

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ**

**Факультет фізико-математичний факультет  
Кафедра математики та методики її навчання**

«Допущено до захисту»  
Завідувач кафедри  
\_\_\_\_\_ Д. Є. Бобилев

Реєстраційний No \_\_\_\_\_  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

**STEM-ОРІЄНТОВАНИЙ ПІДХІД ДО НАВЧАННЯ  
СТОХАСТИКИ НА ПРОФІЛЬНОМУ РІВНІ ПІДГОТОВКИ**

Кваліфікаційна робота студентки групи  
Мім-23  
ступінь вищої освіти «магістр»  
спеціальності 014.04 середня освіта  
Математика (Інформатика)  
Малахової Соф'ї Євгенівни

Керівник кандидат педагогічних наук, доцент,  
доцент кафедри математики та методики її  
навчання Крамаренко Тетяна Григорівна

Оцінка:

Національна шкала \_\_\_\_\_

Шкала ECTS \_\_\_\_\_ Кількість балів \_\_\_\_\_

Голова ЕК \_\_\_\_\_

(підпис) (прізвище, ініціал)

Члени ЕК \_\_\_\_\_

(підпис) (прізвище, ініціал)

(підпис) (прізвище, ініціал)

(підпис) (прізвище, ініціал)

(підпис) (прізвище, ініціал)

Кривий Ріг – 2024

## ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Малахова Соф'я Євгенівна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело.

Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомена. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

## ЗМІСТ

3

<b>ВСТУП</b> .....	4
<b>РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ STEM-ОРІЄНТОВАНОГО ПІДХОДУ ДО НАВЧАННЯ СТОХАСТИКИ</b> .....	6
<b>1.1 STEM- освіта як перспективна форма інноваційної освіти України</b> ...	6
<b>1.2. STEM-орієнтований підхід до навчання математики у закладах середньої освіти</b> .....	13
<b>1.3. Методи розв’язування задач стохастичного програмування</b> .....	24
<b>1.4. Логіко-математичний аналіз теми «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» у контексті STEM-навчання.</b>	28
<b>Висновки до першого розділу</b> .....	39
<b>РОЗДІЛ 2. ПРАКТИЧНІ ОСНОВИ STEM-ОРІЄНТОВАНОГО ПІДХОДУ ДО НАВЧАННЯ СТОХАСТИКИ НА ПРОФІЛЬНОМУ РІВНІ НАВЧАННЯ.</b> .....	40
<b>2.1. Використання системи динамічної математики GeoGebra та інших засобів цифрових технологій у навчанні стохастичної лінії</b> .....	40
<b>2.2 Використання методу Монте-Карло у навчанні стохастики</b> .....	53
<b>2.3 Стохастичні задачі і прикладна спрямованість навчання</b> .....	58
<b>2.4. Використання проєктних технологій у навчанні стохастики.</b> .....	66
<b>Висновки до другого розділу</b> .....	71
<b>ВИСНОВКИ</b> .....	72
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b> .....	74

## ВСТУП

**Актуальність теми дослідження.** У сучасному світі, де технології розвиваються стрімкими темпами, виникає гостра потреба у підготовці молоді здатної критично мислити, вирішувати складні проблеми та адаптуватися до змін. Саме тому STEM-освіта, яка поєднує науку, технології, інженерію та математику, набуває все більшої популярності. STEM-освіта є одним із найважливіших напрямів реформування освіти в Україні. Серед ключових компетентностей Європейського Союзу (від 22 травня 2018 року) комплексно подається математична компетентність та компетентність у галузі науки, технологій та інженерії (STEM-компетентність).

Розвиток математичної компетентності в контексті STEM-навчання розглядається нами у навчанні теорії ймовірностей та математичної статистики. Стохастика, як розділ математики, що вивчає випадкові явища, є невід'ємною частиною STEM-освіти. Однак, традиційні методи навчання стохастики часто не відповідають сучасним вимогам і не забезпечують достатньої мотивації учнів. Тому розробка та впровадження інноваційних підходів до навчання теорії ймовірностей та математичної статистики, зокрема STEM-орієнтованих, є актуальним завданням сучасної педагогіки та методики навчання математики.

**Метою даної роботи** є розробка методики STEM-орієнтованого навчання стохастики у закладах загальної середньої освіти.

Дослідження спрямоване на виявлення особливостей структури STEM-середовища в закладах освіти та STEM-освіти як перспективної форми інноваційної освіти України, реалізацію STEM-орієнтованого підходу до вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики у закладах середньої освіти.

**Об'єкт дослідження:** процес навчання стохастики у закладах загальної середньої освіти. **Предмет дослідження:** STEM-орієнтований підхід як інноваційний засіб підвищення ефективності навчання стохастики.

Відповідно до мети дослідження сформулюємо **наступні завдання:**

1. Провести аналіз психолого-педагогічної, навчальної методичної літератури з метою вивчення особливостей STEM-орієнтованого навчання математики учнів з особливими освітніми потребами.
2. Виконати аналіз стохастичної лінії в підручниках і навчальних програмах з метою порівняння методичних прийомів вивчення.
3. Розробити методику STEM-орієнтованого навчання стохастики та рекомендації щодо її реалізації.
4. Описати можливості використання методу навчальних проєктів як одного з напрямів реалізації STEM-освіти.

**Методи дослідження:** теоретичні: вивчення і аналіз психолого-педагогічної, навчальної та методичної літератури з теми, узагальнення; емпіричні: вивчення педагогічного досвіду, спостереження, порівняння, анкетування.

**Наукова новизна** роботи полягає в розробці методики STEM-орієнтованого навчання стохастики у закладах загальної середньої освіти, яка враховує вікові особливості учнів та специфіку навчального предмета.

**Практичне значення** магістерської роботи полягає в тому, що її матеріали можуть бути використані вчителями математики, студентами-практикантами при підготовці до проведення уроків з метою підвищення мотивації учнів до вивчення математики, формування у школярів ключових компетентностей, необхідних для успішної адаптації в сучасному світі; для розробки методичних рекомендацій для вчителів математики.

**Апробації дослідження.** Подано сумісно з науковим керівником магістерської роботи тези «STEM-орієнтований підхід до навчання стохастики» для участі у роботі V Міжнародної науково-методичної конференції «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу – ІТМ\*плюс-2024» (21 – 22 листопада 2024 року, м. Суми, Україна) і доповіді.

**Структура роботи.** Робота складається з вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

## **РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ STEM-ОРІЄНТОВАНОГО ПІДХОДУ ДО НАВЧАННЯ СТОХАСТИКИ**

### **1.1 STEM- освіта як перспективна форма інноваційної освіти України**

Еволюція інноваційних технологій сприяє виникненню нових професій. Зростає потреба в досвідчених фахівцях технічних та природничо-математичних дисциплін. Для стимулювання процесів навчання необхідне ефективне освітнє середовище. Освіта стає ключовим чинником розвитку інноваційної економіки України. У цей час STEM-освіта є одним з головних трендів інноваційної освіти. Впровадження системи освіти STEM продиктовано вимогою «нової економіки» - бути конкурентоспроможною як всередині країни, так і на міжнародній арені.

Концептуальні підходи та практичні напрями реалізації STEM-освіти досліджувало багато науковців та методистів. Зокрема О. Барна, В. Олексюк, Н. Балик та ін. [3], Д. Проскурін, С. Гнатюк [16], І. Василяшко, С. Горбенко О. Патракеєва [37], [38], Н. Морзе [59], В. Пікалова [64] та ін. Андрієвська В. та Білоусова Л. розглядають концепцію BYOD як інструмент реалізації STEAM-освіти [28]. Проблеми підготовки, підвищення кваліфікації вчителів математики в контексті використання інноваційних технологій навчання та розвитку навчальних компетентностей здобувачів освіти знайшли відображення в дослідженнях І. Лов'янової, К. Власенко та ін. [24]. Автори акцентують увагу на необхідності посилення практичної спрямованості навчання математики.

На основі аналізу проведених досліджень STEM-освіту трактуємо, як цілісну систему природничої і математичної освітніх галузей. STEM-навчання базується на практичному застосуванні наукових, математичних, технічних та інженерних знань для розв'язання практичних проблем для подальшого використання цих знань і вмінь у професійній діяльності. Метою

STEM-освіти є, зокрема, розвиток особистості через формування STEM компетентностей, бачення природничо-наукової картини світу здобувачами освіти, використання транс дисциплінарного підходу до навчання. Очікуваними результатами має стати трансфер знань, який забезпечує впровадження досягнень наукової сфери в освітній процес.

В. Пікалова [65] в дисертаційній роботі обґрунтовує комплекс педагогічних умов використання GeoGebra як інструмента реалізації STEM-освіти в процесі підготовки майбутніх учителів математики. Зокрема, супроводу різних видів навчальної діяльності студентів із використанням пакету GeoGebra.

Питаннями впровадження інноваційних технологій в сучасну освіту займалися вітчизняні вчені: М. Головань, Ю.Горошко, А. Єршов, Т. Чепрасова та інші. Проблемам STEM-освіти присвячено наукові праці зарубіжних вчених: Хізера Гонсалеса, Джеффри Куензі, Девіда Ленгдона, Кейта Ніколса та інших. На думку багатьох дослідників, STEM-освіта сьогодні – важливий і перспективний напрямок інноваційної освіти в усьому світі, ціль якої - підготовка студентів до більш ефективного застосування отриманих знань для вирішення професійних завдань і проблем (у тому числі через поліпшення навичок високоорганізованого мислення) і розвиток компетенції в STEM. Однак, питання ефективності впровадження STEM-освіти є недостатньо дослідженими.

Професії майбутнього пов'язані з технологічним виробництвом на перетині з природничими науками (біо- та нанотехнології), де фахівці мають бути всебічно підготовлені в різноманітних освітніх галузях природничих наук, інженерії та технологій. STEM-освіта є пріоритетною з причин затребуваності ІТ-фахівців, програмістів, інженерів, фахівців технологічних виробництв. STEM-освіта (англійською – Science, Technology, Engineering, Mathematics) - інтегрований підхід до навчання, у рамках якого академічні науково-технічні концепції вивчаються в контексті реального життя, вимагає різних і більш технічно-складних навичок.

На основі аналізу джерел [3], [20], [22], [29], [35-38], [44] та ін. можемо констатувати, що STEM-освіта поєднує в собі міждисциплінарний і проектний підходи, основою для яких є інтеграція природничих наук у технології, інженерну творчість та математику. За даними досліджень, залучення 1% населення до STEM- професій підвищує ВВП країни на 50 млрд.дол., а потреба у фахівцях з цих сфер постійно зростає – в 2 рази швидше, ніж в інших професіях [51]. Освітні програми STEM розвивають здібності здобувачів освіти до дослідницької, аналітичної роботи, експериментування, критичного мислення. Відповідно до дослідження вчених Джорджтаунського університету в 2014 році, прогнозована необхідна кількість працівників, пов'язаних зі STEM-освітою, до 2018 року складе 8,65 млн. Зокрема, виробничий сектор із небезпечно великим дефіцитом співробітників, що володіють необхідними навичками, - майже 600 тис. осіб [51].

У країнах Європейського Союзу прогнозується, що попит на професіоналів у галузі STEM до 2025 року зросте на 8%, тоді як на інші професії - тільки на 3%. В Україні в 2015 році був підписаний Меморандум про створення Коаліції STEM-освіти, до якої в якості партнерів уже приєдналися 16 учасників. Коаліція сформувала 7 ключових завдань: підготовка рекомендацій Міністерству освіти і науки стосовно програм дисциплін, які входять до STEM-циклу; реалізація програм для впровадження інноваційних методів навчання в навчальних закладах; надання можливостей студентам для проведення дослідницької й експериментальної роботи на сучасному обладнанні; проведення конкурсів, олімпіад для самореалізації; створення інформаційних площадок; профорієнтація; розвиток міжнародного співробітництва [50].

Сьогодні в Україні напрямок STEM-освіти набуває все більшої популярності, STEM-підходи реалізуються в багатьох загальноосвітніх навчальних закладах і позашкільні (діяльність Малої академії наук, різноманітні програми, конкурси і олімпіади: Intel Techno Ukraine; Intel Eco



Ukraine; Фестиваль науки Sikorsky Challenge; наукові пікніки, хакатони й інше) [37], [38], [45]. Фахівці майбутнього мають розв'язувати задачі з використанням наукових підходів і сучасних інформаційно-комунікаційних технологій. Для цього потрібно приділяти увагу науковій та дослідницькій діяльності учнів. Критичне, аналітичне, творче, інноваційне мислення, вміння працювати над проектами в команді, інформаційна грамотність і навички ефективного використання ІКТ – неповний перелік характеристик сучасної успішної людини [56].

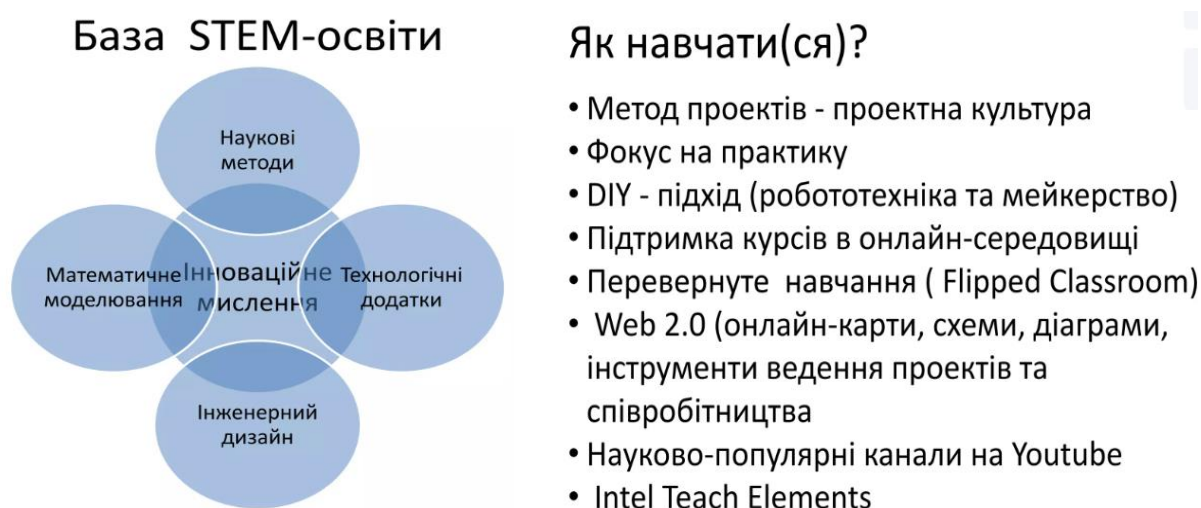
Як зазначають автори низки публікацій, зокрема [59], [62], [63], [64], залучення учнів до STEM-освіти може впливати на розвиток таких навичок як співробітництво для досягнення інноваційних результатів і розв'язування складних завдань в команді потрібно працювати особистостям з різним науковим і технічним досвідом; комунікативність, оскільки навчання в галузі STEM надає широкі можливості для спілкування «один на один» й «один до багатьох»; творчість, оскільки з використанням креативних вмінь можна покращити науковий і технологічний проект, показати його потенційні можливості; критичне мислення як здатність осмислити, вдумливо й обґрунтовано проаналізувати факти та застосовувати знання для вирішення проблеми.

STEM-освіта передбачає створення умов для збалансованої гармонійної науково-орієнтованої освіти на основі модернізації математично-природничого та гуманітарного профілів навчання.

*STEM-освіті притаманні подані нижче особливості.*

- Поеднує науку з гуманітарними знаннями. Наприклад, при вивченні екологічних проблем учні не тільки досліджують наукові аспекти, але й обговорюють соціальні, економічні та етичні наслідки.
- Розвиває різнобічні компетентності. Крім наукових знань і вмінь, учні розвивають критичне мислення, креативність, вміння працювати в команді, комунікувати та вирішувати проблеми.

- Стимулює інноваційність, оскільки школярі вчаться генерувати нові ідеї, створювати прототипи та презентувати свої проекти.
- Підготовляє до життя в сучасному світі. Випускники STEM-програм готові до роботи в міждисциплінарних командах, здатні адаптуватися до змін і вирішувати складні завдання.
- Подолання стереотипів. Обидві концепції спрямовані на подолання стереотипів про те, що STEM-сфера – це виключно чоловічий прерогатив. Збалансована STEM-освіта створює умови, де дівчата відчують себе комфортно і мають рівні можливості для розвитку.
- Справедливий доступ до освіти: Збалансована STEM-освіта передбачає створення рівних умов для всіх учнів, незалежно від їхньої статі, що відповідає цілям ініціативи "Дівчата в STEM" [36].



**Рис. 1.1. База STEM-освіти та основні STEM-підходи до навчання [59]**

Наведемо *приклад* STEM-проектів, які доцільно пропонувати для розробки здобувачам освіти. Наприклад, таким є проект "Розумне місто". Учні вивчають принципи роботи сенсорів, аналізують дані про забруднення повітря, розробляють мобільний додаток для моніторингу якості повітря та презентують його міській раді. Інший проект пов'язаний зі створенням біорозкладного пакувальника. Учні досліджують властивості різних матеріалів, розробляють рецептуру біорозкладного пакувальника, проводять

експерименти з його міцності та стійкості до вологи, а потім презентують свій продукт на шкільній виставці. Наступним є розробка мобільного додатку для людей з обмеженими можливостями. Учні вивчають принципи програмування, розробляють інтерфейс додатку, враховуючи потреби користувачів, тестують додаток і презентують його на конкурсі.

Дівчата STEM – це ініціатива, заснована Центром “Розвиток КСВ” у 2016 році. Вона спрямована на подолання гендерних стереотипів при виборі професії та на підвищення віри дівчат у власні здібності й можливість побудувати STEM кар’єру в Україні [36].

У нормативних документах про реформування освіти, зокрема [44], [45], навчальному посібнику [59], збірниках матеріалів «STEM-тиждень» [37], «STEM-школа» [38], наголошується на важливості STEM-освіти. Зокрема, для реалізації потенціалу учнів. Кожен учень має різні таланти та інтереси. Збалансована STEM-освіта дозволяє кожному знайти себе і розвивати свої сильні сторони. Для підготовки до майбутніх професій. Світ праці швидко змінюється. Фахівці з різнобічними знаннями та навичками будуть більш затребувані. Розвиток критичного мислення: Здатність аналізувати інформацію, оцінювати різні точки зору і приймати обґрунтовані рішення – це необхідні навички для успіху в будь-якій сфері діяльності.

Щоб реалізувати збалансовану STEM-освіту, необхідно забезпечити інтеграцію предметів, поєднавши знання з різних навчальних дисциплін при розв’язуванні реальних проблем. Важлива проектна діяльність, що передбачає залучення учнів до розробки і реалізації власних проектів. Особливої уваги потребує використання сучасних технологій із забезпеченням доступу до комп’ютерів, програмного забезпечення, лабораторного обладнання. Доцільна співпраця з іншими закладами через залучення до навчального процесу представників бізнесу, університетів, наукових установ.

Наведемо *приклад успішного впровадження STEM-освіти в громадах*. Це проєкт «STEM у Царичанці» [21]. На початку впровадження

всеукраїнської STEM-освіти Царичанський ліцей долучився до проєкту “Науково-методичні засади створення інноваційної моделі STEM-освіти”. Наприклад, серед школярів аж троє школярів отримали дипломи обласного конкурсу STEM-проєктів – «Промисловість надихає» та переможниця цього ж змагання в номінації «Краща STEM-прикраса». Дев’ятикласнику Данилу Григор’єву вдалося потрапити на міжнародний конкурс «IPRC ONLINE 2020. Robotcreation contest» і вибороти на ньому третє місце. Він виготовив та запрограмував робота для автоматичного вимірювання температури.

