МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»

Завідувач кафедри

_________ Д.Є. Бобилєв   Реєстраційний № _______

«___» _____________ 2024 р.   «___» _____________ 2024р

МЕТОДИКА РОЗВИТКУ ПОНЯТІЙНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРІЇ (ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ)

Кваліфікаційна робота студентки
групи МІм-23
ступінь вищої освіти магістр
фізико-математичного факультету
спеціальності
014.04. Середня освіта (математика)
Мирошниченко Тетяни Ігорівни
Керівник:
канд. пед. н., доцент
Бобилєв Дмитро Євгенійович

Оцінка:

Національна шкала___________________

Шкала ECTS _________________________

Кількість балів _______________________

Голова ЕК ___________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Члени ЕК ___________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

____

____

____

Кривий Ріг - 2024

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Мирошниченко Тетяна Ігорівна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувавла недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело.

Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомлена. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

ЗМІСТ

ВСТУП

Мислення розвивається на різних рівнях, починаючи від найпростіших форм, характерних для тварин, і досягаючи найвищої складності у людини. Незважаючи на ці відмінності, усі рівні мислення мають спільну основу: вони є опосередкованим і узагальненим відображенням об’єктів і явищ об’єктивної реальності, зокрема їхніх взаємозв’язків і відношень. Однак кожен рівень розвитку мислення відрізняється своїми формами, засобами та глибиною відображення світу.

Понятійне мислення – це важлива складова когнітивного розвитку особистості, яка визначається її здатністю усвідомлювати, класифікувати та впорядковувати поняття, пов'язані з геометричними об'єктами та їх взаєминами. Це не просто набір знань, але й вміння розпізнавати геометричні форми та їх характеристики. Важливою частиною цього процесу є спроможність учня сприймати та розуміти просторові відносини між об'єктами, такі як відстані, кути та взаємовідносини між геометричними фігурами.

Понятійне мислення є одним із ключових аспектів ефективного навчання геометрії. Воно включає здатність до розуміння, класифікації та аналізу геометричних понять, що дозволяє учням бачити загальні закономірності та застосовувати їх до вирішення нових задач. Відомі вчені та психологи, такі як Жан Піаже, Джон Д’юї, Григорій Костюк та Іван Зязюн, досліджували різні аспекти понятійного мислення, підкреслюючи його важливість у загальному когнітивному розвитку дитини.

Розвиток понятійного мислення на уроках геометрії включає кілька етапів, кожен з яких сприяє поглибленню розуміння геометричних концепцій. Початковий етап полягає у вивченні базових понять, таких як точки, лінії та площини. На цьому етапі учні засвоюють основні визначення та властивості цих об'єктів. Важливо, щоб вчитель пояснював ці поняття в контексті реальних прикладів, що допоможе учням зв'язати теорію з практикою.

Наступний етап включає формулювання та доведення геометричних теорем. Цей процес сприяє розвитку логічного мислення, адже учні вчаться робити висновки на основі логічних аргументів. Вивчення доведень теорем також допомагає розвивати критичне мислення, оскільки учні повинні оцінювати правильність своїх доведень та знаходити можливі помилки.

Актуальність дослідження. Вивчення методів розвитку понятійного мислення на уроках геометрії є актуальним завданням з кількох важливих причин. Перш за все, це допомагає формувати основні навички учнів у сфері геометрії, що є однією з ключових галузей математики. По-друге, розробка ефективних методик може збільшити інтерес учнів до предмету та підтримувати їхню активність на уроках. Крім того, це сприяє розвитку критичного мислення, що є важливою частиною навчання геометрії.

Геометричні поняття, які розвиваються на уроках, також мають практичний застосунок у різних сферах життя. Вивчення геометрії підготовлює учнів до розуміння та використання математичних концепцій в реальних ситуаціях.

Предмет дослідження: є процес розвитку понятійного мислення на уроках геометрії.

Об'єкт дослідження: процес впровадження та ефективність використання методик розвитку понятійного мислення серед учнів під час навчання геометрії.

Мета дослідження:

- Аналіз і оцінка існуючих методик: визначити різні підходи та методи, які застосовуються для розвитку понятійного мислення на уроках геометрії.

- Оцінка впливу на учнів: дослідити, як використання різних методик впливає на розвиток понятійного мислення учнів, зокрема їх здатність розуміти та застосовувати геометричні концепції.

- Розробка та впровадження ефективних методик для розвитку понятійного мислення на уроках геометрії, що сприяють підвищенню рівня розуміння та практичного застосування геометричних концепцій учнями.

Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

1) Дослідити поняття та структуру понятійного мислення, його роль у процесі навчання.
2) Розглянути співвідношення понятійного мислення з іншими формами мислення
3) Провести аналіз навчальної програми з геометрії (профільний рівень). Визначити, як програма сприяє розвитку понятійного мислення учнів.
4) Дослідити методики викладання геометрії в сучасних умовах навчання.

Ретельний аналіз та оцінка існуючих методик допоможуть виявити найбільш ефективні підходи до розвитку понятійного мислення на уроках геометрії, що сприятиме покращенню якості освіти і формуванню у учнів навичок критичного та аналітичного мислення, необхідних для успіху в сучасному світі.

Важливо враховувати, що геометрія, як дисципліна, надає чудові можливості для розвитку просторового мислення, логічного аналізу та абстрактного мислення. Застосування інтерактивних методів навчання, таких як проектна діяльність, використання комп'ютерних моделей та візуалізацій, а також групова робота, може значно підвищити зацікавленість учнів та їхню активність на уроках.

Крім того, акцент на розв'язання практичних задач, що мають реальні застосування, допоможе учням побачити корисність геометричних знань у повсякденному житті та різних професіях. Включення в навчальний процес елементів дослідницької діяльності та самостійного пошуку інформації сприятиме розвитку ініціативності та самостійності учнів.

Таким чином, впровадження цих підходів не лише покращить якість геометричної освіти, але й підготує учнів до вирішення складних проблем, що вимагають творчого та критичного підходу, що є незамінними навичками в умовах сучасного суспільства, яке швидко змінюється.

Структура кваліфікаційної роботи. Структура кваліфікаційної роботи обумовлена логікою дослідження і складається з таких частин: вступ, два розділи, висновки, список використаної літератури.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РОЗВИТКУ ПОНЯТІЙНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРІЇ

1.1. Поняття та структура понятійного мислення

Мислення – це психічний процес самостійного пошуку і відкриття нового, що включає опосередкування та узагальнення відображення реальності під час аналізу та синтезу, базуючись на практичній діяльності та досвіді. Виділяють такі види мислення:

- наочно-дійове - теоретичне;
- наочно-образне- практичне;
- словесно-логічне - творче.

Розвиток мислення від наочно-дійового через наочно-образне до словесно-логічного показує його онтогенез, тоді як інша класифікація базується на характері задач.[5]

Понятійне мислення – це вищий рівень розумової діяльності, що полягає у формуванні понять, оперуванні ними та встановленні зв'язків між ними. Це здатність абстрагувати суттєві ознаки предметів і явищ, узагальнювати їх та створювати поняття. Понятійне мислення дозволяє учням засвоїти складні теоретичні знання через розуміння ключових понять, законів, правил та взаємозв'язків між ними. Учні здатні виділяти головне, абстрагуватися від другорядних деталей, групувати факти та явища за певними ознаками. Понятійне мислення сприяє переходу від конкретно-образного до абстрактного мислення, що є важливим для вивчення природничих, математичних та гуманітарних дисциплін [1].

Джон Дьюї стверджує, що мислення не є пасивним процесом сприйняття інформації, а активним інструментом, який ми використовуємо для розв'язання проблем, які виникають у нашому житті. [4, стор 29]

Поняттєве мислення потребує володіння всіма інструментами, і лише тоді воно може стати логічним та цілісним.

У сучасному світі, де кількість інформації зростає в геометричній прогресії, важливо навчитися ефективно розуміти складні процеси та явища. Це стосується не лише наукових досліджень, але й повсякденного життя. Основні характеристики процесів та явищ не завжди самоочевидні, тому доходити до суті доводиться через низку випадкових одиничних ознак та/або подій. Для цього потрібно навчитися аналізувати отриману інформацію, синтезувати поодинокі процеси в цілісну картину, виділяти основний фактор, що об'єднує. Цей шлях веде до розвитку навичок понятійного мислення, коли людина зможе абстрагуватися від другорядного та вловити головне у процесі чи явищі.

Навіщо потрібно понятійне мислення? Понятійне мислення є ключовою складовою когнітивного процесу, що дозволяє людині розуміти, аналізувати та інтерпретувати світ навколо себе.

- Для синтезу, аналізу, порівняння, узагальнення та систематизації явищ, ознак, процесів.

Понятійне мислення дозволяє об'єднувати окремі факти та події в єдину картину, знаходячи між ними зв'язок. Це допомагає створювати нові знання та концепції на основі вже наявних. Завдяки здатності до аналізу, ми можемо розділяти складні явища на простіші компоненти, вивчаючи кожен з них окремо. Це сприяє глибшому розумінню складних процесів. Понятійне мислення дозволяє знаходити спільні та відмінні риси між різними об'єктами чи явищами, що допомагає класифікувати та систематизувати інформацію. Завдяки узагальненню, ми можемо робити висновки на основі окремих випадків, створюючи загальні правила та принципи, які можна застосовувати до широкого спектру ситуацій.

- Для розуміння причинно-наслідкових зв'язків явищ та процесів.

Понятійне мислення дозволяє встановлювати зв'язки між причинами та наслідками різних явищ. Це важливо для прогнозування подій та розуміння того, як різні фактори взаємодіють між собою. Без цього ми б не могли передбачати наслідки своїх дій або розуміти, як запобігати негативним подіям.

- Для розуміння суті, родової та видової ієрархії предметів, процесів, явищ.

Понятійне мислення допомагає класифікувати предмети та явища, розуміти їх ієрархію та взаємозв'язки. Це важливо для наукового дослідження, де необхідно визначити місце певного явища в системі знань, а також для повсякденного життя, де розуміння ієрархії допомагає організовувати інформацію та приймати рішення.

- Для розуміння процесів та явищ, які не можна перевірити емпіричним шляхом.

Деякі процеси та явища не можна безпосередньо спостерігати або експериментально перевірити (наприклад, теоретичні концепції в математиці чи філософії). Понятійне мислення дозволяє працювати з такими абстрактними концепціями, створюючи моделі та гіпотези, що допомагають зрозуміти їхню сутність.

- Для повідомлення навколишнім інформації, яку не можна продемонструвати наочно.

Понятійне мислення є основою для вербального спілкування, особливо коли мова йде про абстрактні концепції чи складні ідеї. Це дозволяє передавати інформацію, яка не може бути безпосередньо показана, через слова, символи та метафори, забезпечуючи ефективну комунікацію.

- Для ухвалення рішень та адекватного усвідомлення їх наслідків.

Понятійне мислення є ключовим для прийняття обґрунтованих рішень, оскільки дозволяє враховувати всі наявні фактори, аналізувати можливі наслідки та вибирати найкращий варіант дій. Це допомагає уникати помилок та ефективніше досягати поставлених цілей.

- Для взаєморозуміння у суспільстві, сім'ї, на роботі.

Понятійне мислення сприяє взаєморозумінню між людьми, оскільки дозволяє точно висловлювати свої думки, розуміти інших та спільно вирішувати проблеми. Це важливо для ефективної комунікації в будь-якому соціальному контексті, будь то родина, робочий колектив чи суспільство в цілому.[8]

Понятійне мислення тісно пов'язане з іншими видами мислення, такими як аналітичне, синтетичне та абстрактне мислення. Аналітичне мислення включає розкладання складних проблем на простіші компоненти, що дозволяє учням глибше зрозуміти структуру геометричних об'єктів та їх взаємозв'язки. Синтетичне мислення, в свою чергу, передбачає об'єднання окремих частин у цілісну картину, що є важливим при побудові геометричних моделей.

Абстрактне мислення також грає ключову роль у вивченні геометрії, оскільки дозволяє учням оперувати абстрактними поняттями та уявними об'єктами. Це особливо важливо при вирішенні задач, які не мають безпосереднього зв'язку з реальними об'єктами, але вимагають застосування загальних принципів та теорем.

Іноді понятійне мислення отримує назву абстрактного чи абстрактно-логічного, але це не завжди точно, оскільки абстрактність може бути притаманною не лише розумінню, а й образному способу мислення.

В порівнянні з наочно-дієвим та наочно-образним мисленням, понятійне мислення представляє собою більш пізній етап в розвитку як у філогенезі, тобто в історії людства, так і в онтогенезі, що означає розвиток конкретної людини. Розвиток понятійного мислення не є врodженим або самостійним, а відбувається в дітей під час шкільного віку, спочатку у найпростіших формах, на основі практичного та наочно-чуттєвого досвіду.[5]

Роль математики в розвитку понятійного мислення винятково велика. Причина настільки виняткової ролі математики в тому, що це найбільш теоретична наука з усіх досліджуваних у школі. У ній високий рівень абстракції і у ній найбільш природним способом викладу знань є спосіб переходу від абстрактного до конкретного.

Вивчення геометрії вимагає від учнів не лише запам'ятовування фактів, але й вміння аналізувати просторові об'єкти, встановлювати причинно-наслідкові зв'язки та використовувати абстрактні поняття в конкретних ситуаціях. Це сприяє розвитку аналітичних, синтетичних та узагальнюючих здібностей, які є ключовими компонентами понятійного мислення.

