду на те, що компетентність є складним утворенням, більшість дослідників виокремлює певні групи компетентностей.

За С. Раковим загальна структура системи компетентностей людини охоплює [78, с.26]:

- ключові компетентності (між предметні, базові або надпредметні компетентності);
- загальногалузеві (формуються упродовж засвоєння змісту тієї чи тієї освітньої галузі протягом усього терміну навчання);
- предметні (формуються під час вивчення конкретної навчальної дисципліни протягом визначеного часу).

Подібної позиції дотримується А. Хуторський [94], який трактує так:

- ключові компетентності (між предметні й надпредметні компетентності) – здатність особистості виконувати поліфункціональні, поліпредметні, культурнодоцільні види діяльності, успішно розв’язуючи нагальні особисті й соціальні завдання і проблеми;

- загальногалузеві (загально предметні) компетентності – компетентності, що можна сформувати й розвити у процесі вивчення змісту однієї із освітніх галузей і залишаються в розумінні «способу існування» відповідної галузі, її місця в науці й суспільстві, здатність використовувати їх у практичній діяльності для розв’язання культурно-доцільних особистих та соціальних завдань і проблем;
- предметні компетентності – складові загальногалузевих компетентностей, які стосуються конкретного предмета.

Впровадження компетентнісного підходу у навчальний процес загальноосвітнього навчального закладу спрямоване на:

- засвоєння учнями умінь, які дозволять їм діяти у нестандартних, життєвих та професійних ситуаціях;
- підсилення прикладної складової освіти;
- переорієнтацію освіти від відтворення знань до їх систематизації і застосування на практиці;
- підсилення уваги на міжпредметні вимоги до результату навчання;
- поєднання інтелектуальної складової діяльності з практичними навичками школярів [35].

Основною метою освітньої галузі «Математика», як визначено в Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти, є «формування в учнів математичної компетентності на рівні, достатньому для забезпечення життєдіяльності в сучасному світі, успішного оволодіння знаннями з інших освітніх галузей у процесі шкільного навчання, забезпечення інтелектуального розвитку учнів, розвитку їх уваги, пам’яті, логіки, культури мислення та інтуїції». Реалізація зазначеної мети обов’язково передбачає перехід від традиційної (знаннєво-орієнтованої) до компетентнісної моделі навчання математики [35].

І. Зіненко розглядає математичну компетентність як якість особистості, яка поєднує в собі математичну грамотність та досвід самостійної математичної діяльності [44].

Л. Кудрявцев стверджує, що математична компетентність – це інтегративна особистісна якість, заснована на сукупності фундаментальних математичних знань, практичних умінь і навичок, що свідчать про готовність і здатність учня здійснювати математичну діяльність [57].

М. Головань відзначає, що математична компетентність – це інтегративне утворення особистості, що поєднує в собі математичні знання, уміння, навички, досвід математичної діяльності, особистісні якості, які обумовлюють прагнення, готовність і здатність розв’язувати проблеми і завдання, що виникають в реальних життєвих ситуаціях і потребують використання математичних методів розв’язання, усвідомлюючи при цьому значущість предмету і результату діяльності [30].

Математична компетентність (як ключова). Принциповою для компетентнісного підходу є ідея про нерозривну єдність, цілісність знань, умінь і особистісних якостей людини. У зазначеному контексті, навчання математики має включати такі аспекти, які є загальними для багатьох, якщо не всіх, шкільних навчальних предметів. Серед них, у першу чергу, слід назвати аксіологічний, мотиваційний, когнітивний, інформаційний, інтелектуальний, загальнокультурний, комунікативний, світоглядний компоненти навчання математики. Всі названі компоненти входять до складу математичної та ключових компетентностей, які безпосередньо чи опосередковано формуються при вивченні шкільного курсу математики. Дамо коротку змістову характеристику зазначених компонентів та їх проекцію на освітню галузь «Математика», виражену в діяльністній формі представлення результату навчання.

Ціннісно-мотиваційний (аксіологічний) компонент [26] включає ціннісні ставлення учнів до інформації, пізнавальну активність, ініціативність, відповідальність, прагнення до удосконалення результатів своєї праці. Його ціннісна складова є системоутворювальним чинником навчально-пізнавального процесу, оскільки від того, якими цілями, цінностями, ідеалами керуються учні у своїй навчальній діяльності, залежать їх реальні освітні результати. Ціннісні орієнтації впливають на рівень пізнавального інтересу, навчально-пізнавальну активність учнів, їх мотиваційну сферу. Реалізація мотиваційної складової має пробудити й закріпити в учнів стійке позитивне ставлення до навчальної діяльності, викликати допитливість, пізнавальний інтерес, закріпити особистісно значущий сенс навчальних дій, сформувати в учнів внутрішню потребу самостійно навчатися. Виявом її сформованості в учнів можуть бути такі діяльнісні характеристики:

- уміння визначити мету діяльності (здатність ставити цілі, спрямованість на досягнення мети);
- прояв здатності приймати самостійні рішення;
- схильність перевіряти й оцінювати результати своєї діяльності, співвідносити їх з поставленими цілями й особистим життєвим досвідом;
- прояв допитливості, пізнавального інтересу;
- виявлення потреби до самостійного пошуку й засвоєння нових знань;
- спроможність до емоційного сприйняття математичних об’єктів, завдань, розв’язань, міркувань, інтерес до математичної творчості;
- поважне ставлення до однокласників, учителів, дотримання інтелектуальної чесності, об’єктивності, етичних і юридичних норм використання інформації.

Загальнокультурний компонент [26] включає коло питань, по відношенню до яких учні мають бути добре обізнаними: особливості загальнолюдської і національної культури; духовно-моральні основи життя людини і людства, окремих народів; культурологічні основи сімейних, соціальних, суспільних явищ і традицій; роль науки та релігії в житті людини. Сюди ж відноситься досвід освоєння учнями наукової картини світу. У проекції на освітню галузь «Математика» це передбачає формування та розвиток у школярів уявлень про математику як невід'ємну частину загальнолюдської культури, про історію її розвитку, про її місце в системі інших наук, про значення математики в історичному минулому та в сучасному суспільстві. Передбачається, що випускник:

- має уявлення про математичну науку як про сферу людської діяльності, про етапи її розвитку, про її значимість для розвитку цивілізації;
- знає імена творців математичної науки, видатних вітчизняних і зарубіжних математиків минулого та сучасності, авторів підручників з математики;
- володіє математичною мовою, уміє правильно використовувати й пояснювати значення математичних термінів і символів, розуміє, що математична символіка та формули математики дозволяють описувати загальні властивості об'єктів практики і науки, а також відношення між ними;
- має уявлення про різницю у вимогах до доведень у математиці та різних галузях природничих і гуманітарних наук;
- володіє загальними способами інтелектуальної діяльності, характерними для математики й таких, що є основою пізнавальної культури, значимої для різних сфер людської діяльності;
- уміє самостійно працювати з підручником, розуміє його будову, знає призначення всіх елементів апарату орієнтування в текстах розділів, тем, параграфів, використовує прийоми розуміння тексту (структурування, ставлення пізнавальних запитань тощо), знає та застосовує прийоми смислового групування матеріалу.

Навчально-пізнавальний (когнітивний) компонент [26] передбачає оволодіння кожним учнем базовими математичними знаннями, уміннями, навичками, способами діяльності, достатніми для вивчення суміжних навчальних предметів на сучасному рівні, а також для продовження освіти, різноманітними способами організації та здійснення учіння (уміння, дії, операції, пізнавальні процеси) на різних рівнях пізнавальної самостійності (репродуктивна, частково пошукова, творча). Це означає, що випускник:

- володіє технікою практичних обчислень, раціонально сполучаючи усні, письмові й інструментальні обчислення (точні та наближені); знає і застосовує прийоми швидких обчислень, користується оцінкою та прикидкою при практичних розрахунках;
- володіє технікою тотожних перетворень числових, алгебраїчних і трансцендентних виразів, вільно застосовує отримані навички в процесі розв’язування завдань;
- вміє користуватися математичними формулами, самостійно виводити формули залежностей між величинами;
- вміє самостійно здійснювати алгоритмічну й евристичну діяльність на математичному матеріалі, перевіряти та оцінювати результати своєї діяльності;
- бачить математичну задачу в контексті реальних (практичних) ситуацій, проблемних ситуацій у суміжних навчальних предметах, застосовує математичні методи для розв’язування цих задач (з використанням, при необхідності, довідкових матеріалів, калькулятора, комп’ютера).

Інформаційний компонент [26] віддзеркалює здатність особистості до визначення інформаційної потреби, пошуку інформації та ефективної роботи з нею в усіх її формах та представленнях, опанування навичками діяльності стосовно інформації в навчальних предметах і освітніх галузях, а також у навколишньому світі, пошуку, аналізу та відбору необхідної інформації, її перетворення, збереження й передачі, володіння сучасними інформаційними засобами та інформаційними технологіями. Завершуючи вивчення шкільного курсу математики учень:

- розуміє необхідність одержання потрібної інформації;
- вміє самостійно вибирати належне джерело, знаходити відповідну інформацію, критично оцінювати отриману інформацію та її джерела,

здійснювати аналіз інформації, її систематизацію і класифікацію, інтегрувати отриману інформацію в особистий досвід;

- вміє добувати інформацію, представлену в таблицях, діаграмах, графіках, описувати й аналізувати масиви числових даних за допомогою статистичних характеристик;
- здатен проводити обробку результатів лабораторних експериментів та оцінювати похибки.

Інтелектуальний компонент [26]. Істотними якостями інтелекту людини є логічність мислення (чітка послідовність міркувань, врахування усіх істотних сторін у досліджуваному об’єкті, всіх можливих його взаємозв’язків), доказовість (здатність використовувати в потрібний момент такі факти, закономірності, які переконують у правильності суджень і висновків), критичність (вміння оцінювати результати розумової діяльності, піддавати їх критичній оцінці, відкидати неправильне розв’язання, відмовлятися від розпочатих дій, якщо вони суперечать вимогам завдання), глибина (здатність відокремлювати головне від другорядного, необхідне від випадкового), гнучкість (здатність використовувати наявний досвід, досліджувати об’єкти в нових зв’язках і відношеннях, переборювати шаблонність мислення), широта (здатність охопити завдання в цілому, не випустити з уваги усіх вихідних даних, бачити багатоваріантність його розв’язання). Завершуючи вивчення шкільного курсу математики учень:

- вміє логічно міркувати, робити обґрунтовані висновки, оцінювати логічну правильність міркувань, розпізнавати логічно некоректні міркування, відрізняти гіпотезу від факту, доведені твердження від недоведених (обґрунтованих);
- вміє проводити дедуктивні й індуктивні міркування при доведенні теорем і розв’язуванні задач, пропонувати різні способи розв’язання задачі;

- вміє проводити узагальнення й «відкривати» закономірності на основі аналізу окремих прикладів, результатів експерименту, висувати та перевіряти гіпотези, встановлювати границі застосування отриманого результату.

Комунікативний компонент [26] передбачає сформованість умінь ясно й чітко викладати свої думки, будувати аргументовані міркування, вести діалог (дискусію), сприймаючи точку зору співрозмовника, а у разі необхідності, піддаючи її критичному аналізу. У цьому компоненті можна виділити оволодіння наступними видами діяльності: володіння усним мовленням (монолог, діалог, полілог, уміння поставити запитання, навести довід при усній відповіді або захисті проекту); володіння прийомами оформлення тексту (електронне листування, створення текстових документів за шаблоном тощо); володіння телекомунікаціями для організації спілкування з віддаленими співрозмовниками; уміння працювати в групі, шукати й знаходити компроміси. Завершуючи вивчення шкільного курсу математики учень:

- вміє ясно, точно й логічно виражати свої думки в усній та письмовій формі, використовувати різні математичні мови (словесну, символьну, графічну), переходити з однієї мови на іншу для ілюстрації, інтерпретації, аргументації, доведення, наводити приклади та контрприклади;
- вміє адекватно використовувати мовні засоби для ведення дискусії й аргументації своєї позиції, порівнювати різні точки зору, відстоювати свою позицію;
- вміє співвідносити власну думку з думкою авторитетних джерел і більшості, аргументовано опиратись груповому тиску;
- вміє доповідати про результати свого дослідження, коротко й точно відповідати на запитання, використовувати довідкову літературу й інші джерела інформації;
- проявляє готовність до навчальної діяльності у взаємодії (у парі, малій групі, участі у проектній діяльності).

Світоглядний компонент [26]. Світогляд – це система узагальнених поглядів людини на світ, на місце людини в ньому, на ставлення людей до оточуючої дійсності й до самих себе, а також, обумовлені цими поглядами, їхні переконання, ідеали, принципи пізнання та діяльності. Під світоглядним компонентом результату навчання математики розуміється поінформованість учнів про систему основних математичних понять, про математичну мову як засобу виразу математичних законів, закономірностей тощо, про математику як форму опису та методу пізнання дійсності. Реалізується цей компонент у процесі вивчення історії виникнення математичних понять, у процесі встановлення зв’язків математики з іншими навчальними предметами, у процесі складання математичних моделей тощо. Завершуючи вивчення шкільного курсу математики учень:

– має уявлення про ідеї та методи математики, про особливості математичного методу дослідження і його відмінності від методів природничих і гуманітарних наук, розуміє особливості застосування математичних методів до аналізу й дослідження процесів і явищ у природі та суспільстві;

– розуміє, що логічні закони математичних міркувань мають універсальний характер і застосовні у всіх галузях людської діяльності;

– має уявлення про аксіоматичну побудову математичної теорії, про значення аксіоматичного методу для інших областей знання й практики;

– розуміє, що реальний світ підпорядковується не тільки детермінованим, але й статистичним закономірностям, уміє використовувати їх для розв’язання завдань повсякденного життя;

– має уявлення про метод математичного моделювання як про універсальний метод пізнання навколишнього світу;

– переконаний у можливості пізнання природи, у необхідності розумного використання досягнень математики для подальшого розвитку цивілізації;

– розуміє, що формальний математичний апарат створений і розвивається з метою розширення можливостей його застосування до розв'язання завдань, що виникають у теорії та на практиці.

Математична компетентність (як предметна) – це спроможність особистості бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень.

Ми будемо спиратися на визначення, яке дає С. Раков, під математичною компетентністю він розуміє уміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень [79].

До предметно-галузевих математичних компетентностей автор відносить такі компетентності:

1. Процедурна компетентність – уміння розв'язувати типові математичні задачі:

- використовувати на практиці алгоритм розв'язання типових задач;
- уміти систематизувати типові задачі, знаходити критерії зведення задач до типових;
- уміти використовувати різні інформаційні джерела для пошуку алгоритму розв'язування типових задач.

2. Логічна компетентність – володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень:

- володіти і використовувати на практиці понятійний апарат дедуктивних теорій (поняття, означення понять; висловлювання, аксіоми, теореми та їх доведення тощо);
- здійснювати дедуктивне обґрунтування правильності розв'язання задач та шукати логічні помилки у неправильних дедуктивних міркуваннях;

- використовувати математичну та логічну символіку на практиці.

3. Технологічна компетентність – володіння сучасними інформаційно-комунікаційними технологіями підтримки математичної діяльності:

- оцінювати похибки при використанні наближених обчислень;
- будувати комп'ютерні моделі для предметної області задачі з метою їх евристичного, наближеного або точного розв'язання.

4. Дослідницька компетентність – володіння методами дослідження соціально та індивідуально значущих задач математичними методами:

- формулювати математичні задачі;
- будувати аналітичні моделі задач;
- висувати та перевіряти справедливість гіпотез, спираючись на відомі методи (індукція, аналогія, узагальнення), а також на власний досвід досліджень;
- систематизувати отримані результати досліджень.

5. Методологічна компетентність – уміння оцінювати доцільність використання математичних методів для розв'язування індивідуально і суспільно значущих задач:

- аналізувати ефективність розв'язання задач математичними методами;
- рефлексія власного досвіду розв'язання задач та подолання перешкод з метою постійного вдосконалення власної методології проведення досліджень [78].

Завданнями реалізації компетентнісного підходу у навчанні математики в основній школі є:

- розкриття ролі та можливостей математики у пізнанні та описанні реальних процесів і явищ дійсності, забезпечення усвідомлення математики як універсальної мови природничих наук та органічної складової загальної людської культури;
- розвиток логічного, критичного і творчого мислення учнів, здатності чітко та аргументовано формулювати і висловлювати свої судження;

- забезпечення оволодіння учнями математичною мовою, розуміння ними математичної символіки, математичних формул і моделей як таких, що дають змогу описувати загальні властивості об'єктів, процесів та явищ;
- формування здатності логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, застосовувати математичні методи у процесі розв'язування навчальних і практичних задач, використовувати математичні знання і вміння під час вивчення інших навчальних предметів;
- формування здатності оцінювати правильність і раціональність розв'язання математичних задач, обґрунтовувати твердження, розпізнавати логічно некоректні міркування, приймати рішення в умовах неповної, надлишкової, точної та ймовірнісної інформації [56].

Формування ключових і математичної компетентності у процесі навчання математики відбувається поступово. Тому рівень компетентності учня на різних етапах навчання буде різним. Це свідчить про рівневий характер реалізації компетентнісного підходу в навчанні математики. Кожен з рівнів математичної компетентності передбачає декілька етапів її формування. Ці етапи мають:

- бути пов'язаними з послідовністю формування досвіду учнівської діяльності відносно предметів і процесів сучасності;
- віддзеркалювати хід навчального процесу: мотивацію навчання (усвідомлення учнем цілей і завдань), актуалізацію мінімально необхідного досвіду діяльності, вивчення нового матеріалу з відпрацюванням теоретичного і практичного навчально-інформаційних блоків, самоаналіз отриманих результатів та співвіднесення отриманих результатів з передбачуваними [56].

Формування в учнів ключових і математичної компетентності може бути спеціальним (безпосереднім) або контекстним (опосередкованим) і здійснюватись упродовж будь-якого часу – однієї навчальної теми або протягом всього терміну навчання в школі.

Рівні сформованості математичної компетентності:

- перший (рівень відтворення) – пряме застосування в знайомій ситуації стандартних прийомів, відомих алгоритмів і технічних навичок, робота зі стандартними, знайомими виразами і формулами, безпосереднє застосування властивостей математичних об’єктів, що вивчаються.
- другий (рівень встановлення зв’язків) ґрунтується на репродуктивній діяльності щодо вирішення завдань, які, хоча і не є типовими, але все ж знайомі учням або дещо виходять за рамки відомого.
- третій (рівень міркувань) трактується як розвиток попереднього рівня. Для вирішення завдань цього рівня потрібні певна інтуїція, роздуми і творчість у виборі математичного інструментарію, самостійна розробка алгоритму дій [56, с. 35].

Математичній компетентності старшокласника відповідає рівень його індивідуальної математичної діяльності, що характеризується пізнавальною активністю в поєднанні з високою потребою в досягненнях; умінням формулювати деякі проблеми реальності у вигляді математичної проблеми; науково-обгрунтованим, логічно побудованим, раціональним рішенням математичної проблеми; здатністю самоконтролю і самоаналізу; адекватною самооцінкою.

Розуміння математичної компетентності старшокласника як сукупності знань, умінь і досвіду в сфері самостійної математичної діяльності дозволяє виділити наступні її структурні компоненти: мотиваційно-ціннісний, когнітивний, операційно-технологічний та рефлексивний (Рис.1.4).

Основною метою компетентнісної освіти є формування та розвиток конкурентоспроможної, компетентної особистості, а це потребує дослідження особливостей компетентнісного підходу до навчання окремих дисциплін в класах різного рівня підготовки.

У старшій школі до 2018-2019 навчального року було чотири рівня вивчення математики: академічний рівень, рівень стандарту, профільній рівень та поглиблений. З 2018-2019 навчального року вивчення математики диференціюється за трьома програмами: рівень стандарту, профільний рівень та профільний рівень (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) [64].

Поглиблене вивчення математики, на відміну від рівня стандарту та профільного рівня розпочинається з 8 класу та передбачає розширення і поглиблення змісту відповідного курсу математики загальноосвітньої школи, посилення його прикладної спрямованості, формування в учнів стійкого інтересу до предмета, виявлення і розвиток математичних здібностей, підготовку до поглибленого навчання математики в старшій школі.

Рис. 1.4 Структура і зміст математичної компетентності старшокласника за Алагуловою І. Н. [9]

Поглиблене вивчення математики в основній школі є певною мірою орієнтаційним. Важливо тут допомогти учневі усвідомити ступінь свого інтересу до предмета і оцінити можливості оволодіння ним із тим, щоб після закінчення дев'ятого класу зробити свідомий вибір на користь подальшого поглибленого вивчення математики або вивчення її в межах загальноосвітнього курсу. В основу побудови змісту й організації поглибленого навчання математики покладено компетентнісний підхід, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності як здатності учня успішно діяти в навчальних і життєвих ситуаціях і нести відповідальність за свої дії.

Поглиблене вивчення математики в основній школі передбачає передусім формування предметної математичної компетентності. Крім того, воно має зробити вагомий внесок у формування окремих ключових компетентностей, зокрема загальнонавчальної (уміння вчитися), комунікативної (здатності грамотно формулювати і висловлювати судження), загальнокультурної та інших. Формування зазначених компетентностей підпорядковується реалізації загальних завдань шкільної математичної освіти, що здійснюється на всіх ступенях школи [65].

Мета навчання математики в старших класах з поглибленим вивченням математики полягає у забезпеченні рівня підготовки учнів з математики, необхідного для успішної самореалізації особистості у динамічному соціальному середовищі, для подальшого вибору й успішного опанування професією, яка потребує високого рівня математичних знань, тобто за спеціальностями теоретичної та прикладної математики або спеціальностями тих галузей, які потребують розвиненого математичного апарату для вивчення й аналізу закономірностей реальних явищ і процесів; у підготовці до навчання у вищому навчальному закладі з відповідним фаховим спрямуванням [64].

За умов компетентнісного навчання у класах вивчення математики на поглибленому рівні відбувається формування методологічної компетентності. У процесі формування методологічної компетентності учні [78]:

- розуміють переваги та обмеженість математичних методів, оцінюють на практиці їх ефективність;
- аналізують ефективність розв’язання індивідуально та суспільно значущих задач математичними методами.

Висновки до розділу 1

У першому розділі розглянуто історичні відомості становлення та розвитку інтеграла в математиці, а також його введення в шкільний курс математики.

Нами проведено логіко-математичний аналіз теми «Інтеграл та його застосування» за підручником «Алгебра 11 клас» А. Мерзляк, В. Полонський, М. Якір для класів з поглибленим вивченням математики. І виявлено, що в підручнику є велика кількість завдань на відпрацювання навичок обчислення визначеного інтегралу, знаходження первісної та знаходження площ плоских фігур, завдання різноманітні за рівнем складності та за дидактичними цілями. Проте, зовсім немає вправ на актуалізацію та повторення базових знань та умінь, вправ для створення мотивації введення нового поняття, а також майже відсутні вправи на знаходження невизначеного інтегралу та об’ємів тіл обертання.

Розглянуто поняття «компетентність», «компетенція» та «математична компетентність», виділено компоненти математичні компетентності учнів; розглянуто рівні сформованості математичної компетентності при вивченні алгебри та початків аналізу; розглянуто завдання реалізації компетентнісного підходу до навчання математики та на основі аналізу програм з математики і врахування загальних принципів реалізації компетентнісного підходу до навчання виділено предметно-галузеві математичні компетентності учня, а саме: процедурну, технологічну, логічну дослідницьку та методологічну.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ» НА ЗАСАДАХ КОМПЕТЕНТНІСНОГО ПІДХОДУ

2.1. Методика формування предметної математичної компетентності при вивченні теми «Інтеграл та його застосування»

У навчальній програмі для учнів 11 класів окреслені конкретні предметні математичні компетентності, якими повинен володіти учень з урахуванням наступних вимог до нього при вивченні теми «Інтеграл та його застосування», а саме учень:

- *формулює* означення первісної і невизначеного інтеграла та їх основні властивості;
- *описує* поняття визначеного інтеграла;
- *формулює* властивості визначеного інтеграла;
- *знаходить* первісні та визначений інтеграл за допомогою правил знаходження первісних та перетворень;
- *застосовує* визначений інтеграл до розв'язування геометричних задач.

Першим поняттям, з яким учні знайомляться в темі «Інтеграл та його застосування» є первісна. Вивчення первісної доцільно почати з взаємно обернених операцій, які вже відомі учням: додавання – віднімання, множення – ділення, піднесення до степеня – добування кореня. Оскільки диференціювання та інтегрування, також взаємно обернені операції, то на етапі актуалізації знань необхідно повторити означення похідної та таблицю похідних, щоб потім вміти застосовувати її в оберненій послідовності, а далі на кількох прикладах згадати операцію диференціювання – для функції $f(x)$ знайти її похідну $f'(x)$ і поставити питання про зворотну операцію – знаючи похідну $f'(x)$ відновити функцію $f(x)$, яку диференціювали. Наприклад:

похідна від якої функції дорівнює $3x^2$? Неважко здогадатися, що похідну $3x^2$ має функція x^3. Тобто, x^3 – це первісна для функції $3x^2$.

В системі Moodle: https://oksanayeremenko.moodlecloud.com (Рис. 2.1) нами розроблено тест, який слід запропонувати пройти учням перед уроком, щоб повторити таблицю похідних та правила диференціювання.

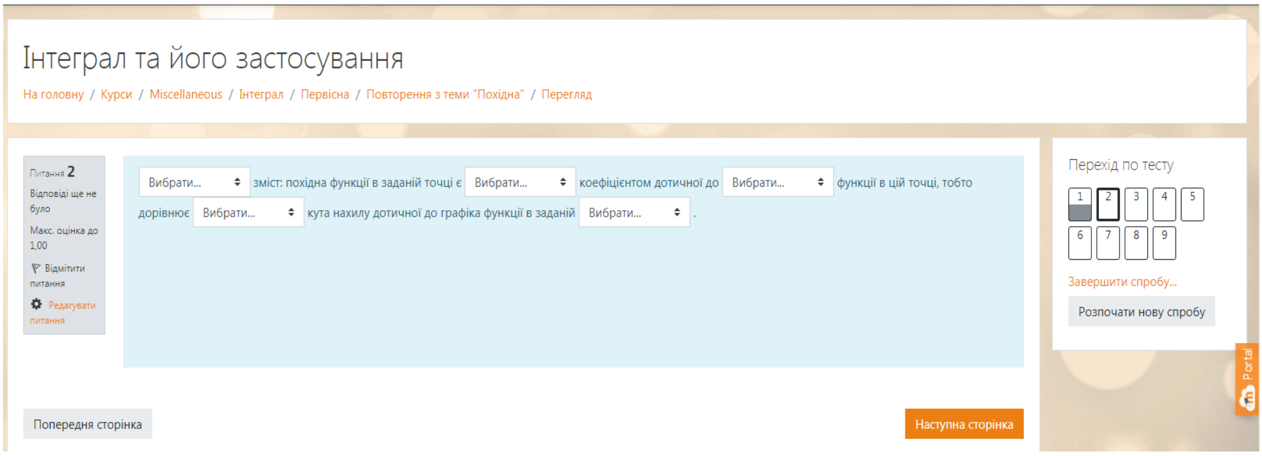


Рис. 2.1 Тести з теми «Похідна»

Потім на уроці для перевірки таблиці похідних можна знайти помилки в таблиці, наприклад:

f (x)	x^2	lnx	$sinx$	$cosx$	tgx	$ctgx$	$arctgx$	$arcsinx$	e^x
f' (x)	$2x$	$\frac{1}{x}$	$-cosx$	$sinx$	$\frac{1}{sin^2x}$	$-\frac{1}{cos^2x}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	e^x

Метою виконання додаткових вправ на повторення є відтворення вивчених раніше формул та правил диференціювання, особливу увагу потрібно звернути на правило знаходження похідної складеної функції. Ці правила та формули допоможуть учням на наступних уроках, коли мова піде про правила інтегрування.

Після розгляду декількох прикладів на відтворення функції, слід ввести ***означення первісної:*** *функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо для кожного x з цього проміжку виконується рівність* $F'(x) = f(x)$ [13]. Цей символічний запис можна прочитати по-різному: $f(x)$ – похідна функції $F(x)$ або $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$.

Поняття первісної для функції пов'язане з певним проміжком, тому під час доведення того, що одна з двох функцій є первісною для другої, слід перевірити, чи визначені на заданому проміжку обидві функції, а потім порівнювати похідну первісної із заданою функцією.

Слід звернути увагу учнів на те, що на відміну від похідної, яка спочатку визначалася в точці, а потім на проміжку, первісна відразу визначається на проміжку. Наступний крок полягає в тому, щоб показати, що операція інтегрування на відміну від операції диференціювання не однозначна, існує безліч первісних для даної функції, що відрізняються одна від одної на сталу величину C. Наприклад, первісною для функції $y = 6x$ буде, будь-яка функція виду $y = 3x^2 + C$, так як $y = (3x^2 + C)' = 6x$.

Розв'язання запропонованих вправ (Додаток Ж) передбачає передусім свідоме відтворення означення поняття первісної для функції на поданому проміжку, а також схеми дій для перевірки того, чи є подана функція первісною для деякої функції на проміжку. Тому розв'язання вправ на засвоєння нових понять потрібно організовувати так, щоб таке відтворення відбувалося неодноразово та було основою дій учнів.

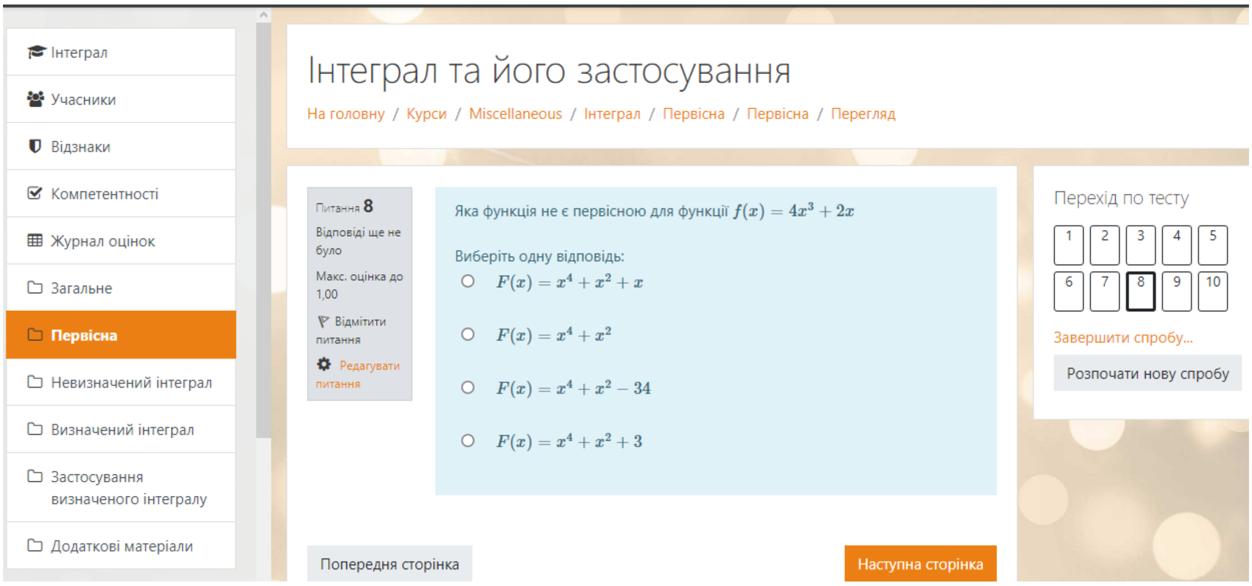


Рис. 2.2 Тести з теми «Первісна»

Саме для цього ми розробили тести в системи Moodle, які можна дати учням виконати вдома для закріплення вивченого на уроці (https://oksanayeremenko.moodlecloud.com) (Рис. 2.2). Учні виконують тест, а вчитель одразу бачить час, за який він пройшов тест, його помилки та оцінку отриману учнем. Також вчитель бачить результат засвоєння теми всім класом, оскільки в системі є середня арифметична оцінка всіх учнів з даної теми.

