

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет фізико-математичний
Кафедра фізики та методики її навчання

«Допущено до захисту»
Завідувач кафедри
Слюсаренко М.А.

Реєстраційний № _____

« ____ » _____ 2024 р.

**Методика навчання теми
«Рух тіл зі змінною в часі масою» в профільній школі**

Кваліфікаційна робота студента
групи ФІм-23
ступінь вищої освіти магістр
спеціальності
014.08 Середня освіта (Фізика та
астрономія)
Чаплінського Віктора Сергійовича
Керівник: доктор технічних наук,
професор кафедри фізики та
методики її навчання
Здешиц Валерій Максимович
Оцінка:

Національна шкала _____

Шкала ECTS _____ Кількість балів _____

Голова ЕК _____

(підпис) (прізвище, ініціали)

Члени ЕК _____

(підпис) (прізвище, ініціали)

(підпис) (прізвище, ініціали)

(підпис) (прізвище, ініціали)

(підпис) (прізвище, ініціали)

ЗАПЕВНЕННЯ

Я, Чаплінський Віктор, розумію і підтримую політику Криворізького державного педагогічного університету з академічної доброчесності. Запевняю, що ця кваліфікаційна робота виконана самостійно, не містить академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації. Я не надавав і не одержував недозволену допомогу під час підготовки цієї роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. Із чинним Положенням про запобігання та виявлення академічного плагіату в роботах здобувачів вищої освіти Криворізького державного педагогічного університету ознайомлений. Чітко усвідомлюю, що в разі виявлення у кваліфікаційній роботі порушення академічної доброчесності робота не допускається до захисту або оцінюється незадовільно.

(підпис)

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
Розділ 1. Закономірності реактивного руху ракети.....	7
1.1. Ракета в далекому космосі.....	7
1.2. Альтернативний метод отримання рівняння Мещерського	11
1.3. Ракета в гравітаційному полі Землі.....	13
Розділ 2. Машина Атвуда.....	15
2.1. Машина Атвуда з постійною масою вантажів.....	16
2.2. Машина Атвуда зі змінною масою.....	22
2.2.1. Результати експериментів.....	26
Висновки до розділу 2.....	29
Розділ 3. Рух ланцюгів по вертикалі.....	30
3.1. Рух тіла з мотузкою, кинутого вертикально вгору.....	31
3.1.1. Визначення рівняння руху тіла	32
3.1.2. Визначення формули швидкості як функції висоти.....	33
3.1.3. Використання таблиць Excel для визначення залежності швидкості та висоти від часу	35
3.2. Експериментальне дослідження руху тіла, кинутого вгору, до якого під'єднана довга гнучка мотузка.....	37
3.3. Падіння ланцюга, один кінець якого прив'язаний.....	44
3.3.1. Енергетика «вільного падіння» прив'язаного тіла.....	46
3.3.2. Аналіз падіння складеного ланцюга із залученням законів Ньютона	49
3. 4. Експериментальне визначення прискорення падіння тіл.....	59
Розділ 4. Рух снігової кулі, яка котиться з гори.....	65
4.1. Визначення швидкості накопичення маси сніговим циліндром.....	66
4.2. Визначення рівняння руху снігового циліндра.....	67

Розділ 5. Свічкова гойдалка.....	71
5.1. Постановка досліду, аналіз джерел інформації.....	71
5.1.1. Фізика процесу.....	72
Висновки.....	79
Список використаних джерел.....	80
Додаток А.....	84
Додаток Б.....	86

ВСТУП

Робота присвячена методиці навчання теми «Рух тіл зі змінною в часі масою» в профільній школі. Задачі з тілами, маса яких змінюється у процесі руху, важкі для сприйняття та розв'язку. У реальному житті до цього класу задач відноситься, наприклад, реактивний рух, закидання мотузок з гачками на дахи палаючих будівель для підняття скалолазів-пожежників та спускання альпіністів зі скель у критичній ситуації. До проблем, пов'язаних з ланцюгами, кабелями або мотузками, які кудись закидаються, падають або обертаються навколо шківів, існує постійний інтерес [1, 2]. Це пов'язано з тим, що при розв'язанні практичних задач треба враховувати те, що маса не прив'язана до деякої точки, а розосереджена вздовж тіла. Це інший клас задач ніж ті задачі, які розв'язуються в класичній механіці, де маса майже завжди постійна.

До таких задач відноситься і снігова куля, яка котиться з гори і збільшує масу за рахунок налипання снігу [3], і рулон паперу, який розкатується, і крапля дощу, яка під час падіння випаровується і змінює свою масу.

Існують і “романтичні” задачі, коли горіння і плавлення свічки з обох кінців приводить до її коливання, якщо вона має вісь обертання. Методичні особливості викладання теми руху систем зі змінною в часі масою і є об'єктом нашої пильної уваги.

Отже, тема роботи **актуальна, доцільність** обраної теми не викликає сумнівів.

Метою роботи є висвітлення закономірностей руху тіл зі змінною в часі масою та методичних особливостей викладання цієї теми.

Завдання:

1. Провести огляд джерел інформації на задану тему;
2. Розглянути закономірності реактивного руху ракети;

3. Дослідити машину Атвуда під час зміни маси одного з вантажів;
4. Розглянути закономірності руху довгих канатів як систем з розосередженою масою;
5. Дослідити рух снігової кулі, яка котиться по засніженому схилу з набором маси;
6. На прикладі свічкової гойдалки показати вплив зникаючої під час згоряння маси на параметри коливального процесу.

Об'єкт дослідження: закони механіки.

Предмет дослідження: системи зі змінними масами та методичні особливості викладання цієї теми.

Методи дослідження:

- теоретичні – вивчення та аналіз наукової літератури та джерел інформації;
- емпіричні – дослідна перевірка законів, які відображають рух систем зі змінною масою.

Робота складається зі вступу, 5 розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків А і Б.

ЗАКОНОМІРНОСТІ РЕАКТИВНОГО РУХУ РАКЕТИ

1.1. Ракета в далекому космосі

Спочатку розглянемо що відбувається, коли ракета рухається далеко від Землі, тобто немає її гравітаційного впливу.

Коли ракетні двигуни працюють, вони безперервно викидають спалені паливні гази, які мають і масу, і швидкість, а отже, певний імпульс. Відповідно до закону збереження імпульсу, імпульс ракети змінюється на таку саму величину, але з протилежним знаком. Припустимо, що спалене паливо викидається з постійною швидкістю. Це означає, що швидкість зміни імпульсу ракети також є постійною величиною. Тобто, сила, яка діє на ракету, за II законом Ньютона також є постійною.

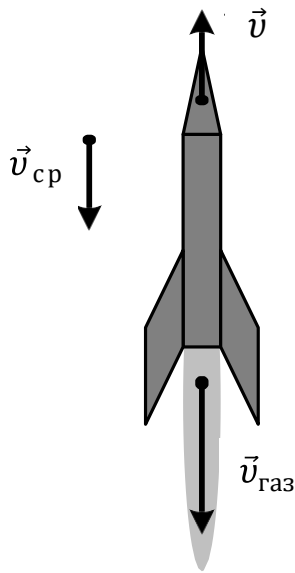
З плином часу маса ракети (яка включає масу палива, що залишилося) постійно зменшується. Таким чином, незважаючи на те, що сила, яка діє на ракету, постійна, результуюче прискорення постійно зростає.

Отже, загальна зміна швидкості ракети буде залежати від кількості спаленого палива, і ця залежність не є лінійною. Проблема полягає в зміні маси та швидкості ракети. Змінюється також загальна маса викинутих газів. Система ракета + паливо є ізольованою системою, оскільки ракета знаходиться в далекому космосі, і на цю систему не діють зовнішні сили. Отже, імпульс цієї системи зберігається. Таким чином, можна застосувати закон збереження імпульсу, щоб відповісти на запитання як буде рухатися ракета. Акцент на застосуванні саме закону збереження імпульсу і є методична особливість традиційного викладання цієї теми. Пізніше буде розглянутий і інший підхід: застосування II закону Ньютона, але в формі $\vec{F} = m\vec{a}$.

Розглянемо рух ракети – рух тіла зі змінною масою (рис. 1.1). Мається на увазі не релятивістська залежність маси тіла від швидкості, а зміна маси тіла за рахунок а) втрати ним речовини чи б) поповнення.

Ракета з великою швидкістю викидає речовину (гази), діючи на неї з великою силою. Речовина, що викидається, з такою ж, але протилежно направленою силою в свою чергу діє на ракету і надає їй прискорення в протилежному напрямі. Якщо зовнішніх сил немає, то імпульс системи "ракета - викинута речовина" не змінюється з часом.

Розглянемо загальний випадок, коли на ракету діють зовнішні сили.



Нехай $m(t)$ – маса ракети в довільний момент часу t , а $\vec{v}(t)$ – її швидкість. Імпульс ракети в цей момент часу дорівнює $m\vec{v}$. Через час dt маса і швидкість одержать прирости dm і $d\vec{v}$. Імпульс ракети тепер дорівнює $(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v})$. Імпульс газів, що утворилися за цей же час dt , дорівнює $dm_{\text{газ}}\vec{v}_{\text{газ}}$, де $dm_{\text{газ}}$ – маса газів, $\vec{v}_{\text{газ}}$ – їх швидкість. За другим законом Ньютона для системи матеріальних точок приріст імпульсу ракети дорівнює імпульсу рівнодійної зовнішніх сил:

Рис. 1.1
$$(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_{\text{газ}}\vec{v}_{\text{газ}} - m\vec{v} = \vec{F} dt.$$

Розкриємо дужки:

$$m\vec{v} + md\vec{v} + \vec{v}dm + dmd\vec{v} + dm_{\text{газ}}\vec{v}_{\text{газ}} - m\vec{v} = \vec{F} dt.$$

Оскільки dt – нескінченно мала величина ($dt \rightarrow 0$), тоді $dmd\vec{v}$ – нескінченно мала величина вищого порядку і її можна відкинути; $dm_{\text{газ}} = -dm$ згідно закону збереження маси. Після перетворень одержимо:

$$md\vec{v} - dm(\vec{v}_{\text{газ}} - \vec{v}) = \vec{F} dt.$$

Різниця $\vec{v}_{\text{газ}} - \vec{v} = \vec{v}_{\text{відн}}$ – це швидкість витікання газів відносно ракети (див. рис. 1.1).

Якщо ракету взяти за нерухому систему відліку, тоді слід вважати, що оточуюче середовище рухається зі швидкістю

$$\vec{v}_{\text{ср}} = -\vec{v}, \quad \vec{v}_{\text{газ}} + \vec{v}_{\text{ср}} = \vec{v}_{\text{відн}}.$$

Отже:

$$m d\vec{v} = \vec{F} dt + \vec{v}_{\text{відн}} dm. \quad (1.1)$$

Розділимо (1.1) на dt та отримаємо:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{v}_{\text{відн}} \frac{dm}{dt}. \quad (1.2)$$

За формою (1.2) співпадає з рівнянням другого закону Ньютона. Однак маса тут не постійна, а змінюється з часом. До зовнішньої сили F додається член $\vec{v}_{\text{відн}} \frac{dm}{dt}$, який носить назву **реактивної сили**:

$$\vec{R} = \vec{v}_{\text{відн}} \frac{dm}{dt}. \quad (1.3)$$

Якщо маса відділяється, тоді $\frac{dm}{dt} < 0$ і вектор \vec{R} протилежний вектору $\vec{v}_{\text{відн}}$; якщо маса приєднується, тоді $\frac{dm}{dt} > 0$ і вектор \vec{R} співпадає за напрямком з $\vec{v}_{\text{відн}}$.

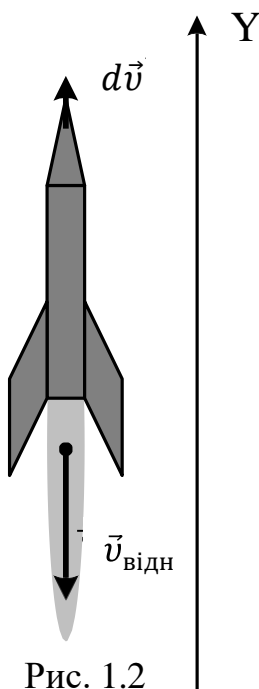


Рис. 1.2

Рівняння (1.2) і еквівалентне йому рівняння (1.1) називають **рівнянням руху точки із змінною масою або рівнянням Мещерського**. Якщо $\vec{F} = 0$, (ракета в дальньому космосі) тоді з (1.1) одержимо:

$$m d\vec{v} = \vec{v}_{\text{відн}} dm.$$

Нехай ракета рухається в напрямку, протилежному $\vec{v}_{\text{відн}}$. Спроектуємо останню рівність на вісь OY (див. рис. 1.2):

$$\begin{aligned} m dv &= -v_{\text{відн}} dm; \\ dv &= -v_{\text{відн}} \frac{dm}{m} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Будемо вважати, що $v_{\text{відн}}$ стала; тоді розв'язування рівняння (1.4) спрощується:

$$\int dv = -v_{\text{відн}} \int \frac{dm}{m}.$$

$$v = v_{\text{відн}} \ln m + C. \quad (1.5)$$

Значення C визначимо з початкових умов (якщо $v_0 = 0$, тоді початкова маса дорівнює m_0), які підставимо в (1.5):

$$0 = -v_{\text{відн}} \ln m_0 + C.$$

Звідки $C = v_{\text{відн}} \ln m_0$. Таким чином,

$$v = -v_{\text{відн}} \ln m + v_{\text{відн}} \ln m_0.$$

$$v = v_{\text{відн}} \ln \frac{m_0}{m},$$

або

$$\frac{v}{v_{\text{відн}}} = \ln \frac{m_0}{m}.$$

Остаточно:

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v}{v_{\text{відн}}}}. \quad (1.6)$$

Рівняння (1.6) називають **формулою Ціолковського** (К. Е. Ціолковський (1857-1935)). Її вперше вивів радянський фізик Костянтин Ціолковський у 1897 році [4]. Вона дає нам зміну швидкості, яку отримує ракета від спалювання маси палива, що зменшує загальну масу ракети. Як і очікувалося, залежність між швидкістю і зміною маси ракети є нелінійною.

Застосування рівняння (1.6) до польотів космічних ракет дає наступні значення відношень $\frac{m_0}{m}$. При $v_{\text{відн}} = 1$ км/с для $v = 8$ км/с матимемо

$$\frac{m_0}{m} = e^8 = 2980, \text{ що нереально (потрібні кращі сорти палива). При}$$

$$v_{\text{відн}} = 4 \text{ км/с відношення } \frac{m_0}{m} = 7,39 \text{ (політ в одну сторону)).}$$

Отже, ми відповіли на питання: *як зміниться швидкість ракети в результаті спалювання всього палива, якщо швидкість згорання палива постійна, і швидкість, з якою випускається вихлопний газ, також постійна.* Дію зовнішніх сил ми не враховували.

1.2. Альтернативний метод отримання рівняння Мещерського

Методичною особливістю викладання теми «Рух тіл зі змінною в часі масою» є те, що ці самі результати можна отримати не тільки традиційно, використавши формулу $\frac{dp}{dt} = \vec{F}$, (що тісно пов'язано зі способом викладання фізики на вступних курсах), але і використовуючи альтернативну формулу: $m\vec{a} = \vec{F}$. У статті [50] запропоновано цей інший підхід, де рівняння $m\vec{a} = \vec{F}$ відіграє центральну роль. Досліджувана (замкнута) система розділяється на дві підсистеми. Під час руху частини системи обмінюються масою, хоча маса всієї системи залишається постійною. Тоді рівняння $m\vec{a} = \vec{F}$ можна використовувати як рівняння руху для однієї або двох частин системи.

Розглянемо основне тіло, яке зазнає поступової зміни маси, збільшуючи (або зменшуючи) свою масу. Маса цього тіла (підсистема II) і його швидкість у довільний момент t дорівнюють M і v відповідно, як показано на рис. 1.3. Решта системи (підсистема I) має масу m та рухається зі швидкістю u ($u > v$).