Понятійне мислення включає в себе аналіз та синтез геометричних конструкцій, що передбачає здатність виокремлювати ключові елементи складних структур та будувати їх засновуючись на зазначених властивостях. В основі цього процесу лежить не лише засвоєння готових правил та визначень, але і активне мислення, яке дозволяє учневі самостійно розв'язувати завдання та застосовувати здобуті знання у різних контекстах. Таким чином, понятійне мислення в контексті геометрії визначається не лише розумінням конкретних понять, але і вміння логічно та творчо їх застосовувати. У процесі навчання геометрії, розвиток цієї навички визначає успішність учня у розумінні та використанні геометричних концепцій.

Утворення понять через абстрагування та узагальнення є ключовим процесом у формуванні геометричних понять. Абстрагування - розумова операція виділення суттєвих ознак предметів або явищ та відкидання несуттєвих, випадкових властивостей.

"Формування геометричних понять – це процес абстрагування від конкретних властивостей фігур і виділення їх суттєвих ознак. Як зазначав Іммануїл Кант, "...чисті поняття розуму є формами, які ми самі надаємо різноманітним матеріалам чуттєвого досвіду…". В геометрії цей процес дозволяє учням переходити від конкретних фігур до загальних понять, таких як точка, пряма, трикутник тощо. Здатність абстрагувати є основою для розуміння більш складних геометричних концепцій."

На уроках геометрії учні виконують абстрагування, розглядаючи різноманітні зображення геометричних фігур і виділяючи їх суттєві ознаки, наприклад: для трикутника - наявність трьох сторін та трьох кутів, для паралелограма - протилежні сторони паралельні та рівні, для кола - множина точок на площині, рівновіддалених від заданої точки (центра).

Узагальнення - операція мислення, у процесі якої виділяються загальні, суттєві ознаки предметів або явищ певного роду.

В геометрії узагальнення відбувається шляхом об'єднання фігур різних видів в одне більш загальне поняття на основі виділених спільних суттєвих ознак, наприклад: поняття "многокутник" узагальнює трикутники, чотирикутники, п'ятикутники тощо, як замкнені ламані лінії; поняття "паралелограм" узагальнює прямокутники, ромби, квадрати як чотирикутники з паралельними протилежними сторонами; поняття "коло" узагальнює круги різних радіусів як множини точок, рівновіддалених від центра.

Учні спостерігають низку конкретних прикладів фігур, абстрагують їхні спільні істотні властивості та шляхом узагальнення утворюють нове поняття на вищому рівні абстракції.[6, с. 61]

Цей процес абстрагування та узагальнення лежить в основі оволодіння геометричною термінологією, розуміння логічних зв'язків між поняттями та формування наукових геометричних понять у цілому.

Основні геометричні поняття:

- Точка - невимірний геометричний об'єкт, який не має частин і визначається своїм положенням на площині або в просторі.
- Пряма - нескінченна геометрична фігура, що складається з нескінченної кількості точок, які розміщуються на одній прямій лінії.
- Площина - нескінченна геометрична фігура, що складається з нескінченної кількості точок, які розміщуються на одній плоскій поверхні.
- Кут - геометрична фігура, утворена двома променями, що виходять з однієї точки.

- Трикутник - геометрична фігура, що складається з трьох точок, не розміщених на одній прямій, і трьох відрізків, що їх з'єднують.
- Многокутник - геометрична фігура, обмежена відрізками, що називаються сторонами, і не мають спільних точок, окрім кінцевих.
- Коло - геометрична фігура, що складається з нескінченної кількості точок, рівновіддалених від заданої точки, яка називається центром.
- Сфера - геометрична фігура в тривимірному просторі, що складається з нескінченної кількості точок, рівновіддалених від заданої точки, яка називається центром.[1]

Визначення та властивості геометричних понять встановлюються за допомогою системи аксіом і теорем геометрії.

Види понять:

- Конкретні поняття - точка, пряма, відрізок, промінь, куля та ін. Вони відображають конкретні об'єкти.
- Абстрактні поняття - паралельність, перпендикулярність, рівність фігур та ін. Вони відображають відношення між об'єктами або їх властивості.

Геометрія оперує як конкретними, так і абстрактними поняттями, що становлять основу для побудови геометричних теорій і розв'язування задач.

Визначення понять у геометрії (формулювання визначень через рід та видову відмінність) формуються за допомогою вказування роду (більш широкого поняття) та видової відмінності (специфічних ознак, що відрізняють це поняття від інших понять цього роду). Наприклад: рівнобедрений трикутник - це (рід) трикутник, (видова відмінність) у якого дві сторони рівні; ромб - це (рід) паралелограм, (видова відмінність) у якого всі сторони рівні; піраміда - це (рід) многогранник, (видова відмінність) одна з граней якого (основа) - багатокутник, а інші - трикутники з спільною вершиною. Поняття можуть перебувати у відношеннях підпорядкування, перетину та об'єднання.

У геометрії часто застосовується поділ обсягів понять за певними ознаками. Це дозволяє упорядкувати та систематизувати геометричні поняття. Наприклад, поділ многокутників за кількістю сторін:

Многокутники:

- Трикутники (3 сторони);
- Чотирикутники (4 сторони);
- Паралелограми:
- Прямокутники;
- Ромби;
- Квадрати;
- Трапеції;
- П'ятикутники (5 сторін)

Іншими критеріями поділу можуть бути:

- Опуклі/неопуклі многокутники;

- Рівносторонні/рівнобедрені/різносторонні трикутники;

- Правильні/напівправильні многокутники;

- Многогранники за видом граней (призми, піраміди, тіла Платона)

Такий поділ дозволяє встановити ієрархію понять, визначити місце кожного з них та простежити зв'язки між ними. Це полегшує запам'ятовування, встановлення властивостей фігур та розв'язування задач.

У редакційній статті "*The Wrong Way to Teach Math*" в "*New York Times*" 2016 року політолог і статистик Ендрю Хакер зазначив, що хоча більшість американців вивчали математику в старшій школі, включно з геометрією та алгеброю, 82% дорослих респондентів загальнонаціонального опитування не змогли розрахувати вартість килима, якщо їм були надані його розміри та ціна за квадратний ярд.[12]

У сьогоднішньому світі учні повинні розуміти предмети на достатньо глибокому рівні, щоб мати змогу працювати з ними: знати основи математики, хімії, біології та історії та вміти застосовувати ці знання для розв'язання реальних проблем. Замість того, щоб просто викладати, тестувати та ретестувати математичні процедури, які часто здаються такими, що не мають практичного застосування, вчителі повинні пропонувати проблеми, які дозволять учням навчитися використовувати ці фундаментальні навички, мислити математично та застосовувати ці знання.

Отже, формування та розвиток понятійного мислення є основоположним аспектом навчання геометрії у школі, що забезпечує глибоке розуміння змісту цієї дисципліни та розвиток логічного мислення учнів.

1.2. Роль понятійного мислення у процесі навчання

Понятійне мислення відіграє важливу роль у навчанні учнів, оскільки воно дозволяє їм аналізувати, порівнювати та узагальнювати властивості об’єктів і явищ. Для школярів це мислення є не лише одним із основних, але й таким, що поступово стає домінуючим, підпорядковуючи інші види мислення, зокрема наочно-дієве та наочно-образне.

Понятійне мислення є невід'ємною складовою навчального процесу на всіх його етапах - від сприйняття нової інформації до формування цілісної системи знань та її практичного застосування. Розвиток понятійного мислення є важливим завданням будь-якого навчального предмета, оскільки воно забезпечує глибоке розуміння змісту дисципліни, формування наукового світогляду та розвиток інтелектуальних здібностей учнів[17].

Формування понятійного мислення відбувається поетапно, починаючи з ранніх стадій розвитку дитини. На уроках важливу роль відіграють такі прийоми, як абстрагування, узагальнення, порівняння, класифікація, формулювання визначень. Особливе значення має вивчення навчальних дисциплін з високим рівнем абстракції та теоретичності, зокрема математики та геометрії.

Понятійне мислення допомагає учням розуміти основні поняття геометрії, такі як лінії, кути, фігури та їх властивості. Без глибокого розуміння цих понять учні можуть мати проблеми з вирішенням складних геометричних завдань. Наприклад, вони можуть використовувати знання про геометричні формули та властивості для обчислення площі, об'єму, або вирішення задач на подібність фігур. Вивчення геометрії є важливим етапом у математичному навчанні, оскільки багато концепцій геометрії, таких як вектори, координатна геометрія та тригонометрія, є основою для подальших математичних курсів, таких як алгебра та математичний аналіз. Вивчення геометрії сприяє розвитку критичного мислення, оскільки вимагає аналізу та розуміння логічних зв'язків між різними геометричними об'єктами. Це допомагає учням розвивати навички аналізу та логічного мислення, які є важливими у багатьох аспектах життя. Геометрія допомагає розвивати візуальне мислення та уяву, оскільки багато геометричних понять можна візуалізувати у вигляді рисунків та діаграм. Це допомагає учням легше розуміти геометричні концепції та їх застосування в реальному світі.[19]

Понятійне мислення є вищою формою розумової діяльності людини, що полягає у формуванні понять, оперуванні ними та встановленні логічних зв'язків між ними. Воно відіграє ключову роль в інтелектуальному розвитку особистості на різних вікових етапах.

Передумови розвитку понятійного мислення закладаються ще в дитячому віці. У ранньому дитинстві відбувається перехід від наочно-дійового до наочно-образного мислення. Згодом, набуваючи досвіду взаємодії з предметами, формується здатність до узагальнення та утворення перших найпростіших понять. Подальший розвиток понятійного мислення значною мірою залежить від навчання та цілеспрямованого формування цієї розумової операції.

Понятійне мислення відіграє важливу роль у розвитку інтелекту учня, особливо на уроках геометрії. Геометрія як навчальний предмет має величезний потенціал для розвитку понятійного мислення учнів, що, у свою чергу, відіграє ключову роль в їхньому інтелектуальному зростанні. Понятійне мислення полягає у формуванні абстрактних понять, оперуванні ними та встановленні логічних зв'язків між цими поняттями. На уроках геометрії воно активно формується й набуває подальшого розвитку. Національна рада викладачів математики (NCTM) у своїх стандартах підкреслює важливість розвитку понятійного мислення у геометрії. Вони рекомендують навчати учнів "розуміти та використовувати основні концепції невизначених термінів, таких як точка, лінія і площина; використовувати графічні інструменти для розв'язання задач, включаючи побудову; демонструвати та застосовувати геометричні концепції, пов'язані з лініями, точками і площинами" (NCTM, 2000).[15]

Американські педагоги Г. Драйден і Дж. Вос, автори бестселера «Революція в навчанні. Навчити світ учитися по-новому», вважають, що сучасний учитель має «навчати того, як вчитися» і «навчати того, як думати». Структура мислення, яку вони пропонують, включає розвиток навичок критичного та творчого мислення, вміння аналізувати та синтезувати інформацію, а також розвивати здатність до рефлексії [13, с. 104].

Для геометрії в старшій школі цей підхід є особливо актуальним, оскільки геометрія вимагає не лише механічного запам'ятовування теорем та формул, але й розуміння їх застосування у різних контекстах. Викладання геометрії має сприяти розвитку понятійного мислення, яке полягає у здатності учнів формулювати визначення, проводити класифікації та встановлювати причинно-наслідкові зв'язки між різними геометричними поняттями та об'єктами.

Вивчення геометрії вимагає від учнів опанування широким понятійним апаратом. Основними геометричними поняттями виступають точка, пряма, площина, кут, трикутник, многокутник, коло, сфера тощо. Крім конкретних понять, у геометрії оперують і абстрактними поняттями, такими як рівність, подібність, паралельність, перпендикулярність. Розуміння та засвоєння цих понять є необхідною умовою успішного навчання геометрії.

Формування геометричних понять відбувається через абстрагування суттєвих ознак геометричних фігур та узагальнення. Спостерігаючи різноманітні приклади, учні виділяють спільні істотні властивості й шляхом мисленнєвого узагальнення утворюють нові поняття на вищому рівні абстракції. Дослідження голландських математиків П'єра та Діни ван Хіле призвели до розробки теорії рівнів геометричного мислення (Van Hiele, 1986). Вони запропонували п'ять рівнів розуміння геометрії:

1. Візуалізація.
2. Аналіз.
3. Абстракція.
4. Формальна дедукція.
5. Ригорозність.

На кожному рівні учні використовують понятійне мислення для розв'язання задач і розуміння геометричних об'єктів. Зокрема, на рівні абстракції (третій рівень) учні починають розуміти властивості фігур без конкретних прикладів, що є суттю понятійного мислення[29].

Опанування геометричних понять тісно пов'язане з іншими інтелектуальними операціями, такими як формулювання визначень, поділ обсягів понять, побудова класифікацій. Це сприяє розвитку аналітичних, синтетичних та узагальнюючих здібностей учнів. Вивчення геометричної теорії передбачає формулювання тверджень, проведення доведень, встановлення причинно-наслідкових зв'язків, що є проявом логічного мислення.

Жан Піаже підкреслював важливість когнітивного розвитку у дітей та його зв'язок з вивченням математики. Він вважав, що навчання геометрії сприяє розвитку логічного мислення, що включає формулювання визначень, поділ понять та побудову класифікацій:

"У процесі навчання геометрії учні розвивають свої аналітичні та синтетичні здібності через систематичне дослідження властивостей геометричних об'єктів і їх взаємозв'язків".

