Міністерство освіти і науки України

КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет фізико математичний факультет

Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»

Завідувач кафедри

_________ Д. Є. Бобилєв

Реєстраційний No _______

«___» _____________ 20___ р. «___» _____________ 20___ р.

Методика вивчення числа *π* в курсі «Математичний аналіз»

Кваліфікаційна робота студента групи МІм-23

ступінь вищої освіти «магістр»

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика), додаткова спеціальність 014.09 Середня освіта (Інформатика)

Кушпетюка Євгенія Олександровича

Керівник кандидат технічних наук, професор

Корольский Володимир Вікторович

Оцінка:

Національна шкала __________________

Шкала ECTS _____ Кількість балів _____

Голова ЕК _________ ________________

(підпис) (прізвище, ініціали)

Члени ЕК _________ ________________

(підпис) (прізвище, ініціали)

_________ ________________

(підпис) (прізвище, ініціали)

_________ ________________

(підпис) (прізвище, ініціали)

_________ ________________

(підпис) (прізвище, ініціали)

Кривий Ріг – 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження.

Число π є фундаментальною математичною константою, яка зустрічається у багатьох розділах математики, зокрема в геометрії, тригонометрії, математичному аналізі та теорії чисел. Її значення важко переоцінити, адже π з'являється в формулах, що описують кола, сфери, циліндри та інші геометричні фігури, а також у рівняннях, що моделюють фізичні явища, такі як коливання і хвильові процеси. Вивчення числа π у курсі математичного аналізу є надзвичайно суттєвим, оскільки дозволяє студентам зрозуміти глибокі зв'язки між різними математичними поняттями і формулами, а також оволодіти методами точних обчислень, які є необхідними для подальшого розвитку математичних та технічних дисциплін.

Методика вивчення числа π в курсі математичного аналізу має велике значення для розвитку аналітичних навичок у студентів. Вона включає в себе як історичні аспекти розвитку методів обчислення π, так і сучасні алгоритми, що використовуються для досягнення високої точності. Знання історичного контексту дозволяє студентам зрозуміти, як розвивалися математичні ідеї та інструменти, а також оцінити значущість внеску видатних математиків минулого. Водночас, опанування сучасними методами обчислення π є необхідним для підготовки до роботи з сучасними обчислювальними технологіями і програмними засобами.

Крім того, методика вивчення числа π в курсі математичного аналізу має практичне значення. Знання методів обчислення π необхідне для виконання різних інженерних та наукових розрахунків, що включають обчислення площі, об'єму та поверхні геометричних фігур, аналіз фізичних процесів, що моделюються рівняннями з використанням π. У комп'ютерній графіці та моделюванні також необхідно вміти точно обчислювати π для рендерингу та симуляції об'єктів і процесів. Тому вивчення π в курсі математичного аналізу забезпечує студентам необхідні навички для їх майбутньої професійної діяльності.

Водночас, вивчення числа π в математичному аналізі потребує удосконалення методики з урахуванням нових обчислювальних можливостей. Розробка сучасних методів обчислення та аналіз їх точності дасть змогу ефективніше опанувати цю важливу концепцію.

Об'єкт та предмет дослідження.

Об'єктом дослідження є процес обчислення числа π і його застосування в різних наукових і технічних галузях.

Предметом дослідження є методи обчислення числа π.

Мета та завдання дослідження.

Метою дослідження є систематизація знань про методи обчислення числа π, аналіз їх ефективності та точності, а також розробка нових підходів до обчислення π за допомогою геометричних фігур. Для досягнення цієї мети необхідно вивчити історичний розвиток методів обчислення π, порівняти різні підходи, визначити їх переваги і недоліки, а також запропонувати нові методи, які базуються на використанні вписаних багатокутників у коло.

Завданнями дослідження є:

1. Провести історичний аналіз методів обчислення числа π, вивчаючи підходи давніх цивілізацій, середньовічних та епохи Відродження математиків, а також сучасні методи.
2. Проаналізувати класичні методи обчислення числа π, такі як метод Архімеда, ряд Лейбніца, ряд Ейлера, метод Валліса та інші, визначивши їх точність і ефективність.
3. Порівняти різні методи обчислення числа π, визначивши їх переваги і недоліки, а також умови, за яких вони найбільш ефективні.
4. Розробити нові методи обчислення числа π, засновані на використанні геометричних фігур, таких як квадрат з параметрами a=1 і коло з радіусом R=1, та вписаних багатокутників.
5. Розглянути практичні застосування методів обчислення числа π в інженерних розрахунках, комп'ютерній графіці та обчислювальній математиці.

РОЗДІЛ І. ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ЧИСЛА «π»

1.1 Методи обчислення числа «π» в античні часи.

Число «π» - це математична константа, яка представляє відношення довжини кола до його діаметра. Воно має невловиму кількість десяткових знаків і є одним з найважливіших чисел у математиці.

В античні часи багато великих цивілізацій, таких як стародавні греки, єгиптяни і вавилонці, вивчали природу та розвивали математику. Вони також почали цікавитися числом «π» і спробували знайти способи для його обчислення. Однак, їхні методи обчислення були досить примітивними порівняно з сучасними алгоритмами. Їх можна поділити на п’ять основних етапи:

1) З найбільш ранніх та відомих методів обчислення числа «π», запропонованих Архімедом

Архімед з Сиракуз, видатний давньогрецький вчений та математик III століття до н.е., зробив вагомий внесок у розвиток математики, зокрема у сфері обчислення числа «π». Його метод, заснований на геометричних побудовах вписаних і описаних правильних багатокутників, став одним з перших і найточніших способів наближення значення цієї математичної константи.

Архімед зрозумів, що коло можна наближено представити у вигляді правильних багатокутників з великою кількістю сторін. Він виявив, що чим більше сторін у багатокутника, тим точніше він наближається до кола. Ця ідея стала основою для його методу обчислення числа «π». Архімед використовував послідовні вписані і описані правильні багатокутники, починаючи від шести- та дванадцятикутників і поступово збільшуючи кількість сторін до 96-кутника. Цей підхід дозволяв отримувати все точніші значення числа «π» з кожним кроком.

Процес обчислення, запропонований Архімедом, полягав у розрахунку периметрів вписаних і описаних багатокутників. Для цього він використовував геометричні теореми та інші математичні принципи. Наприклад, він розраховував довжини сторін багатокутників за допомогою тригонометричних функцій та алгебраїчних обчислень, що дозволяло точно визначати периметри багатокутників. Ці периметри потім використовувалися для обчислення наближеного значення довжини кола, яке, у свою чергу, дозволяло визначати число «π».

Архімед виявив, що периметр вписаного багатокутника завжди буде меншим за довжину кола, а периметр описаного багатокутника – більшим. Використовуючи ці співвідношення, він зміг встановити межі, в яких знаходиться значення числа «π». Зокрема, він довів, що значення числа «π» міститься в діапазоні між 3 10/71 та 3 1/7. На той час це було найточніше наближення числа «π», оскільки використовувався порівняно простий метод, заснований на геометричних фігурах та обчисленнях.

Метод Архімеда був значним кроком уперед у математичній науці. Він продемонстрував, що геометричні побудови можуть бути ефективним інструментом для точного наближення складних математичних констант. Цей підхід не лише дозволив досягти високої точності у визначенні числа «π», але й став основою для подальших досліджень у цій галузі. Використання вписаних і описаних багатокутників стало стандартним методом наближеного обчислення числа «π», який використовувався багатьма майбутніми математиками.

Архімедові дослідження у сфері обчислення числа «π» мали дуже актуальне значення для розвитку геометрії. Використання вписаних і описаних багатокутників дозволило більш точно визначати площі та периметри складних фігур. Це стало основою для розвитку багатьох інших галузей математики, зокрема аналітичної геометрії та тригонометрії.

Метод Архімеда також став натхненням для багатьох наступних математиків. Наприклад, індійський математик Арія Бхата у V столітті нашої ери розробив метод обчислення числа «π» за допомогою математичних рядів, який був вдосконаленням підходу Архімеда. Його метод дозволяв досягати ще більшої точності у визначенні числа «π», використовуючи нескінченні ряди та математичні обчислення.

У свою чергу, китайські математики Лю Хуей і Цзу Чунчжи також використовували підхід Архімеда для обчислення числа «π». Лю Хуей у III столітті н.е. запропонував метод обчислення числа «π», використовуючи правильний 3072-кутник, вписаний у коло. Він обчислив периметр цього багатокутника і отримав значення «π» рівне 3.141024, що було точним до п'яти десяткових знаків. Цзу Чунчжи у V столітті н.е. розглядав вписані і описані багатокутники з 24576 сторонами і обчислив значення «π» рівне 3.1415926, що було точним до семи десяткових знаків.

Зараз важливість методу Архімеда не можна переоцінити. Він став основою для багатьох наступних досліджень і розробок у сфері математики і фізики. Використання простих геометричних принципів для вирішення складних математичних задач стало натхненням для багатьох майбутніх поколінь математиків. Цей метод дозволив досягти високої точності у визначенні числа «π», що стало основою для багатьох наступних досліджень у цій галузі.

Наприклад, значення методу Архімеда полягає не лише у його практичній користі, але й у його впливі на розвиток математичної думки. Він показав, що складні математичні задачі можуть бути вирішені за допомогою простих, але ефективних методів. Це відкриття стало основоположним кроком у розвитку математики і науки загалом.

2) Інший підхід до обчислення числа «π» запропонував Арія Бхата.

Арія Бхата, видатний індійський математик і астроном V століття нашої ери, запропонував значно вдосконалений метод обчислення числа «π», що суттєво відрізнявся від підходів його попередників. До цього часу математичні підходи до обчислення числа «π» здебільшого ґрунтувалися на геометричних методах, таких як метод багатокутників, запропонований Архімедом, який вже був розглянутий.

Арія Бхата запропонував новаторський підхід, який полягав у використанні математичних рядів для обчислення числа «π». Він ввів поняття нескінченного ряду і показав, як його можна використовувати для отримання наближених значень цієї константи. Зокрема, він розглянув ряд для арктангенса, що дозволяло шляхом підстановки та послідовних обчислень отримувати наближене значення числа «π». Це був суттєвий крок уперед порівняно з геометричними прийомами Архімеда, оскільки використання математичних рядів давало можливість досягати вищої точності обчислень із меншими зусиллями.

Арія розрахував перші чотири члени ряду для арктангенса і за їх допомогою отримав значення «π» рівне 3.141592. Це була надзвичайно висока для свого часу точність – шість правильних цифр. Його підхід дозволяв з кожною наступною ітерацією покращувати точність обчислень, оскільки метод Бхати ґрунтувався на математичному апараті, який він сам і впровадив. Це робило його особливо цінним у порівнянні з попередніми методами, оскільки дозволяло досягати точності, недосяжної для методів, що базувалися лише на геометричних підходах.

Актуальність та суттєвість внеску Арія Бхати полягає не тільки в точності, яку він досяг, але й у тому, що він впровадив нову математичну техніку, яка значно розширила можливості обчислень. Використання рядів для арктангенса стало стандартним підходом для обчислення числа «π» протягом багатьох століть. Навіть після того, як з'явилися більш ефективні алгоритми з розвитком сучасних комп'ютерів, метод Арія Бхати продовжував залишатися основним етапом в історії математики, демонструючи еволюцію математичних методів і розвиток теорії чисел.

Арія Бхата не просто запропонував новий метод обчислення, але й продемонстрував, як теоретичні розробки можуть застосовуватися для вирішення практичних завдань. Його робота стала прикладом того, як математичні дослідження можуть приводити до значних практичних результатів. Використання нескінченних рядів і розвиток теорії арктангенса стало основою для подальших математичних досліджень і відкриттів.

Метод Арія Бхати не лише підвищив точність обчислень числа «π», але й відкрив нові можливості для дослідження інших математичних проблем. Використання нескінченних рядів стало основоположним інструментом у розвитку аналізу і теорії функцій, що дозволило математикам досягати нових висот у своїх дослідженнях. Впровадження цього методу також сприяло розвитку обчислювальної математики, оскільки вимагало розробки нових технік для обробки великих обсягів даних і проведення складних обчислень.

3) Метод Лю Сюя у III столітті н.е.

У III столітті н.е. китайський математик Лю Хуей запропонував ще один підхід для обчислення числа «π», відмінний від методів Архімеда та Арія Бхати. Його метод базувався на використанні многокутників для наближення до кола. Лю Хуей застосовував вписані і описані многокутники, подібно до методу Архімеда, але він удосконалив цей підхід, значно збільшуючи кількість сторін многокутників і застосовуючи більш точні обчислення.

Лю Хуей почав з шестикутника, як і Архімед, і поступово збільшував кількість сторін вписаного многокутника, щоб наблизити його форму до кола. Він використовував математичні формули для обчислення довжин сторін многокутників і їхніх периметрів, що дозволяло отримувати більш точні значення числа «π». Наприклад, для 96-стороннього многокутника він отримав значення «π» рівне 3.14159, що було надзвичайно точним для того часу.

Одним з головних удосконалень методу Лю Хуея було застосування принципу подвоєння кількості сторін многокутника на кожному кроці обчислень. Це дозволяло швидше збільшувати точність наближення до числа «π». На відміну від попередніх підходів, метод Лю Хуея був більш систематичним і послідовним, що давало змогу отримувати точні результати з меншими обчислювальними зусиллями.

Лю Хуей також зробив вагомий внесок у розвиток теоретичних основ свого методу. Він розробив математичні формули і правила, які дозволяли обчислювати периметри вписаних і описаних многокутників з високою точністю. Його робота стала вагомим етапом у розвитку китайської математики і вплинула на подальші дослідження в цій галузі.

Крім того, Лю Хуей активно використовував свій метод у астрономії та геодезії. Він застосовував свої обчислення для визначення розмірів і відстаней до небесних тіл, а також для картографування і вимірювання земельних ділянок. Його метод обчислення числа «π» став стандартом у китайській математиці на багато століть і залишався одним з найточніших до появи сучасних обчислювальних методів.

Треба зазначити, що метод Лю Хуея був значно точнішим і ефективнішим порівняно з попередніми підходами. Використання многокутників дозволяло досягати високої точності обчислень без потреби в складних математичних рядів чи важких обчислювальних технік. Це робило його підхід особливо цінним для тогочасних математиків і вчених, які не мали доступу до сучасних технологій і інструментів.

4) Метод Цзу Чунчжи у V столітті н.е. У V столітті н.е..

У V столітті н.е. китайський математик Цзу Чунчжи досяг нових висот у обчисленні числа «π», використовуючи методи, що значно перевершували попередні. Його підхід був базований на удосконаленні геометричних методів і застосуванні більш точних обчислень для визначення значення «π». Цзу Чунчжи є одним із найвидатніших математиків стародавнього Китаю, і його внесок у розвиток математичної науки, зокрема в обчислення числа «π», є надзвичайно значним.

Метод Цзу Чунчжи для обчислення числа «π» ґрунтувався на розширенні і вдосконаленні методів, запропонованих його попередниками, такими як Лю Хуей. Він використовував многокутники для наближення до кола, але з набагато більшою кількістю сторін. Цзу Чунчжи застосовував метод вписаних і описаних многокутників, доводячи кількість сторін до 24 576. Завдяки цьому він отримав значення «π», яке було надзвичайно точним для того часу.

Цзу Чунчжи разом зі своїм батьком, Цзу Геном, працювали над обчисленням числа «π» протягом багатьох років. Вони використовували надзвичайно точні обчислення, щоб визначити межі, в яких знаходилося число «π». Вони обчислили, що «π» лежить між 3.1415926 і 3.1415927. Це було найбільш точне значення числа «π», відоме до появи сучасних методів обчислень і комп'ютерів. Треба зазначити, що таке точне значення залишалося неперевершеним протягом майже тисячі років.

Для досягнення такого високого рівня точності Цзу Чунчжи і його батько використовували метод багатокутників з надзвичайно великою кількістю сторін. Вони починали з шестикутника і поступово збільшували кількість сторін, подвоюючи їх на кожному кроці. Цей процес дозволяв наблизити форму багатокутника до кола з дуже високою точністю. Вони також використовували точні математичні формули для обчислення довжин сторін і периметрів багатокутників, що було ключовим для досягнення такої точності.

Цзу Чунчжи також зробив внесок у розвиток теоретичних основ свого методу. Він розробив математичні формули і правила, які дозволяли обчислювати периметри вписаних і описаних багатокутників з високою точністю. Його робота стала первинним етапом у розвитку китайської математики і вплинула на подальші дослідження в цій галузі. Але треба зазначити, що Цзу Чунчжи не просто застосовував відомі методи, але й активно розвивав нові теоретичні підходи, що дозволяло досягати вищої точності обчислень.

Крім того, Цзу активно використовував свій метод у астрономії та геодезії. Він застосовував свої обчислення для визначення розмірів і відстаней до небесних тіл, а також для картографування і вимірювання земельних ділянок. Його метод обчислення числа «π» став стандартом у китайській математиці на багато століть і залишався одним з найточніших до появи сучасних обчислювальних методів.

Автор методу також розробив спеціальний алгоритм для обчислення числа «π», який був більш ефективним і швидким порівняно з попередніми методами. Його алгоритм базувався на розкладі числа «π» на нескінченний ряд, що дозволяло отримувати більш точні результати з меншою кількістю обчислень. Це був суттєвий крок уперед у розвитку математичних методів і технік.

5) Метод Брахмагупти у VII столітті н.е. У VII столітті н.е..