Учасники конкурсів наразі є не лише гордістю школи, а й помічниками у здобуванні інноваційних призів, які залюбки учні використовують у навчальному процесі. Цікаво, що не тільки громада допомагає школярам, а й школярі беруть активну участь у житті громади [21]. Учні беруть активну участь у роботі із квадрокоптерами, за допомогою яких долучаються до моніторингу полів, сільськогосподарських угідь, спостерігають за посівною, досліджують розлив річки Оріль. Це корисно впливає на розвиток їх просторової уяви, критичного мислення та створює сприятливу та продуктивну роботу на уроках. Учні завдяки своїм роботам напряду допомагають громаді рідного краю, надаючи свою цінну інформацію. Завдяки STEM-освіті учні мають змогу працювати з мультимедійним обладнанням, сучасними мікроскопами та електролабораторією. За допомогою інтернет-платформи з інтегрованими маніпуляторами діти з учителем інформатики маю змогу працювати з проєктами. Завдяки цьому учні знайомляться зі світом сучасних професій, створюють власні винаходи, архітектурні витвори тощо. Школярі мотивовані відвідувати STEM-уроки за плідно працювати з можливості перевірити власні теоретичні знання на практиці.

На рис. 1.2. продемонстровано дрони, виготовлені в STEM-центрі Царичанського ліцею. Директорка Царичанського ліцею Таїсія Рашевська розповіла, що кілька останніх років випускники почали частіше обирати для навчання технічні ЗВО та спеціальності, пов’язані з цифровими

технологіями. Вона впевнена, що саме STEM-спеціалізація ліцею вплинула на профорієнтацію її колишніх учнів, серед яких невдовзі мають з'явитися, наприклад, цифрові лінгвісти [21].



**Рис. 1.2.** Дрони, виготовлені в STEM-центрі Царичанського ліцею [21].

## **1.2. STEM-орієнтований підхід до навчання математики у закладах середньої освіти**

Інтеграція STEM-освіти (Наука, Технології, Інженерія і Математика) в цифровий освітній процес є кроком для підготовки учнів до майбутнього. Це дозволяє створити більш комплексну і сучасну освіту, яка враховує реальні потреби суспільства та прискорений темп технологічного розвитку. Розглянемо деякі ключові аспекти і переваги інтеграції STEM-освіти в цифровий освітній процес. Зокрема, розвиток навичок критичного мислення. Адже STEM-освіта сприяє покращенню розвитку навичок критичного мислення, оскільки учні вивчають проблеми та розв'язують завдання, з використанням логічних та аналітичних навичок. Вони здійснюють підготовку до отримання майбутніх професій, адже інтеграція STEM сприяє учням володіти навичками, які є дорослими у багатьох професіях, пов'язаних з технологіями, інженерією та наукою.

Інтеграція STEM дозволяє використовувати сучасні технології, такі як комп'ютери, програмування, 3D-друк та інші інструменти, для навчання та вирішення завдань. У STEM-освіті важливий акцент робиться на розвиток творчого мислення, що сприяє учням розробляти нові ідеї та інноваційні рішення. STEM-навчання має бути адаптивними та готувати учнів вирішувати проблеми в змінному середовищі. STEM-освіта сприяє розумінню глобальних викликів, таких як зміна клімату та сталого розвитку.

Теоретичні основи STEM-освіти висвітлено у працях багатьох педагогів та психологів, фахівців з методики навчання (В. Андрієвська, С. Бабійчук, Л. Білоусова, О. Кузьменко, Н. Морзе, Т. Нанаєва, Н. Омельченко, О. Патрикеєва, В. Пікалова, С. Подлесний, Н. Поліхун, І. Сліпухіна, О. Стрижак, О. Тарасов, І. Чернецький, M. Harrison, D. Langdon, B. Means, E. Peters, Burton, N. Morel, J. Confrey, A. House та інших). Більшість вчених заявляє, що STEM-освіта включає інтегрований та проєктний підхід та орієнтується на практичні знання. Н. Морзе вказує, що впровадження STEM-освіти вимагає розробки державної політики, яка охоплює професійний розвиток, навчальні програми, систему оцінювання, використання ІКТ, ресурсне забезпечення та дослідження [59]. Інші дослідники, такі як В. Андрієвська та Л. Білоусова [28], підкреслюють важливість міждисциплінарності в STEM-освіті та використання реальних проблемних ситуацій. Для успішного впровадження STEM-принципів в початковій школі науковці Л. Колток та Н. Іваник вважають необхідним навчання вчителів [46]. Крім того, О. Кузьменко вважає, що робототехніка, ІТ-технології та програмування є важливими компонентами STEM-освіти. В. Пікалова пропонує використання пакету GeoGebra та завдань проєктно-дослідного спрямування під час підготовки вчителів математики для впровадження STEM-освіти [51, с. 314].

С. Подлесний, О. Тарасов стосовно шляхів ефективного розвитку національної системи вищої інженерно-технічної освіти вважають за потрібне впровадження STEM-STEAM-STREAM-технологій [68, с. 124].

Таким чином, STEM-освіта як в Україні, так і за кордоном досліджується різнобічно: її виділяють як окрему педагогічну проблему; зазначають, що це інноваційна технологія; завдяки вказаному напрямку можлива трансформація освітньої галузі, інтегрований та проєктний підходи; також розглядають вказаний напрям як інженерно-технічну складову освіти та як принцип навчання. Водночас потребує подальшого вивчення питання розроблення STEM-освіти, що і визначає мету статті. STEM-освіта є основним елементом сучасної освіти, після підготовки учнів до роботи в галузі науки, технологій, інженерії та математики є ключовим у розвитку інновацій та вирішенні складних проблем, що стоять перед суспільством. Методика STEM дозволяє підвищити рівень цікавості учнів у вивчених наукових дисциплінах, розвивати їх творчі здібності та сприяти формуванню професійних компетенцій.

Проєктно-орієнтований підхід навчання, орієнтоване на практичне застосування знань у проєктах, які підтвержені учні. Проблемно-орієнтований підхід зосереджується на вирішенні конкретних проблем або завдань у процесі навчання. Практико-орієнтований підхід вимагає застосування теоретичних знань у практичних завданнях, які назавжди усвідомлюють, як використання здобути знання в реальному житті. STEM-освіта може допомогти учням отримати практичні навички, які можуть бути корисними у роботі в майбутньому, а також збільшити їх шанси на успішне працевлаштування в галузях, пов'язаних з наукою, технологіями, інженерією та математикою. Для ефективного викладання STEM-освіти необхідно використовувати інноваційні методики та забезпечити доступ до сучасних технологій та інструментів.[64]

В Україні введення STEM-освіти, відповідно до згаданої Концепції, передбачає застосування наступних принципів: постійне оновлення змісту, особистісний підхід, наступність, диференціація освітнього матеріалу, патріотизм і громадська спрямованість, інтеграція, продуктивна мотивація, розвивальне та проблемне навчання. Реалізація нового перспективного

напряму передбачає, що задіяними будуть наступні види освіти: формальну, неформальну, інформальну, як на онлайн-платформах так і у STEM-лабораторіях. Впровадження та розширення STEM передбачається шляхом проведення екскурсій, конкурсів, олімпіад, турнірів, фестивалів тощо.

Крім того, є вважається обов'язковим своєчасне залучення фахівців для розроблення та впровадження відповідного програмного забезпечення, зокрема комп'ютерних програм безпосередньо для кожного STEM-предмета. Тут також можливе широке застосування інформаційно-комунікаційних технологій при здійсненні здоров'язбережувальних технік та технологій [46].

Структура STEM-середовища в закладах освіти (наприклад, школи чи університети) включає різні компоненти та елементи, які сприяють інтеграції STEM-освіти в навчальний процес.

До ключових елементів структури STEM-середовища можна віднести підготовлених вчителів та інструкторів (вчителі, які мають глибокі знання в галузях STEM, є ключовими гравцями в STEM-середовищі, вони розробляють та забезпечують STEM-уроки, надають допомогу учням та створюють стимулююче навчальне середовище); навчальні програми (заклади освіти розробляють спеціальні STEM-навчальні програми, які включають у себе вивчення науки, технологій, інженерії та математики, ці програми можуть бути частиною регулярного навчального плану або надаватися як додаткові курси); лабораторії та обладнання (для вивчення STEM-предметів важливо мати доступ до сучасних лабораторій та обладнання, що дозволяє учням отримувати практичний досвід та проводити експерименти); матеріали для STEM-навчання (передбачається вільний доступ вчителів та учнів до навчальних матеріалів, які підтримують STEM-навчання, такі як підручники, інтерактивні програми та інші ресурси); проекти та змагання (заохочення учнів брати участь у STEM проектах та змаганнях до розвитку їх навичок і зацікавленості в STEM); підтримка батьків (залучення батьків у STEM-навчання їхніх дітей важливо, заклади освіти можуть організовувати зустрічі для батьків, відкриті уроки та інші



заходи для залучення батьків до навчального процесу); партнерські стосунки, співпраця з місцевими компаніями, університетами та науковими організаціями. Також надзвичайно важливими є оцінка та відстеження успіху: заклади освіти повинні розробити системи оцінювання та відстеження успішності в STEM-навчанні, щоб програми, максимально ефективно працювали програми та методи.

STEM-середовище в закладі освіти має бути стимулюючим та орієнтованим на навичок розвитку, який у майбутньому буде корисним для учнів. Ця структура підготувати молоде покоління до викликів цифрового та технологічного світу. Інтеграція STEM-освіти в цифровий освітній процес відкриває безмежні можливості для розвитку учнів і підготовки їх до майбутніх викликів. Це сприяє створенню глибокого і стійкого інтересу до навчання та розвиває навички, які є критичними для успішного функціонування в цифровому суспільстві [69].

Завдання освіти сьогодні — розвивати та виховувати освічену, всебічно розвинену й інноваційну особистість відповідно до Концепції реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти — Нова українська школа на період до 2029 року [44].

Одним із найактуальніших напрямів інноваційного розвитку природничо-математичної освіти є STEM-орієнтований підхід до навчання, який характеризується поєднанням міждисциплінарності та практичної спрямованості у вивченні математики; це є процес формування низки особистісних якостей здобувачів освіти, таких як: вміння навчатися впродовж життя, критичне мислення, системне мислення, творчість, гнучкість, здатність до співпраці та командної роботи тощо. [1].

При STEM-навчанні основна увага приділяється завданням і проблемам. Такий підхід реалізується за допомогою проєктної і навчально-дослідницької діяльності як у закладі загальної середньої освіти, так і поза ним. Основними принципами STEM-орієнтованого підходу до вивчення математики є:

- інтегративність (об'єднання тем, програм, завдань);
- системність (поєднання науки, технологій, інженерії та математики);
- адаптивність (переорієнтування навчального матеріалу під потреби часу та здобувачів);
- інтерактивність (форми та методи навчання базуються на спілкуванні та командній роботі);
- зв'язок із життєвими ситуаціями (навчання на реальних проблемах);
- технологічність (можливість використання новітніх комп'ютерних програм та технологій, спеціалізованих інструментів);
- неформальність (врахування інтересів і потреб, особливостей мислення та спілкування здобувачів, можливість самостійно обирати засоби і способи вирішення завдань, стимулювання командного та творчого підходу й особистої відповідальності за результати) [6].

Відповідно до структури загальної середньої освіти можна виділити три етапи реалізації в ній STEM-підходу:

- у початковій школі відбувається стимулювання допитливості, мотивація до навчання та самостійних досліджень тощо;
- у середній школі відбувається формування в учнів стійкої цікавості до природничо-математичних наук, набуття практичних навичками; залучення здобувачів освіти до дослідницької діяльності;
- у старшій школі основна увага приділяється свідомому вибору подальшої освіти, поглибленій підготовці з конкретних дисциплін (профільне навчання) дослідницької діяльності;
- у старшій школі основна увага приділяється свідомому вибору подальшої освіти, поглибленій підготовці з конкретних дисциплін (профільне навчання) [5].

Навчання математики за STEM-принципами поєднує в собі міждисциплінарний (інтеграційний) та проєктний підходи. Вивчення навчального матеріалу відбувається за темами, які поєднують декілька предметів, матеріал яких тісно пов'язаний між собою, адже головна мета

такого підходу — не лише демонстрація результатів своєї роботи, а й усвідомлення, де та як на практиці їх можна застосувати. Проектна діяльність – одна з найперспективніших складових освітнього процесу, адже самостійний пошук знань, їх систематизація, можливість орієнтуватися в інформаційному просторі, бачити проблему і приймати рішення відбувається саме через метод проєктів [4].

Отже, основна мета STEM-орієнтованого підходу — навчити здобувачів, як шукати і як використовувати додаткові знання для вирішення поставлених завдань. Уроки математики з використанням цього підходу дають можливість не тільки розвивати і підтримувати інтерес до предмета, але й стимулюють бажання набувати нових знань, сприяють розвитку особистості, умінню бачити проблему та шляхи її вирішення; спонукають учнів бути активними дослідниками, а не пасивними спостерігачами.

Впровадження в освітній процес STEM-технологій створить принципово нову модель природничо-математичної освіти з новими можливостями і результатами, як для вчителів, так і для здобувачів освіти.

Впровадження STEAM-освіти потребує активного використання новітніх педагогічних підходів щодо викладання й оцінювання, інноваційні практики міждисциплінарного навчання, методи та засоби навчання з акцентом на розвиток дослідницьких та інноваційних компетентностей, участь у розробленні спільних навчальних STEAM-програм та їх креативного контенту. Саме тому, активна увага приділена реалізації якісної підготовки вчителів, зокрема й вчителів математики як однієї із STEAM-дисциплін.

STEAM-технології мають великі можливості в навчанні, що орієнтується на розвиток практичних навичок, формування готовності випускників шкіл продовжувати реалізацію творчих ідей в навчальних закладах та подальшій професійній діяльності. Наприклад, на заняттях учні самостійно створюють прототипи продукту, використовуючи сучасні матеріали і обладнання, ґрунтуючись на простих і доступних інженерних рішеннях. Для створення кінцевого продукту учні можуть використовувати

деталі вже існуючого обладнання, або створити модель із пластику і картону, але в будь-якому випадку отримують досвід комбінування різних матеріалів, навчаються враховувати властивості речовин і зрозуміють, як найкращим чином з'єднати структурні компоненти моделі, щоб зробити її максимально функціональною і ефективною.

Темпи розвитку технологій сприяють підвищенню попиту на інженернотехнічних, IT-фахівців, професіоналів високотехнологічних виробництв. Відповідно зростає інтерес до науково-технічних складових на всіх рівнях освіти. Активізація STEAM-освіти є одним із способів вирішення низки освітніх проблем. Зараз в Україні педагоги працюють в умовах оновлення моделі освіти, впровадження нових підходів і технологій навчання, в тому числі і STEAM-освіти.

За кілька останніх років для цього було зроблено багато: створено "Web-STEM-школу", розробляються науково-методичні матеріали для 180 вчителів щодо впровадження і розвитку STEM-освіти в закладах загальної середньої та позашкільної освіти.

Під STEM-освітою ми розуміємо відповідну педагогічну технологію формування і розвитку критичного мислення, пізнавальних та творчих якостей учнів, здатних і готових до вирішення комплексних завдань, співпраці, здійснення інноваційної діяльності. При цьому STEM-навчання математики ми розглядаємо як цілеспрямований процес передачі і засвоєння знань, навичок і способів пізнавальної діяльності людини, заснований на міждисциплінарних підходах в побудові навчальних програм різного рівня, окремих дидактичних елементів, до дослідження явищ і процесів навколишнього світу, вирішення проблемно орієнтованих завдань. У нашій країні значний інтерес викликають питання актуальності впровадження STEM освіти (К. Дмитренко, О. Лозова та ін.); загальні аспекти, основні поняття, проблеми та перспективи STEM-освіти (І. Василяшко, Н. Морзе та ін.); методичні підходи до STEM-навчання (В. Багашова, Л. Даниленко та ін.); питання застосування інформаційних технологій в навчанні математики

(М. Жалдак, О. Семеніхіна та ін.) [73]. Навчання викладачів вищих навчальних закладів та середньої школи STEM-технологіям, використанню в їх діяльності міждисциплінарних стратегій також останнім часом приділяється увага. У нашій країні такі дослідження поки одиничні.

Низку STEM-проектів, інтегрованих чи бінарних уроків, зокрема із навчання теорії ймовірностей, математичної статистики, пропонують автори навчальних посібників [48], [49]. Пропонуються різні завдання з описової статистики, застосування методу Монте-Карло, пошуку регресійних залежностей.

Українські школи з 2017 року поступово переходять на нову програму. У 2018-2019 н.р. більшість перших класів початкових шкіл країни перейшли на програму Нової Української Школи. Міністерство освіти і науки України регламентувало вимоги до освітнього простору таких класів, як для початкової школи, так і для предметних кабінетів всіх освітніх галузей. При цьому під засобами STEM-навчання розуміють сукупність устаткування, ідей, явищ і способів дій, які забезпечують реалізацію дослідно-експериментальної, конструкторської, дослідницької діяльності в навчанні. Вибрані засоби повинні виконувати інформаційну, практичну, креативну, контрольну функції. Інститут модернізації змісту освіти України рекомендує використовувати: - друковані методичні засоби; - наочні різних видів: натуральні, образні, знаковосимвольні; - технічні: інформаційні, і контролюючі.

Ринок насичений різними пропозиціями інструментарію для сфери освіти. Технічне оснащення навчальних закладів дозволяє використовувати ці ресурси в організації STEM-освіти. Наприклад, Microsoft Store для освіти пропонує безкоштовні і платні розробки. Серед безкоштовних це і блокнот OneNote для організації завдань і оцінювання, і програми STEM для залучення кожного учня до роботи на уроці, і засоби для організації уроку Microsoft Teams, Sway для створення публікацій, інтерактивних навчальних матеріалів, презентацій, проектів і т.п., досить відомий додаток - динамічну

математичну середу GeoGebra, інтерактивні цифрові засоби навчання з візуальними моделями Sesavis Visual Learning Tool, WeDo 2.0 LEGO® Education. На жаль тільки мала частина з них має версії на українському (EV3 Programming, GeoGebra Classic, GeoGebra Graphing Calculator) або російською (Sensavis Visual Learning Tool, Polyup, GeoGebra Geometry, FMath, MyBookMachine Player, 181 FluidMath, EquatIO, Matific) мовами. Ми ж розглядали перераховані інструменти навчання в контексті застосування їх в викладанні математики.

Відкриті освітні ресурси — це навчальні матеріали та ресурси, які пропонуються вільно й відкрито для будь-кого, а також за певними ліцензіями, якими можна ділитися, реміксувати або покращувати для повторного розповсюдження.

Наведемо приклади відомих ресурсів для впровадження Steam освіти.

*Code.org* є онлайн-ресурсом, який допомагає вчителям та учням навчитися програмування та інших навичок ІТ-галузі. Ресурс пропонує безкоштовні курси програмування для різних рівнів складності, від початківців до професіоналів. Крім того, Code.org надає доступ до безлічі ресурсів та інструментів, які допоможуть учням створювати свої власні проекти [7].

*NASA STEM Engagement* є ресурсом, який пропонує безкоштовні матеріали та ресурси для вчителів та учнів, які бажають навчитися про космос та науку. Ресурс містить відеоуроки, активності, проекти та інші матеріали, які допоможуть учням збільшити свої знання та зацікавленість у науці та технологіях, які використовуються в NASA [14].

*Google Arts & Culture* є онлайн-ресурсом, який допомагає учням досліджувати мистецтво та культуру за допомогою віртуальних екскурсій та відеоуроків. Ресурс містить колекції мистецтва з усього світу, а також відео та інформацію про різні культури та традиції [10].

*MIT OpenCourseWare* є ресурсом, який пропонує безкоштовний доступ до лекцій та матеріалів з різних дисциплін, включаючи математику, науку та

інженерію. Ресурс дозволяє учням самостійно вивчати та досліджувати нові теми, а також дозволяє вчителям використовувати ці матеріали для своїх уроків [13].

