МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики та методики її навчання

«Допущено до захисту»

Завідувач кафедри

__________ Д.Є. Бобилєв

Реєстраційний №________ Реєстраційний № _______

«___»_______ 2024 р. «___» ____________ 2024 р.

РОЗРОБКА І РЕАЛІЗАЦІЯ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРИЧНИМИ МОДЕЛЯМИ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ»

Кваліфікаційна робота студентки групи МІм-23
ступінь вищої освіти «магістр» спеціальності:
014.04 Середня освіта (математика)
Пожар Вікторії Вікторівни

Керівник: кандидат технічних наук, професор
Корольський Володимир Вікторович

Оцінка:
Національна шкала ___________________________
Шкала ECTS _____Кількість балів _____________
Голова ЕК: __________ ______________________
(підпис) (прізвище та ініціали)
Члени ЕК: __________ ______________________
(підпис) (прізвище та ініціали)
__________ ______________________
(підпис) (прізвище та ініціали)
__________ ______________________
(підпис) (прізвище та ініціали)
__________ ______________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

Кривий Ріг – 2024

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Пожар Вікторія Вікторівна, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавала і не одержувала недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело.

Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомлена. Чітко усвідомлюю, що у разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність. У сучасному інформаційному суспільстві числові послідовності виявляються невід'ємною складовою майже у всіх сферах нашого життя. Вони зустрічаються як у математичних розрахунках та аналізі даних, так і в прикладних задачах різного спрямування. Особливо актуальною є проблема оптимізації та аналізу складних математичних моделей, що знаходять широке застосування в різноманітних сферах, від фінансів та інформаційних технологій до наукових досліджень та інженерних розробок.

Однією з ключових складових таких моделей є числові послідовності, які відіграють важливу роль у математичному аналізі та розв'язанні різноманітних завдань. Інтенсивний розвиток обчислювальної техніки та програмного забезпечення надав можливості розробки та реалізації складних алгоритмів для роботи з числовими послідовностями, що забезпечує їх більш ефективне використання в різних областях застосування.

Дипломна робота присвячена розробці та реалізації завдань, пов'язаних із геометричними моделями в контексті числових послідовностей. Вона спрямована на вивчення властивостей та поведінки числових послідовностей через їх візуалізацію та розуміння геометричного змісту. Використання геометричних підходів дозволяє не лише краще зрозуміти внутрішню структуру послідовностей, але й виявити їх особливості, закономірності та можливі прогнозовані тенденції.

У задачниках, які пропонуються для загальноосвітніх закладів надають добірки задач з формально вираженими умовами без поєднання з параметрами реальних об’єктів і явищ. Особливо це стосується задач при вивченні одного з важливих розділів математики «Числові послідовності». Тому створення нових видів задач для вивчення цього розділу, в умовах яких реалізується дидактичний принцип візуалізації, має актуальне значення.

Метою дослідження є аналіз існуючих методів роботи з числовими послідовностями, розробка системи задач для використання учнями ліцеїв.

Згідно до поставленої мети дослідження були поставлені наступні **завдання дослідження:**

1) Охарактеризувати основні поняття та традиційні задачі з теми «Числові послідовності»;

2) Побудувати та представити приклади геометричних моделей для розробки задач;

3) Проаналізувати точкові, квадратурні, кубатурні задачі геометричної інтерпретації.

Об'єкт дослідження: числова послідовність.

Предмет дослідження: використання послідовностей геометричних образів, розміщених у межах побудованої геометричної моделі та визначення послідовностей різних математичних величин в залежності від рівня складності задач.

Для розв'язання завдань цієї роботи використовувалися такі **методи** дослідження:

1. Теоретичний аналіз наукової літератури з теми дослідження.
2. Моделювання – створення геометричної моделі числових послідовностей.
3. Розрахунок довжин відрізків, площ геометричних фігур і об'ємів тіл обертання.
4. Математичний пошук числових рядів за відомою геометричною інтерпретацією.
5. Створення системи різнорівневих задач для учнів ліцеїв.

Апробація дослідження. Публікація статті у електронному збірнику наукових праць молодих учених факультету математики, природничих наук та технологій Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка «Наукові записки молодих учених». – 23-24 листопада 2024 р., Кропивницький, Україна

Структура та обсяг роботи: дипломна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаної літератури, який має 30 найменувань.

РОЗДІЛ І. АНАЛІЗ ОСНОВНИХ ПОНЯТЬ І ЗАДАЧ

1.1. Основні поняття теми «Числові послідовності» для учнів 9 класу

Станом на 2024 рік тема «Числові послідовності» в школах вивчається з 9 класу. На уроках геометрії дають поняття про числову послідовність, таким чином:

Функцію $y = f(x),\ x \in N$ називають функцією натурального аргументу або числовою послідовністю і позначають $y = f(n)$ або y_1, y_2, y_3,...,y_n .

Значення y_1, y_2, y_3,...,y_n називають відповідно першим, другим, третім (тощо) членами послідовності.

У символі y_n число n називають індексом, який задає порядковий номер того чи іншого члена послідовності. Іноді для позначення послідовності використовується запис (y_n).

Як відомо, функція може бути задана різними способами, наприклад аналітично, графічно, словесно тощо. Послідовності теж можна задавати різними способами, серед яких важливі три: аналітичний, словесний і рекурентний.

- *Аналітичне задання послідовності*

Кажуть, що послідовність задана аналітично, якщо вказана формула її n-го члена y_n=*f(n).*

Приклад:

1. y_n=n^2 Це аналітичне задання послідовності 1,4,9,16,..., n^2, ..., про яку йшла мова вище.

2. $y_n = C$. Йдеться про послідовність C,C,C,...,C,..., яку називають стаціонарною.

- *Словесне задання послідовності*

Приклад: послідовність непарних чисел: 1, 3, 5, 7, 9, 11,13,...,$2n - 1$.

Знаходження аналітичного задання послідовності по її словесному опису часто буває складним (а іноді і нерозв'язним) завданням.

- *Рекурентне задання послідовності*

Цей спосіб задання послідовності полягає в тому, що вказується правило, що дозволяє обчислити n-й член послідовності якщо відомі її попередні члени.

При обчисленні членів послідовності за цим правилом ми ніби весь час повертаємося назад, з'ясовуємо, чому дорівнюють попередні члени. Такий спосіб задання послідовності називають рекурентним (від лат. recurrere — повертатися).[2]

Найчастіше в таких випадках вказують формулу, що дозволяє висловити n-й член послідовності через попередні, і задають один-два початкових члена послідовності.

Приклад:

y_1=*3;* y_n=$y_n - 1 + 4$, *якщо* $n = 2,3,4,\ldots$

Маємо, y_1=*3;*

y_2=$y_1 + 4 = 3 + 4 = 7$;

y_3=$y_2 + 4 = 7 + 4 = 11$;

y_4=$y_3 + 4 = 11 + 4 = 15$ тощо.

Тим самим отримуємо послідовність 3,7,11,15,....

Послідовності розділяють на зростаючі і спадаючі, такі послідовності об'єднують загальним терміном — монотонні послідовності.

Послідовність (y_n) називають зростаючою, якщо кожний її член (крім першого) більше попереднього. Послідовність (y_n) називають спадаючою, якщо кожен її член (крім першого) менше попереднього.

Слідом за числовою послідовністю вивчається арифметична та геометрична прогресії. Основні поняття цих прогресій написано нижче.

Послідовність, у якій кожен наступний член можна знайти, додавши до попереднього одне і те ж число d, називається **арифметичною прогресією.**

*Я*кщо послідовність *(*a_n*)* є арифметичною прогресією, тоді для будь-якого натурального значення n справедлива залежність a_n*+1* = a_n + d*.*

Число d називається різницею арифметичної прогресії.[2]

Якщо відомий перший член арифметичної прогресії a_1 і різниця d, тоді можливо обчислити будь-який член арифметичної прогресії:

$a_2 = a_1 + d;$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d;$

$a_4 = a_3 + d = a_2 + 3d$ *тощо.*

N-ий член арифметичної прогресії можна отримати, якщо до першого члену прогресії додати (n−1) різниць, тобто,

$a_n = a_1 + d(n-1),$

де n - порядковий номер члена прогресії, a1- перший член прогресії, d- різниця.

Ця рівність називається загальною формулою арифметичної прогресії.

Її використовують, щоб обчислити n-ий член арифметичної прогресії (наприклад, десятий, сотий та ін.), якщо відомі перший член послідовності і різниця.

Приклад:

Дано арифметичну прогресію (a_n), де $a_1 = 0$ і $d = 2$. Написати: а) перші п'ять членів прогресії; b) десятий член прогресії.

а). Щоб знайти наступний член прогресії, потрібно до попереднього додати різницю[3]:

$$a_2 = a_1 + d = 0 + 2 = 2;$$

$$a_3 = a_2 + d = 2 + 2 = 4;$$

$$a_4 = a_3 + d = 4 + 2 = 6;$$

$$a_5 = a_4 + d = 6 + 2 = 8.$$

b). Використовується загальна формула $a_n = a_1 + d(n-1)$ [3]

Якщо $n = 10$, тоді замість n до формули підставляється 10:

$$a_{10} = a_1 + 2 \cdot (10 - 1);$$

$$a_{10} = 0 + 2 \cdot 9;$$

$$a_{10} = 18.$$

Сума перших n членів арифметичної прогресії

Суму перших n членів арифметичної прогресії можна знайти, використовуючи формулу:

$S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n,}{2}$ де n - число членів послідовності.

Приклад:

Дано арифметичну прогресію (a_n), де $a_1 = 0$ і $d = 2$. Написати суму перших п'яти членів послідовності.

$S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{\mathbf{2}}$, *де n=5 і* $a_n = a_5 = 8$ *(з попереднього прикладу)*

$S_5 = \frac{(a_1+a_5)\cdot 5}{\mathbf{2}} = \frac{(0+8)\cdot 5}{2} = 20.$

Послідовність (b_n), у якій кожний наступний член можна знайти, якщо попередній член помножити на одне і те ж число q, називається **геометричною прогресією**[2].

Якщо послідовність (b_n) є геометричною прогресією, тоді для будь-якого натурального значення n справедлива залежність: $b_n + 1 = b_n \cdot q$

Число q називається знаменником геометричної прогресії.

Якщо у геометричній прогресії (b_n) відомий перший член b_1 і знаменник q, тоді можливо знайти будь-який член прогресії.

$b_2 = b_1 \cdot q$

$b_3 = b_2 q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2$

$b_4 = b_1 q^3$ та інші.

Загальний член геометричної прогресії *bn* можна обчислити, використовуючи формулу:

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, де n- порядковий номер члена прогресії, b_1- перший член послідовності, q- знаменник.

Приклад:

Обчислити перші п'ять членів геометричної прогресії і написати формулу знаходження n-го члена, якщо $b_1 = 8$ *і* $q = 0{,}5$[3].

$b_1 = 8$

$b_2 = b_1 q = 8 \cdot 0{,}5 = 4;$

$b_3 = b_2 q = 4 \cdot 0{,}5 = 2;$

$b_4 = b_3 q \ = \ 2 \cdot 0{,}5 \ = \ 1;$

$b_5 = b_4 q \ = \ 1 \cdot 0{,}5 \ = \ 0{,}5;$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$b_n = 8 \cdot 0{,}5^{n-1}$

Сума перших n членів геометричної прогресії

Суму перших n членів геометричної прогресії S_n можна знайти, якщо обчислити її члени b_1, b_2, ..., b_n і потім їх значення додати.

Обчислюючи суму перших n членів геометричної прогресії, зручніше використовувати 1-у формулу:

$S_n = \frac{b_n q - b_1}{\text{q} - 1}$, де

$n -$ кількість членів послідовності (порядковий номер), $b_1 -$ перший член послідовності, $b_n -$ n-ий член послідовності, q $-$ знаменник.

Розв'язуючи задачі, зручніше використовувати 2-у формулу: $S_n = \frac{b_1 q^n - 1}{\text{q} - 1}$.

Приклад. Обчислити суму перших п'яти членів геометричної прогресії, якщо $b_1 = 8$ і $q = 0{,}5$.

Розв’язання цієї задачі можна трьома способами

І спосіб:

Розглянувши перший приклад, бачимо:

$b_1 = 8$, $b_2 = \ 4$, $b_3 = \ 2$, $b_4 = \ 1$ і $b_5 = \ 0{,}5$.

Додавши п'ять цих чисел, вийде сума (перших п'яти членів послідовності):

$S_n = S_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 8 + 4 + 2 + 1 + 0{,}5 \ = \ 15{,}5$

ІІ спосіб:

Використовується 1-а формула:

$S_n = \frac{b_n q - b_1}{\text{q} - 1}$, де n=5, b_1 =8, $q = 0{,}5$, $b_n = \ b_5 \ = 0{,}5$ (оскільки n=5).

$S_5 = \ (0{,}5 \cdot 0{,}5 - 8)(0{,}5 - 1) \ = \ 15{,}5.$

ІІІ спосіб:

Використовується 2-а формула:

$S_n = \frac{b_1 q^n - 1}{\text{q} - 1}$, $S_5 = \ 8 \cdot (0{,}55 - 1)0{,}5 - 1 \ = \ 15{,}5.$

Як бачите, всі три варіанти розв'язання призводять до одного й того ж результату.

Сума перших п'яти членів прогресії дорівнює S_5 = 15,5.

1.2. Основні поняття теми «Числові послідовності» у вищій математиці.

Числові послідовності є важливим об'єктом вивчення у вищій математиці, оскільки вони дозволяють узагальнювати і формалізувати поняття процесів, що відбуваються поступово або циклічно. Їх застосування охоплює широкий спектр математичних і прикладних задач, включаючи аналіз функцій, обчислення сум рядів, оптимізацію алгоритмів і моделювання природних явищ. У вищій математиці числові послідовності розглядаються як функції, визначені на множині натуральних чисел, що дозволяє використовувати методи аналізу для дослідження їхніх властивостей і поведінки. Це включає вивчення границь, збіжності або розбіжності, зростаючих та спадних послідовностей, а також обмежених і необмежених рядів. Крім того, послідовності слугують основою для вивчення рядів, диференціальних рівнянь та інших розділів математики. Тому оволодіння основними поняттями числових послідовностей є необхідною передумовою для глибшого розуміння складніших тем математичного аналізу і розв'язання різних теоретичних та практичних задач.

Означення 1. Кожна функція f визначена на множині натуральних чисел N = {1,2,3,...,n,...} називається числовою послідовністю[4].

Нехай значення функції f :

$$f(1), f(2), f(3),..., f(n),... \qquad (1.1)$$

Введемо позначення

$$x_n = f(n),\ n \in N. \qquad (1.2)$$

Отже, числову послідовність (1.1) можна записати так:

x_1 , x_2 , x_3 , ... x_n ....або скорочено

$$x_n,\ n \in N, \qquad (1.3)$$

де x_1, x_2, ... називають членами послідовності, а x_n- “енним ” або загальним членом числової послідовності. Якщо задана послідовність у такому вигляді

$$x_n \text{ , n } \in \mathrm{N} \text{ ,} \tag{1.4}$$

то задано закон утворення її членів, тобто надаючи номеру n значень 1,2,3,... можна однозначно визначити всі її члени

$x_1, x_2, \ldots$ і навпаки, якщо задано послідовність її першими членами, то можна завжди записати її загальний член. Наприклад, нехай

$$1)\ x_n = \frac{1}{n}, \text{n } \in \text{N}.$$

Маємо $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, x_n = \frac{1}{n}, \ldots$

$$2)\ x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = \frac{3}{4},$$

$$\ldots$$

Звідси випливає, що $x_n = \frac{n}{n+1}$, n $\in$ N

Як вже зазначалося вище, для задання послідовності необхідно знати правило, за яким кожному значенню n ставиться у відповідність дійсне число x_n=f (n). Таке правило може бути задане за допомогою формули, як це зроблено у наведених вище прикладах. Проте є інші способи задання послідовностей. Наприклад, візьмемо за (x_n) n-ну цифру розкладу числа π у нескінчений десятковий дріб. Матимемо послідовність 3,1,4,1,…

Тут правило відповідності задано словесно.