Однією з причин того, що в учнів виникають труднощі у вивчені теми «Інтеграл та його застосування» є недостатня сформованість навичок оперування математичними об’єктами. На наш погляд, один із засобів відпрацювання таких навичок – використання математичних тренажерів. Як приклад наведемо тренажер для відпрацювання навичок знаходити первісну функції.

$f(x) = x^2 - 3$	$f(x) = \frac{1}{x^2} - 3$	$f(x) = cos\frac{2x}{3}$	$f(x) = \frac{1}{3}cos\frac{2x}{3}$
$f(x) = x^3 + 4$	$f(x) = \frac{1}{x^3} + 5$	$f(x) = sin\frac{x}{5}$	$f(x) = \frac{1}{5}sin\frac{x}{5}$
$f(x) = x^5 - 1$	$f(x) = 1 - \frac{1}{x^4}$	$f(x) = sin3x$	$f(x) = \frac{1}{3}sin3x$
$f(x) = x^4 + 2x$	$f(x) = \frac{2}{x^2} + 1$	$f(x) = e^{2x}$	$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$
$f(x) = 11 + x^2$	$f(x) = \frac{4}{x^4} + \frac{2x}{3}$	$f(x) = \cos(1 - 2x)$	$f(x) = 2 + \frac{1}{x}$
$f(x) = 4x + 3$	$f(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{x}{2}$	$f(x) = cos\frac{1-x}{2}$	$f(x) = \frac{2}{x} - 5$
$f(x) = 1 - 2x$	$f(x) = \frac{3}{x^3} + x$	$f(x) = \sin(1 - x)$	$f(x) = x - \frac{1}{x}$
$f(x) = x^3 + 3x$	$f(x) = -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{3}$	$f(x) = sin\frac{1+5x}{2}$	$f(x) = \frac{3}{x} + 2x$
$f(x) = 6x^2 + \frac{x}{2}$	$f(x) = cos2x$	$f(x) = 2cos2x$	$f(x) = \frac{1}{3x} - 3x^3$
$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2x}$	$f(x) = x\sqrt{x} + 5$	$f(x) = \frac{1}{2}sin\frac{1+5x}{2}$	$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{4}{x}$

Перед доведенням основної властивості первісної слід розглянути *ознаку сталої функції*: для того, щоб диференційована функція була сталою на інтервалі, необхідно і достатньо, щоб на цьому інтервалі її похідна дорівнювала нулю. Учням цю ознаку можна пояснити наочно, наприклад так: коли б дана функція на якомусь проміжку даного інтервалу зростала, то її похідна на цьому проміжку була б додатною, а коли б спадала – від'ємною. Якщо ж похідна в кожній точці інтервалу дорівнює нулю, тобто не є ні додатною, ні від'ємною, то дана функція на даному інтервалі не може бути ні зростаючою, ні спадною [13].

Основну властивість первісної можна сформулювати так: якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку I та C – довільне число, то функція $y = F(x) + C$ також є первісною функції $f(x)$ на проміжку I.

З цієї властивості випливає, що графіки будь-яких двох первісних даної функції можна отримати один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ординат.

У загальному випадку операція інтегрування помітно складніше операції диференціювання. Якщо в похідних мають місце строго 5 правил диференціювання, таблиця похідних і досить чіткий алгоритм дій, то в інтегралах все інакше. Існують десятки способів і прийомів інтегрування і, якщо спосіб інтегрування спочатку підібраний невірно, то прийдеться розв'язувати з самого початку. Також продиференціювати можна будь-яку елементарну функцію і в результаті отримати елементарну функцію, але не для всякої елементарної функції первісна є елементарною функцією, в ряді випадків первісну навіть не можна обчислити. При знаходженні первісних, як і при знаходженні похідних, застосовуються правила, але тільки три: для первісної суми, про сталий множник, первісна для функції $f(kx + b)$, тобто:

1. Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x), G(x)$ – первісна для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ – первісна для $f(x) + g(x)$.
2. Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$ і k – стала, то $k \cdot F(x)$ – первісна для $k \cdot f(x)$.
3. Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$ і k, b – сталі, то $\frac{1}{k} \cdot F(kx + b)$ – первісна для $f(kx + b)$.

З трьох правил знаходження первісних, складною для застосування виявляється третя властивість, тому потрібно розв'язати достатню кількість вправ з метою навчання учнів застосовувати її. Також, можна сформувати алгоритм знаходження первісної функції $y = f(kx + b)$:

1) знайти первісну $y = F(x)$ для функції $y = f(x)$;

2) у виразі для функції $y = F(x)$ аргумент x замінити лінійним виразом $(k \cdot x + b)$;

3) отриманий вираз помножити на $\frac{1}{k}$.

Зіставлення правил інтегрування і диференціювання значно полегшує процес їх засвоєння і запам'ятовування. Також слід наголосити учням, що правил про добуток і частку немає для відшукання первісної.

Щоб попередити традиційні помилки учнів, яких вони припускаються на перших уроках вивчення правил та формул для знаходження первісних (учні часто плутають формули інтегрування та диференціювання), пропонуємо після знаходження загального вигляду первісної виконувати перевірку правильності виконання дій із застосуванням означення первісної.

Після цього потрібно розглянути задачі на знаходження первісної функції, графік якої проходить через точку із заданими координатами. Спочатку слід колективно розв'язати задачу, а потім запропонувати учням самостійно скласти на чернетці план розв'язання цієї задачі. Після виконання завдання учні показують свої плани, а потім записують чіткий алгоритм у зошитах.

Алгоритм знаходження первісної $F(x)$ для функції $f(x)$, якщо графік функції $F(x)$ проходить через задану точку

1. Знайти область визначення функції $f(x)$.
2. Знайти загальний вигляд первісних для функцій $f(x)$.
3. Підставити у формулу для загального вигляду первісних $F(x)$ координати поданої точки.
4. Розв'язати одержане рівняння відносно сталої C.
5. Записати рівняння первісної, графік якої проходить через подану точку.

Рівень засвоєння учнями вивченого матеріалу, перевіряємо шляхом проведення діагностичної самостійної роботи (Додаток В).

У підручниках дуже мало приділяють увагу невизначену інтегралу, але на наш погляд його доцільно розглядати більш детально, оскільки він доповнює поняття первісної для функції. Такий підхід сприяє створенню цілісного уявлення учнів про матеріал, що вивчається, відповідає принципу наукового навчання та в подальшому полегшує знаходження визначеного інтеграла.

Розглядати невизначений інтеграл слід з такого ***означення:*** *невизначений інтеграл – це сукупність первісних для додатної функції $f(x)$ і позначається символом $\int f(x)dx$, де $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз.* Зміст множника dx і термін «диференціал аргументу» не вводиться. Пов'язано це з тим, що поняття диференціала аргументу і функції в шкільному курсі не вивчаються. У зв'язку з цим залишається пояснити учням, як читати вираз $\int f(x)dx$, і запропонувати їм сприймати цей символ як єдиний для позначення інтеграла [84].

Для початку потрібно навчитись розв'язувати інтеграл за допомогою таблиці невизначених інтегралів та на перших етапах з перевіркою, тобто якщо продиференціювати правильну відповідь, то обов'язково повинна вийти вихідна підінтегральна функція. Наприклад: $\int sinxdx = -cosx + C$. Переконаємося в справедливості цієї формули. Беремо похідну від правої частини: $(-cosx + C)' = sinx + 0 = sinx$. Також потрібно наголосити на тому, що обчислити невизначений інтеграл – це значить знайти множину всіх первісних, а не якусь одну функцію. В даному прикладі: $-cosx + 5$, $-cosx - \frac{4}{7}, -cosx + sin2$ і т.д. – всі ці функції є розв'язком даного інтеграла. Оскільки розв'язків безліч то коротко записують $\int sinxdx = -cosx + C$. Таким чином, будь-який невизначений інтеграл на відміну від похідної, досить легко перевірити.

Проаналізувавши підручники з алгебри та початків аналізу, ми бачимо, що у них майже не має вправ на відпрацювання навичок знаходити невизначений інтеграл, а оскільки ці навички важливі для подальшого вивчення теми, то ми розробили математичний тренажер на знаходження інтеграла використовуючи властивості та таблицю невизначених інтегралів.

$\int \sqrt{x}\,dx$	$\int (tgx + ctgx)^2 dx$	$\int \frac{1}{cos2x + sin^2x} dx$	$\int x^2\,dx$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$	$\int \sqrt[m]{x^n}\,dx$	$\int (x - \sqrt{x})^2\,dx$	$\int \sqrt[3]{x^4}\,dx$
$\int (\sqrt{x+1})(x - \sqrt{x} + 1) dx$	$\int \frac{\sqrt{x} - x^3e^x + x^2}{x^3} dx$	$\int \frac{x^2 + e^x}{x^2e^x} dx$	$\int 7sinx\,dx$
$\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$	$\int \left(\frac{1 - z}{z}\right)^2 dx$	$\int \frac{2^x + 5 \cdot 3^x}{6^x} dx$	$\int \frac{3}{7} tgx\,dx$
$\int \frac{cos2x}{cos^2xsin^2x} dx$	$\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$	$\int \frac{4x^3 + x - 3}{x^4} dx$	$\int (x^2 - 4)\,dx$
$\int 2sin^2 \frac{x}{2} dx$	$\int tg^2xdx$	$\int \sqrt[3]{x}\,dx$	$\int \frac{3}{5} x^8\,dx$
$\int \frac{(1 + x)^2}{x(1 + x^2)} dx$	$\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx$	$\int \frac{3}{x} dx$	$\int (x^2 + x)\,dx$
$\int (3x^2 - 5)^3 dx$	$\int (3x + 4)^2 dx$	$\int (e^x + e^{-x})^2 dx$	$\int ctg^2xdx$
$\int \frac{x^4 - 3x^2 + 5\sqrt[3]{x} - 7x}{\sqrt[3]{x}} dx$	$\int \frac{3x^3 + 5x^2 - 8}{x^4} dx$	$\int (3cosx + 2sinx) dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x^2}}$

При розгляді поняття «інтеграл» в класах з поглибленим вивченням математики учні також вивчають найпростіші методи інтегрування. Але оскільки в підручниках не має завдань на методи інтегрування, то вчителю при добірці завдань необхідно враховувати фактори, що впливають на успішність вивчення даної теми, а саме: слід ретельно відбирати теоретичний матеріал, поєднуючи науковість і доступність викладу. І хоча повністю реалізувати принцип науковості при вивченні інтеграла в школі не вдається, в учнів все ж формуються правильні уявлення про процес пізнання і його закономірності. Зміст, форми і методи навчання повинні враховувати реальні можливості учнів, але, тим не менш, мати досить високий рівень складності. Також, необхідно враховувати загальний рівень математичної підготовки учнів, особливості їх мислення і сприйняття, в відповідність з цим, вибирати той чи інший шлях викладу матеріалу.

Інтегрування частинами зазвичай використовується для добутку функцій, а в деяких випадках і для частки. Для формування поняття метода інтегрування частинами, перед учнями можна поставити таку проблемну ситуацію: необхідно знайти такий інтеграл $\int x \cdot lnxdx$, тобто знайти інтеграл від добутку двох функцій.

Вчитель: чи схожий цей інтеграл на один з табличних інтегралів, які вивчали раніше?

Учні: ні.

Вчитель: у чому різниця?

Учні: підінтегральна функція у вигляді добутку двох функцій.

Вчитель: а що таке інтеграл?

Учні: сукупність первісних.

Вчитель: а первісна по відношенню до похідної?

Учні: обернена до неї функція.

Вчитель: чи можемо ми знайти похідну від добутку? Якщо можемо, то за якою формулою?

Учні: можемо за формулою $(f(x) \cdot g(x))' = f(x)'g + g(x)'v$

Вчитель: значить, чи можемо ми, використовуючи дану формулу вивести формулу для знаходження інтеграла від добутку? Давайте спробуємо (учні проговорюють, вчитель записує на дошці). Відокремимо $f'(x)g(x)$ та про інтегруємо обидві частини рівності:

$$f'(x) \cdot g(x) = \left(f(x) \cdot g(x)\right)' - f(x)' \cdot g(x)$$

$$\int f(x)'g(x)dx = \int \left(\left(f(x)g(x)\right)' - g(x)'f(x)\right)dx = f(x)g(x) - \int g(x)'f(x)dx$$

Використаємо позначення:

$$dv = v'dx$$

$$du = u'dx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Даний вид формули легко запам’ятовується та має компактний вид. А тепер повернемось до нашого прикладу та розв’яжемо його, використовуючи нашу нову формулу. В інтегралах даного типу, за u завжди береться логарифм, тобто маємо:

$$u = lnx, \qquad du = (u)'dx = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = xdx, \qquad v = \int dv = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x \cdot lnxdx = \frac{x^2}{2} \cdot lnx - \int \frac{x^2}{2x}dx = \frac{x^2}{2}lnx - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}lnx - \frac{x^2}{4} + C$$

Отже, застосування формули інтегрування частинами, звело наше розв’язання до двох простих інтегралів. Звернемо увагу на те, що в деяких випадках відразу після застосування формули, під інтегралом який залишився, обов’язково проводиться спрощення – в розглянутому прикладі ми скоротили підінтегральний вираз на x. Виконаємо перевірку, для цього візьмемо похідну від відповіді:

$$\left(\frac{x^2}{2}lnx - \frac{x^2}{4} + C\right)' = \left(\frac{x^2}{2}lnx\right)' - \left(\frac{x^2}{4}\right)' + (C)' = xlnx + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + 0 = xlnx$$

Отримали вихідну підінтегральну функцію, а отже це значить, інтеграл знайдено правильно. Розробка конспекту уроку з теми «Метод інтегрування частинами» подано у додатку Д.

Крім інтегрування частинами, учні вивчають також метод заміни змінної, тобто для інтеграла $\int f(x)dx$ вводять таку заміну $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$ і отримують $\int f(x)dx = \int f(x) \cdot \varphi'(t)dt$. Цей метод можна розглянути на конкретному прикладі:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

Перетворимо підінтегральну функцію і отримаємо:

$$\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x+x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

Далі вводимо нову змінну: $t=x-1 \Rightarrow x=t+1, dx=(t+1)'dt=dt.$

Підставивши заміну в початковий інтеграл, отримаємо табличний інтеграл:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=arcsint+C$$

Повертаємось до старої змінної і отримуємо такий розв'язок інтеграла:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\arcsin(x-1)+C$$

В даному прикладі використана лінійна заміна змінної, тобто змінні (стара і нова) пов'язані лінійним співвідношенням, тому легко було виразити одну змінну через іншу. Найчастіше зустрічається інша ситуація – зв'язок між змінними складніший і не просто виразити нову змінну через стару. У багатьох випадках це і не потрібно. При цьому алгоритм дій залишаться незмінним. Потрібно звернути увагу на те, що $t=\varphi(x) \Rightarrow dt=\varphi'(x)dx$ та обов'язково нагадати, що завжди потрібно повертатися до старої замінної. Розглянемо такий приклад:

$$\int\frac{(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+3}}dx$$

Введемо нову змінну $t=x^2+x+3 \Rightarrow dt=(x^2+x+3)'dx=(2x+1)dx$

Після цього інтеграл буде мати вид:

$$\int\frac{(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+3}}dx=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{x^2+x+3}+C$$

Після вивчення методів інтегрування, потрібно учням запропонувати самостійну роботу, для перевірки рівня засвоєних знань.

Самостійна робота з теми «Невизначений інтеграл»

1 варіант	а) $\int(2x-3)dx$	б) $\int\frac{4x}{\sqrt{x^2+2}}dx$	в) $\int sin^2xdx$
	г) $\int\sqrt{5-4x}\,dx$	д) $\int\sqrt{1-16x^2}\,dx$	е) $\int x^2\cdot sinx\,dx$

2 варіант	1. а) $\int (3x^2+4)dx$	б) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}dx$	в) $\int sin^6 x dx$
	г) $\int \sqrt{7-4x}\,dx$	д) $\int \sqrt{1-36x^2}\,dx$	е) $\int x^2 cosxdx$

3 варіант	1. а) $\int (x^2+7x)dx$	б) $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}dx$	в) $\int cos^4 xdx$
	г) $\int \sqrt{15-9x}\,dx$	д) $\int \sqrt{1-9x^2}\,dx$	е) $\int arcsinx\,dx$

4 варіант	а) $\int (2x^2+8x)dx$	б) $\int \frac{5x}{\sqrt{x^2+3}}dx$	в) $\int cos^2 xdx$
	г) $\int \sqrt{11-4x}\,dx$	д) $\int \sqrt{1-25x^2}\,dx$	е) $\int x\cdot e^x dx$

Після розв'язання достатньої кількості завдань на знаходження невизначеного інтеграла безпосередньо та методами інтегрування частинами і заміни змінної, слід дати контрольну роботу з теми «Первісна та невизначений інтеграл».

Контрольна робота №1

1 варіант

1. (1 бал) Знайти первісну функції $f(x) = sinx + 2x$, графік якої проходить через точку $A(0; 5)$.

2. (1,5 бали) Знайти первісну для функції $f(x) = \left(x-\sqrt{x}\right)^2 + \sin(5x-1)$.

3. (1,5 бали) $\int \frac{dx}{sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$

4. (2,5 бали) $\int xe^x dx$

5. (2,5 бали) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

6. (3 бала) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^3}}dx$

2 варіант

1. (1 бал) Знайти первісну функції $f(x) = 2x - cosx$, графік якої проходить через точку $A(0; 3)$.

2. (1,5 бали) Знайти первісну для функції $f(x) = \left(x+\sqrt{x}\right)^2 + \cos(3x-2)$.

3. (1,5 бали) $\int \left(e^{\frac{x}{4}-1} - \frac{1}{cos^2 2x} \right) dx$
4. (2,5 бали) $\int xlnxdx$
5. (2,5 бали) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$
6. (3 бала) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Перед введенням поняття визначеного інтегралу, розглядають задачі, що призводять до цього поняття.

Спочатку розглянемо поняття криволінійної трапеції. Нехай на відрізку $[a;b]$ вісі абсцис, задана неперервна функція $f(x)$. *Фігуру, яка обмежена графіком цієї функції, відрізком* $[a;b]$ *та прямими* $x=a, x=b$, *називають криволінійною трапецією* [84, с. 425]. Після цього слід навести приклади і контрприклади.

Для того, щоб обчислити площі криволінійних трапецій для довільних функцій $f(x)$ потрібно розбити відрізок $[a;b]$ на n рівних частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. На кожному з відрізків розбиття $[x_{k-1}; x_k]$ будують прямокутники з висотою, що дорівнює значенню функції в лівому (або правому) кінці відрізка (Рис. 2.3).

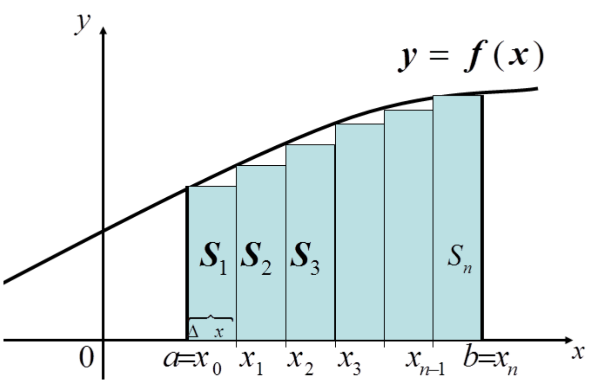


Рис. 2.3

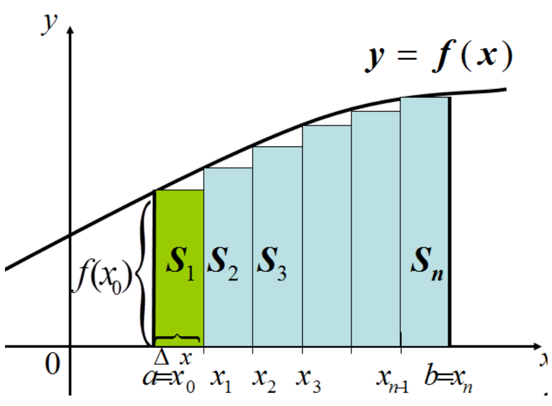


Рис. 2.4

Площу S_n східчастої фігури, що є об'єднанням побудованих прямокутників, визначають як суму (Рис. 2.4):

$$S_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x = \frac{b-a}{n}(f(x_0) + $$
$$+ f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}))$$

Оскільки $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ є довжиною кожного з відрізків розбиття.

Якщо $n \to \infty$, то $\Delta x \to 0$, і внаслідок неперервності функції $y = f(x)$ східчаста фігура дедалі менше відрізняється від криволінійної трапеції. Природно припустити, що площа S_n прямуватиме до площі S криволінійної трапеції, а наближена рівність $S_n = S$ за великих n виконуватиметься з будь-якою точністю. Це дає підставу прийняти за означенням, що $S = \lim\limits_{n\to 0} S_n$.

Після ознайомлення з розглянутою теоремою можна зразу приступити до розв'язання задач на визначення площ криволінійних трапецій. Наприклад: Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2, y = \sqrt{x}$ (Рис. 2.5).

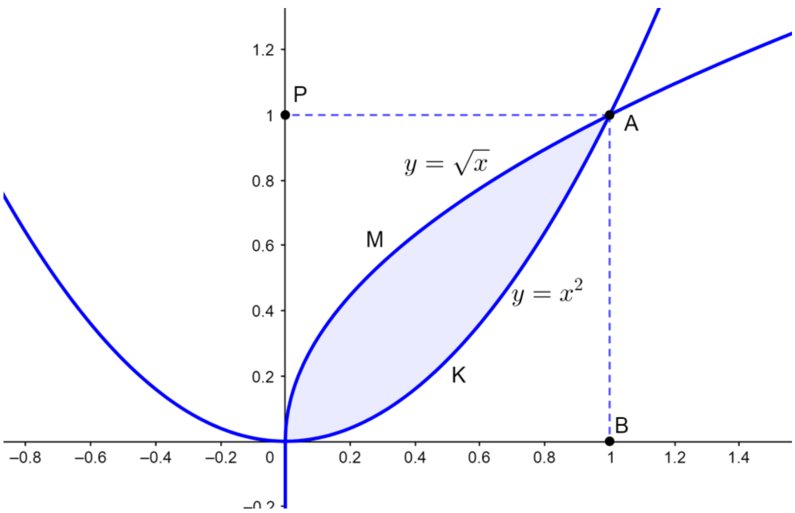


Рис. 2.5 Фігура обмежена лініями $y = x^2, y = \sqrt{x}$

Оскільки учні ще не ознайомлені з визначеним інтегралом, то розв'язання цієї задачі можна оформити в такий спосіб.

Абсциси точок перетину даної лінії: 0 і 1. Площа S утвореної фігури дорівнює різниці площ криволінійних трапецій $OMAB$ і $OKAB$. Первісною для функції $\sqrt{x}$ є $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, тому $S_{OMAB} = \frac{2}{3}\sqrt{1} - \frac{2}{3}\sqrt{0} = \frac{2}{3}$ (кв. од.). Первісною для функції x^2 є $\frac{1}{3}x^3$, тому $S_{OKAB} = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$ (кв. од.). З цього випливає, що $S = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (кв. од.).

Після цього можна розглянути ще одну задачу, яка зводиться до обчислення границі суми такого самого вигляду, як і в задачі про площу криволінійної трапеції.

Нехай потрібно обчислити масу неоднорідного за щільністю стрижня на ділянці $[0; l]$ (Рис. 2.6).

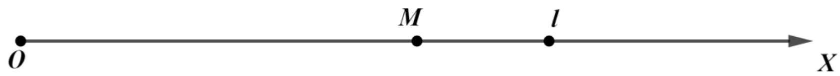


Рис. 2.6

Якщо позначити як x відстань від лівого кінця стрижня (початку відліку точки O) до точки M, то кожному x відповідатиме певне значення щільності ρ, тобто ρ є функцією від x: $\rho = \rho(x)$. Знайдемо масу стрижня, знаючи його довжину l і функцію $\rho = \rho(x)$.

Для цього розіб'ємо відрізок $[0; l]$ на n рівних частин точками

$$0 < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} = l.$$

Тоді довжина кожного з відрізків $[x_{k-1}; x_k]$ розбиття дорівнює $x_k - x_{k-1} = \Delta x = \dfrac{1}{n}$. За $n \to \infty$ $\Delta x \to 0$, а щільність стрижня на досить малій ділянці можна вважати сталою і такою, що дорівнює, наприклад, значенню функції $\rho = \rho(x)$ в лівому кінці відрізка. Тоді сума $m_n = \rho(x_0)\Delta x + \cdots + \rho(x_{n-1})\Delta x$ визначатиме наближене значення маси m усього стрижня, а $\lim_{n\to\infty} m_n$ дорівнюватиме масі m стрижня.

Цим самим методом розв'язують й інші задачі, зокрема про обчислення роботи змінної сили, кількості електрики, що проходить через поперечний переріз провідника за час від t_1 до t_2.

Таким чином, під час розгляду типових задач для неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$ було використано таку математичну модель:

1) відрізок $[a; b]$ розбивається на n рівних частин;

2) складається сума $S_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$ (інтегральна сума);

3) обчислюється $\lim_{n\to\infty} S_n$. Доводиться те, що така границя існує. Дана границя називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається $\int_a^b f(x)dx$ (читається: інтеграл від a до b еф від ікс де ікс; $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, $f(x)$ – підінтегральна функція, a – нижня межа інтегрування, b – верхня межа інтегрування).

Отже, повертаючись до розглянутих задач, площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою $S = \int_a^b f(x)dx$, в цьому і є суть геометричного змісту визначеного інтеграла.

Масу m прямолінійного стрижня з густиною $\rho(x)$ можна записати у вигляді $m = \int_a^b \rho(x)dx$ – фізичний зміст визначеного інтеграла.

Доцільно звернути увагу учнів на те, що безпосередньо за означенням легко обчислити інтеграли для найпростіших функцій, а для інших, наприклад тригонометричних, обчислення граничних сум значно ускладнюється. Саме тому, використовується наступне ***означення:*** *якщо функція* $f(x)$ *визначена і неперервна на відрізку* $[a;b]$*, а* $F(x)$ *– довільна її первісна на цьому відрізку, то*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ця рівність називається формулою Ньютона-Лейбніца. Додатково або як творче завдання можна розглянути історичну довідку, оскільки це підвищить інтерес учнів до вивчення теми.

На етапі закріплення знань та формування первинних умінь потрібно розглядати лише задачі на застосування означення визначеного інтеграла. Розв'язання основної частини як усних так і письмових вправ передбачає передусім свідоме відтворення формули Ньютона-Лейбніца, а також закріплення схеми дій під час розв'язування задач на обчислення визначених інтегралів.

Почати формування первинних умінь можна з таких вправ:

1. Чи правильна рівність:

$$a)\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b); \quad b)\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a);$$

$$c)\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,?$$

2. Доведіть правильність рівності:

$$a)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2x} = \int_0^1 dx; \qquad b)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosxdx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2\,dx$$

3. При яких значеннях справджується:

$a)$ рівність $\int_a^{2a} 4xdx = 12;$ б) нерівність $\int_0^a sinxdx > 0$

Після цього потрібно відпрацювати навички знаходити невизначений інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца. Основний акцент під час вивчення теоретичного матеріалу уроку, потрібно зробити на тому факті, що визначений інтеграл фактично дорівнює різниці значень первісних для однієї і тієї функції при різних значеннях аргументу. Тому визначений інтеграл має ряд властивостей, що майже такі самі, як і властивості первісної для функції. Оскільки учні старшої школи готові до самостійного опрацювання матеріалу, то можна запропонувати їм самостійно попрацювати з підручником і записати властивості визначеного інтеграла.

З метою свідомого застосування учнями властивостей, доцільно вимагати розуміння, яка саме властивість використовується під час розв’язання тієї чи іншої вправи, а також формулювання відповідної властивості.

Для знаходження інтегралів в яких потрібно попередньо перетворити підінтегральну функцію, потрібно щоб учень вільно володів таблицею первісних для функцій, правилами обчислення первісних, властивостями визначених інтегралів, а також уміння перетворювати алгебраїчні та тригонометричні вирази. Під час розв’язання вправ слід просити учнів обґрунтовувати свої дії, а саме: чому таке перетворення підінтегральної функції слід використати; якою формулою або правилом обчислення первісних користуємося; які властивості визначених інтегралів застосовуємо.

Рівень засвоєння матеріалу перевіряємо шляхом проведення тестових завдань в системі Moodle: https://oksanayeremenko.moodlecloud.com (Рис.2.7) вдома та за допомогою самостійної роботи у класі (Додаток В).

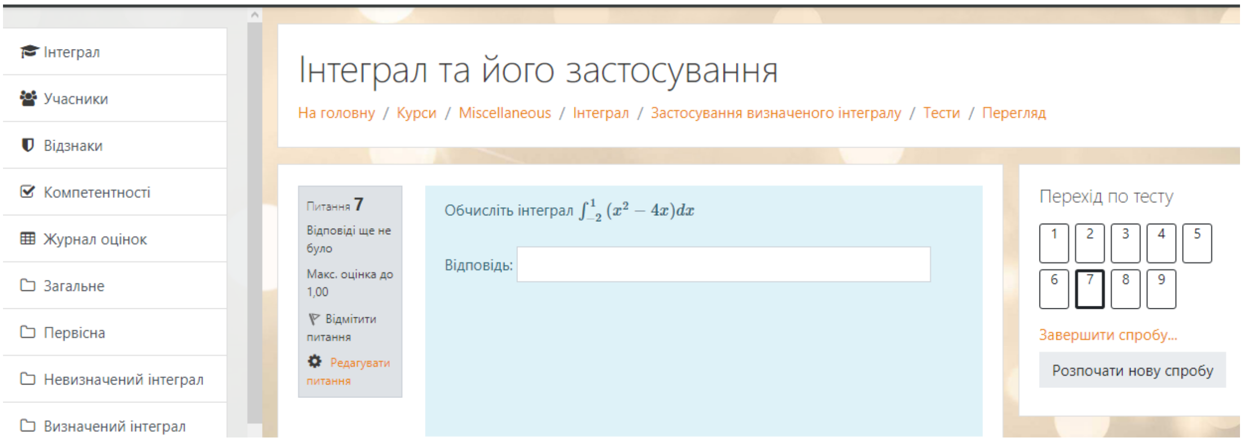


Рис. 2.7 Тести з теми «Визначений інтеграл»

Якщо під час виконання самостійної та тестової роботи учні припустилися помилок, то необхідно провести аналіз та закріпити знання означення визначеного інтеграла, формулу Ньютона-Лейбніца та властивості визначеного інтеграла. Якщо учні виконали роботу вдало, то можна одразу почати розв’язувати завдання середнього та високого рівнів складності. Також слід сказати учням про те, що при обчисленні визначених інтегралів методом інтегрування частинами використовується така сама формула як і при обчисленні невизначених інтегралів, але до неї додаються межі, тобто формула має такий вид:

$$\int_a^b udv = uv\mid_a^b - \int_a^b vdu$$

Після розв’язання достатньої кількості завдань, слід запропонувати учням розв’язати самостійну роботу на застосування цієї формули (Додаток В).