*Scratch* є онлайн-ресурсом, який допомагає учням вчитися програмування через створення власних інтерактивних ігор та анімацій. Ресурс пропонує безкоштовний доступ до різних інструментів [18].

*PhET* є безкоштовна онлайн-фізика, хімія, біологія, науки про Землю. Безкоштовні інтерактивні симуляції, що охоплюють різноманітні теми, зокрема з математики, розроблені Університетом Колорадо, доступні різними мовами [15].

STEM-лабораторія **RobotLAB**[17]. Створені вчителями для вчителів, RobotLAB розробив відзначені нагородами програми K-12, у яких використовуються роботи для покращення навчання, розуміння та збереження інформації при максимальному збільшенні інвестицій у шкільні навчальні програми. Ці інноваційні та відзначені нагородами програми допомагаючи школам по всій країні досягти успіху в цих предметах, використовуючи роботів, допомагаючи тим, хто навчається, розвивати такі навички 21-го століття, як вирішення проблем, критичне мислення та співпраця, вивчаючи основні предмети весело та захоплююче.

**Spark101.** Безкоштовні 10-хвилинні відео для занять, щоб залучити учнів до автентичного вирішення проблем STEM [19].

**StemX.** Мережа STEMx— це STEM-мережа з кількома штатами, яка надає доступну платформу для обміну, аналізу та розповсюдження якісних інструментів STEM-освіти для трансформації освіти, збільшення кількості вчителів STEM, підвищення успішності студентів у STEM і вирощування новаторів завтрашнього дня [20].

Проаналізуємо окремі *розробки STEM-занять* українськими педагогами [37], [38], [70], [71]. З метою популяризації ідей STEM-освіти, виявлення і підтримки талановитих педагогічних працівників, створення бази

даних розробок інтегрованих уроків/заходів та заохочення педагогів застосовувати STEM-технології, створено бібліотеку STEM-занять, яка містить найкращі розробки уроків і заходів від українських педагогів. Ця ініціатива спрямована на виявлення та підтримку педагогічних талантів – авторів інноваційних підходів у навчанні; створення бази знань – доступної для освітян, які бажають інтегрувати STEM у свою роботу; заохочення використання STEM-технологій – через обмін досвідом і готові розробки.

Один із прикладів вдалого ведення в освіту STEM-освіти є Всеукраїнський конкурс “Найкращий гендерночутливий STEM-урок” – це сучасний погляд до впровадження новітніх методів навчання у STEM-середовищі [70]. Мета конкурсу – популяризувати ідеї STEM-освіти через розробку інтегрованих гендерночутливих уроків/заходів та мотивації вчительської спільноти використовувати STEM-технології під час освітнього процесу. Гендерна чутливість – здатність виявляти, помічати, усвідомлювати і реагувати на стереотипи і прояви дискримінації, діяти відповідно до принципів гендерної рівності на уроці, що здатне зупинити таку стрімку відмову дівчат від їх ранніх інтересів.

Гендерночутливі уроки допомагають створювати безпечну та відкриту атмосферу, де кожен учень може бути собою, незалежно від своєї статі, та почувати себе комфортно в навчальному середовищі. Конкурс “Найкращий гендерночутливий STEM-урок” проводиться починаючи з 2018 року. За чотири роки на Конкурс було подано 895 індивідуальних та командних уроків. Мета Конкурсу: зробити STEM уроки більш гендерночутливими, розробити рішення, яке б сприяло залученню дівчат до вивчення природничих і технічних наук та розкриттю їхнього потенціалу [69].

### **1.3. Методи розв’язування задач стохастичного програмування**

Нові досягнення математики з урахуванням розвитку персональних комп’ютерів знаходять широкі застосування в різних галузях досліджень,



особливо економічних. За досить довгий час накопичено досить значний досвід постановки і розв'язування різних задач за математичними методами.

В практиці нерідко зустрічаються задачі оптимізації, у яких вихідні дані є випадковими або невизначеними. Задачі такого типу розв'язуються за методами стохастичного програмування. В таких задачах випадковими можуть бути елементи матриці планування перевезень вантажів в транспортній задачі, об'єми потреб ресурсів (праві частини обмежень), ціни, число покупців у магазинах, кількість пасажирів на авіалініях, запаси сировини тощо. Отже, якщо через наявність якихось причин неможливо точно визначити значення параметрів досліджуваної проблеми, то така проблема належить до стохастичних, а моделі та методи, що застосовуються для розв'язування задач з випадковими і невизначеними параметрами, називаються моделями і методами стохастичного програмування [33].

Стохастичне програмування – це теорія і методи розв'язування оптимізаційних задач стохастичної природи, тобто задач, в яких цільова функція та функції, за якими визначається множина допустимих розв'язків, залежать від параметрів, з випадковими значеннями [52]. Як зазначають Біляй Ю. П. та Іщук А. А. [33, с. 207], роботи, зі стохастичного програмування з'явилися в 50-х роках ХХ століття. Зокрема, стохастичні задачі з імовірнісними обмеженнями, зі статичними обмеженнями та методи їх розв'язування. Автори виокремлюють такі задачі стохастичного програмування, як транспортна задача, задача про розподіл ресурсів.

Загальна задача математичного програмування полягає у відшуканні мінімального (чи максимального) значення цільової функції  $f(x)$  на певній множині  $X$  допустимих точок, заданій через систему обмежень  $g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m$ .

Якщо цільова функція задачі математичного програмування або функції, за якими визначають множину допустимих розв'язків, залежать від деяких випадкових величин, то таку задачу називають задачею стохастичного програмування [33]. Такі задачі виникають у випадках

планування в ситуаціях з невизначеністю і ризиком. Основні особливості цього класу задач пов'язані з відсутністю детермінованих даних про цільову функцію і функції обмежень у аналітичному поданні.

Крім того, розглядають й інші постановки задач стохастичного програмування, наприклад, мінімізувати ймовірність того, що значення деякої функції, яка залежить від  $x$  і  $E$ , перевищуватиме деяке число.

Н. М. Кузьміна, досліджуючи проблеми навчання елементів стохастичного програмування у педагогічному університеті [52, с. 44], розглядає загальну задачу математичного програмування як задачу стохастичного програмування в таких постановках.

1) М-постановка – оптимізація математичного сподівання цільової функції  $F(x): M[F(x)] \rightarrow \max_{x \in R^n} (min)$ ,  $x \in R^n$ .

2) Р-постановка – максимізація ймовірності того, що значення цільової функції буде не гіршим за граничні допустимі значення відповідно до випадків максимізації та мінімізації цільової функції:

– максимізація цільової функції:  $P(F(x) \geq F_{min}) \rightarrow \max, x \in R^n$ , де  $F_{min}$  – задане допустиме мінімальне (найгірше) значення цільової функції;

– мінімізація цільової функції:  $P(F(x) \leq F_{max}) \rightarrow \max, x \in R^n$ , де  $F_{max}$  – задане допустиме максимальне (найгірше) значення цільової функції.

Як зазначають автори публікацій [33], [52], для розв'язування задач стохастичного програмування широко застосовують сучасні програмні засоби, зокрема Microsoft Excel, для визначення числових характеристик розподілів ймовірностей на множині значень випадкової величини та самих розподілів, необхідних для розв'язування стохастичних задач (в тому числі і стохастичних транспортних задач).

Наведемо загальний вигляд прикладної задачі. Нехай потрібно виготовити суміш найменшої вартості з наявних продуктів, якщо відомі характеристики кожного з наявних продуктів за речовинами та норми, яким повинна відповідати суміш.

Припустимо, що відсотковий склад першої речовини в кожному з  $n$  продуктів складає  $b_i, i \in \underline{1, n}$ . Відсотковий склад першої речовини у кінцевій суміші повинен бути не менше  $B$ . Вміст другої речовини в розглянутих компонентах становить  $n_i, i \in \underline{1, n}$  причому всі  $n_i$  – це випадкові величини з нормальними розподілами ймовірностей на множинах  $\Omega_i$  їх значень з параметрами відповідно  $\mu_i$  та  $\sigma_i^2$ . Вміст жиру в їжі має бути не менше  $T\%$  за ймовірності  $p$ . Ціни розглянутих компонентів –  $r_i, i \in \underline{1, n}$  відповідно. Потрібно мінімізувати вартість суміші. Для цього розглянемо функцію  $z$  від аргументів  $x_i, i \in \underline{1, n}$  – відсоткових кількостей речовин у суміші.

$$z(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n r_i \cdot x_i \rightarrow \min!$$

За обмежень

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i > B \\ P_z \left( \sum_{i=1}^n \eta_i x_i \geq T \right) \geq p \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, i \in \overline{1, n} \end{cases}$$

Можемо зробити висновок, що розглянуті задачі стохастичного програмування в контексті STEM-навчання можуть бути запропоновані учням старшої школи, що вивчають стохастичну статистику за профільним рівнем, лише під час написання науково-дослідницьких робіт, оскільки потребують математичних знань, що виходять за межі шкільної програми. Вибір способу розв'язування задач даного типу залежить від кількості змінних, наявності програмних засобів (прості електронні таблиці, системи комп'ютерної математики, власні програми); від точності, з якою обчислюють результат.

#### **1.4. Логіко-математичний аналіз теми «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» у контексті STEM-навчання**

Нова українська школа продовжує впроваджувати компетентнісний підхід до формування змісту та організації освітнього процесу, який би мав навчити учнів застосовувати набуті знання й уміння в конкретних ситуаціях. Такий підхід відповідає головним напрямкам європейської системи навчання, які ґрунтуються на Рекомендаціях Європейського Парламенту та Ради Європейського Союзу “Про основні компетентності для навчання протягом усього життя”. 17 січня 2018 р. Європейський парламент і Рада Європейського Союзу схвалили Рамкову програму оновлених ключових компетентностей для навчання протягом життя [2], за якою компетентності визначаються як комбінація знань, навичок та ставлень, де знання складається з фактів і цифр, концепцій, ідей та теорій, які вже встановлені та підтримують розуміння певної сфери або предмета; навички визначаються як здатність та спроможність виконувати процеси та використовувати наявні знання для досягнення результатів; ставлення описують диспозиції сприйняття і налаштованості щодо ідей, людини або ситуації й спонукають до відповідних реакцій або дій. Математичну компетентність розглядають, як здатність застосовувати логіко-математичне мислення для вирішення проблем у повсякденному житті. Математична компетентність передбачає здатність і бажання застосовувати логічне та просторове мислення, а також презентації (формули, моделі, конструкції, графіки, діаграми).

Ознайомлення учнів з елементами стохастики відкриває широкі можливості для ілюстрації значущості математики в розв'язуванні прикладних задач. Володіння азами комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики дозволяє на змістовних (як в математичному, так і прикладному відношеннях) прикладах вивчати різні процеси, показувати відому універсальність математичних методів, демонструвати основні етапи розв'язання прикладних задач засобами стохастики [60].

Добираючи зміст навчального матеріалу підручників, слід враховувати той факт, що на сучасному етапі розвитку суспільства статистика виконує три основні функції: інформаційну, прогностичну й аналітичну. Зміст навчання статистичного матеріалу у шкільному курсі математики має певною мірою розкривати освітні функції статистики. Добираючи зміст, важливо правильно визначити, які знання потрібні сучасній людині в повсякденному житті та діяльності, які з них знадобляться учням під час вивчення інших шкільних предметів, для продовження освіти, який внесок можуть зробити ці знання у формування різних сторін інтелекту учнів, у засвоєні єдиної картини світу. Важливо реалізувати двосторонні міжпредметні зв'язки статистики, зокрема зв'язки інших навчальних предметів зі статистикою. Наприклад, у біології статистичні значення допомагають під час вивчення генетики, фізіології, екології. Нині жодна серйозна експериментальна робота з біології, медицини не обходиться без статистично обґрунтованого обсягу виконаних експериментів і довірчої оцінки отриманих результатів.

Проведемо порівняльну характеристику підручників з алгебри 11 класу профільного рівня. Для цього опрацювали підручник алгебра 11 клас з поглибленим вивченням математики, авторів: А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір [54] та підручник алгебра академічного та профільного рівня Є.П. Нелін, О.Є. Долгова [61]. Даний підручник може використовуватися для поглибленого вивчення [54].

Розглянемо детальніше на прикладі логіко-математичного аналізу.

**Логіко-математичний аналіз теми за підручником:** алгебра 11 клас з поглибленим вивченням математики, авторів: А.Г. Мерзляк та інші [54].

#### **А) Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу**

**Нові поняття:** перестановка, розміщення, комбінація, елементарний наслідок, простір елементарних наслідків, перетин, об'єднання та доповнення випадкових подій, несумісні події, незалежні події.

**Факти:** теорема про ймовірність об'єднання множин, теорема про ймовірність перерізу множин, формула бінома Ньютона, властивості ймовірностей.

**Способи діяльності:** підрахунок престановок, розміщень, комбінацій, знаходження ймовірності випадкової події.

**Базові поняття:** частота, класична ймовірність, достовірна подія, неможлива подія, рівноймовірні випадкові події.

**Способи діяльності:** знаходження суми, різниці, добутку та відношення ймовірностей

## **Б) Логіко-математичний аналіз формулювань означень нових понять**

Представимо означення нових понять, вказавши у дужках відповідний йому вид.

- **Перестанок**ою скінченної множини  $M$  називають будь-який упорядкований набір, утворений з усіх елементів множини  $M$  (вид – через найближчий рід).

- **Розміщенням** з  $n$  елементів по  $k$  називається будь-який - елементний упорядкований набір даної  $n$ -елементної множини (вид – через найближчий рід).

- **Комбінацією** з  $n$  елементів по  $k$  називається будь-яка - елементна підмножина заданої  $n$ -елементної множини (вид – через найближчий рід).

- **Елементарний наслідок** – будь-який результат експерименту (вид – через найближчий рід).

- **Простір елементарних наслідків** – множина всіх елементарних наслідків (вид – через найближчий рід).

- Нехай  $A$  і  $B$  – випадкові події деякого випробування. Випадкову подію, яка відбувається лише тоді, коли відбуваються і випадкова подія  $A$ , і

випадкова подія  $B$ , називають **перетином випадкових подій  $A$  і  $B$**  (вид – конструктивне).

- Нехай  $A$  і  $B$  – випадкові події деякого випробування. Випадкову подію, яка відбувається лише тоді, коли відбуваються принаймні одна з двох подій  $A$  або  $B$ , називають **об'єднанням випадкових подій  $A$  і  $B$**  (вид – конструктивне).

- Нехай  $A$  – випадкова подія деякого випробування. Випадкову подію, яка відбувається лише тоді, коли не відбувається подія  $A$ , називають **доповненням випадкової події** (вид – конструктивне).

- Якщо дві випадкові події  $A$  і  $B$  деякого випробування не перетинаються то їх називають **несумісні події** (вид – конструктивне).

- Нехай  $A$  і  $B$  – випадкові події деякого випробування. Якщо ймовірність події  $A$  не змінюється від того, що відбулася подія  $B$ , а ймовірність події  $B$  не змінюється від того, що відбулася подія  $A$ , то випадкові події  $A$  і  $B$  називають **незалежними подіями** (вид – конструктивне).

**Г) Схема-орієнтир проведення логіко-математичного аналізу структури формулювання математичного твердження**

**Формулювання твердження:**

1) Якщо  $A$  і  $B$  – випадкові події деякого випробування, то  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ ;

2) Якщо  $A$  і  $B$  – випадкові події деякого випробування є незалежними, то  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ .

**Встановлення виду твердження:** обидва категоричного виду.

**В) Орієнтована будова системи вправ для введення нового поняття**

№	Види вправ	Номери завдань
1.	Вправи для створення мотивації та введення нового поняття	№ 31.1, № 32.3, № 32.7
2.	Вправи, що забезпечують активізацію та повторення базових знань та вмінь	№ 30.1, № 30.2, №31.5, № 32.27
3.	Вправи спрямовані на виділення суттєвих властивостей та на побудову об'єктів що мають ці властивості	№ 30.5, № 30.16, № 30.17
4.	Вправи на базі яких відбувається ілюстрація понять, що вводяться	№ 30.9, № 30.23, № 31.21
5.	Вправи для забезпечення розпізнавальних об'єктів, що входять до обсягу нового поняття	№ 30.10, № 30.31, № 30.48, № 31.16
6.	Вправи спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння тексту означень	№ 30.28, № 30.29, № 31.13

**Виділення роз'яснювальної частини:**

- 1) Ймовірність об'єднання;
- 2) Ймовірність перерізу.

**Виділення умови:**

- 1) Якщо  $A$  і  $B$  – випадкові події деякого випробування;
- 2) Якщо  $A$  і  $B$  – випадкові події деякого випробування є

незалежними.

**Виділення вимог:**

- 1)  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ ;
- 2)  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ .



### Формулювання твердження рівносильного даному:

- 1) Кожна подія  $A$  і  $B$  це випадкові події деякого випробування, значить  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ ;
- 2) Кожна подія  $A$  і  $B$  це випадкові події деякого випробування, що є незалежними, значить  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ .

Таблиця 1.2

### Д) Логіко-математичний аналіз системи вправ підручника призначений для формування способу діяльності

Основний діяльності	спосіб	Відпрацюван ня операцій, які формують спосіб діяльності	Відпрацюван ня послідовності операцій, які входять у спосіб діяльності	Застосування способу діяльності (різні рівні)
Знаходження кількості перестановок, розміщень та комбінацій		№ 30.3, №30.5, № 30.10, № 30.17	№ 30.19, № 30.26, № 30.29	№ 30.28, № 30.34, № 30.41
Знаходження ймовірності		№ 31.2, № 31.5, № 31.13	№ 31.18, № 31.21, № 31.25	№ 31.27, № 31.29
Виконання операцій над випадковими подіями		№ 33.5, № 33.7, № 33.14, № 33.16	№ 33.19, № 33.20, № 33.27, № 33.31	№ 33.33, № 33.36, № 33.44

У даному підручнику, який орієнтований на поглиблене вивчення, підібрано обширну та різноманітну кількість дидактичного матеріалу. Дібрана велика кількість задач, що дає можливість проводити рівневу диференціацію. Підручник, також вміщає задачі для математичних гуртків та факультативів.

**Логіко-математичний аналіз теми:** підручник алгебра академічного та профільного рівня, Є.П. Нелін, О.Є. Долгова (може бути використаний для поглибленого рівня) [61].

#### **А) Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу**

**Нові поняття:** перестановка, розміщення, комбінація без повторень, елементарний наслідок, несумісні події, незалежні події.

**Факти:** формула бінома Ньютона, властивості ймовірностей.

**Способи діяльності:** підрахунок перестановок, розміщень, комбінацій.

**Базові поняття:** переріз, об'єднання, частота, неможлива подія, рівноймовірні випадкові події.

**Способи діяльності:** знаходження суми, різниці, добутку та відношення ймовірностей

#### **Б) Логіко-математичний аналіз формулювань означень нових понять**

Представимо означення нових понять, вказавши у дужках відповідний йому вид.

- **Перестановкою** з  $n$  елементів називають будь-яку впорядковану множину з  $n$  заданих елементів (вид – через найближчий рід).

- **Розміщенням** з  $n$  елементів по  $k$  називають будь-яку впорядковану множину з  $k$  елементів, складену з елементів заданої - елементної множини (вид – через найближчий рід).

- **Комбінацією без повторень** з  $n$  елементів по  $k$  називають будь-яку -елементну підмножину заданої  $n$ -елементної множини (вид – через найближчий рід).

- Підручник з алгебри і початків аналізу спрямований на реалізацію основних положень концепції профільного навчання та організацію саме особистісно-орієнтованого навчання математики в загальноосвітніх навчальних закладах. Матеріал відповідає чинній програмі з математики для класів академічного та профільного

навчання, а також може використовуватися в класах з поглибленим вивченням математики.