Іноді при заданні послідовності задається її перший член і правило утворення n-го члена за допомогою попередніх членів. Такий спосіб називається рекурентним. Наприклад, нехай перший член послідовності дорівнює 2, а кожний наступний дорівнює попередньому, помноженому на 10. Тоді x_{n+1}=10x_n, x_1=2, $n \in N$ [4].

Означення 2. Послідовність (x_n) називається зростаючою, якщо кожний її наступний член більший від попереднього, тобто x_{n+1}> x_n для кожного n.

Наприклад, послідовність, $1^2, 2^2, 3^2, \ldots n^2, \ldots$ є зростаюча[4].

Означення 3. Послідовність (x_n) називається неспадною, якщо x_{n+1}≥ x_n для кожного n . Наприклад, послідовність 1, 1, 1, 2, 2… є неспадна[4].

Означення 4. Послідовність (x_n) називається спадною, якщо $x_{n+1}< x_n$ для кожного n[4].

Наприклад, послідовність $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$, ... є спадна.

Означення 5. Послідовність (x_n) називається незростаючою, якщо $x_{n+1}\leq x_n$ для кожного n. Для дальшого вивчення числових послідовностей необхідно ввести в розгляд такі арифметичні операції над числовими послідовностями: додавання, віднімання, множення та ділення. [4] Нехай маємо дві послідовності

$$x_1 , x_2 , \dots\ x_n \dots.$$

$$y_1 , y_2 , \dots\ y_n \dots.$$

Тоді додавання, віднімання та множення двох послідовностей виконуються додаванням, відніманням та множенням відповідних членів цих послідовностей.

Якщо всі y $\neq$ 0, n ∈ N , то частка від ділення послідовності (x_n) на послідовність (y_n) n визначається як послідовність

$z_1 , z_2 , \dots\ z_n, \dots.$ Члени якої $z_n \frac{x_n}{y_n}$, n ∈ N.

Символічно ці дії позначаються так:

$$(x_n) \pm\ (y_n) =\ (x_n \pm y_n);$$

$$(x_n) \cdot\ (y_n) =\ (x_n \cdot y_n);$$

$$\frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right).$$

Означення 6. Числова послідовність (x_n) називається обмеженою, якщо існують дійсні числа m і M такі, що для всіх n ∈ N виконуються нерівності m $\leq x_n \leq$ M . У протилежному випадку послідовність називається необмеженою. Часто користуються еквівалентним означенням обмеженості послідовності[4].

Означення 7. Числова послідовність (x_n) називається обмеженою, якщо існує дійсне число C таке, що для всіх n ∈ N виконується нерівність $|x_n| \leq$ C. Частинними випадками послідовності є арифметична та геометрична прогресія[4].

Означення 8. Арифметична прогресія - це числова послідовність, кожен член якої, починаючи з другого , дорівнює попередньому, збільшеному на число d, яке називається різницею прогресії. $a_{n+1} = a_n + d$, n ∈ N .

Наприклад, для послідовності 12, +2, -8, -18,…, a_1=12 і d = −10 . Загальний член арифметичної прогресії знаходиться за формулою: $a_i = a_1 + (i-1)\, d$.

Сума n членів скінченої арифметичної прогресії дорівнює:

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}$ або $S_n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n.$

Ці поняття і формули застосовуються при нарахуванні простих відсотків. [4]

Означення 9. Геометричною прогресією називається послідовність, кожний наступний член якої дорівнює попередньому, помноженому на одне і те саме число q , яке називається знаменником геометричної прогресії.

Якщо q < 1 - прогресія спадна, q >1 – прогресія зростаюча.

За означенням $b_{n+1} = b_n q$ або $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Сума n членів скінченої геометричної прогресії знаходиться за формулою

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Сума членів нескінченої спадної геометричної прогресії знаходиться за формулою: $S_n \frac{b_1}{1-q}$. [4]

1.3. Традиційні задачі при вивченні теми «Числові послідовності»

Традиційні задачі — це тип задач, які використовуються для навчання й перевірки знань у різних сферах науки та практики. Їх основною характеристикою є чітко визначена умова, ціль і алгоритм вирішення. Такі задачі зазвичай базуються на загальновідомих правилах, формулах чи принципах. Традиційними їх називають тому, що ці задачі вже багато років використовуються в освітньому процесі, і вони є "класикою" у навчанні різних дисциплін. Такий підхід до задач виник ще з часів, коли формувалася система освіти, і став основою для викладання точних та природничих наук.

Розглянемо приклади практичного застосування числових послідовностей, а саме арифметичні та геометричній прогресіях, таких задач як визначати вид послідовності, знаходити n-й член послідовності, знаходити суму перших n членів послідовності, а також доводити властивості числових послідовностей.

Традиційні задачі, які будуть наведені нижче, при вивченні тем сприяє розвитку учнів у таких аспектах: розвиває навички розуміння та застосування математичних понять, зокрема кратності, ділення з остачею та порядкових чисел. Сприяє розвитку логічного мислення та аналітичних здібностей учнів, оскільки вимагає встановлення правил та закономірностей. Розвиває вміння працювати з числовими послідовностями, виявляти їх властивості та розрізняти різні типи послідовностей. Сприяє формуванню вміння працювати з різними видами чисел, такими як двоцифрові числа, натуральні числа та звичайні дроби. Поширює кругозір учнів у сфері математики, дозволяючи їм познайомитися з різними математичними концепціями та властивостями чисел. Розвиває вміння розв'язувати задачі за допомогою систематичного підходу та алгоритмів.

Досліджуючи підручник алгебри 9 класу з поглибленим вивченням математики автора Мерзляка А. Г. 2017 року можна зазначити наступні теми уроків, які висвітлюються в розділі «Числові послідовності» [1]:

1. Числові послідовності.

2. Арифметична прогресія.

3. Сума n перших членів арифметичної прогресії.

4. Геометрична прогресія.

5. Сума n перших членів геометричної прогресії.

6. Уявлення про границю послідовності. Сума нескінченної геометричної прогресії, модуль знаменника якої менший від 1.

7. Сумування.

Поняття числової послідовності представлено як «послідовність, де членами цієї послідовності є числа». Також у підручнику зазначається, що вони можуть бути поділені на види, як скінченні і нескінченні. Наприклад, відповідна послідовність парних чисел - це така за родом послідовність, яка має нескінченний характер.

У самому підручнику розглянуті задачі будуть такого змісту [2]:

1. Визначити вид послідовності:

➢ Задано кілька перших членів послідовності.

1.° Серед наведених послідовностей укажіть геометричні прогресії, перший член і знаменник кожної з них:
1) 2, 6, 18, 36; 4) 81, 27, 9, 3; 7) −9, −9, −9, −9;
2) 4, 8, 16, 32; 5) 2, −2, 2, −2; 8) 1, 2, 3, 5;
3) 10, 20, 30, 40; 6) $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, −1, 2; 9) $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4.

Рис1.3.1

2.° Чи є арифметичною прогресією послідовність (у разі ствердної відповіді вкажіть різницю прогресії):
1) 24, 22, 20, 18; 2) 16, 17, 19, 23; 3) −3, 2, 7, 12?

Рис.1.3.2

У цій задачі учням пропонується кілька чисел, які утворюють початок певної числової послідовності. Їхнє завдання полягає в тому, щоб дослідити ці числа, знайти взаємозв'язки між ними та визначити, до якого типу належить послідовність. Наприклад, числа можуть бути рівномірно віддаленими одне від одного, або кожне наступне може утворюватися множенням попереднього на певне число. Учень має зрозуміти, чи це арифметична послідовність, де кожне число збільшується на фіксовану величину, чи геометрична, де кожен наступний член є добутком попереднього і певного коефіцієнта.

Ця задача навчає уважності до деталей, аналітичного мислення і здатності встановлювати закономірності, що допомагає формувати математичний підхід до вирішення практичних завдань.

➢ Задано формулу n-го члена послідовності.

6.° Послідовність (x_n) задано формулою n-го члена $x_n = 3n + 1$. Знайдіть:
1) x_1; 2) x_7; 3) x_{20}; 4) x_{300}; 5) x_{k+1}.

Рис.1.3.3

У цьому випадку послідовність задається у вигляді формули, яка описує, як отримати будь-яке число в ряді, якщо відомо його порядковий номер. Наприклад, формула може визначати залежність кожного наступного числа від номера, до якого воно належить. Завдання учня полягає в тому, щоб дослідити цю формулу, проаналізувати її структуру та визначити, до якого типу відноситься ця послідовність: чи це ряди, в яких числа зростають із фіксованим кроком, чи такі, де зростання є експоненційним.

Вона формує навички роботи з узагальненнями та символічними виразами, що дуже важливо для подальшого вивчення алгебри та математичного аналізу.

2. Знайти n-й член послідовності:

- Задано вид послідовності та перші кілька членів.

16.20.• Скільки додатних членів містить арифметична прогресія 5,2; 4,9; 4,6; ...?

Рис.1.3.4

18.13.° Знайдіть знаменник і п'ятий член геометричної прогресії $\frac{1}{216}, \frac{1}{36}, \frac{1}{6}, \ldots$.

Рис.1.3.5

Ці задачі базується на тому, що учні вже знають, до якого типу належить послідовність. Наприклад, вони можуть працювати з рядами, де числа розташовані в певній закономірності, і повинні знайти число, що стоїть на заданій позиції в послідовності. Учень повинен зрозуміти, як від початкового числа та характеристик ряду перейти до числа, яке знаходиться десь далі в цьому ряді. Вони сприяють розвитку навичок пошуку конкретних результатів у рамках відомих закономірностей, а також формує уявлення про зв'язки між елементами ряду.

- Задано формулу загального члена послідовності.

15.6.° Послідовність (x_n) задано формулою n-го члена $x_n = 3n + 1$. Знайдіть:

1) x_1; 2) x_7; 3) x_{20}; 4) x_{300}; 5) x_{k+1}.

Рис.1.3.6

У цьому завданні надається кілька перших чисел послідовності, і учень має знайти формулу, яка описує загальну закономірність ряду. Це вимагає уважного аналізу чисел і виявлення правила, за яким утворюється кожен наступний член послідовності.

Ця задача дозволяє учням застосувати свої спостереження для побудови загальної картини. Вона розвиває здатність до абстрактного мислення, адже учень повинен узагальнити надані дані у вигляді універсального правила, яке буде справедливим для будь-якого числа в послідовності.

3. Знайти суму перших n членів послідовності:

- Задано вид послідовності та перші кілька членів.

17.4.° Обчисліть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії $-8, -6, -4, \ldots$.

Рис.1.3.7

19.3.° Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії:

1) $12, 72, 432, \ldots$; 2) $\frac{1}{16}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \ldots$.

Рис.1.3.8

Це завдання полягає в тому, щоб підсумувати певну кількість початкових чисел у послідовності. Учень має визначити закономірність, яка дозволить швидко знайти суму, не додаючи кожне число окремо. Наприклад, у випадку арифметичних прогресій можна знайти ефективний спосіб підрахунку, беручи до уваги лише початок і кінець ряду.

Вона демонструє, як використання правил і формул може спростити складні обчислення, і дає уявлення про практичне застосування послідовностей, наприклад, у фінансових або фізичних розрахунках.

- Задано формулу загального члена послідовності.

17.15.• При будь-якому n суму n перших членів деякої арифметичної прогресії можна обчислити за формулою $S_n = 3n^2 + 5n$. Знайдіть три перших члени цієї прогресії.

Рис.1.3.9

Задача фокусується на аналізі структури числового ряду. Учні мають зіставити надані числа, обчислюючи або різниці між ними, або відношення. Наприклад, якщо різниця є сталою для всіх членів, це свідчить про арифметичну прогресію. Якщо ж відношення між числами є однаковим, то послідовність геометрична.

Це завдання навчає учнів працювати з порівнянням числових характеристик і робити висновки на основі закономірностей. Такий підхід важливий для побудови логічного мислення та виявлення зв’язків між елементами послідовності.

19.13.• При будь-якому n сума перших n членів геометричної прогресії $S_n = 4\,(3^n - 1)$. Знайдіть третій член цієї прогресії.

Рис.1.3.10

Ця задача може включати ряд, де закономірності не настільки очевидні, наприклад, коли послідовність має кілька рівнів залежностей (наприклад, додавання та множення поєднуються в одному правилі). Учень має виділити ці рівні, поступово аналізуючи, як одне число переходить в інше.

Завдання такого типу формують гнучкість мислення, адже учні вчаться розглядати послідовність з різних точок зору. Вони можуть застосовувати декілька методів, щоб знайти найзручніший спосіб розв’язання, що сприяє розвитку дослідницьких навичок.

4. Довести, що дана послідовність є арифметичною/геометричною прогресією:

- Довести, що різниця/відношення двох сусідніх членів послідовності постійна.

18.32.• Доведіть, що послідовність (x_n), задана формулою n-го члена $x_n = 7^{n+1}$, є геометричною прогресією, та вкажіть її перший член і знаменник.

Рис.1.3.11

16.28.• Доведіть, що значення виразів $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$, $(a - b)^2$ є послідовними членами арифметичної прогресії.

Рис.1.3.12

Учні мають формально довести, що заданий ряд відповідає певним характеристикам. Наприклад, треба показати, що всі числа в ряді відрізняються одне від одного на одну і ту ж величину або що всі сусідні члени ряду мають однакове співвідношення.

Ця задача вимагає логічного мислення, вміння будувати доведення та працювати з формальними твердженнями. Такі навички важливі не лише для математики, а й для інших наукових дисциплін.

5. Знайти суму нескінченної геометричної прогресії:

- Задано перший член та знаменник геометричної прогресії.

19.19.* Знайдіть кількість членів скінченної геометричної прогресії, знаменник якої $q = 3$, останній член $c_n = 162$, а сума всіх членів $S_n = 242$.

Рис.1.3.13

У цій задачі розглядаються ряди, які мають нескінченну кількість членів, але їх сума залишається скінченною. Учень повинен зрозуміти, як такі ряди поводяться та як знайти їхню суму.

Це завдання розвиває концепцію границі, яка є основою для подальшого вивчення математичного аналізу. Учні навчаються мислити в термінах нескінченності, що відкриває їм новий рівень розуміння числових рядів і їхніх властивостей.