З практичної точки зору важливим є питання про схему застосування формули для обчислення площі криволінійної трапеції. Тому можна або дати готовий алгоритм учням, а потім щоб вони самостійно розв'язали приклад на застосування алгоритму або разом з ними розв'язати приклад, а потім разом скласти алгоритм.

Алгоритм обчислення площі криволінійної трапеції

Нехай криволінійна трапеція обмежена графіком функції $y = f(x)$, відрізком $[a; b]$ осі Ox і прямими $x = a$ і $x = b$. Для обчислення її площі необхідно:

1) побудувати графік функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$, прямі $y = 0$, $x = a, x = b$;

2) переконатися, що на цьому відрізку функція $y = f(x)$ неперервна і набуває тільки невід'ємних значень (тобто побудована фігура є криволінійною трапецією);

3) обчислити площу цієї криволінійної трапеції за такою формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Робота з опанування нових способів застосування формули Ньютона-Лейбніца для обчислення площ фігур, обмежених графіками кількох неперервних функцій, передбачає розвиток конструктивного мислення; оволодіння учнями геометричними вміннями, тобто вміннями «побачити» фігуру, площу якої слід виразити через визначені інтеграли як частину більш складної фігури, що складається з кількох криволінійних трапецій. Ця робота буде продуктивною за умови проведення відповідної пропедевтичної роботи на етапі актуалізації опорних знань і вмінь та опрацювання на великій кількості різноманітних прикладів. В Learning Apps нами розроблено вправу на знаходження площі криволінійної трапеції, яку можна запропонувати учням зробити вже після першого уроку з даної теми (Рис. 2.8): https://learningapps.org/display?v=pzaiuc04318.

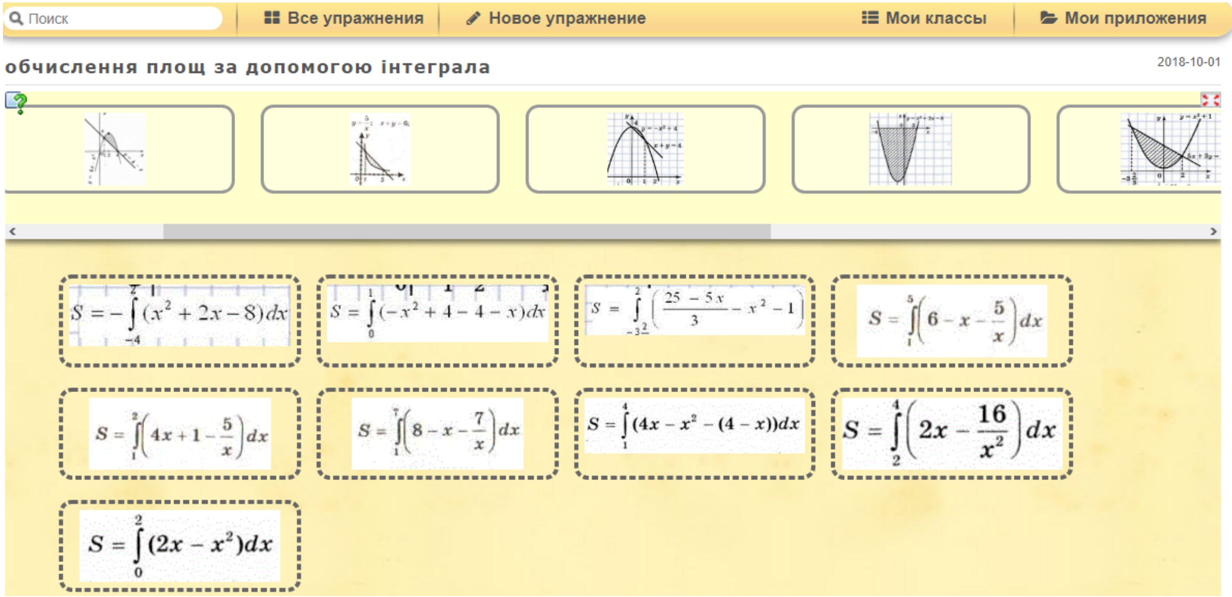


Рис. 2.8 Вправа на знаходження відповідності між заданими фігурами та формулами для обчислення площ

Стосовно способу обчислення площі фігури, обмеженої графіком від’ємної на проміжку функції, то для учнів, які мають високий рівень математичної підготовки, досить зрозумілим є те, що неможливе застосування способу обчислення площі в цьому випадку і необхідність виконання геометричного перетворення графіка функції (симетрії відносно осі Ox) та відповідного перетворення її рівняння для обчислення площі (інтеграл може бути від’ємним, а площа – ні). Зрозуміло, що при цьому учні усвідомлюють, що під час виконання такого перетворення (симетрія є рухом) фігура перетворюється в рівносильну фігуру, тому площа фігури не змінюється.

Під час обчислення площі фігури, обмеженої графіками функцій, які на відрізку $[a; b]$ набувають як додатних, так і від’ємних значень, використовуємо властивості площі, відомі учням з курсу геометрії.

Запропоновані вправи (Додаток Ж) передбачають удосконалення вмінь учнів обчислювати площі плоских фігур, а також обчислювати визначені інтеграли за формулою Ньютона-Лейбніца та використовувати властивості визначених інтегралів. Крім того, виконуючи ці вправи, учні повторюють елементарні функції та їх графіки, розв’язують рівняння, виконують арифметичні обчислення, що сприяє підвищенню їхньої загальної математичної культури. Також для удосконалення вмінь знаходити площу фігури обмежену лініями учням слід виконати тестові завдання в системі Moodle: https://oksanayeremenko.moodlecloud.com (Рис. 2.9).

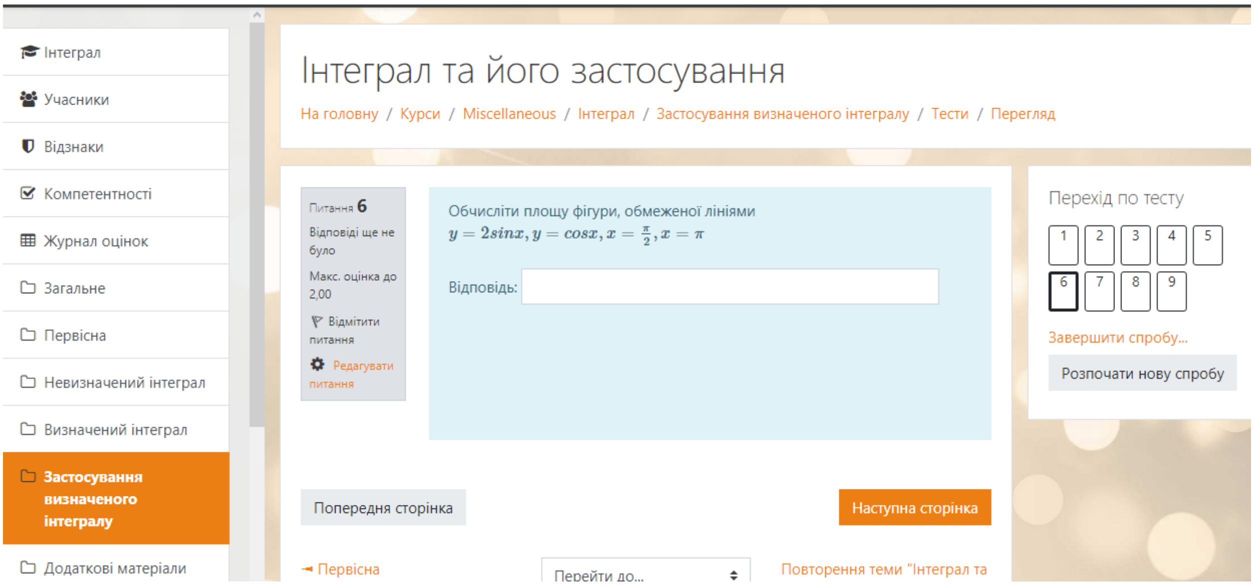


Рис. 2.9 Тести з теми «Обчислення площ плоских фігур»

З метою свідомого засвоєння формул для обчислення площ фігур, доцільно вимагати від учнів обґрунтованого застосування тієї чи іншої формули в кожному з випадків. Також слід наголосити на тому, що для розв’язування задач на обчислення площ фігур необхідним є виконання чіткого й охайного рисунка.

З поняттям об’єму тіла та його властивостями учні ознайомилися на уроках геометрії. Тому з метою свідомого сприйняття нового матеріалу повторюємо поняття об’єму геометричного тіла та властивості об’єму.

Задача обчислення об’єму тіла за допомогою визначеного інтеграла аналогічна до задачі знаходження площі криволінійної трапеції. Повне доведення формули для обчислення об’єму тіла за допомогою визначеного інтеграла в шкільному курсі не розглядається. На уроці потрібно зупинитися на наочних міркуваннях, що приводять до цієї формули.

Почати формування первинних вмінь можна з виконання таких усних вправ:

1. Знайдіть значення a і b і побудуйте функцію $S(x)$ для обчислення за формулою $v=\int_a^b S(x)dx$ об'єму призми, якщо перерізом призми площиною, перпендикулярною до осі Ox, є основа призми площею 6 см^2, а висота призми дорівнює 7 см.

2. Перевірте правильність формул для обчислення об'єму із застосуванням визначеного інтеграла:

1) об′єм призми: $V=\int_0^H Sdx, де\ S-$ площа основи, $H-$ висота;

2) об′єм циліндра: $V=\int_0^H \pi R^2 dx$ де R– радіус основи, H– висота;

3) об′єм кулі: $V=\int_{-R}^{R} \pi(R^2 x^2)dx$ де R– радіус кулі.

Після цього можна перейти до знаходження об'ємів тіл, завдання запропоновані в додатку Ж. Дані вправи, сприяють засвоєнню формул для обчислення об'ємів тіл за допомогою визначеного інтеграла. Зауважуємо, що схема дій, яка застосовується для розв'язання задач на обчислення об'ємів тіл, аналогічна до схеми дій під час розв'язання задач на обчислення площ плоских фігур.

Звертаємо увагу учнів на необхідність виконання охайного й чіткого рисунка фігури, яка обертається. Для вибору формули, за якою можна обчислити об'єм заданого тіла обертання, перевіряємо, чи одержали подане тіло у результаті обертання криволінійної трапеції. Як і під час розв'язування задач на обчислення площ фігур, знаходимо межі інтегрування, тобто абсциси точок перетину заданих ліній.

Крім знання означення, властивостей інтеграла учень, повинен мати про них зорове представлення, саме цьому сприяють прикладні задачі. В залежності від дидактичних цілей, що ставляться вчителем, прикладні задачі можна використовувати на різних етапах уроку, наприклад, при введенні нових понять, а також в самостійній роботі учнів. Але прикладні задачі майже відсутні у більшості підручників для старшої школи. Нами підібрана добірка прикладних задач, на використання інтегралів у фізиці, біології, екології, економіки та хімії.

Задача №1: «Задача про кашу»: Сергій насипав в циліндричну каструлю трохи пшона і запитав сусідку: «Скільки потрібно налити води, щоб вийшла смачна каша?» «Це дуже просто, – відповіла сусідка, – нахили каструлю, постукай, щоб крупа пересипалась і закрила рівно половину дна. Тепер зверни увагу на крапку на стіні каструлі біля краю, до якого піднялася крупа, і затисни її пальцем. До цього рівня треба налити воду!» – «Але ж пшона можна насипати побільше або поменше, та й каструлі бувають різні – широкі вузькі», – засумнівався Сергій. «Все одно, мій спосіб годиться в будь-якому випадку», – гордо відповіла сусідка » *(Відповідь:V=* $\frac{3\pi}{2} - 1$*).*

Задача №2: На залізничному переїзді у машини заглух мотор. Господар автомобіля побіг назустріч поїзду, подаючи сигнали про небезпеку. Чи можна запобігти аварії, якщо поїзд знаходиться на відстані 900 метрів від переїзду і при екстреному гальмуванні швидкість вантажного поїзда змінюється за законом $V - 0.2t$, а швидкість пасажирського за законом $V - 0.4t$, де V – швидкість (м / с), t – час (сек.)? Швидкість руху поїзда до початку гальмування – 72 км / год. Гальмівний шлях обчислюється за формулою: $S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt.$ *(Відповідь: якщо потяг вантажний – ні, якщо потяг пасажирський – так)*

Задача №3: Палуба корабля нагадує дві пересічні параболи. Скільки необхідно фарби для її покриття, якщо довжина корабля 80 м, ширина в центрі – 20 м, а на кожен квадратний метр необхідно 0,25 кг фарби? *(Відповідь: 533,4 кг)*

Задача №4: Камінь підкинутий вертикально вгору з даху будівлі висотою 20 м. Яка початкова швидкість каменя, якщо через 1 с. він перебував на висоті 30 м? *(Відповідь: 14,9 м/с)*

Задача №5: Є неоднорідний стрижень довжиною l. Яка маса шматка стрижня, якщо лінійна щільність ρ стрижня виражається законом $\rho = 3x - sin2x,\ x \in [0, l]$. *(Відповідь:* $\frac{3l^2}{2} - sin^2 l$ *)*

Задача №6: Акваріум має форму прямокутного паралелепіпеда. Знайдіть силу тиску води (щільність води 1000 кг / м^3), яка наповнює акваріум на одну з його вертикальних стінок, розміри якої 0,4 м $\times$ 0,7 м. *(Відповідь: 548,8 Н)*

Задача №7: Радіозавод випускає в рік 31000 радіоприймачів, в кожен наступний рік випуск радіоприймачів збільшується на 500 шт. Визначте суму амортизаційних відрахувань за 10 років при нормі амортизації, що дорівнює 1% від собівартості продукції, що випускається. Собівартість одного радіоприймача 50 грн. *(Відповідь: 167500 грн.)*

Задача №8: Висота купи зерна дорівнює 2,5 м, а довжина кола її основи 20 м. Купа в площині $x0y$ приблизно описується як парабола. Маса 1 м^2 зерна дорівнює 750 кг. Яка маса зерна в купі? *(Відповідь:30* т *)*

Задача №9: На початку спостереження живильний розчин містив 3000 бактерій. Дослідження показали, що в наступний проміжок часу швидкість, з якою розмножуються бактерії була $v = 420 \cdot e^{0.14t}$. Визначте відповідну функцію зростання, коли живильний розчин містив 18000 бактерій? Визначте приріст бактерій за проміжок часу від початку спостереження до 20 годин. *(Відповідь: 48914)*

Задача №10: Деякий вид шкідників розмножується в лісі в певний період часу експоненціально. На початку дослідження їх кількість оцінювалася в $2{,}0 \cdot 10^4$ особин, через 6 днів їх кількість подвоїлася. Кожен день один шкідник поїдає 4 см^2 листя. Скільки листя з'їдять шкідники за 20 днів? *(Відповідь: 546* м^2*)*

Задача №11: Заєць перетинає відкрите поле зі швидкістю $v = v(t)$ (час вимірюється в секундах, а швидкість в метрах за секунду). Яка довжина пройденого шляху по полю, якщо заєць перетнув його за 3 секунди зі швидкістю $v(t) = 4t^3 - 3t^2$, рахуючи від початку руху $t = 0$? *(Відповідь: 54м)*

Задача №12: Орел, виглядаючи свою здобич, літаючи високо над землею. Визначте, на якій висоті знаходиться орел, якщо від землі він підіймається за 5 секунд зі швидкістю, яка визначається за формулою $v(t) = 4t^3 + 3t^2$. *(Відповідь: 750 м)*

Одним з елементів навчання може стати індивідуальне завдання з теми «Інтеграл та його застосування» (Додаток Б). Його варто пропонувати на завершальному етапі вивчення теми для самостійного опрацювання перед контрольною роботою. Мета завдання – охопити матеріал теми в цілому, привернути увагу до головного, дати додаткові приклади й пояснення окремих складних моментів, підкреслити особливості й тонкощі, переконати учнів у можливості розв’язання задач основних типів. Індивідуальні завдання захищають учні – перевіряє й оцінює вчитель.

Завершальним етапом вивчення теми «Інтеграл та його застосування» є написання контрольної роботи для перевірки рівня навчальних досягнень учнів (Додаток Г), а перед контрольною учні в системі Moodle: https://oksanayeremenko.moodlecloud.com можуть пройти тест на повторення означень, формул та властивостей всієї теми «Інтеграл та його застосування».

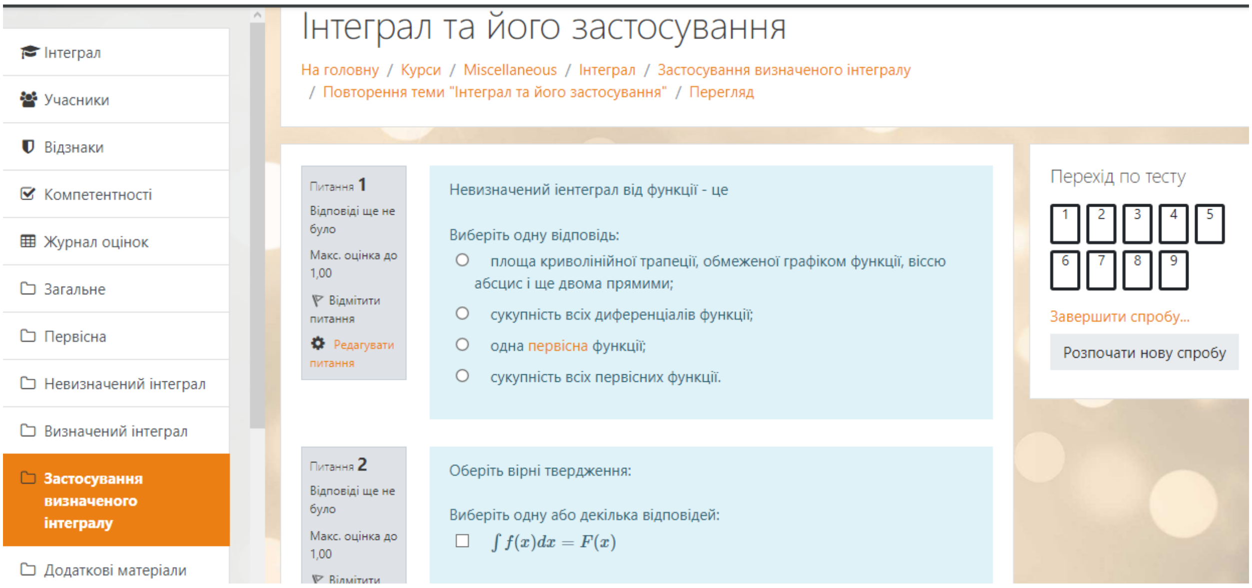


Рис. 2.10 Тести з теми «Інтеграл та його застосування»

2.2. Методи, форми і засоби компетентнісного підходу у вивченні теми «Інтеграл та його застосування»

Удосконалення загальної середньої освіти спрямовано на переорієнтацію процесу навчання, на розвиток особистості учня, навчання його самостійно оволодівати новими знаннями. Новий етап у розвитку шкільної освіти пов’язаний з упровадженням компетентнісного підходу до формування змісту та організації навчального процесу. Це вимагає певного підвищення професійної майстерності вчителя, доозброєння його новими знаннями, сучасними компетентностями, методами і технологіями, які б дозволили йому перебудувати навчальний процес відповідно до нових вимог і підходів. Компетентнісна освіта зорієнтована на практичні результати, досвід особистої діяльності, вироблення ставлень, що зумовлює принципові зміни в організації навчання, яке стає спрямованим на розвиток конкретних цінностей і життєво необхідних знань і умінь учнів.

Сучасний урок, зорієнтований на реалізацію компетентнісного підходу в навчанні, має вирішувати ряд завдань. Це зокрема:

- підвищення рівня мотивації учнів;
- використання суб’єктивного досвіду набутого учнями;
- ефективне та творче застосування набутих знань та досвіду на практиці;
- формування в учнів навичок отримувати, осмислювати та використовувати інформацію з різних джерел;
- здійснення організаційної чіткості та оптимізації кожного уроку;
- підвищення рівня самоосвітньої та творчої активності учнів;
- створення умов для інтенсифікації навчально-виховного процесу;
- наявність контролю, самоконтролю та взаємоконтролю за процесом навчання;
- формування моральних цінностей особистості;

- розвиток соціальних та комунікативних здібностей учнів;
- створення ситуації успіху [30].

В таблиці 2.1 автор [26] наводить можливі відмінності між компетентнісім уроком та традиційним на різних етапах уроку.

Таблиця 2.1

Вимоги до уроку	***Традиційний урок***	***Компетентнісний урок***
Повідомлення теми уроку	Вчитель повідомляє учням.	Вчитель повідомляє учням.
Повідомлення мети і завдань	Вчитель формулює і повідомляє учням, чому вони повинні навчитися.	Формулюють самі учні, визначивши межі знання і незнання. Вчитель допомагає, дає поради.
Планування	Вчитель повідомляє учням, яку роботу вони повинні виконати, щоб досягти мети.	Планування учнями способів досягнення поставленої мети. Вчитель допомагає, дає поради.
Практична діяльність учнів	Застосовується переважно фронтальний метод організації діяльності.	Застосовується груповий та індивідуальний методи.
Здійснення контролю	Вчитель здійснює контроль за виконанням учнями практичної роботи.	Учні здійснюють контроль (форми самоконтролю, взаємоконтролю).
Здійснення корекції	Вчитель в ході виконання і за підсумками виконаної роботи учнями здійснює корекцію.	Учні формулюють труднощі, які виникли і здійснюють корекцію самостійно. Вчитель консультує.
Оцінювання учнів	Вчитель здійснює оцінювання учнів за роботу на уроці.	Учні дають оцінку діяльності за її результатами (оцінювання себе та результатів діяльності товаришів). Вчитель консультує.
Висновок уроку	Вчитель з'ясовує в учнів, що вони запам'ятали.	Проводиться рефлексія.
Домашнє завдання	Вчитель оголошує і коментує (завдання одне для всіх).	Учні можуть вибирати завдання із запропонованих вчителем з урахуванням індивідуальних можливостей.

Для вдалого проведення компетентнісно-орієнтованого уроку, вчитель повинен добре володіти навичками моделювання, проектування та конструювання уроку [26]:

Моделювання	***Створення умовної моделі уроку:*** чітке визначення місця уроку і в змістовому, і в методичному аспектах у межах навчального курсу, розділу, теми; формулювання загальної мети вивчення матеріалу; вибір педагогічних методів, прийомів, технологій, використання яких забезпечить досягнення поставленої мети найбільш раціональним шляхом.
Проектування	***Створення структури педагогічного процесу:*** визначення виховних і розвивальних завдань; прогнозування результатів; опрацювання змістової частини матеріалу; визначення методів, прийомів роботи; прогнозування навчальних та загальних компетентностей, які формуються на уроці.
Конструювання	***Створення конструктора (конспекту) уроку:*** чітке формулювання мети, завдань, типу, форми проведення уроку; конкретизація методів, прийомів; запис дій учителя та передбачення дій учнів; раціональний розподіл часу; виділення структурних елементів навчальної діяльності.

Таким чином, в компетентнісному уроці наголошується на суб’єктності учіння й оволодінні учнями способами навчальної діяльності, особистому досвіді. Це означає, що компетентний учень той, хто вміє самостійно вчитися.

Урок алгебри відрізняється від інших уроків тим, що при вивченні будь-якої теми розв’язується велика кількість математичних завдань, тому розвивати компетентності доводиться більшою мірою за допомогою задач. А одною з основних компетентностей, яка формується на уроках алгебри є математична компетентність, розвитку якої можуть сприяти компетентнісні задачі. При вирішенні таких завдань основна увага повинна приділятися формуванню здібностей учнів використовувати математичні знання в різноманітних ситуаціях, які вимагають для свого розв’язання різних підходів, роздумів та інтуїції. Зміст завдань бажано пов’язувати з традиційними розділами або темами.

Компетентнісно-орієнтовані завдання можуть використовуватися на уроках різних типів: вивчення нового матеріалу, закріплення знань, комплексного застосування знань, узагальнення та систематизації знань, урок контролю, оцінки і корекції. Якщо на уроках математики систематично використовувати компетентнісно-орієнтовані завдання, це сприятиме формуванню ключових компетентностей учнів, підвищиться математична грамотність [91].

Виділяють наступні *типи компетентнісних задач*:

1. *Предметні компетентнісні задачі*: в умові описана предметна ситуація, для вирішення якої потрібно встановлення і використання широкого спектру зв'язків математичного змісту, що вивчається у різних розділах математики; у ході аналізу умови необхідно враховувати інформацію, представлену в різних формах; сконструювати спосіб розв'язання (шляхом об'єднання вже відомих способів). Отриманий результат забезпечує пізнавальну значимість розв'язання і може бути використаний при розв'язанні інших задач (або завдань).

2. *Міжпредметні компетентнісні задачі*: в умові описана ситуація мовою однієї з предметних областей з явним або неявним використанням мови іншої предметної області. Для розв'язання потрібно застосовувати знання з відповідних областей, необхідне дослідження умови з точки зору виділених предметних областей, а також пошук даних, яких не вистачає, причому розв'язання та відповіді можуть залежати від вихідних даних обраних (знайдених) учням.

3. *Практичні компетентнісні задачі*: в умові описана практична ситуація, для розв'язання якої, потрібно застосовувати не тільки знання з різних предметних областей (обов'язково включають математику), але і придбані з повсякденного досвіду учнів. Дані в задачі, не повинні бути відірвані від реальності (повинні відповідати дійсності, наприклад ціни, розміри будинку тощо). Отриманий результат повинен бути значущим для учнів, тобто вказана його область застосування [92].

Важливими відмінними рисами компетентнісних задач від стандартних математичних є:

1) значущість (пізнавальна, професійна, загальнокультурна, соціальна) одержуваного результату, що забезпечує пізнавальну мотивацію учня;

2) умову задачі сформульовано як сюжет, ситуацію або проблему, для вирішення якої необхідно використовувати знання (з різних розділів основного предмета – математики, з іншого предмета або з життя) на які немає явної вказівки в тексті задачі;

3) інформація і дані в задачі можуть бути представлені в різній формі (рисунок, таблиця, схема, діаграма, графік тощо), що вимагатиме розпізнавання об’єктів;

4) вказівка (явна або неявна) області застосування результату, отриманого при розв’язанні задачі [71, с.112].

В умові компетентнісної задачі можуть бути невизначені деякі з її компонентів, або може бути наявність надлишкових та суперечливих даних, що призводить до об’ємного формулювання умови. При підборі компетентнісних задач, не варто нехтувати рівнем їх складності, виконуючи поступовий перехід від низького до середнього, а потім високого рівня складності.

При проведенні компетентнісно-орієнтованих уроків, варто використовувати різні засоби навчання математики. Щоб навчання стало цікавим, на наш погляд, на уроках потрібно застосовувати інформаційні технології, проводити більше нестандартних уроків, проводити уроки з мультимедійною дошкою. Застосування інформаційно-комунікаційних технологій при вивченні алгебри і початків аналізу дає широкий спектр засобів для підтримки розвитку особистості кожного учня. Використання комп’ютерних програм у навчальному процесі здатне позитивно вплинути на якість навчання та інтелектуальний розвиток учнів: рівень їх готовності до подальшої навчальної діяльності, здатність використовувати математичні методи і комп’ютерні технології у наукових дослідженнях та при розв’язанні практичних задач. Уроки з застосуванням інформаційно-комунікаційних технологій ефективні не тільки своєю естетичною привабливістю, а й сприяють активізації різних каналів сприйняття учнів, реалізуючи тим самим принципи доступності та наочності.

До визначальних дидактичних особливостей інформаційно-комунікаційних технологій відносять такі:

- комп’ютерна візуалізація та комп’ютерне моделювання навчальних відомостей про об’єкти, процеси та явища, як реальних, так і віртуальних;
- зберігання великих обсягів даних та забезпечення мобільного доступу до них;
- забезпечення оперативного (миттєвого) оберненого зв’язку між учасниками навчального процесу;
- автоматизація обчислювальних процесів та інформаційно-пошукової діяльності;
- автоматизація процесів управління навчальною діяльністю та контроль за засвоєнням навчального матеріалу [38, с.116].

Педагогічні програмні засоби, які орієнтовані на комп’ютерну підтримку курсу математики, можна поділити на три види, залежно від їхнього впливу на зміст і методи навчання:

- педагогічні програмні засоби, що спрямовані на підвищення ефективності діючої методики навчання;
- пакети педагогічних програмних засобів, які забезпечують можливість переходу до нових методик навчання;
- системи пакетів педагогічних програмних засобів, які створюють умови для кардинальних змін викладання математики на основі широкого впровадження нових інформаційних технологій [39].

Під час вивчення теми «Інтеграл та його застосування» доречно використовувати інформаційно-комунікаційні технології для знаходження площ фігур. Оскільки, коли фігура, площу якої треба обчислити, є криволінійною трапецією стандартного вигляду (обмежена зверху графіком функції $y = f(x)$, знизу – відрізком $[a; b]$ осі *Ox*, прямими $x = a,\ x = b$), то в учнів не виникає труднощів у розв'язанні такої задачі. Проблеми виникають тоді, коли фігура розміщена між графіками функцій $y = f(x), y = g(x)$ або розміщена частково чи повністю під віссю *Ox* . Чим більше буде побудовано таких фігур і знайдено їх площ, тим краще учні засвоять цей матеріал. Але обмеженість часу уроку вимагає від учителя здійснення ґрунтовного відбору матеріалу, засобів та методів навчання задля забезпечення максимальної ефективності навчального процесу на уроці.