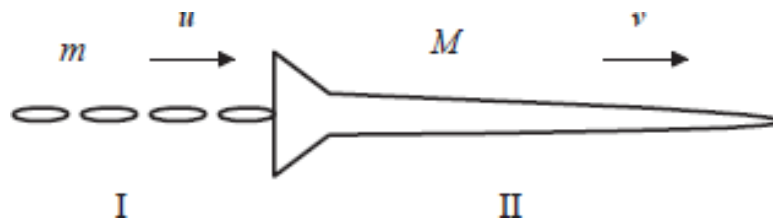


Рис. 1.3. Розрахункова схема

Таким чином, під час руху дві підсистеми I і II зливаються одна з одною. Це означає, що тіло I втрачає масу m , яка одразу стає частиною основного тіла II. Слід мати на увазі, що m і M залежать від часу, але вся система має постійну загальну масу $m + M$, тому маса переноситься зі швидкістю:

$$dM/dt = -dm/dt.$$

Другий закон Ньютона для повної замкнутої системи виглядає так:

$$F = (m + M) a_C, \quad (1.7)$$

де a_C – прискорення центру мас системи, F — зовнішня сила, що діє на всю систему. Швидкість центру мас дорівнює:

$$\vec{v}_C = \frac{m \vec{u} + M \vec{u}}{m+M}. \quad (1.8)$$

Похідна за часом цього виразу ($m + M =$ константа, $dm/dt = -dM/dt$) є прискоренням центру мас:

$$\vec{a}_C = \frac{1}{m+M} \left(m \frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{dM}{dt} \vec{u} + M \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{dM}{dt} \vec{v} \right). \quad (1.9)$$

Вставка цього виразу в (1.9) приводить нас безпосередньо до виразу:

$$\vec{F} = \vec{F}^{(I)} + \vec{F}^{(II)} = m \frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{dM}{dt} \vec{u} + M \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{dM}{dt} \vec{v}, \quad (1.10)$$

де $F^{(I)}$ і $F^{(II)}$ – сили, що діють на підсистеми I і II, відповідно.

Щоб окремо описати рух кожної підсистеми I і II, розіб'ємо (1.10) на два рівняння:

$$\vec{F}^{(I)} = m \frac{d\vec{u}}{dt}, \quad (1.11)$$

$$\vec{F}^{(II)} = \frac{dM}{dt} \vec{u} + (\vec{v} - \vec{u}) \frac{dM}{dt} \quad (1.12)$$

Роль систем I і II можна поміняти місцями, і обидві вони повинні описуватися стандартним рівнянням для системи зі змінною масою. Маючи на увазі цю мету, зручно переписати (1.11) і (1.12), використовуючи імпульс. З (1.11) та (1.12) відповідно отримуємо:

$$\vec{F}^{(I)} = \frac{d}{dt}(m\vec{u}) - \vec{u} \frac{dm}{dt} \quad (1.13)$$

$$\vec{F}^{(II)} = \frac{d}{dt}(M\vec{v}) - \vec{u} \frac{dM}{dt} \quad (1.14)$$

Обидва вирази мають спільну однотипну структуру, отже, надалі символи I або II вилучаємо та отримуємо стандартне рівняння руху Ньютона для систем із змінною масою:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} + \vec{u} \frac{dM}{dt} \quad (1.15)$$

У цьому виведенні визначення системи є зрозумілим, а також концепція лінійного імпульсу, яка узгоджується з концепцією, з якою знайомі учні. Стосовно підходу, представленого раніше, ми зауважимо, що F є силою, що діє на всю систему (з постійною масою).

Такий підхід підходить для студентів бакалаврату та еквівалентний іншим методам [51, 52].

Отже, під час навчання у рамках класичної механіки можна використовувати обидві форми другого закону Ньютона [53, 54]. Та чи інша форма другого закону Ньютона не є більш фундаментальною.

1.3. Ракета в гравітаційному полі Землі

Давайте тепер проаналізуємо зміну швидкості ракети на етапі запуску з поверхні Землі. Обмежимо нашу увагу відстанями, для яких прискорення g , викликане силою тяжіння, можна вважати константою. Аналіз схожий до того, що ми робили в п. 1.1, за винятком того, що тепер на нашу систему діє зовнішня сила $\vec{F} = -m\vec{g}$. Тоді рівняння (1.4) перетвориться в наступне:

$$dv = -v_{\text{відн}} \frac{dm}{m} - gdt. \quad (1.16)$$

Після інтегрування рівняння (1.16) від початкової маси m_0 до кінцевої маси m отримуємо:

$$\Delta v = v_{\text{відн}} \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) - g\Delta t. \quad (1.17)$$

Маса m_0 – включає в себе початкову масу палива і самої ракети, m – є комбінацією маси порожньої ракети і маси незгорілого палива, що залишилося в ній (миттєва маса).

Не дивно, що на швидкість ракети впливає (постійне) прискорення сили тяжіння. Пам'ятаємо, що Δt – це час згоряння палива. Тому, за відсутності сили тяжіння, згідно рівняння (1.4):

$$\Delta v = v_{\text{відн}} \ln \left(\frac{m_0}{m} \right)$$

немає різниці, скільки часу потрібно для спалювання всієї маси палива; зміна швидкості не призводить до залежності від Δt . Однак за наявності сили тяжіння це має велике значення. Доданок $-g\Delta t$ у рівнянні 1.17 вказує нам, що чим довший час горіння, тим меншою буде зміна швидкості ракети. Це причина того, що запуск ракети настільки видовищний у перший момент старту: *важливо спалити паливо якомога швидше, щоб отримати якомога більшу величину Δv .*

Висновок до розділу 1

1. Під час розгляду у рамках класичної механіки руху ракети – тіла зі змінною масою – можна використовувати обидві форми другого закону Ньютона. Та чи інша форма другого закону Ньютона не є більш фундаментальною.

2. На етапі запуску ракети з поверхні Землі важливо спалити паливо якомога швидше, щоб отримати якомога більшу величину зміни швидкості.

МАШИНА АТВУДА

Машина Атвуда була винайдена в 1784 році англійським математиком Джорджем Атвудом [5]. Цей пристрій використовується століттями для демонстрації другого закону Ньютона та для перевірки механічних законів руху тіл з незмінним прискоренням. (рис. 2.1).

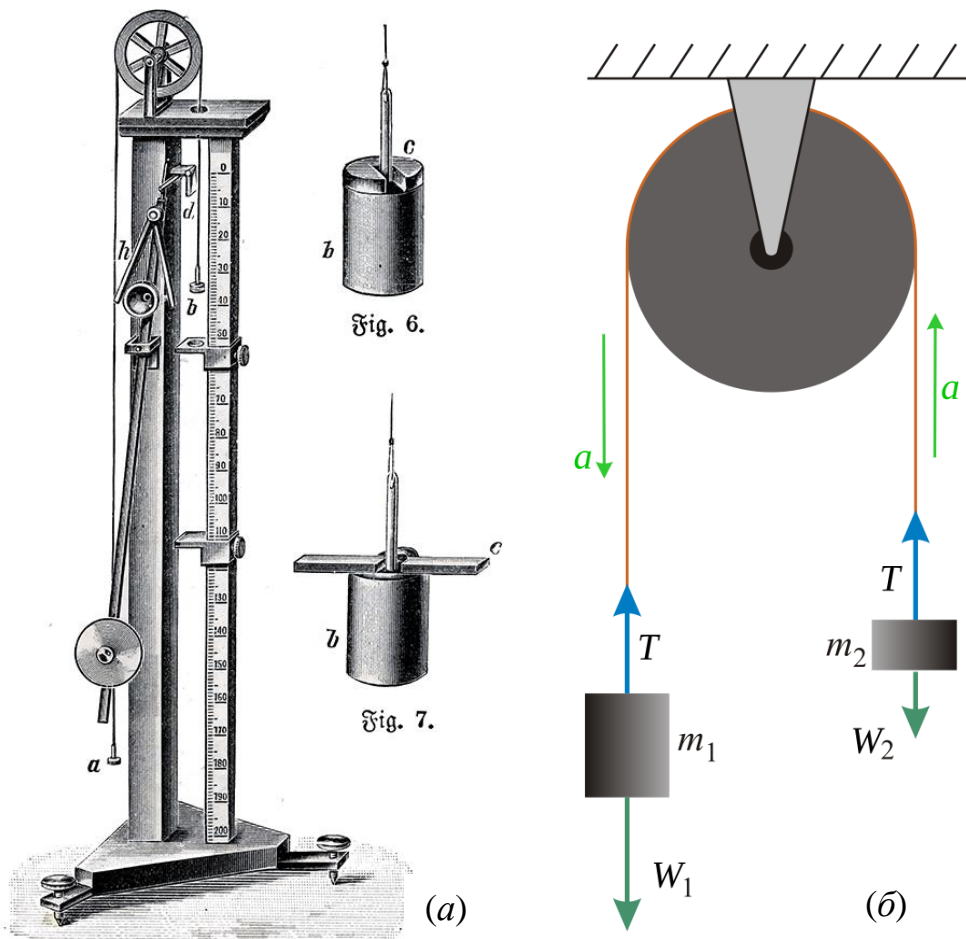


Рис. 2.1. (а) Зображення машини Атвуда 1905 рік. (б) Схема дослідів

Ідеальна машина Атвуда складається з двох тіл масою m_1 і m_2 , пов'язаних нерозтяжною, невагомою ниттю, перекинutoю через ідеальний невагомий

блок [6]. Коли $m_1 = m_2$, машина перебуває в байдужій рівновазі незалежно від положення вантажів. Коли $m_1 \neq m_2$, обидві маси зазнають прискорення.

Кількість параметрів, які можна дослідити за допомогою машини Атвуда нараховується десятками. В роботі [4] можна ознайомитися зі списком можливих дослідів.

Механічна система машини Атвуда протягом багатьох років вивчалася як теоретично [7, 8] так і експериментально [9, 10]. Багато фізичних курсів включають в себе машину Атвуда для експериментів з механіки.

Для введення більш складних понять у фізиці за допомогою усучасненої машини Атвуда вивчається також динаміка мас, які змінюються. Для відліку часу і реєстрації положень мас в просторі, швидкості, прискорення використовуються смартфони. Перша робота, в якій використано смартфон як обладнання для вивчення прискорення в машині Атвуда, опублікована М. Monteiro et al. [10]. Використання смартфонів у *системах зі змінною масою* опубліковано у роботі [11].

Це спонукало нас провести дослідження такого роду за допомогою смартфона та розробленої нами саморобної установки, і показати практичність використання смартфонів для забезпечення освітнього процесу у складних умовах війни.

2.1. Машина Атвуда з постійною масою важків

Лабораторна установка (рис. 2.2) складається з лінійки 1, блока 2, важків 3, 4 з'єднаних капроною ниткою.

Кожен з двох важків є циліндром з порожниною (рис. 2.3) для насипання монет (масою m кожна), або води, піску. Циліндри мають отвори для витікання води або піску. Шкала з блоком прижимається до торця поверхні столу 6 прищипкою 5.

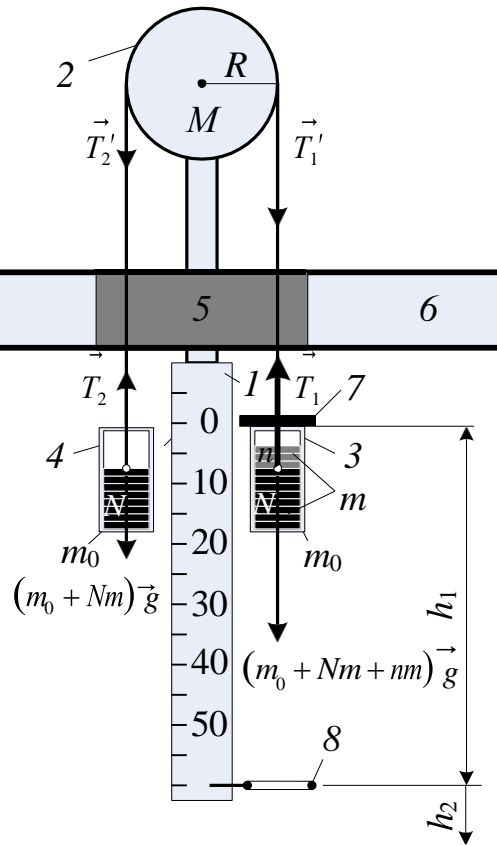


Рис. 2.2. Принципова схема машини Атвуда



Рис. 2.3. Машина Атвуда для проведення фронтальних лабораторних робіт

Лінійка гнучка, тому вона може скручуватися в клубок і 10-15 таких пристроїв легко розміщується в одному кейсі. Це дозволяє проводити досліди фронтально або дистанційно: кожен учень має власну експериментальну установку.

На вантаж 3 можна покласти додатковий вантаж у вигляді диску 7, діаметр якого дещо більший циліндра 3. При падінні з висоти h_1 диск в момент проходження через кільце 8 залишається на кільці, а важки 3, 4 продовжують рух.

Отже, ця установка є аналогом машини Атвуда, яка відрізняється тільки на два порядку меншою ціною, високою точністю вимірювання тривалості процесу, яку забезпечує смартфон, та мініатюрністю.

На першому етапі дослідів диск 7 не використовується. Якщо в кожному порожнину циліндрів, які мають масу m_0 , насипати по N монет масою m кожна, то вантажі рухатися не будуть. Щоб почався рух потрібно, наприклад, в циліндр 4 насипати ще n монет. Тоді відношення прискорення руху до прискорення вільного падіння буде визначатися, як легко показати, формулою:

$$\eta = \frac{a}{g} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \left[\frac{M}{2m} + 2 \left(\frac{N + m_0}{m} \right) \right]}. \quad (2.1)$$

Якщо масою шківів M і масою циліндрів m_0 знехтувати, то формула (2.1) набуває вигляду:

$$\eta = \frac{a}{g} = \frac{1}{1 + 2 \frac{N}{n}}. \quad (2.2)$$

Залежність відношення η від відношення N/n наведено на графіку рис. 2.4. На рис. 2.4 точками наведено експериментальні дані. Видно, що нехтування масою шківів M і масою циліндрів m_0 приводить до значної похибки при визначенні величини відношення a/g .

Для досягнення узгодженості теоретичних і практичних розрахунків за допомогою електронних терезів були виміряні маси: $m = 1,7$ г, $m_0 = 4$ г, $M = 9$ г (діаметр шківів 42 мм). З врахуванням цього формула (2.1) перетворилася на:

$$\eta = \frac{a}{g} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \left[\frac{9}{3,4} + 2 \left(\frac{N+4}{1,7} \right) \right]} = \frac{1}{1 + 2 \cdot \frac{N}{n} + \frac{7,35}{n}} \quad (2.3)$$

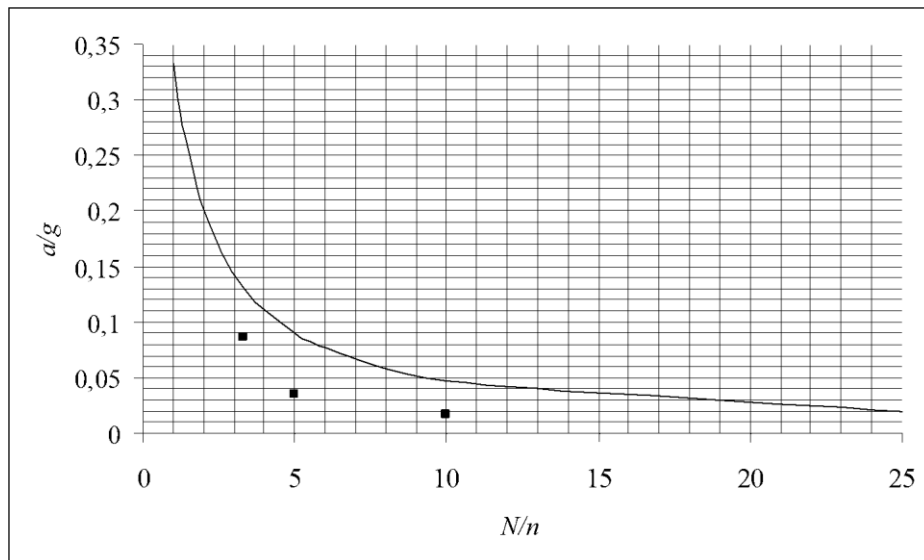


Рис. 2.4. Графік залежності a/g від відношення N/n за формулою (2.2)

Тобто, в знаменнику з'явився додатковий чинник $\frac{7,35}{n}$, максимальне значення якого є 7,35. Графіки за формулою (2.3) наведено на рис. 2.5. Як видно, найбільш узгоджуються результати експериментів з теоретичними залежностями, коли $n = 2$, а також при збільшенні відношення N/n . Але при збільшенні кількості монет буде рости тиск на вісь шківів, тобто буде рости момент сил тертя. Тому були проведені вимірювання величини моменту сили тертя. З цією метою здійснювалась *компенсація* сили тертя. Для цього в порожнину циліндра 3 клалися N монет, починаючи з $N = 1$, а в циліндр 4 $N + n$ монет. Компенсація вважалася закінченою, якщо важки самовільно не приходять в рух, але

після легенького поштовху правого важка вниз вони продовжують рухатись з наданою їм швидкістю. Результати досліджень наведені в табл. 2.1.