У VII столітті н.е. індійський математик Брахмагупта зробив невеликий внесок у розвиток методів обчислення числа «π», продовжуючи традиції своїх попередників, таких як Арія Бхата. Його підхід був заснований на використанні геометричних і алгебраїчних методів, що дозволяло досягати високої точності в обчисленнях. Брахмагупта відомий своїми досягненнями в багатьох галузях математики, включаючи теорію чисел, алгебру, геометрію та тригонометрію, і його робота з обчислення числа «π» є одним із основних аспектів його спадщини.

Брахмагупта використовував методи, схожі на ті, що були розроблені Арією Бхатою, але він також зробив кілька важливих удосконалень. Зокрема, він працював над розвитком тригонометричних функцій і їх застосуванням до обчислення числа «π». У своїх роботах він детально описав, як можна використовувати синуси і косинуси для обчислення довжин дуг і кутів у колі, що дозволяло отримувати більш точні наближення числа «π».

Одним з головних досягнень Брахмагупти було введення нових формул для обчислення площі кола і об'єму кулі. Він розробив формулу для площі кола, яка базувалася на значенні радіуса, і використовував її для обчислення числа «π». Ця формула дозволяла отримувати точні результати і стала основою для подальших досліджень у цій галузі. Брахмагупта також працював над удосконаленням методів обчислення площі багатокутників, що дозволяло йому більш точно визначати значення «π» шляхом вписування і описування багатокутників у коло.

Ще одним фактором роботи Брахмагупти було його прагнення до високої точності в обчисленнях. Він використовував різні методи для перевірки і підтвердження своїх результатів, включаючи порівняння отриманих значень з відомими результатами інших математиків. Це дозволяло йому досягати високої точності і надійності в своїх обчисленнях. Брахмагупта також зробив значний внесок у розвиток теорії нескінченних рядів, які використовувалися для наближення значення числа «π».

Брахмагупта отримав значення «π» рівне приблизно 3.1622. Це значення було менш точним порівняно з результатами, отриманими Цзу Чунчжи у V столітті, але все ж було важливим кроком уперед у розвитку методів обчислення числа «π». Його робота сприяла розвитку більш точних методів обчислень і заклала основу для подальших досліджень у цій галузі. Брахмагупта продовжив розвиток індійської математики і зробив значний внесок у її еволюцію, що дозволило досягати нових висот у наукових дослідженнях і технічних досягненнях. [2]

З початку нової ери до кінця XIX століття численні математичні дослідники зробили значні внески у методи обчислення числа «π». Розвиток цих методів демонструє не тільки зростання математичних знань, але й поступову еволюцію математичних інструментів та підходів до вирішення складних задач.

Одним з перших значущих методів обчислення числа «π» у новій ері був метод, запропонований китайським математиком Лю Сюем у III столітті нашої ери. Лю Сюй розробив метод обчислення числа «π», використовуючи правильні багатокутники. Він розглядав правильний 3072-кутник, вписаний у коло, і обчислював його периметр для знаходження наближеного значення числа «π». Цей метод дозволив отримати значення «π», точне до п'яти десяткових знаків (3.141024), що було значним досягненням для того часу.

У V столітті н.е. китайський математик Цзу Чунчжи запропонував ще один метод обчислення числа «π», який також базувався на використанні багатокутників. Його підхід відрізнявся від методу Лю Сюя тим, що він використовував правильні багатокутники з набагато більшою кількістю сторін. Цзу Чунчжи розглядав вписані та описані многокутники з 24576 сторонами, що дозволило йому отримати значення «π», точне до семи десяткових знаків (3.1415926). Це було надзвичайно точне значення для того часу і свідчило про значний прогрес у розвитку математичних методів. [13]

Інший важливий внесок у розвиток методів обчислення числа «π» був зроблений індійським математиком Брахмагуптою у VII столітті нашої ери. Його підхід ґрунтувався на використанні нескінченних рядів. Брахмагупта використовував ряд, відомий зараз як ряд Брахмагупти-Лейбніца, який представляв число «π» у вигляді нескінченного ряду дробів. Використовуючи цей ряд, Брахмагупта зміг обчислити значення «π» з точністю до чотирьох десяткових знаків (3.1416).

Протягом Середньовіччя та Ренесансу інтерес до числа «π» не згасав. Математики шукали нові способи обчислення числа «π» і розробляли нові методи. Наприклад, у 1596 році французький математик Франсуа Вієт розробив свій метод, відомий як ряд Вієта. Цей метод полягав у використанні нескінченного ряду, який наближає значення числа «π». Використовуючи цей ряд, Вієт зміг обчислити значення «π» з точністю до дев'яти десяткових знаків.

У XVII столітті англійський математик Джон Валліс запропонував новий метод обчислення числа «π», який став відомий як ряд Валліса. Цей метод базувався на використанні нескінченного добутку дробів і дозволив отримати значення «π» з високою точністю. Ряд Валліса був значним кроком уперед у розвитку методів обчислення числа «π» і показав, що існують ефективні способи для отримання точних значень цього числа.

У XVIII столітті видатний математик Леонард Ейлер зробив значний внесок у розвиток методів обчислення числа «π». Ейлер розробив кілька різних підходів, серед яких були ряди Ейлера та еліптичні інтеграли. Один із рядів Ейлера для обчислення числа «π» базувався на використанні нескінченних сум дробів. Використовуючи цей ряд, Ейлер зміг обчислити значення «π» з високою точністю.

У XIX столітті розвиток методів обчислення числа «π» продовжився завдяки роботам таких математиків, як Джон Ньюман та Джеймс Грегорі. Ньюман розробив метод, відомий як ряд Ньюмана, який базувався на використанні степеневих рядів для обчислення значення числа «π». Грегорі, у свою чергу, запропонував метод, відомий як ряд Грегорі, який також використовував степеневі ряди для обчислення числа «π». Ці методи дозволили отримати значення «π» з ще більшою точністю, що свідчило про постійний прогрес у розвитку математичних методів.

У той же час англійський математик Вільям Ругін розробив ще один метод обчислення числа «π», який базувався на використанні геометричних побудов. Його підхід полягав у використанні многокутників для наближення значення числа «π». Ругін обчислював периметри вписаних і описаних многокутників і використовував ці значення для знаходження точного значення числа «π». Завдяки цьому методу він зміг отримати значення «π», точне до сотень десяткових знаків, що стало значним досягненням для того часу. [17]

Внесок цих математиків у розвиток методів обчислення числа «π» показує, як зростала точність та ефективність математичних методів протягом століть. Від використання простих геометричних побудов у античні часи до складних нескінченних рядів та геометричних побудов у новій ері, розвиток методів обчислення числа «π» демонструє еволюцію математичних знань і інструментів. Це також свідчить про постійний інтерес до числа «π» і його важливість для математичних досліджень та наукових досягнень.

1.2 Методи обчислення числа «π» в сучасні часи з використанням комп'ютерних технологій

Істинним проривом у обчисленні числа «π» став появиляться калькуляторів та комп'ютерів у 20 столітті. Завдяки цим технологічним досягненням вдалося обчислити значення «π» з великою точністю, наближаючи його до мільйонів десяткових знаків. Сучасні методи обчислення числа «π» базуються на складних алгоритмах, таких як метод Монте-Карло, метод Борвіна, метод Бейлі-Борвіна-Плаффа та інші. Ці методи використовують випадковість та статистичні методи для наближення значення «π». [19]

Наприклад, метод Монте-Карло використовує генерацію випадкових точок всередині квадрата, який описує коло, і обчислює відношення кількості точок всередині кола до загальної кількості точок. Чим більше точок використовується, тим більш точне наближення «π» можна отримати. Цей метод є наочним і зрозумілим, але для отримання дуже високої точності потрібно генерувати величезну кількість випадкових точок, що вимагає значних обчислювальних ресурсів.

Розглянемо також всі методи, та додамо опис переваг та недоліків:

Табл 1.1 - Сучасні методи обчислення числа «π»

Метод	Опис	Переваги	Недоліки

Метод Монте-Карло	Генерує випадкові точки в квадраті, що охоплює коло, і обчислює відношення точок всередині кола до загальної кількості	Наочний і зрозумілий, можна легко паралелізувати	Повільний для отримання високої точності, потребує великих обчислювальних ресурсів
Метод Борвіна	Використовує ряд Борвіна для обчислення «π» за допомогою модульної арифметики	Дуже швидкий і ефективний для обчислення мільярдів десяткових знаків	Складний для розуміння і реалізації, не підходить для паралелізації
Метод Бейлі-Борвіна-Плаффа	Поєднує переваги методу Борвіна з можливістю паралелізації	Швидкий і ефективний, можна паралелізувати	Складний для розуміння і реалізації
Метод Нілаканта	Розширення ряду Грегорі-Лейбніца для кращої збіжності	Простіший у розумінні, швидше сходиться ніж ряд Грегорі-Лейбніца	Повільний для отримання високої точності
Метод Мадхава-Лейбніца	Використовує нескінченний ряд для обчислення «π»	Простий у реалізації, підходить для навчальних цілей	Повільна збіжність, потребує багато ітерацій
Метод Гаусса-Лежандра	Алгоритм, що використовує еліптичні інтеграли	Дуже швидкий і ефективний для обчислення	Складний у реалізації, потребує глибоких математичних знань

	для швидкого обчислення «π»	великої кількості знаків «π»	
Метод Чудновських	Використовує швидкозбіжні ряди для обчислення «π»	Дуже швидкий, підходить для обчислення мільярдів знаків	Складний у реалізації, потребує глибоких знань у теорії чисел
Метод Рамануджана	Використовує серії Рамануджана для обчислення «π»	Дуже швидкий і ефективний, відмінна збіжність	Складний у розумінні і реалізації, потребує глибоких математичних знань

До того ж, сучасні комп'ютерні програми, такі як y-cruncher, дозволяють обчислити значення «π» з вражаючою точністю. Наприклад:

- У 2019 році команда дослідників використала програму y-cruncher для обчислення «π» з точністю до 31,4 трильйонів десяткових знаків, що стало найточнішим обчисленням «π» до цього часу;
- У 2022 році гугловий штучний інтелект обчислив перші 100 трильйонів цифр числа «π» менш ніж за 1 годину.

Незважаючи на ці досягнення, число «π» залишається загадкою для математиків. Його безкінечна кількість десяткових знаків, які не демонструють жодного передбачуваного зразка, викликає питання про його природу та властивості – «Чи є ці десяткові знаки дійсно випадковими, чи існує якийсь прихований порядок, який люди ще не можуть розгадати?»

Крім того, число «π» має зв'язок з багатьма іншими галузями математики, такими як теорія чисел, геометрія та аналіз. Воно з'являється в різноманітних формулах і рівняннях, що описують фізичні явища, від руху планет до коливань струн, що робить число «π» не просто цікавою математичною константою, а основоположним елементом у розумінні Всесвіту. [17, 20]

Висновки до розділу I

Дослідження історичних методів обчислення числа «π» показує, як математичні знання та інструменти еволюціонували протягом століть. Починаючи з античних часів, вчені різних культур розробляли інноваційні підходи до визначення цієї фундаментальної константи, відображаючи їхні наукові досягнення та математичну інтуїцію.

Архімед з Сиракуз став одним з перших, хто запропонував метод обчислення числа «π», який базувався на геометричних побудовах правильних багатокутників. Його підхід використовував послідовні вписані та описані правильні багатокутники, дозволяючи досягти високої точності на той час. Архімедові методи стали основою для подальших досліджень і підходів, що використовувалися упродовж багатьох століть.

Великий внесок у розвиток методів обчислення числа «π» зробив індійський математик Арія Бхата. Він запропонував використання математичних рядів, зокрема рядів арктангенса, що дозволило досягти більшої точності у визначенні числа «π». Арія Бхата відкрив нові горизонти для математичних досліджень, впровадивши методи, які стали стандартом для обчислень на багато століть вперед.

Китайський математик Лю Хуей удосконалив методи Архімеда, збільшуючи кількість сторін многокутників і застосовуючи більш точні обчислення. Його робота показала, що з підвищенням точності обчислень можна досягти ще більш точного наближення числа «π». Цей підхід, який також використовувався для астрономічних і геодезичних обчислень, став важливим кроком у розвитку китайської математики.

Цзу Чунчжи, також з Китаю, досяг ще більшої точності у визначенні числа «π» завдяки використанню многокутників з надзвичайно великою кількістю сторін. Його робота показала, що межі значення числа «π» можуть бути визначені з високою точністю, що стало значним досягненням для математики того часу. Цзу Чунчжи і його батько розробили методи, які залишалися неперевершеними протягом багатьох століть.

Індійський математик Брахмагупта продовжив розвиток методів обчислення числа «π», впроваджуючи нові геометричні та алгебраїчні підходи. Він розробив формули для площі кола і об'єму кулі, що дозволило досягати точніших результатів. Брахмагупта також зробив значний внесок у розвиток теорії нескінченних рядів, що стало основою для подальших досліджень у цій галузі.

З початку нової ери до кінця XIX століття, численні математичні дослідники продовжували вдосконалювати методи обчислення числа «π». Франсуа Вієт, Джон Валліс, Леонард Ейлер та інші математики розробили нові ряди і алгоритми, які дозволили досягти ще більшої точності у визначенні цієї константи. Вони використали нескінченні ряди та інші математичні інструменти, що свідчить про значний прогрес у розвитку математичних знань.

У XVIII і XIX століттях, розвиток методів обчислення числа «π» продовжився завдяки роботам таких видатних математиків, як Джон Ньюман, Джеймс Грегорі, та Вільям Руґін. Вони використовували нові підходи, такі як степеневі ряди та геометричні побудови, що дозволило досягти високої точності обчислень. Ці досягнення показують постійний прогрес у розвитку математичних методів і інструментів.

Поява комп'ютерів у XX столітті стала справжнім проривом у обчисленні числа «π». Сучасні методи, такі як метод Монте-Карло, метод Борвіна, та метод Бейлі-Борвіна-Плаффа, дозволили обчислювати значення числа «π» з вражаючою точністю, наближаючи його до мільярдів і навіть трильйонів десяткових знаків. Використання випадковості та статистичних методів у цих алгоритмах показує, як сучасні технології можуть значно підвищити точність математичних обчислень.

Сучасні комп'ютерні програми, такі як y-cruncher, дозволяють обчислити значення числа «π» з неймовірною точністю. Наприклад, у 2019 році дослідники обчислили значення «π» з точністю до 31,4 трильйонів десяткових знаків, що стало новим рекордом. Такі досягнення показують, наскільки далеко просунулася математика і комп'ютерні науки у визначенні цієї фундаментальної константи.

Незважаючи на ці досягнення, число «π» залишається загадкою для математиків. Його безкінечна кількість десяткових знаків, які не демонструють жодного передбачуваного зразка, викликає питання про його природу та властивості. Це питання є важливим для подальших досліджень у математиці і може призвести до нових відкриттів у майбутньому.

Число «π» має зв'язок з багатьма іншими галузями математики, такими як теорія чисел, геометрія та аналіз. Воно з'являється в різноманітних формулах і рівняннях, що описують фізичні явища, від руху планет до коливань струн. Це робить число «π» не просто цікавою математичною константою, а основоположним елементом у розумінні Всесвіту.

Історія методів обчислення числа «π» демонструє еволюцію математичних знань і інструментів. Від використання простих геометричних побудов у античні часи до складних алгоритмів і комп'ютерних програм у сучасному світі, розвиток методів обчислення числа «π» відображає прогрес людства у розумінні математичних принципів і законів природи. Це свідчить про безперервний інтерес до числа «π» і його важливість для наукових досліджень і технічних досягнень.

Усі ці досягнення показують, наскільки головним є число «π» для математики і науки в цілому. Воно служить фундаментом для багатьох математичних теорій і застосувань, і його дослідження продовжується до сьогодні. Вивчення числа «π» відкриває нові можливості для наукових досліджень і технічних інновацій, що робить його однією з найцікавіших і найважливіших констант у математиці.

II РОЗДІЛ. АНАЛІЗ І ПОРІВНЯННЯ ТОЧНОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ ЧИСЛА «π» ЗА ВІДОМИМИ МЕТОДАМИ

2.1 Методи з використанням формул відомих математиків

Протягом Середньовіччя інтерес до вивчення числа «π» продовжував зростати, і математики шукали нові способи для його обчислення.

1. Внесок Леонардо Пізанського, більш відомого як Фібоначчі.

У своїй роботі «Книга абака» (1202 р.) Фібоначчі використав метод, подібний до Архімеда, але з більш складними многокутниками. Він розглянув правильний 96-кутник, вписаний в коло, і обчислив його периметр. Це дозволило йому отримати значення «π» з точністю до дев'яти десяткових знаків: 3,1416074518. [17]

2. Внесок французького математика Франсуа Вієта

У своїй праці «Відновлення тригонометрії» (1593 р.) він вперше використав поняття нескінченного ряду для обчислення «π».

Вієт розглядав ряд Вієта, який являв собою нескінченну суму дробів, що наближається до значення «$\frac{\pi}{2}$». Цей ряд можна записати як:

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ \dots$$

Використовуючи перші 20 членів цього ряду, Вієт обчислив значення «π» з точністю до 9 десяткових знаків.

3. Метод Джона Валліса у XVII столітті

У 1655 році англійський математик Джон Валліс запропонував інший підхід до обчислення числа «π», заснований на використанні добутку нескінченного числа дробів. Цей метод, відомий як ряд Валліса, дозволив отримати значення «π» з більшою точністю, ніж попередні спроби.

Ряд Валліса можна записати у вигляді:

$$\pi = 2\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^2\left(\frac{2n}{2n-1}\right) = 2\left[\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{40}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\dots\right]$$

$$= 2\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{36}{35}\cdot\frac{64}{63}\dots\right]$$

Метод Валліса був значним проривом у вивченні числа «π» і показав, що існують ефективні способи для його обчислення з високою точністю. Його робота заклала основу для подальших досліджень і розробок у цій галузі.