На сьогоднішній день розроблено значну кількість програмних засобів, які дозволяють розв'язувати досить широке коло математичних задач різних рівнів складності. До основних належать Graph Win, MathCAD, Mathlab, Mathplot, WolframAlfa, GeoGebra, GRAN 1, GRAN3D, Advanced Grapher та інші. Але вибір програмного забезпечення вчителем повинен здійснюватися так, щоб з його допомогою можна було розв'язати задачу, і в той же час, щоб робота з програмою була простою, зрозумілою учням. Тому, звичайно, використовувати такі потужні математичні пакети, як Maple, Mathematika тощо на уроках математики недоцільно. Краще звернутися до програм з доступним і простим у використанні інтерфейсом, які потребують від користувача мінімальної кількості часу для освоєння роботи з нею. Однією з таких програм є Advanced Grapher, за допомогою якої можна будувати і обчислювати площі криволінійних трапецій. Програма Advanced Grapher дозволяє будувати різноманітні графіки на площині, здійснювати дослідження функцій, наближено і точно знаходити корені алгебраїчних рівнянь тощо. Продемонструємо, як виконується побудова криволінійних трапецій та обчислення їх площ у програмі Advanced Grapher на прикладах.

Приклад 1. Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = \frac{1}{(x-1)^2}, y = 0, x = 0, x = -1$.

Після відкриття програми Advanced Grapher Version 2.2, натискаємо кнопку «Додати графік». У вікні, що відкрилось (Рис. 2.11), записуємо функцію, яку хочемо побудувати, для цього вибираємо загальний вигляд функції зі списку (в нашому прикладі необхідні функції вигляду $Y(x)$ та $X(y)$) і вносимо рівняння функцій в рядок «Формула» далі вибираємо параметри графіка: товщина, стиль лінії та колір. Після того, як рівняння усіх обмежень будуть внесені і побудовані, на екрані ми отримаємо таку картинку (Рис. 2.12).

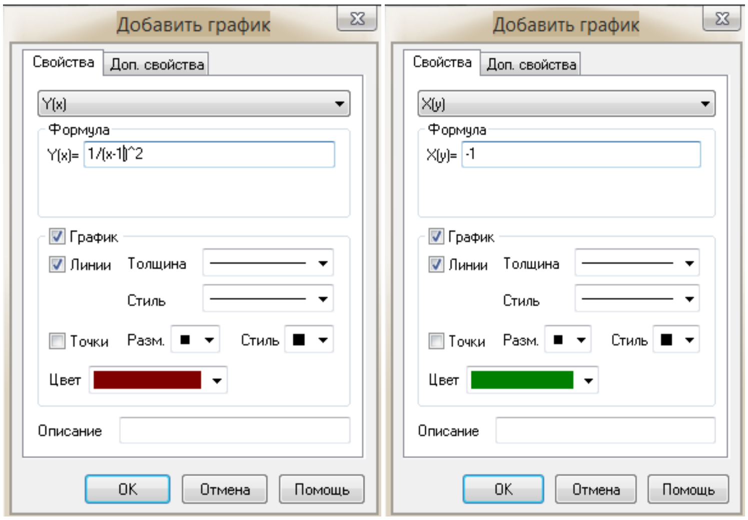


Рис. 2.11 Діалогове вікно для побудови графіків функції

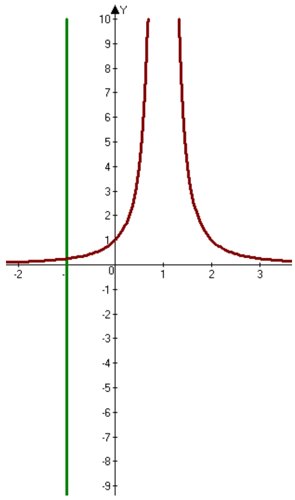
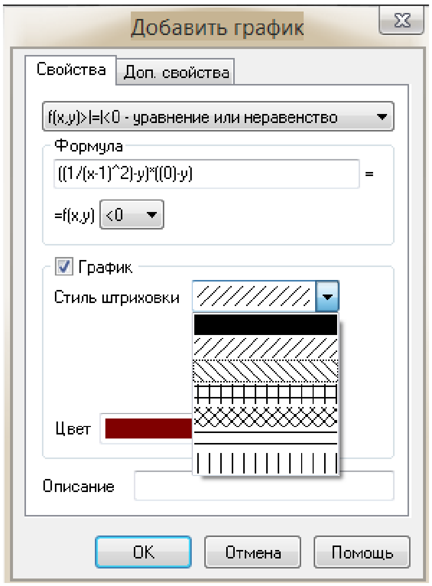


Рис. 2.12 Графік функції

Для того щоб візуально побачити цю трапецію, потрібно натиснути кнопку $\int ydx$. Після чого внесемо у вікно, що відкрилось, дані і натиснемо кнопку «Обчислити». У рядку «Висновок» побачимо чисельний результат для площі заданої трапеції. Натиснувши кнопку «Додати графік», виберемо варіант штриховки трапеції (Рис. 2.14) і на екрані побачимо саму трапецію (Рис. 2.13). Щоб збільшити або зменшити масштаб графіків по осях, є кнопки на панелі інструментів.

Після побудови криволінійної трапеції, переходимо до знаходження її площі.

$$S = \int_{-1}^{0} \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int_{-1}^{0} (x-1)^{-2} dx = -\frac{1}{x-1}\bigg|_{-1}^{0} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (кв. од)}$$



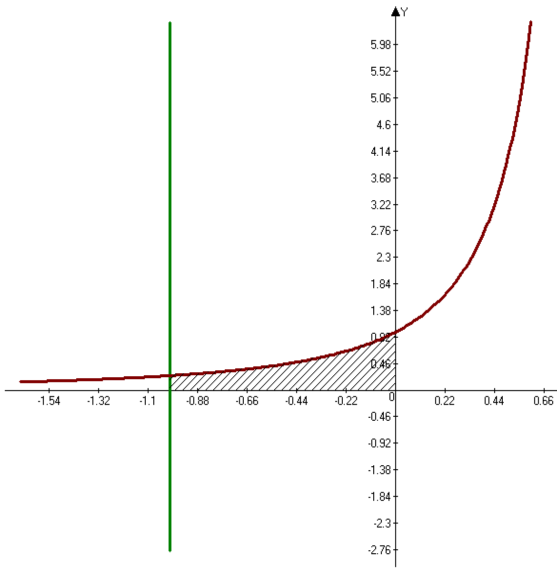
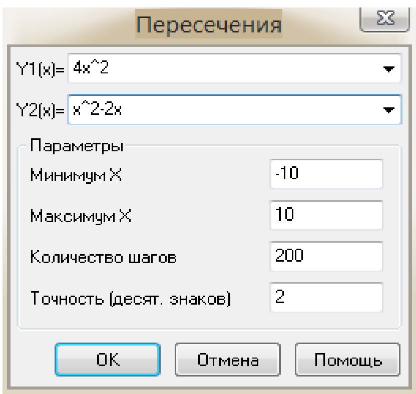


Рис. 2.13 Діалогове вікно для штриховки криволінійної трапеції

Рис. 2.14 Криволінійна трапеція

Приклад 2: Знайдіть площу фігури обмеженої лініями $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

Виконаємо ті самі дії, що і в попередньому прикладі – будуємо графіки заданих функцій: це дві параболи, вітки однієї з них опущені вниз, а другої – підняті вгору (Рис. 2.16). Щоб вказати межі інтегрування, треба знайти точки перетину цих двох парабол. Скористаємось кнопкою «Перетин» на панелі інструментів.



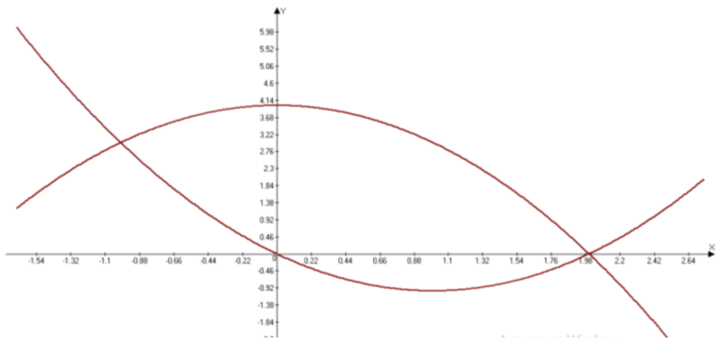


Рис. 2.15 Діалогове вікно для знаходження точок перетину двох графіків

Рис. 2.16 Графік заданих функцій

Як бачимо з Рис. 2.16 і Рис. 2.17 графіки перетинаються в двох точках, координати яких $(-1;\ 3)$ та $(2; 0)$. Отже, межі інтегрування від -1 до 2.

Тепер можемо скористатись функцією$\int ydx$ програми і побудувати та обчислити площу заданої фігури (Рис. 2.18).

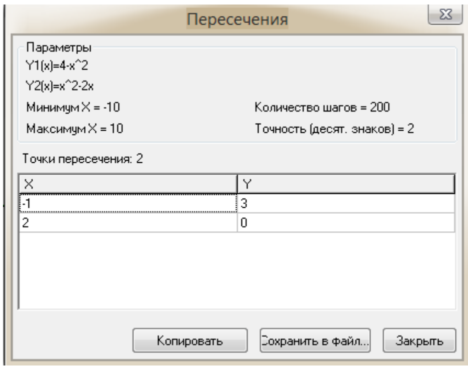


Рис. 2.17 Результат операції – точки перетину двох графіків

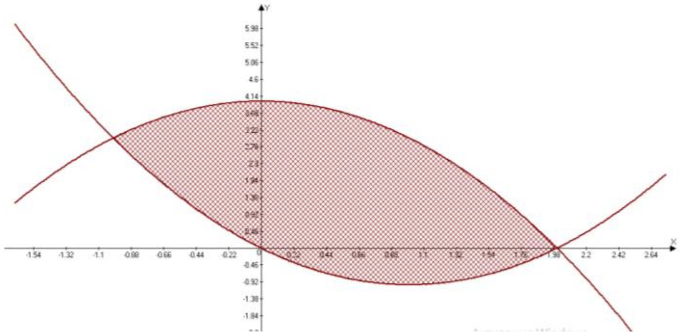


Рис. 2.18 Фігура, площу якої потрібно знайти

Обчислюємо площу заштрихованої фігури:

$$S = \int_{-1}^{2} (4 - x^2 - x^2 + 2x)dx = \int_{-1}^{2} (4 - 2x^2 + 2x)dx = \left(4x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= 8 - \frac{16}{3} + 4 + 4 - \frac{2}{3} - 1 = 9 \text{ (кв. од)}$$

Як бачимо, працювати з даним програмним засобом не складно та за допомогою нього можна не тільки будувати фігури, а й перевіряти правильність обчислення площі.

Також серед програм вільного використання, однією з найпопулярніших є інтерактивне середовище GeoGebra, яке включає в себе геометрію, алгебру та математичний аналіз. Використовувати GeoGebra доцільно при вивченні тих розділів математики, в яких крім обчислень необхідно виконувати і геометричні побудови, що сприяє кращому розумінню досліджуваного матеріалу, розвитку просторового мислення, прискорює процес розв’язання завдань, сприяє кращому засвоєнню матеріалу [90]. GeoGebra зручна у використанні, оскільки має простий та інтуїтивний інтерфейс та її можна використовувати на різних пристроях: комп’ютерах, планшетах, телефонах як в онлайн режимі так і без підключення до мережі Internet.

Наведемо приклад використання інтерактивного середовища GeoGebra для знаходження площі криволінійної трапеції.

Приклад 1. Знайти площу фігури обмеженої графіками функцій: $y = 0$, $y = x^2$, $y = 2x - x^2$.

Першим і найважливішим етапом розв'язання є побудова графіків функцій, оскільки потрібно безпомилково визначити межі інтегрування. Для цього в полі введення набираємо: $x^2 - y \geq 0\ \wedge 2x - x^2 - y \geq 0\ \wedge y \geq 0$, отримуємо область в якій всі задані графіки перетинаються (Рис. 2.19).

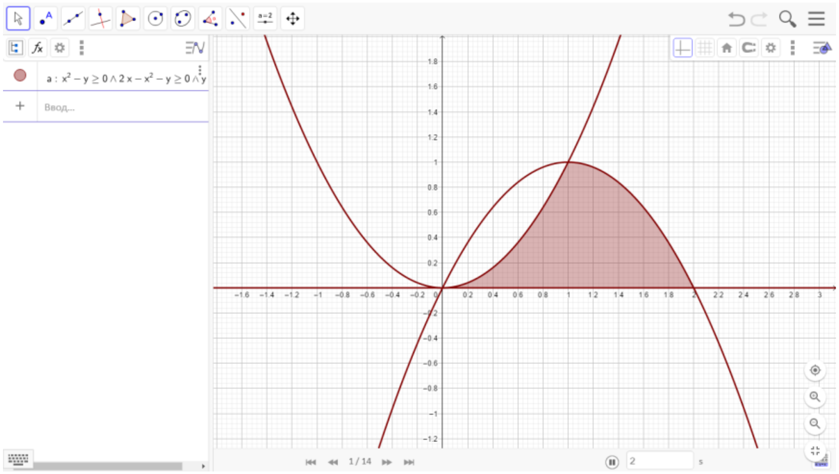


Рис. 2.19

З рисунка видно, що в даній області на відрізку $[0; 1]$ над віссю Ох розташований графік функції $y = x^2$, а на відрізку $[1; 2]$ над віссю Ох розташований графік функції $y = 2x - x^2$. Отже, щоб знайти площу зафарбованої фігури, потрібно знайти суму площ. Для наочності виділимо ці площі на рисунку. На панелі інструментів обираємо «Точка» і ставимо точки з координатами $(1; 1)$ та $(1; 0)$, далі з'єднуємо їх за допомогою інструмента «Відрізок», щоб зробити відрізок пунктирним, на панелі об'єктів натискаємо правою клавішею миші на три крапки і обираємо «Налаштування» (Налаштування ⟶ Стиль ⟶ Стиль лінії). Таким чином, поділили криволінійну трапецію на дві частини. Для того, щоб підписати графіки і замальовану область, потрібно на панелі інструментів натиснути «АВС текст» і поставити курсор на область, яку потрібно підписати, також в налаштуваннях можна обрати стиль підпису, розмір та колір (Рис.2.20).

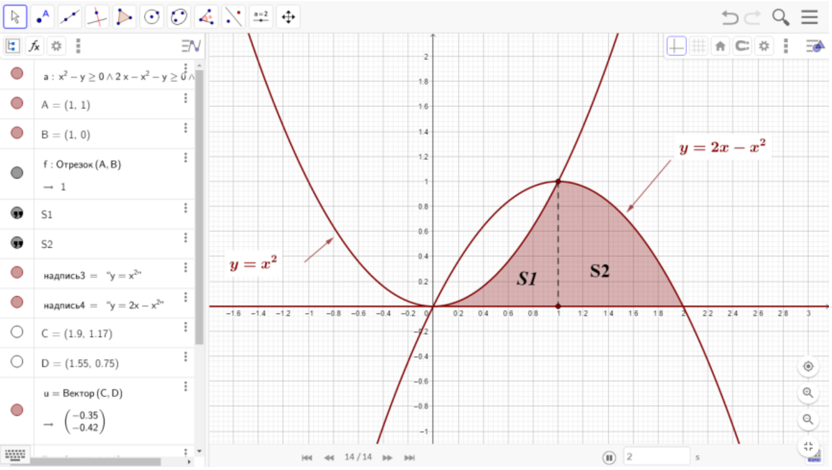


Рис. 2.20

Після побудови за відомою формулою знаходимо площу:

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

Отже, маємо таку площу криволінійної трапеції $S = 1$ кв. од.

Приклад 2:

Обчислити площу фігури обмеженої лініями $y^2 = 2x + 1$, $x - y - 1 = 0$.

Дану площу можна обчислити двома способами, розглянемо окремо кожен з них.

І спосіб:

1. Будуємо графік функцій $y = x - 1,\ y = \sqrt{2x + 1}$ (Рис.2.21).

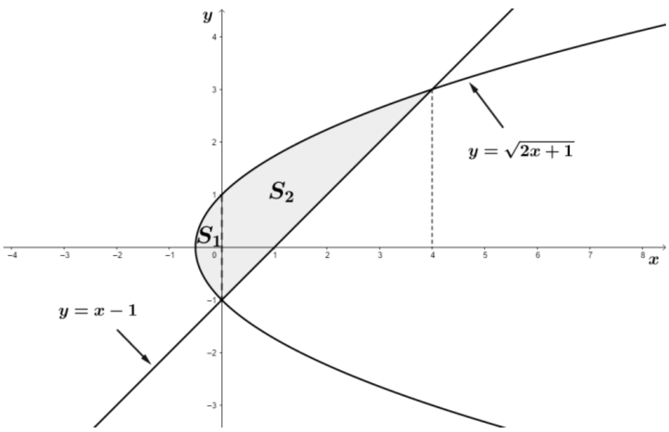


Рис. 2.21

2. Визначаємо межі інтегрування, тобто знаходимо точки перетину графіків функцій, з віссю Ox (графічно або аналітично):

$$\begin{cases} y^2 = 2x + 1 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 2x + 1 \\ \quad y = x - 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 2x + 1$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Отже, маємо такі точки перетину $(0; -1)$ і $(4; 3)$.

3. Знаходимо площу обмеженої фігури за формулою $S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$. З рисунка видно, що для того щоб знайти площу заштрихованої фігури потрібно знайти суму площ, тобто $S = S_1 + S_2$. Площа першої фігури знаходиться на відрізку $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$, а площа другої фігури знаходиться на відрізку $x \in [0; 4]$:

$$S_1 = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} (\sqrt{2x+1} - (-\sqrt{2x+1}\,))dx = 2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{2\cdot(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{0} =$$

$$= \frac{2\cdot(2\cdot 0+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2\cdot\left(2\cdot(-\frac{1}{2})+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

$$S_2 = \int\limits_{0}^{4} (\sqrt{2x+1} - (x-1))dx = \int\limits_{0}^{4} \big(\sqrt{2x+1} - x + 1\big)dx = \int\limits_{0}^{4} \sqrt{2x+1}\,dx -$$

$$-\int\limits_{0}^{4} xdx + \int\limits_{0}^{4} dx = \frac{2\cdot(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{0}^{4} - \frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{4} + \ x\ \Big|_0^4 = -\frac{4^2}{2} + \frac{0^2}{2} + 4 - 0 +$$

$$+\frac{2\cdot(2\cdot 4+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2\cdot(2\cdot 0+1)^{\frac{3}{2}}}{3} = -8 + 0 + 4 - 0 + 9 - \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$$

Отже, шукана площа заштрихованої фігури має вид:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{2}{3} + \frac{14}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3} \ \ (\text{кв. од.})$$

II спосіб:

Розглянемо фігуру (Рис. 2.22) на відрізку $y \in [-1; 3]$. В цьому випадку для знаходження площі використаємо формулу виду $S = \int_a^b \big(f(y) - g(y)\big)dy$. Тобто, лінії, що обмежуються потрібно представити у вигляді функції від аргументу y : $x = y + 1$ та $x = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}$. Таким чином, шукана площа має вид:

$$S = \int_{-1}^{3} (y + 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2})\, dy = \left(\frac{y^2}{2} + y - \frac{y^3}{6} + \frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{3^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} + 3 -$$

$$-(-1) - \frac{3^3}{6} + \frac{(-1)^3}{6} + \frac{3}{2} - \frac{(-1)}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{27}{6} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 5\frac{1}{3} \text{ (кв. од)}$$

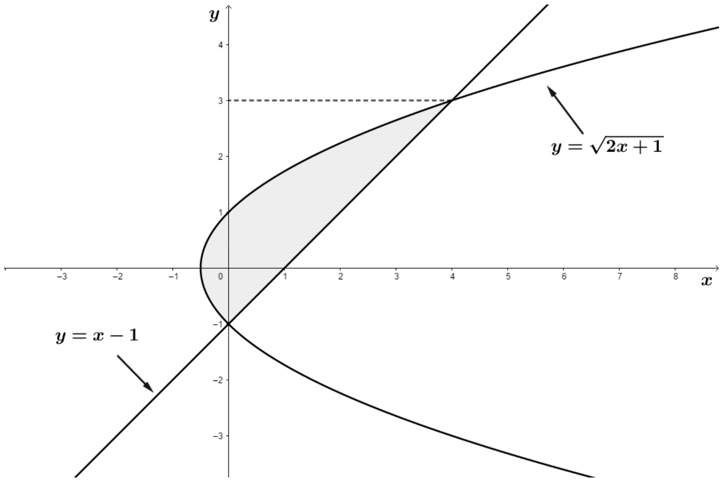


Рис. 2.22

Приклад 3:

Обчислити площу фігури обмеженої лініями $2x + 4y + 1 = 0$, $3x^2 + 4y = 0$.

1. Представимо функції у такому виді $y = \frac{-2x-1}{4}, y = -\frac{3}{4}x^2$ та побудуємо їх графіки (Рис. 2.23).
2. Для того, щоб визначити межі інтегрування, знайдемо точки перетину прямої та параболи. Для цього розв'яжемо рівняння:

$$\frac{-2x - 1}{4} = -\frac{3}{4}x^2$$

$$3x^2 = 2x + 1$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{3} \qquad x_2 = 1$$

3. На відрізку $[-\frac{1}{3}; 1]$ очевидно, що парабола знаходиться вище прямої, а тому від $-\frac{3}{4}x^2$ потрібно відняти $\frac{-2x-1}{4}$, тобто площа фігури знайдеться так:

$$S = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(-\frac{3x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) dx = \left(\frac{x}{4} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{4}\right) \Bigg|_{-\frac{1}{3}}^{1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{1}{36} -$$

$$-\frac{1}{108} = \frac{1}{4} \cdot \frac{32}{27} = \frac{8}{27} \text{ (кв. од.)}$$

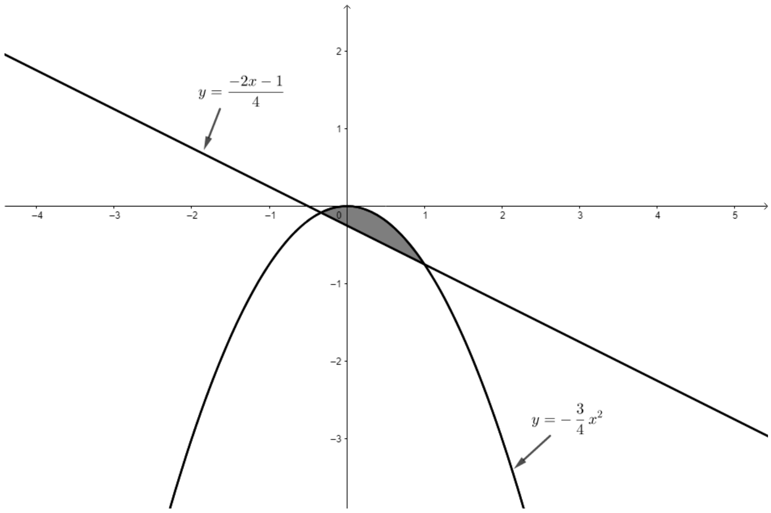


Рис. 2.23

Окрім обчислення площ криволінійних трапецій, у шкільному курсі розглядається і обчислення об'ємів тіл обертання. Під час викладання цієї теми важливо, щоб учні уявляли і могли побудувати тіла обертання, об'єми яких необхідно знайти. При виборі програмного засобу головна увага приділяється не технічному обчисленню, а саме візуалізації об'ємної фігури.

Найзручнішим та найпростішим для обчислення об'ємів тіл обертання за допомогою визначеного інтегралу є онлайн середовище WolframAlfa. Дане середовище дозволяє створити наочність до задачі – фігуру, що задана в умові, а також надає можливість перевірити правильність обчислення інтегралу. Розглянемо приклади використання цього онлайн середовища.

Приклад 1. Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2, y = 0$, навколо осі Ox.

1. Будуємо фігуру обмежену графіками $y = 2x - x^2, y = 0$. Оскільки отримана фігура обертається навколо вісі Ox, то маємо тіло обертання показане на Рис. 2.24.

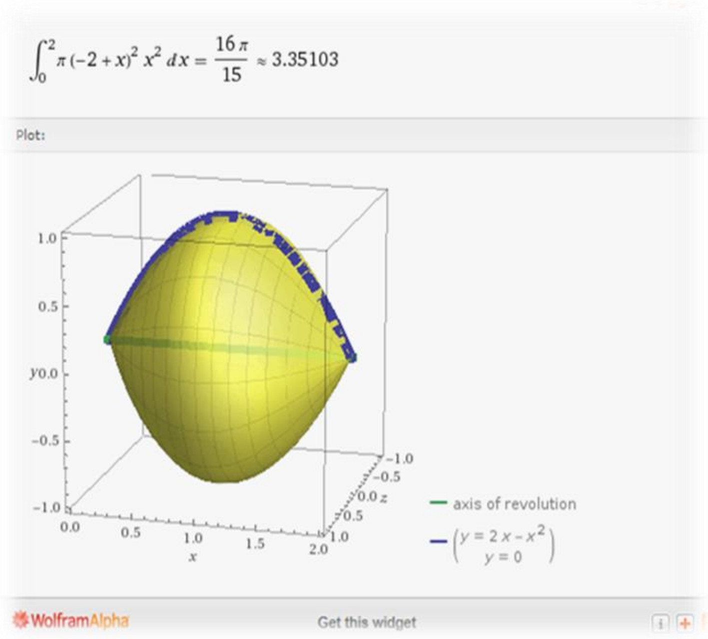


Рис. 2.24

2. Знаходимо точки перетину графіків функцій з вісю Ox:

$$2x - x^2 = 0$$

$$x(2 - x) = 0$$

$$x = 0 \text{ або } x = 2$$

3. Оскільки вісь Ox – вісь обертання, то об'єм знаходимо за формулою:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot 8 - 16 + \frac{1}{5} \cdot 32\right) = \frac{16}{15}\pi = 1\frac{1}{15}\pi \text{ (куб. од.)}$$

Приклад 2: Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігур, обмежених графіками заданих функцій $y = 2x - x^2, y = -x + 2, x = 0$, вісь обертання Ox.

1. Будуємо фігуру обмежену графіками $y = 2x - x^2, y = 0$. Оскільки отримана фігура обертається навколо вісі Ox, то маємо тіло обертання показане на Рис. 2.25.

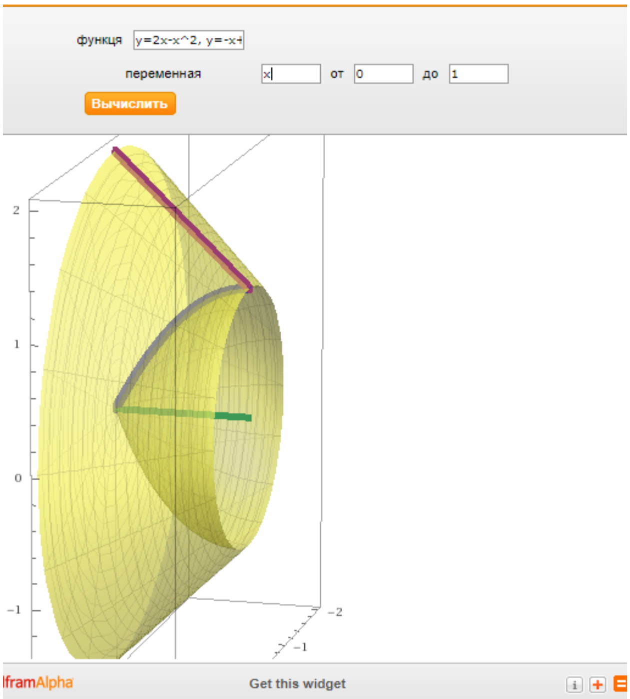


Рис. 2.25

2. Знайдемо точки перетину графіків функцій:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$$2x - x^2 = -x + 2$$

$$-x + 2 + x^2 - 2x = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 2$$

3. Оскільки вісь Ox – вісь обертання, то об'єм знаходимо за формулою:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Знайдемо об'єм тіла, як різницю об'ємів двох тіл обертання:

$$V = \pi \int_0^1 ((-x+2)^2 - (2x - x^2)^2) dx = \pi \int_0^1 (-x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x + 4) dx =$$

$$= \pi \cdot \left(-\frac{x^5}{5} + \frac{4x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x \right)\Bigg|_0^1 = \pi \left(-\frac{1}{5} + 1 - 1 - 2 + 4 \right) = \frac{9}{5}\pi$$

Отже, об’єм тіла, утвореного обертанням фігур, обмежених графіками заданих функцій навколо вісі Ox дорівнює $\frac{9}{5}\pi$ куб.од.

Порівнявши відповідь, отриману обчисленням без допомоги засобів ІКТ, з відповіддю у середовищі WolframAlfa, можна переконатись, що об’єм тіла знайдено правильно, оскільки результати співали.

Робота з інтерактивною дошкою є ще одним засобом навчання теми «Інтеграл та його застосування». В інтерактивній дошці об’єднуються проекційні технології з сенсорним пристроєм, тому така дошка не просто відображає те, що відбувається на комп’ютері, а дозволяє управляти процесом презентації. Вносити корективи, робити кольором позначки і коментарі, зберігати матеріали уроку для подальшого використання і редагування.

Працюючи з інтерактивною дошкою, вчитель завжди знаходиться в центрі уваги і підтримує постійний контакт з класом. Таким чином, інтерактивна дошка дозволяє заощаджувати час. Використання такої дошки на уроках алгебри і початків аналізу найбільш ефективне при:

- вивченні нового матеріалу;
- перевірці фронтальних самостійних робіт;
- виконанні рисунків, складання плану роботи, удосконаленні певних навичок і вмінь;
- організації дослідницької діяльності учнів;
- контролі набутих теоретичних знань: на екрані містяться запитання з наступною появою правильної відповіді для самоконтролю;
- виконанні тестових завдань з наступною правильною відповіддю [45].

Форми і місце використання інтерактивної дошки на уроці, залежить від змісту цього уроку та мети яку ставить вчитель. Можна виділити такі функції дошки:

- інструментальна (виготовлення наочної допомоги);

- демонстраційна (показ готових демонстраційних програм, презентацій тощо);
- навчальна (тренажери);
- контролююча [45].

З метою наочної демонстрації можливостей використання інтерактивної дошки при вивченні інтегралів, нами розроблено конспект уроку з теми «Обчислення об’ємів тіл» (Додаток З).

Також одним із засобів навчання можуть бути опорні конспекти, головна мета яких полягає в тому, щоб систематизувати та узагальнити знання з математики, викласти матеріал на доступному рівні, стимулювати процес запам’ятовування. Для прикладу ми розробили опорний конспект з теми «Інтеграл та його застосування» (Додаток К).

При вивченні алгебри та початків аналізу набуттю математичної компетентності сприяє значною мірою дослідницький підхід у навчанні, який реалізується через дослідницьку діяльність та навчальні дослідження. Важливе місце у такій діяльності займають активні методи навчання [86]:

- метод конкретної ситуації;
- метод проектів;
- метод мозкового штурму;
- метод евристичних запитань;
- кооперативний метод;
- метод різнорівневого навчання;
- метод навчання у групах;
- метод дослідницького навчання;
- метод проблемного навчання тощо.

Розглянемо використання даних методів при вивченні теми «Інтеграл та його застосування».