Ці задачі сприяють кращому розумінню таких понять, як кратність, ділення з остачею та порядкові числа, а також вчать застосовувати їх на практиці. Аналіз послідовностей, пошук закономірностей та встановлення правил вимагають від учнів логічного мислення та розвитку аналітичних здібностей. Завдяки задачам учні набувають навичок роботи з послідовностями, вчаться визначати їх тип, знаходити члени послідовності та суми, а також доводити їхні властивості. Вони охоплюють роботу з двоцифровими числами, натуральними числами та звичайними дробами, розширюючи числові знання та навички учнів. Вивчення послідовностей знайомить учнів з новими математичними концепціями та властивостями чисел, розширюючи їхній математичний кругозір. Традиційні задачі вчать учнів використовувати систематичний підхід та алгоритми для розв'язання задач, що є цінним навиком у будь-якій галузі.

Окрім вищезазначеного, дослідження підручника алгебри 9 класу з поглибленим вивченням математики автора Мерзляка А. Г. дає підстави стверджувати, що вивчення тем розділу "Числові послідовності" забезпечує ґрунтовне розуміння цієї важливої теми та готує учнів до подальшого вивчення математики.

Отже, традиційні задачі з теми "Числові послідовності" є невід'ємною частиною шкільної математичної освіти, що сприяє не лише розвитку математичних знань та навичок учнів, але й формуванню їхніх логічних, аналітичних та інших загальноосвітніх компетенцій.

1.4. Аналіз змісту розвитку компетентностей при розв’язання традиційних задач

Традиційні задачі з числовими послідовностями, зокрема арифметичними та геометричними прогресіями, часто зустрічаються в шкільних курсах математики. Їх розв'язання сприяє не тільки засвоєнню математичних знань, але й розвитку різних компетентностей, таких як аналітичне мислення, вміння працювати з числовими даними, здатність до абстрагування та моделювання.

Розглянемо основні компетентності, які можна розвинути при розв'язанні задач на числові послідовності.

Математична грамотність включає здатність до розуміння і використання математичних понять, таких як послідовності, прогресії, межі рядів тощо. Задачі на аналітичні здібності та логічне мислення вимагають вміння аналізувати умови, знаходити закономірності, доводити властивості числових рядів. Учні навчаються шукати стратегії розв'язання задач, використовуючи різні методи. Також задачі передбачають виконання обчислень, аналіз числових значень і роботу з різними математичними формулами.

Традиційні задачі можна розподілити за кількома категоріями, кожна з яких розвиває специфічні компетентності: задачі на визначення виду послідовності (наприклад, розрізнення арифметичної та геометричної прогресій). Такі задачі сприяють розвитку логічного мислення, оскільки учні повинні аналізувати надані дані та формулювати висновки. Задачі на знаходження n-го члена послідовності розвивають аналітичні здібності та вміння застосовувати формули для обчислення. Задачі на обчислення сум перших n членів послідовності стимулюють вміння працювати з формулами, що є важливим для розвитку математичної грамотності. Доведення властивостей послідовностей (наприклад, доведення, що різниця між сусідніми членами є постійною). Такі задачі сприяють розвитку логічного мислення та аргументації. Для ілюстрації впливу розв'язання задач на розвиток компетентностей можна навести кілька прикладів:

Наприклад визначення виду послідовності за заданими членами. Це допомагає учням застосувати теоретичні знання на практиці, що розвиває здатність до абстрагування.

Також гарний приклад задачі на обчислення суми перших n членів геометричної прогресії з даним знаменником. Вирішення цієї задачі вимагає вміння застосовувати відповідні формули, що підвищує рівень математичної грамотності. Традиційні задачі варто порівняти з більш сучасними методами, такими як використання інтерактивних програм або модельних завдань. Наприклад, використання геометричних моделей може додатково розвивати вміння візуалізувати та будувати математичні моделі, що є важливим компонентом компетентнісного підходу.

Наведу детальний аналіз п'яти традиційних задач із числовими послідовностями та розгляну, як кожна з них сприяє розвитку різних компетентностей у учнів.

Приклад 1. Задача на визначення виду послідовності: дано послідовність чисел: 2, 4, 6, 8, ... Визначити, чи є вона арифметичною прогресією.

Аналіз:

Учні мають проаналізувати послідовність і перевірити, чи існує постійна різниця між сусідніми членами. У цьому випадку різниця дорівнює 2, отже, послідовність є арифметичною прогресією.

Ця задача розвиває логічне мислення, оскільки учні мають встановити закономірність між членами послідовності. Також розвивається математична грамотність, адже вони застосовують знання про арифметичну прогресію.

Приклад 2. Задача на обчислення n-го члена арифметичної прогресії: знайти десятий член арифметичної прогресії, якщо перший член дорівнює 3, а різниця дорівнює 5.

Аналіз:

Використовується формула n-го члена арифметичної прогресії:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, де a_1 — перший член, d — різниця прогресії, n — номер члена. Підставляючи значення, отримаємо: $a_{10} = 3 + (10-1) \cdot 5 = 3 + 45 = 48$.

Ця задача вчить учнів працювати з формулами та здійснювати обчислення, що сприяє розвитку математичної грамотності. Також задача допомагає зрозуміти структуру арифметичних послідовностей.

Приклад 3. Задача на обчислення суми перших n членів геометричної прогресії: обчислити суму перших п'яти членів геометричної прогресії, якщо перший член дорівнює 2, а знаменник прогресії дорівнює 3.

Аналіз:

Використовується формула суми перших n членів геометричної прогресії: $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n}{q-1}$ де a_1 — перший член, q — знаменник, n — кількість членів. Підставляючи значення, отримаємо:

$$S_5 = 2 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 2 \cdot \frac{243 - 1}{2} = 2 \cdot 121 = 242$$

Задача розвиває вміння працювати з формулами, виконувати обчислення та розуміти закономірності геометричних прогресій. Також ця задача підвищує здатність до аналітичного мислення та узагальнення.

Приклад 4. Задача на доведення, що послідовність є геометричною прогресією: довести, що послідовність 2, 6, 18, 54, ... є геометричною прогресією.

Аналіз:

Учні повинні знайти співвідношення між сусідніми членами. Співвідношення між кожним наступним і попереднім членом дорівнює 3 ($\frac{6}{2}, \frac{18}{6}, \frac{54}{18}$). Це підтверджує, що послідовність є геометричною прогресією із знаменником 3.

Задача сприяє розвитку логічного мислення та математичної грамотності, оскільки вимагає обґрунтування висновків. Це також навчає аналізувати числові ряди та знаходити закономірності.

Приклад 5. Задача на знаходження суми нескінченної геометричної прогресії: обчислити суму нескінченної геометричної прогресії з першим членом 5 і знаменником $\frac{1}{2}$.

Аналіз:

Використовується формула для суми нескінченної геометричної прогресії: $S = \frac{a_1}{1-q}$ де a_1 — перший член, q — знаменник, n — кількість членів. Підставляючи значення, отримаємо : $S = \frac{5}{1-0.5} = \frac{5}{0.5} = 10.$

Ця задача розвиває навички роботи з нескінченними рядами, вчить застосовувати формули та розуміти поняття границі послідовності. Це також сприяє розвитку аналітичних здібностей і математичної інтуїції.

Розв'язання традиційних задач сприяє розвитку різних компетентностей у учнів, таких як математична грамотність, аналітичне мислення, здатність до абстрагування та вирішення проблем. Кожна задача допомагає учням глибше зрозуміти числові послідовності, формує навички системного підходу та розвиває логічні здібності.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

У першому розділі дипломної роботи було здійснено аналіз основних понять теми «Числові послідовності» та традиційних задач, які використовуються під час їхнього вивчення. Зокрема, детально розглянуто такі аспекти, як аналітичне, словесне та рекурентне задання числових послідовностей. Кожен із цих способів має свої переваги, забезпечуючи учнів і студентів інструментами для більш глибокого розуміння закономірностей, що лежать в основі послідовностей.

Особливу увагу приділено аналізу арифметичних і геометричних прогресій, які є базовими темами шкільного курсу математики. Представлено формули для обчислення n-го члена та суми перших n членів прогресій. Їх використання дозволяє не тільки формувати навички виконання обчислень, а й стимулює учнів до знаходження закономірностей у числових рядах, розвитку логічного мислення та аналізу.

Традиційні задачі, такі як визначення виду послідовності, доведення властивостей прогресій і розрахунок їхніх елементів, були проаналізовані з точки зору розвитку математичних компетентностей учнів. Зокрема, ці задачі сприяють формуванню вміння працювати з формулами, використовувати алгебраїчні методи доведення та інтерпретувати числові закономірності. Важливим результатом є висновок, що такі задачі забезпечують системне засвоєння теоретичного матеріалу й підготовку до більш складних математичних тем у старших класах або вищій освіті.

Крім того, було проведено порівняння завдань із підручників для шкіл із поглибленим вивченням математики та звичайних програм. Це дало змогу продемонструвати різницю в рівнях складності задач, що дозволяє адаптувати матеріал до потреб різних груп учнів. Таким чином, аналіз матеріалу першого розділу підкреслює важливість числових послідовностей як фундаментальної теми для формування математичного мислення учнів.

РОЗДІЛ ІІ. ВИКОРИСТАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РОЗРОБКИ НЕСТАНДАРНИХ ЗАДАЧ

2.1. Поняття і приклади геометричних моделей для розробки задач

У процесі вивчення математичних дисциплін будь-яка технологія навчання спрямована на розвиток компетентностей щодо розв'язання задач. У задачниках, які пропонуються для загальноосвітніх закладів пропонуються добірки задач з формально вираженими умовами без поєднання з параметрами реальних об'єктів і явищ. Особливо це стосується задач при вивченні одного з важливих розділів математики «Числові послідовності». Тому створення нових видів задач для вивчення цього розділу, в умовах яких реалізується дидактичний принцип візуалізації, має актуальне значення. Алгоритми створення умов задач, пов'язаних з вивченням розділу «Числові послідовності» студентами спеціальності «Математика» у вищих педагогічних закладах на основі використання геометричних моделей. Такі задачі мають різні рівні складності і можуть бути використані при проведенні олімпіад серед учнів ліцеїв. Алгоритми базуються на використанні послідовностей геометричних образів, розташованих в межах побудованої геометричної моделі. Геометрична модель згідно з запропонованим узагальненим алгоритмом будується за допомогою: декартової системи координат; квадрата зі стороною, розташованого у І чверті системи координат; загальних членів відомих послідовностей.

На рисунку 2.1 представлена геометрична модель, яка ілюструє числову послідовність через побудову квадратів і кіл, вписаних в координатну площину. Модель розташована у І чверті декартової системи координат. Початкова точка $O(0;0)$вертикальна вісь y, горизонтальна вісь x. Побудовано квадрат зі стороною $a=\frac{1}{2}$, розташований на осях x та y. Верхня права вершина квадрата має координати $\left(1;\frac{1}{2}\right)$. Точки B_n розташовані на осі x і відповідають координатам $\left(\frac{n}{n+1};0\right)$. Наприклад: $B_1\left(\frac{1}{2};0\right), B_2\left(\frac{2}{3};0\right)$ тощо.

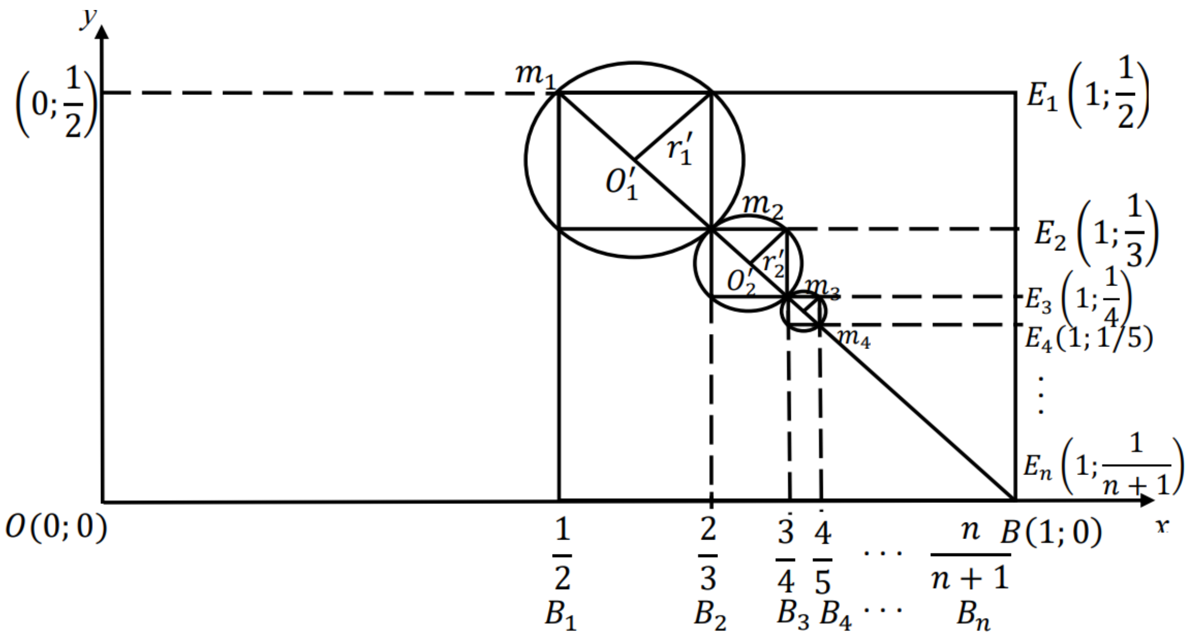

Рис. 2.1 На сторонах квадрата $B_1BE_1m_1$ зі стороною $a = \frac{1}{2}$ розташовані послідовності точок $B_n\left(\frac{n}{n+1};0\right), E_n\left(1;\frac{1}{n+1}\right), n \in N$

Точки E_n Розташовані на вертикальній стороні квадрата і відповідають координатам $\left(1;\frac{n}{n+1}\right)$. Наприклад: $E_1\left(1;\frac{1}{2}\right), E_2\left(1;\frac{1}{3}\right)$ тощо.

Перше коло з центром у точці O_1'має радіус $r_1' = \frac{1}{2}$ і проходить через точку m_1на стороні квадрата. Подібним чином побудовані менші кола з центрами O_2', O_3'…O_n' де кожне наступне коло має менший радіус, пов'язаний із загальним членом числової послідовності.

Ця модель ілюструє спадну числову послідовність $\frac{1}{n+1}$, де n ∈ N. Точки B_n утворюють послідовність значень на осі x, що прагнуть до 1, а точки E_n демонструють значення, які прямують до 0 на осі y.

Тож геометричні моделі є потужним інструментом для вивчення числових послідовностей, оскільки вони забезпечують наочність і сприяють розвитку аналітичного мислення. На прикладі моделі, представленої на рисунку, продемонстровано, як числові послідовності можна інтерпретувати за допомогою системи координат, квадратів, кіл та послідовностей точок. Це дозволяє ілюструвати спадний характер послідовностей і їх граничну поведінку в геометричній формі.

2.2. Побудова й представлення геометричної моделі для розробки задач

На основі заданої геометричної моделі, представленої на рис. 2.2., були отримані та проаналізовані числові послідовності з різними геометричними інтерпретаціями їхніх членів, які подаються нижче [с. 26-27].