4. Дослідження Ісаака Ньютона та Готфрида Лейбніца

У XVII столітті видатні математики Ісаак Ньютон та Готфрид Лейбніц також зробили внесок у вивчення числа «π». Вони незалежно один від одного розробили методи, засновані на використанні степеневих рядів.

Ньютон використовував степеневий ряд для обчислення арктангенса, який можна записати як:

$$\mathrm{arctan(x)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ \dots$$

Підставляючи x = 1, він отримав:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ \dots$$

Цей ряд дозволив Ньютону обчислити значення «π» з високою точністю, хоча він не опублікував свої результати.

Далі вже приблизно у 1666 році І. Ньютон, використовуючи формулу бінома, знайшов ряд:

$$\pi = 3\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 23}\right) + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 28 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 28 \cdot 72 \cdot 2^2} + \cdots$$

Лейбніц, зі свого боку, розглянув інший степеневий ряд, відомий як ряд Лейбніца:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ \frac{1}{9} - \cdots$$

Цей ряд також збігається до значення «$\frac{\pi}{4}$» і може бути використаний для обчислення числа «π» з високою точністю.

Дослідження Ньютона та Лейбніца продемонстрували потенціал степеневих рядів для обчислення числа «π» і заклали основу для подальших розробок у цій галузі.

5. Нові методи в епоху Відродження

З настанням епохи Відродження інтерес до вивчення числа «π» значно зріс. Математики того часу шукали нові методи для його обчислення, прагнучи досягти ще вищої точності.

Одним із тих, хто зробив вагомий внесок, був нідерландський математик і інженер Людольф ван Цейлен. У 1596 році він розробив ітераційний метод для обчислення «π», заснований на використанні многокутників. Його підхід був схожий на метод Архімеда, але значно складніший. [43]

Ван Цейлен розглядав вписані і описані многокутники з подвоєною кількістю сторін на кожній ітерації. Починаючи з шестикутника, він обчислював периметри многокутників, вписаних і описаних навколо кола. Потім використовував ці значення для знаходження нових наближень числа «π».

Завдяки своєму методу ван Цейлен зміг обчислити «π» з точністю до 35 десяткових знаків, що було величезним досягненням для того часу. Його робота стала основою для подальших досліджень і розробок у цій галузі.

6. Внесок Джеймса Грегорі та Раджі Сивалінгама

У XVII столітті шотландський математик Джеймс Грегорі запропонував новий підхід до обчислення числа «π», який ґрунтувався на використанні степеневих рядів. Його метод, відомий як ряд Грегорі, дозволив отримати значення «π» з високою точністю.

Ряд Грегорі можна записати як:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Кожен з цих арктангенсів може бути представлений у вигляді степеневого ряду, а їх сума наближає значення «$\frac{\pi}{4}$». Використовуючи цей метод, Грегорі обчислив «π» з точністю до 14 десяткових знаків.

У XVIII столітті індійський математик Раджа Сивалінгама зробив свій внесок у вивчення числа «π». Він використав модифікований варіант ряду Грегорі, який дозволив йому отримати значення «π» з точністю до 17 десяткових знаків.

7. Ейлер і його внесок

Леонард Ейлер, один із найвидатніших математиків XVIII століття, також зробив значний внесок у розвиток методів обчислення числа «π». Він розробив кілька різних підходів, серед яких були ряди Ейлера та еліптичні інтеграли.

Один із рядів Ейлера для обчислення «π» може бути записаний як:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Цей ряд є досить повільним для збіжності, але Ейлер знайшов способи прискорити його збіжність за допомогою різних перетворень.

Ейлер також використовував еліптичні інтеграли для обчислення «π». Ця методика ґрунтувалася на зв'язку між числом «π» і площами під певними кривими, відомими як еліптичні інтеграли. Хоча цей метод був досить складним, він дозволив Ейлеру отримати значення «π» з точністю до 20 десяткових знаків.

8. Методи Чарльза Хаверкрафта та Вільяма Ругіна

У XIX столітті були розроблені нові методи для обчислення числа «π», які дозволили досягти ще вищої точності.

У 1853 році англійський математик Чарльз Хаверкрафт запропонував метод, заснований на використанні еліптичних інтегралів. Його підхід був складнішим за метод Ейлера, але дозволив отримати значення «π» з точністю до 62 десяткових знаків.

Пізніше, у 1875 році, американський математик Вільям Ругін розробив новий метод, відомий як формула Ругіна. Ця формула базувалася на використанні степеневих рядів і дозволила Ругіну обчислити «π» з точністю до 707 десяткових знаків, встановивши новий рекорд на той час.

Методи Хаверкрафта та Ругіна стали важливими кроками у вивченні числа «π» і показали, що математики можуть досягати все вищої точності в обчисленнях, використовуючи нові підходи та алгоритми. [17]

2.2 Методи з використанням відомих числових рядів

Методи обчислення числа π з використанням відомих числових рядів є одним із найефективніших способів досягнення високоточних результатів. Ці методи базуються на використанні властивостей нескінченних рядів, які дозволяють поступово наближати значення π з високою точністю. Вони включають різні підходи, кожен з яких має свої особливості, переваги та недоліки. Нижче розглянемо кожен із зазначених методів більш детально.

Ряд Лейбніца для обчислення числа π є одним з найвідоміших і найпростіших числових рядів. Він виражається формулою:

$$\pi = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$$

Цей ряд є прикладом змінного ряду, де кожен наступний доданок має знак, протилежний попередньому. Хоча цей ряд збігається дуже повільно, він є важливим з історичної точки зору, оскільки демонструє базовий принцип використання нескінченних рядів для обчислення π. [6]

Недоліком ряду Лейбніца є його повільна збіжність. Для досягнення точності до шести десяткових знаків потрібно обчислити кілька мільйонів членів ряду. Це робить цей метод малоефективним для сучасних обчислень, але він залишається важливим у контексті історичного розвитку математичних методів.

Леонард Ейлер, видатний математик XVIII століття, розробив свій власний ряд для обчислення числа π. Його метод ґрунтується на використанні гармонічних рядів та їх властивостей:

$$\pi = 8\left[\frac{1}{a} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right]$$

Цей ряд має швидшу збіжність порівняно з рядом Лейбніца, що робить його більш ефективним для обчислення π. Метод Ейлера демонструє важливість вибору правильного ряду для досягнення оптимальної точності та ефективності.

Гармонічний ряд також використовується для обчислення числа π. Він має вигляд:

$$\pi = \left(6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Цей ряд базується на властивостях гармонічних чисел і дозволяє отримати наближене значення π з високою точністю. Гармонічний ряд збігається швидше, ніж ряд Лейбніца, що робить його більш придатним для високоточних обчислень. Цей метод демонструє важливість використання різних типів рядів для досягнення кращих результатів у обчисленнях.

Ряд Чудновського є одним з найбільш ефективних рядів для обчислення числа π. Він виражається формулою:

$$\pi = \left(12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Цей ряд був розроблений братами Чудновськими і дозволяє отримати дуже точні значення π з відносно невеликою кількістю обчислень. Використання цього ряду дозволило досягти рекордних значень точності числа π, що зробило його одним з найбільш ефективних методів обчислення.

Метод Борвіна використовує ряд для обчислення числа π, який має вигляд:

$$\pi = \left(8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Цей ряд має дуже швидку збіжність і дозволяє отримати високо точні значення π з мінімальною кількістю обчислень. Метод Борвіна підкреслює важливість вибору правильних рядів для досягнення максимальної точності та ефективності в обчисленнях.

Кожен з розглянутих методів має свої переваги та недоліки. Ряд Лейбніца є найпростішим з математичної точки зору, але його повільна збіжність робить його малоефективним для сучасних обчислень. Ряд Ейлера та гармонічний ряд мають швидшу збіжність, що робить їх більш придатними для високоточних обчислень.

Ряд Чудновського та метод Борвіна є найбільш ефективними методами серед розглянутих. Вони дозволяють отримати дуже точні значення π з мінімальною кількістю обчислень. Ці методи використовуються у сучасних обчислювальних алгоритмах для досягнення високої точності. [8]

Сучасні обчислювальні технології дозволяють використовувати ці методи для досягнення ще більш високої точності у обчисленнях числа π. Застосування потужних комп'ютерів та спеціалізованого програмного забезпечення дозволяє обчислювати π з точністю до мільярдів і навіть трильйонів знаків. Ці досягнення стали можливими завдяки розвитку методів, заснованих на числових рядах, та їх поєднанню з сучасними обчислювальними технологіями.

Методи, засновані на числових рядах, залишаються ключовими інструментами у сучасній обчислювальній математиці. Вони забезпечують високоточні наближення числа π та є основою для багатьох сучасних обчислювальних алгоритмів. Використання цих методів дозволяє досягати високої точності в обчисленнях, що є важливим для наукових досліджень та практичних застосувань у різних галузях науки та техніки.

2.3 Методи зі застосуванням визначених інтегралів.

Методи обчислення числа π з використанням визначених інтегралів є важливою частиною математичного аналізу. Визначені інтеграли дозволяють точніше обчислювати значення π, використовуючи властивості функцій та їхні інтегральні представлення. Зараз розглянемо два методи обчислення числа π за допомогою визначених інтегралів, які є актуальними як з теоретичної, так і з практичної точки зору.

Перший метод, який розглянемо, базується на інтегралі від функції $\frac{1}{1+x^2}$

Цей інтеграл має є суттєвим в математичному аналізі, оскільки він пов'язаний з арктангенсом. [10] Використовуючи властивості розкладу в степеневий ряд, можна перетворити цей інтеграл у нескінченний ряд:

$$\pi = 4\int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)dx$$

Розглянемо детальніше цей метод:

Інтеграл від $\frac{1}{1+x^2}$ є класичним прикладом застосування інтегрального обчислення для обчислення числа π. Він обчислюється за допомогою розкладу функції підінтегрального виразу в степеневий ряд, що дозволяє представити інтеграл у вигляді суми нескінченного ряду, який збігається до значення π

Повна формула виглядає наступним чином:

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$$

Цей інтеграл дуже суттєвий в математичному аналізі, оскільки він пов'язаний з арктангенсом. Використовуючи властивості розкладу в степеневий ряд, можна перетворити цей інтеграл у нескінченний ряд:

$$\pi = 4\int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)dx$$

Цей ряд є чергуванням додатних і від'ємних доданків, що поступово наближаються до значення π. Розглянемо детальніше, як цей метод працює і які його особливості.

Інтеграл від функції $\frac{1}{1+x^2}$ є прикладом застосування теорії рядів у інтегральному обчисленні. Для того щоб обчислити цей інтеграл, необхідно розкласти функцію $\frac{1}{1+x^2}$ у степеневий ряд. Це можна зробити, використовуючи біноміальний розклад для функції$(1 + x^2)^{-1}$:

$$(1 + x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

Цей розклад дозволяє представити функцію $\frac{1}{1+x^2}$ у вигляді нескінченного ряду. Тепер можемо інтегрувати цей ряд по інтервалу від 0 до 1:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{1+\mathrm{x}^2} = \int_0^1 (1 - \mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^4 - \mathrm{x}^6 + \cdots)\mathrm{dx}$$

Інтегрування кожного члена ряду окремо дає:

$$\int_0^1 1\ \mathrm{dx} = 1$$

$$\int_0^1 \mathrm{x}^2\ \mathrm{dx} = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \mathrm{x}^4\ \mathrm{dx} = \frac{1}{5}$$

$$\int_0^1 \mathrm{x}^6\ \mathrm{dx} = \frac{1}{7}$$

Таким чином, інтеграл набуває вигляду:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

Цей ряд є відомим як ряд Лейбніца, і він збігається до значення π. Хоча цей метод є ефективним для обчислення π, він має деякі недоліки. Головний з них — це повільна збіжність ряду, що означає, що для отримання високоточного наближення необхідно обчислити велику кількість доданків. Проте цей метод залишається важливим з історичної точки зору і є чудовим прикладом застосування інтегрального обчислення у теорії чисел. [12]

Тепер ми детально розглянемо властивості функції $\frac{1}{1+x^2}$ та її розкладу в степеневий ряд:

Функці $\frac{1}{1+x^2}$ є однією з найвідоміших в математичному аналізі, оскільки вона має тісний зв'язок з арктангенсом. Арктангенс є оберненою функцією для тангенса і відіграє важливу роль у багатьох розділах математики.

Використання розкладу в степеневий ряд для функції $\frac{1}{1+x^2}$ дозволяє представити її у вигляді нескінченного ряду, який можна легко інтегрувати. Це робить метод інтегралів дуже зручним для обчислення π. Інтеграція кожного члена ряду окремо дозволяє отримати сукупний результат, який збігається до значення π.

Розглянемо математичні властивості інтегралу від функції $\frac{1}{1+x^2}$ Інтеграл від цієї функції по інтервалу від 0 до 1 дорівнює арктангенсу від 1, що дорівнює $\frac{\pi}{4}$. Помноживши результат на 4, отримуємо значення π:

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$$

Цей результат є важливим підтвердженням правильності методу і демонструє, як використання визначених інтегралів може бути ефективним для обчислення математичних констант.

Метод обчислення π за допомогою інтегралу від $\frac{1}{1+x^2}$ також має актуальні застосування в прикладних задачах. Він використовується в численних алгоритмах обчислювальної математики, зокрема для обчислення площі кругових секторів, довжини дуг і інших геометричних величин. Використання цього методу дозволяє досягти високої точності у розв'язанні практичних задач, що є важливим для багатьох наукових і технічних галузей. [18]

Окрім теоретичних і прикладних застосувань, метод обчислення π за допомогою визначеного інтегралу від $\frac{1}{1+x^2}$ є актуальним інструментом у навчанні математики. Він дозволяє студентам зрозуміти основні принципи інтегрального обчислення і його застосування для обчислення математичних констант.

Практичне застосування цього методу у навчальних задачах допомагає розвивати навички аналізу та обчислень, що є вагомим для майбутніх математиків та інженерів.

Крім того, цей метод демонструє важливість міждисциплінарного підходу в математиці. Поєднання знань з математичного аналізу, теорії рядів і тригонометричних функцій дозволяє досягти високих результатів у обчисленнях і дослідженнях. Використання визначених інтегралів для обчислення π є яскравим прикладом такого підходу і підкреслює важливість комплексного підходу до розв'язання математичних задач.

Другий метод обчислення числа π за допомогою визначених інтегралів базується на інтегралі від функції $(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$ Цей інтеграл має вигляд:

$$\pi = 6\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Цей інтеграл можна представити у вигляді ряду, використовуючи властивості біноміального розкладу. Розглянемо детальніше цей метод. [20, 21]

Інтеграл від $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ є прикладом застосування тригонометричних функцій для обчислення числа π. Використовуючи тригонометричну ідентичність $1 - x^2 = \cos^2(\theta)$, можна перетворити інтеграл у форму, яка дозволяє його обчислити за допомогою розкладу в ряд.

Повна формула виглядає наступним чином:

$$\pi = 6\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 6\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{-4} dx$$

Цей інтеграл можна перетворити в ряд, використовуючи біноміальну теорему, яка дозволяє розкласти функцію $(1-x^2)^{-4}$ у степеневий ряд. Згідно з біноміальною теоремою, ми можемо розкласти цей вираз у нескінченний ряд:

$$(1-x^2)^{-4} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-4}{k} (-x^2)^k$$

Після цього інтеграл від кожного члена ряду можна обчислити окремо. Цей метод дозволяє отримати наближення значення π з високою точністю.

Детально розглянемо кожен крок цього методу:

Спочатку розглянемо розклад функції $(1-x^2)^{-4}$у степеневий ряд. Використовуючи біноміальну теорему, ми можемо записати:

$$(1-x^2)^{-4} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-4}{k} (-x^2)^k$$

Де $\frac{-4}{k}$ - це біноміальний коефіцієнт, який можна обчислити за допомогою формули:

$$\binom{-4}{k} = \frac{(-4)(-4-1)(-4-2)\cdots(-4-k+1)}{k!}$$

Після розкладу інтеграл набуває вигляду:

$$\pi = 6 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{4}{k} \int_0^{\frac{1}{2}} (-x^2)^k dx$$

Далі інтегруємо кожен член ряду окремо:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (-x^2)^k dx = (-1)^k \int_0^{\frac{1}{2}} x^{2k} dx$$

Інтеграл від x^2k обчислюється як:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2k} dx = \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$$

Тоді остаточний вираз для π буде мати вигляд:

$$\pi = 6\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{k}\right)\frac{(-1)^k}{(2k+1)2^{2k+1}}$$

Цей ряд є прикладом використання біноміального розкладу для обчислення числа π. Він демонструє, як інтегральні методи можуть бути ефективними для обчислення математичних констант.

Інтегральний метод обчислення числа π за допомогою функції $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ має значення в математичному аналізі тим, що метод дозволяє отримати високоточні наближення значення π і використовується в багатьох областях математики та фізики.

Використання тригонометричних функцій для перетворення інтегралів є важливим кроком у цьому методі. Тригонометричні функції дозволяють спростити вирази і зробити їх більш зручними для інтегрування. Наприклад, використання ідентичності $1 - x^2 = \cos^2(\theta)$ дозволяє перетворити інтеграл у форму, яка легко інтегрується за допомогою розкладу в ряд.

Інтеграл від $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ також має зв'язок з геометрією. Ця функція описує довжину дуги кола, що є геометричним параметром. Використовуючи цей метод, можна обчислити довжину дуги і, таким чином, отримати значення π.

Детальний аналіз цього методу показує, як теоретичні знання можуть бути застосовані для практичних обчислень. Використання біноміального розкладу і тригонометричних функцій дозволяє отримати точні значення π, що є корисним для багатьох наукових і технічних застосувань.