Метод проектів. Основною метою проектів є досягнення дидактичної мети через детальну розробку проблеми, що повинна завершитися цілком реальним, відчутним практичним результатом, оформленим зазначеним способом. В основу методу проектів покладена ідея, що складає суть поняття «проект», його прагматична спрямованість на результат, який можна отримати при вирішенні тієї чи іншої практично або теоретично значущої проблеми. Цей результат можна побачити, осмислити, застосовувати в реальній практичній діяльності [54].

Метод проектів завжди орієнтований на самостійну діяльність учнів – індивідуальну, парну, групову, яку учні виконують протягом певного відрізку часу.

На уроках алгебри та початків аналізу при вивченні теми «Інтеграл та його застосування» учнів доцільно розбити на декілька підгруп і кожній підгрупі видати завдання, а результати подати у вигляді презентації.

Різнорівневе навчання – це така організація навчального процесу, при якому кожен учень має можливість опанувати навчальний матеріал на різному рівні, не нижче базового, залежно від його здібностей та індивідуальних особливостей особистості, при цьому за критерій оцінки діяльності учня приймаються його зусилля з оволодіння цим матеріалом, творче його застосування. При вивченні теми «Інтеграл та його застосування» групу доцільно розділити на три частини: сильна, середня та проблемна групи. Теоретичний матеріал доцільно представити у вигляді презентації, після чого сильній групі видати завдання на застосування визначеного інтегралу, а з іншою частиною учнів продовжувати працювати далі. Разом із середньою та проблемною групами необхідно розглянути приклади з теми і після цього середній групі видати завдання для самостійного виконання. Із проблемною групою продовжувати розв’язувати завдання із чітким поясненням ходу розв’язання задач [54].

Метод дослідницького навчання передбачає творче застосування набутих знань, оволодіння методами наукового пізнання, формування досвіду самостійного наукового пошуку.

Характерні ознаки цього методу такі:

1) вчитель разом з учнями формулює проблему;

2) нові знання не повідомляють, а учні повинні самостійно здобувати їх у процесі дослідження проблеми, порівняти різні варіанти відповідей, а також визначити основні засоби досягнення результатів;

3) основною метою діяльності викладача є оперативне управління процесом розв'язання проблемних завдань;

4) навчання характеризується високою активністю, підвищеним інтересом учнів, а набуті знання є більш глибокими [25].

Виконання дослідницького завдання передбачає такі етапи:

1) спостереження і вивчення фактів, виявлення суперечностей у предметі дослідження (постановка проблеми);

2) формулювання гіпотези щодо розв'язання проблеми;

3) побудова плану дослідження та його реалізація;

4) аналіз і систематизація одержаних результатів, формулювання висновків [90].

На уроках алгебри та початків аналізу метод дослідницького навчання доцільно використовувати при розв'язанні задач прикладного характеру. Так при вивченні інтегралів перед учнями можна поставити проблему знайти об'єм кар'єру. Учням надається рівняння параболи і за допомогою визначеного інтегралу обчислити об'єм тіла обертання, а результати порівняти із результатами, одержаними із використанням систем комп'ютерної математики.

Зазначені методи можуть бути використані при організації процесу навчання як окремо, так і в поєднанні один з одним.

Висновки до розділу 2

У другому розділі кваліфікаційної роботи нами розкрито методичні основи вивчення теми «Інтеграл та його застосування» на засадах компетентнісного підходу. Виділено предметні математичні компетентності, якими повинен володіти учень з урахуванням наступних вимог до нього при вивченні інтегралів. Для формування цих математичних компетентностей ми розробили завдання в системі Moodle, які пропонуються учням у якості домашнього завдання.

З кожної теми розроблено тести, при проходженні яких, учні одразу отримують оцінку. Також на Moodle є цікаві відео про інтеграл та його застосування, про історію виникнення інтегралу, теоретичний матеріал з детально розібраними прикладами, так учні яких не було на уроці можуть самі спробувати розібрати тему. Оскільки важливо вільно володіти означеннями, то майже в кожному тесті є завдання на відтворення означень для того, щоб постійно повторювати їх.

Проаналізувавши шкільні підручники з алгебри та початків аналізу, ми побачили, що у них майже не має вправ на відпрацювання навичок знаходити невизначений інтеграл, прикладних задач та найпростіших методів інтегрування. Саме тому ми розробили математичний тренажер для знаходження невизначеного інтегралу, конспект уроку з теми «Метод інтегрування частинами» та підібрали прикладні задачі на використання інтегралів у фізиці, біології, екології, економіки та хімії.

В даному розділі ми детально розглянули програмні засоби з простим інтерфейсом для знаходження площ: Advanced Grapher, GeoGebra та для знаходження об’ємів – WolframAlfa, а також з метою наочної демонстрації використання інтерактивної дошки при вивченні інтегралів ми розробили урок «Обчислення об’ємів тіл».

До кожної теми розроблено самостійні та контрольні роботи, індивідуальне домашнє завдання, підібрана система рівневих завдань, зроблено календарно-тематичне планування та опорні конспекти.

ВИСНОВОК

Під час написання кваліфікаційної роботи було опрацьовано та проаналізовано навчальні програми, державні стандарти, діючі підручники з алгебри та початків аналізу, навчальну та методичну літературу з теми дослідження.

Виконано логіко - математичний аналіз з теми «Інтеграл та його застосування» з позиції формування математичної компетентності учнів для класів з поглибленим вивчення математики. Аналіз дозволив виявити, що у старшій школі недостатньо уваги приділяється вивченню невизначених інтегралів та зовсім не має теоретичного і практичного матеріалу для вивчення найпростіших методів інтегрування. Зважаючи на цю проблему, у роботі висвітлено методичні рекомендації до проведення уроків в класах поглибленого рівня, на яких у процесі розв’язання інтегралів відбувається формування математичної компетентності учнів.

Розроблено систему рівневих завдань, орієнтованих на формування предметної математичної компетентності старшокласників при вивченні теми «Інтеграл та його застосування». Для формування навичок, знаходити первісну та інтеграли, оскільки вони є важливими при вивченні алгебри та початків аналізу і широко представленні в завданнях ЗНО, нами розроблено тести в системі Moodle та вправи в Learning Apps.

Впровадження в навчальний процес компетентнісного підходу є необхідною умовою для оволодівання учнями набором компетентностей, які формують розвинену та творчу особистість. Саме формування у старшокласників математичної компетентності у процесі вивчення алгебри і початків аналізу сприяє умінню аналізувати, узагальнювати і робити висновки, що забезпечує оволодіння загальними логічними прийомами мислення, які необхідні як в професійній, так і повсякденній діяльності.

Для забезпечення максимальної ефективності компетентнісно-орієнтованого навчання теми «Інтеграл та його застосування» ми розглянули методи, форми і засоби навчання. Розглянуті інформаційні технології, при вивченні даної теми, підвищують рівень практичного володіння поняттями, а головне, формують навички самостійної діяльності, ініціативність. Інформаційно-комунікаційні технології відкривають можливості індивідуалізації та диференціації навчальної діяльності, по-новому організовують взаємодію всіх суб’єктів навчання, будують систему, у якій учень є активним і рівноправним учасником освітньої діяльності.

Створене навчально-методичне забезпечення для класів з поглибленим вивченням математики суттєво доповнює навчальні матеріали шкільних підручників та сприяє кращому розумінню понять даної теми.

Таким чином, поставлена мета досягнута, завдання дослідження виконано.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра 11 клас: для класів з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2011. – 256 с.
2. Алгебра 11 клас: збірник задач і контрольних робіт / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2012. – 96 с.
3. Алгебра и начала анализа / [С. А. Ануфриенко, А. М. Гольдин, С. В. Гулика та інші]. – Екатеринбург: СУНЦ УрГУ, 2011. – 219 с. – (2-е изд. испр.).
4. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразов. учреждений: базовый и проф. уровни / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – Москва: Просвещение, 2009. – 464 с. – (8-е изд.). – (МГУ – школе).
5. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / [Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров, М. В. Ткачева та інші]. – Москва: Мнемозина, 2010. – 264 с. – (8-е изд.,стер.).
6. Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы. 11 класс: проф. уровень / М. И. Шабунин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фдорова, О. Н. Доброва. – Москва: Просвещение, 2010. – 143 с. – (2-е изд.).
7. Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы. 11 класс: проф. уровень / В. Н. Соломин, К. М. Столбов, М. Я. Пратусевич, А. Н. Головин. – Москва: Просвещение, 2012. – 96 с.
8. Алгебра і початки аналізу. 11 клас: Пробний підручник / О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. – 384 с.

9. Аллагулова И. Н. Формирование математической компетентности старшеклассника в образовательном процессе: автореф. дис. на соискание науч. степеня канд. пед. наук: спец. 13.00.01 «Общая педагогика, история педагогики и образования» / Аллагулова Ирина Николоевна – Оренбург, 2007. – 24 с.
10. Баврин И. И. Курс высшей математики: учеб. для студ. высш. пед. уч. заведений / И. И. Баврин, В. Л. Матросов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2003. – 400 с.
11. Бевз В. Г. Практикум з історії математики: Навч. посіб. для студентів фіз.-мат. факультетів пед. університетів / В. Г. Бевз. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. – 312 с.
12. Бевз Г. П. Алгебра (Алгебра і початки аналізу): підруч. для 11 класів загальноосвітніх навч. закладів: академічний рівень, профільний рівень / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – Київ: Освіта, 2011. – 400 с.
13. Бевз Г. П. Методика викладання математики / Григорій Петрович Бевз. – Київ: Вища школа, 1989. – 367 с. – (3-е видання).
14. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Георгий Николаевич Берман. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
15. Бондар С. П. Термінологічний аналіз поняття «компетенція» і «компетентність» у педагогіці: сутність та структура / Світлана Бондар // Освіта і управління. – 2007. – Т. 10. – №2. – С. 93–99
16. Великий тлумачний словник сучасної української мови / [Уклад. і голов. ред. В. Т. Бусел]. – Ірпінь: Перун, 2004. – 1440 с.
17. Ветров В. В. Содержание и методика изучения элементов интегрального исчисления и дифференциальных уравнений в средней школе: автореф. дис. канд. пед. наук / В. В. Ветров. – Казань, 1971.– 22 с.
18. Вилейнтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Г. Вилейнтнер. – Москва: Физматгиз, 1966. – 469 с.
19. Виленкин Н. Я. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс.

Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (углублённый уровень) / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – Москва: Мнемозина, 2014. – 312 с. – (18-е изд.,стер.).

20. Вища математика у прикладах і задачах. Ч. 2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних / [А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин, Г. М. Кривошеєва та інші]. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 440 с.
21. Гайштут О. Г. Алгебра 7-11 клас. Збірник задач / Олександр Григорович Гайштут. – Київ: КІМО, 2000. – 192 с.
22. Галицкий М. Л. Углубленное изучение алгебры и математического анализа: Кн. для учителя / М. Л. Галицкий. – Москва: Просвещение, 2001. – 352 с.
23. Гаук М. М. Самостійні та контрольні роботи. Алгебра та початки аналізу. 11 клас / М. М. Гаук, Л. В. Зубович. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 1999. – 96 с.
24. Гераскина Е. В. Содержание и методические особенности изучения темы «Определенный интеграл» в средней школе: автореф. дис. на соискание уч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 – (математика) / Гераскина Елена Викторовна – Москва, 2007. – 23 с.
25. Гераськина Е. В. Содержание и методические особенности изучения темы «Определенный интеграл» в средней школе: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Гераськина Елена Викторовна – Москва, 2007. – 145 с.
26. Глобін О. І. Компетентісно - орієнтована методика навчання математики в основній школі / О. І. Глобін, М. І. Бурда, Д. В. Васильєва. – Київ: Педагогічна думка, 2014. – 245 с.
27. Глобін О. І. Концепція реалізації компетентнісного підходу в навчанні математики в основній школі [Електронний ресурс] / О. І. Глобін, М. І. Бурда // Математика в рідній школі. – 2015. – Режим доступу до ресурсу: http://www.undip.org.ua/info/3391/

28. Глобін О. І. Оцінювання навчальних досягнень учнів в умовах реалізації компетентнісного підходу / Олександр Ігорович Глобін. // Вісник Черкаського університету. – 2012. – № 153. – С. 31.

29. Головань М. С. Компетенція і компетентність: досвід теорії. Теорія досвіду / М. С. Головань // Вища освіта України. – 2008. – №3. – С. 23–30.

30. Головань М. С. Математичні компетентності чи математична компетентність? / М.С. Головань // Розвиток інтелектуальних вмінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – м. Суми) : У 3-х частинах. Частина 1 / Упорядник Чашечникова О.С. – Суми: Мрія, 2012. – С. 36-38.

31. Гуцан Л. А. Компетентнісний підхід у сучасній освіті / Л. А. Гуцан. // Вісник Черкаського університету. – 2010. – С. 52–56.

32. Дахин А. Н. Компетенция и компетентность: сколько их у российского школьника / Дахин А. Н. // Народное образование. – 2004. – №4. – С. 136 – 144.

33. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие / Борис Павлович Демидович. – Москва: Издательство Московского университета, 1997. – 624 с. – (11-е изд.).

34. Денищева Л. О. Проверка компетентности выпускников средней школы при оценке образовательных достижений по математике / Л. О. Денищева, Ю. А. Глазков, К. А. Краснянская // Математика в школе. – 2008. – № 6. – С. 15-17.

35. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс]. – 2018. – Режим доступу до ресурсу: http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-п.

36. Дорофеев Г. В. Конценци профильног курс математик / Г. В. Дорофеев, Е. А. Седова, С. Д. Троицка // Математика в школе. – 2006. – № 7.– с.14-25.

37. Єршова А. П. Самостійні та контрольні роботи з алгебри та початків аналізу для 10-11 класу / А. П. Єршова, В. В. Голобородько. – Харків, Москва: Гімназія, Ілекса, 2002. – 176 с.
38. Жалдак М. І. Комп’ютер на уроках математики: посібник [для вчителів] / М. І. Жалдак. – Київ: Техніка, 1997. – 304 с.
39. Жалдак М. І. Педагогічний потенціал впровадження дистанційних форм навчання // Матеріали науково-методичного семінару «Інформаційні технології в навчальному процесі». – Одеса: Вид. ВМВ, 2009. – С. 6 – 8.
40. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: Учебное пособие для 10-11 классов средней школы / Б. М. Ивлев, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, С. И. Шварцбурд. – Москва: Просвещение, 1990. – 48 с.
41. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики: 11 клас: у 2-х ч. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір; за ред. М. І. Бурди. – Київ: Центр навчально-методичної літератури, 2014. – 224 с.
42. Звєрєва Г. Ф. Компетентнісний підхід до навчання учнів на уроках математики / Галина Федосіївна Звєрєва. – Харків: РМК Московського РУО, 2008. – 81 с.
43. Зимняя И. А. Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования [Электронный ресурс] / И. А. Зимняя. – 2011. – Режим доступа: http://aspirant.rggu.ru/article.html?id=50758.
44. Зіненко І. М. Визначення структури математичної компетентності учнів старшого шкільного віку / І. М. Зіненко // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. – 2009. – №2. – С. 165-174.
45. Иванова Т. А. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т. А. Иванова, Е. Н. Перевощикова, Л. И. Кузнецова, Т. П. Григорьева – Нижний Новгород: НГПУ, 2009. –355 с.

46. Ивлев Б. М. Алгебра и начала анализа: дидактические материалы для 11 класса / Б. М. Ивлев, С. М. Саакян, С. И. Шварцбурд. – Москва: Просвещение, 2007. – 192 с. – (10-е изд.).
47. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3- х т. Т. 1. С древнейших времен до начала нового времени / Под редакцией А. П. Юшкевича. – Москва: Наука, 1970. – 353 с.
48. Істер О. С. Дидактичні матеріали з алгебри. 11 клас: Вправи. Самостійні роботи. Тематичні контрольні роботи. Завдання для корекції знань / О. С. Істер. – Кам’янець-Подільський: Абетка, 2004. – 170 с.
49. Істер О. С. Збірник завдань атестаційних робіт з математики: 11 клас / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ: Генеза, 2015. – 40 с.
50. Капіносов А. М. Тести з алгебри: тематичні та підсумкові. 11 клас / Анатолій Миколайович Капіносов. – Київ: А.С.К., 1997. – 96 с. – (2-ге вид.).
51. Капкаева Л. С. Теория и методика обучения математике: частная методика. В 2 ч. Часть 2: учеб. пособие для вузов / Лидия Семеновна Капкаева. – Москва: Издательство Юрайт, 2017. – 191 с. – (Серия: Университеты России).
52. Каплун О. І. Математика. Комплексний довідник / О. І. Каплун, О. М. Роганін. – Харків: ТОВ «Видавничий дім Весна», 2012. – 384 с. – (4-те видання, зі змінами).
53. Клочко І. Я. Алгебра. Зошит для контрольних робіт (за типологією завдань зовнішнього незалежного оцінювання). 11 клас / І. Я. Клочко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2009. – 144 с.
54. Ковальчук В. І. Ефективний урок: технології, структура, аналіз / В. І. Ковальчук. – Київ: Шк.Світ, 2011. – 120 с.
55. Колмогоров А. Н. Математика в её историческом развитии / А. Н. Колмогоров [под ред. В. А. Успенского]. – Москва: Наука, 1991. – 221 с.

56. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: Метод. посібник / О. І. Глобін, М. І. Бурда, Д. В. Васильєва, В. В. Волошина, О. П. Вашуленко, Н. Д. Мацько, Т. М. Хмара. – Київ: Педагогічна думка, 2015. – 245с.
57. Кудрявцев Л. Д. Мысли о современной математике и ее изучении / Л. Д. Кудрявцев. – Москва: Наука, 1977. – 111 с.
58. Лебединцев К. Ф. Преподавания алгебры и начал анализа: Пособие для учителей / Константин Феофанович Лебединцев. – Киев: Радянська школа, 1984. – 248 с.
59. Литвиненко Г. М. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Частина 1. Алгебра та початки аналізу / Г. М. Литвиненко, Л. Я. Федченко, В. О. Швець. – Львів: ВНТЛ, 1997. – 96 с.
60. Маркушевич А. И. На путях обновления школьного курса математики. Сборник статей и материалов. Пособие для учителя / А. И. Маркушевич, Г. Г. Маслова, Р. С. Черкасов. – Москва: Просвещение, 1978. – 288 с.
61. Математика в примерах и задачах: учебное пособие для учащихся колледжей: Часть 4 / Л. И. Майсеня, М. В. Ламчановская, Н. В. Михайлова. – Минск: МГВРК, 2007. – 248 с.
62. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: методическое пособие для 11 класса / М. И. Шабунин, А. А. Прокофьев, Т. А. Олейник, Т. В. Соколова. – Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 360 с.
63. Математика: иллюстрированная история / Том Джексон; [пер. с англ. А. Соловьева]. – Москва: Издательство «Э», 2017. – 168 с.: ил. – (Иллюстрированная энциклопедия науки).
64. Математика: Навчальна програма для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики) [Електронний ресурс] – Режим доступу до

ресурсу:http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/navchalni-programy.html.

65. Математика: Навчальна програма для учнів 8 - 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/navchalni-programy.html.

66. Математика: посібник для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання / [А. М. Капіносов, Г. І. Білоусова, Г. В. Гап’юк та ін.]. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2011. – 400 с.

67. Мордкович А. Г. Беседы с учителями математики: учебно-методическое пособие / Александр Григорьевич Мордкович. – Москва: Мир и образование, 2005. – 336 с. – (2-изд.).

68. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: дворівневий підручник для 11 класу загальноосв. навч. закладів / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Харків: Світ дитинства, 2006. – 416 с. – (2-е вид.).

69. Никифоровский В. А. Путь к интегралу / В. А. Никифоровский. – Москва: Наука, 1985. – 193 с.

70. Ованесов Н. Г. Основные понятия математического анализа и методика их изучения в средней школе и педагогическом институте / Н. Г. Ованесов. – Астрахань: Школа-Пресс, 1969. – 157 с.

71. Павлова Л. В. Компетентностные задачи как средство совершенствования предметно-методической компетентности будущего учителя математики [Текст] / Л. В. Павлова // Проблемы и перспективы развития образования: материалы междунар. науч. конф. (г. Пермь, апрель 2011 г.). Том 2. — Пермь: Меркурий, 2011. – С. 111–115.

72. Пашкевич А. В. Компетентностно-ориентированный урок / А. В. Пашкевич. – Волгоград: Учитель, 2014. – 207 с.

73. Плахова В. Г. Математическая компетенция как основа формирования у будущих инженеров профессиональной компетентности / В. Г. Плахова

// Известия Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. – 2008. – № 82-2. – С. 131–136.

74. Повний курс математики в тестах / Ю. О.Захарійченко, О. В. Школьний, Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна. – Харків: Видавництво «Ранок», 2011. – 496 с. – (Енциклопедія тестових завдань).

75. Потапов М. К. Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы. 11 класс: учеб.пособие для общеобразов. организаций: базовый и углубленный уровни / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. – Москва: Просвещение, 2017. – 189 с. – (9-е изд.). – (Серия: МГУ - школе).

76. Потапов М. К. Алгебра и начала математического анализа. Книга для учителя. 11 класс: базовый и проф. уровни / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. – Москва: Просвещение, 2009. – 256 с.

77. Предметна компетентність [Електронний ресурс]. – 2017. – Режим доступу до ресурсу: http://compi.com.ua/predmetna-kompetenciya.html.

78. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія / Сергій Анатолійович Раков. – Харків: Факт, 205. – 360 с.

79. Раков С. А. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія освіти / С. А. Раков // Математика в школі. – 2007. – № 5. – С. 2-8.

80. Раков С. А. Формування математичної компетентності учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій : дис. докт. пед. наук : 13.00.02 / Раков Сергій Анатолійович – Харків, 2005. – 526 с.

81. Ракута В.М. Система динамічної математики GeoGebra як інноваційний засіб для вивчення математики / В.М. Ракута // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2012. – № 4 (30). – С. 15 – 33.

82. Рыжик В. И. Дидактические материалы по алгебре и математическому анализу с ответами и решениями для 10-11 классов. Учебное пособие

для профильной школы / В. И. Рыжик, Т. Х. Черкасова. – Санкт-Петербург: СМИО Пресс, 2008. – 428 с.

83. Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математике: метод. пособие / Зинаида Ивановна Слепкань. – Киев: Радянська школа, 1983. – 192 с.

84. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підруч. для студентів матем. спеціальностей пед. вузів / Зінаїда Іванівна Слєпкань. – Київ: Вища школа, 2000. – 512 с.

85. Словарь иностранных слов / зав. ред. В. В. Пчелкина. – Москва: Русский язык, 1988. – 624 с.

86. Смагіна Т. М. Теоретичні та практичні основи конструювання компетентнісного уроку / Т. М. Смагіна. // Вісник Житомирського державного університету. – 2012. – С. 128 – 131.

87. Стадник Л. Г. Алгебра і початки аналізу. Геометрія 11 клас. Варіанти завдань для тематичного оцінювання навчальних досягнень учнів / Л. Г. Стадник, І. С. Маркова. – Харків: Веста: Видавництво «Ранок», 2004. – 88 с. – (2-ге вид. випр.).

88. Тягай І.М. Застосування інформаційно-комунікаційних технологій під час вивчення математичного аналізу / І. М. Тягай // Інформаційні технології в освіті. – 2008. – № 5. – С. 116 –122.

89. Федорова Н. Е. Изучение алгебры и начал математического анализа в 11 классе: книга для учителя / Н. Е. Федорова, М. В. Ткачева. – Москва: Просвещение, 2009. – 159 с.

90. Фирер А. В. Использование средств информационно-комуникационных технологий в визуализации процесса обучения алгебры / А.В. Фирер // Вестник ТГПУ (TSPU Bulletin). – 2018. – №1 (190). – С. 155 - 163.

91. Формування компетентностей на уроках математики / О. М. Ткаченко, І. М. Кожевнікова, Л. П. Шатохіна // Математика в школах України. – 2014. – № 6 (414). – С. 2-3.

92. Харитонова О. В. Развитие учебно-познавательной компетентности старшеклассников на уроках геометрии. Дис. канд. пед. наук. – Санкт-Петербург, 2006. – 167с.
93. Хорошилова Е. В. Математический анализ: неопределённый интеграл (в помощь практическим занятиям): учеб. пособие для студентов университетов / Е. В. Хорошилова. – Москва: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, МАКС Пресс, 2007. – 184 с.
94. Хуторской А. В. Ключевые компетенции как компоненты личностно - ориентированной парадигмы образования / Андрей Викторович Хуторской // Народное образование. – 2003. – №3. – С. 58 – 64.
95. Цукерман В. В. Элементы математического анализа в нашей школе / В. В. Цукерма // Математика. 2004. – № 41. – С. 5-7.
96. Цуренко С. П. Багатоваріантні контрольні, самостійні, класні і домашні роботи. Алгебра і початки аналізу. Геометрія 11 клас. Тематичне оцінювання / Сергій Павлович Цуренко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. – 88 с.
97. Чашечнікова О. С. Тести: можливості подолання протиріччя між вимогою об’єктивності оцінки знань учнів та необхідністю врахування їх індивідуальних особливостей // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 21. – Донецьк: ТЕАН, 2004. – С. 25-28.
98. Черемных Е. Л. Прикладные задачи математического анализа в профильной школе: учебно-методическое пособие / Елена Леонидовна Черемных. – Пермь: Перм. гос. гум-пед. университет, 2012. – 64 с.
99. Шапар В. Б. Сучасний тлумачний психологічний словник / В. Б. Шапар – Харків: Прапор, 2007. – 640 с.
100. Эрентраут Е. Н. Прикладные задачи математического анализа для школьников: Учебное пособие / Е. Н. Эрентраут. – Челябинск: ЧГПУ, 2004. – 119 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Орієнтовне календарно-тематичне планування теми «Інтеграл та його застосування» (30 год.)

№	*Тема уроку*	*Дидактична мета*	*Розподіл завдань*		*Примітки*
			в класі	*вдома*	
1	Означення первісної	Розглянути задачі, що приводять до поняття первісної для функції; сформувати вміння з’ясовувати, чи є функція первісною для заданої функції, знаходити одну з первісних для заданої функції.	№№ 26.2 26.4, 26.7, 26.12, 26.15 26.17 [1]	§4 п.26 вивчити №№ 26.1 26.5, 26.9, 26.16 [1]	Тести на Moodle
2	Основна властивість первісної. Таблиця первісних	Засвоєння основної властивості первісної, таблиці первісних; сформувати вміння знаходити первісні для функцій, користуючись таблицею первісних.	№№ 901 909, 916 921 [12] №№ 27.3 (неп.) [1]	№№ 903 908, 917[12] №№ 27.3 (пар.) [1]	Математичний тренажер
3	Правила знаходження первісних	Засвоєння правил знаходження первісних; сформувати вміння розв’язувати задачі, що передбачають засвоєння правил для обчислення первісних.	№№ 934 947, 940 942, 954 [12]	§4 п.27 вивчити №№ 953 935, 948, 941 [12]	Тести на Moodle
4	Знаходження первісних, що задовольняють початкові задані умови	Сформувати вміння знаходити первісні, що задовольняють задані початкові умови	№№ 27.5 27.7, 27.9 27.21 [1] №№ 949 946 [12]	Повтор. табл. пер №№ 27.6 27.8 [1] №№950 945 [12]	
5	Розв’язування задач на знаходження первісних. ***Самостійна робота***	Удосконалити вміння знаходити первісні для функцій. Перевірити рівень засвоєних знань за допомогою самостійної роботи.	№№1в.210 (1,3), 214, 216, 219 [2] С/р	№№2в.210 (2,4),214, 216, 219 [2]	с/р метод. рекомендації

6	Невизначений інтеграл та його властивості	Сформувати поняття невизначеного інтеграла; навчитись знаходити невизначений інтеграл за допомогою таблиці інтегралів.	№№ 1676 – 1693 (неп.) [14]	вивч. табл. інтегралів №№ 1676 – 1693 (пар.) [14]	Математичний тренажер
7	Знаходження невизначеного інтеграла безпосереднім інтегруванням	Закріпити і вдосконалити знання, уміння і навички учнів під час розв'язування різнорівневих завдань.	м/д табл. інт №№ 952, 922 [12]	№№ 951, 923 [12]	Тести на Moodle
8	Знаходження невизначеного інтеграла безпосереднім інтегруванням ***Самостійна робота***	Удосконалити вміння знаходити невизначений інтеграл безпосереднім інтегруванням. Перевірити рівень засвоєних знань за допомогою самостійної роботи.	№№ 1694, 1697, 1699 [14] С/р	№№ 1696, 1700, 1695, 1698 [14]	с/р метод. рекомендації
9	Метод заміни змінної	Сформувати вміння знаходити невизначений інтеграл методом заміни змінної.	№№ 1869 – 1878 (неп.) [14]	№№ 1869 – 1878 (пар.) [14]	
10	Метод інтегрування частинами	Сформувати вміння знаходити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами.	№№ 1832 – 1842 (пар.) [14]	№№ 1832 – 1842 (неп.) [14]	Використ. проблемних ситуацій
11	Знаходження інтегралів методом заміни змінної та інтегруванням частинами ***Самостійна робота***	Закріпити знання отримані на попередніх уроках шляхом розв'язування задач.	№№ 1794, 1799, 1631, 1812, 1769 [33]	№№ 1798, 1632, 1767 [33]	с/р метод. рекомендації
12	Знаходження невизначених інтегралів різними способами. Підготовка до контрольної роботи.	Систематизувати та узагальнити знання учнів з теми.	№№ 1628, 1633, 1766, 1791 [33]	№№ 1629, 1635, 1767, 1795 [33]	Вправи на Learning Apps
13	***Контрольна робота***	Перевірити й оцінити рівень засвоєння знань учнями з теми і вміння застосовувати їх під час	К/р	Повторити таблицю інтегралів та озн.інт.	к/р метод. рекомендації

		розв'язування задач; виявити прогалини в знаннях учнів з метою подальшого усунення.			
14	Приклади задач, що приводять до поняття визначеного інтеграла	Познайомити учнів з задачами, які приводять до поняття визначеного інтеграла: задача про площу криволінійної трапеції. Формування поняття визначеного інтеграла.	конспект	Вивчити конспект	
15	Геометричний та фізичний зміст визначеного інтеграла. Означення визначеного інтеграла	Сформувати поняття криволінійної трапеції та визначеного інтеграла; домогтися засвоєння формули Ньютона-Лейбніца; сформувати вміння розв'язувати задачі, що передбачають використання поняття інтеграла та формули Ньютона-Лейбніца	№28.1, 28.5 [1]	№28.2, 28.5 [1]	Тести на Moodle
16	Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца. ***Самостійна робота***	Удосконалити вміння використовувати формулу Ньютона-Лейбніца для обчислення визначених інтегралів.	№№ 28.3 (пар.), 28.4 (1,4,7,2) [1] С/р	№№ 28.3 (неп.) 28.4 (5,8,3,6) [1]	Тести на Moodle с/р метод. рекомендації
17	Властивості визначених інтегралів	Засвоєння властивостей визначеного інтеграла; сформувати вміння застосовувати властивості до обчислення інтегралів.	№№ 28.8 (1– 6), 28.9 (1 – 5) [1]	№№ 28.8 (7 – 12),28.9 (6 – 9) [1]	Творче завдання
18	Розв'язування завдань на обчислення визначеного інтеграла	Удосконалити вміння розв'язувати завдання, що передбачають обчислення визначених інтегралів.	№№ 28.20, 28.35, 28.37, 28.38, 28.39 [1]	№№ 28.21, 28.36, 28.40 [1]	Вправи на Learning Apps
19	Розв'язування завдань на обчислення визначеного інтеграла	Закріплювати знання отримані на попередніх уроках шляхом розв'язування задач	№№ 224 (1) 225 (1) [2]	№№ 224 (2) 225 (2) [2]	Тести на Moodle