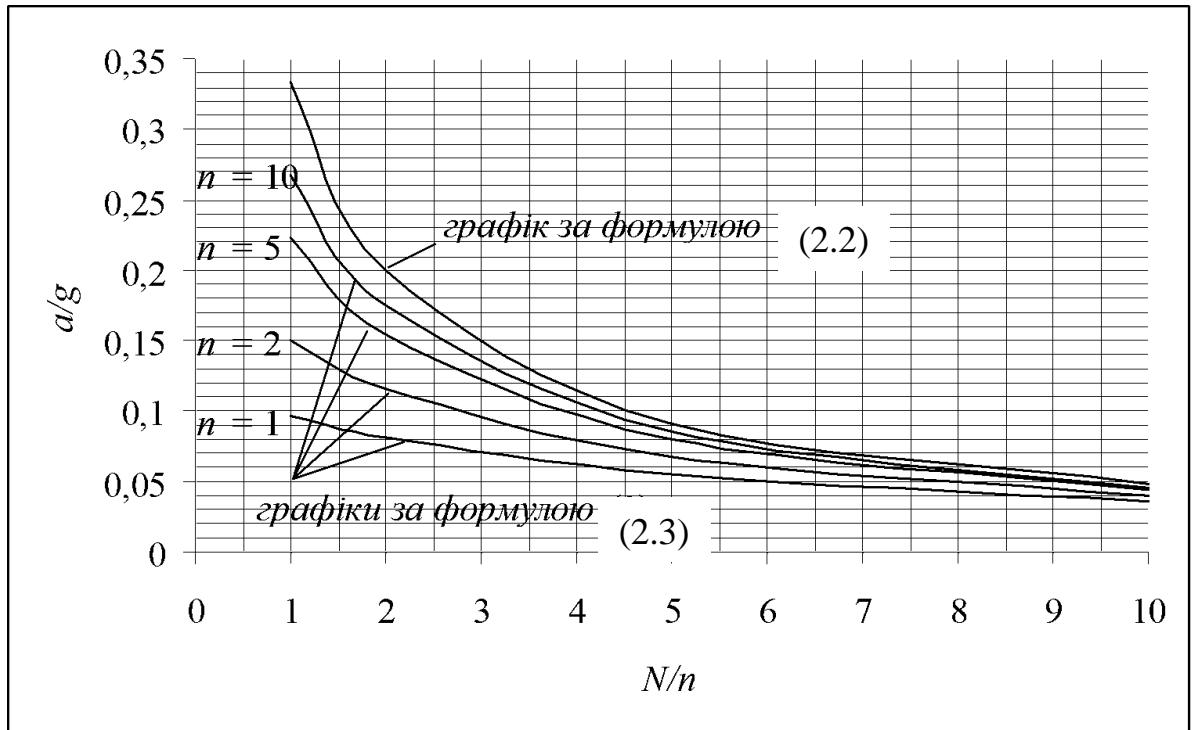


Рис. 2.5. Графіки залежності a/g від відношення N/n за формулою (2.3)

Таблиця 2.1

**Результати дослідження залежності сили тертя
від навантаження на вісь шківів**

$2N+n$, г	62 г	136,6 г
n	1	2
N (10 коп)	18	40

Отже, величина моменту сили тертя, яка виникає при навантаженні осі масою 62 г, дорівнює:

$$M_{mp} = nm_k gR = 1,7 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 \cdot 21 \cdot 10^{-3} = 0,35 \text{ мН}\cdot\text{м},$$

де m_k – маса монети (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

		Маса монет						
Номінал, коп		1	2	5	10	25	50	1 грн
Маса, г		1,5	1,8	4,3	1,7	2,9	4,2	7,1

Якщо тепер на правий важок покласти перегрузок масою m_1 , то система почне рухатись з прискоренням a . На основі другого закону Ньютона, вважаючи маси важків однаковими і рівними m , а блок невагомим, одержимо:

$$\begin{cases} T - mg = ma, \\ (m + m) \cdot g - T = (m + m) \cdot a \end{cases}$$

звідки:

$$a = \frac{m_1 g}{2m + m_1}. \quad (2.4)$$

Якщо врахувати масу блоку (будемо вважати його однорідним диском), тоді система рівнянь, що описує рух важків, буде наступною:

$$\begin{cases} T - mg = ma, \\ (T - T) \cdot r = J \cdot \varepsilon, \\ a = \varepsilon \cdot r \end{cases} \quad (2.5)$$

В цій системі T_1, T_2 – сили натягу нитки по різні сторони шківів, r – його радіус; $J = \frac{1}{2} m_0 r^2$ – момент інерції шківів. Розв'язок цієї системи рівнянь дає

для прискорення вираз:

$$a = \frac{m_1 g}{2m + m_1 + \frac{m_0}{2}}. \quad (2.6)$$

Для підтвердження роботоспроможності установки було проведено експеримент №2. Характеристика шківів: діаметр $\varnothing 64$ мм, $M = 2$ г.

Залежність шляху падіння від часу наведено на рис. 2.5. Як видно з рис. 2.6 прискорення, з яким рухаються вантажі, становить $0,182 \text{ м/с}^2$.

Теоретичне значення без врахування компенсації

$$a_{\text{теор}} = \frac{m_1 - m_2}{0,5M + m_1 + m_2} \cdot g = \frac{(38 - 35) \cdot 9,81}{24/2 + 38 + 35} = 0,346 \text{ м/с}^2$$

майже удвічі більше експериментального значення. З урахуванням того, що одна монета номіналом 10 копійок служить компенсатором, тоді

$$a_{\text{теор}} = \frac{m_1 - m_2 - 1,7}{0,5M + m_1 + m_2 - 1,7} \cdot g = \frac{(36,3 - 35) \cdot 9,81}{83,3} = 0,153 \text{ м/с}^2,$$

що майже збігається з експериментальним результатом.

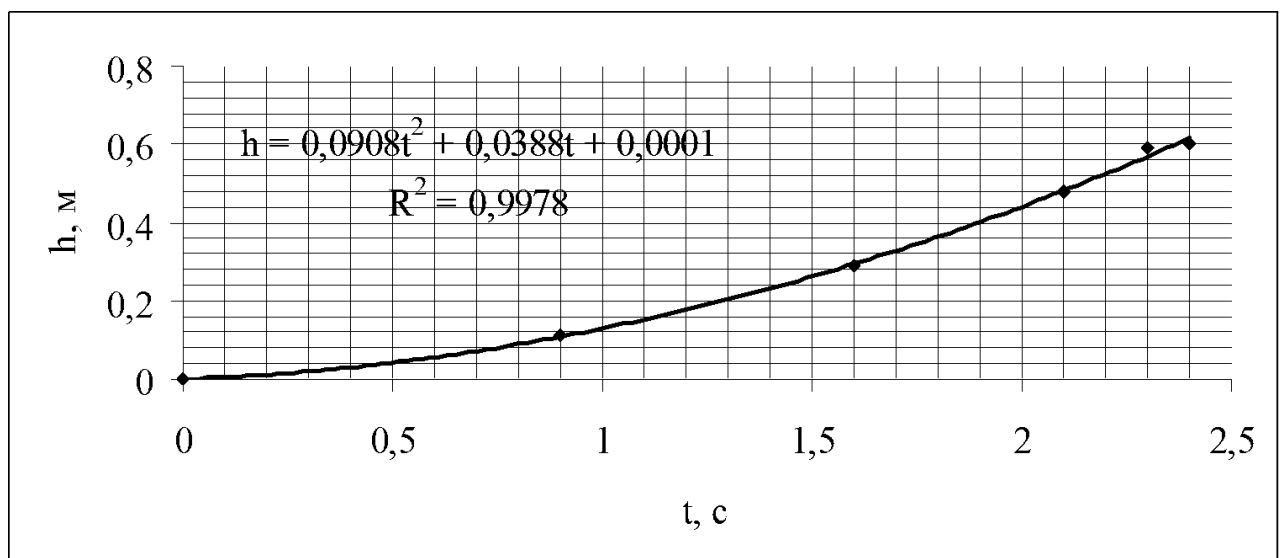


Рис. 2.6. Залежність шляху падіння від часу

2.2. Машина Атвуда зі змінною масою

Сила, яка приводить в рух систему з двох вантажів в машині Атвуда – це різниця у вазі між m_1 і m_2 . Якщо вважати силу тертя $F_{\text{тр}}$ в осі шківів величиною постійною, то рівняння руху для системи є

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2} \right) a = (m_1 - m_2)g - F_{тр} \quad (2.7)$$

де I – момент інерції шківів.

Якщо ми візьмемо $I \cong 0,5m_p R^2$ і визначимо ефективну масу $M = m_1 + m_2 + 0,5m_p$, то ми побачимо, що машина Атвуда аналогічна системі з масою M , на яку діє сила $(m_1 - m_2)g - F_{тр}$. Іншими словами

$$Ma = (m_1 - m_2)g - F_{тр} \quad (2.8)$$

Тепер розглянемо машину Атвуда як систему з масою, що змінюється в часі контрольованим чином (рис. 2.7).



Рис. 2.7. Установка Атвуда зі змінною масою вантажа

Дослідження на установці Атвуда такого типу повинні ілюструвати другий закон Ньютона для систем зі змінною масою та залежність швидкості потоку від прискорення. Вивчення цих систем є цікавим завданням для студентів і розширює їхнє розуміння законів динаміки.

Другий закон Ньютона щодо одновимірному руху може бути записано так:

$$\frac{dP}{dt} = F, \quad (2.9)$$

де P – загальний імпульс системи, а F – результуюча сила, що діє на неї.

Маса системи змінюється в часі, тому імпульс також змінюється. Розглянемо варіацію імпульсу між t і $t + \Delta t$. В момент t ефективна маса M системи рухається зі швидкістю v , а імпульс $P = Mv$. Після Δt система змінла масу $\Delta M (< 0)$ та її швидкість змінилася на Δv . Якщо пісок залишає систему зі швидкістю u відносно контейнера загальний імпульс через $t + \Delta t$ є

$$P(t + \Delta t) = (M + \Delta M)(v + \Delta v) - (v + u)\Delta M. \quad (2.10)$$

Будемо вважати, що початкова відносна швидкість u піску, що залишає контейнер дорівнює нулю ($u = 0$). Тоді зміна імпульсу буде:

$$\Delta P(t) = P(t + \Delta t) - P(t) = (M + \Delta M)(v + \Delta v) - v\Delta M - vM. \quad (2.11)$$

Тому в межі $t \rightarrow 0$ маємо

$$\frac{dP}{dt} = M(t) \frac{dv}{dt}, \quad (2.12)$$

який подібний до виразу для випадку коли маса константа, але з важливою різницею, що маса $M(t)$ тепер змінюється в часі. Якщо дозволити змінюватися масі m_1 у часі, то рівняння (2.8) буде виглядати так:

$$M(t) a = (m_1(t) - m_2)g - F_{\text{тр}}. \quad (2.13)$$

де $M(t) = m_1(t) + m_2 + \frac{m_p}{2}$.

Оскільки геометрія експериментальної установки – та сама, що використовувалося раніше з постійною масою вантажів, ми очікуємо, що тертя F не зміниться. Ми очікуємо також, що швидкість потоку буде змінюватись з прискоренням. Дійсно, якби контейнер був при вільному падінні жоден пісок не залишив би систему. Згідно з [12], потік буде змінюватися в залежності від прискорення так:

$$c(a) = c_0 \left(1 + \frac{a}{g} \right)^\alpha, \quad (2.14)$$

де c – швидкість потоку ($- dm / dt$) при прискоренні a , і c_0 – потік, коли прискорення немає. Знак прискорення такий, що якщо система знаходиться у вільному падінні, $a = -g$. Залежність потоку від прискорення у рівнянні (2.14) показує очікувану поведінку при $a = 0$ і $a = -g$. За розмірним аналізом в роботі [12] зроблено висновок, що показник α у рівнянні (2.14) дорівнює $1/2$. Ми перевіримо цей висновок, використовуючи наші дані.

Якщо $a \ll g$, ми можемо використовувати наближення

$$c(a) \approx c_0 \left(1 + \alpha \frac{a}{g} \right), \quad (2.15)$$

Визначимо параметри так:

$$m_{1,0} = m_1(t=0), \quad m_{12,0} = m_{1,0} - m_2, \quad (2.16)$$

$$M_0 = M(t=0) = m_{1,0} + m_2 + \frac{m_p}{2}, \quad (2.17)$$

і в комбінації з рівняннями (2.13) і (2.15) отримаємо:

$$a(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{(m_{12,0} - c_0 t)g - F_{\text{тр}}}{(M_0 - c_0 \lambda t)}, \quad (2.18)$$

де

$$\lambda = \left(1 - \alpha \left(1 - \frac{a}{g} \right) \right), \quad (2.19)$$

Параметр λ залежить лінійно від a , тому це не дає можливості інтегрувати рівняння (2.19) простими методами. Однак, ми можемо апроксимувати a/g у рівнянні (2.19) за середнім значенням, розрахованим за допомогою рівняння (2.13) та замінити m_1 середнім значенням, $\langle m_1(t) \rangle \approx m_{1,0}/2$, і не враховувати силу тертя. Тому використовуючи параметри M_0 і $m_{1,0}$, введені раніше, ми отримуємо

$$\lambda \approx 1 - \alpha \left(1 - \frac{\frac{1}{2} m_{1,0} - m_2}{M_0 - \frac{1}{2} m_{1,0}} \right) = 1 - \alpha \left(\frac{2m_2 + \frac{1}{2} m_{1,0}}{M_0 - \frac{1}{2} m_{1,0}} \right). \quad (2.20)$$

Рівняння (2.18) тепер може бути інтегровано і отримано вирази як для швидкості, так і координати одної з маси:

$$v(t) = v(t=0) + \frac{gt}{\lambda} + \frac{(M_0 - \lambda m_{12,0}) \cdot g + \lambda F}{c_0 \lambda^2} \times \ln \left(1 - \frac{c_0 \lambda t}{M_0} \right) \quad (2.21)$$

$$x(t) = x(t=0) + v(t=0)t + \frac{gt^2}{2\lambda} + M_0 \frac{(M_0 - \lambda m_{12,0}) \cdot g + \lambda F}{c_0^2 \lambda^3} \left[\left(1 - \frac{c_0 \lambda t}{M_0} \right) \left[\ln \left(1 - \frac{c_0 \lambda t}{M_0} \right) - 1 \right] \right]. \quad (2.22)$$

Рівняння (2.21) і (2.22) можна порівняти безпосередньо з результатами експериментів. З порівняння ми можемо оцінити обґрунтованість нашої моделі та отримати значення α , єдиний вільний параметр.

2.2.1. Результати експериментів

На рис. 2.8-2.11 наведені результати вимірювань зі змінною масою вантажа.