Цей метод має багато практичних застосувань. Він використовується в різних областях, включаючи фізику, інженерію і комп'ютерну графіку. Наприклад, в фізиці він використовується для розрахунків, пов'язаних з круговими рухами і коливаннями. В інженерії цей метод використовується для обчислення площ і об'ємів кругових елементів. В комп'ютерній графіці цей метод використовується для рендерингу кругових об'єктів і обчислення їхніх параметрів.

Метод обчислення π за допомогою інтегралу від $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ у навчанні математики дозволяє студентам зрозуміти основні принципи інтегрального обчислення і його застосування для обчислення математичних констант. Практичне застосування цього методу у навчальних задачах допомагає розвивати навички аналізу та обчислень, що є корисним для майбутніх математиків та інженерів. [36]

Цей метод підкреслює важливість міждисциплінарного підходу в математиці. Поєднання знань з математичного аналізу, теорії рядів і тригонометричних функцій дозволяє досягти високих результатів у обчисленнях і дослідженнях. Використання визначених інтегралів для обчислення π є яскравим прикладом такого підходу і підкреслює важливість комплексного підходу до розв'язання математичних задач.

2.4 Комп'ютерна графіка

Число π широко використовується в комп'ютерній графіці для рендерингу різних об'єктів.

Приклад 1: Побудова кругових об'єктів

Об'єкти, такі як трикутники, кулі та циліндри, можуть бути змодельовані за допомогою вписаних багатокутників. Впровадження багатокутників у процесі моделювання дозволяє значно спростити обчислення та збільшити точність рендерингу.

1. Використовуючи вписані багатокутники, можна створювати наближені моделі кругових об'єктів. Наприклад, коло можна наближено представити багатокутником з великою кількістю сторін. Чим більше сторін у багатокутника, тим ближче його форма до ідеального кола.

$$n = \frac{360}{\theta}$$

де n - кількість сторін багатокутника, а θ - кут між сусідніми сторонами.

2. Для рендерингу сферичних об'єктів застосовуються алгоритми, які використовують число π для обчислення площі поверхні та об'єму сфери. Наприклад, площа поверхні сфери з радіусом R обчислюється за формулою:

$$S = 4\pi R^2$$

а об'єм сфери - за формулою:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Ці формули використовуються для точного моделювання та рендерингу сферичних об'єктів у тривимірному просторі.

Приклад 2: Апроксимація кривих

Апроксимація кривих за допомогою багатокутників дозволяє моделювати складні форми з високою точністю. Цей метод є особливо корисним при рендерингу кругових дуг та секторів, які можна представити як набір коротких прямих сегментів.

1. Рендеринг кругових дуг та секторів базується на обчисленні периметрів вписаних багатокутників. Для цього використовується метод поділу дуги на малі сегменти, кожен з яких є прямою лінією. Периметр такого багатокутника буде наближено дорівнювати периметру дуги.

$$P \approx 2\pi R\left(\frac{\theta}{360}\right)$$

де P - периметр дуги, R - радіус кола, а (θ) - кут дуги в градусах.

2. Це дозволяє отримати більш плавні і реалістичні зображення. Використання великої кількості сегментів для апроксимації дуги забезпечує високу точність рендерингу, що є важливим для створення реалістичних комп'ютерних зображень. [40]

Крім того, апроксимація кривих за допомогою багатокутників дозволяє моделювати більш складні форми, такі як тор (пончик). Тор можна представити як набір концентричних кіл, кожне з яких складається з багатокутників з великою кількістю сторін. Це дозволяє створювати реалістичні моделі торів для використання у комп'ютерній графіці.

Приклад 3: Рендеринг циліндричних об'єктів

Циліндри є одними з найбільш поширених геометричних об'єктів, які використовуються у комп'ютерній графіці. Вони знаходять застосування в моделюванні різних фізичних явищ, створенні архітектурних моделей та анімації.

1. Об'єм циліндра з радіусом основи R і висотою h обчислюється за формулою:

$$V = \pi R^2 h$$

2. Площа поверхні циліндра обчислюється за формулою:

$$S = 2\pi R(R + h)$$

Приклад 4: Моделювання кільцевих об'єктів

Кільцеві об'єкти, такі як тор, є складнішими для моделювання, але їх теж можна апроксимувати за допомогою багатокутників.

1. Об'єм тора з великим радіусом R і малим радіусом r обчислюється за формулою:

$$V = 2\pi^2 R r^2$$

2. Площа поверхні тора обчислюється за формулою:

$$S = 4\pi^2 Rr$$

Ці формули використовуються для точного моделювання торів у комп'ютерній графіці, що дозволяє створювати реалістичні моделі кільцевих об'єктів.

Приклад 5: Рендеринг сферичних об'єктів

Сфери є ще одним поширеним об'єктом у комп'ютерній графіці. Для їх рендерингу використовуються спеціалізовані алгоритми, які забезпечують високу точність і реалістичність зображення. [32]

1. Об'єм сфери з радіусом R обчислюється за формулою:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

2. Площа поверхні сфери обчислюється за формулою:

$$S = 4\pi R^2$$

Ці формули дозволяють точно моделювати сферичні об'єкти у тривимірному просторі

Рис. 3.2.2 - Використання багатокутників для апроксимації кола в комп'ютерній графіці

2.5 Обчислювальна математика

Методи обчислення числа π є основою для числових алгоритмів та моделювання в обчислювальній математиці. [24]

Приклад 1: Апроксимація значення π за допомогою числових методів

Метод Монте-Карло широко використовується для апроксимації числа π через випадкове генерування точок.

1. Генеруємо випадкові точки в квадраті зі стороною $2R = 2$.
2. Обчислюємо частку точок, що потрапили в коло радіусом $R = 1$.
3. Значення π наближуємо за формулою:

$$\pi \approx 4 \cdot \frac{\text{кількість точок в колі}}{\text{загальна кількість точок}}$$

Процедура:

1. Створюємо квадрат зі стороною 2, що вписує коло з радіусом 1.
2. Генеруємо 10000 випадкових точок всередині квадрата.
3. Обчислюємо кількість точок, які потрапляють всередину кола.
4. Відношення кількості точок в колі до загальної кількості точок дає наближене значення π.

Результати:

- Кількість точок всередині кола: 7854
- Загальна кількість точок: 10000
- Наближене значення π: $(4 \cdot \frac{7854}{10000} = 3.1416)$

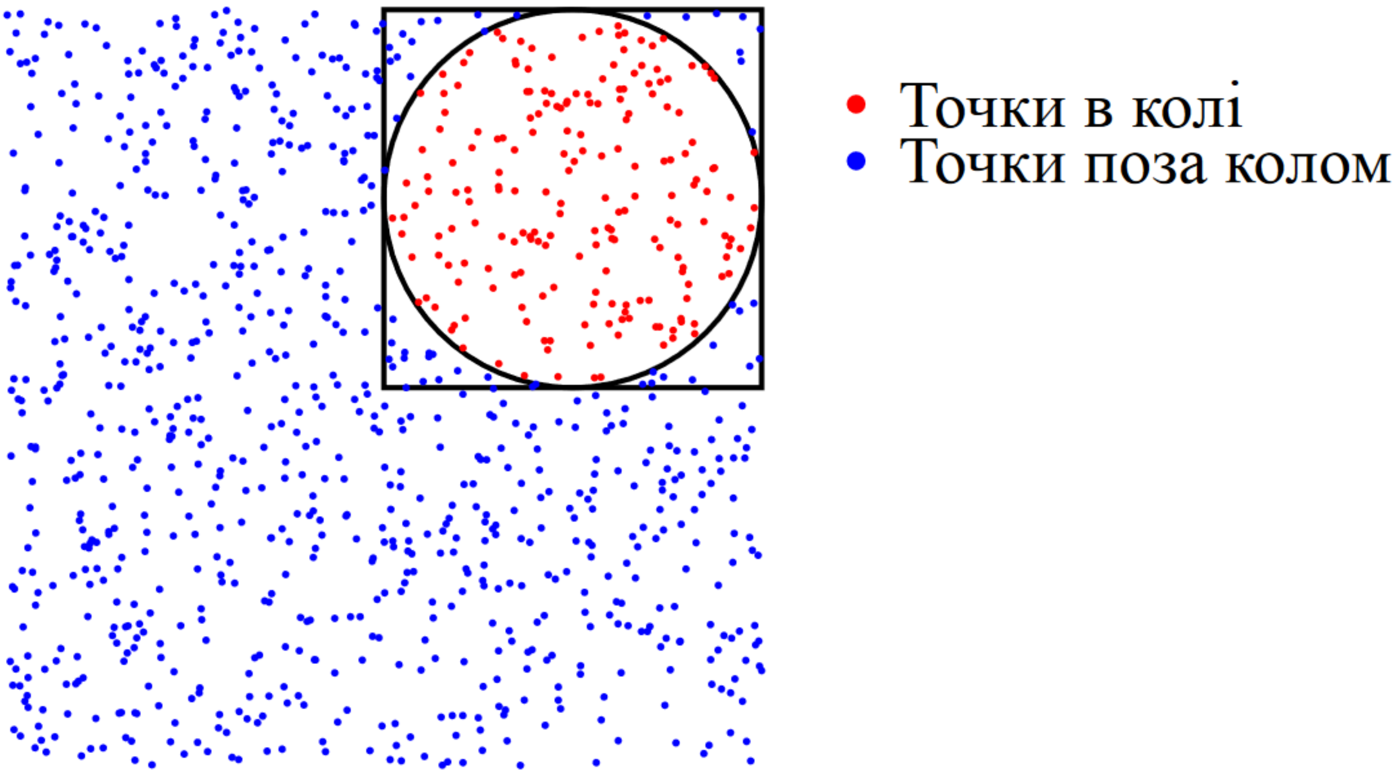


Рис. 3.2.3 - Апроксимація значення π за допомогою методу Монте-Карло

Приклад 2: Використання рядів для обчислення π [28]

Ряди широко використовуються для обчислення числа π з високою точністю.

1. Ряд Лейбніца:

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Приклад:

Використовуємо 50 членів ряду для апроксимації:

$$\pi \approx 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right) \approx 3.14159$$

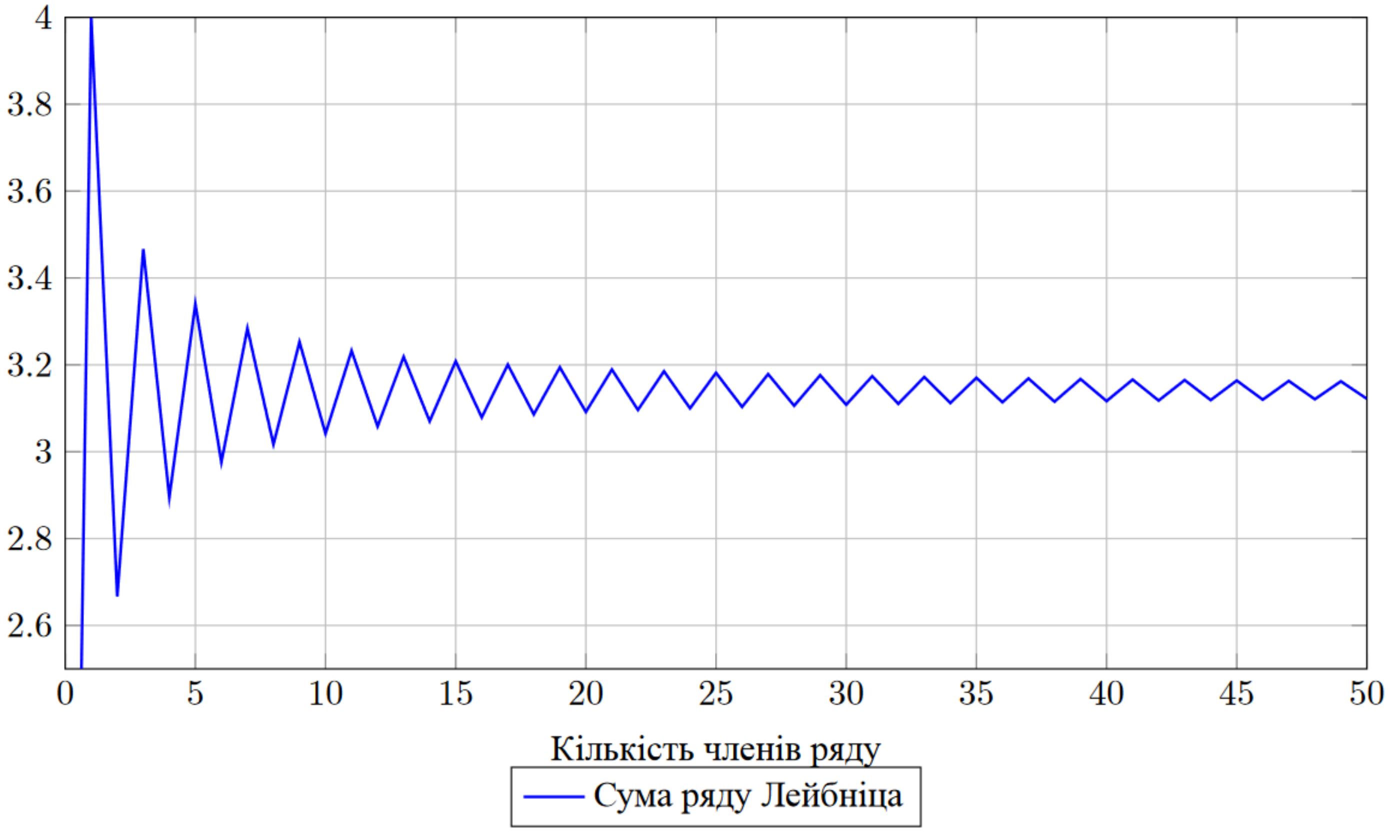


Рис. 3.2.4 - Сума ряду Лейбніца в залежності від кількості членів ряду

2. Ряд Ейлера

Ряд Ейлера для обчислення π має вигляд:

$\pi^2 = 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Приклад:

Для апроксимації обчислюємо суму 50 членів ряду:

$$\pi \approx \sqrt{6\sum_{n=1}^{50}\frac{1}{n^2}} \approx 3.14159$$

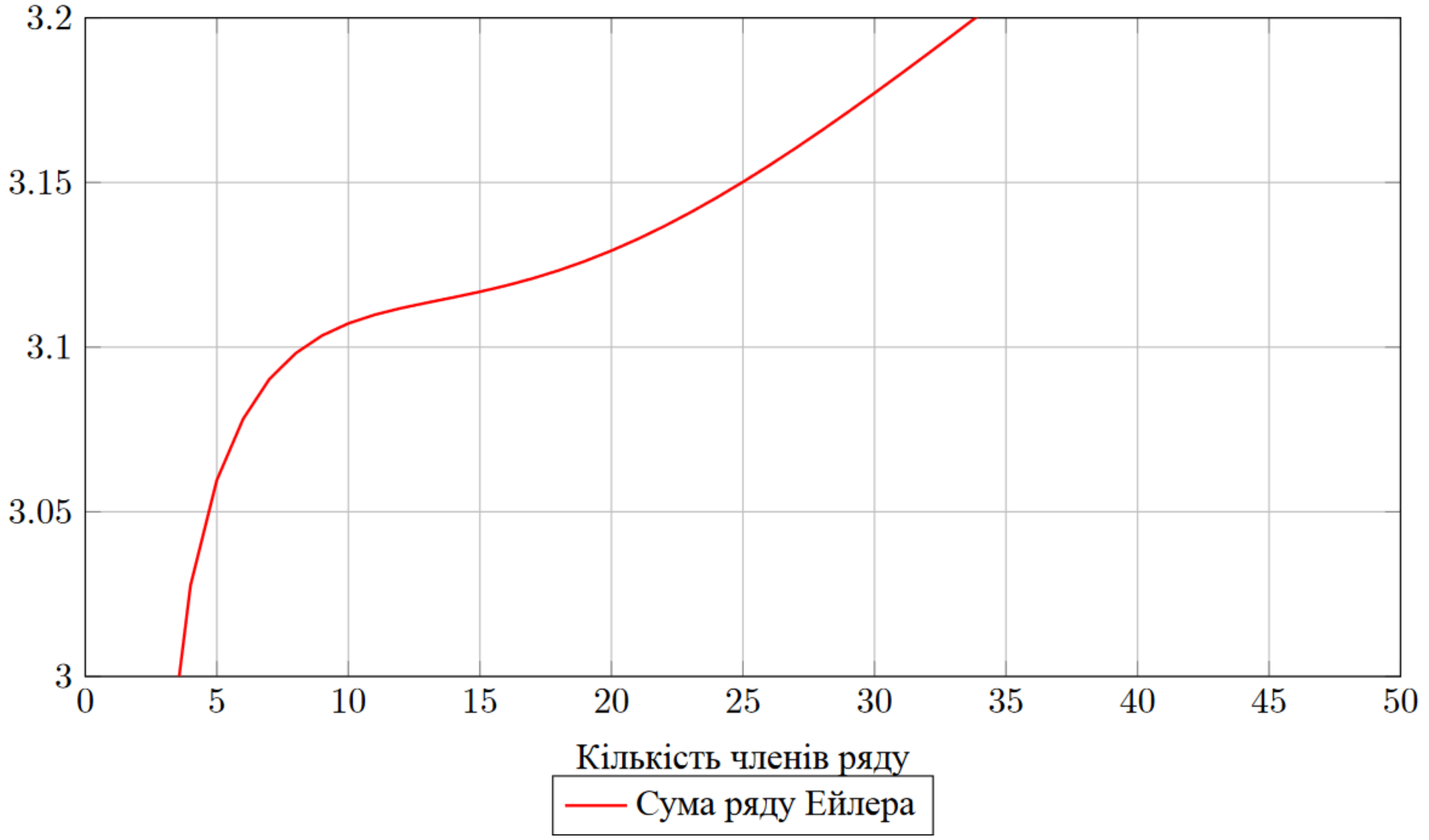


Рис. 3.2.5 - Сума ряду Ейлера в залежності від кількості членів

3. Гармонічний ряд [31]

Хоча гармонічний ряд не сходиться до π, його модифікації можуть бути застосовані для апроксимації значення π.