Таблиця 1.3

**В) Орієнтована будова системи вправ для введення нового поняття**

<b>№</b>	<b>Види вправ</b>	<b>Номери завдань</b>
1.	Вправи для створення мотивації та введення нового поняття	П. 21.1.1, № 1, № 5, № 6; П. 21.1.2, № 1, № 2; П. 21.1.3, № 1, № 2, П. 21.1.4, № 1
2.	Вправи, що забезпечують активізацію та повторення базових знань та вмінь	П. 21.1.1, № 3, № 4, № 9; П. 21.1.2, № 4, 6; П. 21.1.3, № 5; П. 21.1.4, № 4
3.	Вправи спрямовані на виділення суттєвих властивостей та на побудову об'єктів що мають ці властивості	П. 21.1.1, № 7, № 10; П. 21.1.2, № 8; П. 21.1.3, № 10; П. 21.1.1, № 7
4.	Вправи на базі яких відбувається ілюстрація понять, що вводяться	П. 21.1.1, № 2, № 8; П. 21.1.2, № 9, П. 21.1.3, № 4
5.	Вправи для забезпечення розпізнавальних об'єктів, що входять до обсягу нового поняття	П. 21.1.1, № 11, № 12; П. 21.1.2, № 10, П. 21.1.3, № 11
6.	Вправи спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння тексту означень	—

**Г) Логіко-математичний аналіз системи вправ підручника  
призначений для формування способу діяльності**

<b>Основний спосіб діяльності</b>	<b>Відпрацювання операцій, які формують спосіб діяльності</b>	<b>Відпрацювання послідовності операцій, які входять у спосіб діяльності</b>	<b>Застосування способу діяльності (різні рівні)</b>
Знаходження кількості перестановок, розміщень та комбінацій	П. 21.1.1: № 3, №6 П. 21.1.2: № 3, № 8 П. 21.1.3: № 4	П. 21.1.1: № 5, №9 П. 21.1.2: № 4, № 10 П. 21.1.3: № 6, № 7	П. 21.1.1: № 10, №4 П. 21.1.2: № 7, № 9 П. 21.1.3: № 2, № 3

Окрім цього додатково переглянувши та опрацювавши програмний засіб з алгебри 11 класу, можна сказати що, тема повністю відповідає академічному та профільному рівням, але для поглибленого вивчення не вистачає завдань рівня міркувань. Програмний засіб можна використовувати додатково, з використанням лише деяких задач.

У підручнику зазначається, що під *експериментами з випадковими результатами* (або коротше, випадковими експериментами) розуміють різні експерименти, досліди, випробовування, спостереження, виміри, результати яких залежать від випадку і які можна повторити багато разів в однакових умовах. Таке пояснення, на нашу думку, супроводжене прикладом (наприклад, підкидання грального кубика, участь у лотереї) створює у учнів цілісне поняття про ймовірнісний експеримент. Далі, логічно зазначається, що будь-який результат випадкового експерименту називають *випадковою подією*. На цей рахунок, з метою встановлення зв'язку між ймовірнісним

експериментом та випадковою подією, що відбулася у досліді, доцільно запропонувати учням таблицю (табл. 1.5).

Таблиця 1.5.

### Випробування і подія

Випробування		Подія
1	Падає монета	Впала вгору ребром
2	Грають команди А и С	Виграла команда С
3	Людина чекає весну	Весна настала
4	Падає гральний кубик	Випало 0 очок

Така таблиця, подана у заповненому вигляді, виконує інформаційно-пізнавальну функцію. На нашу думку, доцільно запропонувати учням, тим паче на профільному рівні, самостійно заповнити таку таблицю: на основі запропонованого випробування передбачити можливі події, що є результатами досліді. Так в учнів буде формувати логічна та дослідницька компетентність.

Після того, природньо перейти до понять, пов'язаних з випадковими подіями в деякому експерименті. На цей рахунок, у підручниках [54], [61] пропонується розглянути поняття *рівноможливих, несумісних, вірогідних та неможливих подій*. Ці поняття супроводжуються прикладом експерименту з підкидання кубика.

Відведена кількість годин на вивчення розділу «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» в програмах кожного з трьох рівнів не дає можливості у повній мірі реалізувати завдання прикладного спрямування змісту освіти [60]. Статистико-ймовірнісна складова змісту шкільної математичної освіти суттєво доповнює засоби формування наукового світогляду школярів за рахунок розширення можливостей розглядати задачі міжпредметного характеру, будуючи

математичні моделі справді реальних випадкових процесів і подій.

Аналіз існуючих підручників з теми «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» і відповідність задачного матеріалу щодо реалізації наскрізних ліній, розвитку математичних та ключових компетентностей, підготовки до ЗНО, дозволяє стверджувати, що є ряд проблем, а саме: наскрізні лінії представлені недостатньо; задач міжпредметного змісту досить мало; професійно орієнтованих задач майже немає; не всі задачі відповідають віковій аудиторії (занадто прості).

Суперечність між тим матеріалом, що поданий в підручниках, а саме задачі, і тим що від нього очікують за Державним стандартом учні та вчителі дає змогу стверджувати, що для реалізації STEM-навчання існує проблема з задачним матеріалом з стохастичної лінії [32; 42; 54; 61]. Тому є необхідність уточнення підбору задачного матеріалу, яка буде відповідати новітнім тенденціям STEM-навчання. Будь-яку задачу можна переформулювати, не змінюючи математичної моделі. Професійні задачі будуть не під силу всім учням, але вчитель має допомогти розібратись в термінології і поняттях.

Аналіз ряду існуючих методик навчання теорії ймовірностей і математичній статистиці, а також підручників і збірок імовірнісних задач для школярів, показав, що завдання чисто математичного змісту явно переважають над завданнями з практичним змістом, крім того, при підборі завдань практично не використовуються міжпредметні зв'язки, слабо відображена прикладна спрямованість навчання стохастики, що, в свою чергу, не сприяє формуванню ймовірнісно-статистичного мислення учнів і поданням про значущість стохастики як прикладної науки.

Підсумки зовнішнього незалежного оцінювання з математики підтверджують те, що значна кількість учнів не намагаються розв'язати задачі практичного змісту, і відсоток правильних відповідей на задачі такого типу невисокий. Тому на уроках важливо розв'язувати задачі прикладного змісту.

## Висновки до першого розділу

1. STEM-освіта поєднує в собі міждисциплінарний і проектний підходи, основою для яких є інтеграція природничих наук у технології, інженерну творчість та математику.

2. Щоб реалізувати збалансовану STEM-освіту, необхідно забезпечити інтеграцію предметів, поєднавши знання з різних навчальних дисциплін при розв'язуванні реальних проблем. Важлива проектна діяльність, що передбачає залучення учнів до розробки і реалізації власних проектів. Особливої уваги потребує використання сучасних технологій із забезпеченням доступу до комп'ютерів, програмного забезпечення, лабораторного обладнання. Доцільна співпраця з іншими закладами через залучення до навчального процесу представників бізнесу, університетів, наукових установ.

3. Введення STEM-освіти передбачає застосування наступних принципів: постійне оновлення змісту, особистісний підхід, наступність, диференціація освітнього матеріалу, патріотизм і громадська спрямованість, інтеграція, продуктивна мотивація, розвивальне та проблемне навчання. Реалізація нового перспективного напрямку передбачає, що задіяними будуть наступні види освіти: формальну, неформальну, інформальну, як на онлайн-платформах так і у STEM-лабораторіях. Впровадження та розширення STEM передбачається шляхом проведення екскурсій, конкурсів, олімпіад, турнірів тощо.

4. Методика навчання стохастичної лінії з використанням STEM-підходів не є усталеною. Потребує добору зміст, методи, засоби навчання та форми роботи. Тому обрана для дослідження тема кваліфікаційної роботи є актуальною.

## **РОЗДІЛ 2. ПРАКТИЧНІ ОСНОВИ STEM-ОРІЄНТОВАНОГО ПІДХОДУ ДО НАВЧАННЯ СТОХАСТИКИ НА ПРОФІЛЬНОМУ РІВНІ НАВЧАННЯ.**

### **2.1. Використання системи динамічної математики GeoGebra та інших засобів цифрових технологій у навчанні стохастичної лінії**

Низку матеріалів, присвячених використанню систем динамічної математики GeoGebra та Gran1 у навчанні теорії ймовірностей та математичної статистики, висвітлено авторами О. Семеніхіною, М. Друшлак [72], О. Хоминською та ін. [75], О. Пилипенко та Т. Крамаренко [48], [50], Т. Крамаренко, В. Корольським, С. Семеріковим, С. Шокалюк [49] та ін.

Для розв'язування задач стохастики, опрацювання статистичних вибірок, візуалізації експериментальних випробувань на основі випадкових подій дослідники використовують також системи динамічної математики. Зокрема, М. І. Жалдак та ін. [39] висвітлювали застосування програмного засобу Gran1.

Під час вивчення теми «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» доцільно використовувати «інтерактивні» конструкції при розв'язанні задач [49]. Зміна вхідних параметрів у «інтерактивних» конструкціях веде до отримання інших результатів. Проводячи такі динамічні зміни, маємо змогу проводити дослідження. Це сприяє розвитку математичної дослідницької компетентності учнів.

Створювати «інтерактивний» навчальний матеріал у GeoGebra можна за допомогою таких інструментів, як повзунок, прапорець, поле вводу, кнопка, які розташовані на панелі інструментів, та зручно згруповані. Водночас, використовують інструменти створення написів та вставки зображень.



Для створення динамічної конструкції спочатку необхідно визначити, які параметри у задачі будуть змінюватись. Спочатку створюються «повзунки» для змінних параметрів, визначаються інтервали їх зміни. Далі проводяться обчислення у таблицях та за допомогою команд. Після цього можна переходити до створення полів для внесення даних, текстових полів, прапорців.

*Задача №1 достатнього рівня* [49, с. 250]. Для шкільної лотереї підготовлено 50 білетів, з яких 6 є виграшними. Перший учень навмання вибирає 5 білетів. Скільки існує різних варіантів вибору, при яких він вибере рівно 2 виграшні білети?

*Розв'язання:* Серед білетів 6 виграшних і 44 невикрашних. Серед 5 білетів, що обрав учень, 2 виграшних і 3 невикрашних. Кількість способів вибрати з 6 виграшних білетів 2 білети дорівнює  $C_6^2 = 15$ . Кількість способів вибрати з 44 невикрашних білетів 3 білети дорівнює  $C_{44}^3 = 13244$ . За правилом добутку, варіантів вибору 5 білетів, серед яких 2 виграшних дорівнює  $C_6^2 \cdot C_{44}^3 = 198660$ .

*Відповідь:* 198660.

Розглянемо приклади створення «інтерактивних» конструкцій до комбінаторних задач та задач з теорії ймовірностей. Для створення динамічної конструкції до задачі у GeoGebra (рис. 2.1), визначимо, які параметри у задачі будуть змінюватись. У даній задачі пропонуємо зробити усі параметри динамічними. Для цього створимо чотири повзунки:  $N$ ,  $k$ ,  $m$ ,  $n$ , що будуть відповідати загальній кількості лотерейних квитків, кількості виграшних квитків, навмання витягнутих квитків та виграшних серед витягнутих відповідно. Далі проводяться обчислення за допомогою команди БіноміальнийКоефіцієнт[<Число  $n$ >, <Число  $r$ >], що обчислює кількість комбінацій із  $n$  по  $r$ . У даному випадку необхідно обчислити БіноміальнийКоефіцієнт[ $k, n$ ] та БіноміальнийКоефіцієнт[ $N-k, m-n$ ]. Далі у таблиці здійснюємо обчислення, що передбачають арифметичні операції над параметрами. На наступному кроці переходимо до створення полів для введення

даних, текстових полів умови задачі, етапів розв’язання, створення прапорців, «вмикання» яких дозволяє переходити від одного етапу розв’язання задачі до іншого.

Таким чином, зробивши параметри задачі динамічними, маємо змогу змінюючи вхідні параметри отримувати різні відповіді, а тому використовувати конструкцію як своєрідний тренажер, а також проводити дослідження з учнями. Змінивши, наприклад, загальну кількість квитків у бік збільшення, можна простежити, що кількість варіантів вибору, при яких учень вибере рівно 2 виграшні білети, зростає. Якщо зменшити, то навпаки зменшиться. Також можна простежити, що збільшення кількості білетів, що виймаються першим учнем, призводить до значного збільшення варіантів вибору виграшних квитків та ін.

**Задача (29.14).**

Для шкільної лотереї підготовлено  білетів, серед яких  є виграшними.

Перший учень навмання вибирає  білетів. Скільки існує варіантів вибору, при яких він вибере рівно  виграшні білети.

Розв’язання:

- 1. Серед білетів 6 виграшних і 44 невигаших.
- 2. Серед 5 білетів, що обрав учень, 2 виграшних і 3 невигаших.
- 3. Кількість способів вибрати з 6 виграшних білетів 2 білетів дорівнює кількості комбінацій з 6 елементів по 2, тобто дорівнює 15.
- 4. Кількість способів вибрати з 44 невигаших білетів 3 білетів дорівнює кількості комбінацій з 44 елементів по 3 елементів, тобто дорівнює 13244.
- 5. За правилом добутку, варіантів вибору 5 білетів, серед яких 2 виграшних (і 3 невигаших) дорівнює  $15 \cdot 13244 = 198660$ .
- Відповідь: 198660.

**Рис. 2.1. Динамічна конструкція до задачі №1**

**Задача №2 високого рівня** [54]. Для шифрування повідомлень використовують 4 символи. Слово у повідомленні містить від 1 до 5 символів. Яку найбільшу кількість різних слів може містити повідомлення?

Створюючи динамічну конструкцію до даної задачі, пропонуємо за змінний параметр взяти кількість символів, що використовуються для шифрування повідомлень. Таким чином, можна прослідкувати, що

збільшення кількості символів, що використовуються для шифрування повідомлень, збільшує кількість слів, що може містити повідомлення. Тому доцільно виявити, на скільки ця кількість різниться.

**Задача №3 достатнього рівня** [49, с. 253]. У коробці лежать 5 синіх, 10 жовтих і 12 червоних кульок. Яка ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться: 1) жовтою; 2) синьою; 3) не червоною?

*Розв'язання:* Будемо розглядати випробування, суть якого полягає у тому, що з коробки навмання виймають кульку. У коробці загалом міститься 27 кульок, тобто у даному випробуванні 27 рівноможливих результатів.

Розглядаємо подію А – вийнята кулька виявилася жовтою, яку спричиняють 10 результатів. Обчислюємо ймовірність події А:  $P(A) = \frac{10}{27} = 0,37$ . Розглядаємо подію В – вийнята кулька виявилася синьою, яку спричиняють 5 результатів. Обчислюємо ймовірність події В:  $P(B) = \frac{5}{27} = 0,19$ . Розглядаємо подію С – вийнята кулька виявилася не червоною. Настанню події С сприяють настання події А і В, які є несумісними, тоді подію С спричиняють  $10 + 5 = 15$  результатів. Обчислюємо ймовірність події С:  $P(C) = \frac{15}{27} = 0,56$ .

*Відповідь:* 0,37; 0,19; 0,56.

Реалізуючи динамічну конструкцію (рис. 2. 2) до розглянутої вище задачі, пропонуємо використати три змінні параметри: кількість синіх, жовтих та червоних кульок. Створивши три повзунки, що відповідають даним параметрам, залишається виконати обчислення у таблиці, створити відповідно три поля для вводу даних та текстові поля для умови задачі та етапів розв'язання, прапорці.

Змінюючи параметри кількості кульок, що лежать у коробці, учні роблять висновок, що чим більше кульок синього кольору, тим більша ймовірність вийняти кульку синього кольору, чим більше жовтих кульок, тим більша ймовірність вийняти жовту кульку, чим більша кількість кульок

синього та жовтого кольорів, тим менша ймовірність вийняти кульку червоного кольору.

**Задача (30.15).**

У коробці лежать 5 синіх, 10 жовтих і 12 червоних кульок.

Яка ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться: 1) жовтою; 2) синьою; 3) не червоною?

Розв'язання:

1. Будемо розглядати випробування, суть якого полягає у тому, що з коробки навмання виймають кульку.  
У коробці загалом міститься  $5 + 10 + 12 = 27$  кульок, тобто у даному випробуванні 27 рівноможливих результатів.
2. Розглядаємо подію А -- вийнята кулька виявилася жовтою, яку спричиняють 10 результатів.  
Обчислюємо ймовірність події А:  $P(A) = 10/27 = 0.37$ .
3. Розглядаємо подію В -- вийнята кулька виявилася синьою, яку спричиняють 5 результатів.  
Обчислюємо ймовірність події В:  $P(B) = 5/27 = 0.19$ .
4. Розглядаємо подію С -- вийнята кулька виявилася не червоною.  
Настанню події С сприяють настання події А і В, які є несумісними, тоді подію С спричиняють  $10 + 5 = 15$  результатів.
5. Обчислюємо ймовірність події С:  $P(C) = 15/27 = 0.56$ .
- Відповідь: 1) 0.37; 2) 0.19; 3) 0.56.

**Рис. 2.2. Динамічна конструкція до задачі №3**

*Задача №4 високого рівня [54].* Кожне з 12 тестових питань має 4 варіанти відповідей. Учень відповідає на тестові запитання навмання. Яка ймовірність того, що він дасть рівно 7 правильних відповідей.

Доцільно створити за допомогою GeoGebra шаблони і до інших задач з підручників [54], [61] математики для профільного рівня (рис. 2.3).

Створюючи динамічну конструкцію до даної задачі, пропонуємо усі параметри зробити змінними. Змінюючи кількість правильних відповідей можна прослідкувати, що ймовірність відповісти на більшу кількість питань правильно, зменшується, а зменшення кількості варіантів відповідей веде до збільшення ймовірності «вгадати» правильну відповідь, тобто, чим більше варіантів відповідей, серед яких лише одна правильна тим менше можливостей її «вгадати».

При вивченні статистики постає задача опрацювання статистичних даних: обчислення числових характеристик вибірки та графічного представлення інформації про вибірку. На нашу думку, опрацювати

статистичних данні актуально не тільки вручну, а й за допомогою програмного засобу, оскільки є можливість перевірити виконані обчислення на наявність помилок, є змога заощадити час, якщо навички обчислення вже засвоєно.

**14.19.\*\*** Скількома способами можна розбити 12 спортсменів на 3 команди по 4 спортсмени в кожній?

**14.20.\*\*** Скількома способами можна розкласти 20 різних куль по чотирьох однакових ящиках так, щоб кожний ящик містив по 5 куль?

**14.21.\*** Скількома способами можна  $m$  білих і  $n$  чорних куль ( $m \geq n$ ) розкласти в ряд так, щоб жодні 2 чорні кулі не лежали поруч?

**14.22.\*** П'ять ящиків пронумеровано числами від 1 до 5. Скількома способами можна розкласти по цих ящиках 17 однакових куль так, щоб жодний ящик не виявився порожнім?

**14.23.\*** Скількома способами натуральне число  $n$  можна подати у вигляді суми  $k$  натуральних доданків (суми, які відрізняються порядком доданків, вважатимемо різними)?

**Рис. 2.3.** Добірка хадач з підручника математики для профільного рівня до теми «Елементи комбінаторики»

При вивченні статистики постає задача опрацювання статистичних даних: обчислення числових характеристик вибірки та графічного представлення інформації про вибірку. На нашу думку, опрацювати статистичних данні актуально не тільки вручну, а й за допомогою програмного засобу, оскільки є можливість перевірити виконані обчислення на наявність помилок, є змога заощадити час, якщо навички обчислення вже засвоєно. Доцільно, за можливості, проводити обчислення паралельно: вручну, і з використанням програмних засобів. У GeoGebra розв'язувати зазначені задачі можна за допомогою команд та працюючи у розділі «Таблиця і графіка».