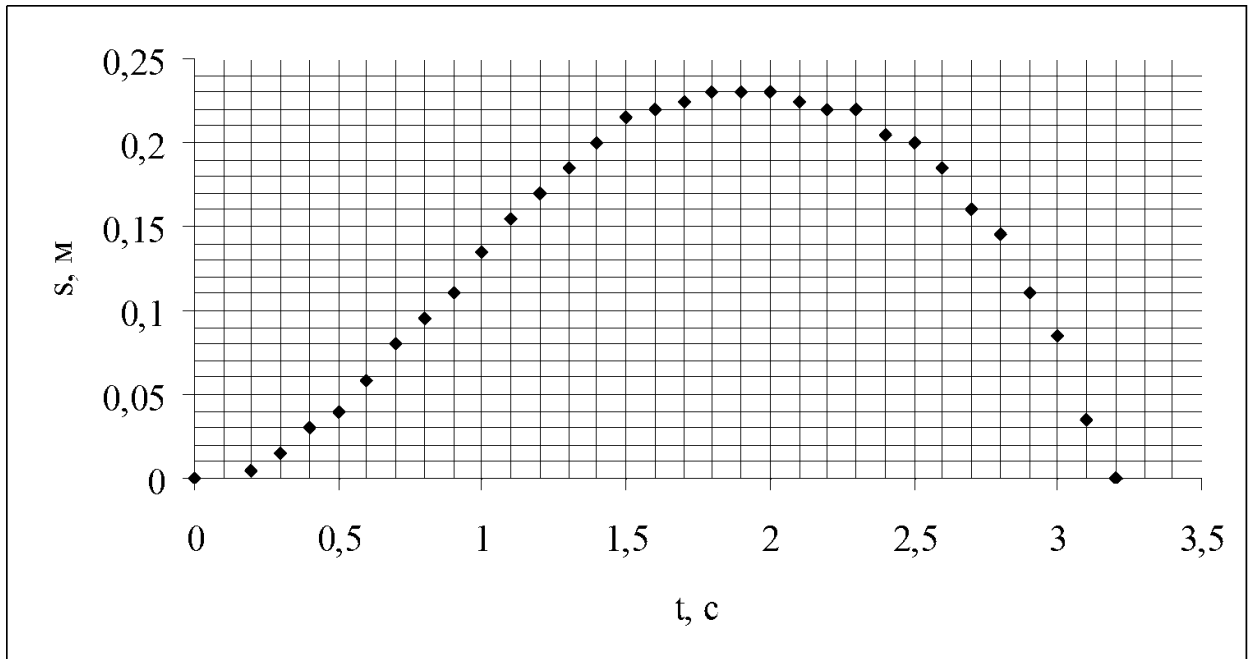


Рис. 2.8. Залежність зміщення вантажу з піском, коли він висипається, від часу

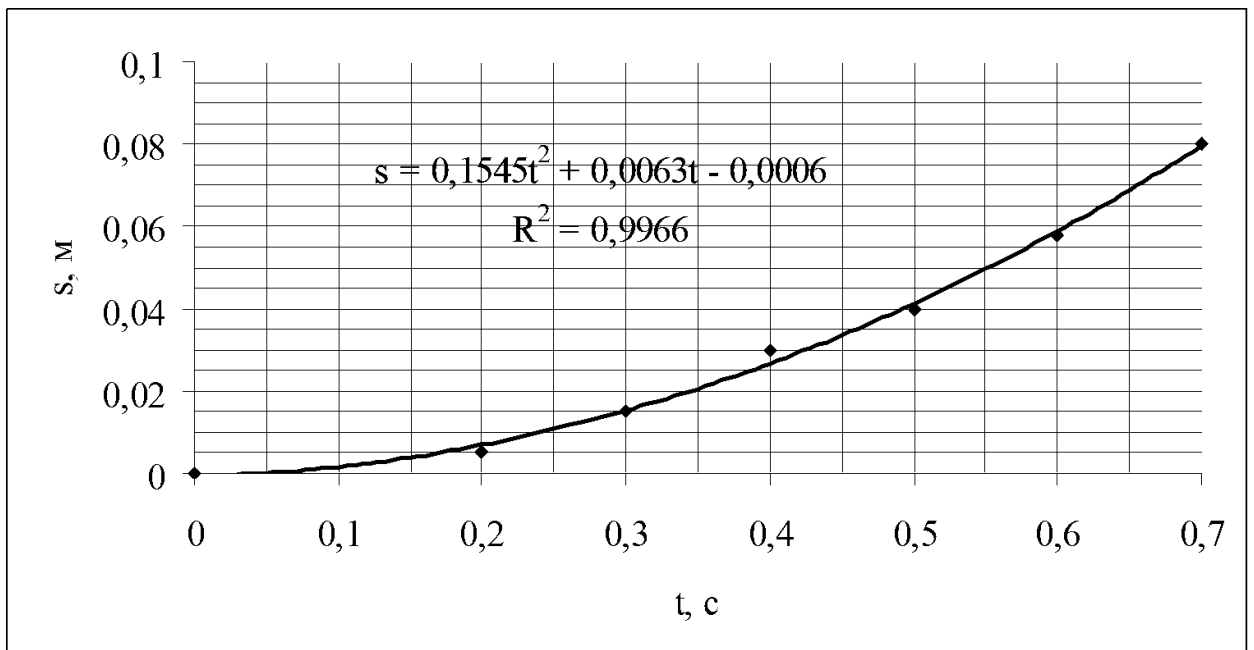


Рис. 2.9. Графік залежності зміщення від часу при падінні вантажа з піском після старту

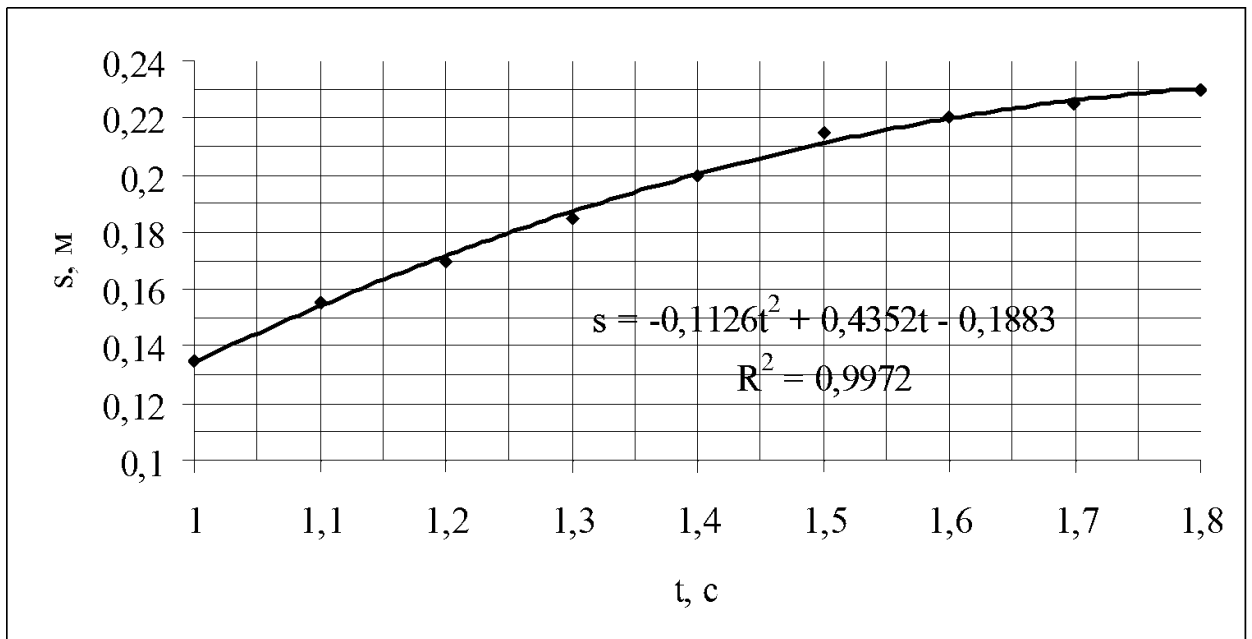


Рис. 2.10. Графік залежності зміщення від часу при падінні вантажа з піском перед зупинкою

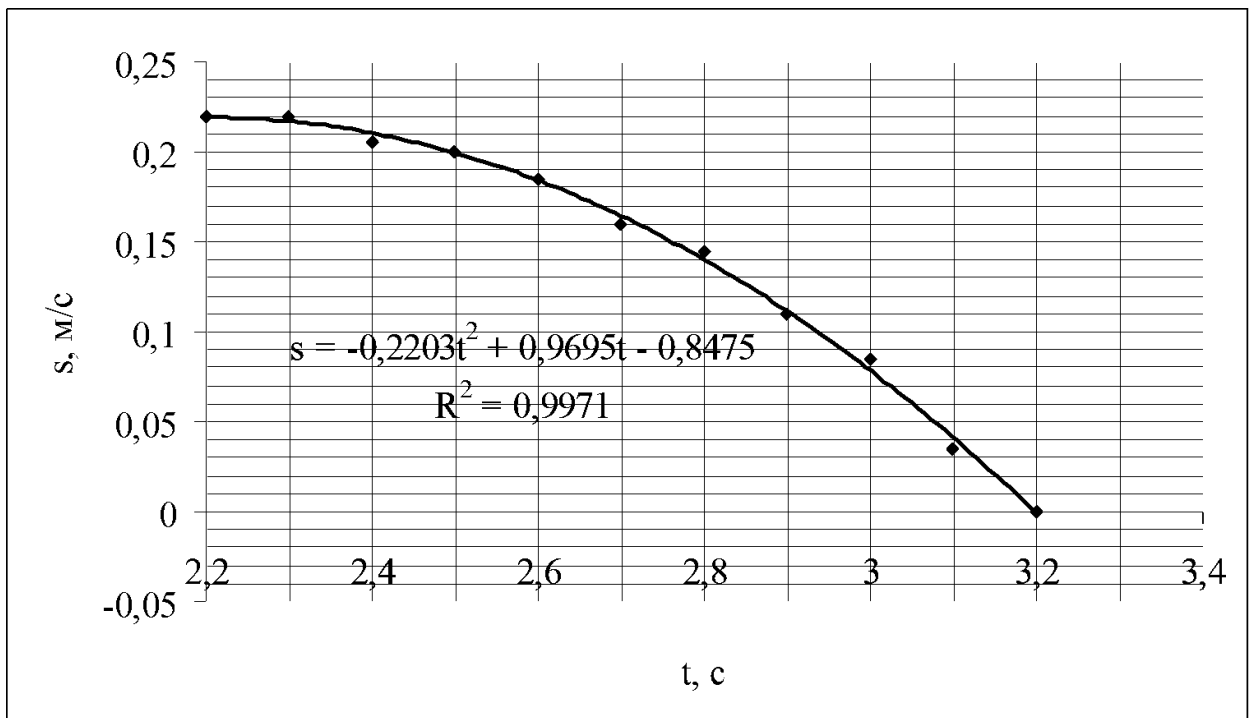


Рис. 2.11. Графік залежності зміщення від часу при піднятті вантажа з піском

Як видно з графіків рис. 2.8 – 2.11 на шляху 0,23 м, вантаж рухався вниз спочатку з прискоренням $0,31 \text{ м/с}^2$, потім перед зупинкою – гальмував з прискоренням $-0,22 \text{ м/с}^2$, а потім став підніматися з прискоренням $0,44 \text{ м/с}^2$.

В результаті порівняння експериментальних з теоретичними кривими, отриманими від рівнянь (2.21) і (2.22) для різних значень α , можна довести [13], що $\alpha = 1,5$, як передбачає теорія.

Висновки

Розроблено прилад для вимірювання потоку піску крізь отвір. Вимірювання показують, що: 1) потік піску є постійний і залежить лише від площі отвору. 2) Форма отвору не впливає на потік до тих пір, поки характерні розміри отвору значно більші ніж розміри зерен піску.

3) Експериментальні результати залежності потоку від площі узгоджуються з результатами розмірного аналізу, тобто залежить від потоку крізь площу отвору з показником $5/4$, як у рівнянні (2.1).

Ми також створили машину Атвуда зі змінною масою для вивчення динаміки системи зі змінною масою. Простота пристрою дозволяє нам знайти хорошу згоду між теорією та експериментальними результатами. Крім того, цей пристрій дозволив нам вивчити залежність потоку зернистих середовищ в прискореній системі, що дало можливість зрозуміти, як протікання зернистих носіїв може змінюватися там, де прискорення сили тяжіння різняться від того, що є на Землі. Наші експериментальні результати підтверджують, що витрата зернистих середовищ збільшується пропорційно з коренем квадратним від загального прискорення системи вантажів.

Орієнтовна схема підготовки та проведення уроку, присвяченого проведенню лабораторної роботи наведена в Додатку А.

РУХ ЛАНЦЮГІВ ПО ВЕРТИКАЛІ

У цьому розділі досліджуються закони руху лінійних систем по вертикалі зі змінною у часі масою, яка знаходиться в польоті. *Спочатку* розглядається запуск вгору кульки, до якої під'єднана довга гнучка мотузка, яка лежить на землі. У реальному житті до цього класу задач відноситься, наприклад, закидання мотузок з гачками на дахи палаючих будівель для підняття скелелазів-пожежників та спускання альпіністів зі скель у критичній ситуації.

Потім розглядається вільне падіння одного кінця мотузки, у той час як інший кінець прив'язаний.

У першій частині теоретично визначимо залежність швидкості тіла, обтяженого мотузкою від висоти підйому і залежність висоти тіла над поверхнею Землі від часу польоту. Для підтвердження наших висновків експериментально доведемо справедливості виявлених закономірностей. У цьому і полягають методичні особливості викладання теми “Рух тіл зі змінною в часі масою”: досконала теоретична розробка проблеми і потім якісне експериментальне доведення висновків теорії.

У першій частині наукового дослідження отримаємо рівняння руху кульки під час поступового підняття мотузки з землі; розв'яжемо це рівняння аналітично та чисельно; експериментально перевіримо теоретично отримані залежності за допомогою розробленої для цього установки.

Для реєстрації зміни з часом положення тіл використаємо смартфони в режимі відео “slow motion” та мобільний застосунок “Секундомір“. Для дослідження функціональних залежностей та експериментальних даних застосовуємо електронні таблиці Excel.

3.1. Рух тіла з мотузкою, кинутого вертикально вгору

Сутність задачі, яка розв'язується, полягає в наступному: тіло масою m , до якого під'єднана довга гнучка мотузка, яка лежить на землі, запускають вертикально вгору (див. рис. 3.1).

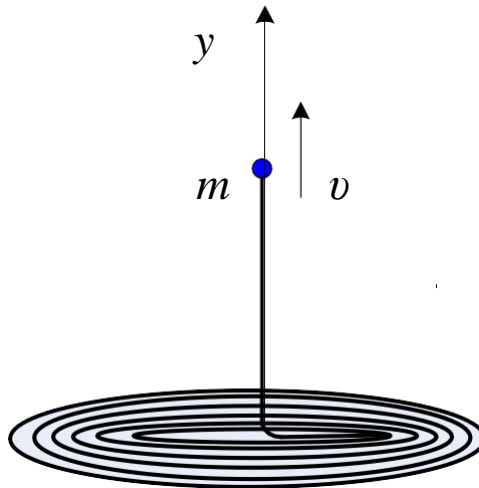


Рис. 3.1. Розрахункова схема руху ланцюга з однорідною лінійною густиною під час його кидання вгору

Припустимо, лінійна густина мотузки (ланцюга) однакова по всій її довжині. Маса тіла m може дорівнювати нулю, коли, наприклад, ковбой кидає ласо або мотузку, альпініст кидає вільний кінець мотузки вгору тощо. Тобто, вивчається рух тіла у полі тяжіння Землі. Але проблема полягає в тому, що тіло змінює масу під час вертикального руху вгору. Тому залежність швидкості тіла, прив'язаного до мотузки від його висоти, є нетривіальною. Маса системи тіло-мотузка, як видно з рисунка, постійно збільшується під час руху тіла вгору. Тобто це не рух тіла у полі земного тяжіння з постійною масою, рівняння руху якого добре відомо [14].

Прикладна **цінність** отриманих результатів полягає в можливості надання рекомендацій щодо параметрів установок гарпунного типу.

3.1.1. Визначення рівняння руху тіла

Розглянемо випадок, коли опором повітря можна знехтувати. Тіло, до якого прив'язана мотузка, вважаємо точковою масою m . Мотузка має рівномірну густину лінійної маси λ та загальну довжину L . Мотузка згорнута на землю так, щоб її можна було витягнути й не заплутатися. Тіло вистрілюється в повітря вертикально вгору з початковою швидкістю v_0 . Вісь у напрямлена вгору з початком відліку на рівні землі.

Розглянемо деякий довільний момент у часі, коли тіло знаходиться на висоті y . Мотузку вважаємо досить довгою, щоб вона ніколи не була повністю поза землею. Можна розрізнити три маси: 1) маса m тіла, 2) маса $M = m + \lambda y$ тіла і мотузки довжиною y , що разом знаходяться у повітрі та рухаються вгору зі швидкістю $v = dy/dt$, і 3) $M_{\text{сум}} = m + \lambda L$ – маса тіла і всієї мотузки довжиною L (включаючи частину, що згорнута на землі).

Спочатку розглянемо систему, маса якої є $M_{\text{сум}}$. Для такої системи, яка має постійну масу, другий закон Ньютона може бути написаний так:

$$\frac{dp}{dt} = F_{\text{зовн}}, \quad (3.1)$$

де зовнішня сила $F_{\text{зовн}}$ дорівнює вазі компонент, що знаходяться у повітрі:

$$F_{\text{зовн}} = -Mg, \quad (3.2)$$

Вага частини мотузки, яка згорнута на землі, рівна і протилежна нормальній силі, яку земля чинить вгору на цю мотузку. У рівнянні (3.1) p – імпульс системи, який можна записати двома альтернативними способами. По-перше, це сума імпульсів тіла і частин мотузки (що рухається в повітрі і що знаходиться в спокою на землі):

$$p = mv + (\lambda y)v + 0 = Mv. \quad (3.3)$$

Підстановка рівняння (3.2) та (3.3) в (3.1) дає ключове рівняння руху:

$$\frac{d(Mv)}{dt} = -Mg, \quad (3.4)$$

яке можна перетворити на диференціальне рівняння руху тіла:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt}v + M \frac{dv}{dt} + Mg &= 0, \\ \frac{d(m+\lambda y)}{dt} \frac{dy}{dt} + (m + \lambda y) \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) + (m + \lambda y)g &= 0, \\ \lambda \frac{dy}{dt} \frac{dy}{dt} + (m + \lambda y) \frac{d^2y}{dt^2} + (m + \lambda y)g &= 0, \\ (m + \lambda y) \frac{d^2y}{dt^2} + \lambda \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + (m + \lambda y)g &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.1.2. Визначення формули швидкості як функції висоти

Розв'яжемо рівняння (3.4) згідно ідеям, викладеним в роботі [15]. Розглянемо систему масою $M = m + \lambda y$, що рухається вгору зі швидкістю $v = dy/dt$, тобто має імпульс $p = Mv$. Тоді рівняння (3.4) буде виглядати так:

$$\frac{dp}{dt} = -Mg. \quad (3.6)$$

Скориставшись виразом $p = Mv = M \frac{dy}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{p}{M}$, першу похідну можна перетворити так:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dy}{dt} \frac{dp}{dy} = \frac{p}{M} \frac{dp}{dy}. \quad (3.7)$$

Прирівнявши праві частини рівнянь (3.6) і (3.7) отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{p}{M} \frac{dp}{dy} &= -Mg, \\ -pdp &= g(m + \lambda y)^2 dy. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Вираз (3.8) можна інтегрувати від часу запуску (коли $y = 0$ і $p = mv_0$) до поточного моменту. В результаті маємо рівняння:

$$(mv_0)^2 - (Mv)^2 = \frac{2g}{3\lambda} (M^3 - m^3) \quad (3.9)$$

Підставляючи $M = m + \lambda y$ у рівняння (3.9) отримуємо залежність швидкості тіла від його висоти:

$$v = \left(1 + \frac{\lambda y}{m}\right)^{-1} \sqrt{v_0^2 - \frac{2mg}{3\lambda} \left[\left(1 + \frac{\lambda y}{m}\right)^3 - 1 \right]}. \quad (3.10)$$

Максимальну висоту $y = y_{max}$ отримаємо шляхом підстановки в рівняння (3.9) $v = 0$ і $M = m + \lambda y_{max}$:

$$(mv_0)^2 = \frac{2g}{3\lambda} \left((m + \lambda y_{max})^3 - m^3 \right). \quad (3.11)$$

Звідки

$$y_{max}^* = \frac{m}{\lambda} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{3\lambda v_0^2}{2mg}} - 1 \right). \quad (3.12)$$

Рівняння (3.10) і (3.12) є правильними за розмірністю та дають очікувані відповіді, коли $v_0 = 0$ та/або $y = 0$.