Приклад:

Розглянемо ряд для обчислення (ln 2), який може бути використаний для апроксимації π через логарифмічні вирази:

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

4. Формула Бейлі-Боруейна-Плаффа

Формула Бейлі-Боруейна-Плаффа дозволяє обчислювати π з високою точністю:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$$

Приклад:

Використовуємо 100 членів ряду для апроксимації:

$$\pi \approx 3.141592653589793$$

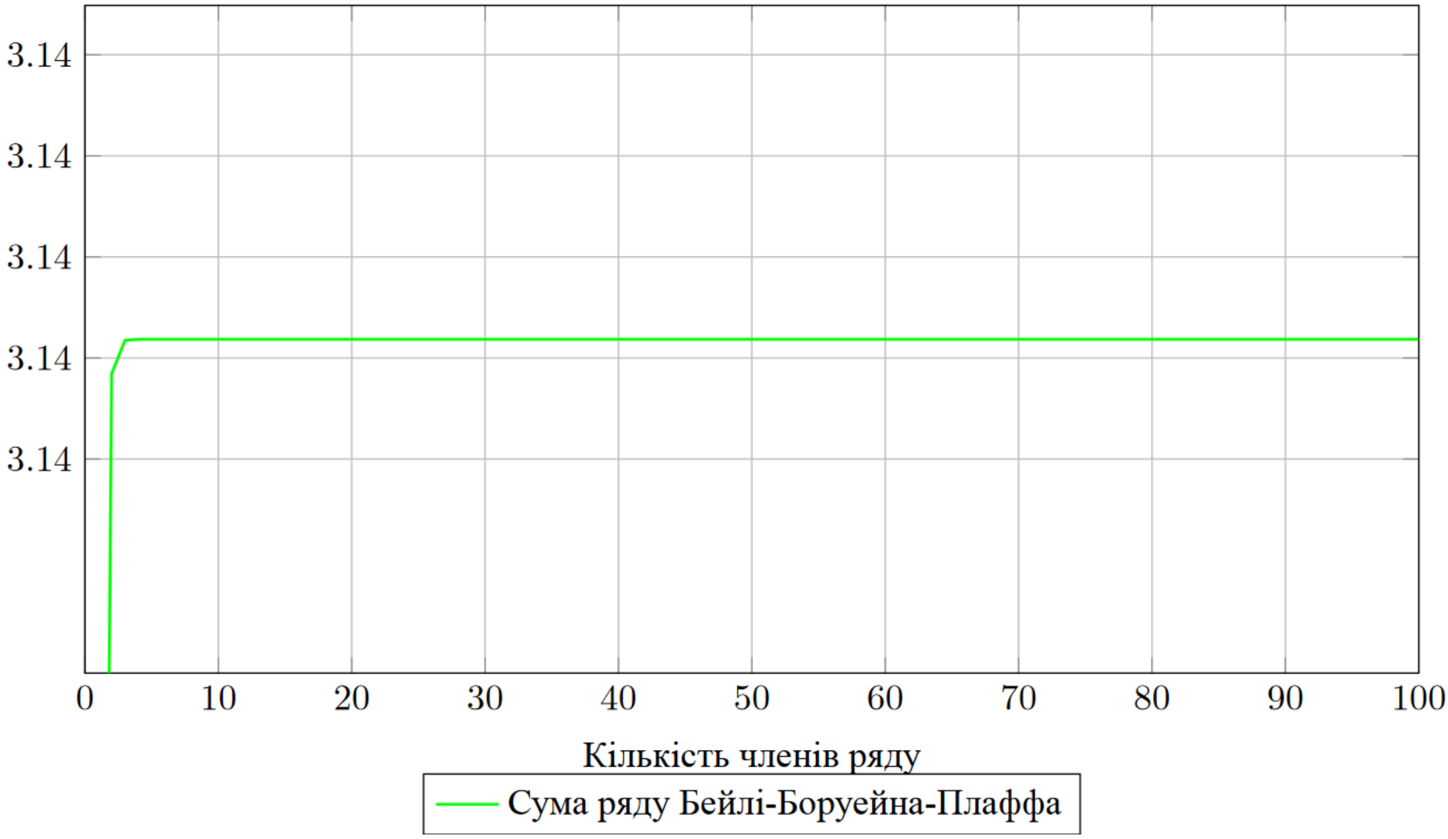


Рис. 3.2.6 - Графік швидкої конвергенції суми ряду Бейлі-Боруейна-Плаффа

5. Метод визначених інтегралів [36]

Метод визначених інтегралів також може бути використаний для обчислення π. Наприклад, інтеграл від функції $(\frac{1}{1+x^2})$:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

Для обчислення π використовуємо формулу:

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

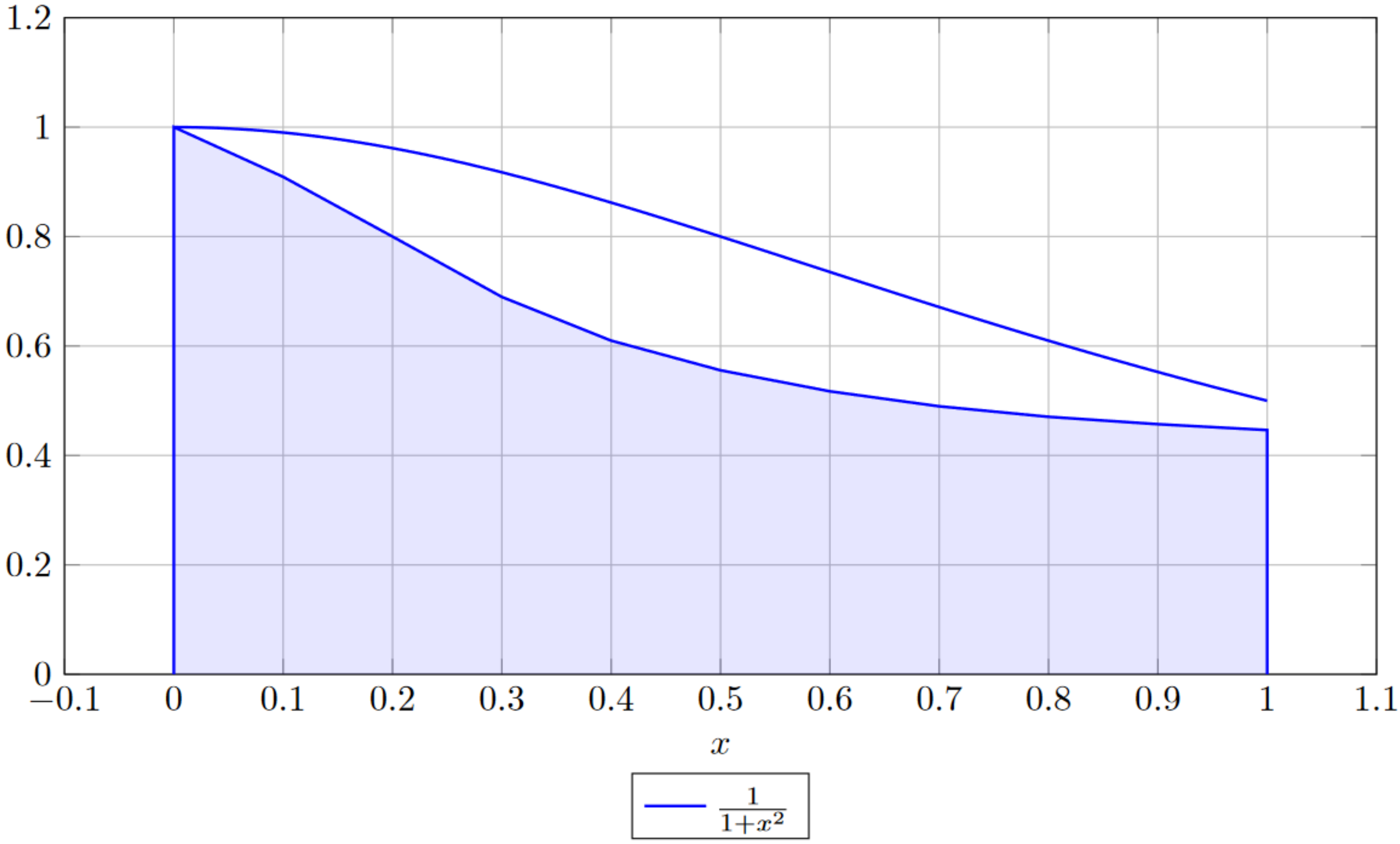


Рис. 3.2.7 - Функція $\frac{1}{1+x^2}$ та площа під кривою на інтервалі $[0,1]$

Приклад 3: Використання інших методів

Розглянемо основні з методів для обчислення:

1. Метод Чудновського

Метод Чудновського є дуже ефективним для обчислення π з великою точністю. Він має вигляд:

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!\,(545140134k + 13591409)}{(3k)!\,(k!)^3 (640320)^{3k+3/2}}$$

Приклад:

Використовуємо 10 членів ряду для апроксимації:

$$\pi \approx 3.14159265358979323846$$

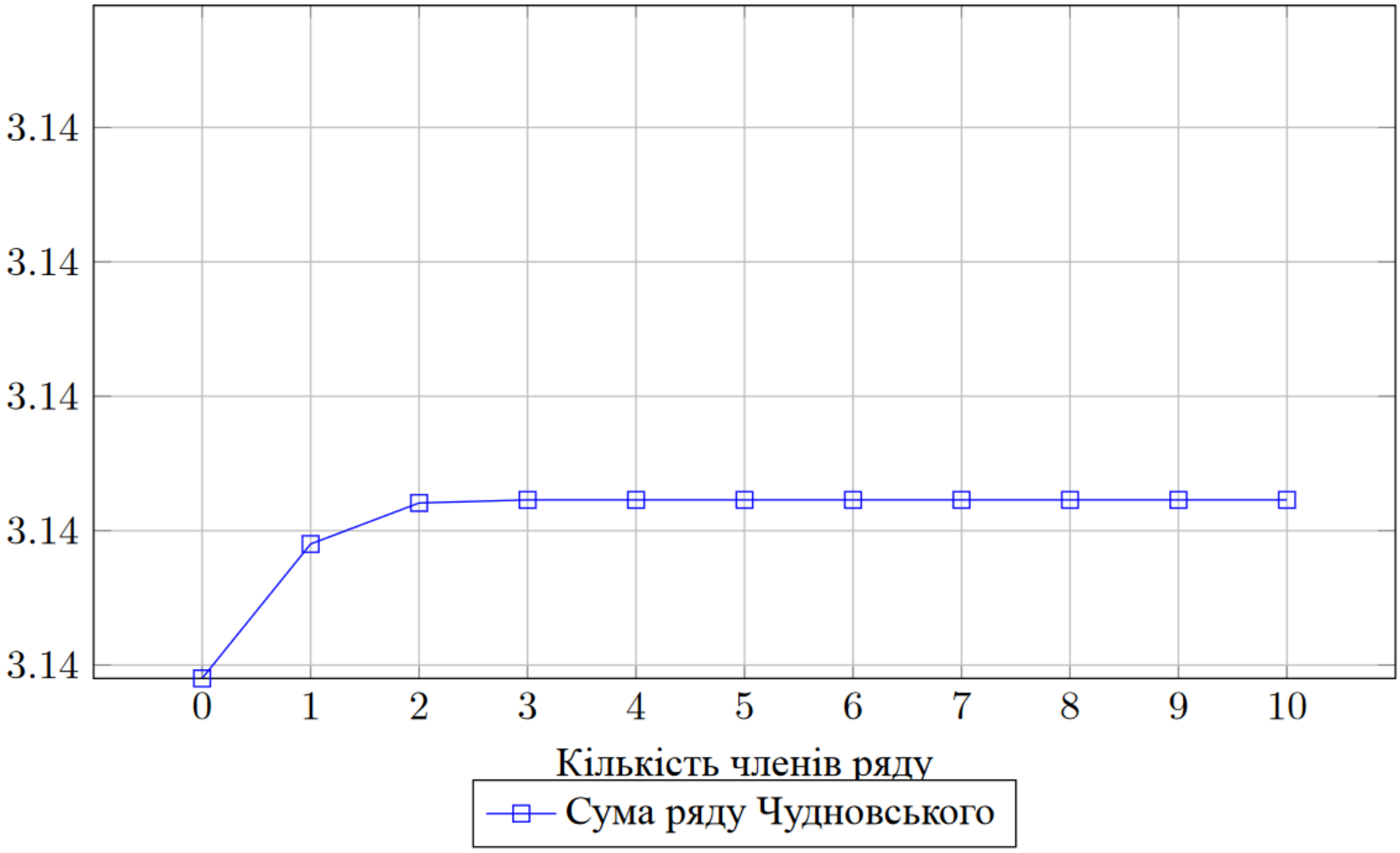


Рис. 3.2.8 - Графік швидкої конвергенції суми ряду Чудновського

2. Метод Борвіна

Метод Борвіна використовує розкладання π на ряди. Один з таких рядів має вигляд:

$$\pi = \frac{6\sqrt{3}}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(6k)!\,(13591409 + 545140134k)}{(3k)!\,(k!)^3 640320^{3k+3/2}}$$

Приклад:

Використовуємо 10 членів ряду для апроксимації:

$$\pi \approx 3.14159265358979323846\text{2}$$

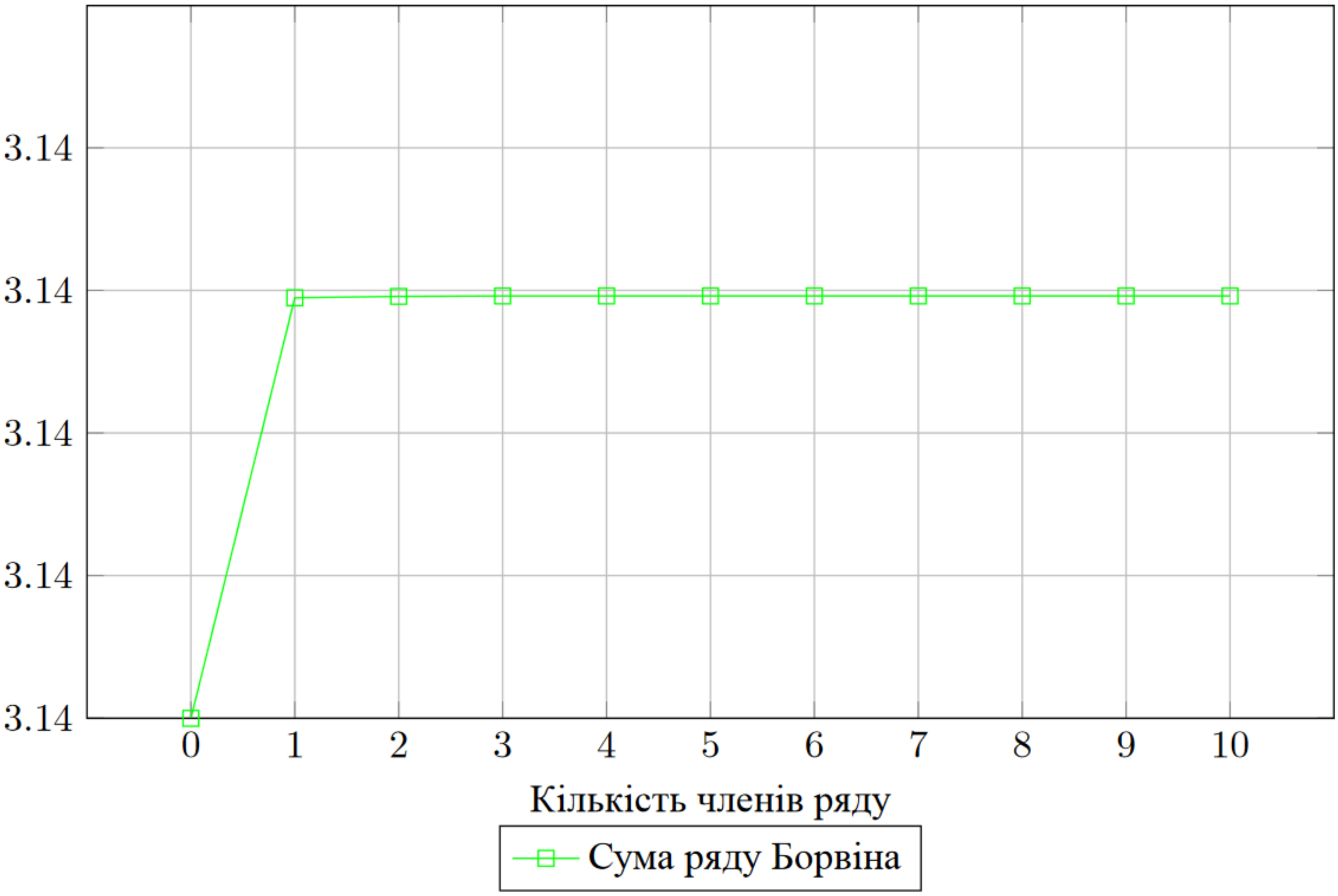


Рис 3.2.9 - Графік швидкої конвергенції суми ряду Борвіна)

Висновки до розділу ІІ

Аналіз і порівняння методів обчислення числа «π» з використанням формул відомих математиків і числових рядів показує, наскільки важливим є розвиток математичних підходів для досягнення високої точності у визначенні цієї фундаментальної константи. Історія обчислення числа «π» демонструє еволюцію математичних методів і інструментів, які з плином часу стали більш точними і ефективними.