Розглянемо основні команди, що можуть бути використані при вивченні елементів статистики, ці команди об'єднано у блоці «Статистика». До них відносяться: Вибірка, Сума, Медіана, Мода, СереднєАрифметичне. Команда Вибірка[<Список>, <Розмір>] повертає список заданого розміру довільно вибраних елементів із заданого списку. Команда Сума[<Список>] або Сума[<Список>, <Список частот>] повертає суму елементів заданого списку або списку з частотами. Команди СереднєАрифметичне (середнє вибіркоче), Медіана, мають однаковий синтаксис: Команда[<Список вихідних даних>] або Команда[<Список чисел>, <Список частот>]. У команді Мода передбачено введення лише списку даних без частот.

Розглянемо приклади використання команд при розв'язанні задач.

**Задача №5 достатнього рівня** [54]. Дівчата 11 класу на уроці фізкультури у стрибках у висоту показали такі результати (у см): 90, 125, 125, 130, 130, 135, 135, 135, 140, 140, 140. Знайдіть моду, медіану і середнє значення цієї сукупності даних. Яке з цих значень найкраще характеризує спортивну підготовку дівчат класу?

*Розв'язання.* Представимо дану вибірку за допомогою частотної таблиці, де  $X$  – висота стрибка,  $M$  – відповідна частота.

$X$	90	125	130	135	140
$M$	1	2	2	3	3

Тоді  $\sum M = n = 11$ .

Оскільки мода, це значення, що зустрічається найчастіше, то робимо висновок, що  $Mo_1 = 135$  і  $Mo_2 = 140$ .

Оскільки кількість чисел у ряді непарна, то медіана – це число, записане посередині, а тобто  $Me = 135$ .

Обчислимо середнє значення за формулою:  $\bar{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{n}$ .

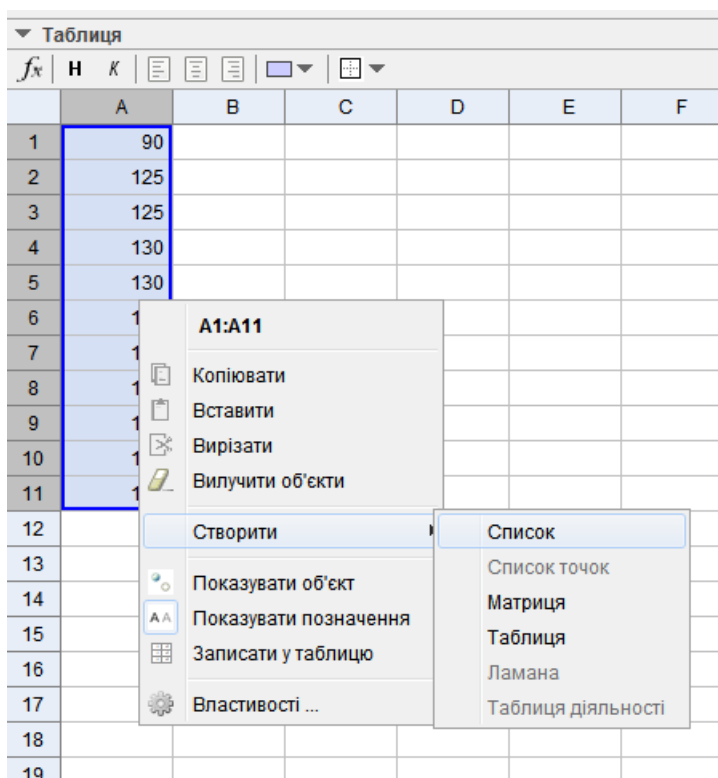
$$\bar{X} = \frac{90 \cdot 1 + 125 \cdot 2 + 130 \cdot 2 + 135 \cdot 3 + 140 \cdot 3}{11} = 129,55.$$

На основі обчислених характеристик учні роблять висновок про те, що найбільш поширене значення довжини стрибків 135 см і 140 см. Половина

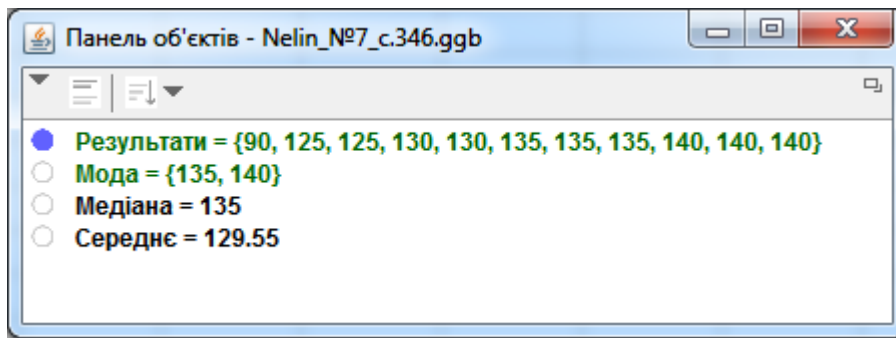
дівчат стрибнула на висоту, не більшу ніж 135 см, а друга половина – не менше ніж 135 см. Середнє значення довжини стрибка у дівчат – 129 см 55 мм. Оскільки середнє значення суттєво не відрізняється від моди, то його доцільно взяти для оцінки спортивної підготовки дівчат класу.

Для розв'язування задачі можемо також скористатися командами у GeoGebra. Попередньо занесемо статистичні дані у таблицю та створимо список під назвою «Результати» (рис 2.4). Створений список одразу з'являється на панелі об'єктів. Для обчислення числових характеристик вибірки у рядку вводу запишемо команди `Мода[Результати]`, `Медіана[Результати]`, `СереднєАрифметичне[Результати]`. Обчислені значення з'являться на панелі об'єктів з назвами типу `список1`, `список2`, ..., `a`, `b`, `c`, ..., змінимо їх назву (не обов'язково) на кращі для сприйняття назви відповідно «Мода», «Медіана», «Середнє значення» (рис. 2.5)

*Відповідь:*  $Mo_1 = 135$  і  $Mo_2 = 140$ ,  $Me = 135$ ,  $\bar{X} = 129,55$ .



**Рис. 2.4. Створення списку даних**



**Рис. 2. 5. Обчислення числових характеристик вибірки**

Для більшого зацікавлення учнів, розвитку їх математичної дослідницької компетентності, на нашу думку, доцільно запропонувати учням занотувати реальні вимірювання довжини стрибків, часу бігу, кількості віджимань та ін., проведених на уроках фізичної культури. На основі цих даних розв'язати попередню задачу. Сталячи за мету ще й розвиток ключових компетентностей, а, зокрема, соціальної компетентності школярів, можна запропонувати їм об'єднатися у команди та доручити проведення різних вимірювань і відповідно інтерпретацію отриманих результатів. Залучення учнів до оцінки числових характеристик вибірки з використанням GeoGebra (GRAN1, Excel та ін.) розвиває їх математичну технологічну компетентність.

На рис. 2.6 подано умови задач з підручників до теми «Основи математичної статистики», які можна використати як основу для розгортання навчального дослідження учнів та подальшого опрацювання його результатів програмними засобами.

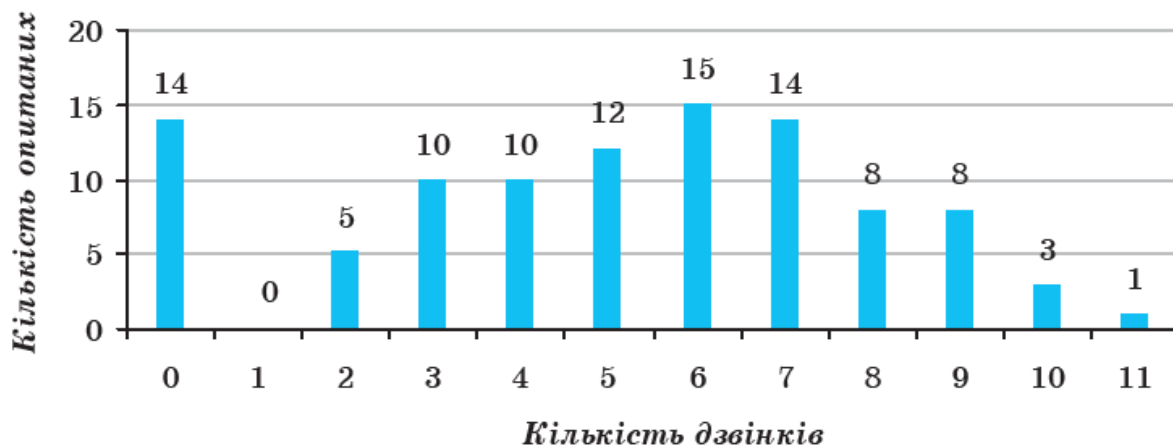
Розглянемо інші *корисні застосунки для детальнішого ознайомлення із розділом математики* і, зокрема, з теорією ймовірностей та математичною статистикою. Для вивчення стохастики існує кілька корисних застосунків, які можуть допомогти з розумінням цього розділу математики. Наведемо приклади кількох із них.

Низку матеріалів з навчання теорії ймовірностей та математичної статистики пропонує **Khan Academy** [11] – безкоштовна онлайн-платформа,



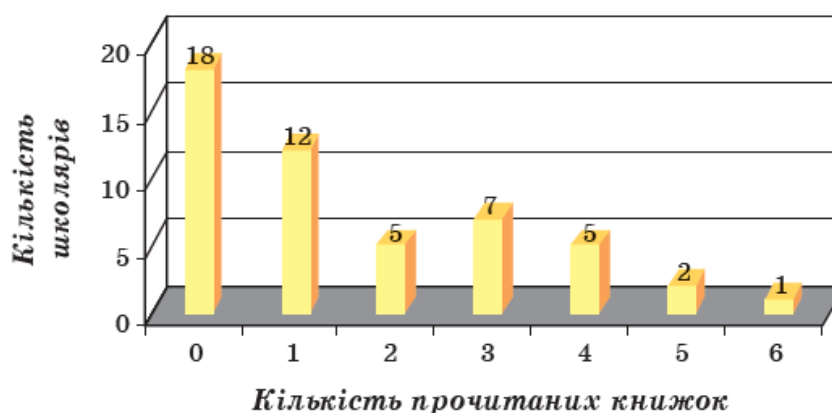
яка надає високоякісну освіту для всіх бажаючих. Незалежно від того, це

**20.13.\*** Телефонна компанія хоче дізнатися про кількість телефонних дзвінків, які робить людина протягом доби. Дані щодо 100 людей подано на діаграмі (рис. 20.4). Обчисліть розмах, середнє значення, медіану та моду цієї вибірки.



**Рис. 20.4**

**20.14.\*** На діаграмі (рис. 20.5) наведено дані про кількість книжок, що їх прочитали протягом місяця 50 опитаних школярів. Обчисліть розмах, середнє значення, медіану та моду даної вибірки.



**Рис. 2.6. Умови задач до теми «Основи математичної статистики»**

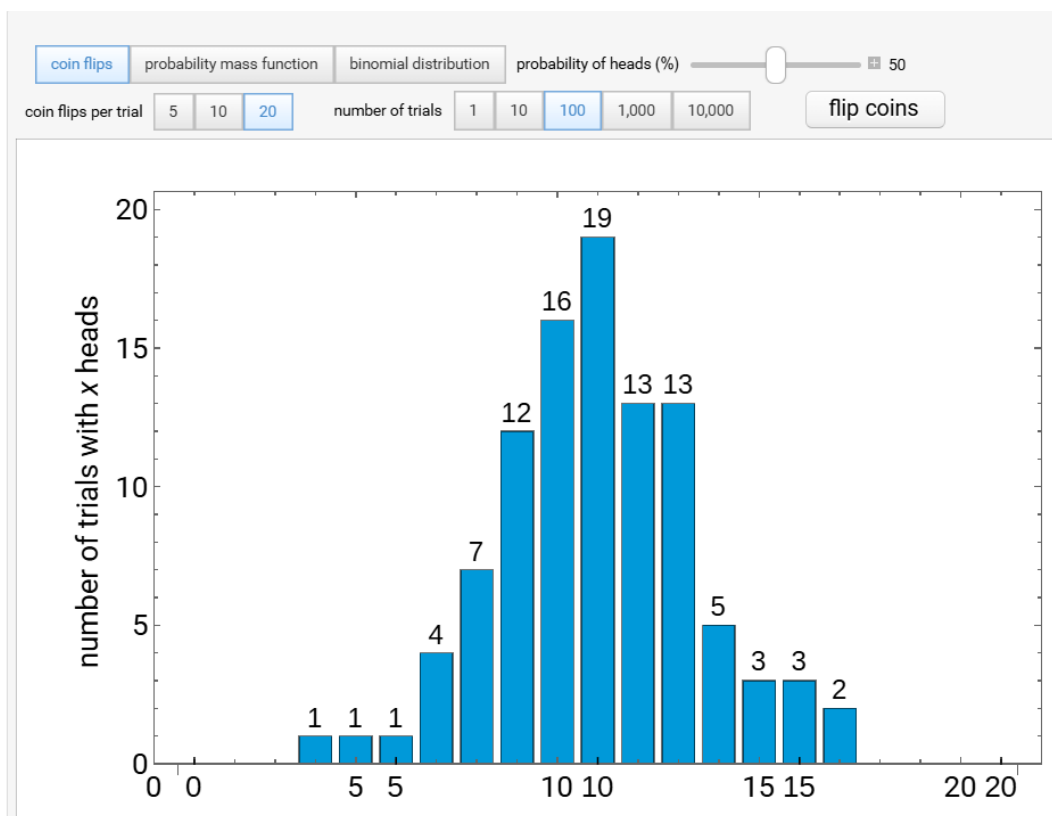
школяр, студент, учитель чи просто людина цікавиться новими знаннями, на Khan Academy можна знайти все необхідне для навчання. На данній платформі розміщені матеріали, курси та уроки від математики та природничих наук до гуманітарних дисциплін та історії. Курси підлаштовані до підготовки до іспитів, проходження навчання, вивчення іноземних мов. Користь: безкоштовний доступ до великої кількості навчальних матеріалів,

відеоуроків та інтерактивних вправ. Функції: пояснення теоретичних основ, розв'язання прикладів, можливість практикуватися на різних рівнях складності. **Стохастика на Khan Academy** пропонує детальні курси з теорії ймовірностей, математичної статистики, а також вступ до стохастичних процесів. Виокремимо переваги для вивчення стохастики: 1) **поступове освоєння**: матеріал подається логічно, від простих понять до складніших; 2) **різноманітність форматів**: крім відеолекцій, є інтерактивні вправи, які дозволяють закріпити матеріал на практиці; 3) **безкоштовний доступ**, що робить Khan Academ у доступною для всіх бажаючих [11].

**Brilliant** [4] – це онлайн-платформа, яка перетворює навчання математики, науки та логічного мислення на захопливу інтерактивну гру. Це місце, де можна розвивати свої інтелектуальні здібності, вирішувати складні задачі та дізнаватися про нові концепції. Важливо те, що здійснюється інтерактивне навчання через практичні завдання, які допомагають розвивати критичне мислення. У поданих курсах є детальні поясненнями, інтерактивні задачі, зворотний зв'язок та підтримка спільноти. З стохастики на Brilliant пропонуються курси, які фокусуються на розвитку інтуїції щодо ймовірнісних процесів та статистичних методів. **Переваги для вивчення стохастики**: 1) **практичний і, певною мірою, STEM-підхід**, оскільки завдання часто пов'язані з реальними ситуаціями, що допомагає зрозуміти застосування теорії; 2) **розвиток критичного мислення**, оскільки подані завдання спрямовані на аналіз даних та прийняття обґрунтованих рішень; 3) **глибоке розуміння**, тому що вивчення курсу допомагає не просто запам'ятати формули, а й зрозуміти їхню суть [4].

**Wolfram Alpha** [26], **Wolfram Demonstrations Project** [27] – не просто пошукова система, а потужний інструмент обчислювальних знань. Замість того, щоб надавати список веб-сторінок, як це роблять традиційні пошукові системи, Wolfram Alpha надає точні відповіді на фактичні запити, використовуючи велику кількість алгоритмів і даних. Тому це потужний інструмент для обчислень та аналізу даних, який може миттєво розв'язувати

складні математичні задачі. До функціональності відносимо автоматичне розв'язання математичних задач, побудову графіків, аналіз ймовірнісних розподілів. **Стохастика на Wolfram Alpha** – це потужний інструмент для проведення складних статистичних розрахунків, симуляцій та візуалізації даних. На рис. 2.7 представлено розподіл ймовірностей для випадкової величини, що має біноміальний розподіл. Поняття про закони розподілу ймовірностей та математичне сподівання розглядається у шкільному курсі математики за програмою профільного та поглибленого вивчення.



**Рис. 2.7. Візуалізація біноміального розподілу ймовірностей у Wolfram Demonstrations Project**

**Переваги Wolfram Alpha для вивчення стохастики:** 1) швидкі розрахунки: можна миттєво отримати результати навіть для складних статистичних моделей; 2) глибокий аналіз: Wolfram Alpha дозволяє проводити детальний аналіз даних, включаючи виявлення закономірностей та аномалій; 3) інтерактивність: можна змінювати параметри моделі та спостерігати за змінами результатів [26].

**Desmos** [9] є потужним онлайн-інструментом, який додає вивченню математики візуалізації та інтерактивності. Він особливо корисний для побудови графіків функцій, але його можливості набагато ширші. Отже, це зручний інструмент для візуалізації математичних концепцій, що полегшує розуміння складних теорій. Це графічний калькулятор, реалізований як застосунок для браузера та мобільний застосунок. При вивченні стохастички на Desmos можна візуалізувати різні ймовірнісні розподіли, створювати симуляції випадкових процесів та досліджувати їхні властивості. До переваг для вивчення стохастички можна віднести інтуїтивне розуміння, що забезпечує візуалізація, допомагає краще зрозуміти абстрактні поняття. Можна здійснювати певною мірою експериментування. Тобто, можна самостійно змінювати параметри моделей та спостерігати за їх змінами. Перевагою є **створення власних інтерактивних моделей** у середовищі Desmos.

**Coursera** [8] – це одна з найбільших платформ онлайн-навчання у світі, яка пропонує широкий спектр курсів від провідних університетів та компаній. Це місце, де можна отримати знання з різних галузей, від програмування до медицини. Є доступ до курсів від провідних університетів світу, а також можливість отримати сертифікат. З теорії ймовірностей та математичної статистики пропонуються відеолекції, інтерактивні завдання, форуми для обговорень, можливість спілкування з викладачами [8].

**Udemy** [23] – це одна з найбільших світових онлайн-платформ для навчання та викладання, де можна знайти широкий спектр курсів з різних галузей знань. Є можливість навчатися у зручний час. Подано відеоуроки, практичні завдання та оцінювання знань. **Coursera** та **Udemy** пропонують широкий вибір курсів з теорії ймовірностей, математичної статистики та їхніх застосувань. Перевагою для вивчення стохастички є систематичне навчання, оскільки курси, зазвичай, мають чітку структуру та охоплюють весь необхідний матеріал.

**Microsoft Math Solver** [12] – це інструмент, який використовує штучний інтелект для розв'язування математичних задач. Він може

виконувати роль особистого репетитора з математики прямо у своєму смартфоні або на комп'ютері. Передбачається миттєве розв'язування математичних задач, зручний інтерфейс для навчання, підтримка рукописного введення, пояснення кроків розв'язання, побудова графіків. Хоча цей інструмент більше орієнтований на розв'язання математичних задач, його можна використовувати для перевірки розрахунків у задачах зі стохастики. Переваги для вивчення стохастики: 1) пояснення кроків, бо інструмент показує не тільки результат, але й детальний процес розв'язування; 2) зручний інтерфейс, оскільки можна вводити задачі як рукописом, так і за допомогою клавіатури.