Максимальне значення підйому кульки з мотузкою завжди менше за

$y_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$ для тіла, запущеного вгору без прикріпленої мотузки. Доведемо це

твердження. В межах $\lambda \rightarrow 0$ за допомогою біноміального розкладання:

$(1+\alpha)^n = 1 + \frac{n}{1!}\alpha + \dots$, де параметр $\alpha = \frac{3\lambda v_0^2}{2mg}$, $n = \frac{1}{3}$, отримуємо вираз:

$$\left(1 + \frac{3\lambda v_0^2}{2mg}\right)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3} \frac{3\lambda v_0^2}{2mg} = 1 + \frac{\lambda v_0^2}{2mg}.$$

Тоді рівняння (3.12) перетворюється на:

$$y_{max}^* = \frac{m}{\lambda} \left(1 + \frac{\lambda v_0^2}{2mg} - 1 \right) = \frac{v_0^2}{2g} = y_{max}. \quad (3.13)$$

3.1. 3. Використання таблиць Excel для визначення залежності швидкості та висоти від часу

Щоб знайти висоту як функцію часу, виконаємо обчислення за допомогою електронної таблиці Excel шляхом ітерації рівняння (3.12):

$$y_{i+1} \rightarrow y_i + v \Delta t, \quad (3.14)$$

починаючи з $y = 0$ і закінчуючи $y = y^*_{\max}$, де Δt є малим кроком у часі (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Алгоритм ітерацій

n	0	1	2	3	...	N
$t, \text{с}$	0	$1 \cdot \Delta t$	$2 \cdot \Delta t$	$3 \cdot \Delta t$...	$n \cdot \Delta t$
$y_i, \text{м}$	0	$y_0 + v_0 \Delta t$	$y_1 + v_1 \Delta t$	$y_2 + v_2 \Delta t$...	y^*_{\max}
$v_i, \text{м/с}$	v_0	$v_1(y_1)$	$v_2(y_2)$	$v_3(y_3)$...	0

Як приклад, припустимо, що тіло має масу $m = 6,380 \text{ г}$ (як у подальших експериментах), мотузка має лінійну густину $\lambda = 0,01725 \text{ кг/м}$, $\frac{\lambda}{m} = \frac{0,01725}{6,38 \cdot 10^{-3}} = 2,7 \frac{1}{\text{м}}$, а величина гравітаційного поля Землі дорівнює $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Нехай $\Delta t = 5 \text{ мс}$ (результати візуально не повинні змінюватися, якщо Δt зменшити).

На рис. 3. 2 показано результат ітерації: графік залежності висоти від часу для швидкості запуску $v_0 = 4 \text{ м/с}$, у цьому випадку $y_1^*_{\max} = 0,358 \text{ м}$ (позначено синім кольором), та $v_0 = 2 \text{ м/с}$, у цьому випадку $y_2^*_{\max} = 0,142 \text{ м}$ (позначено чорним кольором). Червона крива позначає графік руху тіла без прикріпленої мотузки, коли $v_0 = 4 \text{ м/с}$. У цьому випадку $y_{\max} = 0,816 \text{ м}$.

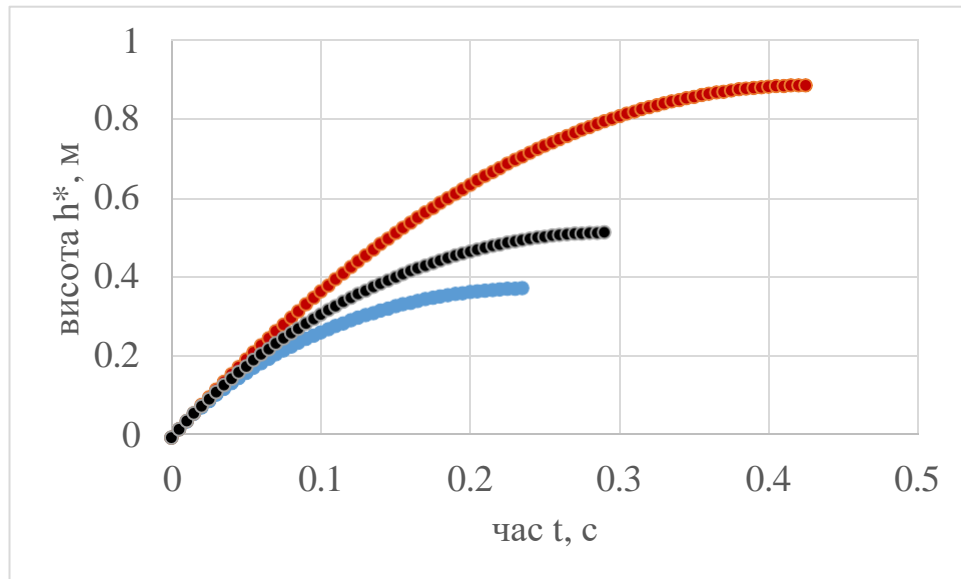


Рис. 3. 2. Графіки залежності висоти тіла h від часу t

Для порівняння червоним кольором на рис. 3. 2 наведено графік залежності висоти тіла, запущеного вгору зі швидкістю $v_0 = 4$ м/с, але без прикріпленого шнура (тобто вільного), рівняння руху якого [4]:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (3.15)$$

Хоча червона і синя криві починаються разом (див. рис. 3.2), вони з часом все більше розходяться. Для початкової швидкості $v_0 = 4$ м/с відношення $y_{\max} / y_1^*_{\max} = 0,816 / 0,358 = 2,28$.

Якщо зменшити початкову швидкість у 2 рази ($v_0 = 2$ м/с), тоді для тіл з мотузками відношення висот $y^*_{1\max} / y^*_{2\max} = 0,358 / 0,142 = 2,52$.

Залежність швидкості тіла від часу для тіла масою $m = 6,380$ г, запущеного вертикально вгору зі швидкістю 4 м/с, від часу наведена на рис. 3. 3.

Синя крива позначає графік руху тіла, прикріпленого до мотузки, тоді як червона крива позначає швидкість руху тіла без прикріпленої мотузки.

Отже, метод ітерації рівняння $v = f(y)$ дозволяє за допомогою розробленого алгоритму отримати залежність швидкості та висоти підйому тіла від часу, а також значення максимальної висоти.

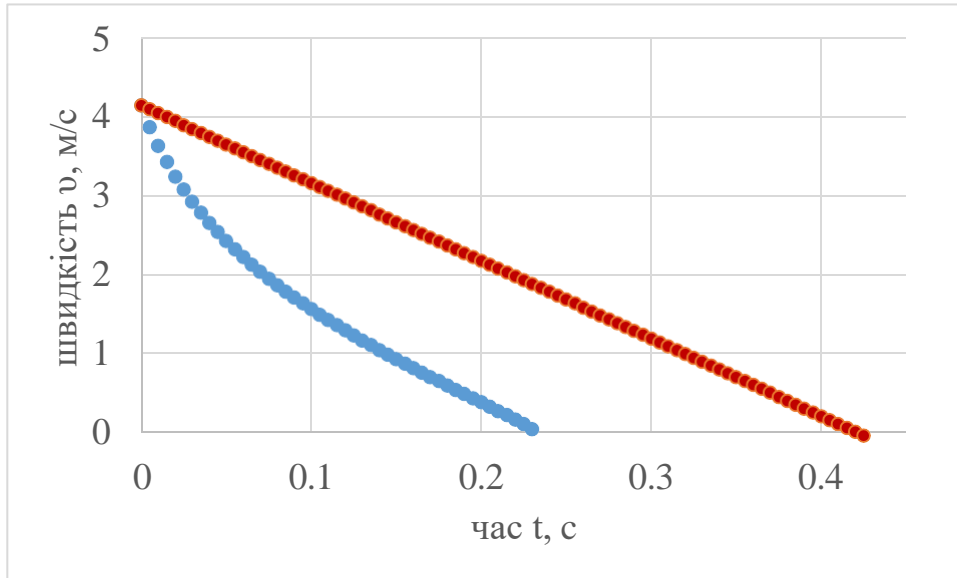


Рис. 3. 3. Залежність швидкості тіла масою $m = 6,380$ г, запущеного вертикально вгору зі швидкістю 4 м/с, від часу. Синя крива позначає графік руху тіла, прикріпленого до мотузки, тоді як червона крива позначає швидкість руху тіла без прикріпленої мотузки

3.2. Експериментальне дослідження руху тіла, кинутого нагору, до якого під'єднана довга гнучка мотузка

Експериментальна установка, яка використовувалася для дослідів, зображена на рис. 3. 4. Тіло (сталеву кульку), запускається пружинним пістолетом вертикально вгору. Маса кульки $m = 6,380$ г, діаметр кульки $\varnothing 11,5$ мм. Точність визначення часу руху кульки – 1 мс. Точність визначення маси – 1 мг (рис. 3. 5). Точність визначення положення кульки – 1 мм.



Рис. 3. 4. Фото експериментальної установки: 1 – пускова установка, 2 – пусковий курок, 3 – кулька, 4 – ланцюг, 5 – лінійка, 6 – секундомір



Рис. 3. 5. Вимірювання маси мотузки №2 на електронних терезах

Як мотузку №1 використано ланцюг з пластмасових кульок, відстань між якими складала 8 мм, а маса ланки 138 мг. Тобто, лінійна густина ланцюга склала величину $\lambda = 0,138 \text{ г} / 8 \text{ мм} = 0,01725 \text{ кг/м}$, а

$$\frac{\lambda}{m} = \frac{0,01725}{6,38 \cdot 10^{-3}} = 2,7 \frac{1}{\text{м}}.$$

Для визначення початкової швидкості руху кульки за допомогою камери смартфона проводилася відеозйомка польоту кульки (без ланцюга) у сповільненому режимі на фоні метрової лінійки та секундоміра (рис. 3. 6).



Рис. 3. 6. Скриншот відеореєстрації положення кульки на максимальній висоті після пострілу: максимальна висота підняття кульки склала величину $y_{\text{max}} = 975 - 85 = 890 \text{ мм}$ (85 мм – положення центра кульки на старті)

Визначалася максимальна висота підняття кульки (див. рис. 3. 6), а потім за формулою:

$$v_0 = \sqrt{2gh_{max}}$$

обчислювалася початкова швидкість руху кульки v_0 . У табл. 3.1 наведені дані вимірювання максимальної висоти польоту та розрахунку середньої початкової швидкості запуску.

Таблиця 3.1

Результати вимірювання швидкості запуску кульки вертикально вгору

$h^i_{max}, \text{ м}$	0,89	0,89	0,89	0,88	0,89	0,90	0,89	0,89	0,88	0,90
$\bar{h}_{max}, \text{ м}$	0,890									
$v_0, \text{ м/с}$	4,178									

Середня початкова швидкість визначалась за формулою:

$$\bar{v}_0 = \sqrt{2g\bar{h}_{max}} .$$

Відносна похибка вимірювання середньої початкової швидкості дорівнює відносній похибці визначення максимальної висоти польоту E , яка обчислювалася за формулою:

$$E_v = E_h = \frac{\Delta \bar{h}_{max}}{\bar{h}_{max}} = \frac{t_{\alpha, n} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (h^i_{max} - \bar{h}_{max})^2}{n(n-1)}}}{\bar{h}_{max}} .$$

Максимальна висота підняття кульки з ланцюгом № 1 (рис. 3.7):

$$y^*_{max} = 480 - 85 = 395 \text{ мм.}$$

Тобто, $y_{max} / y^*_{max} = 0,890 \text{ м} / 0,395 \text{ м} = 2,25$.

Максимальна кількість намистин, які знаходяться у повітрі $N = 60$, що в 1,3 рази перевищує масу кульки.

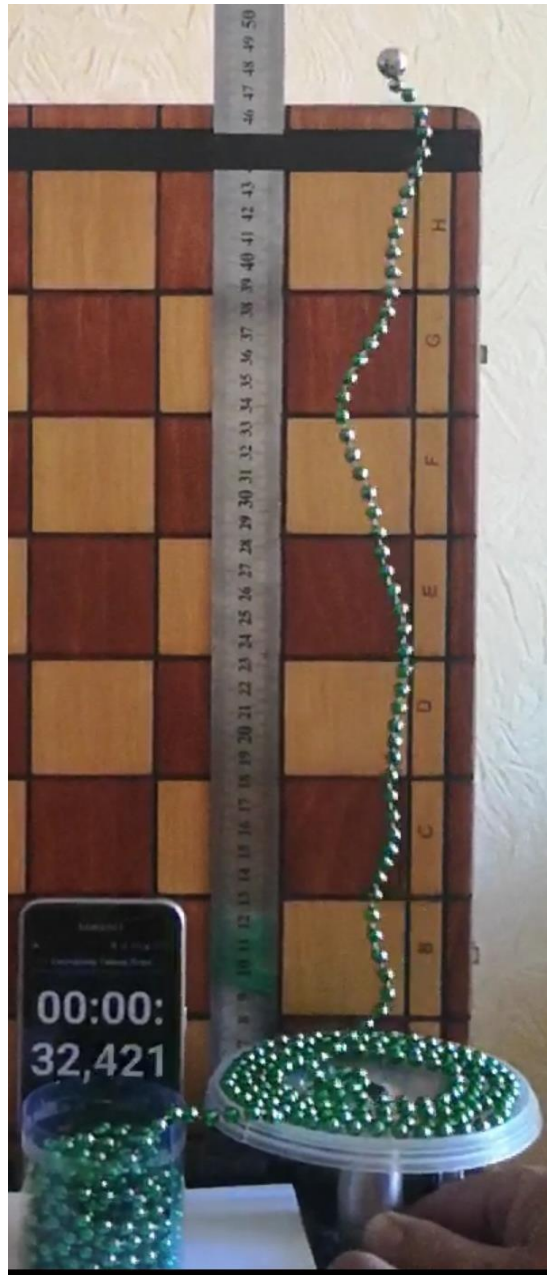


Рис. 3.7. Скриншот відеореєстрації положення кульки з мотузкою №1 на максимальній висоті після пострілу

Очікувана максимальна висота підняття кульки з ланцюгом № 1 при початковій швидкості 4,178 м/с розрахована за формулами (3.12) складає $y_{\max}^{*теор} = 0,377$ м (графік синього кольору на рис. 3. 8), тоді як кульки без ланцюга – 0,890 м (графік червоного кольору рис. 3. 8). Фото таблиці Excel з типовими розрахунками наведено в Додатку Б.