Методи, запропоновані видатними математиками, такими як Леонардо Пізанський, Франсуа Вієт, Джон Валліс, Ісаак Ньютон та Готфрид Лейбніц, значно покращили точність обчислень числа «π». Фібоначчі, використовуючи метод Архімеда з багатокутниками, досягнув точності до дев'яти десяткових знаків. Вієт вперше застосував нескінченний ряд, що дозволило досягти точності до дев'яти десяткових знаків, що було значним досягненням для того часу. Метод Валліса, заснований на нескінченному добутку дробів, показав, що існують ефективні способи для обчислення «π» з високою точністю.

Роботи Ісаака Ньютона та Готфрида Лейбніца, засновані на використанні степеневих рядів, продемонстрували потенціал цих методів для досягнення високої точності у визначенні числа «π». Ньютон використав степеневий ряд для обчислення арктангенса, що дозволило досягти високої точності, хоча його результати не були опубліковані. Лейбніц запропонував ряд Лейбніца, який також дозволив досягти точного значення числа «π».

Нові методи, розроблені в епоху Відродження, такі як метод Людольфа ван Цейлена, Джеймса Грегорі та Раджі Сивалінгама, також сприяли значному покращенню точності обчислень. Ван Цейлен, використовуючи ітераційний метод з багатокутниками, досяг точності до 35 десяткових знаків. Грегорі та Сивалінгам запропонували нові ряди для обчислення числа «π», що дозволило досягти точності до 17 десяткових знаків.

Леонард Ейлер, один із найвидатніших математиків XVIII століття, зробив значний внесок у розвиток методів обчислення числа «π». Він розробив кілька різних підходів, серед яких були ряди Ейлера та еліптичні інтеграли, що дозволило досягти точності до 20 десяткових знаків.

У XIX столітті були розроблені нові методи, такі як методи Чарльза Хаверкрафта та Вільяма Ругіна, які дозволили досягти ще вищої точності. Хаверкрафт використав еліптичні інтеграли для досягнення точності до 62 десяткових знаків, тоді як Ругін, використовуючи степеневі ряди, досяг точності до 707 десяткових знаків.

Методи обчислення числа «π» з використанням числових рядів також показали свою ефективність. Ряд Лейбніца, хоча і має повільну збіжність, залишається важливим з історичної точки зору. Ряд Ейлера, гармонічний ряд, ряд Чудновського та метод Борвіна дозволяють досягти високої точності з мінімальною кількістю обчислень, що робить їх ефективними для сучасних обчислень.

Сучасні обчислювальні технології дозволяють використовувати ці методи для досягнення ще більш високої точності у визначенні числа «π». Використання потужних комп'ютерів та спеціалізованого програмного забезпечення дозволяє обчислювати «π» з точністю до мільярдів і навіть трильйонів знаків. Ці досягнення стали можливими завдяки розвитку методів, заснованих на числових рядах, та їх поєднанню з сучасними обчислювальними технологіями.

Методи, засновані на числових рядах, залишаються ключовими інструментами у сучасній обчислювальній математиці. Вони забезпечують високоточні наближення числа «π» та є основою для багатьох сучасних обчислювальних алгоритмів. Використання цих методів дозволяє досягати високої точності в обчисленнях, що є важливим для наукових досліджень та практичних застосувань у різних галузях науки та техніки.

Методи обчислення числа «π» з використанням визначених інтегралів також мають важливе значення в математичному аналізі. Визначені інтеграли дозволяють точніше обчислювати значення «π», використовуючи властивості функцій та їхні інтегральні представлення. Інтеграли від функцій $\frac{1}{1+x^2}$ та $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ є класичними прикладами застосування інтегрального обчислення для обчислення числа «π».

Інтеграл від функції $\frac{1}{1+x^2}$ пов'язаний з арктангенсом і може бути представлений у вигляді ряду Лейбніца. Цей метод є ефективним для обчислення «π», але має недолік повільної збіжності ряду, що потребує великої кількості обчислень для досягнення високої точності.

Інтеграл від функції $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, що описує довжину дуги кола, також може бути використаний для обчислення числа «π». Використання біноміального розкладу і тригонометричних функцій дозволяє отримати точні значення «π», що є корисним для багатьох наукових і технічних застосувань. Методи обчислення числа «π» з використанням визначених інтегралів демонструють важливість поєднання теоретичних знань з математичного аналізу, теорії рядів і тригонометричних функцій для досягнення високої точності в обчисленнях. Вони використовуються в численних алгоритмах обчислювальної математики, зокрема для обчислення площі кругових секторів, довжини дуг і інших геометричних величин.

Ці методи також мають значення у навчанні математики, дозволяючи студентам зрозуміти основні принципи інтегрального обчислення і його застосування для обчислення математичних констант. Практичне застосування цих методів у навчальних задачах допомагає розвивати навички аналізу та обчислень, що є важливим для майбутніх математиків та інженерів.

Загалом, аналіз і порівняння методів обчислення числа «π» показує, як розвиток математичних знань та інструментів сприяє досягненню високої точності у визначенні цієї фундаментальної константи. Від використання простих геометричних побудов у античні часи до складних алгоритмів і комп'ютерних програм у сучасному світі, розвиток методів обчислення числа «π» відображає прогрес людства у розумінні математичних принципів і законів природи. Це свідчить про безперервний інтерес до числа «π» і його важливість для наукових досліджень і технічних досягнень.

ІІІ РОЗДІЛ. Розв'язання задач спрямованих на одержання формул обчислення числа π

3.1 Алгоритми розв'язання задач пов'язані з використанням квадрата зі стороною а = 1, розташованим в системі координати Оху сумісно з чвертю кола радіуса R = 1

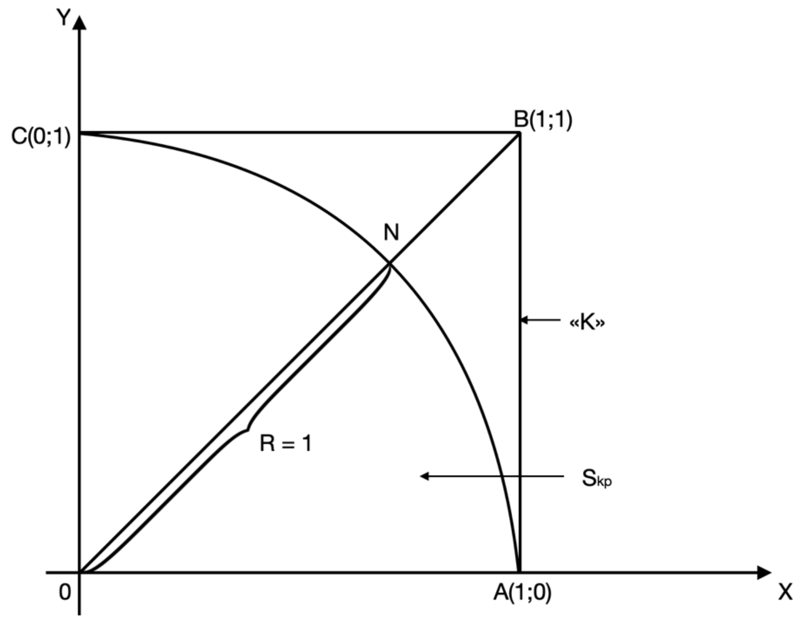


Рис. 1 – Квадрат «К» зі стороною а = 1

Зрозуміло, що площа $S_k = 1$ і площа S_{kp} чверті круга з радіусом R = 1 дорівнює $S_{kp} = \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{1}{4}\pi$.

З іншого боку маємо рівність:

$$S_{kp} = 1 - S_{ACBA} \tag{1}$$

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - S_{ACBA}$$

$$\pi = 4(1 - S_{ACBA}) \tag{2}$$

Таким чином, задача обчислення числа π зводиться до обчислення площі S_{ABCA} і використання формули (2).

Розв'язання задачі спрощується, якщо використати (згідно рис.1) рівність:

$$\pi = 8\left(\frac{1}{2} - S_{\widehat{ABN}}\right) \tag{3}$$

Задача 1. Для обчислення $S_{\widehat{ABN}}$ доповнимо геометричну модель на рис.1 послідовністю точок на стороні квадрата «К» з коефіцієнтами т. a_n $(1; \frac{1}{n})$, т. b_n $(1; \frac{1}{n+1})$ (рис.2).

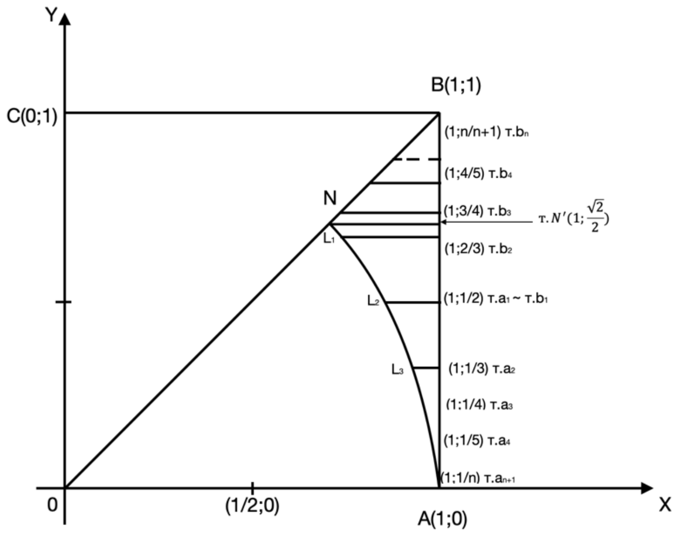


Рис. 2 – Площа $S_{\widehat{ABN}}$ розділена на суму площ криволінійних трапецій

Координати точки N не відповідають координатам т. т. a_n і b_n, тому визначимо їх за допомогою розв’язання зрозумілого рівняння:

$$\mathrm{x} = \sqrt{1 - \mathrm{x}^2} \qquad (4)$$

$$x^2 = \frac{1}{\alpha}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$$

В нашому випадку використовуємо:

$$\mathrm{x} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}, \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$$

$$\text{т. N } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \text{ т. } N'\left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

На рис. 2 спостерігаємо наступну рівність:

$$S_{\widehat{ABN}} = S_{\Delta NN'B} + S_{\text{тр}}, \qquad (4)$$

де $S_{\text{тр}}$ – сума площ трапецій $L_1b_2N'N$, $L_1L_2a_1b_2$, $L_2L_3a_2a_1$, … , $L_{n+1}L_{n+2}a_{n+1}a_n$.

Обчислюємо $S_{\Delta NN'B}$ і $S_{\text{тр}}$. Для цього потрібно визначити абсциси т. N, L_1, L_2, ..., L_n. Згідно рис. 2 це можливо за допомогою рівняння:

$$\sqrt{1-\text{x}^2}=y \qquad (5)$$

т. N: $y=\frac{\sqrt{2}}{2}; 1-\text{x}^2=\frac{1}{2} \rightarrow \text{x}^2=\frac{1}{2} \rightarrow \text{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

т. L$_1$: $y=\frac{2}{3}; 1-\text{x}^2=\frac{4}{9} \rightarrow \text{x}^2=\frac{5}{9} \rightarrow \text{x}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

т. L$_2$: $y=\frac{1}{2}; 1-\text{x}^2=\frac{1}{4} \rightarrow \text{x}^2=\frac{3}{4} \rightarrow \text{x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

т. L$_3$: $y=\frac{1}{3}; 1-\text{x}^2=\frac{1}{9} \rightarrow \text{x}^2=\frac{8}{9} \rightarrow \text{x}=\frac{\sqrt{8}}{3}$

т. L$_4$: $y=\frac{1}{4}; 1-\text{x}^2=\frac{1}{16} \rightarrow \text{x}^2=\frac{15}{16} \rightarrow \text{x}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

……………………………………………………………………………………

т. L$_n$: $y=\frac{1}{n+1}; 1-\text{x}^2=\frac{1}{(1+n)^2} \rightarrow \text{x}^2=1-\frac{1}{(1+n)^2}-\frac{(1+n)^2-1}{(1+n)^2} \rightarrow \text{x}=\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n+1}$

Використовуючи визначені абсциси обчисляємо площі $S_{\Delta NN'B}$ і $S_{\text{тр}}$:

$$S_{\Delta NN'B}=\frac{1}{2}\left|\overline{NN'}\right| * \left|\overline{N'B}\right|=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cong \frac{3-2\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}042893 \qquad (I)$$

$$S_{NL_1L_2N'}=\frac{1}{2}\left(\left|\overline{NN'}\right|+\left|\overline{L_1b_2}\right|\right)\left|\overline{N'b_2}\right|=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right]\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2-\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{6}\right)\frac{3\sqrt{2}-4}{6} \approx 0{,}011071 \qquad (II)$$

Використовуючи рівності (I) і (II) одержуємо:

$$S_{\Delta NN'B}+S_{NL_1L_2N'} \cong 0{,}053 \approx 0{,}053 \qquad (III)$$

$$S_{L_1L_2a_1b_2}=\frac{1}{2}\left[\left|\overline{L_1b_2}\right|+\left|\overline{L_2a_1}\right|\right]\left|\overline{b_2a_1}\right|=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2-\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{6}\right)\frac{1}{6} \cong 0{,}032385$$

Величина основ послідовності трапецій $\{L_{n+1}L_{n+2}a_{n+2}a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ обчислюється і змінюється за формулою:

$$\left|\overline{\text{a}_{n+1}a_{n+2}}\right|=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)} \qquad (5)$$

Тому сума площ послідовності трапецій $\{L_{n+1}L_{n+2}a_{n+2}a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ дорівнює сумі ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left[2-\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n+2}-\frac{\sqrt{(n+2)^2+1}}{n+3}\right]\frac{1}{(n+1)(n+2)} \tag{6}$$

Таким чином, сумісне використання рівностей (3), (4), (I), (II), (III) одержуємо наступну формулу обчислення наближеного значення числа π:

$$\pi=8\left[0{,}415-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2-\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n+1}-\frac{\sqrt{(n+2)^2-1}}{n+2})\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$\pi=3{,}32-4\sum_{n=1}^{\infty}(2-\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n+1}-\frac{\sqrt{(n+2)^2-1}}{n+2})\frac{1}{(n+1)(n+2)} \tag{7}$$

Обчислимо π за умовою n = 2:

$$\pi=3{,}32-4\left[\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{8}}{3}\right)\frac{1}{6}+\left(2-\frac{\sqrt{8}}{3}-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\frac{1}{12}\right]\approx$$

$$\approx 3{,}32-4\left[(2-0{,}866025-0{,}942809)\frac{1}{6}+(2-0{,}942809-0{,}968245)\frac{1}{12}\right]\approx$$

$$\approx 3{,}32-4[0{,}032824+0{,}007412]\approx 3{,}159056$$

Задача 2. Обчислити наближене значення числа π за допомогою геометричної моделі на рис. 3.

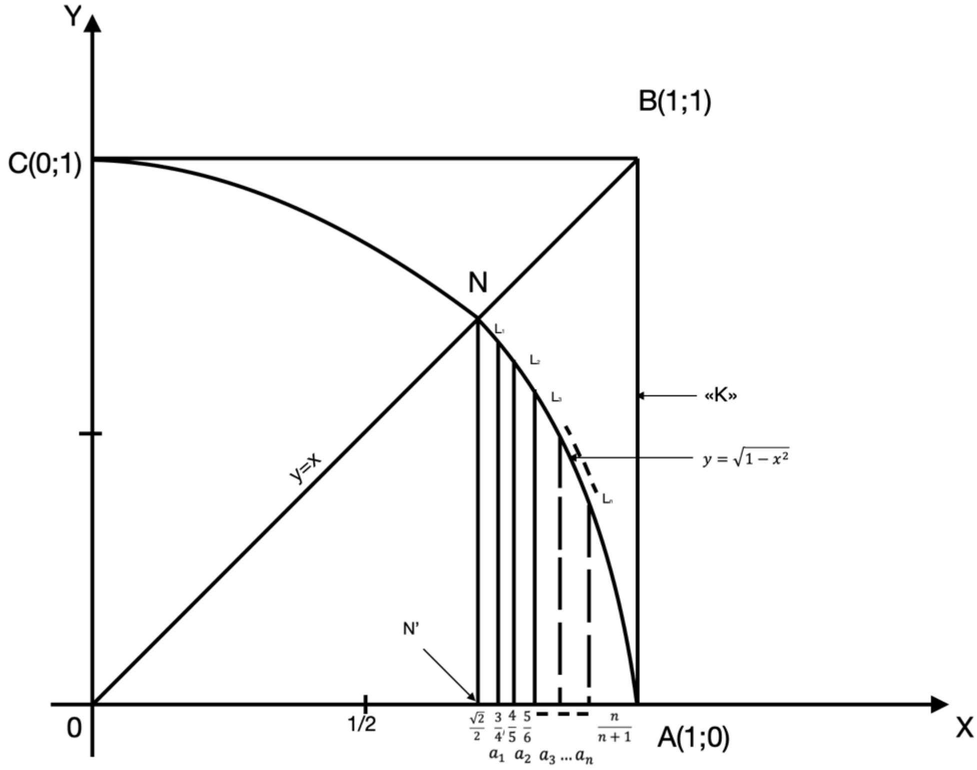


Рис. 3

Зрозуміло, що точки N та N’ відповідно мають координати $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ та $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$.