Понятійне мислення є основоположним аспектом освітнього процесу, що забезпечує глибоке розуміння предметів, розвиток логічного мислення та здатність застосовувати знання у різних контекстах. Його формування вимагає систематичного підходу, що включає аналіз, синтез, абстрагування та узагальнення. Особливо важливим є розвиток понятійного мислення у математичній освіті, де поняття та їх взаємозв’язки відіграють ключову роль. Подолання викликів у його розвитку потребує використання інноваційних методів навчання, інтеграції теорії з практикою та мотивації учнів до глибокого вивчення предмету.

1.3. Співвідношення понятійного мислення з іншими формами мислення.

Мислення є складним пізнавальним процесом, що включає в себе низку взаємопов'язаних форм та видів. Серед них чільне місце посідає понятійне мислення - найвища форма абстрактного теоретичного мислення людини. Воно полягає у формуванні понять, оперуванні ними та встановленні логічних зв'язків між ними. Понятійне мислення співвідноситься з іншими формами мислення та є результатом їхнього розвитку.

Нижчими формами мислення, що передують понятійному, є наочно-дійове та наочно-образне мислення. Наочно-дійове мислення є найбільш ранньою формою і тісно пов'язане з практичними діями дитини з предметами. Наочно-образне мислення ґрунтується на уявленнях та образах, однак все ще має прив'язку до конкретних ситуацій та об'єктів. Ці форми мислення є необхідним підґрунтям для подальшого розвитку понятійного мислення.

Розвиток понятійного мислення відбувається поступово, починаючи від утворення найпростіших понять на основі досвіду практичної взаємодії з предметами. Згодом формуються більш абстрактні, узагальнені поняття, що охоплюють численні об'єкти та явища. Понятійне мислення набуває автономності від конкретних ситуацій і дій з об'єктами.[28]

Водночас, понятійне мислення не існує ізольовано, а взаємодіє з іншими формами мислення. Так, наочно-образне мислення зберігає актуальність у процесах творчості, уяви, естетичного сприйняття світу. Логічне мислення пов'язане із встановленням причинно-наслідкових зв'язків між поняттями та побудовою логічних умовиводів. Творче мислення забезпечує перетворення та комбінування понять у нові оригінальні ідеї.

Слід зазначити, що понятійне мислення набуває розвитку у процесі оволодіння науковими знаннями, особливо у галузях з високим ступенем абстракції та теоретичності - математиці, фізиці, філософії тощо. Саме тут понятійний апарат і логічні зв'язки між поняттями відіграють визначальну роль.

Понятійне мислення є вищою формою теоретичного мислення, що формується на основі практичного досвіду та взаємодії з нижчими формами. Воно не протиставляється їм, а доповнює та збагачує їх, забезпечуючи можливість пізнання світу на більш високому, абстрактному рівні. У свою чергу, понятійне мислення взаємодіє з логічним, творчим та іншими формами мислення, створюючи умови для всебічного інтелектуального розвитку особистості.

Вищесказане можна подати у вигляді таблиці, яка відображає співвідношення понятійного мислення з іншими формами мислення:

Таблиця 1.3.1

Форма мислення	**Основні характеристики**	**Роль у розвитку понятійного мислення**

Наочно-дійове	Зосереджене на практичних діях з конкретними предметами, рання форма мислення.	Служить основою для розвитку абстрактного мислення через практичну взаємодію з предметами.
Наочно-образне	Базується на уявленнях та образах, прив'язане до конкретних ситуацій та об'єктів.	Створює підґрунтя для абстрагування та узагальнення, необхідних для понятійного мислення.
Понятійне	Вищий рівень абстрактного мислення, формування понять, оперування ними, встановлення логічних зв'язків.	Систематизує знання, забезпечує глибоке розуміння і аналіз теоретичних концепцій.
Логічне	Встановлення причинно-наслідкових зв'язків, побудова логічних умовиводів, узагальнення інформації.	Допомагає структурувати поняття та встановлювати між ними логічні зв'язки.
Творче	Перетворення та комбінування понять у нові оригінальні ідеї, генерація нових рішень та концепцій.	Збагачує понятійне мислення шляхом створення нових зв'язків і оригінальних ідей.
Критичне	Аналіз, оцінка інформації, виявлення помилок та суперечностей, прийняття обґрунтованих рішень.	Підтримує розвиток понятійного мислення через глибокий аналіз і оцінку логічної

		послідовності.
Інтуїтивне	Непряме, миттєве розуміння без чітких логічних підстав, ґрунтується на попередньому досвіді.	Додає швидкості та креативності в процеси абстрагування та формування понять.
Практичне	Орієнтоване на вирішення конкретних задач, застосування знань на практиці.	Допомагає перевіряти і застосовувати абстрактні поняття в реальних умовах.

Ця таблиця демонструє, як різні форми мислення взаємодіють і доповнюють одна одну, сприяючи всебічному розвитку понятійного мислення.

Отже, розвиток понятійного мислення вимагає комплексного підходу, що враховує інтеграцію різних форм мислення. Кожна з них має свій унікальний вплив: наочно-дійове забезпечує конкретну основу для подальшої абстракції, наочно-образне сприяє створенню уявлень, логічне та критичне мислення допомагають структурувати знання і глибше розуміти концепції, а творче мислення забезпечує можливість створення нових ідей.

У навчальному процесі важливо поєднувати різноманітні методи, що розвивають ці форми мислення, зокрема через інтерактивні та проблемно-орієнтовані завдання, експерименти, дискусії та творчі проєкти. Такий підхід сприятиме не лише розвитку понятійного мислення, а й формуванню всебічно розвиненої особистості, здатної критично та творчо мислити, аналізувати інформацію та застосовувати знання в нових умовах.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

З розвитком суспільства мислення еволюціонує, і усе більш переходить до узагальненого, теоретичного мислення в поняттях. З'являються і розвиваються абстракції, числа, простору і часу.

У дослідженні розглядалося питання розвитку понятійного мислення учнів на уроках геометрії, що є важливим завданням сучасної шкільної освіти. Мислення є психічним процесом пошуку і відкриття нового через аналіз, синтез, узагальнення та відображення реальності. Воно базується на практичній діяльності та досвіді. Понятійне мислення відіграє важливу роль у формуванні абстрактного та аналітичного підходів до розуміння складних навчальних матеріалів.

Геометрія, як навчальна дисципліна, створює унікальні умови для розвитку цих навичок завдяки своїй логічній структурі, багатство понять,можливості інтеграції теоретичних і практичних знань. Вивчення геометрії сприяє розвитку в учнів здатності аналізувати просторові об'єкти, встановлювати причинно-наслідкові зв'язки між їх властивостями і застосовувати абстрактні знання в практичних ситуаціях. Особлива увага приділяється ролі геометрії у розвитку аналітичного та синтетичного мислення, що є важливим елементом успішної інтеграції знань.

Чому геометрія так важлива для розвитку понятійного мислення?

Логічна структура: геометрія побудована на чітких аксіомах, теоремах і доведеннях. Вивчення геометрії привчає учнів до логічного мислення, вміння будувати докази, аналізувати і синтезувати інформацію.

Багатство понять: геометрія оперує великою кількістю абстрактних понять (точка, пряма, площина, кут тощо), які учні мають осмислити і застосувати на практиці. Це сприяє розвитку узагальнюючих здібностей та умінню встановлювати зв'язки між різними поняттями.

Просторова уява: геометрія розвиває просторову уяву, що є важливою складовою успішного навчання багатьох дисциплін, зокрема фізики, хімії, технічних наук.

Інтеграція теорії і практики: геометричні поняття та теореми можуть бути застосовані для розв’язання задач з реального життя, що робить навчання більш цікавим і значущим для учнів.

Як розвивати понятійне мислення на уроках геометрії?

- Активні методи навчання: застосування інтерактивних методів (групові роботи, дискусії, проектна діяльність) стимулює учнів до активного осмислення матеріалу і формування власних висновків.
- Використання візуальних моделей: моделі, макети, комп'ютерні програми допомагають учням краще уявити геометричні об'єкти і їхні властивості.
- Розв’язання задач різного рівня складності: задачі з різними рівнями складності дозволяють диференціювати навчання і забезпечити прогрес кожного учня.
- Міжпредметні зв’язки: поєднання геометрії з іншими предметами (фізика, мистецтво, інформатика) зробити навчання більш цікавим і показує практичне застосування геометричних знань.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО РОЗВИТКУ ПОНЯТІЙНОГО МИСЛЕННЯ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРІЇ

2.1. Аналіз навчальної програми та підручників геометрії 10 класу профільного рівня

Навчальна програма з геометрії для 10 класу профільного рівня побудована на засадах Державного стандарту середньої освіти.[2] Основною метою є формування глибоких математичних знань, що мають стати основою для подальшого навчання у ВНЗ за технічними та природничими спеціальностями. Програма передбачає розвиток просторового мислення, логіки та вмінь аналізувати просторові фігури, а також підготовку учнів до застосування геометричних принципів на практиці.

Навчальна програма має на меті:

- Розвиток просторового мислення: учні вчаться розуміти, аналізувати і візуалізувати просторові фігури та їхні властивості.
- Підвищення рівня логічного мислення: програма зосереджена на методах доведення та обґрунтування теорем, що формує у учнів навички логічного аналізу.
- Застосування геометрії у реальних життєвих ситуаціях: учні використовують геометричні знання для вирішення практичних задач, таких як побудова перерізів та визначення розміщення фігур.

Програма складається з таких основних розділів:

1. Вступ до стереометрії.

Розглядаються базові аксіоми, поняття площини, просторові фігури (піраміди, призми), початкові уявлення про многокутники та многогранники. Учні опановують початкові навички зображення перерізів просторових фігур та основні поняття стереометрії.

2. Паралельність прямих і площин у просторі.

У цьому розділі йдеться про паралельність прямих, площин і прямих у площині. Учні вивчають ознаки паралельності та методи побудови перерізів. Особлива увага приділяється застосуванню знань у моделюванні реальних ситуацій та наочному розумінні просторових властивостей фігур.

3. Перпендикулярність прямих і площин у просторі.

Розділ присвячений ознакам та властивості перпендикулярних фігур, способи побудови перпендикулярів та вимірювання відстаней у просторі. Учні вивчають поняття двогранного кута, його властивості, а також методи побудови ортогональних проекцій, які є корисними в технічному кресленні.

4. Координати, вектори та геометричні перетворення у просторі.

У розділі розглядаються методи використання координат і векторів для розв'язання геометричних задач. Учні вчаться знаходити довжини векторів, скалярний добуток та застосовувати знання про координати до аналізу просторових об’єктів.

Результати навчання оцінюються через контрольні роботи, практичні завдання та тематичні перевірки. Учні демонструють розуміння аксіом і теорем, здатність розв’язувати задачі з використанням векторних і координатних методів, а також уміння застосовувати отримані знання для розв’язання прикладних задач.

Для ефективного засвоєння цього предмета важливо забезпечити учнів якісними навчальними матеріалами, що відповідають сучасним вимогам, а також методично вивіреними підручниками, які б сприяли глибокому розумінню та практичному застосуванню геометричних знань.

Аналіз навчальної програми та підручників є важливим етапом у забезпеченні якості освіти, оскільки дозволяє виявити відповідність навчального матеріалу вимогам стандартів, а також визначити переваги й недоліки методичних підходів, що використовуються у підручниках. Це, в свою чергу, сприяє підвищенню якості викладання, адаптації навчального процесу до потреб учнів та створенню умов для ефективної підготовки до державних іспитів та майбутнього навчання [24].

Основна мета даного аналізу - оцінити зміст та методичне забезпечення навчальної програми і підручників з геометрії для 10 класу профільного рівня, а також визначити їх відповідність вимогам сучасного навчання. Завдання аналізу включають:

- Вивчення структури та змісту навчальної програми з геометрії.
- Аналіз основних тем і підходів до їх викладання.
- Оцінку відповідності підручників програмі та їх дидактичної ефективності.
- Виявлення сильних і слабких сторін навчальних матеріалів для покращення процесу навчання.

Вивчення структури та змісту навчальної програми з геометрії.

Підручник з геометрії для 10 класу, написаний О.С. Істером [1], організовано за структурою, яка відповідає державним освітнім стандартам. Основний зміст охоплює:

- Введення в стереометрію, зокрема основні поняття та аксіоми, що формують базу для вивчення геометрії в просторі.
- Вивчення різних просторових фігур, таких як прямокутний паралелепіпед, куб, піраміда, і поняття многогранників.
- Методи побудови та розв’язання задач, що охоплюють побудову перерізів многогранників. Програма спрямована на розвиток просторової уяви, логічного мислення, та вміння застосовувати геометричні знання на практиці.

Аналіз основних тем і підходів до їх викладання.

Основні теми підручника включають аксіоматичний метод побудови, побудову та розв’язання задач, а також розгляд різних типів просторових фігур і методів роботи з ними.

Підхід до викладання у підручнику з геометрії для 10 класу, розроблений О.С. Істером, базується на ефективному поєднанні теоретичних знань і практичних завдань. Це забезпечує глибоке засвоєння матеріалу та дозволяє учням поступово від теорії переходити до розв'язання практичних задач. Теоретичні відомості подаються у формі коротких, логічно побудованих пояснень, що дозволяє легко зрозуміти нові поняття та принципи. Кожен новий параграф починається з визначень та аксіом, необхідних для розуміння подальших тем. Введення нових понять побудовано на вже відомих поняттях з планіметрії, що полегшує засвоєння інформації. Важливі твердження підтверджуються прикладами, які допомагають учням побачити, як теоретичні положення використовуються для розв'язання задач.