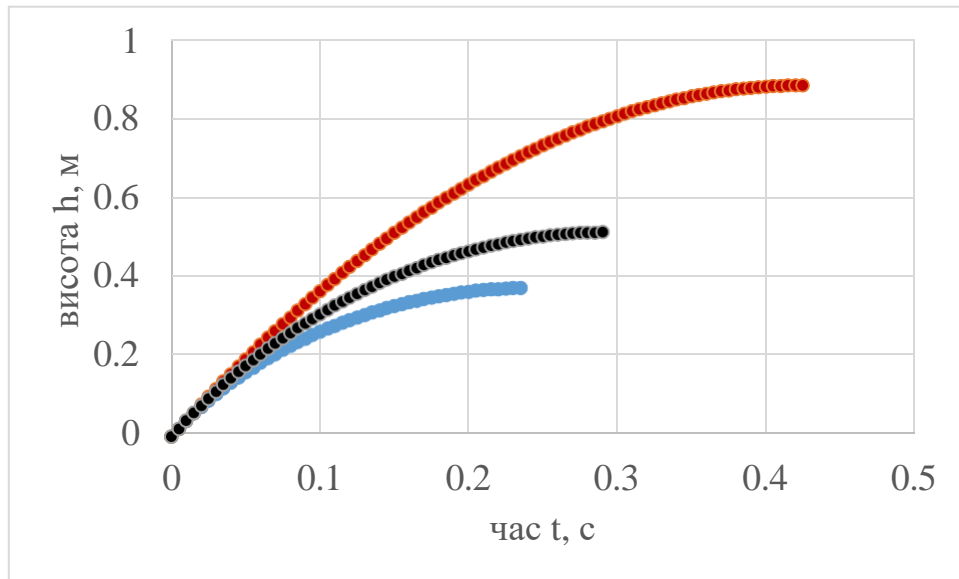


Рис. 3. 8. Результати розрахунку руху кульок, зашуканих вертикально вгору з початковою швидкістю 4,178 м/с: червона крива позначає графік руху кульки без прикріпленої мотузки, синя крива позначає графік руху кульки, прикріпленої до мотузки з відношенням $\frac{\lambda_1}{m} = 2,7\text{м}^{-1}$, чорна крива – з відношенням $\frac{\lambda_2}{m} = 1,15\text{м}^{-1}$

Тобто вплив ланцюга на висоту підняття кульки дуже великий: висота відрізняється у 2,25 разів. Фактично, за результатами дослідів максимальна висота підняття кульки з ланцюгом $y_{\max}^* = 0,395$ м, що відрізняється від теоретичного значення $y_{\max}^{*теор} = 0,377$ м на 4,8 %.

Щоб визначити вплив лінійної густини на висоту підняття тієї ж кульки як мотузку було використано ланцюг №2 довжиною 850 мм з пластмасових кульок з $\lambda = \frac{6,258\text{г}}{850\text{мм}} = 0,00736$ кг/м, та $\frac{\lambda}{m} = \frac{0,00736}{6,38 \cdot 10^{-3}} = 1,1536 \frac{1}{\text{м}}$ (рис 3.9).

Очікувана максимальна висота підняття кульки з ланцюгом при початковій швидкості 4,178 м/с розрахована за формулами (3.12) складає $y_{\max}^{*теор} = 0,518$ м (рис. 3.9 чорна крива). Тобто вплив ланцюга на висоту підняття кульки зменшився до 1,7 раза.

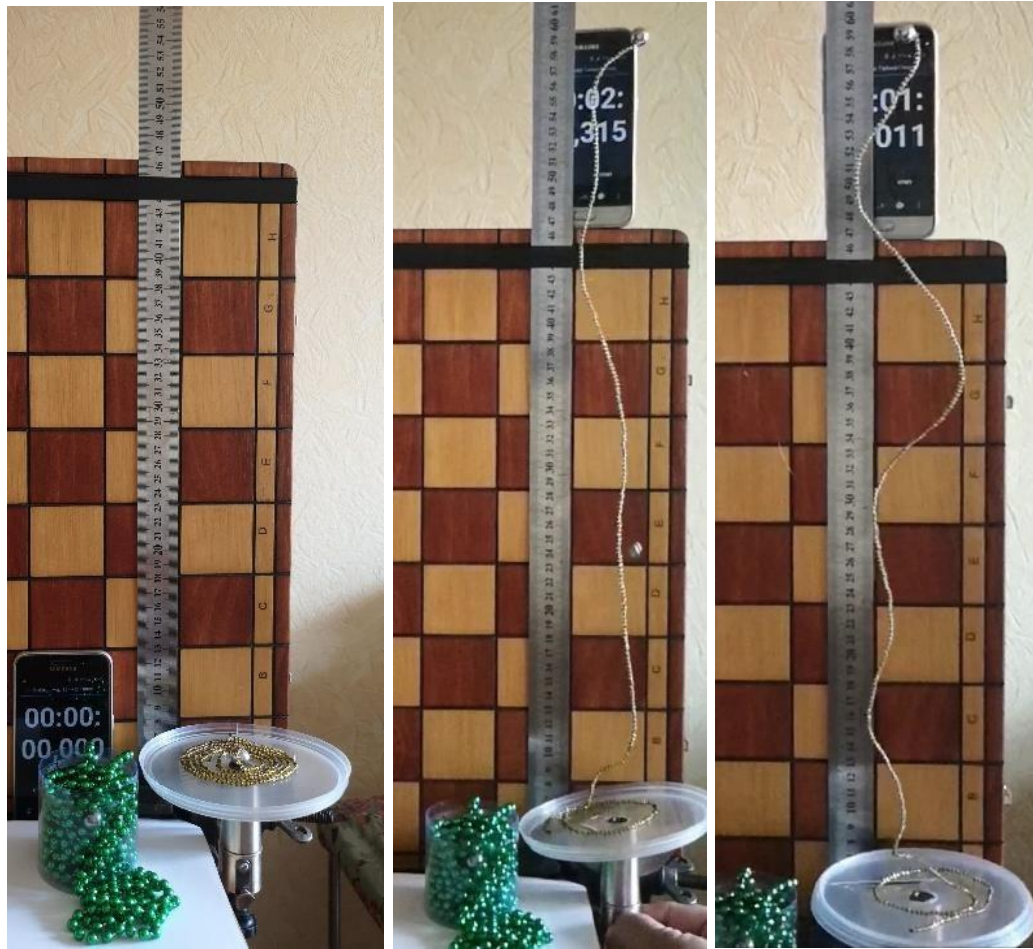


Рис. 3.9. Скриншоти відеореєстрації положення кульки з мотузкою №2 на максимальній висоті після пострілу

Фактично, за результатами дослідів середня максимальна висота підняття кульки з ланцюгом $y^*_{\max} = 0,515$ м, що відрізняється від теоретичного значення $y^*_{\max}{}^{\text{теор}} = 0,518$ м на 0,6 %. Це відмінний результат.

Експериментально вимірний час підняття кульки з мотузкою №2 на максимальну висоту $t_{\text{exp}} = 298$ мс майже співпадає з теоретично розрахованим $t_{\text{теор}} = 290$ мс. Загальний результат досліджень наведено в табл. 3. 2.

Отже, результатом роботи є теоретичне обґрунтування нетривіальної залежності швидкості тіла, прив'язаного до мотузки, від його висоти.

Результати досліджень

	$\lambda / m, \text{ м}^{-1}$	$h_{\text{max}}^{\text{теор}}, \text{ мм}$	$h_{\text{max}}^{\text{exp}}, \text{ мм}$	$t_{\text{max}}, \text{ мс}$
Кулька з мотузкою 1	2,70	377	395	235
Кулька з мотузкою 2	1,15	518	515	290
Кулька	0	890	890	425

Крім цього за допомогою розробленого алгоритму отримано залежність швидкості та висоти підйому тіла, прив'язаного до мотузки, від часу, а також значення максимально досяжної висоти. Доведено, що кулька, обтяжена мотузкою, досягає максимальної висоти раніше за часом ніж вільна кулька. Величина різниці в часі обумовлена відношенням лінійної густини мотузки до маси кульки. Отримані в досліді значення максимальної висоти підйому кульки, з'єднаної з мотузкою, узгоджуються у межах 5% з теоретично визначеними значеннями висоти. Зі збільшенням відношення лінійної густини мотузки до маси кульки максимальна висота підйому зменшується.

3.3. Падіння ланцюга, один кінець якого прив'язаний

Є цілий ряд "простих" питань, які ставлять школярів та студентів в глухий кут. Здавалося б, очевидний факт: історія щодо експериментів Галілея на Пізанській вежі увійшла в науковий фольклор, про це написано в самих різних підручниках. Як приклад наведемо задачу, розв'язану здавалося б раз і назавжди Галілеєм, який за словами Вінченцо Вівіані кидав (подумки за деякими даними) кулі різної маси з Пізанської вежі в 1589 році. Мета експериментів – демонстрація неосвіченій публіці того факту, що час падіння

не залежить від маси кулі. Тим самим спростовувалась теорія Аристотеля, яка стверджувала, що швидкість падіння пропорційна масі тіла.

Через недосконалість вимірювального обладнання того часу вільне падіння тіл вивчати було майже неможливо. Зараз же кожен школяр може зняти відео падіння тіла в уповільненому темпі (режим *slow motion*) і експериментально визначити яке тіло впаде швидше. Чому ж на питання: яка із сполучених мотузкою кульок однакового діаметра в дослідах Галілея впаде швидше – легка чи важка – більшість людей інтуїтивно відповість – важка! І, головне, будуть праві! Якби Галілей дійсно проводив свої досліди на Пізанській вежі, він теж переконався б, що важка куля перша торкнеться землі!

З іншого боку зв'язані мотузкою тіла є елементом будь-якого ланцюга, що складається з елементарних ланок, які при певних обставинах можна вважати матеріальними точками, що мають масу. Тому всякого роду троси, мотузки, дроти, павутинки, батоги можна віднести до класу ланцюгів - об'єктів з розосередженою масою.

При вивченні механіки у вступному курсі спираються, в основному, на кінематику і динаміку матеріальної точки. Протяжні тіла розглядаються в розділі "Статика" і при викладанні динаміки обертального руху твердого тіла. Виділяти клас завдань за участю ланцюгів, тобто об'єктів з розподіленими масами, не прийнято. Тому "прості" питання з провисанням, обертанням, падінням ланцюгів ставлять студентів в глухий кут. Наприклад, важко отримати чітку відповідь на питання: яка з кульок, які перебувають у вакуумі на одній і тій же висоті впаде на підлогу швидше – важка вільна або легка, але прив'язана довгою мотузкою до перекладини, з якої вони стартували без початкової швидкості?

Отже, методична особливість викладання теми "Рух тіл зі змінною в часі масою" у даному випадку полягає в переосмисленні існуючих знань, щодо прискорення падіння тіл.

3.3.1. Енергетика «вільного падіння» прив'язаного тіла

Розгляд поставленого питання проводився багатьма дослідниками. Найбільш доступна інформація є, наприклад, в роботі [16, 38].

Нехай кулька масою M утримується на рівні перекладки високо над поверхнею землі. До кульки прив'язаний канат масою m і довжиною l , другий кінець якого закріплений на перекладі. У початковий момент канат зв'язується з перекладки так, як це показано на рис. 3. 10 а.

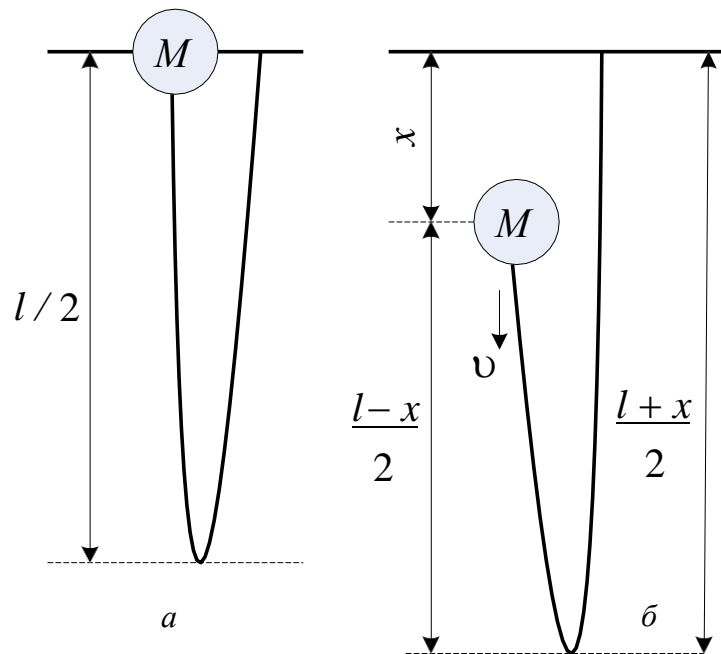


Рис. 3.10. Розрахункова схема падіння прив'язаного за один кінець ланцюга

Потім його відпускають, і через деякий час він виявляється на відстані x під поперечиною, як це зображено на рис. 3. 10 б. Знайдемо швидкість кульки в цей момент, виходячи з закону збереження механічної енергії. Опором повітря нехтуємо.

До того, як тіло почало падати, механічна енергія системи «тіло-канат» щодо рівня перекардини дорівнювала потенціальній енергії каната:

$$E_n = -\frac{mgl}{4}. \quad (3.16)$$

У момент часу, що відповідає положенню тіла на рис. 3. 10, потенціальна енергія системи складається з потенціальної енергії тіла, яке опустилося

$$E_{n1} = -Mgx \quad (3.17)$$

потенціальної енергії лівої частини каната

$$E_{n2} = -\frac{mg(l-x)(l+3x)}{8l} \quad (3.18)$$

і потенціальної енергії правої частини каната

$$E_{n3} = -\frac{mg(l+x)^2}{8l}. \quad (3.19)$$

Кінетична енергія в цей момент часу складається з кінетичної енергії падаючого тіла

$$E_{\kappa1} = \frac{Mv^2}{2} \quad (3.20)$$

і кінетичної енергії лівої частини каната (права частина нерухома!)

$$E_{\kappa2} = \frac{m(l-x)v^2}{4l}. \quad (3.21)$$

У відповідності з законом збереження енергії, для квадрата швидкості падаючого тіла отримуємо

$$v^2 = \frac{2ml + 4Ml - mx}{ml + 2Ml - mx} gx = 2gx \left(1 + \frac{mx/2}{ml + 2Ml - mx} \right). \quad (3.22)$$

Якщо б тіло падало вільно, то квадрат його швидкості був би рівний $v_{free}^2 = 2gx$. Тоді з рівняння (3.22) випливає, що відношення

$$\frac{v}{v_{free}} = \sqrt{1 + \frac{mx/2}{ml + 2Ml - mx}} = \sqrt{1 + \frac{0,5x}{l - x + 2\frac{M}{m}l}}, \quad (3.23)$$

тобто швидкість падаючого тіла, прив'язаного до канату, завжди більше, ніж вільно падаючого, і ця різниця зростає зі збільшенням маси m каната.

Збільшення швидкості падіння прив'язаного тіла відбувається тому, що потенціальна енергія каната не повністю перетворюється в кінетичну енергію каната, оскільки довжина його правої (нерухомої) частини з часом збільшується. Ця невитрачена частина потенціальної енергії каната і переходить у кінетичну енергію прив'язаного тіла.

Коли $x = l$ отримуємо

$$\frac{v}{v_{free}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4\frac{M}{m}}}. \quad (3.24)$$

При $m = 4M$ швидкість падіння прив'язаного тіла перевищить швидкість вільно падаючого тіла у $\sqrt{2}$ раз. Таким чином, тіло буде "швидше падати" з прив'язаним до нього канатом.

Якщо маса каната $m \ll M$, то впадуть два тіла одночасно.

При $m \gg M$ швидкість збільшується до нескінченності, чого фізично бути не повинно. Щоб виключити такий результат, необхідно включити в розрахунок перехід механічної енергії в тепло при миттєвій зупинці елементів каната (або ланцюжка), як при непружному ударі. Виникає питання, якими пружно-пластичними властивостями повинен володіти канат (ланцюжок), щоб результат $a > g$ залишався вірним? Межа міцності каната, насамперед, обмежує величину граничної швидкості.

Якщо маса кульки $M = 0$, то з рівняння (3.23)

$$\frac{v}{v_{free}} = \sqrt{1 + \frac{0,5x}{l-x}} = \sqrt{\frac{1-x/2l}{1-x/l}}, \quad (2.25)$$

тобто, коли $x = l$, розв'язку немає, виникає "ефект батога": кінчик ланцюга при обертанні досягає швидкості, при якій виникає ударна хвиля в повітрі.

3.3.2. Аналіз падіння складеного ланцюга із залученням законів Ньютона

Інший підхід до вирішення такого завдання запропонував Карл Манган [17], використовуючи класичні закони Ньютона.

Розглянемо ланцюжок довжиною L , який висить в U-подібній формі з кінцем, закріпленим в точці A на жорсткій опорі, і вільним кінцем E , відпущеним з тієї ж початкової висоти (прийmemo її $y = 0$), де знаходиться точка A . На рис. 3. 11 ланцюжок відображений в позиції, коли кінець E впав на відстань y . Точка O є точкою звільнення кінця E .

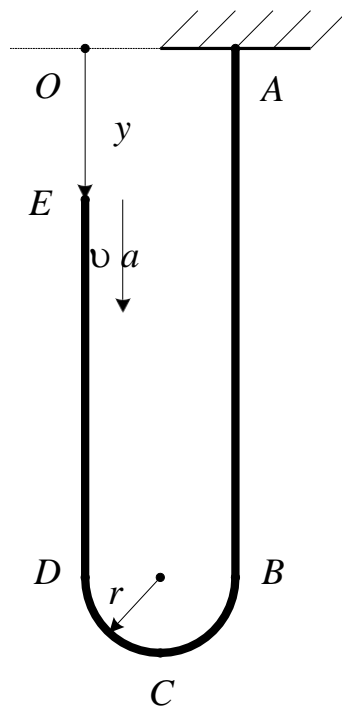


Рис. 3.11. Висячий ланцюг з закріпленим кінцем A і вільним кінцем E , який падає в лабораторній системі відліку

На рис. 3. 11 наведено позитивний напрямок для зміщення y , швидкості v і прискорення a падаючої вниз частини ланцюга DE . Ділянка ланцюга AB знаходиться в спокої. Ділянка BD є півколом радіуса r (сильно збільшеним на малюнку для ясності) з найнижчою точкою C .