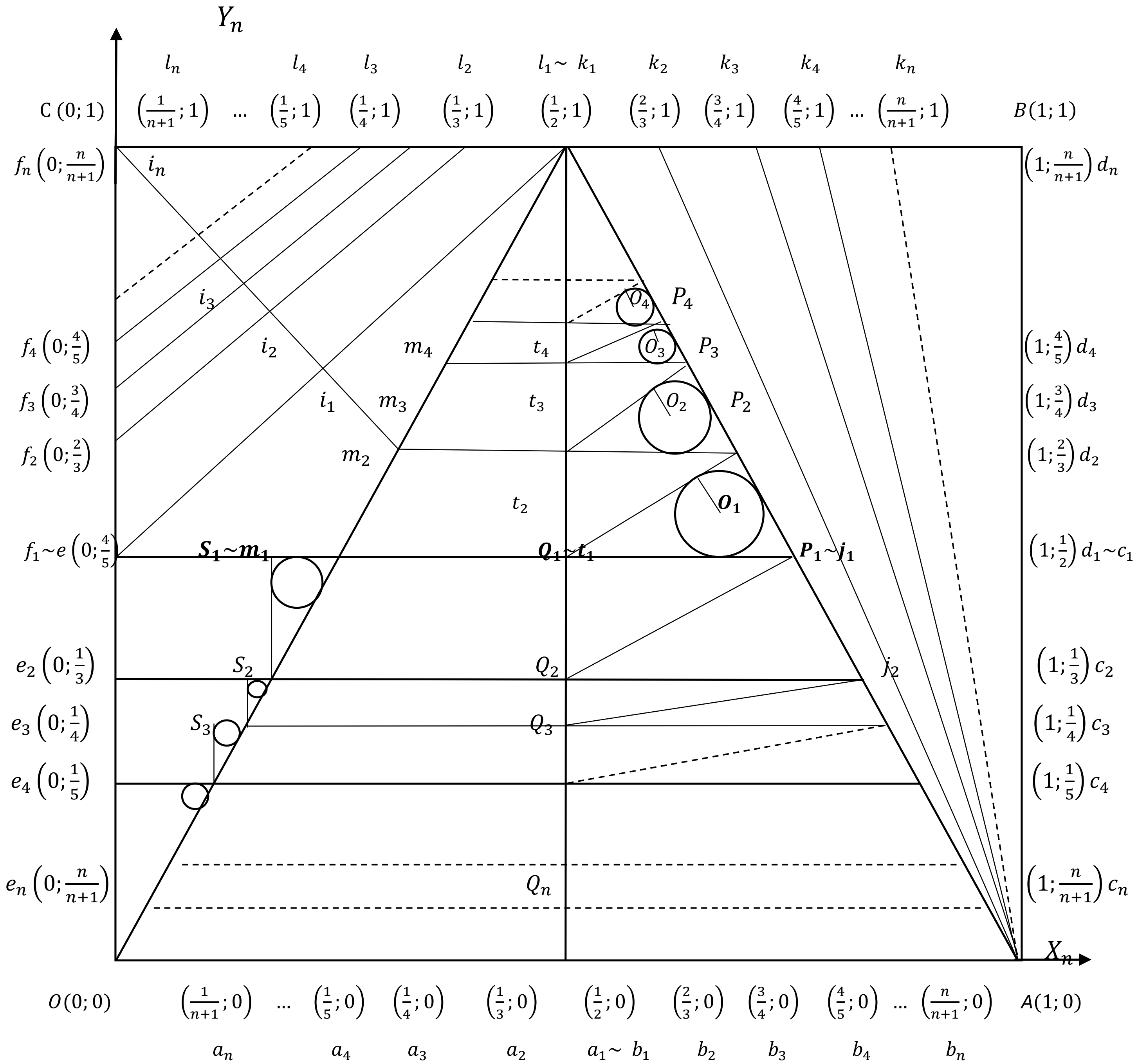

Рис.2.2 У квадрат з параметром $a = 1$ вписано послідовності точок $\{Q_n\}, \{t_n\}, \{i_n\}, \{P_n\}, \{j_n\}, \{S_n\}, \{m_n\}$. Координати цих точок визначаються шляхом використанням точок $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, l_n, k_n$ які розташовані на сторонах квадрату OABC за законом послідовностей $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ і $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

Використовуючи послідовності координат точок $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, l_n, k_n$ можна розв‘язати наступні задачі.

I. Задачі точкової геометричної інтерпретації

1. Скласти послідовність абсцис точок P_n
2. Скласти послідовність ординат точок P_n
3. Скласти послідовність абсцис точок m_n
4. Скласти послідовність ординат точок m_n
5. Скласти послідовність абсцис точок S_n
6. Скласти послідовність ординат точок S_n
7. Скласти послідовність абсцис точок i_n
8. Скласти послідовність ординат точок i_n

II. Задачі лінійної геометричної інтерпретації.

1. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{|\overline{a_n\ a_{n+1}}|\}_{n=1}^{\infty}$
2. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\left\{\left|\overline{b_n\ b_{n+1}}\right|\right\}_{n=1}^{\infty}$
3. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{|\overline{AK_n}|\}_{n=1}^{\infty}$
4. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{|\overline{P_n\ P_{n+1}}|\}_{n=1}^{\infty}$
5. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{|\overline{m_n\ m_{n+1}}|\}_{n=1}^{\infty}$
6. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{|\overline{\iota_n\ \iota_{n+1}}|\}_{n=1}^{\infty}$
7. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{|\overline{S_n\ S_{n+1}}|\}_{n=1}^{\infty}$
8. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{|\overline{J_n\ J_{n+1}}|\}_{n=1}^{\infty}$
9. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{|\overline{Q_{n+1}\ J_n}|\}_{n=1}^{\infty}$
10. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\left\{\left|\overline{\iota_n\ l_n}\right|\right\}_{n=1}^{\infty}$
11. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{|\overline{t_n\ P_{n+1}}|\}_{n=1}^{\infty}$
12. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{|\overline{Q_n\ J_n}|\}_{n=1}^{\infty}$
13. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{|\overline{S_n\ e_n}|\}_{n=1}^{\infty}$

III. Задачі квадратурної геометричної інтерпретації.

1. Скласти послідовність величин площ послідовності трикутників $\{\Delta AK_nK_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$

2. Скласти послідовність величин площ послідовності трикутників $\{\Delta t_n P_n P_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$

3. Скласти послідовність величин площ послідовності трикутників $\{\Delta Q_{n+1} j_n j_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

4. Скласти послідовність величин площ послідовності трикутників $\{\Delta C f_n i_n\}_{n=1}^{\infty}$

5. Скласти послідовність величин площ послідовності трапеції $\{e_n S_n S_{n+1} e_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

6. Скласти послідовність величин площ послідовності трапеції $\{Q_n j_n j_{n+1} Q_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

7. Скласти послідовність величин площ послідовності трапеції $\{m_n t_n t_{n+1} m_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

8. Скласти послідовність величин площ послідовності трапеції $\{f_n l_n l_{n+1} f_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

9. Скласти послідовність величин площ послідовності кругів вписаних в послідовність трикутників $\{\Delta t_n P_n P_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

IV. Задачі кубатурної геометричної інтерпретації.

1. Скласти послідовність величин об'ємів послідовності тіл обертання, що створюються обертанням навколо осі OX послідовності прямих $\{\overline{Q_n J_n}\}_{n=1}^{\infty}$

2. Скласти послідовність величин об'ємів послідовності тіл обертання, що створюються обертанням навколо осі OX послідовності прямих $\{\overline{Q_{n+1} J_n}\}_{n=1}^{\infty}$

3. Скласти послідовність величин об'ємів послідовності тіл обертання, що створюються обертанням навколо осі OX послідовності прямих $\{\overline{AK_n}\}_{n=1}^{\infty}$

4. Скласти послідовність величин об'ємів послідовності тіл обертання, що створюються обертанням навколо осі OX послідовності прямих $\left\{\overline{f_n l_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

2.3.1. Задачі точкової геометричної інтерпретації

У Задачах точкової геометричної інтерпретації буде розглянуто задачі, що використовують точкову геометричну інтерпретацію для вивчення числових послідовностей. Цей підхід дозволяє дослідити послідовності через аналіз координат точок, розміщених на площині в декартовій системі. Розв'язання таких задач полягає в побудові послідовностей координат, що відображають поведінку числових рядів у вигляді абсцис і ординат точок, розташованих в межах заданої геометричної моделі.

Цей розділ має на меті продемонструвати, як точкові інтерпретації на основі геометричних моделей допомагають у кращому розумінні та прогнозуванні закономірностей числових послідовностей. Точкова інтерпретація створює передумови для поєднання візуального і аналітичного підходів до розв’язання математичних задач, що може бути корисним для різнорівневого аналізу послідовностей.

Задачі точкової геометричної інтерпретації:

1. Скласти послідовність абсцис точок P_n
2. Скласти послідовність ординат точок P_n
3. Скласти послідовність абсцис точок m_n
4. Скласти послідовність ординат точок m_n
5. Скласти послідовність абсцис точок S_n
6. Скласти послідовність ординат точок S_n
7. Скласти послідовність абсцис точок i_n
8. Скласти послідовність ординат точок i_n

Задача 1. Скласти послідовність абсцис точок P_n

Розв’язання

Щоб визначити послідовність координат даної точки, проаналізуємо рисунок. З рисунку видно, що точки $P_1P_2P_3 \dots P_n$ знаходяться на діагоналі квадрата, тоді абсциса і ордината цих точок будуть рівні: $P_1\left(\frac{1}{2};1\right) P_0(1;0)$

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{0-1}$$

$$\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2} | \cdot 2$$

$$1 - 2x = y - 1$$

$y = -2x + 2$ – пряма точок P_n

$P_1 \colon y = \frac{1}{2}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\frac{1}{2} = -2x + 2$ таким чином $x = \frac{3}{4}$;

$P_2 \colon y = \frac{2}{3}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\frac{2}{3} = -2x + 2$ таким чином $x = \frac{2}{3}$;

$P_3 \colon y = \frac{3}{4}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\frac{3}{4} = -2x + 2$ таким чином $x = \frac{5}{8}$.

$$\frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{8} \dots \Rightarrow \frac{n+2}{2n+2}$$

Відповідь: $P_{n_x} = \frac{n+2}{2n+2}$

Задача 2. Скласти послідовність ординат точок P_n.

Розв'язання

У попередній задачі вже була знайдена ордината точки, тож

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \dots \Rightarrow P_{n_y} = \frac{n}{n+1}$$

Відповідь: $P_{n_y} = \frac{n}{n+1}$

Задача 3. Скласти послідовність абсцис точок m_n.

Розв'язання

Щоб визначити послідовність координат даної точки, проаналізуємо рисунок. З рисунку видно, що точки $m_1 m_2 m_3 \dots m_n$ знаходяться на діагоналі квадрата, тоді абсица і ордината цих точок будуть рівні: $(\frac{1}{2}; 1)$ (0;0)

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{y - 1}{-1}$$

$$\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} y$$

$$1 - 2x = 1 - y$$

$y = 2x$ – пряма точок m_n

$m_1 \colon y = \frac{1}{2}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\frac{1}{2} = 2x$ таким чином $x = \frac{1}{4}$;

$m_2 \colon y = \frac{2}{3}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\frac{2}{3} = 2x$ таким чином $x = \frac{2}{6}$;

$m_3 \colon y = \frac{3}{4}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\frac{3}{4} = 2x$ таким чином $x = \frac{3}{8}$.

$$\frac{1}{4};\ \frac{2}{6};\ \frac{3}{8}\ldots\ =\gg\ \frac{n}{2n+2}$$

$m_{n_x} = \frac{n}{2n+2}$

Відповідь: $m_{n_x} = \frac{n}{2n+2}$

Задача 4. Скласти послідовність ординат точок m_n.

Розв'язання

У попередній задачі вже була знайдена ордината точки, тож

$$\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\ldots\ =\gg m_{n_y} = \frac{n}{n+1}$$

Відповідь: $m_{n_y} = \frac{n}{n+1}$.

Задача 5. Скласти послідовність абсцис точок S_n.

Розв'язання

$$y = 2x$$

$S_1{:}\, y = \frac{1}{2}; x = \ \frac{1}{4}\ \ S_2{:}\, y = \frac{1}{3}; x = \ \frac{1}{6}\ \ S_3{:}\, y = \frac{1}{4}; x = \ \frac{1}{8}$

$$\frac{1}{4};\ \frac{1}{6}\ ;\frac{1}{8}\ ;\ldots =\gg\ S_{n_x} = \ \frac{1}{2n+2}$$

Відповідь: $S_{n_x} = \frac{1}{2n+2}$

Задача 6. Скласти послідовність ординат точок S_n.

Розв'язання

У попередній задачі вже була знайдена ордината точки, тож

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\ ;\frac{1}{4}\ ;\ldots =\gg\ S_{n_y} = \ \frac{1}{n+1}$$

Відповідь: $S_{n_y} = \frac{1}{n+1}$

Задача 7 і 8. Скласти послідовність абсцис та ординат точок i_n.

Розв'язання

Щоб визначити послідовність координат даної точки, проаналізуємо рисунок. З рисунку видно, що точки $i_1 i_2 i_3 \ldots i_n$ знаходяться на діагоналі квадрата, тоді абсциса і ордината цих точок будуть рівні: $(0;1)$; $(1;0)$ $\left(\frac{1}{2};1\right)$ $\left(0;\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{0-1}\ ;$$

$$-x=y-1\ ;$$

$$y=-x+1\ ;$$

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{0-\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{\frac{1}{2}-1}\ ;$$

$$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$$

$$-2x+1=-2y+2$$

$$2y=2x+1$$

$$y=x+\frac{1}{2}$$

Маємо систему:

$$\begin{cases} y=\ -x+1 \\ y=x+\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$-x+1=x+\frac{1}{2}$$

$$2x=\ \frac{1}{2}$$

$$x=\frac{1}{4}\ ; y=\frac{3}{4} \Rightarrow\!\!> \ i_1\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$$

Використовуючи точку $i_2:\left(\frac{1}{3};1\right)\ \left(0;\frac{2}{3}\right)$

$$\frac{x-\frac{1}{3}}{0-\frac{1}{3}}=\frac{y-1}{\frac{2}{3}-1}$$

$$-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)=\ -\frac{1}{3}(y-1)$$

$$-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}=-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}\ \ |*9$$

$$-3x+1=-3y+3$$

$$3y=3x+2$$

$$y=x+\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} y=x+\frac{2}{9} \\ y=-x+1 \end{cases}$$

$$x + \frac{2}{3} = -x + 1$$

$$2x = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{6}\ ; y = \frac{5}{6} \Rightarrow\ i_1\left(\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$$

Використовуючи точку $i_3 : \left(\frac{1}{4}; 1\right)\ \left(0;\frac{3}{4}\right)$

$$\frac{x - \frac{1}{4}}{0 - \frac{1}{4}} = \frac{y - 1}{\frac{3}{4} - 1}$$

$$-\frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}(y - 1)$$

$$x - \frac{1}{4} = y - 1$$

$$y = x + \frac{3}{4}$$

$$x + \frac{3}{4} = -x + 1$$

$$2x = \frac{1}{4}\ ; x = \frac{1}{8}\ ; y = \frac{7}{8}$$

$$i_{n_x} = \frac{1}{2n + 2}\ ;\ i_{n_y} = 1 - \frac{1}{2n + 2} = \frac{2n + 1}{2n + 2}$$

Відповідь: $i_{n_x} = \frac{1}{2n+2}\ ;\ i_{n_y} = 1 - \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}$.

2.3.2. Задачі лінійної геометричної інтерпретації.