Ці застосунки допоможуть глибше зрозуміти стохастичку, розвинути навички аналітичного мислення та успішно вирішувати завдання різного рівня складності. Які з цих інструментів найкраще підходять учням, залежить від рівня знань. Якщо курс вивчення стохастики тільки розпочався, варто звернути увагу на Khan Academy та Brilliant. Для більш глибокого розуміння та практичних застосувань корисні будуть Wolfram Alpha, Desmos та курси на платформах Coursera та Udemy. Microsoft Math Solver може бути корисним як додатковий інструмент для перевірки розрахунків.

## **2.2 Використання методу Монте-Карло у навчанні стохастики**

Часто для визначення характеристик деяких процесів, перебіг яких не є детермінованим і залежить від випадкових факторів, розробляють спеціальні імітаційні моделі та здійснюють імітацію з використанням програмних засобів. Генерація випадкових чисел є важливим компонентом багатьох застосунків, включаючи криптографію, системи безпечного зв'язку, симуляції та імовірнісні алгоритми. Здійснивши статистичне моделювання, усереднені результати спостережень використовують для наближеного визначення шуканих характеристик процесів, що досліджують. У цьому полягає суть методу статистичних випробувань – методу Монте-Карло. Значну увагу застосуванню методу приділено у навчальному посібнику з

теорії ймовірностей та математичної статистики Жалдака М. І., Кузьміної Н. М., Михаліна Г. О. [39]. О. Семеніхіна та М. Друшляк [72] здійснюють порівняльний аналіз розв'язування задач шкільного курсу статистики у середовищах Gran1 і GeoGebra:

У деяких випадках метод Монте-Карло є єдиним, за яким можна дістати наближені розв'язки задач, які не можна проаналізувати іншими аналітичними чи чисельними методами. Метод Монте-Карло – метод імітації для відтворення реальних явищ. Заснований на одержанні великої кількості реалізацій стохастичного процесу, який здійснюється так, щоб його ймовірнісні характеристики збігалися з аналогічними величинами задачі, яку потрібно розв'язати. Наприклад, щоб середнє значення за отриманою вибіркою було оцінкою для невідомого математичного сподівання. Застосування методу дає змогу побудувати модель, щоб мінімізуючи вхідні дані, отримати максимально правдоподібний результат. Оскільки метод використовується, зокрема, через симуляції за допомогою програмних засобів для розв'язування задач математики, фізики, економіки, оптимізації, теорії управління тощо, то його застосування можна розглядати як один із ефективних engineering-інструментів, успішне опанування яким сприятиме підготовці вчителів до впровадження STEM-підходів у навчанні природничо-математичних дисциплін.

О. В. Семеніхіна [72] звертає увагу на те, що метод Монте-Карло доцільно використовувати при вивченні циклу математичних дисциплін. З цією метою необхідно актуалізувати міжпредметні зв'язки. Наприклад, курсу інформаційних технологій з математичним аналізом чи теорією ймовірностей та математичною статистикою. У статті наводиться приклад оцінювання значення визначеного інтеграла через застосування методу Монте-Карло у спеціалізованому пакеті MAPLE.

Дослідження імітаційного моделювання з використанням системи динамічної математики GeoGebra знайшли відображення в роботах науковців О. Хоминської та ін. [75]. Генератори псевдовипадкових чисел та квантові

генератори випадкових чисел є двома основними типами генераторів випадкових чисел. Як стверджують автори публікації Д. Проскурін та ін. [16], останні забезпечують кращу безпеку завдяки своїй непередбачуваності.

Т. Крамаренко висвітлює особливості навчання методу Монте-Карло у підготовці майбутніх учителів математики та інформатики у публікаціях [47] [478]. У зазначених публікаціях метод Монте-Карло також розглядається як engineering-інструмент STEM-навчання учнів у закладах середньої освіти при профільному навчанні математики та інформатики. Використання методу Монте-Карло доцільне для візуалізації абстракцій, висунення гіпотез, перевірки їх вірогідності.

У низці підручників з теорії ймовірностей та математичної статистики, зокрема [39], [43], [53], рекомендується окремі поняття описової статистики, числові та графічні характеристики вибірки вводити перед вивченням випадкових величин та законів розподілу ймовірностей значень випадкових величин. Зокрема, практично-орієнтованому спрямуванню навчання стохастики перевагу віддають М. І. Жалдак та ін. [39]. Власне ознайомлення з методом Монте-Карло здобувачів освіти розпочинаємо на етапі означення ймовірності випадкової події.

Метод Монте-Карло – назва групи числових методів, заснованих на одержанні великої кількості реалізацій стохастичного (випадкового) процесу, який формується у той спосіб, щоб його ймовірнісні характеристики збігалися з аналогічними величинами задачі, яку потрібно розв'язати. Використовується для розв'язування задач у фізиці, математиці, економіці, оптимізації, теорії управління тощо [55].

Метод Монте-Карло – це метод імітації для приблизного відтворення реальних явищ. Він об'єднує аналіз чутливості і аналіз розподілу ймовірностей вхідних змінних. Цей метод дає змогу побудувати модель, мінімізуючи дані, а також максимізувати значення даних, які використовуються в моделі. Побудова моделі починається з визначення функціональних залежностей у

реальній системі. Після чого можна одержати кількісний розв'язок, використовуючи теорію ймовірності й таблиці випадкових чисел [55].

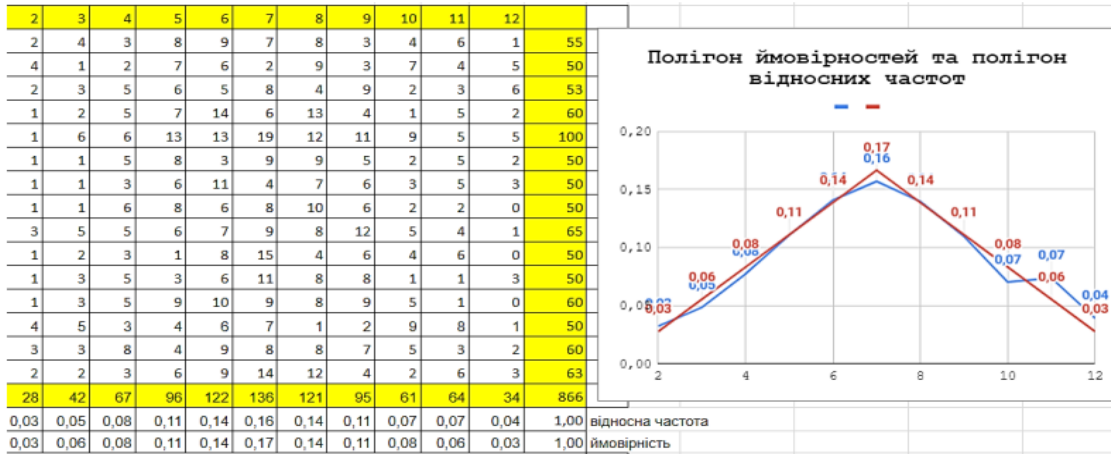
Учням доцільно запропонувати провести кілька стохастичних експериментів, визначити відносні частоти відбування тієї чи іншої події. Рекомендації щодо проведення і опрацювання результатів стохастичних експериментів, доступних учням старшої школи, висвітлено у навчально-методичному посібнику «Математика в STEMі» [48]. Розглядаючи означення статистичної ймовірності випадкової події, можемо запропонувати здобувачам освіти наближено обчислити ймовірності випадання випадкових чисел, рівних сумі чисел на верхніх гранях двох кубиків. Доцільно порівняти отримані значення з обчисленими ймовірностями, продемонструвати стійкість відносних частот в серії повторних незалежних випробувань здійснити пропедевтику вивчення закону великих чисел.

Доцільно запропонувати учням провести декілька експериментів та опрацювати їх результати. Приклади таких експериментів наводять автори публікацій [47], [48]. Це один із напрямів STEM-підходів у навчання теорії ймовірностей та математичної статистики.

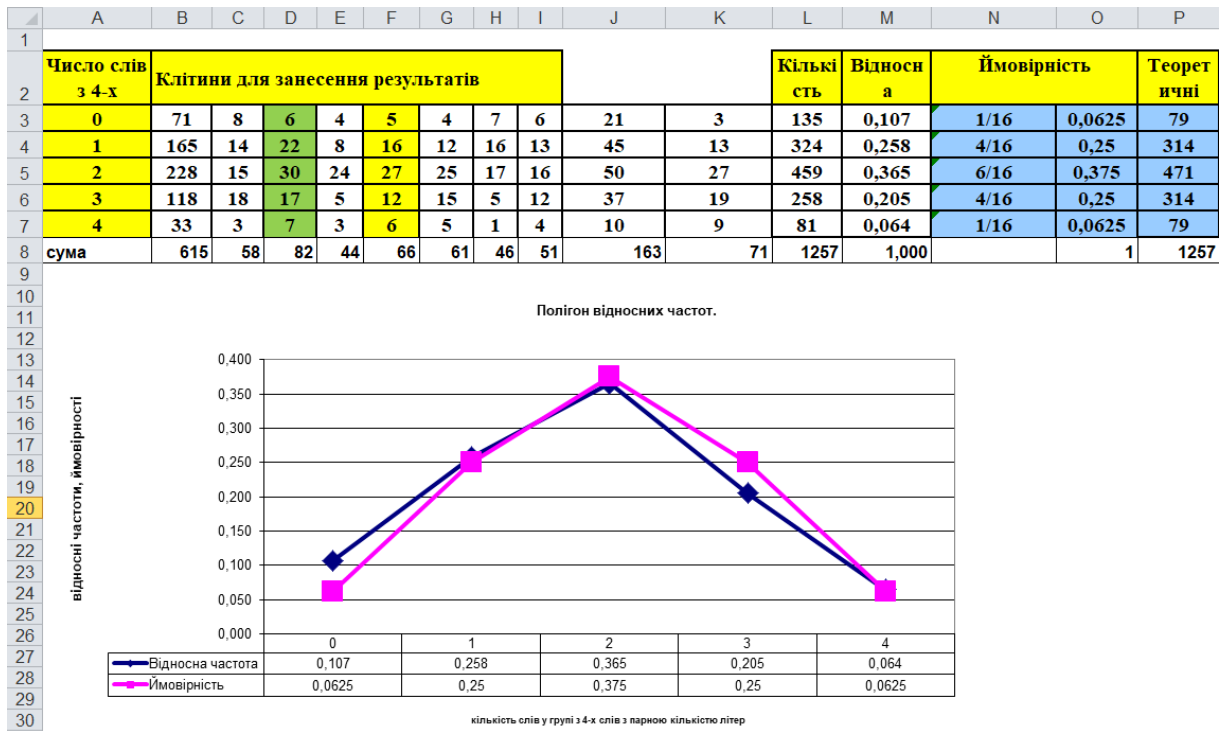
Експеримент №1 з підкидання двох кубиків та визначення суми чисел на верхніх гранях (рис. 2.8). Навіть при відносно невеликій кількості реалізацій (на поданому рисунку майже 900), отримуємо, що відносні частоти та ймовірності практично не відрізняються. Для візуалізації результатів дослідження будуємо

Експеримент №2. Написати чотири випадкові слова, визначити кількість літер, встановити, чи отримане число є парним. Далі потрібно розрахувати і порівняти відносні частоти та ймовірності того, що з чотирьох слів одне, два, три чи чотири з парною кількістю літер. Візуалізацію емпіричних даних здійснено на рис. 2.9. полігони відносних частот та ймовірностей з використанням таблиць Google.





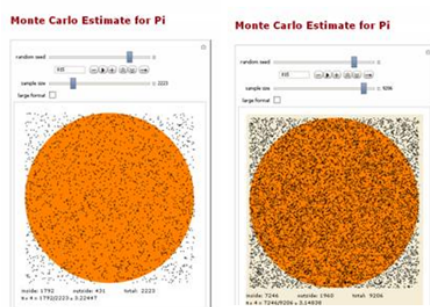
**Рис. 2.8. Полігон відносних частот та ймовірностей викидання суми чисел на верхніх гранях двох кубиків**



**Рис. 2.9. Полігон відносних частот та ймовірностей при написанні слів за експериментом № 2.**

Експеримент №3. Методом Монте-Карло оцінку для значення  $\pi$  можна здійснити шляхом генерації випадкових точок в квадраті і обчислення пропорції точок, що лежать усередині вписаного в квадрат круга, до числа точок, кинутих у квадрат [47] .

# Обчислення числа $\pi$



Демонстрація Wolfram

[MonteCarloEstimateForPi.cdf](#)

Просту оцінку методом Монте-Карло для значення  $\pi$  можна знайти шляхом генерації випадкових точок в квадраті і перерахунок пропорції точок, що лежать усередині вписаного круга.

Щоб за цим методом знайти число, потрібно значна кількість кидань, бо збігається до числа дуже повільно.

**Ймовірність того, що точка, кинута в квадрат, потрапить в круг, пропорційна ...**

**відношенню площі круга до площі квадрата.**

$$\frac{\text{Площа круга}}{\text{Площа квадрата}} \approx \frac{\pi R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4}$$

**Рис. 2.10.** Ілюстрація до експерименту №3 з обчислення числа  $\pi$

Підбиваючи підсумки, при використанні у навчанні теорії ймовірності та математичної статистики метод Монте-Карло, як найліпше впливає на сприйняття типових задач учнями. Адже наглядне розв'язання задач є найкращим методом для повного розуміння теми та її опрацювання. Безперечною є корисливість використання данного методу на початку вивчення задач стохастичного спрямування.

## 2.3 Стохастичні задачі і прикладна спрямованість навчання

Сучасні вимоги до математичної підготовки здобувачів освіти значно підвищують роль формування в учнів здатності до самостійного засвоєння знань, а також застосування здобутих знань до розв'язування завдань професійного спрямування. Це вимагає від викладача пошуку і розроблення нових практичних матеріалів, спрямованих на розв'язування практично орієнтованих задач. Актуальним є питання формування в учнях загальних, математичних та професійних компетентностей засобами математики, тобто застосування математичного апарату, що вивчається в цій дисципліні до розв'язання прикладних задач. При вивченні теорії ймовірностей і математичної статистики учень, досліджуючи математичну проблему,

повинен формувати різні питання і завдання, потім «переводити» їх на мову математики, для того, щоб розв'язати їх математичними методами, а потім показати розв'язання з урахуванням реальної проблеми, яка поставлена спочатку. На прикладі розв'язування стохастичних задач учнями розглянемо прикладну спрямованість використання набутих знань та вмінь.

Окремим аспектам проблеми навчання здобувачів елементів стохастики та розвитку ймовірнісно-статистичного мислення присвятили праці математики, психологи, дидакти та методисти, зокрема, Г. П. Бевз [31], М. І. Бурда [34], М. Я. Ігнатенко, Ю. М. Колягін, З. І. Слєпкань та ін. Як зазначає М. Жалдак [39], важлива педагогічно-методична проблема наповнення навчального змісту. Проблема добору змісту знайшла відображення також у працях зарубіжних учених-педагогів: З. Криговської, А. Плоцьки [66], [67] В. Шленка [76]. Важливо обґрунтувати ефективність використання прикладних задач як одного із засобів розвитку ймовірнісного мислення здобувачів освіти. Потрібно посилювати прикладну та практичну спрямованість вивчення стохастики в курсі вивчення математики. Найістотнішим з точки зору застосування математики є ознайомлення учнів з методами побудови математичних моделей [34].

Прикладна спрямованість важлива у навчанні стохастики. При виконанні завдань прикладного характеру учні отримують уявлення про необхідність і універсальність математики [49]. Завданням прикладного характеру будемо називати задачу, яка виникла у позаматематичній ситуації і розв'язання якої здійснюється в три етапи: формалізація (побудова математичної моделі), розв'язання внутрішньомодельної математичної задачі й інтерпретація отриманого рішення. Цінність стохастичних задач визначається не стільки тим апаратом, який використовується при їх розв'язанні, скільки можливостями продемонструвати процес застосування математики для виконання поза математичних завдань. Ці завдання повинні ознайомити здобувачів освіти з реальним застосуванням стохастичних ідей і методів, а також слугувати для організації специфічної діяльності, необхідної

в процесі застосування математики. Концепція навчання теорії ймовірностей і статистики [39] трактує це навчання як процес, при якому стохастичні поняття й ідеї слугують математичним апаратом для розв'язання конкретних проблем. При цьому учень, досліджуючи математичну проблему, формує різні питання і завдання, потім «перекладає» їх на мову математики, для того, щоб розв'язати їх математичними методами, а потім проінтерпретувати рішення з урахуванням реальної проблеми, яка поставлена спочатку. Цей процес являє собою процес побудови математичної (ймовірнісної) моделі реальної ситуації, який можна вважати математичною діяльністю, що широко розуміється.

У попередньому пункті нами наводилися приклади проведення випадкових експериментів. Наприклад, підкидається декілька гральних кубиків або монет; випадковим чином вибираються кулі з урни тощо. Тут кінцева множина можливих результатів (з кінцевим простором елементарних подій). Кожному учню пропонуємо висловити припущення щодо можливого результату експерименту. Ті, чия здогадка підтвердилася, отримують бал. Рациональна участь у такій ситуації пов'язана із відповіддю на питання: чи є серед можливих результатів такий, на який варто «робити ставку»? По суті, потрібно відповісти на питання про те, чи всі результати випадкового експерименту є рівноймовірними. Якщо ні, то варто вибирати більш ймовірний результат. Тут математична проблема вибору зводиться до побудови ймовірнісної моделі випадкового експерименту. Завдання звелось, по суті, до оцінювання розподілу ймовірностей на множині результатів випадкового експерименту [39].

Розглянемо поширений випадковий вибір  $k$  з  $S$  осіб за допомогою жереба (сірників) [43]. Питання про те, які шанси кожного з  $S$  осіб потрапити в число  $k$  обраних, необхідно перевести спочатку на мову математики. Поза математична ситуація схематизується і формалізується. Набір з  $S$  сірників подається у вигляді урни, у якій  $k$  чорних куль (сірників без голівки) і  $S - k$  білих (сірників з голівками). Витягування сірника ототожнюється з

випадковим вибором кулі (без повернення) з цієї урни. Таким чином, побудована математична (імовірнісна) модель початкової ситуації. Внутрішньо модельне завдання зводиться до знаходження ймовірності витягнути чорну кулю на  $j$  кроці ( $j = 1, 2, \dots, S$ ). Встановлюється, що ця ймовірність не залежить від  $j$ . Після чого знайдена властивість імовірнісної моделі інтерпретується з урахуванням початкового завдання. Отримуємо, що шанси потрапити в число обраних осіб не залежать від того, яка за рахунком особа тягнула сірник, тобто випадковий вибір за допомогою сірників справедливий. Вирішення цієї проблеми включали усі три етапи розв'язання прикладної задачі. Випадковий вибір за допомогою жереба – приклад задачі прикладного характеру.

Наведемо приклади практичних завдань з підручників математики для профільного рівня [32], [42], [54], [61], які можуть слугувати підґрунтям для проведення учнями експериментів з подальшим опрацюванням результатів (рис. 2.11–2.14). Це буде одним із прикладів реалізації STEM-підходів у навчання стохастики.

- 4** 18.57. У магазині 50 кавунів, з яких 40 стиглих. Придбали два кавуни. Яка ймовірність того, що вони обидва стиглі?
- 18.58. Серед 40 деталей 36 якісних. Яка ймовірність того, що серед трьох навмання взятих деталей немає бракованих?
- 18.59. Набір для рукодільниць містить 8 пакетиків з бісером і 6 пакетиків зі стеклярусом. Навмання з набору вибирають 3 пакетики. Яка ймовірність того, що:
- 1) усі три пакетики будуть з бісером;
  - 2) два пакетики будуть з бісером, а один зі стеклярусом;
  - 3) серед цих пакетиків будуть пакетики як з бісером, так і зі стеклярусом?

**Рис. 2.11. Прикладні завдання з підручника для 11 класу [42, с, 246]**

Розглянемо наступні приклади.