Точки O і A вважаються досить близькими одна до одної, а ланцюг досить гнучкий, щоб радіус кривизни r в нижній точці C можна було вважати дуже незначним (в порівнянні з довжиною ланцюжка). Завдання полягає в тому, щоб порівняти швидкість падіння $v(y) = \frac{dy}{dt}$ вільного кінця E ланцюга зі швидкістю v_{free} вільного падіння матеріальної точки, що має масу, в кінці тій самій відстані y . Якщо $v(y) > v_{free}(y)$ для всіх $y > 0$, то при падінні на будь-яку довільну відстань Y (де $0 < Y < L$), кінець ланцюга E завжди буде випереджати одночасно випущену точкову масу, тому що час падіння t для точки E буде коротше t_{free} для точкової маси, тобто

$$t = \int_0^Y \frac{dy}{v(y)} < t_{free} = \int_0^Y \frac{dy}{v_{free}(y)}. \quad (3.26)$$

Завдання в такій постановці з'явилося ще в підручниках механіки [18], що датуються 1897 роком. Найперше обговорення його в педагогічному журналі знаходиться в листах до видавця [19] в 1951 році. Перший систематичний аналіз ефекту батога в падаючому ланцюгу був проведений на кілька років пізніше [20]. Але тільки публікація статті [17] по цій темі в 1989 році призвела до великої кількості наступних статей, які тривають до теперішнього часу.

Є два основні підходи до вирішення цього завдання, причому з обох сторін існує думка, що їх підхід, єдино правильний. Енергетичний підхід був розглянутий раніше в п. 3.3.1.

Ця ситуація повинна застерегти будь-якого викладача від спокуси просто і швидко пояснити фізику подібної системи своїм учням без обґрунтування припущень і моделей, що лежать в основі його пояснення [21].

В одному з підходів до вирішення завдання падіння ланцюжка лежить припущення, що ділянка DE на рис. 3.11 знаходиться у вільному падінні, так що $v(y) = v_{free}(y)$. Наприклад, це припущення теоретично обґрунтовується в публікації [22] про перерозподіл маси в системах зі змінною масою.

Наскільки складно вирішується це питання можна знайти в теоретичному аналізі проблеми [23]. Виявляється, що прийняття цього припущення про вільне падіння еквівалентно припущенню, що вся кінетична енергія поступального руху втрачається, оскільки кожна наступна ланка ланцюжка переміщається зі швидкістю v в точці D на рис. 3.11 з поворотом через точку C ланцюжка і зупиняється в точці B . Припускається, що велика частина кінетичної енергії, втрачається при повороті, розсіюється як теплова енергія, оскільки частини каната не пружно труться при переході в точку B ланцюга, яка покоїться [24]. Ситуація не відрізняється від тієї, яка відбувається внизу ланцюга, що падає в купу на столі. Фактично, кілька статей явно роблять таке порівняння між падінням складеного і розгорнутого ланцюга [25, 26]. Інша частина втрат кінетичної енергії окремих ланок перетворюється в спільні обертальні коливання і коливання ланцюга, що спостерігаються при відеоаналізі [27-29]. Незважаючи на правдоподібність цих уявлень про механічну дисипацію енергії і про вільне падіння ділянки кола DE , ретельне порівняння між моделюванням і експериментами показує, що більша частина кінетичної енергії падіння ланцюга не губиться, а «концентрується» на все більш і більш короткі падаючі секції, що призводить до $v(y) > v_{free}(y)$, і до другого підходу у вирішенні завдання. Фактично, в хорошому наближенні жодна механічна енергія системи не втрачена [18, 20], і, погоджуючись з авторами [27], [30], можна вважати, що збереження механічної енергії теоретично можна обґрунтувати. Інша система, яка забезпечує збереження механічної енергії – це банджі-джампери, [31], хоча це менш дивно, оскільки шнур можна змодельовати як пружину.

Розробці альтернативних методів аналізу динаміки падаючого ланцюга присвячена також робота [18], де отриманий елегантний розв'язок цієї задачі з використанням лагранжевого підходу, але він є досить складним для вступного курсу.

Щоб отримати розв'язок поставленого завдання на рівні доступному для введення в механіку при подальшому розгляді згідно [17] використовуємо тільки закони Ньютона. Вважаємо, що відрізки AB і DE ланцюга на рис. 3.11, як на початку, так і в кінці процесу залишилися вертикальними. Для теоретичного нескінченно гнучкого ланцюга це буде справедливо тільки в тому випадку, якщо радіус кривизни r відрізка BD дорівнює нулю (тобто якщо точки A і O на рис. 3.11 лежать одна на одній).

Для реального ланцюжка, що складається з непарної кількості ланок, відрізки AB і DE будуть вертикальними, якщо точки A і O будуть розділені на довжину рівну одній ланки, як показано на рис. 11 в роботі [27]. Навпаки, для великих горизонтальних відстаней між точки A і O , відрізки AB і DE будуть спочатку мати приблизно таку форму ланцюжка, яка відображена в [32], а при подальшому руху ланцюга після відпускання кінця E - в роботах [28] та [29].

У той час як відрізок DE ланцюга падає з однією спільною спрямованою вертикально вниз швидкістю v (і відповідним спрямованим вниз прискоренням a), ланцюг між точками B і D не рухається в напрямку дотичній до миттєвої форми ланцюга на рис. 3.11.

Наприклад, точка C має вертикальну складову швидкості $v/2$, направлену вниз на додаток до її компоненту горизонтальної швидкості $v/2$, напрямленому праворуч. Ця ситуація аналогічна швидкостям точок на ободі шини, що котиться вниз без ковзання [33] уздовж лінії AB : точка B є нижньою частиною шини в стані спокою відносно траєкторії, точка D – верхня частина шини, що рухається вниз при швидкості v , а точка C – точка шини, що рухається вниз і праворуч, причому кожна компонента цих швидкостей дорівнює $v/2$.

Корисно проаналізувати рух ланцюга в системі, яка переміщається вниз зі швидкістю $v/2$, як на рис. 3.12 (ця система координат прискорюється вертикально вниз як похідна за часом від швидкості).

Відрізок BD ланцюга обертається зі швидкістю $v/2$ навколо стаціонарного центру F по півколу радіуса r , як мотузка на ідеальному шківі [34]. Таким чином, його тангенціальне прискорення $a_t = a/2$ [34]. Маса цього напівкруглого відрізка дорівнює $m = \lambda \pi r$, де λ - лінійна густина маси ланцюга.

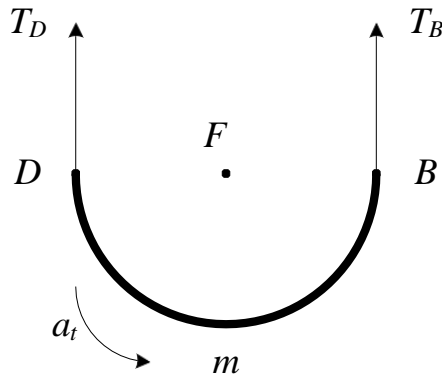


Рис. 3. 12. Сили (T_B і T_D) і прискорення (a_t), які мають тангенціальний компонент для секції BD ланцюга масою m . Тут відрізок робить напівкруглу петлю з центром в т. F

Позначимо величини вертикального натягу на кінцях B і D цього відрізка як T_B і T_D відповідно. Тоді тангенціальний компонент за другим законом Ньютона для відрізка BD ланцюжка [35] дорівнює:

$$T_B - T_D = ma_t = \lambda \pi r a / 2. \quad (3.27)$$

Це рівняння можна було б альтернативно вивести шляхом написання другого закону Ньютона в термінах обертального моменту, моменту інерції і кутового прискорення відрізка BD відносно точки F на рис. 3.12 У межі, коли ланцюжок робить поворот так, що $r \rightarrow 0$, з рівняння (3.17) випливає, що $T_B \approx T_D$. Приблизно таке ж зусилля (позначимо його величину T_{BD}) діє по всій ділянці BD ланцюга (точно так само, як і для мотузки, яка не ковзає по шківу, якщо тиск маси шківів і ділянки каната на шків дуже малий, і немає тертя на осі шківів). Хоча точка B нерухома, а точка D рухається вниз зі швидкістю v в

лабораторній системі, зусилля, яке чиниться на точку B ланцюгом вище неї, дорівнює натягу, що чинить на точку D при обертанні секції ланцюга нижче неї. Ця дія сили на ділянку D на рис. 3.11, більше сили тяжіння, яка зазвичай діє на ділянку ланцюга DE як на масу падаючої матеріальної точки, що призводить до того, що результуюча сила, яка діє на кінець ланцюга E перевищить силу тяжіння mg матеріальної точки.

Для знаходження кількісного виразу для швидкості вільного кінця E в лабораторній системі розглянемо напівкруглу ділянку ланцюга, як показано на рис. 3.13. Сили (T_{BD} і mg) і прискорення ($a/2$ і a_c) мають вертикальний компонент на відрізку ланцюга BD масою m в лабораторній системі відліку. Цей відрізок обертається навколо точки F зі швидкістю $v/2$. Він напівкруглий з радіусом r таким, що будь-яка точка на відрізку знаходиться під кутом до вертикалі, що змінюється від -90° до $+90^\circ$ (наприклад, сама нижня точка C знаходиться в кутовому положенні $\theta = 0$).

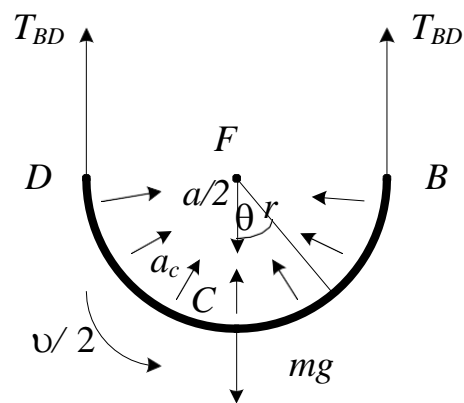


Рис. 3.13. Розрахункова схема

Крім натягу T_{BD} , що діє на кожен з кінців відрізка, діє також спрямована вниз сила гравітації: $mg = \lambda \pi r g$

Прискорення кожного нескінченно малого сегмента петлі є сумою трьох величин: тангенціального прискорення a_t (як показано на рис. 3.12),

загального вертикального прискорення вниз $a / 2$ падаючої петлі і доцентрового прискорення $a_c = (v / 2)^2 / r$, коли сегмент обертається зі швидкістю $v / 2$ навколо центральної точки F . Щоб знайти результуюче прискорення всієї секції BD , необхідно скласти до купи векторні прискорення кожного окремого сегменту, а потім помножити це результуюче прискорення на загальну масу $m = \lambda \pi r$ сегмента.

(У подальшому проінтегруємо добуток векторного прискорення на нескінченно малу масу кожного сегмента по всій секції.) Виходячи з симетрії середня вертикальна складова тангенціального прискорення дорівнює нулю, так само як і середній горизонтальний компонент центропрямуючого прискорення. Середня вертикальна складова доцентрового прискорення:

$$\bar{a}_c = \frac{\int_{-90^0}^{+90^0} a_c \cos \theta \, d\theta}{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta} = a_c \frac{2}{\pi}, \quad (3.28)$$

де θ - кут, відлічуваний в точці F від вертикального напрямку до будь-якого заданого нескінченно малого сегмента ланцюг, як наведено на рис. 3.13. З урахуванням всіх умов для вертикальних складових другий закон Ньютона для відрізка BD дає:

$$2T_{BD} - \lambda \pi r g = \lambda \pi r \left(\frac{v^2}{4r} - \frac{a}{2} \right). \quad (3.29)$$

З урахуванням того, що $r \rightarrow 0$ отримаємо:

$$2T_{BD} = \lambda \frac{v^2}{2}; \quad v^2 = \frac{4T_{BD}}{\lambda}. \quad (3.30)$$

Ліве рівняння пророкує, що $T_{BD} = 0$, якщо $\lambda = 0$. Таким чином, в змаганні [36] між вільно падаючим ланцюжком і складеним ланцюжком, у якого один кінець прив'язаний, складений ланцюжок виграє тільки в тому випадку, якщо має масу [21]. Також $T_{BD} = 0$, якщо $v = 0$. Тобто, при вивільненні кінця E натяг

в нижній ланці ланцюга дорівнює нулю, так само як при статичній підвісі ланцюга.

Тепер розглянемо відрізок DE ланцюга, як наведено на рис. 3.14.

Коли $r \rightarrow 0$, відрізок BD на рис. 3.11 має незначну довжину, довжина відрізка DE $(L - y) / 2$ зменшиться від $L / 2$ до 0 і ділянка AB , яка має довжину $(L + y) / 2$ збільшується від $L / 2$ до L в той час коли y збільшується від 0 до L . Сума довжин AB і DE завжди дорівнює L .

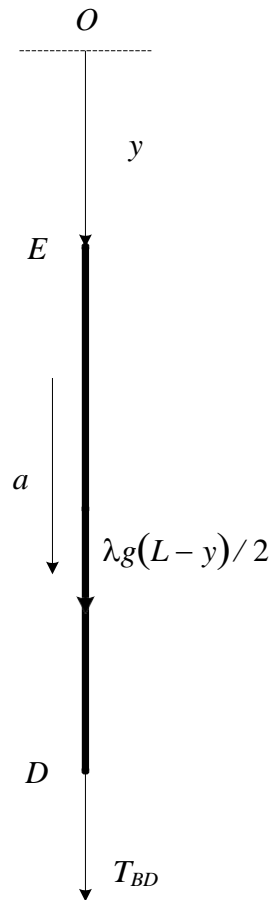


Рис. 3.14. Діаграма вільного відрізка DE ланцюга в лабораторній системі відліку

Другий закон Ньютона для нього буде мати вираз:

$$T_{BD} + \frac{\lambda g(L-y)}{2} = \frac{\lambda a(L-y)}{2} \quad (3.31)$$

Розв'язуючи це рівняння відносно T_{BD} і замінюючи його в правій частині рівняння (3.30), отримуємо:

$$v^2 = 2(L-y)(a-g) \quad (3.32)$$

Відшукаємо прискорення, як

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dy}{dt} \frac{dv}{dy} = v \frac{dv}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{v^2}{2} \right). \quad (3.33)$$

Тепер рівняння (3.32) можна представити так:

$$(L-y) \frac{dv^2}{dy} - v^2 = 2g(L-y),$$

$$\frac{d}{dy} [(L-y)v^2] = 2g(L-y), \quad (3.34)$$

яке може бути проінтегровано за y -ом як:

$$(L-y)v^2 = gy(2L-y),$$

$$v(y) = \sqrt{\frac{gy(2L-y)}{L-y}} = \sqrt{2gy} \cdot \sqrt{\frac{L-y/2}{L-y}} = v_{free} \sqrt{\frac{L-y/2}{L-y}}, \quad (3.35)$$

де $v_{free} = \sqrt{2gy}$ – швидкість вільно падаючої матеріальної точки.

Отже,

$$\frac{v}{v_{free}} = \sqrt{\frac{1-y/2L}{1-y/L}}. \quad (3.36)$$

що більше 1 для будь-якого y в діапазоні $0 < y < L$, як наведено на рис. 3.15. Цей результат суперечить звичному досвіду з вільним падінням предметів і тому в це важко повірити багатьом людям, навіть досвідченим фізикам.

Наприклад, швидкість вільного кінця ланцюга E повинна збільшитися у 2 рази в порівнянні зі швидкістю вільного падіння матеріальної точки коли $y = 0,85L$.

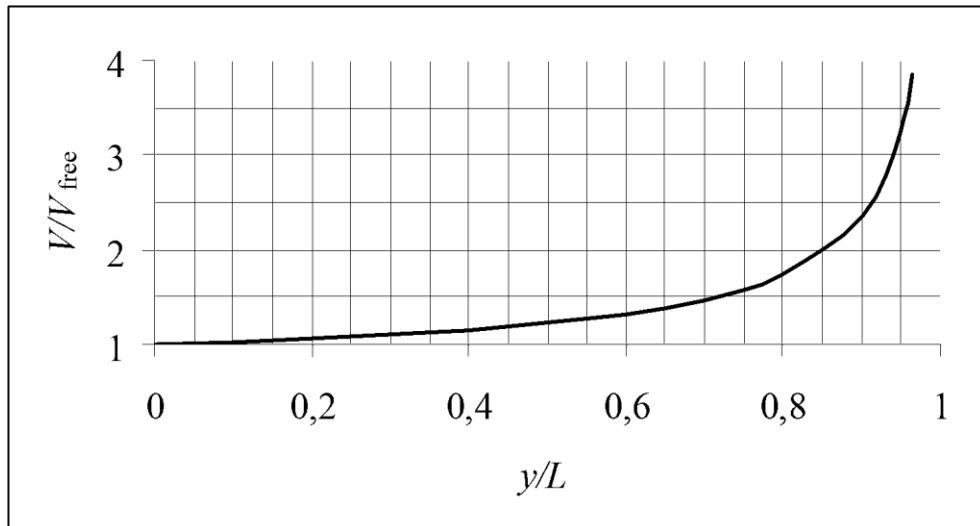


Рис. 3.15. Швидкість вільного кінця ланцюга відносно швидкості вільного падіння точкової маси в залежності від відношення відстані падіння y до довжини ланцюга L

Швидкість v не може бути визначена, коли $y = L$, тобто коли остання ланка ланцюжка робить поворот навколо точки F , тобто, коли виникає “ефект батога”. Аналогічно прискорення a , яке може бути визначено, якщо підставити рівняння (3.35) в (3.32), розходиться, коли $y = L$. Ця невизначеність в v і a не виникає на практиці, тому що остання ланка на вільному кінці ланцюжка має кінцеву довжину і масу (а не таку, що неперервно зменшується до нуля), аналогічно «згину» на кінчику батога [37].