Підручник містить графічні зображення та схеми, які наочно демонструють властивості фігур і об'єктів у просторі, підвищуючи розуміння матеріалу. Теоретичний матеріал подано таким чином, що кожен наступний параграф ґрунтується на попередньому. Це дозволяє учням поступово засвоювати нові знання, не відчуваючи при цьому перевантаження.

Практичні завдання у підручнику структуровані за рівнями складності: від простих до високого рівня, що дозволяє ефективно організувати навчання учнів з різними рівнями підготовки:

Завдання початкового рівня: ці завдання допомагають закріпити основи, дозволяючи учням легко опанувати нові поняття без перевантаження. Вони спрямовані на розуміння основних понять та простих операцій.

Завдання середнього та достатнього рівня: на цьому етапі учні вчаться застосовувати вивчений матеріал для вирішення задач. Завдання середнього рівня включають практичні застосування теорем та аксіом, а достатнього рівня – завдання з більшою кількістю кроків, які формують стійке розуміння теми.

Завдання високого рівня: ці завдання розроблені для учнів з високим рівнем підготовки або тих, хто бажає поглибити свої знання. Вони включають задачі підвищеної складності, що розвивають аналітичні здібності та навички просторового мислення.є

Підручник використовує диференційовані завдання та методичні прийоми, які сприяють глибшому розумінню предмета та підвищують рівень мотивації учнів. Підручник містить рубрику «Життєва математика», де пропонуються завдання з реального життя. Це допомагає учням побачити практичну цінність геометричних знань та застосувати їх у повсякденних ситуаціях. Для закріплення матеріалу наведені рубрики та завдання, які сприяють активному залученню учнів у процес навчання. Наприкінці кожного параграфа наведено запитання та тестові завдання, що допомагають учням самостійно оцінити рівень засвоєння матеріалу, визначити свої сильні сторони та аспекти, що потребують додаткового опрацювання. Підручник включає завдання на побудову малюнків і виконання графічних робіт, що розвиває навички просторового мислення, а також сприяє формуванню відповідальних навичок проектної діяльності. Така структура завдань сприяє формуванню в учнів навичок самостійного опрацювання навчального матеріалу.

Для розвитку пізнавального інтересу та формування глибоких знань у підручнику передбачені спеціальні рубрики: нестандартні та олімпіадні задачі, завдання для самостійного дослідження. Рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих» включає складні завдання, які дозволяють учням з високим рівнем мотивації поглибити знання та вдосконалити свої аналітичні здібності. В окремих параграфах підручника є завдання для підготовки до олімпіад та математичних конкурсів, що мотивують учнів до самостійного пошуку інформації, систематизації знань і підвищення рівня власної математичної підготовки.

Завдяки такій побудові матеріалу, підручник з геометрії для 10 класу забезпечує глибоке та повне засвоєння теоретичних основ геометрії і дозволяє учням з різними рівнями підготовки розвивати свої здібності, працювати на свій максимум і поступово долати нові освітні виклики.

2.2. Сучасні методи викладання геометрії

Сучасне викладання геометрії зазнало значних змін під впливом новітніх технологій та інноваційних педагогічних методик, що спрямовані на підвищення інтересу учнів до предмету та розвиток їхнього критичного і понятійного мислення. Основна мета сучасних методів викладання полягає у формуванні в учнів навичок не лише розуміння теоретичних основ геометрії, але й вміння застосовувати знання на практиці, працювати з абстрактними поняттями та знаходити рішення складних задач.

Одним з ключових підходів у сучасному викладанні геометрії є використання інтерактивних технологій. Викладачі дедалі частіше використовують спеціалізоване програмне забезпечення, таке як GeoGebra або Desmos, яке дозволяє візуалізувати геометричні поняття в динамічній формі. Це сприяє кращому розумінню учнями просторових властивостей фігур, допомагає створювати та змінювати моделі, бачити взаємозв'язок між різними елементами геометричних фігур.

GeoGebra - це динамічне математичне програмне забезпечення для всіх рівнів освіти, яке об'єднує геометрію, алгебру, електронні таблиці, графіки, статистику та обчислення в одне ціле. Крім того, GeoGebra пропонує онлайн-платформу з понад 1 мільйоном безкоштовних ресурсів, створених нашою багатомовною спільнотою. Цими ресурсами можна легко поділитися через нашу платформу для співпраці GeoGebra Клас, де прогрес учнів можна відстежувати в реальному часі.

GeoGebra - це спільнота мільйонів користувачів майже в кожній країні. Вона стала провідним постачальником програмного забезпечення для динамічної математики, що підтримує наукову, технологічну, інженерну та математичну (STEM) освіту та інновації у викладанні та навчанні в усьому світі. Математичний механізм GeoGebra забезпечує роботу сотень освітніх веб-сайтів у всьому світі різними способами: від простих демонстрацій до повних систем онлайн-оцінювання [20]. GeoGebra дає змогу наочно демонструвати складні геометричні концепції, наприклад:

- Побудову трикутників, кіл, парабол.
- Демонстрацію властивостей симетрії, подібності або рівності.
- Дослідження поведінки фігур при трансформаціях (зсуви, обертання, масштабування).

Учні можуть бачити, як змінюється форма або властивості фігури у відповідь на зміни параметрів, що допомагає зрозуміти зв'язки між елементами.

Як GeoGebra впливає на розвиток понятійного мислення?

1. Глибше розуміння понять

Учні починають краще розуміти абстрактні геометричні поняття, оскільки вони бачать їх у динамічній формі. Наприклад, поняття "медіана трикутника" стає більш зрозумілим, коли її положення можна змінювати й аналізувати в реальному часі.

2. Розвиток аналітичного мислення

Учні отримують можливість досліджувати зв’язки між об’єктами, прогнозувати результати змін та перевіряти свої гіпотези. Це формує вміння аналізувати ситуації та застосовувати понятійний апарат до розв'язання задач.

3. Формування системного підходу

Під час роботи в GeoGebra учні навчаються бачити геометричні об'єкти не ізольовано, а як частини системи, де всі елементи взаємопов'язані.

4. Підтримка навичок моделювання

Завдяки створенню моделей учні вчаться будувати геометричні об’єкти на основі теоретичних знань, що допомагає розвивати понятійне мислення у контексті реальних задач.

За допомогою таких інструментів учні можуть самостійно досліджувати властивості фігур, спостерігати, як змінюються кути, сторони та інші параметри при трансформаціях, що підвищує рівень засвоєння матеріалу.

Іншою важливою методикою є проблемно-орієнтоване навчання. Замість того щоб просто передавати знання, вчитель ставить перед учнями реальні проблеми або завдання, які вони мають розв'язати. Наприклад, задача може стосуватися архітектурного планування, де учні мають застосувати свої знання про кути, симетрію, площі тощо. Такий підхід дозволяє розвивати вміння знаходити шляхи розв’язання та застосовувати математичні знання в реальних умовах, що сприяє формуванню навичок логічного і критичного мислення.

Проєктна діяльність також набирає популярності, оскільки вона дозволяє учням глибше опановувати геометричні теми шляхом створення власних проєктів, у яких вони можуть застосувати знання, здобуті на уроках. Це можуть бути моделі архітектурних споруд, конструкцій чи дизайни меблів, які учні розробляють, використовуючи різні геометричні форми та принципи. Проєктна робота не лише робить процес навчання захопливим, а й формує у школярів важливі навички дослідницької роботи, планування та роботи в команді.

Не менш значущою методикою є диференційоване навчання, яке враховує індивідуальні потреби та рівень підготовки кожного учня. Викладачі підбирають різні завдання та матеріали, що відповідають здібностям учнів, таким чином, щоб кожен міг рухатися у своєму темпі. Це дозволяє створювати атмосферу підтримки, коли учні, незалежно від рівня їхньої підготовки, можуть успішно вивчати геометрію та розвивати свої навички [16].

Сторітеллінг (англ. storytelling) – це мистецтво створення цікавих та захоплюючих розповідей, що допомагає передати інформацію в доступній та зрозумілій формі. Це потужний інструмент, який може значно збагатити процес навчання геометрії, роблячи його більш цікавим і ефективним.

Сторітеллінг, як мистецтво цікавої розповіді, може стати ефективним інструментом на уроках геометрії в старших класах на профільному рівні. Використання сторітеллінгу сприяє кращому розумінню абстрактних математичних концепцій та підвищенню мотивації учнів. Вчитель має можливості інтеграції сторітеллінгу в процес навчання геометрії, зокрема через історичні контексти, геометричні пригоди, прикладні завдання, використання геометрії в мистецтві та архітектурі.

Методика використання сторітеллінгу на уроках геометрії:

1. Введення нових понять через історії.

Кожне нове поняття в геометрії можна ввести через цікаву історію. Наприклад, пояснюючи поняття трикутника, вчитель може розповісти історію про стародавнього архітектора, який використовував трикутники для створення міцних будівель. Така історія допоможе учням запам’ятати основні властивості трикутників та їхню важливість у будівництві.

2. Використання історичних контекстів.

Геометрія має багату історію розвитку, і багато її понять були відкриті або використовувались у давнину. Розповіді про відомих математиків, як-от Евклід, Архімед чи Піфагор, та їхні відкриття можуть оживити уроки геометрії. Наприклад, розповідь про те, як Піфагор відкрив свою відому теорему, може зробити цей матеріал більш запам’ятовуваним.

3. Створення власних історій.

Учні можуть створювати власні історії, використовуючи геометричні поняття. Це може бути проєктом, де кожен учень чи група учнів створює історію про те, як певний геометричний об’єкт використовується в реальному житті. Наприклад, як архітектор використовує паралелограми в дизайні мостів або як інженер використовує конуси у виготовленні деталей.

Використання сторітеллінгу на уроках геометрії може значно підвищити ефективність навчання, зробити його цікавим і захоплюючим для учнів. Це сприяє кращому розумінню та запам’ятовуванню матеріалу, розвиває уяву та творчі здібності учнів, а також допомагає побачити практичне застосування теоретичних знань. Інтеграція історій у навчальний процес є інноваційним підходом, який заслуговує на ширше впровадження у шкільну програму.

4. Дослідницьке навчання

На уроках математики варто залучати учнів до дослідницької діяльності, щоб ознайомити їх з основними етапами наукового дослідження, такими як спостереження та експеримент.

Дослідницька діяльність на уроках передбачає:

- дослідницький підхід до введення понять;
- виконання дослідницьких робіт;
- розв'язування задач на дослідження

При дослідницькому підході вчитель не надає нову інформацію в готовому вигляді, а допомагає учням самостійно дійти до розуміння поняття через навчально-пізнавальну діяльність.

Дослідницькі завдання можна виконувати як у класі, так і вдома. Наприклад, під час вивчення теми "Центральне проєктування", учні можуть дослідити, яку тінь відкидає квадратний аркуш паперу під світлом настільної лампи.

Важливою складовою сучасного викладання геометрії є використання міждисциплінарного підходу. Наприклад, на уроках геометрії можуть інтегруватися теми з фізики, інформатики чи навіть мистецтва, що робить навчання більш цікавим та показує учням зв'язок геометрії з іншими науками та сферами діяльності. Такий підхід розширює кругозір учнів і дозволяє їм краще зрозуміти практичну значущість знань.

На завершення, сучасні методи викладання геометрії спрямовані на створення умов для активної участі учнів у навчальному процесі, розвитку їхнього критичного мислення та творчих здібностей. Інтерактивність, індивідуальний підхід, практична спрямованість завдань і міждисциплінарні зв'язки роблять вивчення геометрії більш ефективним та захопливим, допомагаючи учням краще зрозуміти й застосувати отримані знання у повсякденному житті.

2.3. Методичні особливості розвитку понятійного мислення на уроках геометрії під час дистанційного навчання

Дистанційне навчання стало невід'ємною частиною освітнього процесу у всьому світі, особливо з початку пандемії COVID-19. Це нововведення не лише відкрило нові можливості для вчителів і учнів, а й поставило перед системою освіти ряд викликів. Дистанційні уроки забезпечують доступ до знань у будь-який час і в будь-якому місці, але вимагають від усіх учасників процесу нових навичок та адаптацій.

Організація дистанційних уроків потребує ретельного планування та підготовки. Вчителі повинні розробити структуру уроку, яка включає:

- Визначення мети уроку: чітке формулювання цілей навчання дозволяє учням зрозуміти, чого вони повинні досягти в результаті заняття.
- Підбір матеріалів: використання мультимедійних ресурсів, таких як відео, презентації, електронні підручники, а також інтерактивні завдання для збереження інтересу учнів.
- Вибір платформи: використання платформ для онлайн-уроків (Zoom, Google Meet) та систем управління навчанням (Moodle, Google Classroom) для організації навчального процесу.
- Створення розкладу: формування чіткого графіка занять, що враховує потреби учнів та дає можливість планувати самостійні роботи.

Дистанційне навчання, яке отримало широке поширення має свої унікальні характеристики, що впливають на процес навчання, як з позитивного, так і з негативного боку. Серед недоліків можна виділити технічні проблеми, які стали справжнім викликом для багатьох учнів. Залежність від технологій означає, що учні можуть зіткнутися з проблемами доступу до Інтернету або нестабільним з'єднанням, що обмежує їх можливості для участі в онлайн-заняттях. Ці технічні збої під час уроків можуть не лише перешкоджати процесу навчання, але й викликати у студентів почуття фрустрації, що негативно впливає на їх мотивацію.