У задачах лінійної геометричної інтерпретації буде розглянуто застосування лінійної інтерпретації для побудови та аналізу задач на числові послідовності. Лінійна геометрична інтерпретація дозволяє вивчати числові послідовності через послідовності відрізків, що відображають різні властивості і закономірності рядів. Такий підхід збагачує можливості задач з числовими рядами, оскільки він дозволяє наочно представити процеси змін між сусідніми членами послідовності у вигляді довжин, напрямків і співвідношень лінійних елементів.

Цей підрозділ продемонструє, як використання лінійних моделей сприяє виявленню залежностей у послідовностях і дозволяє ефективно аналізувати числові дані, що є важливим для розвитку аналітичного мислення. Лінійна інтерпретація відкриває додаткові можливості для візуалізації і поглибленого вивчення числових послідовностей через геометричний підхід.

Задача 1. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{[\overline{a_n\ a_{n+1}}]\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

$$i_{n_x} = \frac{1}{2n+2}\ ; \quad i_{n_y} = 1 - \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

$$a_1\left(\frac{1}{2};0\right), a_2\left(\frac{1}{3};0\right), a_3\left(\frac{1}{4};0\right), a_4\left(\frac{1}{5};0\right)$$

$$|\overline{a_1a_2}| = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \qquad |\overline{a_3a_4}| = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$|\overline{a_2a_3}| = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \qquad |\overline{a_4a_5}| = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$

$$|\overline{a_na_{n+1}}| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Відповідь: $|\overline{a_na_{n+1}}| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

Задача 2. Скласти послідовність величин послідовності відрізків

Розв'язання

$$\left\{\left[\overline{b_n\ b_{n+1}}\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Відповідь: $\left[\overline{b_n\ b_{n+1}}\right] = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

Задача 3. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{[\overline{AK_n}]\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

$$A(1;0), K_1\left(\frac{1}{2};1\right), K_2\left(\frac{2}{3};1\right), K_3\left(\frac{3}{4};1\right) \ldots$$

$$|\overline{AK_1}| = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$|\overline{AK_2}| = \sqrt{\frac{1}{9}+1} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$|\overline{AK_3}| = \sqrt{\frac{1}{16}+1} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$|\overline{AK_n}| = \sqrt{\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2}+1} = \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2}+1}$$

Відповідь: $|\overline{AK_n}| = \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2}+1}$

Задача 4. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{[\overline{P_n\ P_{n+1}}]\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

$$P_1\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right), P_2\left(\frac{4}{6};\frac{2}{3}\right), P_3\left(\frac{5}{8};\frac{3}{4}\right), P_4\left(\frac{6}{10};\frac{4}{5}\right),$$

$$|\overline{P_1P_2}| = \frac{\sqrt{5}}{12} \qquad |\overline{P_3P_4}| = \frac{\sqrt{5}}{40}$$

$$|\overline{P_2P_3}| = \frac{\sqrt{5}}{24} \qquad |\overline{P_4P_5}| = \frac{\sqrt{5}}{60}$$

$$|\overline{P_nP_{n+1}}| = \frac{\sqrt{5}}{2(n^2+3n+2)}$$

Відповідь:$|\overline{P_nP_{n+1}}| = \frac{\sqrt{5}}{2(n^2+3n+2)}$

Задача 5. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{[\overline{m_n\ m_{n+1}}]\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

$$m_1\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right) m_2\left(\frac{2}{6};\frac{2}{3}\right) m_1\left(\frac{3}{8};\frac{3}{4}\right) m_1\left(\frac{4}{10};\frac{4}{5}\right)$$

$$m_x = \frac{n}{2n+2}; m_y = \frac{n}{2n+2}$$

$$|\overline{m_1m_2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{12}$$

$$|\overline{m_2m_3}| = \frac{\sqrt{5}}{24}$$

$$|\overline{m_3m_4}| = \frac{\sqrt{5}}{40}$$

$$|\overline{m_nm_{n+1}}| = \frac{\sqrt{5}}{2(n^2+3n+2)}$$

Відповідь:$|\overline{m_nm_{n+1}}| = \frac{\sqrt{5}}{2(n^2+3n+2)}$

Задача 6. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{[\overline{\iota_n\ \iota_{n+1}}]\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

$$i_1\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right) i_2\left(\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right) i_3\left(\frac{1}{8};\frac{7}{8}\right) i_4\left(\frac{1}{10};\frac{9}{10}\right)$$

$$i_{n_x} = \frac{1}{2n+2}; i_{n_y} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

$$|\overline{\iota_1\iota_2}| = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$|\overline{\iota_2\iota_3}| = \frac{\sqrt{2}}{24}$$

$$|\overline{\iota_3\iota_4}| = \frac{\sqrt{2}}{40}$$

$$|\overline{\iota_n\iota_{n+1}}| = \frac{\sqrt{2}}{2(n^2+3n+2)}$$

Відповідь: $|\overline{\iota_n\iota_{n+1}}| = \frac{\sqrt{2}}{2(n^2+3n+2)}$

Задача 7. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{[\overline{S_n\ S_{n+1}}]\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

$$S_1\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right) S_2\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right) S_3\left(\frac{1}{8};\frac{1}{4}\right) S_4\left(\frac{1}{10};\frac{1}{5}\right)$$

$$S_{n_x} = \frac{1}{2n+2}; S_{n_y} = \frac{1}{n+1}$$

$$|\overline{S_1S_2}| = \frac{\sqrt{5}}{12}$$

$$|\overline{S_2S_3}| = \frac{\sqrt{5}}{24}$$

$$|\overline{S_3S_4}| = \frac{\sqrt{5}}{40}$$

$$|\overline{S_nS_{n+1}}| = \frac{1}{2(n^2+3n+2)}$$

Відповідь:$|\overline{S_nS_{n+1}}| = \frac{1}{2(n^2+3n+2)}$

Задача 8. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{|\overline{J_n\,J_{n+1}}|\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

Цю задачу хочу розв'язати другим способом, за теоремою Піфагора:

$$\sqrt{\left(\frac{2n+1}{2(n+1)} - \frac{2n+3}{2(n+2)}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2(n+1)(n+2)}$$

$$|\overline{J_n\,J_{n+1}}| = \frac{\sqrt{5}}{2(n+1)(n+2)}$$

Відповідь: $|\overline{J_n\,J_{n+1}}| = \frac{\sqrt{5}}{2(n+1)(n+2)}$

Задача 9. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{|\overline{Q_{n+1}\,J_n}|\}_{n=1}^{\infty}$.

Розв'язання

Цю задачу можна розв'язати за теоремою Косинуса, так як навпроти лежить кут 60°:

$$\sqrt{j_nj_{n+1}{}^2 + Q_nj_{n+1}{}^2 - j_nj_{n+1}\cdot Q_{n+1}j_{n+1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4(n+1)^2(n+2)^2} + \left(\frac{2n+1}{2(n+1)} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{5}}{2(n+1)(n+2)} \cdot \left(\frac{2n+1}{2(n+1)} - \frac{1}{2}\right)}$$

$$=$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{n^2}{4(n+1)^2} - \frac{\sqrt{5}n}{4(n+1)^2(n+2)}} =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \cdot \sqrt{5 + n^2(n+2)^2 - \sqrt{5}n(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \cdot \sqrt{n^4 + 4n^3 + \left(4 - \sqrt{5}\right)n^2 - 2\sqrt{5}n + 5}$$

Відповідь: $\lceil\overline{Q_{n+1}\, J_n}\rceil = \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \cdot \sqrt{n^4 + 4n^3 + \left(4 - \sqrt{5}\right)n^2 - 2\sqrt{5}n + 5}$.

Задача 10. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{\lceil\overline{\iota_n\, l_n}\rceil\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

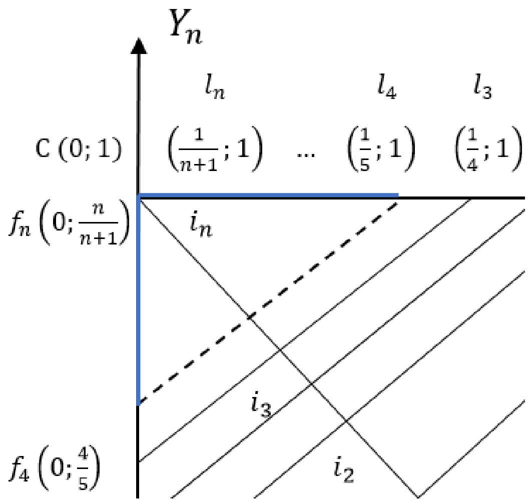

Рис. 2.2 Фрагмент геометричної моделі з параметром $a = 1$ вписано послідовності точок $\{Q_n\}$, $\{t_n\}$, $\{i_n\}$, $\{P_n\}$, $\{j_n\}$, $\{S_n\}$, $\{m_n\}$. Координати цих точок визначаються шляхом використанням точок $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, l_n, k_n$ які розташовані на сторонах квадрату OABC за законом послідовностей $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ і $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ тому сині відрізки рівні. Отже $f_n l_n = 2 i_n l_n = \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

$$[\overline{\iota_n\ l_n}] = \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)}$$

Відповідь: $[\overline{\iota_n\ l_n}] = \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)}$

Задача 11. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{[\overline{t_n\ P_{n+1}}]\}_{n=1}^{\infty}$.

Розв'язання

Цю задачу можна розв'язати за теоремою Косинуса, так як навпроти лежить кут 60°:

$$[\overline{t_n\ P_{n+1}}] = \sqrt{t_nP_n{}^2 + P_nP_{n+1}{}^2 - t_nP_n \cdot P_nP_{n+1}} =$$

$$= \frac{n^2 + (4-\sqrt{9})n + 9 - 2\sqrt{5}}{2(n+1)(n+2)}$$

Відповідь: $[\overline{t_n\ P_{n+1}}] = \frac{n^2+(4-\sqrt{9})n+9-2\sqrt{5}}{2(n+1)(n+2)}$

Задача 12. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{[\overline{Q_n\ J_n}]\}_{n=1}^{\infty}$.

Розв'язання

Дивлячись на геометричну модель можна знайти відстань

$$j_{n_x} - Q_{n_x} = \frac{2n+1}{2(n+1)} - \frac{1}{2} = \frac{n}{2(n+1)}$$

Відповідь: $[\overline{Q_n\ J_n}] = \frac{n}{2(n+1)}$

Задача 13. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\{[\overline{S_n\ e_n}]\}_{n=1}^{\infty}$.

Розв'язання

Дивлячись на геометричну модель можна знайти відстань

$$S_{n_x} - e_{n_x} = \frac{1}{2n+1} - 0 = \frac{1}{2n+1}$$

Відповідь: $[\overline{S_n\ e_n}] = \frac{1}{2n+1}$

2.3.3. Задачі квадратурної геометричної інтерпретації

У розділі «Задачі квадратурної геометричної інтерпретації» розглядатиметься застосування квадратурної геометричної інтерпретації для аналізу і побудови задач на числові послідовності. Квадратурна інтерпретація зосереджується на обчисленні площ геометричних фігур, що асоціюються з елементами числових рядів, що дозволяє дослідити поведінку послідовностей через площинні характеристики. Таке представлення дає змогу наочно аналізувати зростання, спадання та інші закономірності числових рядів на основі зміни площ фігур, які відповідають кожному члену послідовності.

У цьому підрозділі буде показано, як задачі з квадратурною інтерпретацією сприяють розвитку вміння абстрактного мислення та аналізу через візуалізацію математичних понять. Такий підхід не лише сприяє глибшому розумінню числових послідовностей, а й розкриває можливості використання геометрії для пояснення числових закономірностей.

Задачі квадратурної геометричної інтерпретації:

Задача 1. Скласти послідовність величин площ послідовності трикутників $\{\Delta AK_nK_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

Обчислимо площу трикутника за допомогою формули площі трикутника

$$S_\Delta = \frac{1}{2}ah_a$$

Сторона квадрата і є $h_a = 1$, $a = K_{n+1_x} - K_{n_x}$

$$K_{n_x} = \frac{n}{n+1} -\gg a = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot 1 = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

Відповідь: $\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$

Задача 2. Скласти послідовність величин площ послідовності трикутників $\{\Delta t_nP_nP_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

Обчислимо площу трикутника за допомогою формули площі трикутника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a h_a$$

$$a = P_{n_x} - t_{n_x} = \frac{n+2}{2(n+1)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2(n+1)}$$

$$h = P_{n+1_y} - P_{n_y}$$

$$P_{n_y} = \frac{n}{n+1} -\gg h = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2}$$

Відповідь: $\frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2}$

Задача 3. Скласти послідовність величин площ послідовності трикутників $\{\Delta Q_{n+1} j_n j_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

Обчислимо площу трикутника за допомогою формули площі трикутника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a h_a$$

$$j_{n_y} = \frac{n}{n+1} \; ; \; j_{n_x} = \frac{2n+1}{2(n+1)}$$

$$a = j_{n+1_x} - Q_{n+1_x} = \frac{2n+3}{2(n+1)} - \frac{1}{2} = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$h = j_{n_y} - j_{n+1_y} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4(n+2)}$$

Відповідь: $\frac{1}{4(n+2)}$

Задача 4. Скласти послідовність величин площ послідовності трикутників $\{\Delta C f_n i_n\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

Обчислимо площу трикутника за допомогою формули площі трикутника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a h_a$$

i_n знайдено у задачах 2.7 , 2.8

$$S_n = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\cdot\frac{2n+2}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{4(n+1)^2}$$

Відповідь: $\frac{2n+1}{4(n+1)^2}$

Задача 5. Скласти послідовність величин площ послідовності трапеції $\{e_n S_n S_{n+1} e_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

Обчислимо площу трапеції за допомогою формули площі трапеції

$$S_{\text{тр}} = \frac{a+b}{2}h_a$$

$$S_{\text{тр}} = \frac{S_{n_x} + S_{n+1_x}}{2}\cdot e_{n_y} - e_{n+1_y}$$

$$S_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n+1}{4(n+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{n(n+1)} = \frac{2n+3}{4n(n+1)^2(n+2)}$$

Відповідь: $\frac{2n+3}{4n(n+1)^2(n+2)}$

Задача 6. Скласти послідовність величин площ послідовності трапеції $\{Q_n j_n j_{n+1} Q_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

Обчислимо площу трапеції за допомогою формули площі трапеції

$$S_{\text{тр}} = \frac{a+b}{2}h_a$$

$$S_{\text{тр}} = \frac{\left(j_{n_x} - \frac{1}{2}\right) + j_{n+1_x} - \frac{1}{2}}{2}\cdot Q_{n_y} - Q_{n+1_y}$$

j_n лежать на прямій АК_1

Використовуючи рівняння прямої через кутовий коефіцієнт $y = kx + b$

$$k = tg\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{AB}{K_1 B} = -2$$

$$A(1;0) -\gg -2 + b = 0 -\gg b = 2$$

$$y = 2 - 2x$$

$$y = \frac{1}{2}: \quad \frac{1}{2} = 2 - 2x, \qquad x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{1}{3}: \quad \frac{1}{3} = 2 - 2x, \qquad x = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$y = \frac{1}{n+1}: \qquad \frac{1}{n+1} = 2 - 2x\,, \qquad x = 1 - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2(n+1)}$$

$$j_{n_x} = \frac{2n+1}{2(n+1)}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2n+1}{2(n+1)} - \frac{1}{2} + \frac{2n+3}{2(n+2)} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(2n+1)(n+2) + (2n+3)(n+1)}{2(n+1)(n+2)} - 1\right) \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2n^2 + 5n + 2 + 2n^2 + 5n + 1}{2(n+1)(n+2)} - 1\right) \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4n^2 + 10n + 3 - 2n^2 - 6n - 4}{2(n+1)(n+2)}\right) \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2n^2 + 4n - 1}{2(n+1)(n+2)}\right) \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n^2 + 4n - 1}{4(n+1)^2(n+2)^2}$$

Відповідь: $\frac{2n^2+4n-1}{4(n+1)^2(n+2)^2}$

Задача 7. Скласти послідовність величин площ послідовності трапеції $\{m_n t_n t_{n+1} m_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

Обчислимо площу трапеції за допомогою формули площі трапеції

$$S_{\text{тр}} = \frac{a+b}{2} h_a$$

$$S_{\text{тр}} = \frac{t_{n_x} - m_{n_x} + t_{n+1_x} - m_{n_x}}{2} \cdot t_{n+1_y} - t_{n_y}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2(n+1)} + \frac{1}{2} + \frac{n+1}{2(n+2)}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{2(n+1)(n+2)}\right) \cdot \left(\frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2n^2 + 6n + 4 - n^2 - 2n + n^2 + 2n + 1}{2(n+1)(n+2)}\right) \cdot \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2n^2 + 6n + 5}{2(n+1)(n+2)}\right) \cdot \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{2n^2 + 6n + 5}{4(n+1)^2(n+2)^2}$$

Відповідь: $\frac{2n^2+6n+5}{4(n+1)^2(n+2)^2}$.