**З а д а ч а 1.** Тест складається з 20 питань, до кожного з них пропонується 4 варіанти відповідей, тільки одна з яких правильна. Той, що складає іспит, вибирає правильні, на його думку, відповіді. Позитивну оцінку

отримує той, хто вибрав не менше 14 правильних відповідей. Яка ймовірність отримати позитивну оцінку без підготовки, обираючи відповіді навмання?

Ця задача не є прикладною в сенсі даного нами визначення, хоча її зміст пов'язано з позаматематичною ситуацією. Якщо до неї додати запитання: «Наскільки достовірною є позитивна оцінка в такій ситуації»? – вона стала б прикладним завданням в повному розумінні слова.

**12.3.4\*.** Виберіть навмання одну сторінку з книжки будь-якого письменника і підрахуйте, скільки разів на цій сторінці з'являються букви «о» і «б», а також скільки всього на ній букв. Оцініть імовірність появи букв «о» і «б» у цьому тексті.

Поясніть, чому на клавіатурах друкарських машинок і комп'ютерів буква «о» розташована ближче до центра, а буква «б» — ближче до краю (рис. 12.3.2). Як ви поясните розташування інших букв?



**Рис. 2.12.** Прикладні завдання з підручника для 11 класу [61, с. 168] для вивчення означення ймовірності випадкової події та відносної частоти

**12.6.11\*.** Підкидають дві монети. Гравець  $A$  одержує  $a$  очок, якщо випадають два «герби»,  $0$  очок — в інших випадках. Гравець  $B$  одержує  $b$  очок, якщо випадають «герб» і «число»,  $0$  очок — в інших випадках. Знайдіть відношення  $a:b$ , при якому ця гра буде справедливою.

**12.6.12.** *Задача Луки Пачолі (1494 р.).* Двоє гравців грають до трьох вигравів. Після того як перший гравець виграв дві партії, а другий — одну, гра урвалася. Як справедливо розділити ставку 210 ліврів (лівр — срібна монета)?

**12.6.13\*.** *Задача П'єра Ферма (1654 р.).* Нехай до виграшу всієї гри гравцю  $A$  бракує двох партій, а гравцю  $B$  — трьох партій. Як справедливо розділити ставку, якщо гра перервана?

**Рис. 2.13.** Прикладні завдання з підручника для 11 класу [61, с. 183] для вивчення поняття випадкової величини та її розподілу

**ПРИКЛАД 1** Страховий поліс<sup>1</sup> передбачає виплати у випадку незначного пошкодження автомобіля (несправність кондиціонера або пошкодження лобового скла) або його викрадення. У разі незначного пошкодження розмір виплат складе 25 тис. грн, а в разі викрадення — 500 тис. грн. За досвідом минулих років відомо, що незначні пошкодження відбуваються з ймовірністю 6 %, а викрадення — із ймовірністю 0,1 %. На продаж кожного поліса страхова компанія планує заробити по 3 тис. грн. Визначте, яку ціну поліса має встановити страхова компанія.

*Розв'язання.* Розглянемо випадкову величину  $x$ , яка дорівнює розміру виплат страхової компанії за страховим полісом. Складемо таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини  $x$ :

Значення $x$ (тис. грн)	0	25	500
Ймовірність	0,939	0,06	0,001

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини  $x$ . Маємо:

$$M(x) = 0 \cdot 0,939 + 25 \cdot 0,06 + 500 \cdot 0,001 = 2.$$

Величина  $M(x) = 2$  показує, що очікуваний розмір виплат за кожним полісом складе 2 тис. грн. Оскільки страхова компанія планує заробляти по 3 тис. грн на кожному полісі, то вона має встановити ціну такого поліса в 5 тис. грн.

*Відповідь:* 5 тис. грн. ◀

**Рис. 2.14.** Прикладне завдання з підручника для 11 класу [54, с. 180] для вивчення поняття математичного сподівання випадкової величини

**З а д а ч а 2.** Тест складається з  $n$  питань, до кожного з них пропонується  $S$  відповідей, причому тільки одна з них правильна. При якому числі  $k$  правильних вказаних відповідей варто поставити позитивну оцінку? Позаматематичну проблему в цьому завданні необхідно вирішити за допомогою математики. Припустимо, що той, хто здає іспит, нічого не знає і обирає відповіді навмання. Формалізуємо цю ситуацію. У побудованій математичній моделі число правильних відповідей, які надає той, хто екзаменується, є випадковою величиною  $S_n$  за таким розподілом:

$$P(S_n = k) = C_n^k \cdot \left(\frac{1}{S}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{S}\right)^{n-k}, k = 1, 2, \dots, S$$

Знайдемо значення  $k_0$ , для якого  $P(S_n \geq k_0) < 0,05$ . Для такого  $k_0$  подія  $(S_n \geq k_0)$  дуже малоїмовірна, практично неможлива, а подія  $(S_n \geq k_0 - 1)$  також не є. Вирішується чисто математична задача. Таким чином, якщо учень обрав  $k$  правильних відповідей і  $k \geq k_0$ , то дуже малоїмовірно, що він досяг цього випадковим чином, тобто йому пощастило. Якщо ж  $k < k_0$ , то він не заслуговує на позитивну оцінку. У цьому завданні за допомогою ймовірності було оцінено певний ризик.

У житті іноді необхідно оцінити, чи є певний факт закономірним або випадковим.

**З а д а ч а 3.** На останній сторінці журналу надруковано фотографії  $n$  відомих осіб (наприклад, кінозірок) і  $n$  фотографій цих же осіб в дитинстві. Читач повинен вгадати, де чия фотографія. Починаючи із кількох правильних припущень варто давати приз?

**З а д а ч а 4.** Майбутніх детективів добирають, серед іншого, і за допомогою такого тесту: їм дають  $n$  фотографій різних осіб і  $n$  зразків почерку. Необхідно визначити, який почерк у кожної з цих осіб. Починаючи з якої кількості правильних відповідей, можна говорити про вміння виявити за почерком характерні риси особистості?

Позаматематичні проблеми, які поставлено в задачах 3 і 4, ми намагаємося вирішити за допомогою математики. Розглянемо урну з  $n$  кулями, занумерованими числами  $1, 2, \dots, n$ . Гравець виймає по черзі кулі з урни (без повернень) і отримує стільки очок, скільки разів номер вийнятої кулі збігся з номером кроку, на якому її було вийнято. Число отриманих гравцем очок – це випадкова величина  $x_n$ , визначена на множині всіх перестановок множини  $1, 2, \dots, n$ . Кожна перестановка відповідає послідовності випадкового вибору куль.

#### Внутрішньомодельні задачі-схеми

Серед традиційних стохастичних задач багато таких типово математичних (внутрішньомодельних), які сформульовано за допомогою позаматематичних термінів. Як приклад розглянемо таку задачу.



**З а д а ч а 5.** Два баскетболісти кидають м'яч у кошик по три рази. Ймовірність попадання для них дорівнює 0,6 і 0,7 відповідно. Знайдіть ймовірність того, вони попадуть у кошик однакову кількість разів. Таку задачу іноді називають близькою до життя, життєвою, оскільки її фабула пов'язана з дійсністю. Між тим задача зовсім не прикладна і дуже далека від реального життя. Порівняємо її з наступним завданням.

**З а д а ч а 6.** В урні I1 6 чорних і 4 білі кулі, а в урні I2 – 7 чорних і 3 білі. З кожної урни по три рази вибирається куля з поверненням. Знайдіть ймовірність того, що чорну кулю виберуть з урни I1 стільки ж разів, скільки з урни I2. Задача 8 являє собою переформулювання задачі 7, при цьому заміна баскетболістів і кошиків на кулі і урни ніяк не впливає на методи розв'язання задачі. При аналізі задачі 7 виникає питання про те, хто і яким чином визначив, що «ймовірність попадання в кошик для цього баскетболіста дорівнює  $p$ ». Неясно, хто формалізував реальну ситуацію, як він це зробив, чому отримав факт, який використовується в задачі.

**З а д а ч а 7.** Надійністю приладу називається ймовірність його безвідмовної роботи впродовж певного проміжку часу. Для збільшення надійності приладу він дублюється іншим таким же приладом так, що якщо один з них відмовляє, то другий тут же бере на себе усі його функції. Визначте надійність системи двох приладів, які дублюють один одного, якщо надійність кожного приладу рівна  $p$  і відмова одного з них не впливає на роботу іншого [43]. Для розв'язання задачі немає необхідності формалізувати реальну ситуацію або інтерпретувати рішення. Необхідність інтерпретації виникає, якщо поставити питання про те, яке число приладів, що дублюють один одного, необхідно для того, щоб прилад діяв впродовж деякого проміжку часу безвідмовно із заданою вірогідністю.

Стохастичні ігри і прикладні задачі, їх використання в навчанні. Реальні задачі прикладного характеру в математиці зустрічаються рідко, оскільки етап побудови математичної моделі поза математичної ситуації вимагає великих знань і математичної культури. Тому виникла проблема

добору завдань прикладного характеру, які можуть використовуватися в навчанні. У методиці математики [35] прийнято пояснювати суть застосування математики для розв'язання практичних завдань на прикладах задач, у яких моделюється справжнє застосування математики.

За допомогою деякої модифікації цілий ряд традиційних задач теорії ймовірностей, які сформульовані мовою поза математичних термінів, могли б стати задачами прикладного характеру. Розширення кола таких завдань в навчанні математики позитивно вплинуло б на ставлення здобувачів освіти до вивчення математики, підвищилося б мотивація до навчання.

Прикладні та практико-орієнтовані задачі з теорії ймовірностей та математичної статистики сприяють засвоєнню не лише методів прикладної математики, але передусім методів і принципів опису реальних ситуацій математичною мовою; раціональному добору адекватного математичного апарату для розв'язування задач; підводять до математичного «відкриття», виховуючи потребу в розширенні знань; підвищують мотивацію введення ймовірнісних понять і теорем, розвивають уявлення про ймовірнісно-статистичні поняття і методи; дають можливість посилити міжпредметні зв'язки за допомогою застосування стохастичних методів у різних галузях знань і практики. Вивчення теорії ймовірності і математичної статистики має загальноосвітнє значення. Наповнення розділу стохастики прикладними задачами, що задовольняють основні дидактичні вимоги, сприятиме формуванню високого рівня практичних компетентностей здобувачів освіти, орієнтованих на всебічний розвиток його особистості.

#### **2.4. Використання проєктних технологій у навчанні стохастики.**

Комбінаторика – важливий розділ математики, знання якого необхідно представникам різноманітних спеціальностей. З комбінаторними задачами доводиться мати справу фізикам, хімікам, біологам, лінгвістам, спеціалістам по кодах та ін. Комбінаторні методи лежать в основі рішення багатьох задач теорії ймовірностей та її застосувань [66], [67].

З задачами, в яких доводиться вибирати ті чи інші предмети, розміщувати їх в певному порядку і відшукувати серед різних розміщень найкращі, люди стикнулися ще в доісторичну епоху, обираючи найкращі розміщення мисливців під час полювання, воїнів під час битви, інструментів під час роботи. Певним чином розміщувалися прикраси на одязі, візерунки на кераміці. З ускладненням виробничих і суспільних відносин ширше приходилося користуватися загальними поняттями про порядок, ієрархію, групування. В тому ж напрямку діяв розвиток ремесел торгівлі.

Перед вивченням розділу «Комбінаторика» доцільно дати учням завдання, що дозволить їм налаштувати себе на плідну роботу та надасть можливість отримати якісь ввідні завдання для кращого розуміння теми.

Для цього учитель завчасно пропонує учням об'єднатися у групи та підготувати досить короткі та цікаві доповіді на теми, а також невеличкі їх інценування. Наведемо приклади завдань, які можуть бути запропоновані учням: 1) перша згадки про питання, близькі до комбінаторних; 2) комбінаторика в Давній Греції, у країнах Сходу; 3) комбінаторика та азартні ігри; 4) комбінаторика в ієрогліфах та клинописі; 5) комбінаторика в шифрах та анаграмах; 6) хіміко-біологічний пасьянс тощо.

Учні матимуть певну основу та розуміння для того, щоб перейти до основних питань цього розділу. Саме заняття як презентація STEM-проєкту пропонується в нестандартній формі, за допомогою інтерактивної технології «Ажурна пилка». Дана технологія дозволяє працювати разом, щоб вивчити значну кількість інформації за короткий проміжок часу, а також заохочує допомагати один одному вчитися навчаючи. Під час роботи за допомогою методу «Ажурна пилка» учні повинні працювати в різних групах.

Доцільно разом з учнями висунути *гіпотезу*: чи є комбінаторика розділом, який можна побачити у різних аспектах життя?

У випадку застосування інтерактивного прийому «Ажурна пилка» спочатку учні будуть працювати в «домашній» групі; потім в іншій групі учні виступають в ролі «експертів» з питання, над яким працювали в домашній

групі та отримують інформацію від представників інших груп; після прослуханих доповідей вони знову повертаються у свою “домашню” групу для того, щоб поділитися тією новою інформацією, яку їм надали учасники інших груп. В кінці уроку пропонується кожному бажаючому висловити свою думку: що вони дізналися нового, чи було це цікавим та пізнавальним для них, мені стало цікавим, мене надихнуло, що краще змінити.

Нижче наведені приклади доповідей, які можуть підготувати учні.

**Група «Комбінаторика в ієрогліфах та клинописі».** Навички в розгадці складних шифрів допомогли ученим, коли археологи почали відкопувати камені та черепи з таємними знаками – письменністю, що замовкла декілька тисячоліть тому. Одним з найкращих успіхів у розшифровці було читання французьким філологом Жаном Франсуа Шампольним ієрогліфів, якими писали єгиптяни ще до того, як виникла наука у древніх греків. Це було торжеством комбінаторного методу у читанні забутих писемностей, заснованого на спостереженні за текстом, на співставленні повторюванні комбінацій слів та граматичних форм в поєднанні з уявою. Ще тісніше пов'язана з комбінаторикою розшифровка клинописів. Історикам вдалося з'ясувати, що ці надписи було зроблено в епоху Ахеменідів, що правили в Ірані два з половиною тисячоліття тому назад. Були зроблені і припущення про мову надписів.

**Група «Комбінаторика в шифрах та анаграмах».** Не тільки азартні ігри спонукали математиків до комбінаторних роздумів. Ще в кінці XVI ст. розшифровкою переписів між ворогами французького короля Генріха III та іспанцями займався один із творців сучасної алгебри Франсуа Вієт. А в Англії XVII ст. монархічні заколотники дивувались швидкості, з якою Кромвель проникав у їх замисли. Монархісти вважали шифри, якими вони користувались при переписі, нерозшифрованими, і вважали, що ключі до них були видані кимсь з учасників заколоту. І лише після падіння республіки та царювання Карла II вони дізналися, що всі їх шифри розгадував один з найкращих англійських математиків того часу, професор Оксфордського

університету Уолліс, котрий володів винятковими комбінаторними можливостями. Він назвав себе засновником нової науки "криптографії".

Тексти з переставленими літерами називаються анаграми. Проте не завжди анаграми дозволяли зберегти все у таємниці. Коли Гюйгенс відкрив перший супутник Сатурна та визначив його порядок обертання навколо планети, він виклав своє відкриття в анаграмі і відправив її своїм колегам. Проте вже згадуваний вище Уолліс, отримав цю анаграму, розгадав її, після чого склав свою анаграму та відправив її Гюйгенсу. Коли вчені обмінювалися розгадками анаграми, то вийшло так, немов Уолліс ще до Гюйгенса зробив те ж саме відкриття.

**Група «Комбінаторика та азартні ігри».** Поштовх до розвитку комбінаторики дали азартні ігри, які існували ще в глибоку давнину, але отримали особливе розповсюдження після хрестових походів. Найбільшу популярність отримала гра в кості – два чи три кубики з нанесеними на них очками кидали на стіл, і вигравав той, хто отримував більшу кількість очок. Одним з найазартніших гравців в кості у XVII ст. був Шевальє де Марє, котрий без перестану знаходив нові види змагань. Наприклад, він запропонував, що буде кидати чотири кості і буде брати виграш лише у випадку, коли хоча б одна з них відкриється на шести. Проте скоро його партнери відмовились від такої гри – Шевальє частіше вигравав, ніж програвав. Тоді де Марє придумав інший варіант – він кидав декілька раз пару костей і забирав виграш в тому випадку, якщо хоча б раз випадали дві шестірки. Треба було лише визначити, скільки потрібно зробити кидків, щоб гра була йому така ж вигідна, як і перша. Шевальє вирішив, що треба кидати 24 рази. Адже при чотирьох кидках однієї кості шестірка випадала більш ніж у половині випадків, а так як друга кость дає шість варіантів випадання, то й треба помножити 4 на 6. Роздуми здавалися незаперечними, але досвід не підтвердив надій де Марє – тепер він став частіше програвати, ніж вигравати. В повному нерозумінні він звернувся до двох великих математиків Франції

XVII ст. – Блезу Паскалю та П'єру Ферма. Вони сформулювали і довели перші теореми комбінаторики та теорії ймовірностей.

**Група «Комбінаторика в біології».** Складність будови біологічних систем, їх строга ієрархічність, взаємо поєднання окремих процесів в цілому організмі роблять біологію підходящим полем для прикладання комбінаторних методів. Радянський біолог А.А. Любищев припускав навіть, що схожість рослин та морозних візерунків на вікнах не випадково – в обох випадках проявляються певні закони комбінування частин в одне ціле.

Однією з найбільш складних загадок в біології XX ст. була будова "ниток життя" – молекул білка і нуклеїнових кислот. Поєднуючи комбінаторні розгляди з вивченням рентгенівських знімків, вченим вдалося розгадати будову багатьох білків, в тому числі гемоглобіну, інсуліну та ін.

Коли біологи почали вивчати передачу генетичної інформації у бактерій, то помітили, що в процесі цієї передачі хромосоми переходять від однієї бактерії до другої не цілком. Виникла потреба визначити порядок розміщення генів у хромосомі. Французькі вчені Жакоб та Вальмон порівняли карти хромосом та помітили їх комбінаторну схожість.

### **Група «Хімічний пасьянс».**

Небагато знайдеться днів в історії науки, які можна порівняти по своєму значенню з 17 лютим 1869 р. у цей день з хаосу хімічних елементів, кожен з яких мав свої властивості, виникла таблиця – був відкритий періодичний закон. Це відкриття було зроблено Дмитром Івановичем Менделєєвим, професором Петербурзького університету. Готуючи курс лекцій по загальній хімії, він задумався над порядком, в якому потрібно було розповідати про елементи. Розкладаючи свій хімічний пасьянс, великий вчений після напружених роздумів, знайшов правильне розміщення елементів. Не тільки у відкритті періодичної системи елементів виявилась корисною комбінаторика. Як відомо серед обмежених об'єднань зустрічаються і ізомери, тобто об'єднання, котрі мають один і той самий склад, але різну будову.

## Висновки до другого розділу

1. Для розв'язування задач стохастички, опрацювання статистичних вибірок, візуалізації експериментальних випробувань на основі випадкових подій доцільно використовувати системи динамічної математики.

2. Для більшого зацікавлення здобувачів освіти, розвитку їх математичної дослідницької компетентності доцільно пропонувати проводити експерименти, реальні вимірювання та опрацьовувати їх результати з використанням програмних засобів. Засоби цифрових технологій є потужним інструментом для обчислень та аналізу даних, розв'язування складних математичних задач. До функціональності відносимо автоматичне розв'язання математичних задач, побудову графіків, аналіз ймовірнісних розподілів, симуляції та візуалізацію даних.