Ще однією важливою проблемою є відсутність особистого контакту. Дистанційне навчання обмежує можливості особистого спілкування між вчителями та учнями. Це може призвести до відчуття ізоляції, що негативно впливає на емоційний стан учнів і їх соціалізацію. Особисті стосунки, які формуються під час традиційних уроків, є важливими для розвитку довіри та взаєморозуміння, а їх відсутність може призвести до зниження мотивації до навчання.

Дистанційне навчання також вимагає від учнів високого рівня самоорганізації та дисципліни. Багато учнів, особливо молодшого віку, можуть мати труднощі з концентрацією на навчанні без фізичного контролю з боку вчителя. Це часто призводить до відволікань, що може знижувати продуктивність навчання. Паралельно, не всі учні мають рівні можливості для доступу до ресурсів навчання. Деякі з них можуть стикатися з проблемами, такими як відсутність комп'ютерів або смартфонів, що ще більше погіршує ситуацію.

Серед недоліків дистанційного навчання варто також відзначити ускладнений процес контролю за знаннями учнів. Вчителі можуть зіткнутися з труднощами при оцінюванні знань учнів, оскільки дистанційний формат ускладнює моніторинг виконання завдань і контроль за успішністю. Це може призвести до зниження якості навчання, адже вчителі не завжди можуть точно оцінити, наскільки учні засвоїли матеріал. Відсутність фізичного спостереження також може сприяти випадкам шахрайства під час іспитів, що підриває довіру до освітньої системи.

Проте, незважаючи на велику кількість недоліків, дистанційне навчання має і свої переваги. Гнучкість є одним із ключових аспектів цього формату навчання. Учні мають можливість обирати зручний час для занять, що дозволяє їм поєднувати навчання з іншими обов'язками. Це особливо актуально для студентів, які працюють або мають інші зобов'язання. Завдяки цій гнучкості, учні можуть організувати своє навчання так, щоб воно було максимально ефективним.

Дистанційне навчання в значній мірі впливає на формування понятійного мислення учнів під час вивчення геометрії, і цей вплив може бути як позитивним, так і негативним. Понятійне мислення, яке передбачає здатність осмислювати, структурувати та узагальнювати інформацію, є ключовим у процесі засвоєння геометричних концепцій. Досліджуючи цей аспект, важливо враховувати кілька ключових факторів.

По-перше, дистанційне навчання забезпечує доступ до різноманітних цифрових ресурсів, які можуть суттєво збагачувати процес навчання. Учні можуть користуватися інтерактивними платформами, відео-уроками та онлайн-симуляціями, які надають візуальне уявлення про геометричні фігури та їх властивості. Це сприяє розвитку наочно-образного мислення, що, в свою чергу, служить основою для формування більш абстрактних понять. Візуалізація геометричних концепцій через технології може допомогти учням краще розуміти складні теми, такі як площа, об'єм, симетрія та пропорції.

По-друге, дистанційне навчання стимулює самостійність учнів у навчальному процесі. Вони мають можливість самостійно планувати свій час, обирати теми для поглибленого вивчення та повертатися до матеріалів, якщо це необхідно. Ця автономія може сприяти більш глибокому засвоєнню геометричних понять, оскільки учні стають активними учасниками навчального процесу. Вони можуть працювати над задачами в зручному для себе темпі, що дозволяє їм осмислювати та узагальнювати отриману інформацію, формуючи свої власні поняття.

Однак, разом з перевагами, дистанційне навчання також має недоліки, які можуть негативно вплинути на формування понятійного мислення. Відсутність практичної взаємодії з предметами та відчуття фізичного простору може обмежувати учнів у використанні наочно-дійового мислення, яке є важливим етапом на шляху до понятійного мислення. Наприклад, виконання практичних завдань або роботи з геометричними матеріалами в класі допомагає учням краще зрозуміти просторові уявлення. Відсутність таких можливостей у дистанційній формі навчання може зменшити ефективність засвоєння матеріалу.

Таким чином, дистанційне навчання має потенціал впливати на формування понятійного мислення учнів на уроках геометрії як позитивно, так і негативно. Використання цифрових технологій може збагачувати процес навчання та сприяти розвитку абстрактного мислення, однак важливо також враховувати можливі труднощі, пов'язані з недостатнім зворотним зв'язком та відсутністю практичного досвіду. Для максимально ефективного формування понятійного мислення в умовах дистанційного навчання необхідно знайти баланс між використанням технологій та забезпеченням необхідної підтримки і взаємодії.

2.4 Практична реалізація методики понятійного мислення

Методичні розробки уроків є важливою складовою процесу вдосконалення навчання та допомагають учителю ефективно організовувати навчальний процес. У цьому розділі розглядаються методичні розробки уроків для теми «Координати. Вектори. Геометричні перетворення у просторі», зокрема уроки, що стосуються параграфів 13, 14, з підручника геометрії [1, с. 237 - 283], а також самостійна робота, орієнтована на ці теми.

Урок 1: Прямокутні координати у просторі (§13)

Тема уроку присвячена вивченню координат точок у тривимірному просторі, їх визначенню та застосуванню для побудови геометричних фігур. Під час уроку учні повинні освоїти методику запису координат точок за допомогою декартової системи координат, навчитися знаходити відстань між точками в просторі, а також розв'язувати задачі на використання координат для опису положення точок. Особлива увага звертається на вправи для закріплення отриманих навичок, де учні можуть застосувати теоретичні знання до розв'язання практичних задач.

Зміст уроку:

Цей урок знайомить учнів із системою декартових координат у тривимірному просторі. Учні вчаться визначати положення точок за допомогою координат, знаходити відстань між точками та будувати геометричні фігури у просторі.

Методи навчання:

- Інтерактивні завдання для самостійного застосування координат.
- Використання комп’ютерних програм для візуалізації координат.
- Завдання на побудову фігур у просторі за заданими координатами точок.

Урок 2: Вектори у просторі. Дії над векторами (§ 14)

Урок присвячений вивченню векторів: їх визначенню, операціям над векторами, а також застосуванню векторів у розв’язуванні геометричних задач. Учні вивчають базові властивості векторів, такі як додавання, віднімання, множення на число, а також визначення довжини вектора. Під час уроку проводяться практичні завдання для закріплення основних векторних операцій, зокрема задачі на обчислення векторів у різних координатних системах та застосування векторів для знаходження середини відрізка.

Зміст уроку:

Вивчення базових понять векторної алгебри, включаючи визначення векторів, операції додавання, віднімання та множення на число. Практична складова включає знаходження довжини вектора та застосування векторів у розв’язанні задач.

Методи навчання:

1. Пояснювальний метод із використанням візуалізації.

На дошці демонструється розташування векторів у просторі, їх додавання і віднімання графічним способом.

2. Практичні завдання на дії з векторами.

Учні розв’язують задачі з підручника або додаткових джерел, які включають різні типи операцій з векторами.

Урок 3: Розв'язання вправ. Вектори у просторі. Дії над векторами

Урок спрямований на закріплення знань і навичок, отриманих під час вивчення теми "Вектори у просторі". Учні виконують практичні вправи, пов’язані з діями над векторами: додаванням, відніманням, множенням на число та знаходження довжини вектора. Особлива увага приділяється розв’язанню задач, де вектори застосовуються для знаходження відстані між точками, координат середини відрізка та перевірки колінеарності векторів.

Зміст уроку:

Цей урок зосереджений на закріпленні матеріалу попереднього уроку через інтенсивну практичну роботу. Учні виконують завдання, спрямовані на застосування знань для розв’язання задач із координатами та векторами.

Методи навчання:

1. Робота в групах.

Учні об’єднуються та розв’язують завдання різної складності, зокрема знаходження середини відрізка, обчислення довжини вектора та перевірка колінеарності.

2. Рефлексія та аналіз.

Після виконання завдань учні обговорюють свої помилки, аналізують, як уникнути їх у майбутньому, та діляться власними способами розв’язання.

ВИСНОВКИ

В цьому дослідженні була проаналізована навчальна програма з геометрії для 10 класу профільного рівня[2]. Основна мета програми полягає у формуванні глибоких математичних знань, розвитку просторового мислення та логіки, а також у здатності аналізувати просторові фігури та застосовувати геометричні принципи в реальному житті.

Програма охоплює ключові розділи, що послідовно розкривають базові поняття стереометрії, аксіоми, методи дослідження паралельності та перпендикулярності прямих і площин, геометричні перетворення з використанням координат і векторів. Такі теми, як побудова перерізів, двогранні кути та ортогональні проєкції, забезпечують практичну спрямованість навчання, сприяючи формуванню навичок, необхідних для технічного креслення та інших прикладних завдань.

Для ефективного засвоєння матеріалу важливо забезпечити учнів сучасними підручниками та методичними матеріалами. Підручник О.С. Істера, зокрема, відповідає державним стандартам та містить структуровані розділи, які охоплюють основні теми геометрії, включаючи стереометрію, властивості просторових фігур і методи їх аналізу.

Аналіз навчальної програми та підручників дає можливість оцінити відповідність змісту освітнім стандартам і дидактичну ефективність викладання. Сильні сторони матеріалів включають глибоке розкриття теоретичних основ та практичне застосування знань. Серед можливих недоліків можуть бути недостатня інтеграція з сучасними технологіями або відсутність детального акценту на прикладних аспектах.

Сучасне викладання геометрії відзначається значним прогресом завдяки впровадженню новітніх технологій та інноваційних педагогічних методик. Основна мета цих змін полягає у підвищенні зацікавленості учнів, розвитку їхнього критичного мислення та здатності застосовувати геометричні знання у практичних ситуаціях. Ці підходи роблять навчання динамічним, інтерактивним і спрямованим на формування комплексних компетентностей.

Одним із провідних напрямків у викладанні геометрії є використання інтерактивних технологій, таких як програми GeoGebra або Desmos. Завдяки їм учні мають змогу візуалізувати складні геометричні поняття, змінювати моделі й досліджувати властивості фігур у реальному часі. Такий підхід значно підвищує рівень засвоєння матеріалу та сприяє розвитку просторового мислення.

Іншим важливим методом є проблемно-орієнтоване навчання, коли учні вирішують реальні задачі, що потребують застосування знань у контексті. Наприклад, задачі з архітектурного проектування або дизайну не лише розвивають вміння знаходити рішення, а й сприяють формуванню логічного та критичного мислення.

Таким чином, сучасні методи викладання геометрії спрямовані на активізацію пізнавальної діяльності учнів, розвиток їхнього мислення та практичних навичок. Інтеграція технологій, проблемно-орієнтованого та проєктного підходів, сторітеллінгу та дослідницького навчання дозволяє зробити уроки геометрії не лише ефективними, а й захоплюючими, що сприяє формуванню успішного, критично мислячого покоління.

Практична частина роботи включає в себе розробку уроків профільного рівня з використанням методик, спрямованих на формування понятійного мислення учнів. Представлені уроки забезпечують детальне розуміння ключових геометричних понять, зокрема координат у просторі та векторів у просторі.

Актуальність дослідження підтверджується необхідністю модернізації підходу до викладання геометрії в контексті зміну сучасній системі освіти. Розроблені методичні матеріали можуть бути успішно використані на уроках геометрії в 10 класі профільного рівня.

Таким чином, проведене дослідження підтверджує важливість системного підходу до формування понятійного мислення учнів через комплексний розвиток когнітивних навичок, інтеграцію теоретичних знань із практичним застосуванням та використання сучасних технологій у навчанні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Геометрія: (профіл. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед, освіти / О.С. Істер, О.В. Єргіна. — Київ : Генеза, 2018. — 368 с.
2. Навчальна програма з геометрії для 10 класу профільного рівня
3. John Dewey: "How We Think"
4. Аксютина І. В. Методика формування просторової уяви учнів на факультативних заняттях. Інженерно–будівельний вісник - 2017 р.
5. Логічні основи понятійного мислення - Бібліотека BukLib.net (інтернет-ресурс)
6. Василенко А. В. Рівні розвитку просторового мислення учнів на уроках геометрії. Наука і школа. 2018
7. Буйницька О. П. Інформаційні технології та технічні засоби навчання. К.: Центр учбової літератури, 2018 .
8. Основи понятійного мислення (інтернет-ресурс)
9. Жан Піаже: теорія когнітивного розвитку, стадії розвитку мислення.
10. Бреус І. А. Розвиток просторового мислення учнів в умовах отримання додаткового математичної освіти / І. А Бреус // Інноваційна наука. – 2016.
11. Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
12. *The Wrong Way to Teach Math*
13. Драйден Г., Джаннетт Вос. Революція в навчанні. Навчити світ вчитися по-новому. Парвінь, 2003. 670 с.
14. Малафіїк І.В. Дидактика: Навчальний посібник. – К.: Кондор, 2005. – 397 с
15. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

16. Сенчілов В. В. Застосування інтерактивних технологій при вивченні курсу геометрії в школі.

17. Пасічник І. Д. Мислення як предмет психології / І. Д. Пасічник // Наукові записки [Національного університету «Острозька академія»]. – 2013. – Вип. 25.

18. Мойсеєнко Л. А. Психологія творчого математичного мислення / Л. А. Мойсеєнко. – Івано-Франківськ : Факел, 2003. – 481 с.