Послідовність т. т. a_n має координати $\left(\frac{n+2}{n+3}; 0\right)$.

З рис. 3 спостерігаємо рівність:

$$\frac{\pi}{8} = S_{\Delta ON'N} + S_{\text{тр}} \tag{8}$$

$$S_{\Delta ON'N} = \left|\overline{ON'}\right| \cdot \left|\overline{NN'}\right| \qquad (I)$$

$$S_{\Delta ON'N} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4} \qquad (II)$$

$$S_{\text{тр}} = S_{N'Nl_1a_1} + S_{l_1a_1l_2a_2} + \cdots + S_{a_{n-1}l_{n-1}l_na_n} \qquad (III)$$

$$S_{N'Nl_1a_1} = \frac{1}{2} \cdot \left[|\overline{N'N}| + |\overline{a_1l_1}|\right] \cdot |\overline{N'a_1}| = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{4}\right)\frac{3 - 2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{32}(5{,}474178 \cdot 0{,}171572) \approx 0{,}029350 \ \ (IV)$$

Площу $a_1l_1Aa_1$ обчислимо за допомогою суми площ трапецій: $a_1l_1l_2a_1$, $a_2l_2l_3a_3, \ldots, a_nl_nl_{n+1}a_{n+1}$. Тобто за допомогою суми $\sum_{n=1}^{\infty} S_{a_nl_nl_{n+1}a_{n+1}}$ (9)

Для цього потрібно визначити ординати послідовності точок $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ за допомогою формули: $y_n = \sqrt{1 - (x_n)^2}$ (10)

На рис. 3 спостерігаємо, що $x_n = \frac{n+2}{n+3}$, тому $y_n = \sqrt{1 - \frac{(n+2)^2}{(n+3)^2}} = \frac{\sqrt{2n+5}}{n+3}$ (11)

Величини основ $|\overline{a_na_{n+1}}|$ послідовності трапеції $\{a_nl_nl_{n+1}a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ визначається формулою

$$|\overline{a_na_{n+1}}| = \frac{n+3}{n+4} - \frac{n+2}{n+3} = \frac{1}{(n+3)(n+4)} \qquad (12)$$

Використовуючи рівності (I), (II), (11), (12) одержуємо результат:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{a_nl_nl_{n+1}a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2n+5}(n+4) + \sqrt{2n+7}(n+3)}{(n+3)^2(n+4)^2}\right) \qquad (13)$$

$$\pi = 8\left[0{,}28 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)\sqrt{2n+5} + (n+3)\sqrt{2n+7}}{(n+3)^2(n+4)^2}\right] =>$$

$$\pi \cong 2{,}25 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)\sqrt{2n+5} + (n+3)\sqrt{2n+7}}{(n+3)^2(n+4)^2} \qquad (14)$$

Обчислимо π послідовно для: n = 1, n = 2 та n = 3.

$$n = 1: \pi \cong 2{,}25 + 4\frac{5\sqrt{7} + 4\sqrt{9}}{16 * 25} \cong 2{,}25 + 0{,}252288 \cong 2{,}502288$$

$$n = 2: \pi \cong 2{,}25 + 4\left(\frac{5\sqrt{7} + 4\sqrt{9}}{16 * 25} + \frac{6\sqrt{9} + 5\sqrt{11}}{25 * 36}\right)$$

$$\cong 2{,}25 + 4(0{,}063072 + 0{,}038426) \cong 2{,}655992$$

$$n = 3: \pi \cong 2{,}25 + 4(0{,}101498 + \frac{7\sqrt{11} + 6\sqrt{13}}{36 * 49})$$
$$\cong 2{,}25 + 4(0{,}101498 + 0{,}025425) \cong 2{,}757692$$

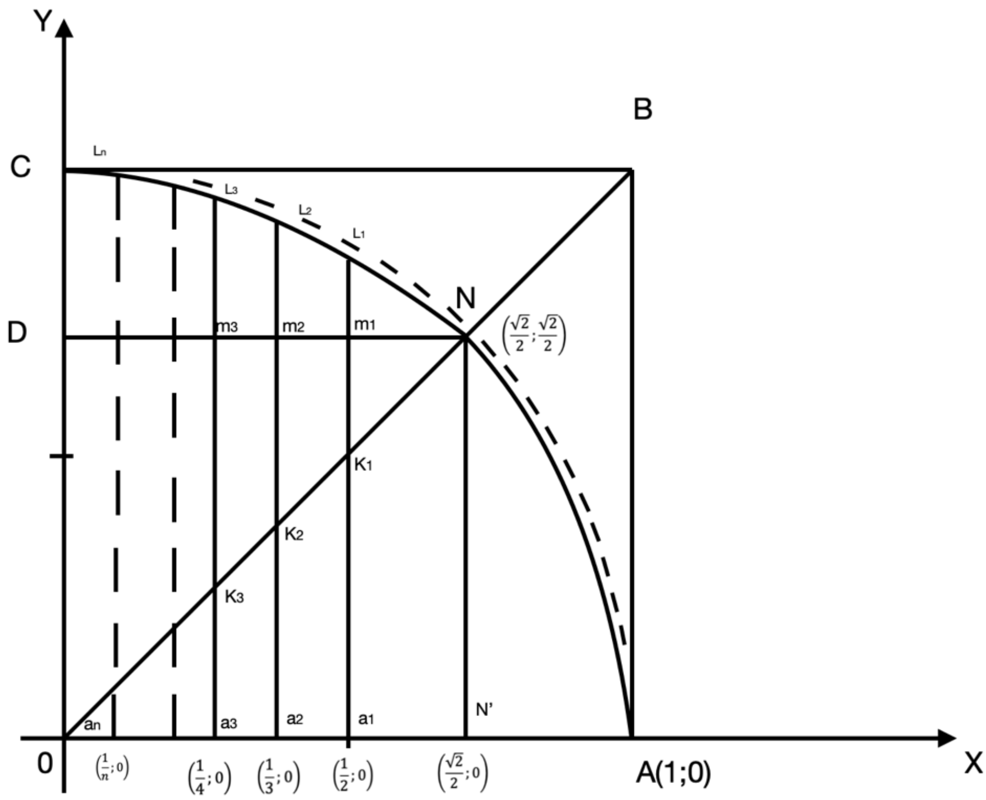


Рис. 4

Задача 3. Обчислити значення числа π за допомогою обчислення площі фігури $OAC'O$

На рис. 4 спостерігаємо рівність

$$\frac{\pi}{8} = S_{ON'NC} - S_{\Delta ON'N} \qquad (15)$$

де, $S_{ON'NC}$ дорівнює сумі площ послідовності трапецій: $a_1N'NL_1$, a_2, a_1, L_1, L_2, … , $a_{n+1}a_nl_nl_{n+1}$.

$$S_{\Delta ON'N} = \frac{1}{2}|\overline{ON'}||N'N| = \frac{1}{4} \qquad (16)$$

Задача 4. Обчислити значення π за допомогою обчислення площ:

$$S_{K_1NL_1}, S_{K_2K_1L_1L_2}, \dots, S_{K_{n+1}K_nL_nL_{n+2}}$$

Задача 5. Обчислити значення π за допомогою рівності:

$$\frac{\pi}{8} = S_{OND} + S_{m_1NL_1} + S_{m_2m_1L_1L_2} + \cdots + S_{m_{n+1}m_nL_nL_{n+1}} \qquad ()$$

<u>Задача 6.</u> Обчислити значення π за допомогою довжин відрізків $[\overline{NL_1}], [\overline{L_1L_2}], \dots, [\overline{L_nL_{n+1}}]$.

<u>Задача 7.</u> Обчислити значення π за допомогою довжин відрізків $[\overline{NL_1}], [\overline{L_1L_2}], \dots, [\overline{L_nL_{n+1}}]$ на моделі рис. 2.

<u>Задача 8</u>. Обчислити значення π за допомогою довжин відрізків $[\overline{NL_1}], [\overline{L_1L_2}], \dots, [\overline{L_nL_{n+1}}]$ на моделі рис. 3.

<u>Задача 9.</u> Обчислити значення π за допомогою моделі на рис. 5.

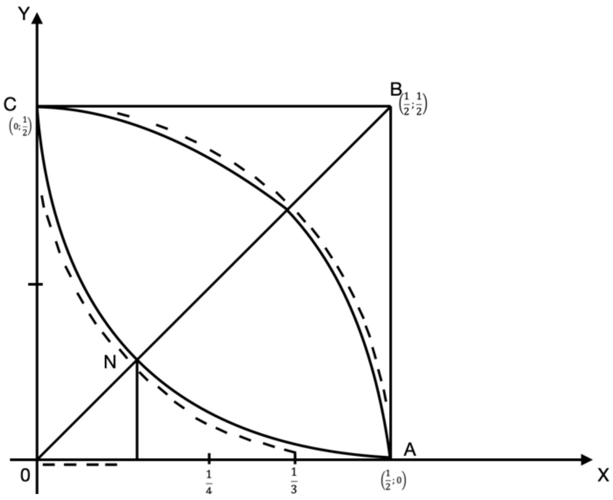


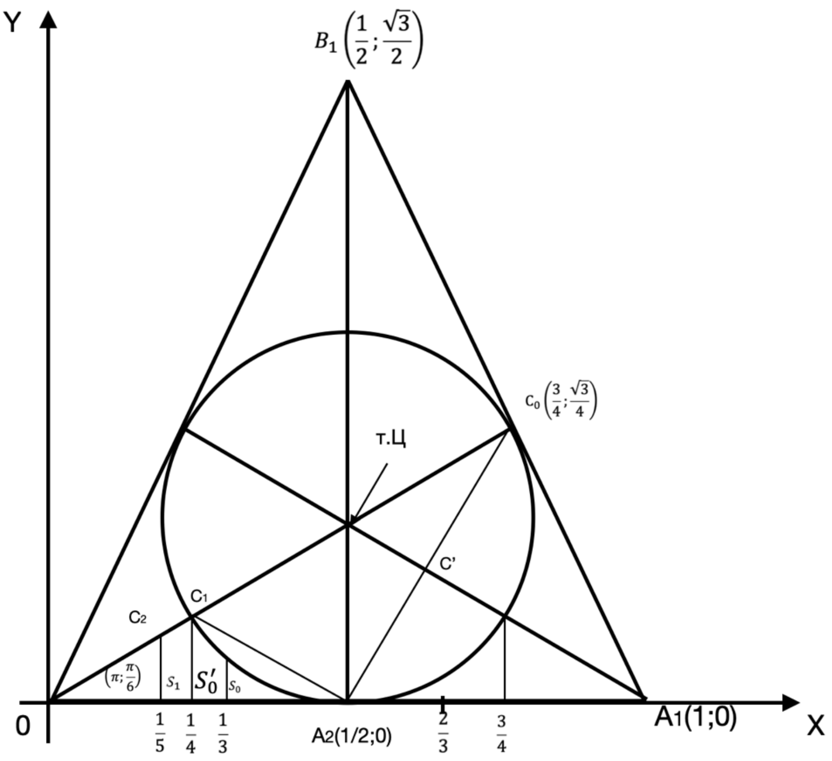
Рис. 5

$$\frac{\pi}{8} = S_{\Delta OAB} + S_{OAK} \qquad ()$$

де $S_{\Delta 0AB} = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

S_{OAK} складається з площ трапецій (див. попередні задачі).

3.2 Задачі пов'язані з використанням рівнобедреного трикутника і числових рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$



$$\frac{1}{6}S_k = S_{\Delta OA_2Ц} - S_{\forall OA_2C_1} = \frac{\sqrt{3}}{24} - S_k$$

$$S_k = \pi \cdot \frac{1}{12} = \frac{\pi}{12}$$

$$\frac{1}{6}S_k = \frac{\pi}{72}$$

$$sin|\widehat{\overline{OC_1}||\overline{OA_1}}| = sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};\quad cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{OC_1}: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \qquad (1)$$

$$|\overline{OЦ}| = |\overline{OA_1}| \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

т.Ц$\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Коло: (y-$\frac{\sqrt{3}}{6}$) $= \sqrt{r^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{12} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{12} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \qquad (2)$$

$$(1), (2): \frac{\sqrt{3}}{3}x = \frac{\sqrt{3}}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{12} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \rightarrow \qquad (3)$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{1}{12} - (x - \frac{1}{2})^2 \rightarrow$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{12} - (x - \frac{1}{2})^2 \rightarrow$$

$$(\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1)(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{12} \rightarrow (\frac{1}{3} + 1)(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{12} \rightarrow$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{16} \rightarrow x - \frac{1}{2} = \pm\frac{1}{16} = \pm\frac{1}{4} \rightarrow$$

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}; \ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Таким чином маємо:

$$\text{т.}C_0\left(\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right); \text{т.}\,C_1\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{12}\right); \text{т.}\,C_2\left(\frac{1}{5}; \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{5}\right); \text{т.}\,C_3\left(\frac{1}{6}; \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{6}\right); \ldots; \text{т.}\,C_n\left(\frac{1}{n+3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{n+3}\right) \rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{n(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{n(y)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{n+3}$$

$$S_1 = \int_{1/5}^{1/4} \frac{\sqrt{3}}{3} x dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{2}x^2\Big|_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\frac{1}{16} - \frac{1}{25}\right] = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{9}{4^2 \cdot 5^2}$$

$$S_2 = \int_{1/6}^{1/5} \frac{\sqrt{3}}{3} x dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\frac{1}{25} - \frac{1}{36}\right] = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{11}{5^2 \cdot 6^2}$$

$$S_2 = \int_{1/7}^{1/6} \frac{\sqrt{3}}{3} x dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\frac{1}{36} - \frac{1}{49}\right] = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{13}{6^2 \cdot 7^2}$$

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{6} x^2 \Big|_{\frac{1}{n+4}}^{\frac{1}{n+3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\frac{1}{(n+3)^2} - \frac{1}{(n+4)^2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{n^2 + 8n + 16 - n^2 - 6n - 9}{(n+3)^2 \cdot (n+4)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2n+7}{(n+3)^2 \cdot (n+4)^2}$$

$$x_0 = \frac{1}{3} : y_0 = \frac{\sqrt{3}}{6} - \sqrt{\frac{1}{12} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} - \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{3}}{6} - \sqrt{\frac{2}{36}} = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{6} \quad \rightarrow \text{т.}\left(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{6}\right)$$

$$S_0' \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\left[\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{6}\right] = \frac{1}{2 \cdot 12} \cdot \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{2 \cdot 144}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$$

$$S_0 \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left[\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{6}\right] = \frac{1}{2 \cdot 6^2} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \frac{1}{2 \cdot 36}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$S_{\text{сект.}(OC_1A_2)} \approx S_n + S_0 + S_0'$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{2n \cdot 7}{(n+3)^2 (n+4)^2} + \frac{1}{2 \cdot 36}\left[\frac{1}{4}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right) + \sqrt{3} - \sqrt{2}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{2n \cdot 7}{(n+3)^2 (n+4)^2} + \frac{1}{2 \cdot 36}\left[\frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}}{4}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{2n \cdot 7}{(n+3)^2 (n+4)^2} + \frac{1}{2 \cdot 144}\left[7\sqrt{3} - 6\sqrt{2}\right]$$

$$\frac{\pi}{12} \cdot \frac{1}{6} = S_{\Delta OA_2\text{Ц}} - S_{\text{сект.}(OC_1A_2)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} - \left[\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{2n \cdot 7}{(n+3)^2 (n+4)^2} + \frac{1}{2 \cdot 144}\left[7\sqrt{3} - 6\sqrt{2}\right]\right] \rightarrow$$

$$\pi \approx 3\sqrt{3} - 72\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\frac{2n\cdot 7}{(n+3)^2(n+4)^2} + \frac{1}{2\cdot 144}\left[7\sqrt{3} - 6\sqrt{2}\right]\right] =$$

$$= 3\sqrt{3} - \left[12\sqrt{3}\frac{2n\cdot 7}{(n+3)^2(n+4)^2} + \frac{1}{4}\left[7\sqrt{3} - 6\sqrt{2}\right]\right] =$$

$$= \left[\left(3\sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) - \frac{7}{4}\sqrt{3}\right] - 12\sqrt{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot 7}{(n+3)^2(n+4)^2} =$$

$$= \left(\frac{5\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) - 12\sqrt{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot 7}{(n+3)^2(n+4)^2} \cong$$

$$\cong (2{,}1651 + 2{,}1213)$$

$$- 20{,}7846\left[\frac{9}{16\cdot 25} + \frac{11}{25\cdot 36} + \frac{13}{36\cdot 49} + \frac{15}{49\cdot 64} + \frac{17}{64\cdot 81} + \cdots\right] \cong$$

$$\cong 4{,}2864 - 20{,}7846[0{,}0225 + 0{,}0122 + 0{,}0071 + 0{,}0048 + 0{,}0033 + \cdots] \approx$$

$$\approx 4{,}2864 - 20{,}7846[0{,}05] \approx 4{,}2864 - 1{,}0367 \approx 3{,}249$$

$$S_{n\,=\,6} = 3{,}249 - 0{,}049 = 3{,}200$$

$$S_{n\,=\,7} = 3{,}200 - 0{,}036 = 3{,}164$$

$$S_{n\,=\,8} = 3{,}164 - 0{,}027 = 3{,}14$$

$$\pi \approx \sqrt{3}\left[\frac{5}{4} - 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot 7}{(n+3)^2(n+4)^2}\right] + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\pi \approx \left(\frac{5\sqrt{3}}{4} + \frac{12\sqrt{2}}{2}\right) - 12\sqrt{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot 7}{(n+3)^2(n+4)^2}$$

$$\pi_{n\,=\,8} \approx \frac{5\sqrt{3} + 6\sqrt{2}}{4} - 12\sqrt{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+7}{(n+3)^2(n+4)^2} \approx 4{,}2864 - 20{,}7846[0{,}0552]$$

$$\approx 4{,}2864 - 1{,}1473 \approx 3{,}14$$

Зведена таблиця точності n

n = 1	$\pi \cong 2{,}502288$
n = 2	$\pi \cong 2{,}655992$
n = 3	$\pi \cong 2{,}797692$

n = 4	$\pi \cong 2{,}82906$
n = 5	$\pi \cong 2{,}88141$
n = 6	$\pi \cong 2{,}92114$

Висновки до розділу III

Аналіз методів обчислення числа π з використанням геометричних фігур, таких як квадрат з параметрами $a = 1$ і коло з радіусом $R = 1$, показує, що геометричний підхід є не лише історично важливим, але й практичним для розуміння основних математичних принципів. Використання вписаних багатокутників у коло дозволяє поступово наближати значення числа π з високою точністю, що було доведено в багатьох історичних і сучасних дослідженнях.