3. Метод Монте-Карло, що використовується через симуляції за допомогою програмних засобів для розв'язування задач математики, фізики, економіки, оптимізації, теорії управління тощо, є один із ефективних engineering-інструментів, успішне опанування яким сприятиме підготовці вчителів до впровадження STEM-підходів у навчанні природничо-математичних дисциплін. Використання у навчанні теорії ймовірності та математичної статистики методу Монте-Карло позитивно впливає на сприйняття типових задач учнями. Наглядне розв'язання задач є найкращим методом для повного розуміння теми та її опрацювання.

4. Потрібно посилювати прикладну та практичну спрямованість навчання стохастички в курсі вивчення математики. Прикладні та практико-орієнтовані задачі з теорії ймовірностей та математичної статистики сприяють засвоєнню не лише методів прикладної математики, але й методів і принципів опису реальних ситуацій математичною мовою; раціональному добору адекватного математичного апарату для розв'язування задач

5. Доцільна розробка та впровадження навчальних STEM-проектів у навчання теорії ймовірностей та математичної статистики.

## ВИСНОВКИ

Проведене дослідження дає змогу зробити наступні висновки.

1. STEM-компетентності і навички визначають як динамічну систему знань і умінь, навичок і способу мислення, цінностей і особистісних якостей, які визначають здатність до інноваційної діяльності. STEM-компетентності передбачають готовність до розв'язування комплексних задач, розвиток критичного мислення, креативності, організаційних здібностей, емоційного інтелекту, когнітивної гнучкості. Надзвичайно важливими є уміння працювати в команді, оцінювати та приймати рішення, здатність до ефективної взаємодії, уміння приходити до компромісного рішення тощо.

2. Основною метою вивчення ймовірно-статистичної лінії у шкільному курсі є розвиток ймовірної інтуїції учнів, формуванні адекватних уявлень про властивості випадкових явищ, вміння виконувати оцінку шансів, висувати гіпотези і пропозиції, прогнозувати розвиток ситуації, оцінювати можливості підтвердження тієї чи іншої гіпотези. Учень повинен вміти аналізувати ситуації й приймати обґрунтовані рішення.

3. У ході аналізу навчальних програм, підручників, рекомендацій методистів щодо вивчення теми, виявлено, що вивчення теми передбачає велику обчислювальну роботу, що може не викликати зацікавленості в учнів, та відволікти їх від засвоєння основних понять. Використання ІКТ дає змогу полегшити рутинність обчислень, сконцентрував увагу учнів, на поняттях, що вивчаються.

4. Використання сучасних ІКТ у навчальному процес дають можливість надати результатам навчання практичну значимість, застосовність до розв'язування повсякденних життєвих проблем, надають широкі можливості для інтенсифікації та оптимізації навчально-виховного процесу, активізації пізнавальної діяльності. Підвищенню ефективності уроків математики в старших класах можуть сприяти використання програмних засобів GeoGebra, електронних таблиць Ms Office Excel, впровадження проектних технологій



навчання. Програмні засоби GeoGebra, Ms Office Excel, не тільки є засобами візуалізації задачі та її розв'язку, але за їх допомогою створюються обчислювальні експерименти, «інтерактивні» наочності, що застосовуються при формулюванні понять, при перевірці відомих тверджень та більш глибоких досліджень. У ході дослідження розроблені динамічні наочності у GeoGebra та Ms Office Excel та методичні рекомендації щодо їх використання.

5. Вивчення стохастики на профільному рівні з використанням STEM-підходів спрямоване на формування та розвиток математичної компетентності учнів. Завдяки розвитку в учнів STEM-компетентностей можна подолати відставання між освітою і вимогами сучасного життя.

У кваліфікаційній роботі здійснено аналіз стохастичної лінії для STEM-навчання в підручниках для 11 класу; запропоновано окремі засоби цифрових технологій для детального ознайомлення з розділом «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики»; висвітлено окремі питання прикладної спрямованості навчання, використання методу Монте-Карло.

6. Розроблений навчальний проект та рекомендації щодо його впровадження «Передбачувана випадковість» можуть бути використані під час вивчення теми «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики». Робота над проектом залучає учня до процесу вирішення практичних проблем, в основі якого лежить розвиток пізнавальних, творчих навичок учнів, залучення до самостійної роботи, роботи у колективі, здатності орієнтуватися в інформаційному просторі, критично мислити.

У процесі дослідження повністю реалізували усі завдання, які ставилися перед початком роботи та досягли поставленої мети.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. ANNEX to the Proposal for a Council Recommendation on Key Competences for Lifelong Learning. URL: <https://ec.europa.eu/education/sites/education/files/annex-recommendation-keycompetences-lifelong-learning.pdf>.
2. ANNEX to the Proposal for a Council Recommendation on Key Competences for Lifelong Learning. URL: <https://ec.europa.eu/education/sites/education/files/annex-recommendation-keycompetences-lifelong-learning.pdf>.
3. Balyk N., Barna O., Shmyger G., Oleksiuk V. Model of Professional Retraining of Teachers Based on the Development of STEM Competencies. ICT in Education, Research and Industrial Applications. Proc. 14th Int. Conf. ICTERI 2018, (2018). №2. 318–331 [https://ceur-ws.org/Vol2104/paper\\_157.pdf](https://ceur-ws.org/Vol2104/paper_157.pdf)
4. Brilliant: сайт і спільнота, що надає курси і задачі з математики, фізики, числових фінансів, та інформатики. URL : <https://brilliant.org/>
5. Carnevale A. P., Smith N., Melton M. STEM. Executive summary. URL: <https://cew.georgetown.edu/wpcontent/uploads/2014/11/stem-execsum.pdf>
6. Charnes A., Cooper W.W., Symonds G.N. Cost horizons and certainty equivalents: an approach to stochastic programming of heating oil. Management Science.1958. V.4, No3. P.235 –263.
7. Code.org: освітній інструмент, який базується на інформації і спрямований на навчання студентів будь-якого віку кодуванню. URL: <https://code.org>
8. Coursera: американський глобальний постачальник онлайн курсів. URL: <https://www.coursera.org/>
9. Desmos: графічний калькулятор. URL: <https://www.desmos.com/>
10. Google Arts & Culture : мистецька онлайн-платформа Google для смартфонів та планшетів. URL: <https://artsandculture.google.com>

- 11.Khan Academy : некомерційна освітня організація. URL : <https://www.khanacademy.org/>
- 12.Microsoft Math Solver: освітня програма-калькулятор URL: <https://math.microsoft.com/>
- 13.MIT OpenCourseWare : проєкт Массачусетського технологічного інституту з публікації у відкритому доступі матеріалів всіх курсів інституту URL: <https://ocw.mit.edu>
- 14.NASA STEM Engagement : матеріали та ресурси для вчителів та учнів, які бажають навчитися про космос та науку. URL: <https://www.nasa.gov/stem>
- 15.PhET : набір інтерактивних комп'ютерних симуляцій на основі досліджень для викладання та вивчення фізики, хімії, математики та інших наук. URL: <https://phet.colorado.edu/uk/>
- 16.Proskurin Dm., Gnatyuk S., Okhrimenko, T. Predicting Pseudo-Random and Quantum Random Number Sequences using Hybrid Deep Learning Models. Proceedings of the Modern Machine Learning Technologies and Data Science Workshop Lviv, Ukraine, June 3, 2023. 3426 (77-88). URL : <https://ceur-ws.org/Vol-3426/paper7.pdf>
- 17.RobotLAB : американська освітня технологічна компанія, яка виробляє робототехніку та продукти доповненої реальності. URL: <https://engagek12.robotlab.com/>
- 18.Scratch : середовище та інтерпретована динамічна візуальна мова програмування. URL: <https://scratch.mit.edu>
- 19.Spark101 : механізм розподіленої обробки даних загального призначення. URL: <https://www.spark101.org/>
- 20.StemX : STEM-мережа і платформа для обміну, аналізу та розповсюдження інструментів STEM-освіти. URL: <https://www.stemx.us/steam>
- 21.STEM-освіта в громадах: приклад успішного впровадження <https://osvita.ua/school/method/85710/>

22. STEM-освіта в Україні. Перспектива розвитку. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://iac.kz>.
23. UdeMy: освітня онлайн-платформа для навчання та викладання. <https://www.udemy.com/>
24. Vlasenko K., Lovianova I., Armash T., Sitak I., Kovalenko D. A competency-based approach to the systematization of mathematical problems in a specialized school. *Journal of Physics*. 2021. № 1946. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1946/1/012003>
25. Vlasenko K., Sitak I., Chumak O., Kondratyeva O. Review of the Experience with the Implementation of STEM-education Technologies. *Current Issues in Ensuring the Quality of Mathematical Education. SCASPEE*. 2019. 97–110. [https://drive.google.com/file/d/0B0mGM6lS\\_wnKZVpKWFk1LWIKRTdaVndEdFVvLU5SeFRpRWN3/view](https://drive.google.com/file/d/0B0mGM6lS_wnKZVpKWFk1LWIKRTdaVndEdFVvLU5SeFRpRWN3/view)
26. Wolfram Alpha: база знань і набір обчислювальних алгоритмів. URL: <https://www.wolframalpha.com/>
27. Wolfram Demonstrations Project: добірки інтерактивних вправ. URL: <https://demonstrations.wolfram.com/>
28. Андрієвська В. М., Білоусова Л. І. Концепція BYOD як інструмент реалізації STEAM-освіти. *Фізико-математична освіта : науковий журнал*. 2017. Випуск 4 (14). С. 13–17
29. Атаманчук П. С., Форкун Н.В. Впровадження елементів STEM-освіти в освітній процес. *Наукові записки Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка. Серія : Педагогічні науки*. 2019. Вип. 179. С. 15-24.
30. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. *Теорія ймовірностей та математична статистика*. Київ: ЦУЛ, 2019. 424 с.
31. Бевз Г. П. *Методика викладання математики: навч. посіб.* Київ: Вища школа, 1989. 367 с.

32. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Видавничий дім «Освіта», 2019. 272 с.
33. Біляй Ю. П., Іщук А. А. Деякі методи розв'язування задач стохастичного програмування. Науковий часопис Українського державного ун-ту імені Михайла Драгоманова. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. 2019, № 19 (26). С.207–214.
34. Бурда М. І., Васильєва Д. В., Волошена В. В., Глобін О. І. Навчання математики в старшій профільній школі на профільному рівні (методичні рекомендації). URL : <http://lib.iitta.gov.ua/712224/1/Method%20recomend.pdf>
35. Впровадження елементів STEM-освіти у навчання математики та фізики. URL: <https://naurok.com.ua/vprovadzhennya-elementiv-stem-osviti-u-navchannyamatematiki-ta-fiziki-47799.html>
36. Дівчата STEM. URL : <https://divchata-stem.org>
37. Збірник матеріалів «STEM-тиждень – 2021» /уклад. : Патрикєєва О. О., Василяшко І. П., Коваленко М. В., Черноморець В. В. Київ. Видавничий дім «Освіта», 2021. 575 с. URL : [Z\\_STEM-tyzhden2021.pdf](https://yakistosviti.com.ua/Z_STEM-tyzhden2021.pdf) (yakistosviti.com.ua) (дата звернення 19.02.2023 р.).
38. Збірник матеріалів «STEM-школа – 2021» / уклад.: Н. І. Гущина, І. П. Василяшко, О. О. Патрикєєва, О. В. Коршунова, Л. Г. Булавська. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2021. 155 с.
39. Жалдак М. І., Кузьміна Н. М., Михалін Г. О. Теорія ймовірностей і математична статистика: підруч. Видання третє, перероблене і доповнене. Київ. НПУ імені М.П. Драгоманова, 2017. 707 с.
40. Жалдак М. І., Триус Ю. В. Основи теорії і методів оптимізації: навч. посіб. Черкаси: Брама-Україна, 2005. 608 с.
41. Жильцов О. Б., Кулян В. Р., Юнькова О. О. Математичне програмування (з елементами інформаційних технологій): Навч. посіб. для студ. вищ. нав. закл. за ред. О.О.Юнькової. Київ: МАУП, 2006. 184 с

- 42.Істер О., Єргіна О. Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 11-го кл. закл. заг.серед.освіти. Київ : Генеза, 2019. 416 с.
- 43.Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика: Посібник з розв'язуванням задач. Київ: ЦУЛ, 2019. 576 с.
- 44.Концепція реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа» на період до 2029 року. URL: <https://ips.ligazakon.net/document/kr160988?an=13>
- 45.Концепція розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти) до 2027 року : постанова Кабінету Міністрів України від 5 серпня 2020 р. № 960-р. URL : <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-%D1%80#Text> (дата звернення 19.01.2024 р.).
- 46.Корисні ресурси для впровадження STEM-орієнтованого підходу у навчанні. URL : <https://educationpakhomova.blogspot.com/2023/03/stem.html?m=1>
- 47.Крамаренко Т. Г. Використання методу Монте-Карло у навчанні стохастики в контексті підготовки учителів математики до впровадження STEM-освіти. Фізико-математична освіта. 2023. Том 38, №4, С. 42-48.
- 48.Крамаренко Т. Г., Пилипенко О. С. Математика в STEMі: навч.-метод. посіб. Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун т, 2023. 274 с. URL : <http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/7849>
- 49.Крамаренко Т. Г., Корольський В. В., Семеріков С. О. , Шокалюк С. В. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навч. посіб. /наук. ред. М. І. Жалдак. Вид. 2, перероб. і доп. Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун-т, 2019. 444 с. URL : Режим доступу: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/3315>
- 50.Крамаренко Т. Г., Пилипенко О. С. Проблеми підготовки учителя до впровадження елементів STEM-навчання математики. Фізико-математична освіта. 2018. Вип. 4 (18). С. 90–95. URL : <http://fmo->

journal.fizmatsspu.sumy.ua/journals/2018-v4-18/2018\_4-18-Kramarenko\_Pylypenko\_FMO.pdf

51. Кузьменко О. Сутність та напрямки STEM-освіти. Наукові записки, випуск 9, Сер. «Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти». Час. КДПУ, 2017. С. 188–190
52. Кузьміна Н. М. Навчання елементів стохастичного програмування у педагогічному університеті. Науковий часопис Українського державного ун-ту імені Михайла Драгоманова. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання, 2019. №19 (26), С. 44–51.
53. Кушлик-Дивульська О.І., Поліщук Н.В., Орел Б.П., Штабальок П.І. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч. посіб. Київ : НТУУ «КПІ», 2014. 212 с
54. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закл. загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2019. 352 с.
55. Метод Монте-Карло. Матеріал з Вікіпедії – вільної енциклопедії. URL : [https://uk.wikipedia.org/wiki/Метод\\_Монте-Карло](https://uk.wikipedia.org/wiki/Метод_Монте-Карло)
56. Методичні рекомендації щодо впровадження STEM-освіти у загальноосвітніх та позашкільних навчальних закладах України на 2021/2022 навчальний рік (Лист ІМЗО від 11.08.2021 № 22.1/10-1775).
57. Мехед Д. Б., Мехед О. Б. Оцінювання навчальних досягнень студентів в умовах дистанційної освіти. Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Вип. 120. Серія : Педагогічні науки : Збірник. Чернігів : ЧНПУ імені Т. Г. Шевченка, 2014. С. 83 - 86.
58. Мехед О. Б. Створення та функціонування інформаційно-освітнього середовища сучасного закладу вищої освіти як запорука якості освітнього процесу. Ресурсно-орієнтоване навчання в «3D»: доступність, діалог, динаміка : збірник тез доповідей III Міжнародної науково-практичної інтернетконференції (м. Полтава, 22–23 лютого 2023 року). Полтава : ПУЕТ, 2023. С. 1032-1037

59. Морзе Н. В., Нанаєва Т., Омельченко Н. О. STEM в освіті : навч. посіб. Київ, ACCORD GROUP. 2018. 116 с.
60. Навчальна програма з математики для учнів 10 – 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту, профільний рівень. URL : <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programidlya-10-11-klasiiv>
61. Нелін Є. П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Харків : Вид-во «Ранок», 2019. – 304 с.
62. Новохатська О., Штонда О. Реалізація STEM-орієнтованого підходу до вивчення математики у закладах середньої освіти. Інноваційні педагогічні технології в цифровій школі : тез доп. учасників IV Всеукр. (з міжнар. участю) наук.-практ. конф. молод. учених, Харків, 11–12 трав. 2022 р. / Харків. нац. пед. ун-т ім. Г. С. Сковороди. Харків, 2022. С. 207–210.
63. Носко М. О., Мехед О. Б. Впровадження освітніх практик здоров'язбереження при підготовці STEM фахівців . Вісник Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка. Вип. 20 (176). Чернігів : НУЧК, 2023. С. 194-199
64. Пікалова В. Реалізація STEAM-освіти в проєктній діяльності майбутнього вчителя математики. Відкрите освітнє е-середовище сучасного університету. 2020. Вип. 9, С 95–103. URL: <https://doi.org/10.28925/2414-0325.2020.9.8>
65. Пікалова В. В. Використання пакету GeoGebra як інструмента реалізації концепції STEM-освіти у процесі підготовки майбутніх учителів математики. Автореф. дис. канд. пед. наук, Луганський національний університет імені Тараса Шевченка. Репозитарій Луганського національного університету імені Тараса Шевченка. 2021. 20 с. URL : <http://dspace.luguniv.edu.ua/xmlui/handle/123456789/7747>



66. Плоцьки А. Стохастика в математиці «Для всіх»: монографія. Краків: Наукове видавництво Вищого педагогічного училища, 1980. 248 с.
67. Плоцьки А. Стохастичні терміни та ідеї як найважливіші інструменти математики – уроки по вирішенню конкретних завдань Дидактика математики. Білефельд: Університет Білефельд WS 88/89. 1990. С. 93–104.
68. Подлєсний С. В., Тарасов О. Ф. Актуальність використання STEM-STEAM-STREAM-технологій в сфері інженерно-технічної освіти для сталого розвитку економіки України. Вісник ВП, Вінниця, 2019. Вип. 2. С. 123–131.
69. Поліхун Н. І., Постова К. Г., Сліпухіна І. А., Онопченко Г. В., Онопченко О. В. Упровадження STEM-освіти в умовах інтеграції формальної і неформальної освіти обдарованих учнів: методичні рекомендації. Київ : Інститут обдарованої дитини НАПН України, 2019. 80 с.
70. Про найкращий гендерночутливий урок. Інновації в STEM-освіті. URL : <https://stem-lessons.info>
71. Розробки STEM-занять українськими педагогами. URL : <https://stem-lessons.info/krashhi-stem-uroki/>
72. Семеніхіна О. В. Розв'язування задач методом Монте-Карло у спеціалізованому пакеті MAPLE. *Педагогічні науки*, 2008. №3. С. 406-412. URL : [https://repository.sspu.edu.ua/bitstream/123456789/7855/1/Semenikhina\\_O\\_V.pdf](https://repository.sspu.edu.ua/bitstream/123456789/7855/1/Semenikhina_O_V.pdf)
73. Семеніхіна О. В., Друшляк М. Г. Розв'язування задач шкільного курсу статистики у середовищах Gran1 і GeoGebra: порівняльний аналіз. *Фізико-математична освіта*. 2015. №1 (4), С. 21-30. URL : <http://repository.sspu.edu.ua/handle/123456789/6169>
74. Фонарюк О.В. STEM-орієнтований підхід до навчання математики. *Педагогічні науки: теорія та практика*, 1(3), 2021. 154-160 с.

- 75.Хоминська О., Друшляк М., Удовиченко О. Підтримка вивчення стохастичної лінії в школі засобами динамічної математики. Освіта. Інноватика. Практика. 2022. 10(3), С.59–68. URL : <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol10i3-007>
- 76.Шленк В. Теорія ймовірностей для ліцеїв та технікумів. Варшава: Шкільне та педагогічне видавництво, 1999. 151 с.
- 77.Шулікін Д. STEM-освіта: готувати до інновацій. Матеріали Всеукраїнського круглого столу «STEM-освіта в Україні: від дошкільника до компетентного випускника». Освіта України. 2015. № 26–29 червня. С. 8–9.