19. Саніна Є. І. Розвиток просторового мислення в процесі навчання стереометрії / Є. І. Саніна, О. А. Гришина. Вісник РУДН, серія Психологія та педагогіка. 2013. № 4.

20. GeoGebra: Використання в освіті / Автори: A. Leuchter, E. Blazek, T. Kalt. — 2016.

21. Бродський Я. Компетентнісний підхід у навчанні математики. Математика в школі. 2018. №10. С. 2–9

22. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навч. посіб. / В. В. Корольський, Т. Г. Крамаренко, С. О. Семеріков та ін. ; наук. ред. М. І. Жалдак. – Кривий Ріг : Книжкове вид-во Кирєєвського, 2009. – 316 с.

23. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. Київ : Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.

24. Шишкіна М. П. Методологічний підхід до оцінювання якості програмних засобів навчання / М. П.Шишкіна. Нові технології навчання: наук.- метод. зб. / МОН України, Ін-т інновац. технологій і змісту освіти. Київ, 2010. Вип. 61. С. 22–28.

25. Межейнікова Л.С. Про визначення поняття активізація пізнавальної діяльності учнів в процесі навчання. Дидактика математики: проблеми дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. 2005. Вип. 23. 112 с.

26. Ящик О. Б. Формування системно-логічного мислення старшокласників як міждисциплінарна проблема / О. Б. Ящик // Наукові записки ТНПУ ім. В. Гнатюка. – Тернопіль : ТНПУ, 2011. – № 5. – С. 137-145.

27. Максименко С.Д., Соловієнко В.О. Загальна психологія: навчальний посібник. К.: МАУП, 2000.-256 с

28. Пометун О. Як оцінити діяльність учнів на інтерактивному уроці // Доба. 2012. С.2-6

29. Van Hiele, P. M. & van Hiele-Geldof, D. (1986). *The development of geometric thought*. In J. L. Becker & B. J. Biddle (Eds.), Proceedings of the fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (pp. 1-8). Utrecht, The Netherlands: University of Utrecht.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Конспект уроку 1

Тема: Прямокутна система координат у просторі

Мета уроку:

Навчальна: ознайомити учнів із поняттям прямокутної системи координат у просторі, навчити знаходити координати точок у тривимірному просторі та застосовувати ці знання для розв'язання задач.

Розвивальна: розвивати просторове мислення, навички аналізу та здатність до побудови логічних висновків.

Виховна: виховувати інтерес до математики, зокрема до геометрії у просторі, та відповідальність під час виконання практичних завдань.

Обладнання: підручник з геометрії. Дошка/мультимедійна презентація з ілюстраціями.

Тип уроку: засвоєння нових знань

Хід уроку:

1. **Організаційний момент (2 хв)**

Перевірка присутності, підключення учнів, налаштування на урок.

2. **Актуалізація знань (5 хвилин)**

Повторення матеріалу про систему координат на площині.

Питання до класу: які переваги використання координат для геометричних побудов?

3. **Вивчення нового матеріалу (20 хвилин)**

Прямокутна система координат у просторі задається трьома взаємно перпендикулярними прямими x, y, z, які перетинаються в одній точці O (початок координат).

Вісь x - вісь абсцис.

Вісь y - вісь ординат.

Вісь z - вісь аплікат.

Півосі вважаються додатними або від'ємними залежно від напрямку стрілок.

Кожній точці у просторі відповідає впорядкована трійка чисел (x;y;z), які є проєкціями точки на відповідні осі.

Координати точки у просторі - це впорядкована трійка чисел (x;y;z), яка однозначно визначає положення точки в тривимірному просторі.

Прямокутна декартова система координат у просторі:

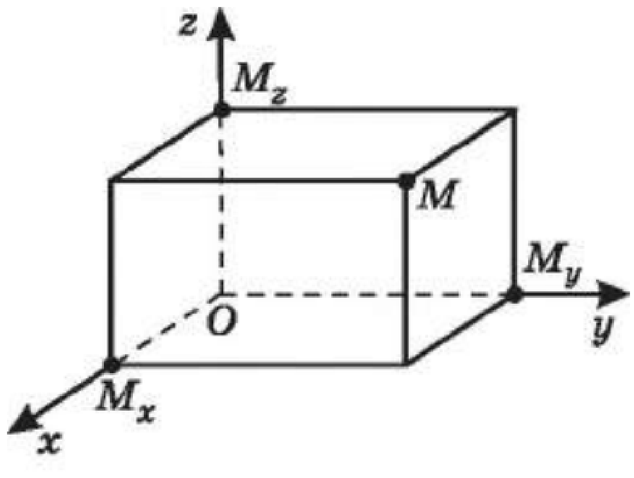
Містить три взаємно перпендикулярні осі: Ox, Oy, Oz.

Точка перетину цих осей називається початком координат O(0;0;0).

Площини Oxy, Oyz, Oxz є координатними площинами.

Якщо точка розташована на одній із площин, то одна з її координат дорівнює нулю.

Побудова точок у просторі за координатами.



Мал. 13.2

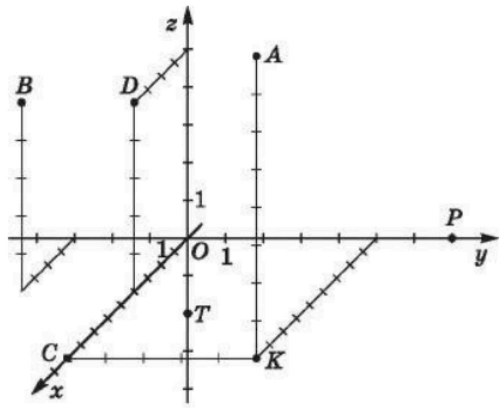
Як визначаються координати точки M(x;y;z):

Абсциса (x): значення точки проєкції Mx на вісь Ox.

Ордината (y): значення точки проєкції My на вісь Oy.

Апліката (z): значення точки проєкції Mz на вісь Oz.

Приклад 1. На малюнку 13.3 позначено точки $A(9;\ 5;\ 8)$, $B(4;\ -3;\ 5)$, $C(9;\ 0;\ 0)$, $D(4;\ 0;\ 5)$, $P(0;\ 7;\ 0)$, $T(0;\ 0;\ -2)$, $K(9;\ 5;\ 0)$.



Мал. 13.3

<u>Знаходження відстані між двома точками:</u>

відстань між точками $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ простору знаходять за формулою

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

<u>Координати середини відрізка:</u>

координати точки $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$, яка є серединою відрізка з кінцями $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, знаходять за формулами:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні:

За допомогою координатного методу можна знаходити координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні:

Т е о р е м а (про координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні). Якщо точка M ділить відрізок AB з кінцями $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ у відношенні $\frac{AM}{MB} = \lambda$, то координати точки $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$ знаходять за формулами:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\quad z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

<u>Доведення:</u>

Потрібно знайти координати точки М$(x_M y_M z_M)$, яка ділить відрізок АВ у відношенні λ

Проєкція на площину xy:

- Точки A, M, B спроектуємо на площину xy в напрямі осі z.
- Отримаємо проєкції: $A_1(x_1; y_1; 0),\ M_1(x_M; y_M;\ 0), B_1(x_2;\ y_2;\ 0)$
- За узагальненою теоремою Фалеса: $\frac{A_1M_1}{M_1B_1} = \frac{AM}{MB} = \lambda.$

Проєкція на вісь x:

Спроектуємо точки x на вісь у напрямі осі y.

Отримаємо: $A_2(x_1; 0; 0),\ \ M_2(x_M; 0; 0),\ \ B_2(x_2; 0; 0)$

Знову за теоремою Фалеса: $\frac{A_2M_2}{M_2B_2} = \lambda.$

Для x_M: $$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}.$$

$$y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\quad z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

Для y_M та z_M:

Теорема доведена.

4. **Первинне закріплення матеріалу (15 хвилин)**

Переходимо до виконання практичних завдань з підручника:

13.3. Які з наведених точок належать координатним площинам $K(0;\ 2;\ -3)$, $P(1;\ 2;\ -3)$, $M(2;\ 0;\ -4)$, $N(7;\ -1;\ -1)$, $Q(1;\ -4;\ 0)$, $S(1;\ 1;\ 1)$? Укажіть, яким саме.

Розв'язання: точка належить площині:

Oxy, якщо z=0

Oxz, якщо y=0

Oyz, якщо x=0.

K(0; 2; -3): x=0, тому точка належить площині Oyz.

P(1; 2; -3): жодна координата не дорівнює нулю, тому точка не належить жодній координатній площині.

M(2; 0; -4): y=0, тому точка належить площині Oxz.

N(7; -1; -1): жодна координата не дорівнює нулю, тому точка не належить жодній координатній площині.

Q(l; -4;0): z=0, тому точка належить площині Oxy.

S(l;1;1): жодна координата не дорівнює нулю, тому точка не належить жодній координатній площині.

Відповідь: K(0;2; -3) ∈ Oyz, M(2;0; -4) ∈ Oxz, Q(1; -4;0) ∈ Oxy.

13.5. Точка M розміщена на від'ємній півосі аплікат на відстані 7 від початку координат. Які координати точки M?

Розв'язання:

1. Координати точки на осі Oz мають вигляд M(0;0;z), де z - значення координати на осі Oz.
2. Оскільки точка розміщена на від’ємній півосі аплікат, z<0.
3. Відстань від початку координат до точки дорівнює 7, тобто |z|=7. Для z<0, отримаємо z = -7

Відповідь: M(0; 0; -7)

13.7. Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо:
1) $A(2; -11; 0)$, $B(4; -7; 6)$; 2) $A(-2; 5; 4)$, $B(2; 0; 7)$.

Розв'язання:

Використаємо формулу знаходження середини відрізка AB:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

де $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ - координати відрізка.

1) A(2; -11;0), B(4; -7;6):

$$x_M = \frac{2+4}{2} = 3, \quad y_M = \frac{-11+(-7)}{2} = -9, \quad z_M = \frac{0+6}{2} = 3.$$

2) A(-2;5;4), B(2;0;7):

$$x_M = \frac{-2+2}{2} = 0, \quad y_M = \frac{5+0}{2} = 2.5, \quad z_M = \frac{4+7}{2} = 5.5.$$

Відповідь:

1) M(3;−9;3),
2) M(0; 2.5; 5.5).

13.14. Знайдіть координати проекцій точки $A(-1; 2; -4)$ на координатні площини.

Розв'язання:

Координати проєкцій точки *A(x;y;z)* на координатні площини обчислюються шляхом обнулення тієї координати, яка перпендикулярна до площини.

Для площини *Oxy* обнуляємо координату *z*:

A_{Oxy}(-1; 2; 0)

Для площини *Oxz* обнуляємо координату *y*:

A_{Oxz}(-1;0; -4)

Для площини *Oyz* обнуляємо координату *x*:

A_{Oyz}(0;2; -4)

Відповідь:

Проєкція на *Oxy*: (-1;2;0),

Проєкція на *Oxz*: (-1; 0; -4),

Проєкція на *Oyz:* (0; 2; -4).

13.33. На осі абсцис знайдіть точку, відстань від якої до точки *A*(1; 4; 8) дорівнює 12.

Розв'язання:

Щоб знайти точку M(x,0,0) на осі абсцис, відстань від якої до заданої точки A(1,4,8) дорівнює 12, скористаємося формулою відстані між двома точками у тривимірному просторі, відразу підставивши координати точок A і M:

$$12 = \sqrt{(x-1)^2 + (0-4)^2 + (0-8)^2}$$

Виконуємо дії:

$$144 = (x-1)^2 + (-4)^2 + (-8)^2$$

$$144 = (x-1)^2 + 80.$$

$$64 = (x-1)^2$$

$$x - 1 = \pm 8.$$

$$x = 1 + 8 = 9 \quad \text{або} \quad x = 1 - 8 = -7$$

Відповідь: точки на осі абсцис: M(9;0;0) і M(-7; 0; 0).

5. **Підсумки уроку (2 хвилини)**

   Дайте відповіді на запитання:

- Як визначити координати точки в тривимірному просторі?
- Як знайти відстань між двома точками в просторі?
- Поясніть, як знайти координати середини відрізка, заданого двома точками в просторі.

6. **Домашнє завдання (1 хвилина):**
   Опрацювати §13. №13.8, №13.15

ДОДАТОК Б

Конспект уроку 2

Тема: Вектори в просторі. Дії над векторами.

Мета:

Навчальна: ознайомити учнів із поняттям вектора у просторі, його графічним зображенням, навчити знаходити модуль вектора та виконувати дії над векторами, розв'язуючи задачі.

Розвивальна: розвивати просторове мислення, уважність, логічне мислення та здатність до аналізу.

Виховна: формувати інтерес до геометрії як до прикладної науки, виховувати наполегливість і відповідальність у виконанні завдань.

Тип уроку: комбінований урок

- Засвоєння нових знань.
- Формування практичних умінь та навичок.

Обладнання: підручник з геометрії, презентація.

Хід уроку:

1. **Організаційний момент (2 хв)**

Перевірка присутності учнів. Позитивний настрій на урок, оголошення теми та мети уроку.

2. **Актуалізація знань (5 хв)**

Пригадаємо з 9 класу:

- Що таке вектор у площині?
- Як позначаються вектори?
- Що таке модуль вектора? Як його знайти?

Вектори використовуються у фізиці, інженерії, комп'ютерній графіці та інших галузях. Сьогодні ми дізнаємось, як працювати з ними у просторі.