Задача 8. Скласти послідовність величин площ послідовності трапеції $\{f_n l_n l_{n+1} f_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

Для знаходження площі трапеції продовжимо бічні грані до меншої основи, у результаті вийде трикутник. Щоб знайти площу трапеції треба:

$$S_{\text{тр}} = S_{\text{б}} - S_{\text{м}}$$

$$S_{\text{б}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$S_{\text{м}} = \frac{1}{2}(1 - f_n) \cdot l_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)^2}$$

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2(n+1)^2}$$

Відповідь: $\frac{1}{8} - \frac{1}{2(n+1)^2}$

Задача 9. Скласти послідовність величин площ послідовності кругів вписаних в послідовність трикутників $\{\Delta t_n P_n P_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

Щоб знайти площу кола вписаний у трикутник $\Delta t_n P_n P_{n+1}$ скористаємось такою формулою:

$$S = p \cdot r$$

$$S = \frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2}$$

(Задача 2 з розділу 2.3.2)

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(P_n P_{n+1} + t_n P_n + t_n P_{n+1}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{2(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{\sqrt{n^2 + \left(4 - \sqrt{5}\right)n + 9 - 2\sqrt{5}}}{2(n+1)(n+2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{4(n+1)(n+2)}\left(\sqrt{5} + n + 2 + \sqrt{n^2 + \left(4 - \sqrt{5}\right)n + 9 - 2\sqrt{5}}\right)$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{5} + n + 2 + \sqrt{n^2 + \left(4 - \sqrt{5}\right)n + 9 - 2\sqrt{5}}}$$

Відповідь: $\frac{1}{(n+1)\sqrt{5}+n+2+\sqrt{n^2+\left(4-\sqrt{5}\right)n+9-2\sqrt{5}}}$

2.3.4. Задачі кубатурної геометричної інтерпретації

Задачам кубатурної геометричної інтерпретації присвячено вивченню числових послідовностей за допомогою аналізу об'ємів тіл, що відповідають окремим елементам ряду. Кубатурна геометрична інтерпретація відкриває новий рівень дослідження, адже об'єм як тривимірна величина дозволяє представити числові значення послідовності у вигляді тіл обертання або інших тривимірних об'єктів. Це підходить для задач, де важливо вивчати не лише взаємозв'язок між елементами ряду, а й бачити їх у просторі, що надає можливість детальніше простежити закономірності, зокрема темпи зростання та спадання ряду.

У цьому підрозділі будуть представлені приклади задач, у яких кожен член числової послідовності інтерпретується як об'єм геометричного тіла. Такий підхід сприяє розвитку просторового мислення, допомагає зрозуміти, як числові послідовності можуть бути пов'язані з фізичними об'єктами та їхніми характеристиками. Завдяки цьому учні й студенти матимуть можливість сприймати числові ряди не лише як абстрактні величини, а як частину моделі реального світу, де математичні обчислення об'ємів можуть відображати конкретні фізичні процеси або структури.

Застосування кубатурної інтерпретації також сприяє інтеграції математики з фізикою та іншими природничими науками, де обчислення об'ємів тіл часто є важливою частиною моделювання. Використовуючи задачі з кубатурною геометрією, учні та студенти можуть на практиці застосувати знання про об'єми до розв'язання задач з реальними об'єктами, наприклад, обчисленням об'ємів води в резервуарах, повітря в сферах чи інших матеріалів в об'ємах визначених форм. Цей розділ підготує учнів до більш глибокого розуміння теми числових послідовностей і забезпечить навички, що знадобляться їм у подальшому навчанні та практичній діяльності.

Задачі кубатурної геометричної інтерпретації:

Задача 1. Скласти послідовність величин об'ємів послідовності тіл обертання, що створюються обертанням навколо осі OX послідовності прямих $\{\overline{Q_n J_n}\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

При обертанні $Q_n j_n$ довкола осі Ox буде утворюватися циліндр. Об'єм циліндра розраховується за формулою:

$$V = \pi R^2 \cdot H$$

$$V = \ \pi \cdot {Q_{n_x}}^2 t_n P_n = \frac{\pi}{2(n+1)^3}$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2(n+1)^3}$

Задача 2. Скласти послідовність величин об'ємів послідовності тіл обертання, що створюються обертанням навколо осі OX послідовності прямих $\{\overline{Q_{n+1} J_n}\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

При обертанні $Q_{n+1} j_n$ довкола осі Ox буде утворюватися зрізаний конус. Об'єм зрізаного конуса розраховується за формулою:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

$$f(x)\colon \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{2n+1}{2(n+1)} - \frac{1}{2}} = \frac{y - \frac{1}{2}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}$$

$$\frac{2x-1}{n} = y(n+1) - 1$$

$$y = \frac{2x + (n-1)}{n+2}$$

$$V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2n+1}{2n+2}} \left(\frac{2x + (n-1)}{n+2} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{\pi}{(n+2)^2} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2n+1}{2n+2}} (4x^2 + 4(n-1)x + (n-1)^2) dx \right) =$$

$$= \frac{\pi}{(n+2)^2} \left(\frac{4}{3}x^3 + 2(n-1)x^2 + (n-1)^2 x \right)_{\frac{1}{2}}^{\frac{2n+1}{2n+2}} =$$

$$= \frac{\pi n^3 (3n^2 + 9n + 7)}{6(n+1)^3 (n+2)^2}$$

Відповідь: $\frac{\pi n^3 (3n^2+9n+7)}{6(n+1)^3 (n+2)^2}$

Задача 3. Скласти послідовність величин об'ємів послідовності тіл обертання, що створюються обертанням навколо осі OX послідовності прямих $\{\overline{AK_n}\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

При обертанні AK_n довкола осі Ox буде утворюватися конус. Об'єм конуса розраховується за формулою:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{\pi}{3}\left(1 - \frac{\pi}{(n+1)}\right) = \frac{\pi}{3(n+1)}$$

Відповідь: $\frac{\pi}{3(n+1)}$

Задача 4. Скласти послідовність величин об'ємів послідовності тіл обертання, що створюються обертанням навколо осі OX послідовності прямих $\{\overline{f_n l_n}\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

При обертанні $f_n l_n$ довкола осі Ox буде утворюватися зрізаний конус. Об'єм зрізаного конуса розраховується за формулою:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{n+1}} \left(x + \frac{n}{n+1}\right)^2 dx = \pi \int_0^{\frac{1}{n+1}} \left(x^2 + \frac{2nx}{n+1} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right) dx =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2n}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+1)^2}\right) = \frac{\pi(n+1)^2}{(n+1)^2} = \pi$$

Відповідь: π

2.4. Перелік задач для можливого використання в навчальному процесі та на олімпіадах:

а) учнями ліцеїв

Учнями ліцеїв задачі з числовими послідовностями і геометричними моделями виконують важливу роль не тільки у закріпленні знань, але й у розвитку здатності до дослідницької діяльності та критичного мислення. Завдяки графічним методам представлення послідовностей учні мають змогу візуалізувати поведінку чисел у залежності від зміни параметрів. Це дозволяє краще розуміти властивості арифметичних і геометричних прогресій, а також досліджувати нові типи закономірностей, що виходять за рамки традиційних завдань.

Графічне представлення дозволяє учням візуалізувати зміну значень членів послідовності в залежності від значення $n \in \mathbb{N}$. Підтримуючи цю думку і зважаючи на те, що послідовність є одним з важливих понять у математиці, були проведені дослідження по використанню геометричних моделей для генерації і візуалізації членів послідовностей та створення нових задач для використання учнями ліцеїв як в процесі поточних знань, так і при проведенні олімпіад і факультативів з математики. При цьому розв’язання нових задач ліцеїстами повинно мати дослідницьку складову і поширювати їх знання з важливого сучасного поняття «модель».[13]

Запропоновані задачі охоплюють кілька рівнів складності, що дозволяє адаптувати їх для різних груп учнів, залежно від рівня їх підготовки. Наприклад:

1. **Перший рівень складності**. Задачі спрямовані на визначення координат точок, які утворюють числові послідовності, побудовані за геометричними моделями. Учні досліджують точки, розташовані на сторонах квадрата або інших геометричних фігурах, та аналізують їхні закономірності.

2. **Другий і третій рівень складності**. Тут використовуються задачі, які включають обчислення довжин відрізків, площ геометричних фігур або навіть об'ємів тіл. Такі задачі дозволяють учням поєднувати знання з алгебри, геометрії та навіть фізики, особливо якщо моделювання пов'язане із реальними об'єктами.

3. **Дослідницький рівень**. На цьому етапі учні аналізують складні числові послідовності, представлені у вигляді геометричних моделей, і створюють власні правила їх генерації. Це можуть бути задачі на побудову графіків членів послідовностей, які демонструють асимптотичну поведінку чисел, або моделі, які ілюструють практичні ситуації (наприклад, зміну швидкості в залежності від часу).

Особливу увагу приділено створенню завдань для олімпіад, які допомагають розкрити творчий потенціал учнів. Вони часто включають елементи нестандартного підходу до розв’язання задач. Наприклад, учні можуть розраховувати площі трапецій чи кругів, вписаних у послідовність трикутників, або аналізувати об'єми тіл, що обертаються навколо осі.

Крім того, завдання орієнтовані на формування міждисциплінарного підходу до навчання. Використання моделей із геометричними інтерпретаціями дозволяє не лише працювати з числами, а й розвивати просторове мислення, здатність уявляти об'єкти у тривимірному просторі та аналізувати взаємозв’язки між величинами.

Таким чином, запропоновані завдання не лише поглиблюють знання ліцеїстів, але й забезпечують їхню готовність до подальшого навчання у вищих навчальних закладах. Розв’язання таких задач формує навички, що є важливими як для майбутньої наукової діяльності, так і для застосування математичних знань у реальному житті.

На основі проведених нами досліджень пропонується 20 задач для учнів ліцею, за представленою геометричною моделлю з розділу 2.2.

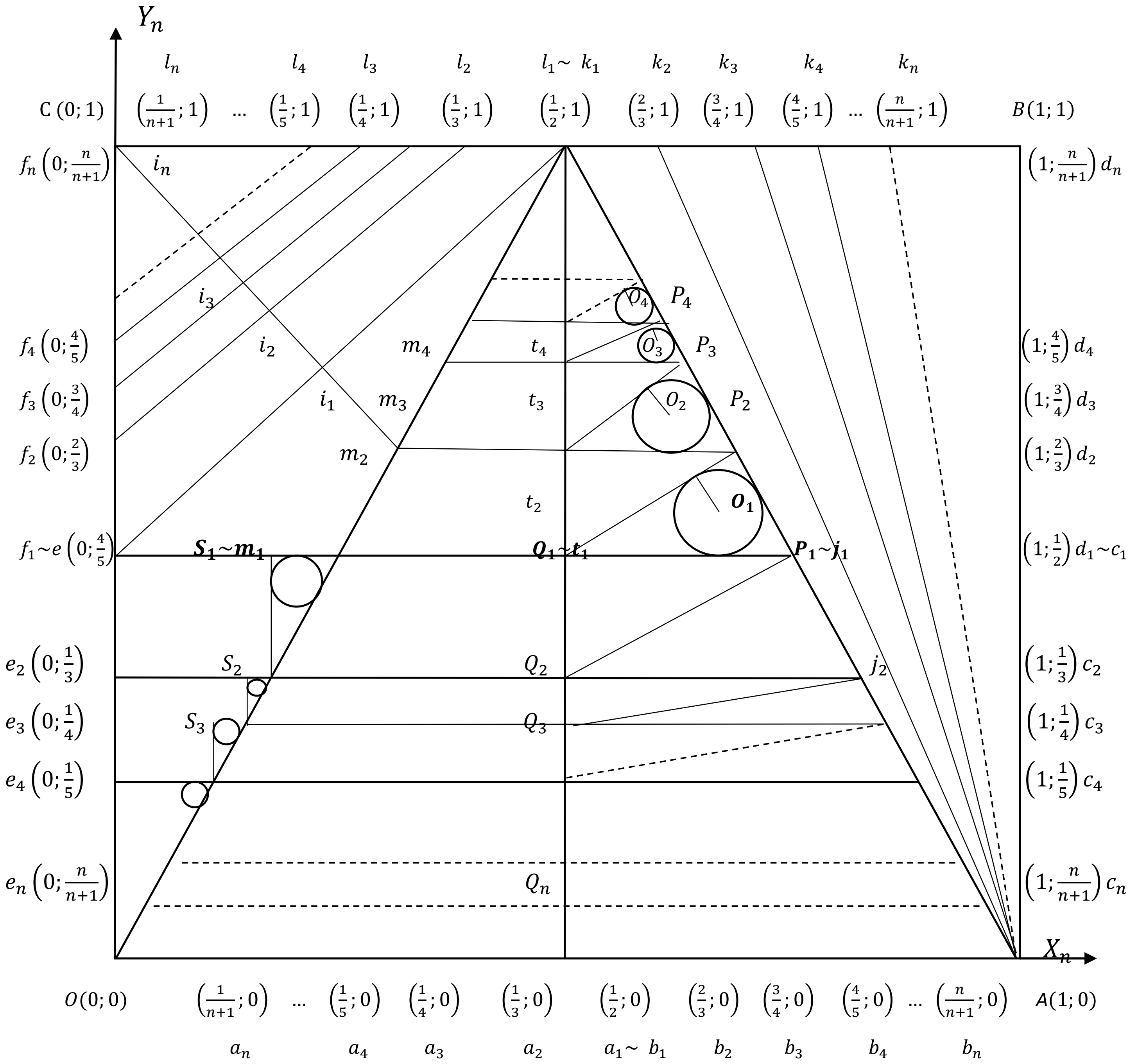

Рис.2.1 У квадрат з параметром $a = 1$ вписано послідовності точок $\{Q_n\}, \{t_n\}, \{i_n\}, \{P_n\}, \{j_n\}, \{S_n\}, \{m_n\}$. Координати цих точок визначаються шляхом використанням точок $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, l_n, k_n$ які розташовані на сторонах квадрату ОАВС за законом послідовностей $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ і $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

Задачі першого рівня складності

1.1 Визначити послідовність координат точок Q_n, які лежать на стороні ОА квадрата, та задати формулою їх координати.