20	Розв’язування завдань на обчислення визначеного інтеграла. ***Самостійна робота***	Систематизувати та узагальнити знання учнів з теми «Визначений інтеграл»	№3,4,5 (сер.рів), №7,8 (вис.рів) сист.вправ с/р	№2,6 (сер.рів), №5,6 (вис.рів) сист.вправ	с/р метод. рекомендації
21	Розв’язування завдань на обчислення інтегралів	Перевірити рівень засвоєння знань, умінь та навичок з теми	№1,9,10 (сер.рів), №10(а,б) (вис.рів) сист.вправ	№10(г,д), 11(а,б) (вис.рів) сист.вправ	
22	Обчислення площ криволінійних трапецій	Сформувати вміння використовувати визначений інтеграл для обчислення площ криволінійних трапецій	№№ 28.1, 28.5(1,3,7,5) [1]	№№ 28.2, 28,5 (2,4,8) [1]	Тести на Moodle Вправи на Learning Apps
23	Обчислення площ криволінійних трапецій	Закріплювати знання отримані на попередніх уроках шляхом розв’язування задач	№№ 28.6 (пар.) 28.10 (2 стов.) [1]	№№ 28.6 (неп.) 28.10 (1 стов.) [1]	Використ. GeoGebra або Graphar
24	Обчислення площ плоских фігур	Сформувати вміння обчислювати площі плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла	№№ 227 (1в.), 229 (г,в) [2]	№№ 227 (2в.), 229 (а,б,д) [2]	Використ. GeoGebra або Graphar
25	Обчислення площ плоских фігур	Закріплювати знання отримані на попередніх уроках шляхом розв’язування задач	№№ 28.12, 28.14, 28.24 28.27 [1]	№№ 28.25, 28.26, 28.16, 28.22 [1]	Тести на Moodle Вправи на Learning Apps
26	Обчислення об’ємів тіл	Сформувати вміння обчислювати об’єми тіл обертання за допомогою визначеного інтегралу	№№ 238, 239 (1в.) [2]	№№ 238, 239 (2в.) [2]	Використ. мульт. дошки Використ. WolframAlfa
27	Обчислення об’ємів тіл. ***Самостійна робота***	Узагальнити набуті знання, уміння та навички; перевірити рівень засвоєння учнями знань, умінь та навичок обчислювати площі криволінійних трапецій та об’єми тіл	№№ 29.1 [1] С/р	№№ 29.2, 29.4 [1]	с/р метод. рекомендації

28	Застосування інтеграла для розв’язування прикладних задач	Розглянути приклади застосування інтеграла до розв’язування прикладних задач; сформувати вміння розв’язувати задачі, що передбачають використання інтеграла	№2,4,6 (сист.вправ)	№1,3,5 (сист.вправ)	Творче завдання
29	Розв’язання типових задач. Підготовка до контрольної роботи	Систематизувати та узагальнити знання учнів з теми	№№ 224(1в) (1,9,6), 229 (2в:а,в,г), 232 (2в) [2] №№ 9 (1,3) с. 216 [68]	№№ 224(1в) (5,2,10,3,7), 229 (2в: б,д) 232 (1в) [2] №№ 9 (2,4) с. 216 [68]	Тести на Moodle ІДЗ
30	***Контрольна робота***	Перевірити рівень засвоєння знань, умінь та навичок з теми	К/р	—	к/р метод. рекомендації

Додаток Б

Індивідуальні домашні завдання з теми «Інтеграл та його застосування»

Завдання №1

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

1. $y = 4 - x^2, y = 2 - x$
2. $y = 2x^2 - x, y = 2x + 2$
3. $y = x^2 - 4x + 4, y = 2x + 4$
4. $y = 2x^2 - 3x + 3, y = 3 - x^2$
5. $y = \sqrt{x},\ \ y = x$
6. $y = x^2 - 3x + 4, y = 4 - 2x^2$
7. $y = \frac{1}{x}, y = 0.5, x = 1$
8. $y = -x^2 + 2x + 1, y = x^2 - 4x + 5$
9. $y = \frac{7}{x}, x + y = 8$
10. $y = 6 - x^2, y = 5$
11. $y = x^2, y = 4x - x^2$
12. $y = 2^x, y = 2, x = -1$
13. $xy = 7, y = 0, x = 4, x = 12$
14. $y = 2x^2 + 1, y = x + 2$
15. $y = 4x - x^2, y - x = 0$
16. $y = x^2, y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 2$
17. $y = x^2, y = 1, x = 2$
18. $y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 0.5, x = 2.5$
19. $y = \frac{5}{x}, y = 6 - x$
20. $y = x^4, y = 0, x = -1, x = 1$
21. $y = x^4, y = 1$
22. $y = x^2 - 4x + 5, y = 0, x = 0, x = 4$
23. $y = x^2 - 4x + 5, y = 5$
24. $y = 1 - x^3, y = 0, x = 0, x = 4$
25. $y = 2 - x^3, y = 1, x = -1, x = 1$
26. $y = -x^2 - 4x, y = 0, x = -3, x = -1$
27. $y = x^2 - 2x + 4, y = 3, x = -1$
28. $y = 4x - x^2, y = 4 - x$
29. $y = x^2, y = x^3$
30. $y = x^2 - 2x + 2, y = 2 + 6x - x^2$

Завдання №2

Обчислити невизначені інтеграли:

1. a) $\int \frac{dx}{(2x+3)^5}$ b) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$ c) $\int x \cdot sin2xdx$
2. a) $\int \frac{3dx}{(8-4x)^7}$ b) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}d$ c) $\int x \cdot e^{-x}dx$
3. a) $\int \frac{dx}{8-15x}$ b) $\int x^2 \sqrt[7]{4 + x^3}\,dx$ c) $\int x \cdot arctgxdx$
4. a) $\int sin^2 xdx$ b) $\int \frac{6x+1}{\sqrt{3x^2+x-5}}dx$ c) $\int arctgxdx$

5. a) $\int x^3\sqrt[5]{x^2}\,dx$ b) $\int \frac{cosx+\sqrt{3}sinx}{cos^3(x-\frac{\pi}{3})}dx$ c) $\int x^2\cdot e^{5x}dx$

6. a) $\int 2^{3x+4}\,dx$ b) $\int cos^7\,xsinxdx$ c) $\int x\cdot cosxdx$

7. a) $\int \sqrt[5]{(2x-3)^3dx}$ b) $\int \frac{dx}{(sinx+cosx)^2}$ c) $\int x\cdot 3^x\,dx$

8. a) $\int \frac{8dx}{(5-7x)^6}$ b) $\int sin^4xcosxdx$ c) $\int lnxdx$

9. a) $\int \frac{2}{\sqrt{3x-4}}dx$ b) $\int \frac{cox+sinx}{(sinx-cosx+3)^4}dx$ c) $\int x\cdot cos2x\,dx$

10. a) $\int \frac{2x}{\sqrt{5-4x^2}}dx$ b) $\int \frac{sin^2x+3cos^2x}{cos^4x}dx$ c) $\int arccosxdx$

11. a) $\int (3^x+\frac{1}{sinx})\,dx$ b) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ c) $\int x^3\cdot e^x\,dx$

12. a) $\int (2cosx-\sqrt{x})dx$ b) $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}dx$ c) $\int x^2\cdot e^{-x}\,dx$

13. a) $\int \frac{(1-x)^2}{2\sqrt{x}}dx$ b) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$ c) $\int x^2\cdot a^x\,dx$

14. a) $\int ctg^2xdx$ b) $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}dx$ c) $\int x\cdot sindx$

15. a) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$ b) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ c) $\int x\cdot lnxdx$

16. a) $\int \frac{dx}{x^2+7}$ b) $\int \frac{\sqrt{x}}{-\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx$ c) $\int \ln(x-5)\,dx$

17. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}dx$ b) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x++1}}dx$ c) $\int x\cdot cos8xdx$

18. a) $\int (\frac{1-x}{x})^2\,dx$ b) $\int \frac{\sqrt{1+lnx}}{xlnx}dx$ c) $\int arctg2xdx$

19. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$ b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$ c) $\int arcsin5xdx$

20. a) $\int \frac{1+cos^2x}{1+cos2x}dx$ b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ c) $\int x^2\cdot arctgxdx$

21. a) $\int tg^2\,xdx$ b) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ c) $\int x^2\cdot e^{3x}\,dx$

22. a) $\int 2sin^2\frac{x}{2}dx$ b) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$ c) $\int x\cdot\cos(5x-2)\,dx$

23. a) $\int \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x}}dx$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+m}dx$ c) $\int x^2\cdot lnxdx$

24. a) $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}\,dx$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ c) $\int x\cdot e^{-7x}\,dx$

25. a) $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}$ c) $\int arcsin2xdx$

26. a) $\int (x+3)^4\, dx$ b) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} dx$ c) $\int x \cdot arcsinxdx$

27. a) $\int (1-2x) dx$ b) $\int \frac{x^5}{\sqrt{a^3-x^3}} dx$ c) $\int x^2 \cdot \ln(1+x)\, dx$

28. a) $\int 10^x\, dx$ b) $\int \frac{x^5}{(x^2-4)^2} dx$ c) $\int x^2 \cdot e^{-5x} dx$

29. a) $\int \cos(4-7x)\, dx$ b) $\int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}} dx$ c) $\int x \cdot \cos(2x+7)\, dx$

30. a) $\int sin\frac{x}{4} dx$ b) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$ c) $\int x \cdot \sin(2-3x)\, dx$

Завдання №3

Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігур навколо вісі Ox, обмежених графіками заданих функцій:

1. $y^2-4x=0, x-2=0, x-4=0, y=0$
2. $y=-x^2+2x, y=0$
3. $y=2x+1, x=1, x=4, y=0$
4. $y=x^2, x=1, y=0$
5. $xy=4, x-2=0, x=1, x=4, y=0$
6. $x^2+y^2=1, y^2$=1.5x
7. $y=cosx, y=\frac{9x^2}{2\pi^2}$
8. $y=\sqrt{x}, x=1, x=4, y=0$
9. $y=1-x^2, y=0$
10. $y=x^2$,$y=x$
11. $y=x+2, y=1, x=0, x=2$
12. $y=x^2+1, x=0, x=1, y=0$
13. $y=\sqrt{x}, x=1, y=0$
14. $y=\sqrt{x}, x=1, x=4, y=0$
15. $y=1-x^2, y=0$
16. $y=-x^2+5x-6, y=0$
17. $2x-x^2-y=0, 2x^2-4x+y=0$
18. $y=3sinx, y=sinx, 0\le x\le \pi$
19. $y=5cosx, y=cosx, x=0, x\ge 0$
20. $y=sin^2x, x=\frac{\pi}{2}, y=0$
21. $y=2x-x^2, y=-x+2, x=0$
22. $y=2x-x^2, y=-x+2$
23. $y=x^2, y^2-x=0$
24. $y=1-x^2, x=0, x=\sqrt{y-2}, x=1$
25. $y=x^2, y=1, x=2$
26. $y=x^3, y=\sqrt{x}$
27. $y=x^2, y=0, x=2$
28. $y=x^2+1, y=x, x=0, x=1$
29. $y=\sqrt{x-1}, y=0, y=1, x=0.5$
30. $y=(x-1)^2, y=1$

Додаток В

Самостійні роботи з теми «Інтеграл та його застосування»

Самостійна робота з теми «Первісна»

1 варіант	*2 варіант*
1. Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, якщо: а) $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+2x-13$ $f(x)=x^2-5x+2\ (x\in\mathbb{R})$ б)$F(x)=\frac{1}{x^2}+5x+sinx+2$ $f(x)=-\frac{2}{x^2}+5+cosx\ (x\neq 0)$ 2. Знайти первісну для функції $f(x)$: а)$f(x)=sinx+cos3x-2^x\ (x\in\mathbb{R})$ б) $f(x)=\sqrt{x}-x^{\frac{3}{4}}+\frac{1}{x}\ (x>0)$ 3. Знайти ту первісну для функції $f(x)$, графік якої проходить через т. А, якщо: а) $f(x)=3x^2, A(2;33)$ б) $f(x)=\sqrt{2}cosx, A\ \left(\frac{\pi}{4};3\right)$	1. Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, якщо: а) $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}+4x+3$ $f(x)=x^3-5x^2+4\ (x\in\mathbb{R})$ б) $F(x)=\frac{1}{x}+3x+cosx-11$ $f(x)=-\frac{1}{x^2}+3-sinx\ (x\neq 0)$ 2. Знайти первісну для функції $f(x)$: а)$f(x)=sinx-cos2x+3^x(x\in\mathbb{R})$ б) $f(x)=x^{\frac{4}{5}}-\sqrt{x}-\frac{1}{x}\ (x>0)$ 3. Знайти ту первісну для функції $f(x)$, графік якої проходить через т. А, якщо: а)$f(x)=4x, A(2;17)$ б) $f(x)=\sqrt{2}sinx, A\left(\frac{\pi}{4};2\right)$
3 варіант	*4 варіант*
1. Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, якщо: а) $F(x)=\frac{2x^5}{5}-\frac{3x^2}{2}-7x-11$ $f(x)=2x^4-3x-7\ (x\in\mathbb{R})$ б) $F(x)=\frac{5}{x}+3x-cosx+14$ $f(x)=-\frac{5}{x^2}+3+sinx(x\neq 0)$ 2. Знайти первісну для функції $f(x)$: а)$f(x)=-sinx-\frac{1}{cos^2x}+5^x$ $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{N}\right)$ б) $f(x)=x^{\frac{3}{4}}-\sqrt{3x}-\frac{2}{x}\ (x>0)$ 3. Знайти ту первісну для функції $f(x)$, графік якої проходить через т. А, якщо: а)$f(x)=4x^3, A(3;80)$ б)$f(x)=sin3x, A\ \left(\frac{\pi}{3};-1\right)$	1. Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, якщо: а) $F(x)=\frac{3x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}-9x+15$ $f(x)=3x^3+4x^2-9(x\in\mathbb{R})$ б) $F(x)=\frac{3}{x^2}-5x-sinx-10$ $f(x)=-\frac{6}{x^3}-5-cosx\ (x\neq 0)$ 2. Знайти первісну для функції $f(x)$: а)$f(x)=cosx-\frac{1}{sin^2x}-6^x$ $(x\neq\pi n, n\in\mathbb{N})$ б)$f(x)=\sqrt{2x}-x^{\frac{4}{5}}+\frac{3}{x}\ (x>0)$ 3. Знайти ту первісну для функції $f(x)$, графік якої проходить через т. А, якщо: а)$f(x)=5x^4, A\ (3;127)$ б) $f(x)=cos2x, A\ \left(\frac{\pi}{4};3\right)$

Самостійна робота №1

з теми «Визначений інтеграл»

1 варіант

1. Обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца визначений інтеграл:

1) $\int_{2}^{5}(x^2+x+1)dx$

2) $\int_{0}^{\pi} sinxdx$

3) $\int_{1}^{e}\frac{2}{x}dx$

2. Обчислити:

1) $\int_{1}^{2} x^3dx+\int_{2}^{3} x^3dx$

2) $\int_{-\pi}^{3} sinxdx+\int_{3}^{\pi} sinxdx$

3) $\int_{0}^{\pi} sin9xcos8xdx-\int_{0}^{\pi} sin8xcos9xdx$

4) $\int_{2}^{4}(x^3+lgx)dx-\int_{2}^{4}(2x+lgx)dx$

2 варіант

1. Обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца визначений інтеграл:

1) $\int_{-1}^{3}(x^2+x+3)dx$

2) $\int_{0}^{\pi} cosxdx$

3) $\int_{1}^{e}\frac{1}{2x}dx$

2. Обчислити:

1) $\int_{1}^{\sqrt{3}} x^5dx+\int_{\sqrt{3}}^{2} x^5dx$

2) $\int_{0}^{3} cosxdx+\int_{3}^{\pi} cosxdx$

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos9xcos8xdx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin9xsin8xdx$

4) $\int_{1}^{4}(2x^2+lg9x)dx-\int_{1}^{4}(3x+lg9x)dx$

Самостійна робота №2

з теми «Визначений інтеграл»

1 варіант

Обчислити:

1) $\int_{0}^{1} x\cdot e^{-2x}dx$

2) $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$

3 варіант

Обчислити:

1) $\int_{1}^{2}\ln(3x+2)\,dx$

2) $\int_{2}^{5}\frac{x^2}{(x-1)\sqrt{x-1}}dx$

3) $\int_0^{\pi} cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{3}dx$	3) $\int_0^{\pi} cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{3x}{2}dx$
2 варіант Обчислити: 1) $\int_1^2 xlnxdx$ 2) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$ 3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin3x\cdot cos5x\,dx$	**4 варіант** Обчислити: 1) $\int_0^1 x\cdot e^{3x}dx$ 2) $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}dx$ 3) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} sinx\cdot sin3x\,dx$

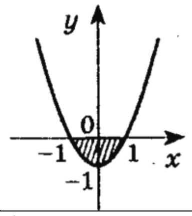
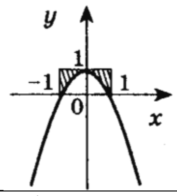
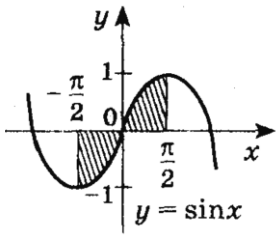
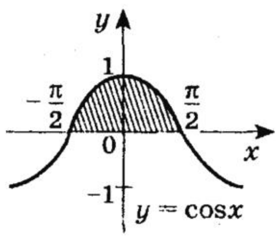
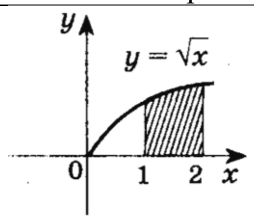
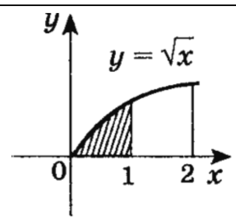
Самостійна робота

з теми «Застосування інтегралу»

1 варіант	***2 варіант***
1. Знайдіть площу фігури, обмеженої: 1) параболою $y=5-x^2$ і прямою $y=4$; 2) графіком функції $y=2-x$, і $y=\lvert x^2-4\rvert$; 3) графіком функції $y=\frac{1}{x}$ і прямими $y=0, x=3, x=6$ 2. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої: графіком $y=\sqrt{x}$ та прямими $x=9$ і $y=0$.	1. Знайдіть площу фігури, обмеженої: 1) параболою $y=6-x^2$ і прямою $y=2$; 2) графіком функції $y=x$, і $y=\lvert x^2-2x\rvert$; 3) графіком функції $y=\frac{5}{x}$ і прямими $y=5,\ x=5$. 2. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої: графіком $y=\sqrt{x}$ та прямими $x=4$ і $y=0$.

Додаток Г

Контрольна робота №2

I рівень (6 балів)				
1 варіант		***2 варіант***		
1. Який з наведених нижче виразів дорівнює площі фігури, заштрихованої на рисунку?				
				
А) $\int_{-1}^{1} x^2\,dx$	Б) $\int_{-1}^{1} (1-x^2)dx$	В) $\int_{-1}^{1} (x^2-1)dx$	Г) $\int_{-1}^{1} (1+x^2)dx$	Д) інша відповідь
2. Обчисліть інтеграл:				
$\int_{1}^{3} (3-2x)dx$		$\int_{-1}^{2} (2x-5)dx$		
А) 2	Б) -2	В) 4	Г) 3	Д) інша відповідь
3. Знайдіть площу заштрихованої фігури.				
				
А) 0,5	Б) 1	В) 2	Г) 3	Д) інша відповідь
4. Обчисліть інтеграл:				
$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cosxdx$		$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2x}$		
А) -1	Б) 0	В) 1	Г) 2	Д) інша відповідь
5. Об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі x даної криволінійної трапеції, можна записати за допомогою інтеграла так:				
				
А) $\pi\int_{1}^{2} \sqrt{x}\,dx$	Б) $\pi\int_{0}^{1} \sqrt{x}dx$	В) $\pi\int_{1}^{2} xdx$	Г) $\pi\int_{0}^{1} xdx$	Д) інша відповідь

6. Обчисліть:				
$\int_{-2}^{1} x^4\,dx$		$\int_{1}^{3} x^3 dx$		
А) 5	Б) $6\frac{3}{5}$	В) 15	Г) 20	Д) інша відповідь

ІІ рівень (3 бали)	
1 варіант	***2 варіант***
7. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої :	
$y = sinx, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}, y = 0;$	$y = cosx, x = 0, x = \frac{\pi}{6}, y = 0$
8. Обчисліть інтеграл:	
$\int_{1}^{2} \frac{e^x - x^3}{x^3 e^x} dx$	$\int_{1}^{3} \frac{e^x + x^2}{x^2 e^x} dx$
ІІІ рівень (3 бали)	
1 варіант	***2 варіант***
9. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій:	
$y = \|4 - x^2\|, y = 4 + 2\|x\|$	$y = 2 - \|2 - x\|, y = \left\|\frac{3}{x}\right\|$

Додаток Д

Конспект уроку

Тема «Метод інтегрування частинами»

Мета:

навчальна: вивести формулу для інтегрування частинами та сформувати вміння знаходити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами;

розвивальна: розвивати увагу, уяву та навички самоконтролю, розвивати логічне мислення, слухову та зорову пам'ять;

виховна: виховувати інтерес до вивчення математики, працьовитість, наполегливість.

Тип уроку: комбінований (вивчення нових знань + засвоєння навичок і умінь).

Хід уроку

Етапи уроку	Діяльність вчителя	Діяльність учнів
I. Організаційний момент	1. Привітання. 2.Перевірка наявності домашнього завдання та відповіді на запитання, які виникли в учнів при розв'язанні домашнього завдання. 3.Повідомлення теми уроку (тема записана на дошці). Тема: «Метод інтегрування частинами»	1.Привітання. 2.Учні показують наявність домашнього завдання та задають запитання вчителю. 3.Учні записують в зошитах Число Класна робота Метод інтегрування частинами
II. Актуалізація опорних знань	м/д (таблиця інтегралів) ***I в.*** 1) $\int xdx$ 2) $\int cosxdx$ 3) $\int \sqrt{x}dx$ 4) $\int a^x dx$ ***II в.*** 1) $\int x^2dx$ 2) $\int sinxdx$ 3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 4) $\int e^x dx$	Учні виконують завдання ***I в.*** 1) $\frac{x^2}{2}+C$ 2) $sinx+C$ 3) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+C$ 4) $\frac{a^x}{lna}+C$ ***II в.*** 1) $\frac{x^3}{3}+C$ 2) $-cosx+C$ 3)$2\sqrt{x}+C$ 4)e^x+C

<table>
<tr><td></td><td>5) $\int \frac{1}{cos^2x}dx$ 5) $\int \frac{1}{sin^2x}dx$</td><td>5) $tgx + C$ 5) $-ctgx + C$</td></tr>
<tr><td>ІІІ. Вивчення нового матеріалу</td><td>Перед учнями ставиться така проблемна ситуація: необхідно знайти інтеграл $\int x \cdot sinxdx$
1.Чи схожий він на один з табличних інтегралів?
2.В чому різниця?
3.Первісна по відношенню до похідної є оберненою функцією, чи можемо ми знайти похідну від добутку функцій?
4.Отже, чи можемо ми використати дану формулу, щоб вивести формулу для знаходження інтегралу від добутку? Давайте спробуємо:
$$f' \cdot g = (f \cdot g)' - g' \cdot f$$
$$\int f'(x) \cdot g(x)dx = \int [\big(f(x) \cdot g(x)\big)' - g'(x) \cdot f(x)]dx = f(x) \cdot g(x) - \int g'(x) \cdot f(x)dx$$
Таким чином, маємо:
$$\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int g'(x) \cdot f(x)dx$$
Використовуємо позначення:
$dv = v'dx$
$$du = u'dx$$
Отже, коротко формула записується так:
$$\boxed{\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} - \int \boldsymbol{vdu}}$$
Дана формула називається формулою інтегрування частинами. Суть її полягає в тому, що один інтеграл виражається через інший. Функції u і v обирають таким чином, щоб</td><td>Учні слухають та відповідають на запитання вчителя.

1.Ні.

2.Підінтегральна функція у вигляді добутку двох функцій
3.Так, за формулою:
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Учні проговорюють, а вчитель пише на дошці.</td></tr>
</table>

	другий інтеграл був простішим ніж початковий. Тепер повернемося до нашого прикладу і розв'яжемо його. $\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{sinxdx}_{dv} = \left\Vert \begin{matrix} u = x \\ dv = sinxdx \\ du = dx \\ v = -cosx \end{matrix} \right\Vert =$ $= \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{(-cosx)}_{v} - \int \underbrace{(-cosx)}_{v} \underbrace{dx}_{du} =$ $= -xcosx + \int cosxdx = -xcosx +$ $+ sinx + C$	Учні записують розв'язання у зошитах.
IV. Застосування набутих знань, умінь та навичок	Завдання розв'язуються біля дошки. 1. $\int lnxdx$ В інтегралах такого виду за u завжди позначаємо логарифм, а за dv все, що залишається в підінтегральному виразі. Перший раз виконуємо перевірку. Для цього візьмемо похідну від нашої відповіді. Ми отримали вихідну підінтегральну функцію, а це значить інтеграл розв'язано правильно. 2. $\int x \cdot 3^x dx$	З допомогою вчителя учні розв'язують завдання біля дошки. 1. $\int lnxdx = \left\Vert \begin{matrix} u = lnx \\ dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{matrix} \right\Vert = xlnx -$ $- \int x \cdot \frac{1}{x} dx = xlnx - \int dx = xlnx -$ $-x + C$ $(xlnx - x + C)' = (xlnx)' - (x)' +$ $+(C)' = x'lnx + x(lnx)' - 1 + 0 =$ $= lnx + 1 - 1 = lnx$ 2. $\int x \cdot 3^x\, dx = \left\Vert \begin{matrix} u = x \\ dv = 3^x dx \\ du = dx \\ v = \frac{3^x}{ln3} \end{matrix} \right\Vert =$ $x \cdot \frac{3^x}{ln3} - \int \frac{3^x}{lnx} dx = \frac{x \cdot 3^x}{ln3} - \frac{1}{ln3} \cdot$ $\cdot \int 3^x dx = \frac{x \cdot 3^x}{ln3} - \frac{3^x}{ln^2 3} + C$

	3. $\int (x-2)\cdot e^{2x}dx$ В інтегралах такого типу за u завжди позначаємо многочлен. 4. $\int x\cdot arctgxdx$ В таких інтегралах за u завжди позначаємо обернену тригонометричну функцію.	3. $\int (x-2)e^{2x}dx = \left\Vert \begin{matrix} u = x-2 \\ dv = e^{2x}dx \\ du = dx \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{matrix} \right\Vert$ $= \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}dx =$ $= \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{1}{4}\cdot e^{2x} + C$ 4. $\int xarctgxdx = \left\Vert \begin{matrix} u = arctgx \\ dv = xdx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right\Vert$ $= \frac{x^2}{2}arctgx - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)}dx =$ $= \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}arctgx + C$
V. Підсумки уроку. Домашнє завдання.	Вчитель відзначає роботу найактивніших учнів, оголошує оцінки отримані протягом уроку. Повідомляє учням домашнє завдання та коментує його (завдання записані на дошці). 1) $\int x\cdot cosxdx$ 2) $\int x\cdot lnxdx$ 3) $\int arcsinxdx$ 4) $\int x\cdot e^{-x}dx$ 5) $\int x^2\cdot e^{x}\,dx$	Учні слухають вчителя. Записують завдання в зошитах та щоденниках. *Домашня робота* 1. $\int x\cdot cosxdx = \left\Vert \begin{matrix} u = x \\ dv = cosxdx \\ du = dx \\ v = sinx \end{matrix} \right\Vert$ $= x\cdot sinx - \int sinxdx = x\cdot sinx -$ $-(-cosx) + C = xsinx + cosx + C$ 2. $\int x\cdot lnxdx = \left\Vert \begin{matrix} u = lnx \\ dv = xdx \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right\Vert =$ $= \frac{x^2}{2}lnx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2}{2}lnx -$ $-\frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}lnx - \frac{x^2}{4} + C$

		3. $\int arcsinxdx = \left\| \begin{matrix} u = arcsinx \\ dv = dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x \end{matrix} \right\|$ $= x \cdot arcsinx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ $= x \cdot arcsinx - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-x^2} + C =$ $= x \cdot arcsinx - \sqrt{1-x^2} + C$ 4. $\int x \cdot e^{-x} dx = \left\| \begin{matrix} u = x \\ dv = e^{x} dx \\ du = dx \\ v = -e^{-x} \end{matrix} \right\| =$ $= -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -xe^{-x} -$ $-e^{-x} + C$ 5. $\int x^2 \cdot e^{x}\, dx = \left\| \begin{matrix} u = x^2 \\ dv = e^{x} dx \\ du = dx \\ v = e^{x} \end{matrix} \right\| =$ $x^2 e^{x} - \int 2xe^{x} dx = \left\| \begin{matrix} u = x \\ dv = e^{x} dx \\ du = dx \\ v = e^{x} \end{matrix} \right\|$ $= x^2 e^{x} - 2\left(xe^{x} - \int e^{x} dx\right) = x^2 e^{x}$ $-2xe^{x} + C$

Додаток Ж

Система рівневих завдань

Тема «Первісна»

Початковий рівень

1. Довести, що функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на всій числовій прямій:

1) $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x+3)$, $f(x) = \cos(2x+3)$

2) $F(x) = -\frac{3}{4}\ cos4x - 2, f(x) = 3sin4x$

3) $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 8, f(x) = e^{3x}$

4) $F(x) = \frac{1}{4ln3}3^{4x}, f(x) = 3^{4x}$

5) $F(x) = 0.2(x+1)^5 + 10x^2\ , f(x) = (x+1)^4 + 20x$

6) $F(x) = 2\sqrt{x+9} + 3, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+9}} + 3$

7) $F(x) = \sqrt{x^2+1}, f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

8) $F(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

9) $F(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 9, f(x) = 3(x-2)^2$

10) $F(x) = sin2xcos2x, f(x) = 2cos4x$

2. Чи є функція $F(x)$ первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку?