Початковий крок у побудові базового кола з радіусом $R = 1$ дозволяє нам отримати базову фігуру для подальших геометричних побудов. Це коло служить основою для вписування багатокутників, таких як квадрати, трикутники та інші правильні багатокутники. Відомо, що довжина кола дорівнює $2\pi,$ а площа $-\pi r^2$ і вписуючи в це коло багатокутники, ми наближаємо периметр або інший елемент багатокутника, в граничному переході, до деякої частини кола, наприклад, площі. Це дозволяє нам обчислити число π з високою точністю.

Вписування правильного квадрата в коло є наступним кроком у нашому дослідженні. Кожна сторона квадрата є діагоналлю рівнобедреного прямокутного трикутника, де радіус кола виступає як гіпотенуза. Використовуючи властивості трикутника та теорему Піфагора, ми можемо визначити довжину сторони квадрата. В цьому випадку довжина сторони квадрата дорівнює $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а периметр квадрата обчислюється як $4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Цей метод показує, як геометричні побудови можуть бути використані для точного визначення довжини сторін і периметра багатокутника.

Подальше вписування правильного восьмикутника демонструє ще більш точне наближення до числа π. Для цього ми поділяємо кожну сторону квадрата навпіл та з'єднуємо отримані точки з центром кола. Це дозволяє визначити нові вершини восьмикутника. Обчислення довжини сторін восьмикутника за допомогою теореми косинусів та властивостей рівностороннього трикутника показує, що довжина сторони восьмикутника дорівнює $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Периметр восьмикутника обчислюється як $8 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$. Цей підхід демонструє, як використання вписаних багатокутників з великою кількістю сторін дозволяє отримувати все точніші значення числа π.

Методи обчислення числа π за допомогою геометричних фігур мають численні практичні застосування в різних галузях науки і техніки. В інженерних розрахунках число π є основою для багатьох задач, таких як розрахунок моменту інерції кругового перетину, площі кругової деталі, об'єму циліндра та площі поверхні сфери. Використання точних значень π дозволяє забезпечити високу точність розрахунків і підвищити якість інженерних проектів.

У комп'ютерній графіці число π широко використовується для рендерингу різних об'єктів. Наприклад, побудова кругових об'єктів за допомогою вписаних багатокутників дозволяє створювати реалістичні моделі кругових об'єктів. Апроксимація кривих за допомогою багатокутників дозволяє моделювати складні форми з високою точністю, що є особливо корисним при рендерингу кругових дуг та секторів. Рендеринг циліндричних і сферичних об'єктів також базується на точних обчисленнях числа π, що забезпечує реалістичність зображення.

В обчислювальній математиці методи обчислення числа π є основою для числових алгоритмів та моделювання. Метод Монте-Карло, використання рядів Лейбніца та Ейлера, а також метод визначених інтегралів дозволяють обчислювати π з високою точністю. Ці методи широко використовуються для апроксимації значення π у різних обчислювальних задачах, що дозволяє забезпечити високу точність і ефективність числових обчислень.

Тому, на нашу думку, методи обчислення числа π за допомогою геометричних фігур, таких як квадрат з параметрами $a = 1$ і коло з радіусом

$R = 1$, є надзвичайно актуальними для математичних досліджень і практичних застосувань. Використання вписаних багатокутників дозволяє поступово наближати значення числа π з високою точністю, що є важливим для багатьох наукових і технічних задач. Ці методи демонструють, як прості геометричні принципи можуть бути ефективно застосовані для вирішення складних математичних задач, забезпечуючи високий рівень точності і надійності обчислень.

ВИСНОВКИ

Ця магістерська робота присвячена глибокому аналізу, дослідженню та розробці методів обчислення числа π, яке є однією з найважливіших математичних констант. У роботі розглянуто історичний розвиток методів обчислення числа π, порівняно різні підходи та запропоновано нові методи, засновані на використанні геометричних фігур, таких як квадрат з параметрами $a = 1$ і коло з радіусом $R = 1$. Висновки роботи розкривають важливість і практичну цінність досліджених методів.

Історичний розвиток методів обчислення числа π показує, як різні цивілізації та великі математики намагалися визначити цю константу з максимальною точністю. В античні часи, такі математики як Архімед, єгиптяни та вавилонці, зробили значні кроки у вивченні числа π. Архімед вперше запропонував метод наближення π за допомогою вписаних і описаних багатокутників, що стало фундаментом для подальших досліджень. Його метод показав, що число π знаходиться між $3\frac{10}{71}$ і $3\frac{1}{7}$, що було значним досягненням для того часу.

У середньовіччі та в епоху Відродження інтерес до числа π не згасав. Математики, такі як Франсуа Вієт, Джон Валліс, Ісаак Ньютон та Готфрид Лейбніц, розробили нові методи для обчислення π, які базувалися на використанні нескінченних рядів та добутків. Ці методи дозволили досягти ще більшої точності у визначенні числа π. Вієт вперше використав поняття нескінченного ряду, що стало новим етапом у розвитку математичних методів. Валліс запропонував ряд Валліса, який дозволив отримати π з високою точністю, використовуючи нескінченний добуток дробів.

У XVIII і XIX століттях розвиток методів обчислення числа π продовжився завдяки роботам таких математиків, як Леонард Ейлер, Джеймс Грегорі, Раджа Сивалінгам, Чарльз Хаверкрафт та Вільям Ругін. Ейлер розробив кілька різних підходів, серед яких ряди Ейлера та еліптичні інтеграли, що дозволили досягти точності до 20 десяткових знаків. Хаверкрафт і Ругін використали еліптичні інтеграли та степеневі ряди для досягнення точності до 62 і 707 десяткових знаків відповідно.

У сучасні часи, завдяки розвитку комп'ютерних технологій, обчислення числа π стало можливим з неймовірною точністю. Сучасні алгоритми, такі як метод Монте-Карло, метод Борвіна, метод Бейлі-Боруейна-Плаффа та інші, дозволяють обчислювати π з точністю до мільярдів і навіть трильйонів знаків. Це досягнення стало можливим завдяки потужним комп'ютерам та спеціалізованому програмному забезпеченню. Наприклад, у 2019 році дослідники використали програму y-cruncher для обчислення π з точністю до 31,4 трильйонів десяткових знаків, що стало найточнішим обчисленням на той час.

Розробка нових методів обчислення числа π за допомогою геометричних фігур, таких як квадрат з параметрами $a = 1$ і коло з радіусом $R = 1$, показала ефективність геометричного підходу. Використання вписаних багатокутників дозволяє поступово наближати значення π з високою точністю. Вписування правильного квадрата в коло дозволяє отримати довжину сторони квадрата, яка дорівнює $\frac{\sqrt{2}}{2}$, а периметр квадрата обчислюється як $2\sqrt{2}$. Подальше вписування правильного восьмикутника дозволяє отримати ще більш точне наближення до числа π. Довжина сторони восьмикутника дорівнює $\sqrt{2-\sqrt{2}}$, а периметр восьмикутника обчислюється як $8 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Методи обчислення числа π мають численні практичні застосування. В інженерних розрахунках число π використовується для визначення моменту інерції кругового перетину, площі кругових деталей, об'єму циліндра та площі поверхні сфери. Точні значення π дозволяють забезпечити високу точність розрахунків, що є важливим для інженерних проектів.

У комп'ютерній графіці число π широко використовується для рендерингу різних об'єктів. Побудова кругових об'єктів за допомогою вписаних багатокутників дозволяє створювати реалістичні моделі. Апроксимація кривих за допомогою багатокутників дозволяє моделювати складні форми з високою точністю. Рендеринг циліндричних і сферичних об'єктів також базується на точних обчисленнях π, що забезпечує реалістичність зображення.

Методи обчислення числа π також є основою для числових алгоритмів та моделювання в обчислювальній математиці. Метод Монте-Карло, використання рядів Лейбніца та Ейлера, а також метод визначених інтегралів дозволяють обчислювати π з високою точністю. Ці методи широко використовуються для апроксимації значення π у різних обчислювальних задачах, що дозволяє забезпечити високу точність і ефективність числових обчислень.

Загалом, ця магістерська робота показує, що методи обчислення числа π мають важливе значення для математичних досліджень і практичних застосувань. Історичний розвиток методів обчислення π демонструє еволюцію математичних знань та інструментів, які з плином часу ставали більш точними і ефективними. Використання геометричних фігур, таких як квадрат з параметрами $a = 1$ і коло з радіусом $R = 1$, дозволяє поступово наближати значення π з високою точністю, що є важливим для багатьох наукових і технічних задач.

Робота показує, як прості геометричні принципи можуть бути ефективно застосовані для вирішення складних математичних задач. Використання вписаних багатокутників дозволяє досягти високої точності у визначенні π, що є корисним для інженерних розрахунків, комп'ютерної графіки та обчислювальної математики. Розробка нових методів обчислення числа π демонструє, як поєднання історичних підходів та сучасних технологій може призвести до значних досягнень у математичних дослідженнях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Archimedes and the Computation of Pi. URL: https://www.math.utah.edu/~alfeld/Archimedes/Archimedes.html (дата звернення: 01.05.2024).

2. Bailey D. H., Borwein J. M., and Plouffe S. On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants. Mathematics of Computation. 1997. Vol. 66, No. 218. P. 903–913.

3. Beckmann P. A History of π (Pi). St. Martin's Press. 1971. 202 p.

4. Borwein J. M., and Bailey D. H. Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century. A K Peters/CRC Press. 2004. 379 p.

5. Borwein J. M., Borwein P. B., and Bailey D. H. Ramanujan, Modular Equations, and Approximations to Pi. American Mathematical Monthly. 1989. Vol. 96. P. 201–220.

6. Borwein J., and Borwein P. Pi: A Source Book. Springer Science & Business Media. 1998. 736 p.

7. Borwein J., Bailey D., and Girgensohn R. Experimentation in Mathematics: Computational Paths to Discovery. A K Peters/CRC Press. 2003. 288 p.

8. Brent R. P. Algorithms for Minimization Without Derivatives. Courier Corporation. 2013. 224 p.

9. Brent R. P., and Zimmermann P. Modern Computer Arithmetic. Cambridge University Press. 2010. 236 p.

10. Chudnovsky D. V., and Chudnovsky G. V. Approximations and Complex Multiplication According to Ramanujan. American Mathematical Society. 1987. Vol. 2. P. 375–387.

11. Russo M. 3,14 Motivi per Uccidere. Independently Published, 2020.

12. Turing A. M. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungs problem. Proceedings of the London Mathematical Society. 1937. Vol. 2-42. P. 230–265.

13. Антонов В. А. Історія розвитку методів обчислення числа π. Вісник Київського університету. Серія "Фізико-математичні науки". 2017. Вип. 2. С. 50–57.

14. Атанасян Л. С. Геометрія : [навч. посіб. для фіз.-мат. фак. пед. ін-тів : пер. з рос. вид.]. Київ : Вища шк., 1976. Т. 1. 455 с.

15. Бойко І. В. Геометричні підходи до обчислення числа π. Журнал "Математика в школах України". 2016. № 4. С. 12–18.

16. Вардова А. Історія розвитку категорії числа в ранньоновоанглійський період. *Вісник студентського наукового товариства Горлівського державного педагогічного інституту іноземних мов*. 2011. Вип. 30. С. 64–66.

17. Васильєв О. П. Математичні константи та їх обчислення. Вісник Чернівецького національного університету. Серія "Фізико-математичні науки". 2018. Вип. 5. С. 67–74.

18. Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Серія "Фізико-математичні науки". URL: http://www.science.univ.kiev.ua/ (дата звернення: 01.03.2024).

19. Вісник Львівського університету. Серія "Математика і механіка". URL: http://www.lnu.edu.ua/research/journals (дата звернення: 01.03.2024).

20. Вісник Національного технічного університету "ХПІ". URL: https://repository.kpi.kharkov.ua/ (дата звернення: 03.03.2024).

21. Вісник Харківського національного університету. URL: http://www.univer.kharkov.ua/ (дата звернення: 01.03.2024).

22. Дерев'янко С. М. Історія обчислення числа π в стародавніх культурах. Вісник Львівського університету. Серія "Математика і механіка". 2015. Вип. 3. С. 34–40.

23. Електронний архів наукових праць СумДУ. URL: http://essuir.sumdu.edu.ua (дата звернення: 03.03.2024).

24. Завадський В. О. Обчислення числа π за допомогою чисельних методів. Вісник Національного технічного університету "ХПІ". 2019. Вип. 7. С. 23–28.

25. Історія та проблеми числа Пі. URL: https://www.slideshare.net/slideshow/ss-66923995/66923995 (дата звернення: 10.03.2024).

26. Історія числа Пі : thesis / О. А. Білоус та ін. 2010. URL: http://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/21350 (дата звернення: 03.03.2024).

27. Коваленко І. Г. Методи обчислення числа π у стародавній Греції. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія "Історія". 2016. Вип. 2. С. 92–98.

28. Король О. В. Аналітичні методи обчислення числа π. Вісник Харківського національного університету. Серія "Фізико-математичні науки". 2017. Вип. 4. С. 77–83.

29. Лісняк В. С. Диференціальна геометрія векторного поля. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія "Фізико-математичні науки"*. 2006. Вип. 1. С. 84–92.

30. Лісняк В. С. Диференціальна геометрія відповідностей чотиривимірного простору. *Вісник Київського університету. Серія "Фізико-математичні науки"*. 2002. Вип. 3. С. 110–120.

31. Лук'янихін О. В. Статистичне обчислення числа Пі в досліді Бюффона : thesis. 2015. URL: http://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/43351 (дата звернення: 03.03.2024).

32. Луценко А. ФРАКТАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ У ФОРМОУТВОРЕННІ ДИЗАЙНУ. *Молодий вчений*. 2022. № 12 (112). С. 46–50. URL: https://doi.org/10.32839/2304-5809/2022-12-112-8 (дата звернення: 03.03.2024).

33. Мельник С. В. Теорія чисел в античності. Вісник НАН України. 2019. Вип. 12. С. 72–78.

34. Методичний посібник "Число Пі". URL: https://naurok.com.ua/metodichniy-posibnik-chislo-pi-142961.html (дата звернення: 10.03.2024).

35. Наукова електронна бібліотека періодичних видань НАН України. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua (дата звернення: 03.03.2024).

36. Павленко І. М. Обчислення числа Пі методами чисельного аналізу. Наукові записки Київського університету. 2015. Вип. 8. С. 102–107.

37. Палійчук І. В. Історія розвитку методів обчислення числа π. Журнал "Математичний вісник". 2016. № 3. С. 45–52.

38. Петренко О. М. Математичні підходи до обчислення числа π. Вісник Дніпровського національного університету. Серія "Фізико-математичні науки". 2018. Вип. 5. С. 34–41.

39. Петрова Л. Історія розвитку математичних констант. Вісник ХНУ. 2018. Вип. 3. С. 34–39.

40. Піменов Р. Естетика, симетрія та геометрія кола. *Країна знань*. 2020. № 1 (140). С. 18–23.

41. Піменов Р. Естетика, симетрія та геометрія кола. *Країна знань*. 2020. № 1 (140). С. 18–23.

42. Семенович О. Ф. Геометрія. К., 1971. 280 с.

43. Семенович О. Ф. Геометрія. Київ, 1976. 167 с.

44. Сидоренко П. Л. Аналітичні методи обчислення числа Пі. Вісник НТУ "ХПІ". 2016. Вип. 2. С. 45–50.

45. Цікаві факти та історія числа «пі». URL: https://www.factday.net/7-9-cikavi-fakty-ta-istoriya-chysla-pi.html (дата звернення: 10.03.2024).

46. Що таке число Пі: історія та цікаві факти. URL: https://www.mathema.me/blog/chislo-pi/ (дата звернення: 01.03.2024).

47. Яковенко П. С. Історія обчислення числа π у стародавньому Китаї. Вісник Харківського національного університету. Серія "Історія науки і техніки". 2017. Вип. 6. С. 58–64.

ДОДАТКИ

Додаток А. Історичні таблиці обчислень

Табл. А - Таблиця обчислень π за методами Архімеда

Кількість сторін	Вписаний багатокутник	Описаний багатокутник	Значення π
6	3.000000	3.464102	3.000000 - 3.464102
12	3.105829	3.215390	3.105829 - 3.215390
24	3.132629	3.159659	3.132629 - 3.159659
48	3.139350	3.146086	3.139350 - 3.146086
96	3.141032	3.142715	3.141032 - 3.142715

Табл. Б - Таблиця обчислень π за методом Ейлера

Кількість членів ряду	Значення π
10	3.141592
20	3.141592653
50	3.14159265358979
100	3.141592653589793