3. **Вивчення нового матеріалу (20 хв)**

Поняття вектора у просторі:

Відрізок, для якого визначено напрям, називають вектором.

Позначення: $\overline{AB}$, де A - початок, B - кінець. Графічне зображення: стрілка, яка вказує напрямок. Нульовий вектор: початок збігається з кінцем, позначається $\overline{0}$, модуль дорівнює 0.

❗ *Модулем* (або *довжиною*, або *абсолютною величиною*) вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB.

Формула для модуля вектора: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Пригадаємо про колінеарність векторів:

❗ *колінеарними* називають два ненульових вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Колінеарні вектори можуть бути співнапрямленими, тобто однаково напрямленими або протилежно напрямленими.

Як і в планіметрії,

❗ два вектори називають *рівними*, якщо вони співнапрямлені та їх модулі рівні між собою.

Додавання та віднімання векторів

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2).$$

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2).$$

Множення вектора на число $k\overrightarrow{a} = (kx; ky; kz)$

❗ Два протилежно напрямлених вектори, модулі яких рівні між собою, називають *протилежними векторами*.

Властивості множення вектора на число:

для будь-яких чисел α і β та векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$0\vec{a} = \vec{0};\ (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a});$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a};\ \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$$

вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, можна подати у вигляді $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, $\lambda \neq 0$; і навпаки, якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, де $\lambda \neq 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні.

Це твердження можна сприймати як ознаку колінеарності векторів.

Два ненульові вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, які відкладаються від однієї точки, є колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій. Один з них можна отримати з іншого шляхом множення на число (розтягнення або стиснення).
З цього випливає, що точка C лежить на прямій AB тільки тоді коли виконується умова $\overline{AC} = \lambda\overline{AB}$, де λ - деяке число.

Компланарні вектори

Вектори називають *компланарними*, якщо при відкладанні їх від однієї і тієї самої точки вони будуть лежати в одній площині.

Компланарність двох і трьох векторів:

- Будь-які два вектори завжди є компланарними, оскільки вони лежать у площині, яка проходить через ці два вектори.
- Три вектори, з яких два є колінеарними (лежать на одній прямій), також є компланарними.
- Якщо жодна пара з трьох векторів не є колінеарною, ці три вектори можуть бути як компланарними, так і некомпланарними.

три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, серед яких немає жодної пари колінеарних, є компланарними тоді і тільки тоді, коли існують числа α і β такі, що справджується рівність $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Для додавання трьох некомпланарних векторів можна використати правило паралелепіпеда, подібне до правила паралелограма для додавання двох неколінеарних векторів.

Щоб додати три вектори, які не лежать в одній площині (некомпланарні), можна скористатися таким способом:

Побудуємо паралелепіпед: уявимо, що ці три вектори - це ребра коробки (паралелепіпеда), які виходять з одного кута.

Знайдемо діагональ: проведемо діагональ цієї коробки з того ж кута, звідки виходять наші три вектори.

Діагональ - це сума векторів: ця діагональ покаже нам, яким буде новий вектор, коли ми додаємо всі три початкові вектори.

Т е о р е м а (про розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами). Будь-який вектор можна розкласти за трьома некомпланарними векторами, причому коефіцієнти цього розкладання визначаються єдиним чином.

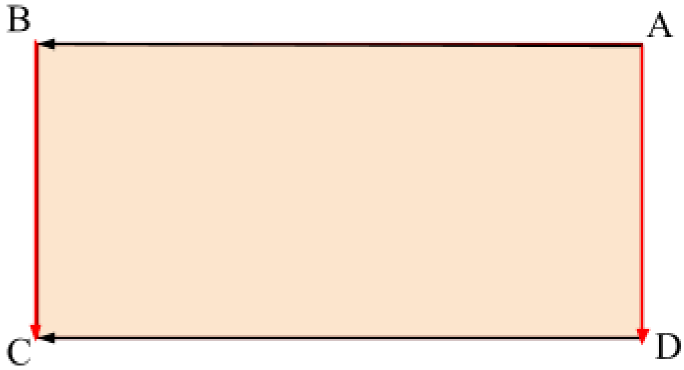
4. **Первинне закріплення матеріалу (15 хв)**

Виконуємо вправи з підручника

14.13. *ABCD* **– прямокутник. Укажіть усі пари рівних векторів і векторів, що мають рівні модулі, початком і кінцем яких є вершини прямокутника.**

Розв'язання:

Рівні вектори мають однаковий напрям і довжину. У прямокутнику рівними будуть вектори, що лежать на паралельних сторонах та направлені в один бік. Вектори з рівними модулями мають однакову довжину, але можуть бути направлені в різні боки.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

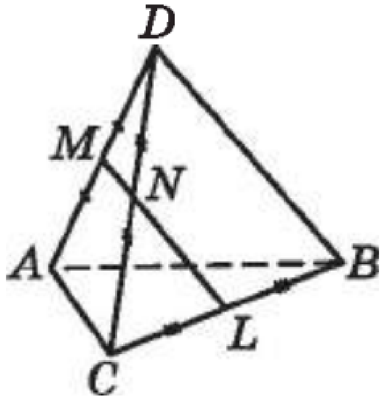
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Діагоналі прямокутника також рівні:

Ці властивості випливають із геометрії прямокутника, де протилежні сторони рівні та паралельні, а діагоналі рівні.

14.15. $ABCD$ – трикутна піраміда (мал. 14.18), M, N і L – середини ребер AD, DC і BC відповідно; $AC = 4$ см, $BC = 6$ см, $NL = 5$ см. Знайдіть:

1) $|\overrightarrow{CA}|$; 2) $|\overrightarrow{MN}|$; 3) $|\overrightarrow{BD}|$; 4) $|\overrightarrow{CL}|$.



Мал. 14.18

<u>Розв'язання:</u>

Ми маємо трикутну піраміду ABCD.
Точки M, N і L - середини ребер AD, DC і BC відповідно.
Відомі довжини деяких відрізків: AC = 4 см, BC = 6 см, NL = 5 см.

Треба знайти довжини відрізків CA, MN, BD і CL.

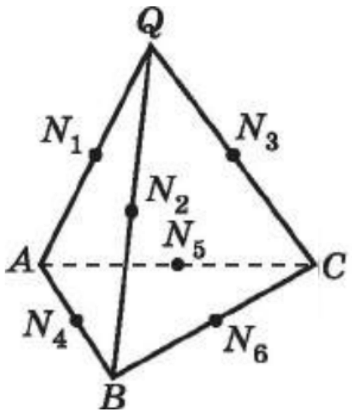
1) $\overline{\text{CA}}$ збігається з відрізком AC, тому $\overline{|CA|}$= $\overline{|AC|}$= 4 см.
2) MN - середня лінія трикутника ADC, тому $\overline{|MN|}$= 0.5 ×$\overline{|AC|}$ = 0.5×4 см = 2 см.
3) $\overline{|BD|}$=10 см.
4) $\overline{|CL|}$ - половина від BC, тому 6:2= 3. $\overline{|CL|} = 3$ см.

14.19. ***QABC*** **– тетраедр (мал. 14.20). Точки** N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 **– середини ребер відповідно** ***QA, QB, QC, AB, AC, BC.*** **Укажіть усі вектори, що:**

1) дорівнюють вектору $\overline{N_2N_3}$, $\overline{N_3N_6}$, $\overline{N_1N_4}$;

2) протилежні вектору $\overline{N_1N_2}$, $\overline{N_2N_6}$, $\overline{N_3N_5}$.

<u>Розв'язання:</u>



Мал. 14.20

Маємо тетраедр QABC.

Точки N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 - середини відповідних ребер QA, QB, QC, AB, AC, BC.
Треба знайти всі вектори, які:

- Рівні векторам N_2N_3, N_3N_6, N_1N_4.
- Протилежні векторам N_1N_2, N_2N_6, N_3N_5.

Властивості середніх ліній трикутника:

Середня лінія трикутника з'єднує середини двох сторін і паралельна третій стороні, причому її довжина дорівнює половині довжини третьої сторони.

Середні лінії ділять трикутник на чотири рівні трикутники.

Застосування до тетраедра:

Оскільки точки N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 - середини ребер, то відрізки, що з'єднують ці точки, є середніми лініями відповідних трикутників граней тетраедра.

Отже, ці відрізки паралельні і рівні відповідним сторонам або діагоналям основ.

1) Вектори, рівні N_2N_3:

- $\overline{N_3N_6}$(оскільки $\overline{N_2N_3}$ і $\overline{N_3N_6}$ - середні лінії паралельних граней і рівні половині відповідної сторони)
- $\overline{N_1N_4}$ (з аналогічної причини)
- $\overline{N_5N_6}$(напрямок від середини AB до середини BC)

2) Вектори, протилежні N_1N_2:

- $\overline{N_2N_1}$ (за визначенням протилежного вектора)
- $\overline{N_2N_6}$
- $\overline{N_3N_5}$

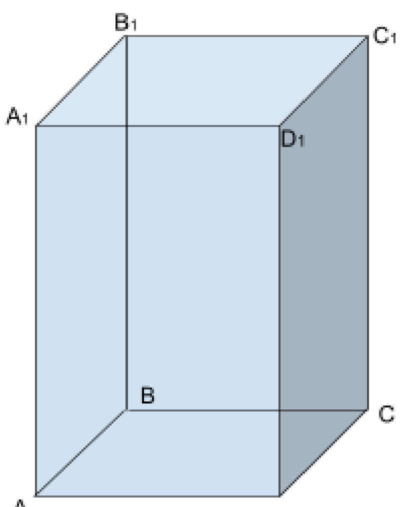
14.21. Накресліть прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і відкладіть: **Мал. 14.20**

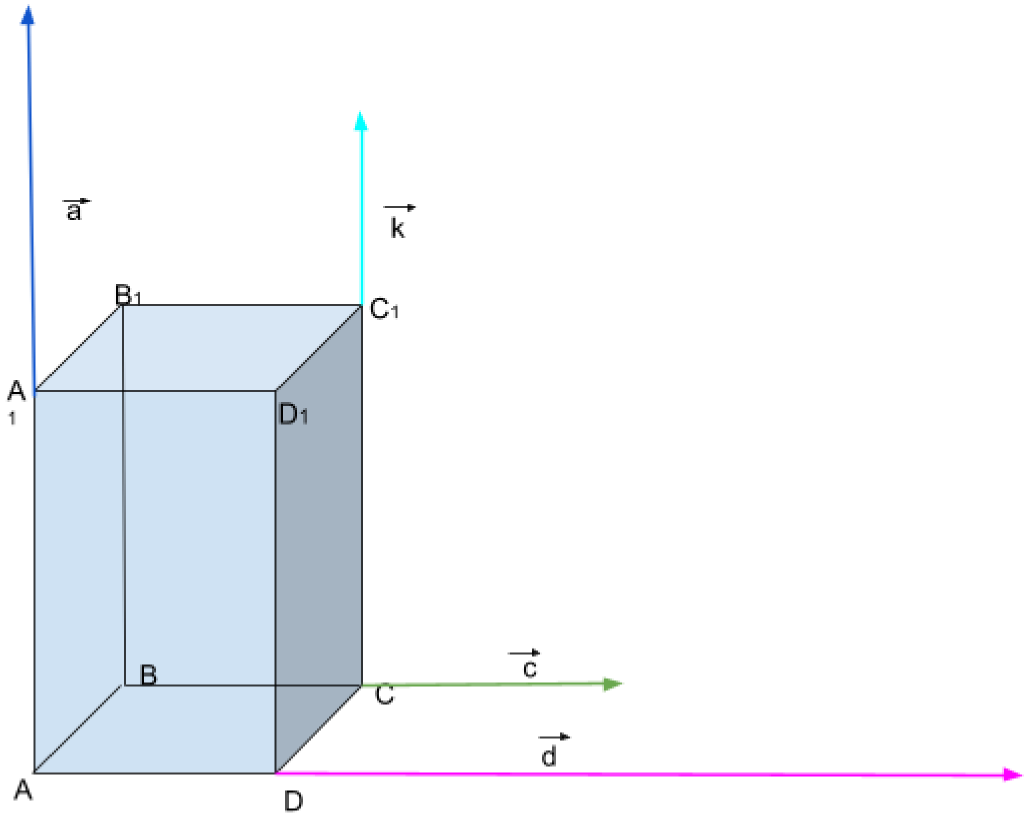
1) від точки C вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{BC}$;

2) від точки A_1 вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{BB_1}$;

3) від точки D вектор, що дорівнює вектору $3\overrightarrow{BC}$;

4) від точки C_1 вектор, що дорівнює вектору $0{,}5\overrightarrow{CC_1}$.





5. **Підсумки уроку (2 хв)**

Дати відповідь на питання:

- Як визначити, чи є два вектори колінеарними?
- Які операції можна виконувати з векторами в просторі? Наведіть приклади.
- Що таке рівні вектори? Як перевірити рівність двох векторів у просторі?
- Що означає поняття "компланарність векторів"? Які умови мають виконуватися для компланарності трьох векторів?

6. **Домашнє завдання (1 хв)**

Опрацювати §14. №14.16, 14.22.

ДОДАТОК В

Конспект уроку 3

Тема: Вектори у просторі. Дії над векторами

Мета:

Навчальна: формувати вміння виконувати операції над векторами у просторі, застосовувати знання для розв'язання задач.

Розвивальна: розвивати просторове мислення, логіку, увагу та навички аналізу.

Виховна: виховувати старанність, відповідальність і інтерес до застосування математики в реальному житті.