1) $F(x) = x - \frac{x}{x^2+1}, f(x) = \frac{x^4+3x^2}{x^4+2x^2+1}, x \in (-\infty; \infty)$

2) $F(x) = \ x^2sinx, f(x) = 2xcosx, x \in (-\infty; \infty)$

3) $F(x) = tg3x, f(x) = \frac{3}{cos^2 3x}\ \ x \in (-\infty; \infty)$

4) $F(x) = sin^2 6x, f(x) = 6sin12x, x \in (0; \pi)$

5) $F(x) = \ \sqrt{x^3} + x + \sqrt{x}, f(x) = \frac{1}{2}\left(\ 3\sqrt{x} + 2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right), x \in (-1; 1)$

6) $F(x) = (x^2-2)sinx + 2xcosx, f(x) = x^2cosx, x \in (-\infty; \infty)$

7) $F(x) = \sqrt{x^2 - 1} + arcsin\frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}, x \in (1; \infty)$

8) $F(x) = (x - 1)\sqrt{2x - x^2} + \arcsin(x - 1)$, $f(x) = 2\sqrt{2x - x^2}, x \in (0; 2)$

9) $F(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} - \sqrt{x},$ $\quad f(x) = \frac{x - 1}{2\sqrt{x}}, x \in (0; \infty)$

10) $F(x) = xarcsinx + \sqrt{1 - x^2}, f(x) = arcsinx, x \in (0; \infty)$

3. Вкажіть яку-небудь первісну $F(x)$ функції $f(x)$ і проміжок на якому $F(x)$ буде первісною для $f(x)$:

1) $f(x) = 2x$

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

3) $f(x) = cos6x$

4) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$

5) $f(x) = sin3x$

6) $f(x) = x + 2$

7) $f(x) = \frac{1}{sin^2x}$

8) $f(x) = \frac{1}{cos^2 3x}$

9) $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$

10) $f(x) = x^2 + 4$

4. Знайти первісну функції:

1) $f(x) = \frac{3x - 2}{x - 1}$

2) $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 5}{x + 1}$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 3} + \sqrt{x - 2}}$

4) $f(x) = \frac{3^{x+1} + 2^{x-1}}{6^x}$

5) $f(x) = \frac{3x^2 + 7cos^2x}{x^2cos^2x}$

6) $f(x) = \frac{5x + 2}{x + 1}$

7) $f(x) = \frac{3 - x}{x^2 + 3x - 4}$

8) $f(x) = \frac{5x^3 - 2xsin^2x}{x^3sin^2x}$

9) $f(x) = \frac{2^x + 6^x}{12^x}$

10) $f(x) = \frac{7 + 3ctg^2x}{cos^2x}$

Середній рівень

4. Знайти первісну для функції $f(x)$ графік якої проходить через точку:

1) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{4x + 5}}, M(5; 7)$

2) $f(x) = 8x^3 - e^{\frac{x}{2}}, B(1; -2\sqrt{e})$

3) $f(x) = \sin x, B(\pi; -2)$

4) $f(x) = 6x^2, K(-1; 4)$

5) $f(x) = 6x^2$, $B(-1; 1)$

6) $f(x) = \cos x, O(0; 0)$

7) $f(x) = 3x^2 - 6x, L(2; 1)$

8) $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}, M(4; 3)$

9) $f(x) = x + 2cos2x, M(0; 3)$

10) $f(x) = 1 + x + \frac{1}{x^2 + 1}, N(0; 5)$

5. Швидкість точки, що рухається прямолінійно, задано формулою $v(t) = t^2 + 2t - 1$. Запишіть формулу залежності її координати x від часу t, якщо відомо, що в початковий момент часу $(t = 0)$ точка знаходиться в початку координат.

6. Швидкість точки, що рухається прямолінійно, задано формулою $v(t) = 2cos\frac{t}{2}$. Запишіть формулу залежності її координати x від часу t, якщо відомо, що в початковий момент часу $(t = \frac{\pi}{3}\text{с.})$ точка знаходиться на відстані 4м від початку координат.

7. Точка рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 12t^2 + 4$. Знайдіть закон руху точки, якщо в момент $t = 1$с. її швидкість дорівнює 10м/с, а координата дорівнює 12 м (одиниця вимірювання a дорівнює 1 м/с^2).

8. Швидкість руху точки задається рівнянням $v = 6t^2 + 1$ (м/с). Знайдіть рівняння руху $s = s(t)$, якщо у момент часу $t = 3c$. точка знаходилася на відстані $s = 42$ м.

9. Швидкість руху точки задається рівнянням $v = 5 - 2t$ (м/с). Знайдіть рівняння руху $s = s(t)$, якщо у момент часу $t = 4c$ точка знаходилася на відстані $s = 32$ м.

10. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 3t^2$, при чому в момент часу $t_0 = 5$с. пройдений шлях дорівнює $s_0 = 12$ м. Знайдіть залежність шляху від часу.

11.Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 2sint$, при чому в момент часу $t_0 = \pi$ с. пройдений шлях дорівнює $s_0 = 2$ м. Знайдіть залежність шляху від часу.

12. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 8t$, при чому в момент часу $t_0 = 5$с. швидкість тіла дорівнює $v_0 = 120$м/с. Знайдіть залежність шляху від часу.

13. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 8$, при чому в момент часу $t_0 = 3$с. швидкість тіла дорівнює $v_0 = 30$ м/с. Знайдіть залежність шляху від часу.

14. Швидкість матеріальної точки, яка рухається по координатній прямій, змінюється за законом $v(t) = t^2 + 2t - 3$. Запишіть формулу залежності її координати від часу, якщо в початковий момент часу $t = 0$ точка знаходиться в початку координат.

15. Складіть рівняння лінії, що проходить через точку $A(1; -1)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної до неї у точці з абсцисою x дорівнює:

1) $\frac{1-x}{2}$ 2) e^{x-1}

16. Для функції $y = f(x)$ знайдіть дві її первісні, графіки яких зміщені один відносно іншого на a:

1) $y = 2^x + 2, a = 2$;

2) $y = cos^2x - sin^2x, a = 1$.

17. Знайти первісні для функції $f(x) = x^2 - 3x + 1$, графіки яких проходять, відповідно, через точки $A(0; -1), B\left(1; \frac{1}{3}\right)$. За допомогою якого перетворення можна отримати графік другої первісної з графіка першої первісної?

Високий рівень

18. Для функції знайдіть дві її первісні, графіки яких зміщені один відносно іншого на a: $y = cos^2x - sin^2x, a = 1$.

19. Напишіть рівняння дотичної до графіка первісної для функції $f(x) = \frac{1}{x}$ у точці $A(0; 1)$.

20. Нехай $y = 5x - 6$ – рівняння дотичної до графіка функції $y = F_1(x)$, що є первісною для функції $y = f(x)$ у точці $A(2; 4)$ Складіть рівняння дотичної до графіка іншої первісної $y = F_2(x)$, цієї самої функції у точці $B(2; 1)$.

21. Графік однієї з первісних для функції $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ проходить через точку $A(4; 1)$, а іншої – через точку $B\left(1; \frac{3}{2}\right)$. Графік якої з первісних розташований вище від іншого? За допомогою якого перетворення можна отримати графік першої первісної з графіка другої?

22. Доведіть, що функції $y = F_1(x)$ і $y = F_2(x)$ відрізняються одна від одної лише сталим доданком:

1) $F_1(x) = sin^2x, F_2(x) = \dfrac{cos2x}{2}$

2) $F_1(x) = cos^4x, F_2(x) = \dfrac{cos4x}{8} + \dfrac{cos2x}{2}$

23. Знайти ту первісну $F(x)$ для функції $y = 2 - 3x$, для якої $\min\limits_{[0;1]} F(x) = 5$

24. Знайдіть проміжки зростання, спадання і точки екстремуму первісної для функції $f(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{x^2+x+1}$.

25. При яких значеннях a первісна для функції $f(x) = (x - 2)(x - 3)(x - a)$ має у точці $x = a$ максимум?

26. Функція $F(x)$ – первісна для функції $\sqrt{9 - x^2}$ при цьому $F(0) = 0$. Знайдіть ординату точки перетину дотичної в точці $x = 1{,}5$ до графіка $y = F(x)$ із віссю Oy (для знаходження первісної скористайтеся геометричними міркуваннями).

27. Функція F(x) – первісна для функції $\sqrt{4 - x^2}$ при цьому $F(0) = 0$. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = F^2(x)$ в точці $x = 1$ (для знаходження первісної скористайтеся геометричними міркуваннями).

28. Для функції $f(x) = 3 + 8x$ знайдіть первісну $f(x)$, для якої рівняння $f(x) = -2$ має єдиний корінь.

29. Графік первісної для функції $f(x) = x + 3e^{2-x}$ перетинає вісь абсцис у точці $\mathrm{M}(2; 0)$. Знайдіть точку його перетину з віссю ординат.

30. Знайдіть абсциси точок перетину графіка функції $y = (x-3)(x+2)$ і графіка її первісної, якщо одна з цих точок належить осі абсцис.

31. Доведіть, що довільна первісна непарної неперервної функції, визначеної на відрізку $[-a; a]$, є парною функцією.

32. Доведіть, що парна неперервна функція, визначена на відрізку $[-a; a]$, має на цьому відрізку хоча б одну непарну первісну.

33. Графік первісної для функції $f(x) = x - e^{3-x}$ перетинає вісь абсцис у точці $\mathrm{M}(3; 0)$. Знайдіть точку його перетину з віссю ординат.

34. Знайдіть абсциси точок перетину графіка функції $y = (x+4)(x-2)$ і графіка її первісної, якщо одна з цих точок належить осі ординат.

Тема «Невизначений інтеграл»

Початковий рівень

1. Знайдіть інтеграл за допомогою таблиці:

$\int (-4-6x)dx$	$\int (3-2t+4t^2)dt$	$\int (x+2)^2 dx$
$\int (x+3)(2-3x)dx$	$\int (2x-3)dx$	$\int (t^2-2t+1)dt$
$\int (p-1)^2 dp$	$\int (x-2)(2x+1)dx$	$\int (\sin x - 2\cos x)dx$
$\int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$	$\int \frac{dx}{x^2+4}$	$\int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$
$\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$\int \left(\frac{5}{x}+e^x\right)dx$	$\int \left(2^x - \frac{2}{x} + 3\right)dx$
$\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)dx$	$\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$	$\int (\sin x - 2\cos x)dx$

2. Знайдіть інтеграл від функції виду $f(ax+b)$:

$\int (2x+3)^{15}dx$	$\int \sqrt{5-4x}\,dx$	$\int \frac{dx}{cos^2\frac{x}{3}}$

$\int \frac{dx}{(3x-10)^5}$ $\int sin13x\,dx$ $\int cos\frac{2x}{5}\,dx$

$\int \frac{dx}{5sin^2 4x}$ $\int \frac{dx}{4x-7}$ $\int \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)dx$

$\int e^{3x+2}dx$ $\int \ln 5 \cdot 5^{4-5x}dx$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(7x-6)^2}}$

$\int (cos^2 4t - sin^2 4t)dt$ $\int \sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)dx$ $\int \ln 6 \cdot 6^{3+4x}dx$

$\int (4-3x)^7 dx$ $\int cos\frac{6x}{7}dx$ $\int -sin\frac{x}{4}dx$

$\int \frac{6}{cos^2 3x}dx$ $\int \frac{dx}{5-3x}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(5x+6)^2}}$

Середній рівень

1. Знайдіть інтеграл методом розкладання:

$\int (x+1)(x^2-x+1)dx$ $\int \frac{3x^4+5x^2+2}{x^2+1}dx$

$\int (x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)dx$ $\int sin4x \cdot sin7x\,dx$

$\int sin5x \cdot cos8x\,dx$ $\int \frac{2x-5x^3-4}{2\sqrt{x}}\,dx$

$\int \frac{2x^3-3x^2-x-5}{x+5}dx$ $\int \frac{12^x+4\cdot 3^x}{6^x}dx$

$\int sin^2\frac{x}{4}dx$ $\int \frac{5x^4+3x^2-1}{x^2+1}dx$

$\int sin2x \cdot cos6x\,dx$ $\int sinx \cdot sin5x\,dx$

2. Знайдіть інтеграл, скориставшись методом підстановки:

$\int 2x(x^2-18)^{12}dx$ $\int \frac{x}{x^2+3}dx$ $\int \frac{5x^3}{x^4-1}dx$

$\int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}}dx$ $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-5}}dx$ $\int \frac{x^3}{\sqrt[4]{1-x^4}}dx$

$\int \frac{x^5}{x^6+2}dx$ $\int \frac{x}{\sqrt{5-2x^2}}dx$ $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$

Високий рівень

1. Знайдіть інтеграл методом інтегрування частинами:

$\int x\cdot\sin x\,dx$ $\quad$ $\int x^2\cdot\sin x\,dx$ $\quad$ $\int x^2\cdot e^x\,dx$

$\int x\cdot e^{2x}\,dx$ $\quad$ $\int x\cdot\sin 3x\,dx$ $\quad$ $\int x\cdot arctgx\,dx$

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ $\quad$ $\int arcsinx\,dx$ $\quad$ $\int arctgx\;\,dx$

$\int lnx\,dx$ $\quad$ $\int x\cdot e^x\,dx$ $\quad$ $\int x^2\cdot\cos x\,dx$

$\int x\cdot\cos x\,dx$ $\quad$ $\int x\cdot lnx\,dx$ $\quad$ $\int \frac{x}{cos^2x}dx$

2. Знайдіть інтеграл методом підстановки:

$\int xe^{-3x^2}\,dx$ $\quad$ $\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$ $\quad$ $\int \frac{dx}{xlnx}$

$\int \frac{6e^{-2x}}{4+e^{-2x}}dx$ $\quad$ $\int \frac{3^x}{9^x+1}dx$ $\quad$ $\int 2^x\sqrt[5]{2^x+1}\,dx$

$\int x\cos(17-x^2)\,dx$ $\quad$ $\int \frac{lnx}{x}dx$ $\quad$ $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx$

$\int 5^x\sqrt[8]{5^x-2}\,dx$ $\quad$ $\int \frac{-4e^{-4x}}{1+e^{-4x}}dx$ $\quad$ $\int \frac{3\cdot 2^x}{4^x+3}dx$

Тема «Визначений інтеграл»

Початковий рівень

Обчисліть інтеграл:

1) $\int_2^6 \frac{x^2-1}{x-1}dx$ $\quad$ 8) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(2-\frac{1}{x^2}\right)dx$ $\quad$ 14) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{3x}dx$

2) $\int_0^4 \sqrt{x}(x-\sqrt{x})dx$ $\quad$ 9) $\int_e^{e^2} \frac{2}{x}\;dx$ $\quad$ 15) $\int_0^1 (4x-3)^3dx$

3) $\int_1^3 \frac{x+2}{x}dx$ $\quad$ 10) $\int_1^{e^2} \frac{3}{x}dx$ $\quad$ 16) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} sinx\,dx$

4) $\int_{2}^{5} \frac{dx}{x^2-2x+1}$

11) $\int_{0}^{1} \left(\frac{15}{\sqrt{5x+4}-x}\right) dx$

17) $\int_{0}^{\ln 2} e^{2x} dx$

5) $\int_{1}^{4} \left(\frac{3}{x}+x\right) dx$

12) $\int_{\log_5 2}^{\log_5 6} 5^x dx$

18) $\int_{\ln 3}^{\ln 4} e^{-x} dx$

6) $\int_{-1}^{2} (x^2-4x+5) dx$

13) $\int_{1}^{3} (4x^3-4x+1) dx$

19) $\int_{e}^{e^2} \frac{2}{x} dx$

7) $\int_{-1}^{2} \left(\sqrt{3x^2+5x}+ 2\right)\left(\sqrt{3x^2+5x}-2\right) dx$

Середній рівень

1. Обчисліть інтеграл:

1) $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2+6x+9}}$

6) $\int_{1}^{2} 4\,(2^x-x)^3(2^x \ln 2-1) dx$

2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\cos 8x}\, dx$

7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x \cdot \cos 3x\, dx$

3) $\int_{1}^{5} \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \ln x + \frac{\sqrt{3x+1}}{x}\right) dx$

8) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2x \cdot \cos x + x^2 \cdot \sin x}{cos^2 x} dx$

4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos x}{sin^2 x} dx$

9) $\int_{1}^{2} (x^2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x) dx$

5) $\int_{3}^{9} 2\sqrt{\log_3 x + x - 3}\left(\frac{1}{x \ln 3}+1\right) dx$

10) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(3sin3x - \frac{1}{2} cos\frac{x}{2}\right) dx$

2. Обчисліть методом інтегрування частинами:

а) $\int_{1}^{e} x \cdot \ln x\, dx$

г) $\int_{1}^{2} \ln x\, dx$

є) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x\, dx$

б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x\, dx$ д) $\int_{0}^{1} arcsinxdx$ ж) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{sin^2x} dx$

в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \cdot arcsinxdx$ е) $\int_{0}^{\ln 2} x \cdot e^{2x} dx$ з) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cdot sinx\, dx$

3. Обчисліть інтеграл застосовуючи вказану заміну змінної:

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^2x \cdot \cos x\, dx,\ \sin x = t$ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^2x \cdot \sin x\, dx, \cos x = t$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^5x \cdot \sin x\, dx, cos^2x = t$ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^2x \cdot cos^3x\, dx, \sin x = t$

$\int_{0}^{\ln 8} \frac{e^x}{1+e^x} dx, 1 + e^x = t$ $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx, \sqrt{e^x - 1} = t$

$\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx, x = 2sint$ $\int_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2} dx, x = const$

$\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx, \sqrt{4-3x} = t$ $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3} dx, x = tgx$

Високий рівень

1. Знайдіть похідну функції $G(x) = \int_{x}^{9x} \frac{sin\frac{\pi t}{2}}{\sqrt{t}}\, dt$ в тоці $x = 1$.

2. Дослідіть, при яких значеннях параметра a рівняння $\int_0^{\frac{1}{x}} 2^{tx} dt = \frac{a-x}{\ln 2}$ має єдиний розв’язок.

3. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \int_0^1 |t - x| dx$, яка паралельна прямій $x - 3y + 2 = 0$.

4. Знайдіть найменше додатне значення точки мінімуму функції

$$G(x) = \int_{x}^{2x} \frac{sin2t}{\sqrt{t}}.$$

5. Знайдіть найменший цілочисельний розв'язок нерівності $\int_{0}^{x} \sqrt{1 - sin2t}dt \geq 2\sqrt{2}.$

6. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$ в точці $x = 1$

7. Знайдіть знаменник такої геометричної прогресії (b_n) з першим членом $\int_3^7 \frac{2}{x^2 - 4} dx,$ щоб вираз $b_2 + b_2^2 + b_3 ln3$ набував найбільшого значення.

8. Обчисліть інтеграл, використовуючи його геометричний зміст або властивості:

а) $\int_{0}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$

б) $\int_{-1}^{1} \frac{sin^5 x}{1 + x^2 - \cos x} dx$

в) $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$

г) $\int_{0}^{2} \sqrt{4x - x^2} dx$

д) $\int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 - x^2}\, dx$

е) $\int_{-5}^{1} (|x + 4| + |x - 2|) dx$

є) $\int_{1}^{2} \sqrt{2x - x^2} dx$

ж) $\int_{-1}^{2} \big||x| - 1\big| dx$

з) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} arcsinx\, dx$

і) $\int_{3}^{4} \sqrt{4x - x^2} dx$

9. Якщо функція $f(x)$неперервна, непарна, то $\int_{-a}^{a} f(x) dx = 0$. Доведіть.

10. Знайдіть усі значення a при яких:

а) $\int_{1}^{a} (x + 1) dx \leq 0$

г) $\int_{a}^{a+3} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$

б) $\int\limits_{a}^{3a} (x-1)dx = 0$ д) $\int\limits_{0}^{a} \cos 2x\, dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos a$

в) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{a} \sin 2x\, dx \ge \frac{\sqrt{3}}{4}$ е) $\int\limits_{0}^{1} x\left(1 - x^{a-a^2}\right)dx \le \frac{1}{18}$

11. Обчисліть інтеграл:

а) $\int\limits_{-1}^{2} |x-3|dx$ в) $\int\limits_{3}^{4} (|x| + |x-2|)dx$

б) $\int\limits_{5}^{6} |x-3|dx$ г) $\int\limits_{-4}^{4} (|x| + |x+3|)dx$

12. Обчисліть інтеграли:

а) $\int\limits_{0}^{2.5} \{x\}\left(1 - \sqrt{\{x\}}\right)dx$ б) $\int\limits_{0}^{5} \left([x] + \sqrt{\{x\}}\right)dx$

де $\{x\}, [x]$ відповідно дробова і ціла частина числа x.

13. Нехай $f(x) \ge 0$ на відрізку $[a;b], \int_a^b f(x)dx = 0$. Доведіть, що $f(x) = 0$ для кожного $x \in [a;b]$.

14. Взаємнообернені зростаючі функції $y = f(x), y = g(x)$ визначені для всіх $x \in [0;\infty)$ та $f(0) = 0$. Доведіть, що для всіх додатних чисел $a\ i\ b$ справедлива рівність $\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f(x)dx \ge ab$.

15. Знайти максимум функції $f(x) = \int_0^x (sin2t - cost)dt, x \in [0;\pi]$.

16. Знайти область визначення функції $f(x) = \int_1^{2x-x^2} \frac{1}{t}dt$. Обчислити похідну функції $f(x)$.

17.Довести, що для довільного $c \in (a;b)$ виконується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

18. Якщо для функції $f(x)$ та $g(x)$ виконується нерівність $f(x) \le g(x)$ для кожного $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

19. Довести, що для довільного додатного a виконується рівність $\int_{-a}^{a} f(x)d\,x = \int_{0}^{a} \big(f(x) + f(-x)\big)dx.$

20. Довести, що:

а) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx,$ якщо $f(x)$– парна

б) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0,$ якщо $f(x)$ – непарна

Тема «Застосування інтегралу»

Початковий рівень

1. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$ віссю $0x$ і прямими $x = 1,\ x = 4$.

2. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = 3sinx - cosx$ віссю 0x і прямими $x = \frac{\pi}{4}, x = \pi$.

3. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої паркаболою $y = (x + 2)^2$ і осями координат.

4. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = x^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{\frac{5}{4}}\right)^2$ вісь $0x$ і прямими $x = 3,\ x = 6$.

5. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіками функції $y = 2 - x^2, y = -x$.

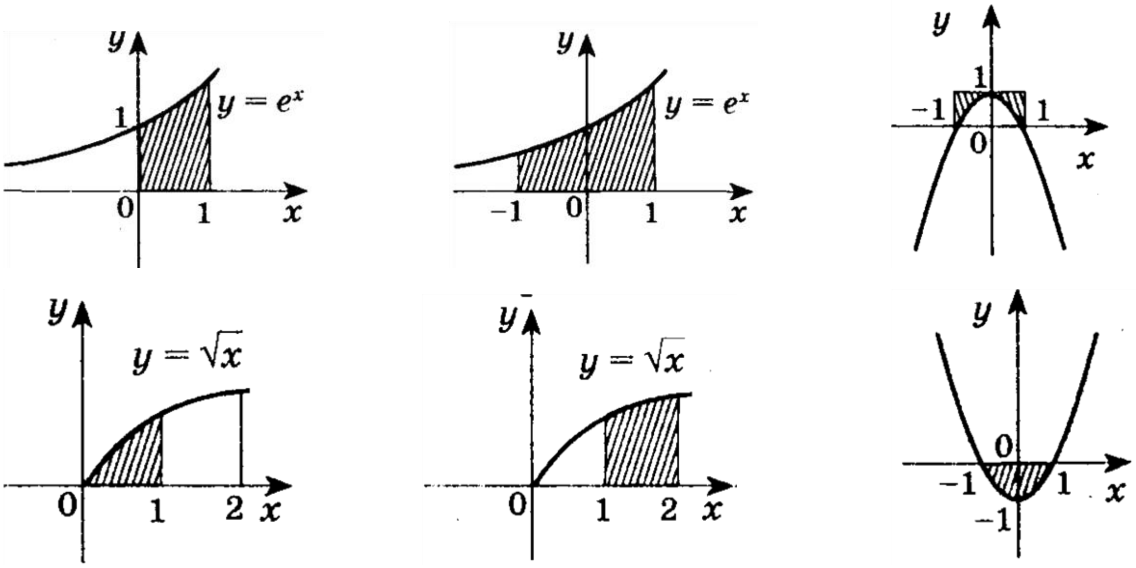
6. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = sin2x, y = 0$ і точками $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}$.

7. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіками функції $y = 1 - 2x, y = 3x^2$.

8. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = \frac{5}{sin^2x} - cosx$, віссю абсцис і прямими $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{2}$.

9. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої параболою $y = (x-3)^2$ і осями координат.

10. Знайти площу заштрихованої фігури:



Середній рівень

1. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = x|x^2 - x|$, віссю Ox і прямими $x = 0,\ x = 2$.

2. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = 4 - x,\ y = 6 - 2x - x^2$.

3. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = \left(\sqrt{2x+7} - \frac{1}{\sqrt{2x+7}}\right)^2$, віссю Ox і прямими $x = -3,\ x = 1$.

4. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = 4^{-1-x},\ y = 5 - 4^x$..

5. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = \begin{cases} 2x^2 + 3x - 1, \text{ якщо } x \le 1 \\ \sqrt{x} \cdot x^{\frac{3}{2}}, \text{ якщо } x > 1 \end{cases}$ віссю Ox і прямими $x = -1, x = 2$.

6. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = cosx, y = \frac{1}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $x = 0$.

7. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = |x|x^2$, віссю Ox і прямими $x = -2, x = 2$.

8. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = -x - 2, y = -x^2 - 2x$.

9. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = (2^x + \frac{1}{2^{x-1}})^2$, віссю абсцис і прямими $x = 0, x = 1$.

10. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = (2x + 1)^{\sqrt{3}}$, віссю Ox і прямими $x = 0, x = 3$.

11. При яких значеннях a пряма $x = a$ ділить фігуру, обмежену графіком функції $y = \frac{8}{x}$ та прямими $y = 0, x = 2, x = 8$ на дві рівновеликі частини?

12. При яких значеннях a пряма $x = a$ ділить фігуру, обмежену графіком функції $y = \frac{4}{x}$ та прямими $y = 0, x = 4, x = 9$ на дві рівновеликі частини?

13. Знайдіть об'єм тіла утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої лінією $y^2 = 4x$ і прямою $y = x$.

14. Знайдіть об'єм параболоїда, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої графіками функції $y = \sqrt{x}$ $(x \in [0; 4])$ і $y = 0$.

Високий рівень

1. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^2 + x + 6}$ і дотичними до цього графіка, проведеними з точки $A(0; -7)$.

2. При яких значеннях параметра a площа криволінійної трапеції , обмеженої графіком функції $y = 2^{0.5\log_2(x^2+4\sqrt{4x^2+9}+15)} + \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3x^2 + 9 + 15.}}$
прямими $y = 0, x = a, x = a + 2$ набувають найменшого значення?

3. Знайдіть площу трикутника утвореними осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = \frac{2x-3}{x+3}$ в точці з абсцис $x_0 = -2$.

4. Знайти площу фігури обмеженої графіком функції $y = 2\sqrt{x}$ і дотичною, проведеної до графіка функції $y = 1 + \ln x$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

5. Знайти площу фігури яка обмежена графіком функції $f(x) = \sqrt{x}$ дотичною проведеної до цього графіка в точці з абсцисою $x_0 = 1$ та прямою $y = 0$.

6. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = |x^2 - 6x + 8|$ та $y = 5 - |x - 3|$.

7. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 2 - |2 - x|$, $y = \left|\frac{3}{x}\right|$.

8. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = |4 - x^2|$, $y = 4 + 2|x|$.

9. У деякій точці графіка функції $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{2x - 4}}$ дотична нахилена до осі абсцис під кутом 45°. Обчисліть площу фігури, обмеженої цією дотичною, графіком функції $f(x)$ і прямою $x = 3$.

10. При якому значенні a пряма $y = a$ ділить площу фігури, обмеженої лінії $y = 0$ і $y = -x^2 + 2x$ на дві рівні частини?

11. Знайдіть значення, $p(p < 0)$ при якому площа фігури, обмеженої параболою $y = (1 + p^2)^2 x^2 + p$ і прямою$y = 0$, буде найбільшою.

12. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і заданими прямими:

а) $f(x) = 2x^2 - 8x$ прямі: вісь ординаті дотична до графіка функції $f(x)$, проведена в точці $(2; -8)$;

б) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ прямі: $x = 1$ і дотична до графіка функції $f(x)$, проведена в точці $(0; 2)$;

в) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ прямі: дотичні, проведені до графіка функції $f(x)$ в точках перетину цього графіка з віссю абсцис.

13. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = \sin|x|, y = |x| - \pi$.

14. Фігура, обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, обертається навколо осі абсцис. Знайти об’єм тіла обертання.

15. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = -x^2 + 4x - 3$ та дотичними до неї в точках $M(0; -3)$ та $N(3; 0)$.

16. Знайдіть об’єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

а) $y = x^2, y = 4x$

б) $y = \sqrt{x}, y = \sqrt{2 - x}, y = 0$

в) $x^2 + y^2 = 16, x = 1, x = 3$

г) $y = x^2 + 2x, x = 0$ і дотичною до параболи $y = x^2 + 2$, проведеною в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

д) $y = tgx, y = ctgx, x = \frac{\pi}{6}$

е) $y = x^2, x = 2, y = 0$

є) $y = x^2 + 1, y = 1, x = 1$

ж) $y = 2\sqrt{2}\,x, y = x^2$

з) $y = x^2 - 2x + 4, y = 4 + x$

Додаток 3

Конспект уроку

Тема «Обчислення об'ємів тіл»

Мета:

навчальна: сформувати вміння обчислювати об'єми тіл обертання за допомогою визначеного інтегралу;

розвивальна: розвивати увагу, просторову уяву та навички самоконтролю, розвивати логічне мислення, слухову та зорову пам'ять;

виховна: виховувати інтерес до вивчення математики, працьовитість, наполегливість.

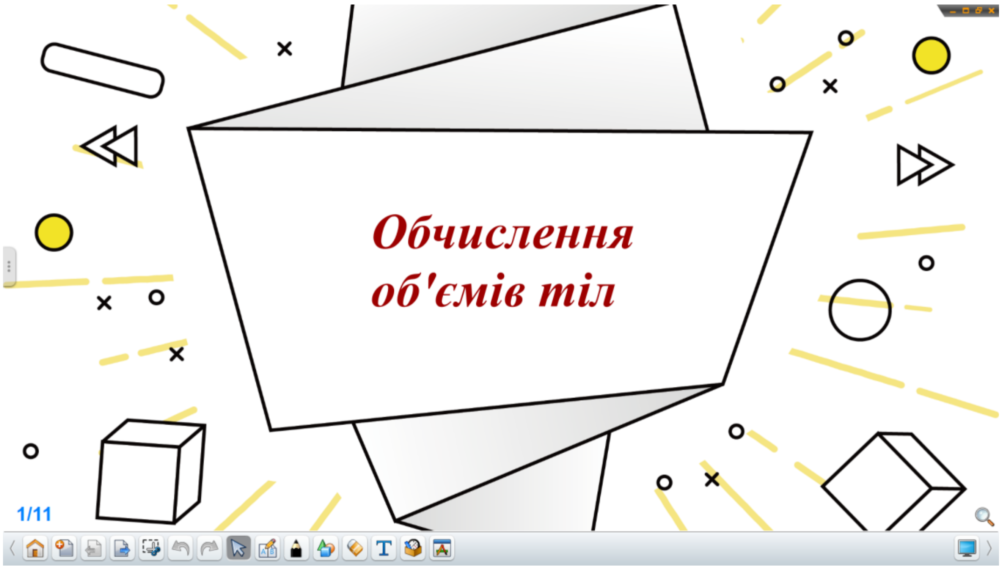
Тип уроку: комбінований урок.