1.2 Визначити послідовність координат точокP_n, які лежать на стороні ОС квадрата, та задати формулою їх координати.

1.3 Визначити послідовність координат точок S_n, які лежать на стороні АВ квадрата, та задати формулою їх координати.

1.4 Визначити послідовність координат точок t_n, які лежать на стороні ВС квадрата, та задати формулою їх координати.

1.5 Визначити послідовність координат точок i_n, які лежать на стороні АВ квадрата, та задати формулою їх координати.

Задачі другого рівня складності

2.1 Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{Q_n Q_{n+1}}$ та задати її формулою.

2.2 Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{P_n P_{n+1}}$ та задати її формулою.

2.3 Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{S_n S_{m+1}}$ та задати її формулою.

2.4 Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{t_n t_{n+1}}$ та задати її формулою.

2.5 Визначити послідовність довжин відрізків $\overline{\iota_n \iota_{n+1}}$ та задати її формулою.

Задачі третього рівня складності

3.1 Визначити послідовність величин площ $\Delta Q_n P_n O$ та задати її формулою.

3.2 Визначити послідовність величин площ $\Delta i_n t_n B$ та задати її формулою.

3.3 Скласти послідовність величин площ послідовності кругів вписаних в послідовність трикутників $\Delta t_n P_n P_{n+1}$.

3.4 Обчисліть площу чотирикутника з вершинами в точках $Q_n t_n S_n m_n$.

3.5 Знайдіть довжину відрізка між точками m_n та Q_{n+1}.

Дослідницький рівень

4.1 Знайдіть суму перших трьох відстаней між точками Q_n та t_n.

4.2 Обчисліть суму перших п'яти членів послідовності відстаней між точками P_n та S_n

4.3 Дослідіть залежність відстані між точками i_n та j_nвід n.

4.4 Визначте середню відстань між точками Q_n та m_n при $n = 1, 2, 3, \dots, 10$.

4.5 Знайдіть площу багатокутника з вершинами в точках Q_1, t_1, i_1, P_1, j_1, S_1, m_1.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ

Задача 1.2. Визначити послідовність координат точок Рn.

Розв'язання

Щоб визначити послідовність координат даної точки, проаналізуємо рисунок. З рисунку видно, що точки $P_1P_2P_3 \dots P_n$ знаходяться на діагоналі квадрата, тоді абсциса і ордината цих точок будуть рівні: $P_1\left(\frac{1}{2}; 1\right) P_0(1; 0)$

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{y - 1}{0 - 1}$$

$$\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} | \cdot 2$$

$$1 - 2x = y - 1$$

$y = -2x + 2$ – пряма точок P_n

P_1: $y = \frac{1}{2}$ $\quad$ =≫ $\quad$ $\frac{1}{2} = -2x + 2$ таким чином $x = \frac{3}{4}$;

P_2: $y = \frac{2}{3}$ $\quad$ =≫ $\quad$ $\frac{2}{3} = -2x + 2$ таким чином $x = \frac{2}{3}$;

P_3: $y = \frac{3}{4}$ $\quad$ =≫ $\quad$ $\frac{3}{4} = -2x + 2$ таким чином $x = \frac{5}{8}$.

$$\frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{8} \dots \ \Rightarrow \ \frac{n+2}{2n+2}$$

Відповідь: $P_{n_x} = \frac{n+2}{2n+2}$

Задача 2.2. Скласти послідовність величин послідовності відрізків $\overline{\boldsymbol{P_n\,P_{n+1}}}$

Розв'язання

$$P_1\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right),P_2\left(\frac{4}{6};\frac{2}{3}\right),P_3\left(\frac{5}{8};\frac{3}{4}\right),P_4\left(\frac{6}{10};\frac{4}{5}\right),$$

$$|\overline{P_1P_2}|=\frac{\sqrt{5}}{12} \qquad |\overline{P_3P_4}|=\frac{\sqrt{5}}{40}$$

$$|\overline{P_2P_3}|=\frac{\sqrt{5}}{24} \qquad |\overline{P_4P_5}|=\frac{\sqrt{5}}{60}$$

$$|\overline{P_nP_{n+1}}|=\frac{\sqrt{5}}{2(n^2+3n+2)}$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{5}}{12}$; $\frac{\sqrt{5}}{4}$; $\frac{\sqrt{5}}{40}$; $\frac{\sqrt{5}}{60}$.

Задача 3.3 Скласти послідовність величин площ послідовності кругів вписаних в послідовність трикутників $\Delta t_nP_nP_{n+1}$.

Розв'язання

Щоб знайти площу кола вписаний у трикутник $\Delta t_nP_nP_{n+1}$ скористаємось такою формулою:

$$S=p\cdot r$$

$$S=\frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2}$$

(Задача 2 з розділу 2.3.2)

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(P_nP_{n+1}+t_nP_n+t_nP_{n+1})=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{2(n+1)(n+2)}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{\sqrt{n^2+\left(4-\sqrt{5}\right)n+9-2\sqrt{5}}}{2(n+1)(n+2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{4(n+1)(n+2)}\left(\sqrt{5}+n+2+\sqrt{n^2+\left(4-\sqrt{5}\right)n+9-2\sqrt{5}}\right)$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{5} + n + 2 + \sqrt{n^2 + \left(4 - \sqrt{5}\right)n + 9 - 2\sqrt{5}}}$$

Відповідь: $\frac{1}{(n+1)\sqrt{5}+n+2+\sqrt{n^2+\left(4-\sqrt{5}\right)n+9-2\sqrt{5}}}$.

Розробка задач із використанням геометричних моделей для ліцеїстів є важливим інструментом у підвищенні якості математичної освіти. Запропоновані завдання не лише поглиблюють розуміння числових послідовностей, але й стимулюють розвиток просторового мислення, аналітичних здібностей та дослідницьких навичок.

б) студентами спеціальності «МІ»

Геометричні моделі, представлені у цьому розділі, відіграють значну роль у візуалізації числових послідовностей, роблячи їх більш доступними для розуміння. Зокрема, завдяки цьому підходу можливо показати студентам, як числові ряди можуть бути представлені в просторових об'єктах, таких як точки, лінії, площі та об'єми. Така інтерпретація сприяє розвитку вмінь просторового мислення, абстракції та аналітичного аналізу, що є важливими компетентностями для студентів математичних спеціальностей.

Основна мета такого підходу полягає в тому, щоб студенти навчилися бачити числові послідовності як частину геометричних об'єктів, що змінюються відповідно до визначених законів, та могли інтерпретувати їх не лише алгебраїчно, але й через розв'язання задач із реальними параметрами. Задачі цього розділу мають різний рівень складності, що дозволяє викладачам вибрати відповідний рівень для конкретних груп студентів або етапу навчального процесу.

На основі проведених нами досліджень пропонується 46 задач для студентів групи МІ, за представленою геометричною моделлю з розділу 2.2.

Задачі першого рівня складності

Визначити послідовність координат точок та задати формулою її координати:

1.1. a_n 1.5. P_n 1.9. $\mathrm{i_n}$

1.2. b_n 1.6. f_n 1.10. $\mathrm{t_n}$

1.3. c_n 1.7. m_n 1.11. $\mathrm{Q_n}$

1.4. e_n 1.8. S_n 1.12. $\mathrm{j_n}$

Задачі другого рівня складності

Скласти послідовність величин послідовності відрізків:

2.1. $\left\{\left|\overline{d_n\, d_{n+1}}\right|\right\}_{n=1}^{\infty}$ 2.5. $\left\{\left|\overline{l_n\, m_{n+1}}\right|\right\}_{n=1}^{\infty}$ 2.9. $\{|\overline{Q_{n+1}\, J_n}|\}_{n=1}^{\infty}$

2.2. $\{|\overline{c_n\, c_{n+1}}|\}_{n=1}^{\infty}$ 2.6. $\{|\overline{\iota_n\, \iota_{n+1}}|\}_{n=1}^{\infty}$ 2.10. $\left\{\left|\overline{\iota_n\, l_n}\right|\right\}_{n=1}^{\infty}$

2.3. $\left\{\left|\overline{e_n f_n}\right|\right\}_{n=1}^{\infty}$ 2.7. $\{|\overline{S_n\, S_{n+1}}|\}_{n=1}^{\infty}$ 2.11. $\{|\overline{t_n\, P_{n+1}}|\}_{n=1}^{\infty}$

2.4. $\{|\overline{P_n\, P_{n+1}}|\}_{n=1}^{\infty}$ 2.8. $\{|\overline{\iota_n\, J_{n+1}}|\}_{n=1}^{\infty}$ 2.12. $\{|\overline{Q_n\, J_n}|\}_{n=1}^{\infty}$

Задачі третього рівня складності

Скласти послідовність величин площ послідовності трикутників/трапеції

3.1. $\{\Delta Q_n t_n t_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 3.6.$\{i_n t_n P_n S_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

3.2. $\{\Delta S_n Q_n t_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ 3.7. $\{t_n P_n S_{n+2} Q_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

3.3. $\{\Delta t_n P_n P_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ 3.8. $\{e_n S_n S_{n+1} e_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

3.4. $\{\Delta Q_n j_n S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 3.9. $\{m_n t_n t_{n+1} m_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

3.5. $\{\Delta f_n i_n\}_{n=1}^{\infty}$ 3.10. $\{d_n e_n f_{n+1} s_n\}_{n=1}^{\infty}$

Задачі четвертого рівня складності

Скласти послідовність величин об’ємів послідовності тіл обертання, що створюються обертанням навколо осі OX послідовності прямих

4.1. $\{\overline{Q_n J_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 4.5. $\left\{\overline{k_n P_{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

4.2. $\{\overline{Q_{n+1} J_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 4.6. $\{\overline{\iota_n S_n}\}_{n=1}^{\infty}$

4.3. $\left\{\overline{a k_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 4.7. $\left\{\overline{l_n t_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

4.4. $\left\{\overline{f_n l_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Дослідницькі задачі

4.1. Знайти суму перших 5 членів послідовності довжин відрізків Q_nQ_{n+1} та побудувати графік залежності S_nвід n.

4.2. Знайти суму перших 10 членів послідовності довжин відрізків t_nm_n та побудувати графік залежності S_nвід n.

4.3. Знайти суму перших 5 членів послідовності довжин відрізків j_nP_{n+1}та побудувати графік залежності S_nвід n.

4.4. Знайти суму перших 5 членів послідовності довжин відрізків P_nS_{n+1}та побудувати графік залежності S_nвід n.

4.5. Знайти суму перших 5 членів послідовності довжин відрізків i_nl_{n+1}та побудувати графік залежності S_nвід n.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ

Задача 1.8. Скласти послідовність абсцис і ординат точок S_n.

Розв'язання

Щоб визначити послідовність координат даної точки, проаналізуємо рисунок. З рисунку видно, що точки $S_1S_2S_3 \dots S_n$ знаходяться на діагоналі квадрата, тоді:

$$y = 2x$$

$$S_1\colon y = \frac{1}{2}; x = \frac{1}{4} \ S_2\colon y = \frac{1}{3}; x = \frac{1}{6} \ S_3\colon y = \frac{1}{4}; x = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \dots \Rightarrow S_{n_x} = \frac{1}{2n+2}$$

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots \Rightarrow S_{n_y} = \frac{1}{n+1}$$

Відповідь: $S_{n_x} = \frac{1}{2n+2}$; $S_{n_y} = \frac{1}{n+1}$

Задача 2.6. Скласти послідовність величин послідовності відрізків

$\{[\overline{\iota_n\ \iota_{n+1}}]\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

Щоб визначити послідовність координат даної точки, проаналізуємо рисунок.

$$i_1\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right) i_2\left(\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right) i_3\left(\frac{1}{8};\frac{7}{8}\right) i_4\left(\frac{1}{10};\frac{9}{10}\right)$$

$$i_{n_x}=\frac{1}{2n+2};i_{n_y}=\frac{2n+1}{2n+2}$$

$$|\overline{\iota_1\iota_2}|=\frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$|\overline{\iota_2\iota_3}|=\frac{\sqrt{2}}{24}$$

$$|\overline{\iota_3\iota_4}|=\frac{\sqrt{2}}{40}$$

$$|\overline{\iota_n\iota_{n+1}}|=\frac{\sqrt{2}}{2(n^2+3n+2)}$$

Відповідь: $|\overline{\iota_n\iota_{n+1}}|=\frac{\sqrt{2}}{2(n^2+3n+2)}$.

Задача 3.8. Скласти послідовність величин площ послідовності трапеції $\{e_nS_nS_{n+1}e_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

Обчислимо площу трапеції за допомогою формули площі трапеції

$$S_{\text{тр}}=\frac{a+b}{2}h_a$$

$$S_{\text{тр}}=\frac{S_{n_x}+S_{n+1_x}}{2}\cdot e_{n_y}-e_{n+1_y}$$

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n+1}{4(n+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\frac{2n+3}{4n(n+1)^2(n+2)}$$

Відповідь: $\frac{2n+3}{4n(n+1)^2(n+2)}$

Задача 4.4. Скласти послідовність величин об'ємів послідовності тіл обертання, що створюються обертанням навколо осі OX послідовності прямих $\{\overline{f_nl_n}\}_{n=1}^{\infty}$

Розв'язання

При обертанні f_nl_n довкола осі Ox буде утворюватися зрізаний конус. Об'єм зрізаного конуса розраховується за формулою:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{n+1}} \left(x + \frac{n}{n+1}\right)^2 dx = \pi \int_0^{\frac{1}{n+1}} \left(x^2 + \frac{2nx}{n+1} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right) dx =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2n}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+1)^2}\right) = \frac{\pi(n+1)^2}{(n+1)^2} = \pi$$

Відповідь: π

Завдання для студентів групи МІ є важливим інструментом для формування професійної математичної компетентності. Вони сприяють розвитку здатності працювати з абстрактними поняттями, аналізувати складні числові закономірності та використовувати геометричні моделі як ефективний засіб візуалізації та аналізу.

Структура цих завдань орієнтована на комплексну підготовку майбутніх математиків, яка включає глибокі теоретичні знання, навички моделювання та дослідницький підхід до вирішення нестандартних задач. Завдяки цим задачам студенти не лише закріплюють знання, але й формують аналітичне мислення, яке необхідне для успішного застосування математики у наукових дослідженнях, викладацькій діяльності та прикладних сферах.

Таким чином, використання геометричних моделей у навчанні студентів групи МІ дозволяє поєднати класичну математичну освіту з інноваційними підходами, роблячи її більш практичною, сучасною та результативною.

2.5. Аналіз змісту розвитку компетентностей при розв’язання задач з геометричними інтерпретаціями членів числових послідовностей

Аналіз змісту розвитку компетентностей при розв’язання задач з геометричними інтерпретаціями членів числових послідовностей" буде досліджено, як саме задачі, що використовують геометричні моделі числових послідовностей, сприяють розвитку математичних компетентностей. Такий підхід передбачає використання точкових, лінійних, квадратурних і кубатурних інтерпретацій для аналізу рядів, що не лише вдосконалює навички учнів з оперування математичними поняттями, але й сприяє розвитку їх логічного мислення, просторового бачення, вміння абстрагувати та будувати математичні моделі.