Обладнання: підручник з геометрії, презентація.

Тип уроку: формування вмінь і навичок, практичне застосування знань.

Хід уроку:

1. **Організаційний момент (2 хв)**

Перевірка присутності учнів. Позитивний настрій на урок, оголошення теми та мети уроку.

2. **Актуалізація знань (5 хв)**

Пригадайте з минулого уроку:

- Що називають модулем вектора? Як його обчислити?
- Що називають нульовим вектором?
- Дайте визначення компланарних векторів.
- Чи можуть будь-які два вектори бути компланарними? Чому?

3. **Вивчення нового матеріалу (10 хв)**

Додавання і віднімання векторів

Геометрична інтерпретація:

Для додавання векторів $\overline{a}$ $і$ $\overline{b}$ використовується правило трикутника:

Відкладемо $\overline{a}$ від початкової точки. Від кінця $\overline{a}$ відкладемо $\overline{b}$. Вектор, що з'єднує початкову точку $\overline{a}$ із кінцевою точкою $\overline{b}$, буде їхньою сумою $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$.

Віднімання векторів:

Віднімання виконується як додавання протилежного вектора $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b})$, Вектор $-\overline{b}$ має той самий модуль, але протилежний напрям.

Координатна інтерпретація:

Якщо вектори задані координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то сума векторів:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

а різниця: $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$

Зображення на координатній площині:

Побудова векторів із заданими координатами:

- Початок вектора – це точка (0,0) (або інша задана точка).
- Кінець вектора – це точка (x,y), де x,y – координати вектора.

Множення вектора на число:

Множення на додатне число k>0:

- Якщо k>1, вектор збільшується у k-разів.
- Якщо 0<k<1, вектор зменшується (стискається).

Множення на від’ємне число k<0:

- Модуль вектора змінюється, як і при множенні на k>0k > 0k>0.
- Напрям вектора стає протилежним.

Множення на 0:

- Результат – нульовий вектор, який не має напряму.

Графічне пояснення:

- Зобразити $\overline{a}$ вектор на площині.

- Множимо $\overline{a}$ на число k:

Якщо k=2, подовжуємо вектор удвічі.
Якщо k= -1, зберігаємо модуль, але розвертаємо його у протилежний бік.
Приклади використання векторів у реальному житті

1) Фізика:

- Сили, що діють на тіло, можна моделювати векторами:
- Сила тяжіння, сила тертя, прискорення.
- Сума векторів сил дозволяє знайти рівнодійну силу.

2) Навігація:

- Вектори використовуються для визначення напряму та відстані під час руху. Наприклад, літак рухається під впливом вітру; його траєкторію можна визначити за допомогою додавання векторів швидкості літака і вітру.

4. Первинне закріплення матеріалу (25 хв)

Виконуємо вправи з підручника

14.24. Спростіть вираз:

1) $\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{TB}$;
2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BK}$;
3) $\overline{PM}+\overrightarrow{KP}+\overline{MK}$;
4) $\overline{AM}-\overline{TM}$.

<u>Розв'язання:</u>

1) $\overline{AT}+\overline{TB}=\overline{AB}$ (за правилом додавання векторів (правило трикутника):)
2) $\overline{AC}+\overline{CB}+\overline{BK}=(\overline{AC}+\overline{CB})+\overline{BK}=\overline{AB}+\overline{BK}=\overline{AK}$ (використовуємо асоціативність та правило трикутника)
3) $\overline{PM}+\overline{KP}+\overline{MK}=(\overline{PM}+\overline{MK})+\overline{KP}=\overline{PK}+\overline{KP}=\overline{PK}-\overline{PK}=\overline{0}$

(застосуємо перестановку векторів та властивість замкнутого контуру)

4) $\overline{AM}-\overline{TM}=\overline{AM}+(-\overline{TM})=\overline{AM}+\overline{MT}=\overline{AT}$ (віднімання вектора еквівалентне додаванню протилежного вектора)

14.26. $KLMNK_1L_1M_1N_1$ **– прямокутний паралелепіпед. Чи компланарні такі трійки векторів:**

1) $\overrightarrow{KK_1}$, $\overrightarrow{LL_1}$ **і** $\overrightarrow{MM_1}$; **2)** $\overrightarrow{KK_1}$, $\overrightarrow{KL}$ **і** $\overrightarrow{KN}$;

3) $\overrightarrow{KK_1}$, $\overrightarrow{LL_1}$ **і** $\overrightarrow{KN}$; **4)** $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{MM_1}$ **і** $\overrightarrow{K_1L_1}$**?**

Розв'язання:

Вектори є компланарними, якщо вони лежать в одній площині.

1) Усі три вектори є паралельними ребрам, перпендикулярним до однієї з основ паралелепіпеда. Вони лежать в одній площині, яка перпендикулярна до основи KLMN

   Висновок: компланарні.

2) $\overline{KK_1}$ перпендикулярний до основи, а $\overline{KL}$ і $\overline{KN}$ є векторами, які лежать в основі KLMN. Усі три вектори лежать у різних площинах.

   Висновок: не компланарні.

3) $\overline{KK_1}$ і $\overline{LL_1}$є паралельними ребрам, які перпендикулярні до основи. $\overline{KN}$ лежить в основі KLMN.Три вектори лежать у різних площинах.

   Висновок: не компланарні.

4) $\overline{KN}$ і $\overline{K_1L_1}$паралельні двом основам паралелепіпеда. $\overline{MM_1}$ перпендикулярний до цих основ. Усі три вектори лежать у різних площинах.

   Висновок: не компланарні.

14.33. Відомо, що $\vec{c} = \vec{a} + b$**. Чи можливо, що:**

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}|,\ |\vec{c}| = |\vec{b}|$; **2)** $|\vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b}|$; **3)** $|\vec{c}| > |\vec{a} + \vec{b}|$**?**

Розв'язання:

1) Модуль вектора $\overline{c}$ дорівнює модулю $\overline{a}$ або $\overline{b}$, якщо один із векторів ($\overline{a}$ або $\overline{b}$) є нульовим.

   Висновок: можливе лише у випадку, якщо $\overline{a} = \overline{0}$ або $\overline{b} = \overline{0}$.

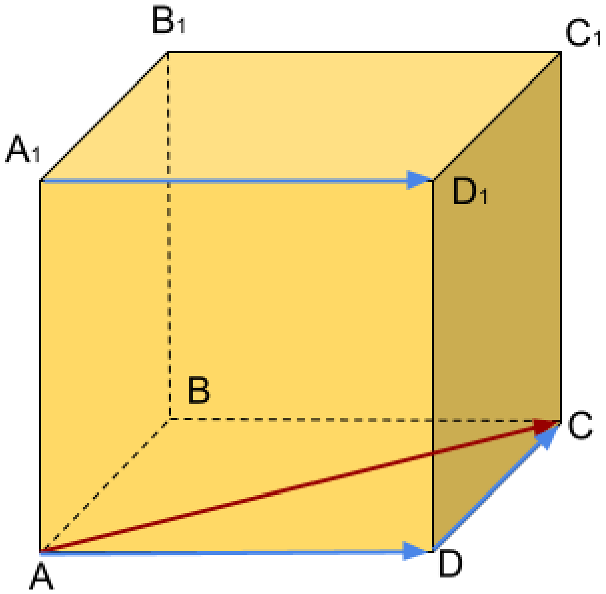
2) Таке рівняння можливе, якщо $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є колінеарними і мають однаковий напрямок. У цьому випадку модуль $\overline{c}$ дорівнює сумі модулів векторів.

   Висновок: можливе за умови, що $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$.

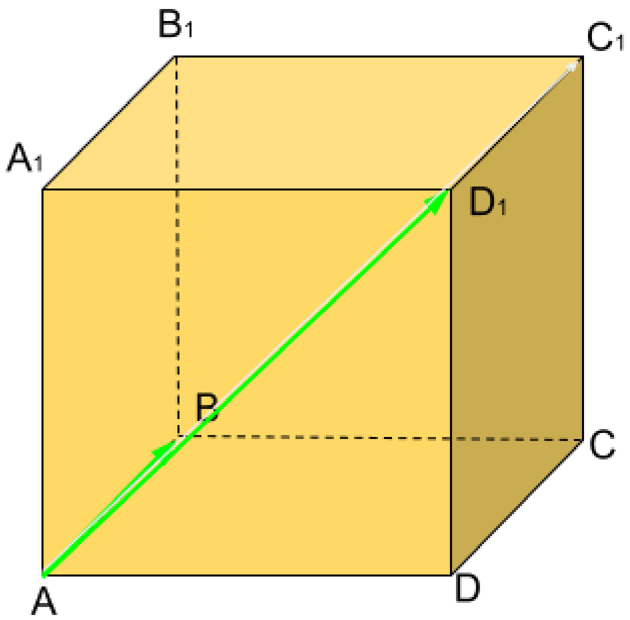
3) Це твердження неможливе, оскільки згідно з трикутною нерівністю модуль вектора $\overline{c}$ завжди менший або дорівнює сумі модулів $|\overline{a}| + |\overline{b}|$.

14.39. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ **– куб. Укажіть вектор, початком і кінцем якого є вершини куба, що дорівнює сумі векторів:**
1) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{A_1D_1}$; **2)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}$.

Розв'язання:



1) $\overline{DC} + \overline{A_1D_1} = \overline{AD} + \overline{CD} = \overline{AC}$



2) $\overline{AB} + \overline{AD_1} = \overline{AC_1}$

14.43. Вектори $\vec{a} - 7\vec{b}$ і $\vec{a} + 3\vec{b}$ колінеарні. Доведіть, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

Розв'язання:

Два ненульові вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Це еквівалентно тому, що один вектор можна отримати з іншого множенням на деяке число (відмінне від нуля).

Існує таке число k ≠ 0, що:

$\overline{a} - \overline{7b} = k(\overline{a} + \overline{3b})$

Розкриємо дужки і згрупуємо члени з a і b:

$\overline{a} - 7\overline{b} = k\overline{a} + 3k\overline{b}$

$\overline{a} - k\overline{a} = 7\overline{b} + 3k\overline{b}$

$\overline{a}(1 - k) = \overline{b}(7 + 3k)$

Розглянемо два випадки:

1) 1 - k ≠ 0, тоді можна поділити обидві частини рівності на (1 - k):

$\overline{a} = \overline{b} \cdot \frac{7+3k}{1-k}$, оскільки $\frac{7+3k}{1-k}$ є деяким числом, то вектор $\overline{a}$ є кратним вектору $\overline{b}$. Отже, вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні.

2) 1 - k = 0, звідси k = 1. Підставимо це значення в початкову рівність:

$\overline{a} - 7\overline{b} = \overline{a} + 3\overline{b}$,

$-10\overline{b} = 0$, оскільки $\overline{b}$ - ненульовий вектор, то отримали суперечність.

Отже, цей випадок неможливий.

Таким чином, з колінеарності векторів $\overline{a} - \overline{7b}$ і $\overline{a} + \overline{3b}$ випливає колінеарність векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

5. Підсумки уроку (2 хв)

Рефлексія:

- Як ви оцінюєте свої знання та вміння працювати з векторами після цього уроку?
- Де, на вашу думку, знання про вектори можуть стати в нагоді в житті чи майбутній професії?

Питання для перевірки:

- Як геометрично додати два вектори? Які способи ви знаєте?
- Що відбувається з напрямком і модулем вектора при множенні на додатне або від'ємне число?

6. Домашнє завдання (1 хв)

Опрацювати §14. №14.25; 14,27

ДОДАТОК Г

Урок 4. Самостійна робота за темами розділу

Тема: Прямокутні координати у просторі та вектори у просторі

Мета: Перевірити засвоєння знань та вмінь учнів з даної теми.

Тип уроку: контроль знань і вмінь.

Початковий рівень

1) Дано точки A(2;3;4) та B(5;6;7):
   a) Запишіть координати вектора $\overline{AB}$.
   b) Знайдіть модуль вектора $\overline{AB}$.

2) A(-2;3;0) B(0;5;-7) Знайти координати M, середини відрізка, та довжину відрізка AB.

3) Точка M(-2;1;4) – середина відрізка KL. Знайдіть координати точки K, якщо L(2;3;-2).

Середній рівень

4) При якому значенні *n* вектори $\overline{a}$ (4; 2n-1; -1) і $\overline{b}$ (4; 9-3n; -1) рівні?

5) У просторі задано точки A(1;2;3), B(4;6;5) та C(7;8;9). Доведіть, що вектори $\overline{AB}\ i\ \overline{BC}$ колінеарні.

6) Вектори задані координатами:
$\overline{a}$ (2; -3; 4), $\overline{b}$ (-1; 5; -2), $\overline{c}$ (0; 2; -1).

a) Обчисліть $\overline{a} + 3\overline{b} + 2\overline{c}$

b) Знайдіть модуль вектора $\overline{a} - 3\overline{c}$

Високий рівень

7) Дано точки A(1;0;3), B(4;2;6), C(2;1;4). Знайдіть площу трикутника ABC, використовуючи вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$.

Критерії оцінювання:

Початковий рівень: кожне завдання по одному балу. Правильність обчислень і логіка

Середній рівень: кожне завдання по 2 бали. Правильність обчислень, поступовість дій.

Високий рівень: три бали. Глибина пояснень, правильність формулювань, точність розв’язків.

Ця самостійна робота дає можливість перевірити рівень засвоєння знань учнями від базових до поглиблених.