Обладнання: мультимедійна дошка.

Хід уроку

I. Організаційний момент.

Вчитель перевіряє наявність домашнього завдання та відповідає на запитання, які виникли в учнів при розв'язанні домашнього завдання. Повідомляє тему уроку.



II. Формулювання мети і завдань уроку.

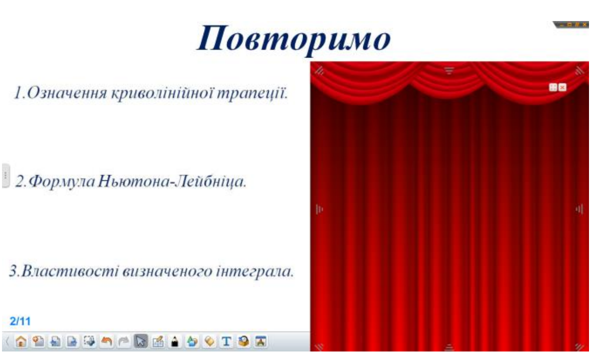
Вчитель створює мотивацію через проблемну ситуацію. Учням пропонується практичне завдання.

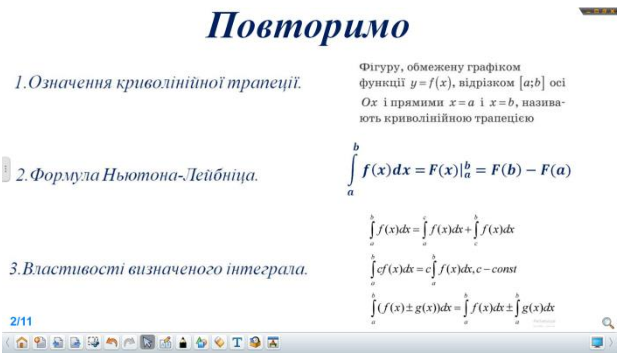
Завдання: Обчислити об’єм яблука, яке має неправильну форму, і тому використати яку-небудь відому формулу для обчислення об’єму неможливо. (за аналогією з обчисленням площі криволінійної трапеції, яблуко слід розрізати на тоненькі скибочки, кожну з яких можна вважати циліндром, виміряти радіус кожного циліндра й обчислити об’єм за відомою формулою).

Після заслуховування пропозицій учнів, щодо розв’язання даного завдання, вчитель повідомляє учням, що існує спосіб застосування інтеграла до обчислення об’ємів тіл. Таким чином, завдання уроку – сформувати вміння використовувати визначений інтеграл для обчислення об’ємів тіл.

III. Актуалізація опорних знань.

Перед тим як перейти до розв’язування задач, вчитель з учнями повторює означення криволінійної трапеції, визначеного інтегралу, властивості визначеного інтегралу, таблицю інтегралів. На мультимедійній дошці запитання відкрито, як тільки учні дадуть відповідь на запитання, вчитель відкриває «шторку» для перевірки правильності відповіді.





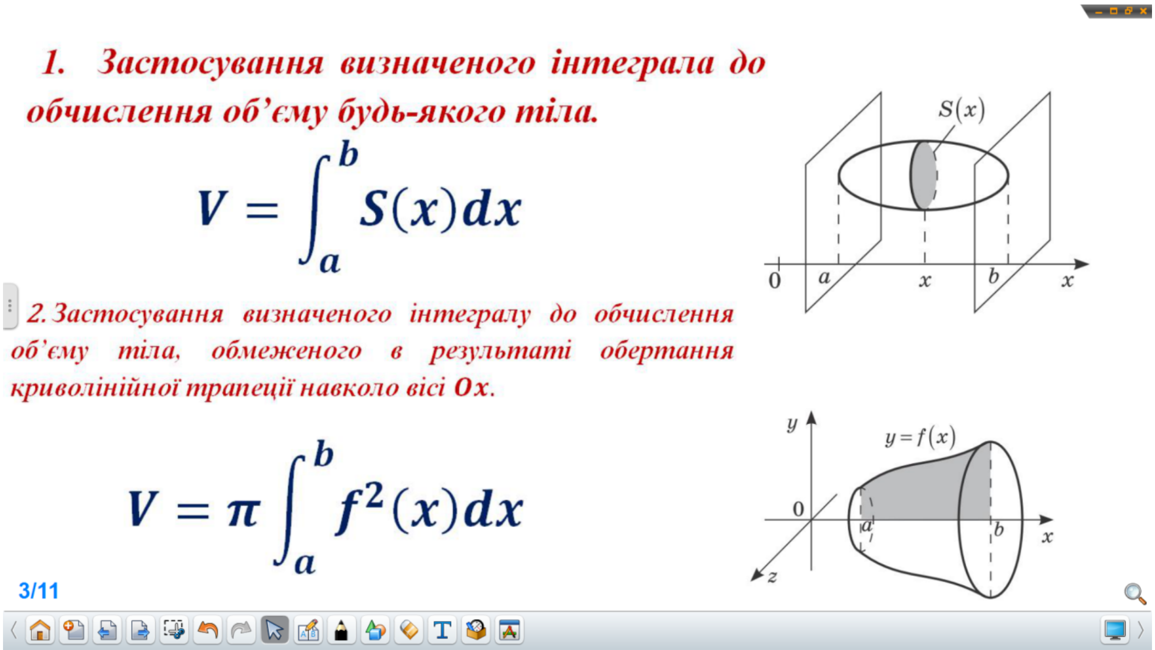
IV. Засвоєння знань, умінь і навичок.

1. *Застосування визначеного інтеграла до обчислення об’єму будь-якого тіла.*

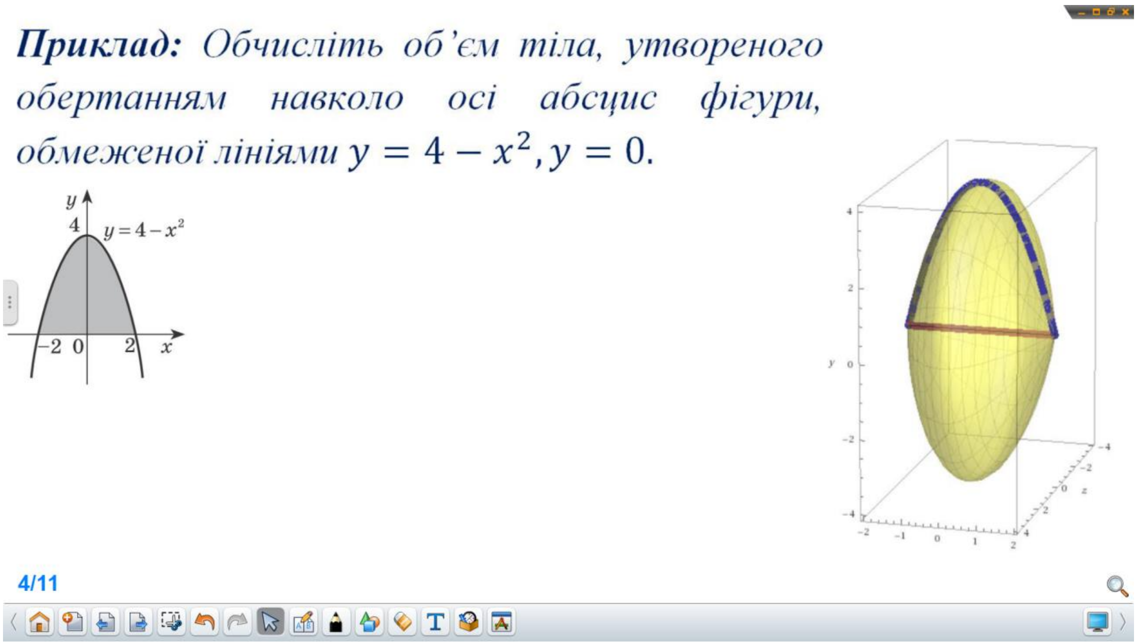
Якщо тіло вміщене між двома перпендикулярними до осі $0x$ площинами, що проходять через точки $x = a$ і $x = b$, то $V = \int_a^b S(x)dx$, де $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною, що проходить через точку $x \in [a; b]$ і перпендикулярна до осі $0x$.

2. *Застосування визначеного інтегралу до обчислення об'єму тіла, обмеженого в результаті обертання криволінійної трапеції навколо вісі* $0x$.

Якщо тіло одержане в результаті обертання навколо вісі $0x$ криволінійної трапеції, яка обмежена графіком неперервної і невід'ємної на відрізку $[a;b]$ функції $y = f(x)$ і прямими $x = a$ і $x = b$, то $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$



Розглянемо приклад застосування визначеного інтеграла до обчислення об'ємів тіл (вчитель біля дошки розв'язує, а учні допомагають йому на місцях, записуючи приклад в зошитах).



Розв'язання

Зобразимо задану фігуру і переконаємося, що вона є криволінійною трапецією. У цьому випадку об'єм тіла обертання можна обчислити за формулою:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Щоб визначити межі інтегрування, знайдемо абсциси точок перетину заданих ліній:

$$4 - x^2 = 0$$

$$(2 - x)(2 + x) = 0$$

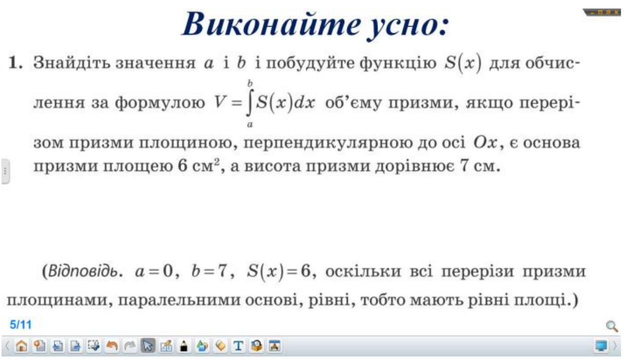
$$x_1 = -2, \quad x_2 = 2$$

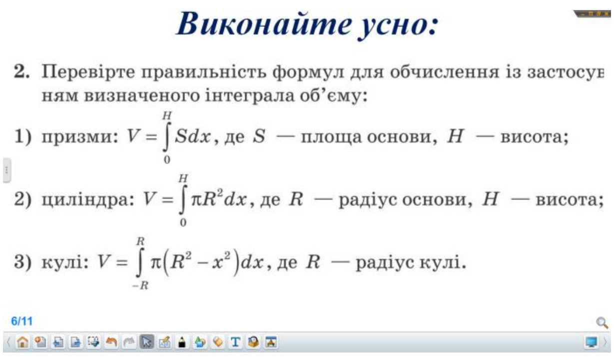
$$V = \pi \int_{-2}^{2} (4 - x^2)^2\, dx = \pi \int_{-2}^{2} (16 - 8x^2 + x^4)\, dx = \pi \left(-\frac{8x^3}{3} + 16x + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-2}^{2} =$$

$$= \pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} + 32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) = 34\frac{2}{15}\pi \text{ (куб. од.)}$$

Відповідь: $34\frac{2}{15}\pi$ (куб. од.)

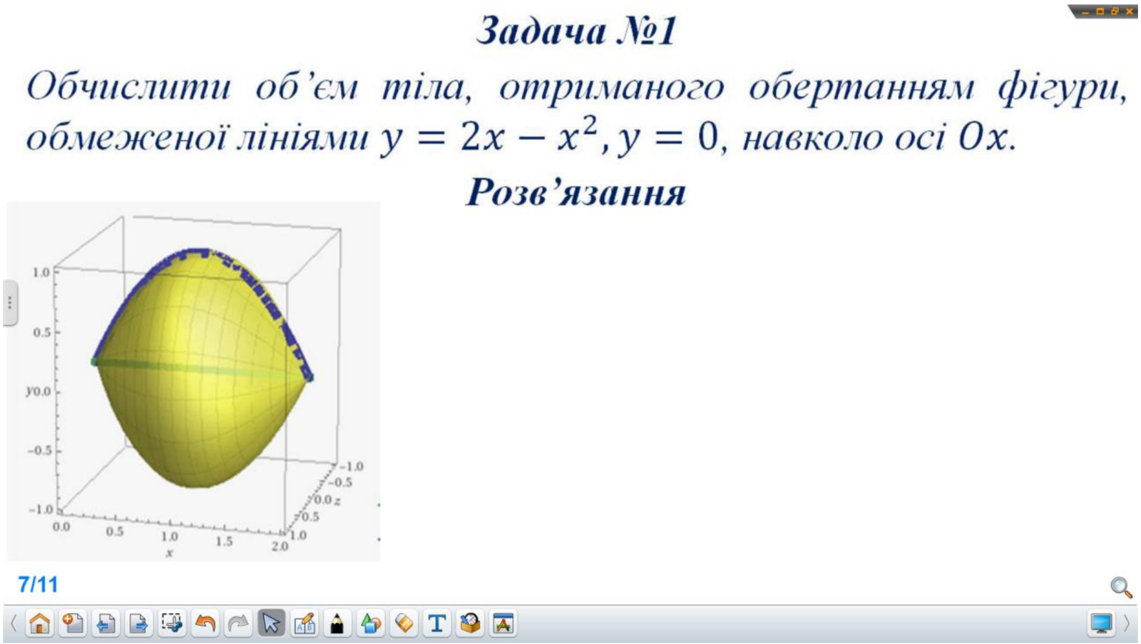
V. Формування вмінь і навичок.





Виконання письмових вправ.

Для наочності на мультимедійній дошці побудовані тіла обертання, об'єм яких потрібно знайти. Учні по черзі виходять до дошки та розв'язують задачі.



Будуємо фігуру обмежену графіками $y = 2x - x^2, y = 0$. Оскільки отримана фігура обертається навколо вісі Ox, то маємо тіло обертання показане на слайді (проекцію даного тіла обертання, учні будують самостійно).

Знаходимо точки перетину графіків функцій з віссю Ox:

$$2x - x^2 = 0$$

$$x(2 - x) = 0$$

$$x = 0 \text{ або } x = 2$$

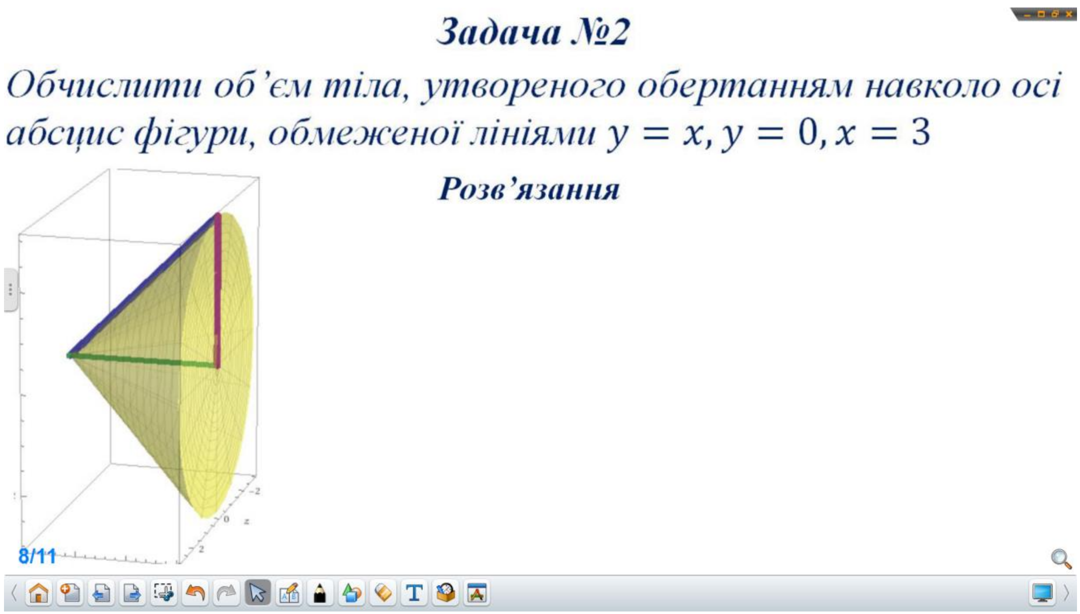
Оскільки вісь Ox – вісь обертання, то об'єм знаходимо за формулою:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot 8 - 16 + \frac{1}{5} \cdot 32\right) = \frac{16}{15}\pi = 1\frac{1}{15}\pi \text{ (куб. од.)}$$

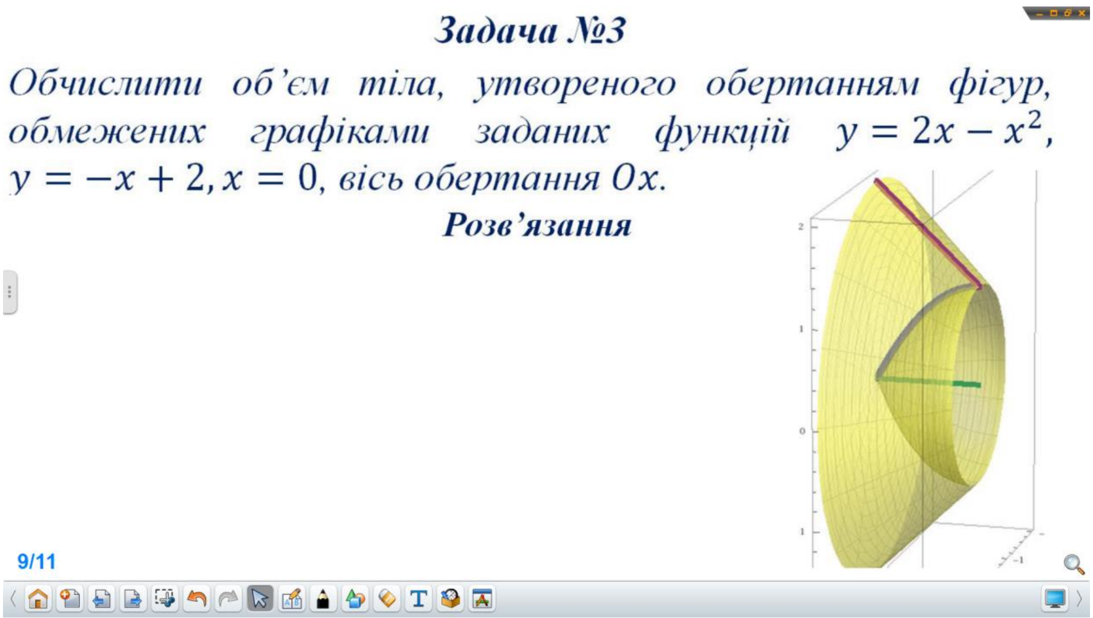
Відповідь: $1\frac{1}{15}\pi$ (куб. од.)



Оскільки задана фігура – криволінійна трапеція, то об'єм тіла обертання

$$V = \int_0^3 \pi(9 - x^2)dx = \pi\left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \pi\left(27 - \frac{27}{3}\right) = 18\pi \text{ (куб. од)}$$

Відповідь : 18π куб. од.



Знайдемо точки перетину графіків функцій:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$$2x - x^2 = -x + 2$$

$$-x + 2 + x^2 - 2x = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 2$$

Оскільки вісь Ox – вісь обертання, то об’єм знаходимо за формулою:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Знайдемо об’єм тіла, як різницю об’ємів двох тіл обертання:

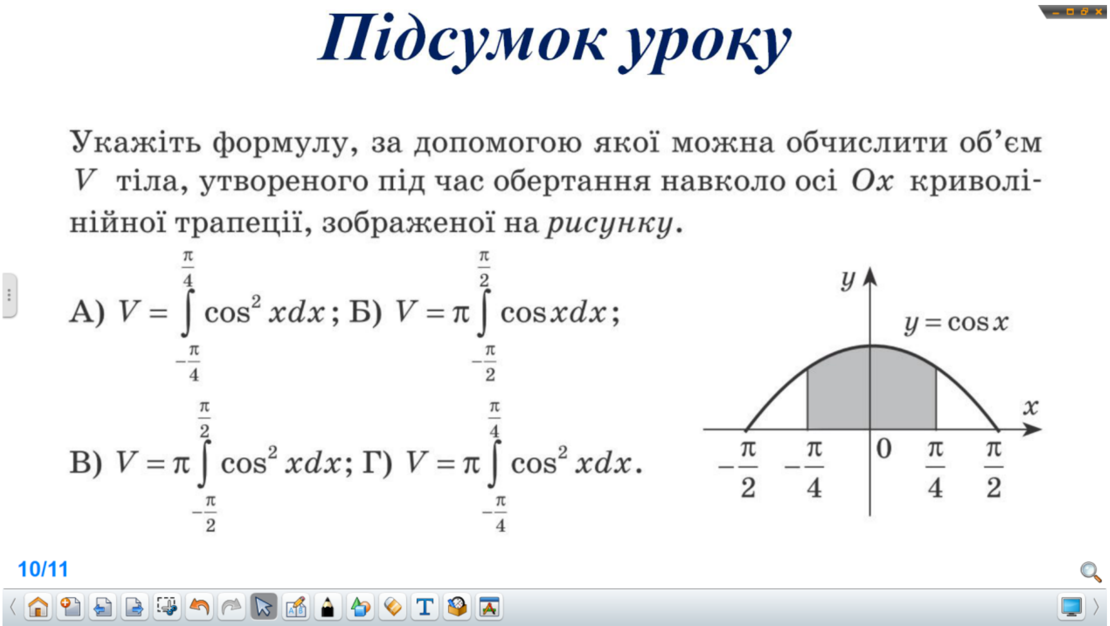
$$V = \pi \int_0^1 ((-x+2)^2 - (2x - x^2)^2)dx = \pi \int_0^1 (-x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x + 4)dx =$$

$$= \pi \cdot \left(-\frac{x^5}{5} + \frac{4x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x \right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(-\frac{1}{5} + 1 - 1 - 2 + 4\right) = \frac{9}{5}\pi$$

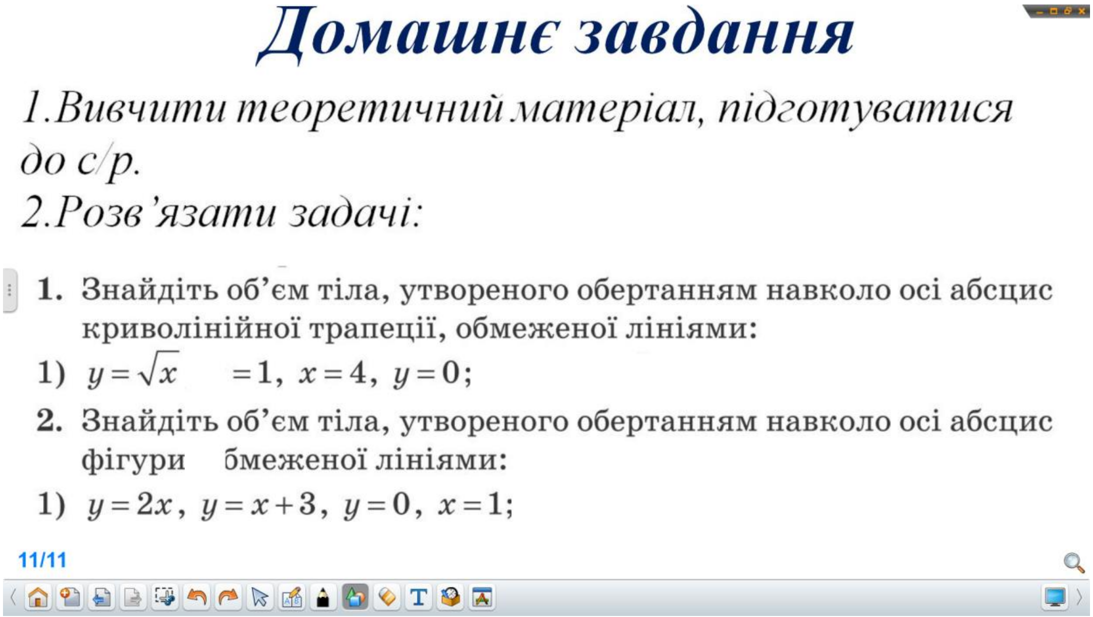
Відповідь: $\frac{9}{5}\pi$ куб.од.

VI. Підведення підсумку уроку. Домашнє завдання.

Для перевірки засвоєного на уроці, учні розв’язують одне тестове завдання, а вчитель перевіряє відповідь та за потреби коректує її. Після цього учні проводять рефлексію, а потім вчитель відзначає роботу найактивніших учнів, оголошує оцінки отримані протягом уроку.



Вчитель повідомляє учням домашнє завдання та коментує його (завдання записані на дошці).



ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку називається функція $F(x)$, якщо для всіх x з цього проміжку виконується рівність:

$$\boxed{\boldsymbol{F'(x) = f(x)}}$$

Операція знаходження

Похідної функції – диференціювання

Первісної функції – інтегрування

Інтегрування – операція, обернена до диференціювання.

Якщо $F(x)$ первісна для $f(x)$ ⇔ то ⇔ $F(x) + C$ – первісна для $f(x)$

$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx}$ читається: *інтеграл від а до b еф від ікс де ікс*

$\boldsymbol{f(x)}$ – підінтегральна функція

$\boldsymbol{f(x)\,dx}$ – підінтегральний вираз

$\boldsymbol{a}$ – нижня межа інтегрування

$\boldsymbol{b}$ – верхня межа інтегрування

$\boldsymbol{x}$ – змінна інтегрування

Основні властивості визначених інтегралів

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Правила знаходження первісних

Якщо F – первісна для f, H – первісна для h, то $F + H$ – первісна для $f + h$

Якщо F – первісна для f, то kF – первісна для kf, $k = const$

Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ – первісна для $f(kx+b)$

Таблиця первісних

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(x) + C}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
$sinx$	$-cosx + C$
$cosx$	$sinx + C$
$\frac{1}{cos^2x}$	$tgx + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{lna} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$

Таблиця інтегралів

$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx + C$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\int sinxdx = -cosx + C$
$\int cosxdx = sinx + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
$\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C$
$\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$

Сукупність всіх первісних функції *f(x)* на проміжку називається ***невизначеним інтегралом*** від функції *f(x)* на цьому проміжку.

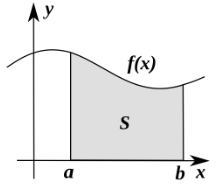
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Нехай задано неперервну функцію $f(x)$, визначену на проміжку $[a; b]$. Тоді ***визначеним інтегралом*** від a до b функції $f(x)$ називають приріст первісної $F(x)$ для цієї функції, тобто

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = \boldsymbol{F(b) - F(a)}$$

Формула Ньютона-Лейбніца

Геометричний зміст визначеного інтегралу



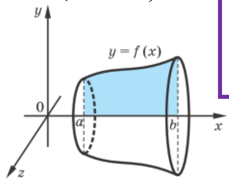
Криволінійною трапецією називається фігура, обмежена графіком невід'ємної неперервної функції f на відрізку $[a;b]$, віссю Ox $(y=0)$, прямими $x=a, x=b$.

$$\boxed{S=\int_a^b f(x)dx}$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[a;b]$, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком даної функції.

Об'єм тіл обертання

Якщо тіло отримане в результаті обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної та невід'ємної функції $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і прямими $x=a, x=b$, то



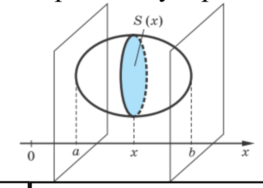
$$\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)dx}$$

Об'єм тіл в загальному випадку

Якщо тіло міститься між двома перпендикулярними до осі Ox площинами, що проходять через точки $x=a, x=b$, то

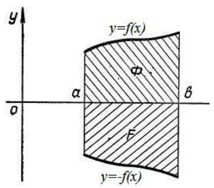
$$\boxed{V=\int_a^b S(x)dx}$$

де $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною, яка проходить через точку $x\in[a;b]$ і перпендикулярна до осі Ox.

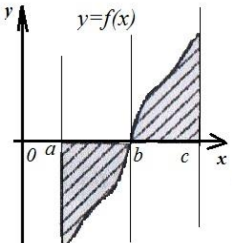


Обчислення площ трапеції за допомогою інтеграла

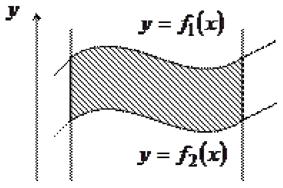
$$S=2\int_a^b f(x)dx$$



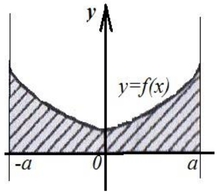
$$S=-\int_a^b f(x)dx+\int_c^d f(x)dx$$



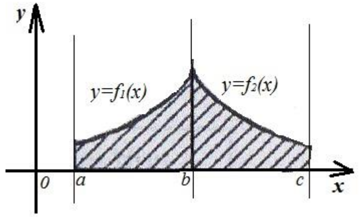
$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$$



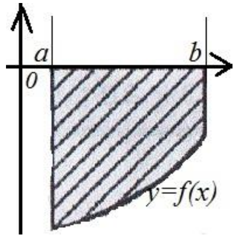
$$S=2\int_0^a f(x)dx$$



$$S=\int_a^b f_1(x)dx+\int_b^c f_2(x)dx$$

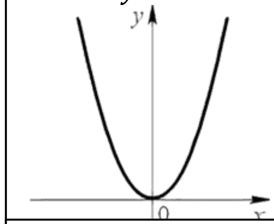


$$S=-\int_a^b f(x)dx$$

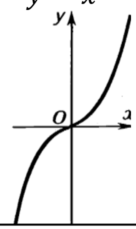


Пригадай графіки

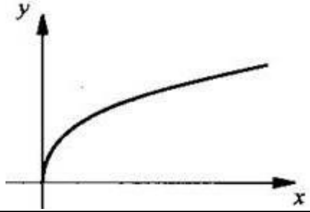
$y=x^2$

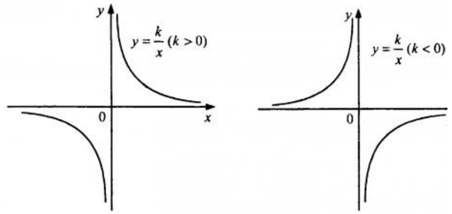


$y=x^3$

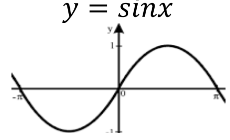


$y=\sqrt{x}$

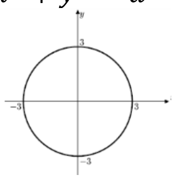




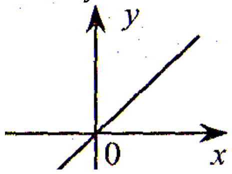
$y=sinx$



$x^2+y^2=a^2$



$y=x$



$y=cosx$