Геометричні задачі, що включають числові послідовності, вимагають від учнів розуміння таких понять, як послідовність, границя, арифметична й геометрична прогресії, а також навичок застосування формул. Наприклад, задачі з побудови послідовності точок або визначення довжин відрізків сприяють розвитку вміння використовувати формули в межах просторової моделі, інтегруючи знання з алгебри та геометрії.

Розв’язування задач з використанням геометричних моделей допомагає учням розвивати аналітичне мислення, яке необхідне для аналізу числових закономірностей, встановлення зв'язків і закономірностей між членами послідовностей. Наприклад, при аналізі послідовності координат точок на площині, учні повинні визначати та узагальнювати геометричні характеристики об'єктів, що підсилює здатність до аналітичного мислення.

Геометричні моделі дозволяють учням уявляти числові послідовності у вигляді конкретних геометричних об’єктів. Це сприяє розвитку просторового мислення та візуальної грамотності. Наприклад, задачі на обчислення площ трикутників, кіл або об’ємів тіл обертання дозволяють учням опановувати поняття тривимірного простору, зокрема, при переході від числового ряду до його геометричної інтерпретації.

Використання різних інтерпретацій числових послідовностей через геометричні образи є своєрідним вправлянням у моделюванні, яке є важливою складовою математичних компетентностей. Задачі, що передбачають побудову послідовностей точок чи обчислення площ і об'ємів на основі числових рядів, стимулюють здатність учнів створювати абстрактні моделі, що описують реальні процеси.

Процес обґрунтування вибору методу для розв’язання задач з геометричними моделями числових послідовностей сприяє розвитку логічного мислення і здатності аргументувати свої дії. Наприклад, при розв'язанні задач на доведення закономірностей між координатами точок або між площами фігур, учні повинні будувати логічні послідовності аргументів, що підкріплює вміння працювати з доказами.

Таким чином, розв'язання задач з геометричними інтерпретаціями числових послідовностей сприяє формуванню широкого спектру математичних компетентностей. Ці задачі не лише розвивають математичні навички, але й інтегрують різні аспекти математичного мислення, сприяючи цілісному розвитку аналітичних, логічних та просторових навичок у контексті сучасної компетентнісної освіти.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

Другий розділ дипломної роботи зосереджено на використанні геометричних моделей для розробки нестандартних задач, що доповнюють традиційний підхід до вивчення числових послідовностей. Використання геометричних моделей забезпечує новий рівень наочності та дозволяє краще розуміти числові закономірності завдяки візуалізації їхніх елементів і взаємозв'язків.

У роботі представлено кілька типів задач, які базуються на геометричних інтерпретаціях, зокрема точкові, лінійні, квадратурні та кубатурні задачі. Точкові моделі дозволяють аналізувати послідовності через координати точок, що лежать на певних геометричних фігурах. Лінійні задачі досліджують числові послідовності через довжини відрізків, що сприяє інтеграції геометричних і числових понять. Квадратурні задачі зосереджуються на обчисленні площ геометричних фігур, пов'язаних із послідовностями, а кубатурні – на обчисленні об'ємів тіл, створених за допомогою обертання кривих навколо осей.

Особливу увагу приділено алгоритмам побудови таких задач. Використання декартової системи координат і загальних членів числових послідовностей для створення моделей робить задачі не тільки ефективними з точки зору навчання, а й інтерактивними й цікавими для учнів. Це забезпечує їхнє залучення до навчального процесу та стимулює творчий підхід до розв'язання задач.

Окремо слід виділити розробку завдань для учнів ліцеїв і студентів педагогічних спеціальностей. Такі задачі можуть використовуватися як під час уроків, так і на олімпіадах або факультативних заняттях. Їхній рівень складності варіюється, що дозволяє адаптувати матеріал до різних груп учнів. Використання нестандартних задач із геометричними моделями сприяє розвитку просторового мислення, навичок моделювання та аналізу.

У підсумку, другий розділ роботи демонструє практичне значення геометричних моделей у вивченні числових послідовностей. Інтеграція алгебраїчних і геометричних методів дозволяє зробити процес навчання більш цікавим і ефективним, а також сприяє формуванню ключових компетентностей учнів і студентів.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження щодо розробки та реалізації задач з геометричними моделями для вивчення числових послідовностей показало, що використання геометричних інтерпретацій значно розширює можливості навчання й розвитку учнів у шкільному курсі математики. Розглянуті розділи роботи та основні результати дозволяють зробити низку важливих висновків.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, зокрема, у контексті сучасного інформаційного суспільства. Числові послідовності широко застосовуються в науці, технологіях, фінансах та інженерії, тому важливо забезпечити належний рівень компетентності у школярів у цій галузі. Було визначено, що використання геометричних моделей сприяє кращому розумінню числових послідовностей завдяки візуалізації та можливості оперування просторовими образами.

У першому розділі аналізується базовий матеріал з числових послідовностей для учнів 9 класу, а також концепції з вищої математики, зокрема арифметичної та геометричної прогресій. Було детально розглянуто традиційні задачі, що використовуються для формування базових знань і навичок роботи з послідовностями. Особлива увага приділялася задачам на обчислення членів послідовності, сум та доведення властивостей прогресій. Аналіз свідчить про важливість поступового й систематичного розвитку логічного мислення та аналітичних навичок учнів через розв'язання таких задач, оскільки саме вони закладають основу для подальшого вивчення геометричних моделей послідовностей

Другий розділ присвячено створенню задач із геометричними інтерпретаціями числових послідовностей. У ньому наведено опис основних видів моделей — точкових, лінійних, квадратурних та кубатурних інтерпретацій. Окремо розглянуто кожен вид задач і їхні особливості, зокрема для числових послідовностей на основі точок, ліній і фігур. Робота з такими моделями не тільки розвиває математичну грамотність, а й формує навички абстрактного мислення та моделювання, що є необхідними вміннями в сучасному світі. Розділ містить також методичні вказівки щодо побудови задач різного рівня складності для учнів, що дозволяє адаптувати матеріал залежно від підготовки та потреб класу .

У розділі 2.3 описано задачі точкової, лінійної, квадратурної та кубатурної геометричної інтерпретації, які пропонують учням застосувати числові послідовності для розв’язання задач на площу, периметр і обсяг геометричних фігур. Розробка таких задач, зокрема з використанням фігур на координатній площині, допомагає учням набути глибшого розуміння числових послідовностей та їх практичного застосування. Інтерпретація через геометричні моделі дозволяє проводити візуалізацію абстрактних математичних понять, що підвищує якість навчання та сприяє розвитку просторового мислення.

Було представлено набір завдань, які можуть бути використані як у класній роботі, так і на олімпіадах та позакласних заняттях. Завдання поділені на категорії, які відповідають різним рівням підготовки учнів. Також запропоновано алгоритм створення умов задач на тему «Числові послідовності» для учнів ліцеїв; продемонстровано процес виведення загального члена числової послідовності з використанням квадрата, розташованого в декартовій системі координат; розкрито можливість використання розглянутої моделі для створення інших видів задач; показано декілька методів розв’язання задач в залежності від рівня знань учня, його потенціалу та прагнень. Окремі завдання орієнтовані на базовий рівень, що охоплює обчислення членів послідовності або сум, а більш складні завдання передбачають розв’язання задач із багатоступеневим розрахунком або дослідженням властивостей геометричних фігур. Це сприяє комплексному розвитку навичок і підтримці інтересу учнів до вивчення математики .

У розділі 2.5 було проведено детальний аналіз впливу задач із геометричними інтерпретаціями на формування компетентностей учнів. Встановлено, що задачі цього типу дозволяють учням розвивати аналітичні та просторові навички, а також уміння обґрунтовувати свої рішення та працювати з абстрактними поняттями. Геометричні задачі на основі числових послідовностей сприяють підвищенню інтересу до математики завдяки використанню наочних моделей, що дозволяє учням легше сприймати складні концепції та зв’язок між числовими та геометричними аспектами навчання.

У підсумку, проведене дослідження підтверджує ефективність впровадження геометричних моделей числових послідовностей у процес навчання математики. Використання таких моделей забезпечує інноваційний підхід до викладання числових послідовностей і підвищує рівень розуміння учнями складних математичних понять. Створення диференційованих задач із різними рівнями складності дозволяє кожному учню розвиватися у відповідності до своїх індивідуальних можливостей і досягати високих результатів.

Запропонований підхід робить процес навчання інтерактивним і наочним, що є важливим у формуванні сучасної математичної грамотності. Завдяки візуалізації абстрактних числових послідовностей через геометричні моделі, учні отримують глибше розуміння теми, підвищують свої компетентності у сфері аналітичного, логічного та просторового мислення. Результати роботи можуть бути використані для подальшого вдосконалення шкільної програми з математики та створення додаткових навчальних матеріалів для учнів із різними потребами й здібностями .

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х.: Гімназія, 2017. — 272 с.

2. Мій клас. Числові послідовності: основні поняття для учнів 9 класу. Навчальні матеріали з алгебри. URL: https://miyklas.com.ua/

3. Істер О. С. Алгебра: підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів**.** — Київ: Генеза, 2017. — 304 с.

4. Шинкарик М. І. (ред.). Вища математика: підручник. Рекомендовано Міністерством освіти і науки України. Тернопіль, 2003.

5. Бобирь В. Д., Корольський В. В. Застосування ІКТ при вивченні числових та степеневих рядів. Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання: Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів і молодих учених (Чернігів, 27 листопада 2019 р.): матер. тез Чернігів, 2019.

6. Бобирь В. Д., Христюк А. М. Зв'язок рядів арифметичної прогресії та гармонічних рядів: матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2019 р.), м. Черкаси, 11-12 квітня 2019 р. Черкаси, 2019. 280 с.

7. Габ С. С. Геометрична інтерпретація рядів: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр, спеціальності 014.04 середня освіта (математика), наук. керівник В. В. Корольський. Кривий Ріг, 2018. 100 с.

8. Габ С. С. Геометрична інтерпретація числових рядів, пов'язаних з фракталами: матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції молодих вчених «Співдружність наук. Барановичі 2018» (Барановичі, 17 травня 2018 р.). Барановичі, 2018. С. 50-51.

9. Габ С. С., Корольський В. В. Лінійна, квадратурна та куботурна геометрична інтерпретація числових рядів засобами моделювання. Новітні

комп’ютерні технології: наук-метод. зб. редкол.: С. О. Семеріков [та ін.], Том XVI. Кривий Ріг, 2018. С. 67-73.

10. Габ С. С., Корольський В. В., Числові ряди, які пов’язані з параметрами додекаедра. Вісник міжнародного дослідницького центру «Людина: мова, культура, пізнання»: науковий журнал, Том 42. Кривий Ріг, 2018. С. 39-45.

11. Дзигарська Н. С., Корольський В. В., Михайлова Я. А., Тураєва О. В. Застосування геометричних моделей при вивченні теми «Числові послідовності» 64 учнями ліцеїв. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничоматематичної освіти» Випуск 22. Суми, 2023.

12. Дзигарська Н. С., Корольський В. В., Тураєва О. В. Генерація числових рядів з використанням послідовностей геометричних об’єктів, вписаних у квадрат з параметром $a = 1$ в системі координат Oxy. Наукові записки молодих учених

13. Корольський В. В., Михайлова Я. А., Тураєва О. В., Федоренко Н. С. Числові послідовності: навчальний посібник (профільний рівень). Кривий Ріг, 2023.

14. Корольський В. В., Михайлова Я. А., Тураєва О. В., Федоренко Н. С. Числові ряди: навчальний посібник (профільний рівень). Кривий Ріг, 2023.

15. 2022. 10. Комарова А. А. Побудова і дослідження числових рядів, пов'язаних з елементами квадрата «тангарам»: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр спеціальності 014.04 середня освіта (математика), наук. керівник В. В. Корольський. Кривий Ріг, 2020. 100 с.

16. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числових рядів. Новітні комп’ютерні технології: наук-метод. зб. редкол.: С. О. Семеріков [та ін.] Том XV. Кривий Ріг, 2017. С. 57-63.

17. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числового ряду арифметичної прогресії. Новітні комп’ютерні технології: наук-метод. зб. редкол. С. О. Семеріков [та ін.], Том XVI. Кривий Ріг, 2018. С. 59-66.

18. Корольський В. В., Римар А. І. Геометрична інтерпретація числових рядів, пов’язаних з державною символікою: збірник наукових праць «Актуальні

питання природничо-математичної освіти». Випуск 2 (20). Суми, 2022. С. 29-38.

19. Корольський В. В., Тураєва О. В. Генерація та дослідження числових рядів за допомогою геометричної моделі та комбінації рядів ∑ 1 n ∞ n=1 і ∑ n n+1 ∞ n=1 . Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Випуск 1 (21). Суми, 2023. С. 46-54.

20. Корольський В. В., Тураєва О. В. Технологія створення задач із застосуванням геометричних моделей. Матеріали V Всеукраїнської (з міжнародною участю) науково-практичної конференції молодих учених (м. Харків, 10-11 травня 2023 року). Харків, 2023. С. 243-246. 65

21. Няньчук В. В. Генерація числових рядів за допомогою функції y = 1 2 n−1 x і квадрата зі стороною a = 1: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр спеціальності 014.04 середня освіта (математика), наук. керівник В. В. Корольський. Кривий Ріг, 2021. 97 с.

22. Примакова О. Ю. Генерація числових рядів за допомогою функції y = 1 n x і квадрата зі стороною a = 1: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр спеціальності 014.04 середня освіта (математика), наук. керівник В. В. Корольський. Кривий Ріг, 2021. 84 с.

23. Проект концепції розвитку освіти України на період 2015 – 2025 років. URL: http://www.naiau.kiev.ua/files/zakon_ukr/proek-rozv-osvitu.pdf

24. Романов А. М. Генерація числових рядів та дослідження їх на збіжність: кваліфікаційна робота ступеня вищої освіти магістр спеціальності 014.04 середня освіта (математика), наук. керівник В. В. Корольський. Кривий Ріг, 2019. 90 с.

25. Сьомкіна К. Створення задач, пов’язаних з числовими послідовностями і рядами за допомогою геометричної моделі з використанням графіків функцій / Наук. керівник: канд. техн. наук, проф. Корольський В.В. – Всеукраїнська науково-практична конференція. Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, 2023. 14с.

26. "Дидактичні основи навчання математики", 2009 рік, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. Електронний ресурс: [http://elibrary.kdpu.edu.ua/bitstream].

27. Модульна навчальна програма «Алгебра. 9 клас» для закладів загальної середньої освіти (автори Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Пихтар М.П., Рубльов Б.В., Семенов В.В., Якір М.С.) «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України».

28. Вища математика : підручник / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, Т. В. Денисова та ін. ; заг. редакція д. е. н., проф. Малярець Л. М. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2012. – 772 с.

29. Ільченко О.В. Посібник з курсу "Математичний аналіз" для студентів ННІ «Інститут геології» - 2021. – 65с.

30. Методичні вказівки до виконання типових індивідуальних завдань з математичного аналізу для студентів факультету математики та цифрових технологій / Укладачі: О.О. Синявська, Г.І. Сливка-Тилищак, А.М. Тегза. Ужгород: ДВНЗ "УжНУ 2023. - 59с.