Рівняння (3.36) узгоджується з підходом, який розглядає закон збереження механічної енергії, в якому кінетична енергія, втрачена ланкою при переході від точки D до B на рис. 3.11, додається до кінетичної енергії відрізка DE ланцюга. Формула (3.36) ідентична формулі (3.25), отриманої на основі закону збереження енергії більш простим шляхом.

Оскільки ланка обертається в точці C , то вона відтягується назад по відрізьку DE , тим самим уповільнює рух ланки вниз і, відповідно, уповільнює прискорення падаючої ділянки ланцюга. Цю нижню ланку можна уявити як маленький крючок для захвату, з'єднаного з ланкою DE дуже жорсткою

еластичною конструкцією. Щоб повернути, ця ланка повинна розтягнутися, тим самим уповільнивши рух крюка. Коли крюк гальмується, він прикріплюється без дисипації до нерухомої точки B . Пружна потенціальна енергія в групі тепер тягне і прискорює іншу частку падаючого ланцюжка, надаючи йому додаткову кінетичну енергію. Відрізок BD ланцюга поводить себе так, наче він обертається навколо шківів (див. п. 3.3.1).

3. 4. Експериментальне визначення прискорення падіння тіл

З метою перевірки отриманих результатів $a > g$ (!) (нетривіальних для багатьох школярів та студентів) були проведені експерименти, постановка яких наведена на рис. 3. 16, а графіки руху на рис. 3. 17. Швидкісна відеозйомка кульок та ланцюгів при їх падінні велась за допомогою смартфона Huawei P 30 Pro.

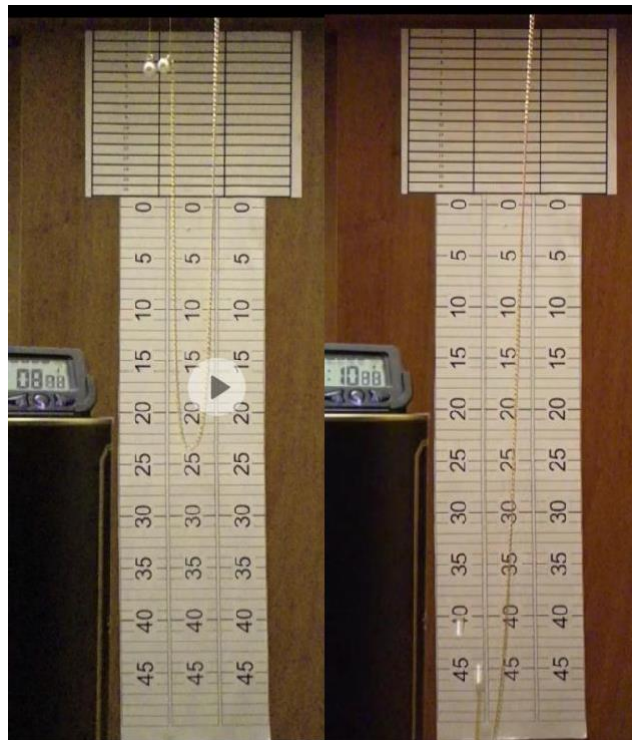


Рис. 3. 16. Фото падіння кульки (2 г) діаметром 12 мм та ланцюга довжиною 1 м з кулькою (7 г)

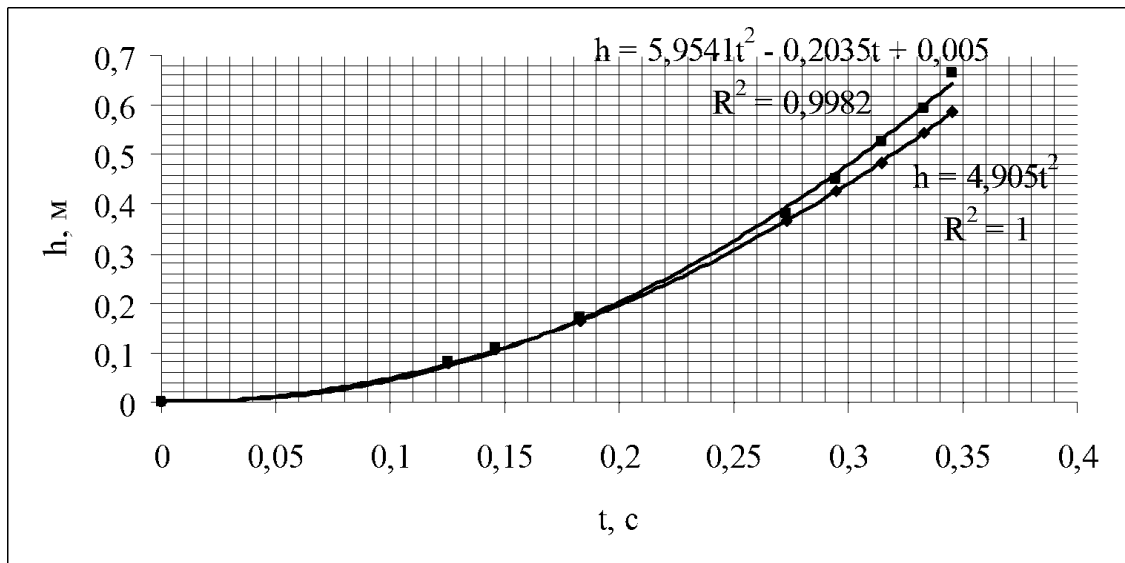


Рис. 3.17. Графіки руху кульки (2 г) діаметром 12 мм та ланцюга довжиною 1,05 м з кулькою (7 г) діаметром 12 мм (суцільна лінія)

Як видно з рис. 3.16 на дистанції 60 см вільно падаюча кулька відстає на 5 см від такої же кульки, прив'язаної до ланцюга, а з графіка на рис. 3.17 – прискорення кульки, прив'язаної до ланцюга, склало величину $a = 11,9 \text{ м/с}^2$.

Аналогічний експеримент був проведений з 6 г металеву кулькою діаметром 11,5 мм та пластмасовою кулькою масою 2 г діаметром 6 мм, прив'язаної до ланцюга, довжина якого до перегину була 36 см. Загальна маса пластмасової кульки та прив'язаної частини ланцюга до перегину була майже 4 г (рис. 3.18).

Отже, сталеву кульку мала в 1,5 разів більшу масу ніж пластмасова кулька з неспадаючою частиною ланцюга. Тим не менш, як видно з графіків руху кульок (рис. 3.19) на дистанції 60 см пластмасова кулька обігнала сталеву вільно падаючу кульку на 3 см, причому прискорення склало величину $a = 10,72 \text{ м/с}^2$.

Це повністю підтверджує теоретичні висновки п. 3.3.1-3.3.2, а саме: прив'язана до ланцюга кулька падає з прискоренням, більшим, ніж прискорення вільного падіння.



Рис. 3. 18. Фото падіння сталеві кульки (6 г) діаметром 11,5 мм та пластмасові кульки масою 2 г діаметром 6 мм, прив'язані до ланцюга, довжина якого до перегину була 36 см

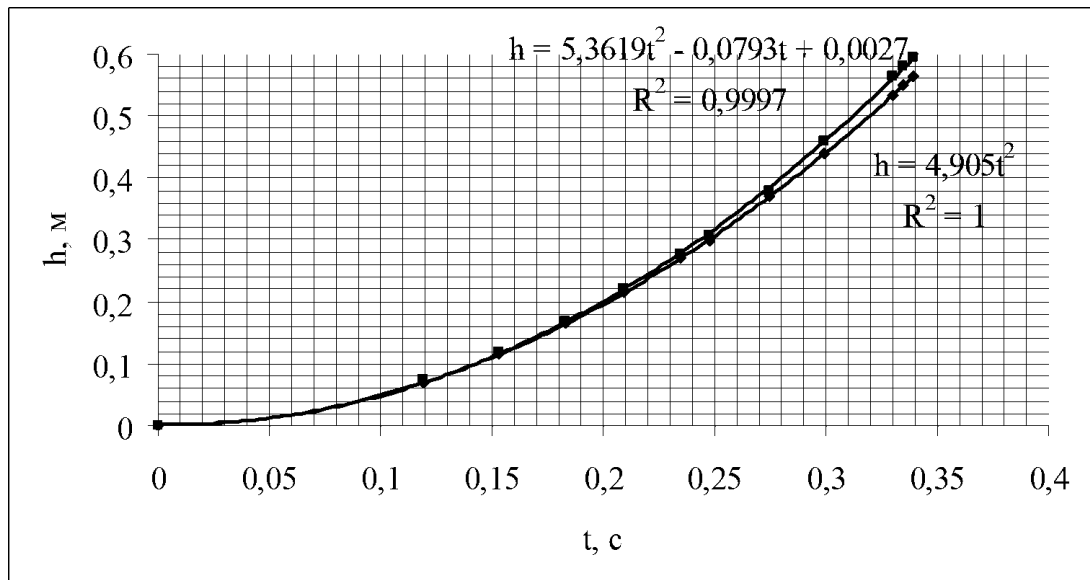


Рис. 3.19. Графіки руху сталеві кульки (6 г) діаметром 11,5 мм та пластмасові кульки масою 2 г діаметром 6 мм, прив'язані до ланцюга, довжина якого до перегину була 36 см

Особливо яскрава демонстрація того, що вільний кінець прив'язаного ланцюга довжиною L перегонить не прив'язаний ланцюг довжиною $L/2$ наведена на рис. 3.20.

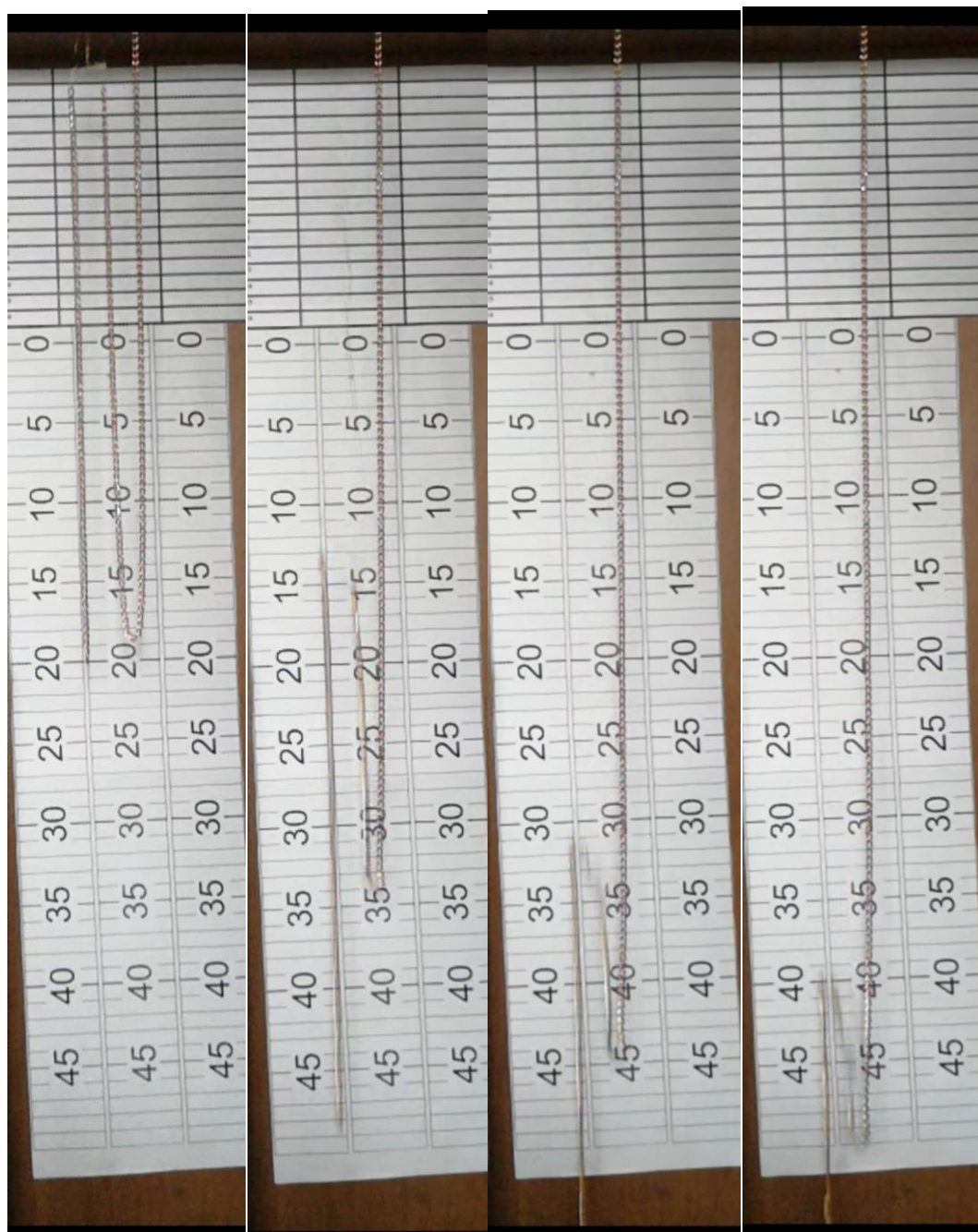


Рис. 3.20. Фази падіння вільного і прив'язаного ланцюжка

Коли верхній кінець вільного ланцюга пролетів шлях $h_1 = 38$ см, вільний кінець прив'язаного ланцюга був вже на відмітці $h_2 = 41$ см. Тобто відставання вільно падаючого ланцюга склало 3 см на дистанції 38 см. Прискорення вільного кінця прив'язаного ланцюга $a = \frac{h_2}{h_1} g$. Тобто, експериментальне значення $\frac{v}{v_{free}} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{41\text{см}}{38\text{см}} = 1,08$, коли $\frac{y}{L} = \frac{41}{68} = 0,6$. Теоретичне значення,

отримане з рівняння (11), повинно бути $\left(\frac{v}{v_{free}}\right)^{теор} = 1,32$, що не узгоджується

з підходом, описаним в роботі [2].

В наступному досліді порівнювався рух вільно падаючої сталеві кульки діаметром 12 мм і ланцюга довжиною $L = 65$ см. Результати обробки сповільненого відео з частотою 240 кадрів в секунду наведені в табл. 3.3

Таблиця 3.3

Результати досліджень із «золотим» ланцюгом

h_2 , см	0	25	37	56	61
h_1 , см	0	24	34	46	51
$\frac{v}{v_{free}} = \frac{h_2}{h_1}$	0	1,04	1,09	1,22	1,2
$\frac{y}{L}$	0	0,385	0,57	0,86	0,94
$\left(\frac{v}{v_{free}}\right)^{теор}$		1,146	1,29	2,02	2,97

Отже, експериментальні значення $\left(\frac{v}{v_{free}}\right)^{експ}$ не узгоджується з $\left(\frac{v}{v_{free}}\right)^{теор}$

отриманим з рівняння (3.26), наведеним в роботі [17].

Збільшимо довжину елементарної ланки ланцюжка. Результати експериментів

наведено в табл. 3.4. Експериментальні значення $\left(\frac{v}{v_{free}}\right)^{експ}$ і в цих

експериментах не узгоджуються з теоретичними. Пояснення цьому факту може лежати в площині впливу сил опору руху ланцюжку. Але проведені досліді порівняння руху сталеві кульки і відрізка ланцюжка у вільному падінні довели, що рухаються вони з однаковою швидкістю. Тобто впливом опору повітря в даному випадку можна знехтувати і пояснення треба шукати в недоліках теоретичного опису процесу руху ланцюжка або вадам постановки експериментів.

Таблиця 3.4

Результати досліджень із «срібним» ланцюжком

$h_2, \text{ см}$	43	36	27
$h_1, \text{ см}$	38	32	24,5
$\frac{\vartheta}{\vartheta_{free}} = \frac{h_2}{h_1}$	1,131	1,125	1,1
$\frac{y}{L}$	0,614	0,514	0,386
$\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_{free}}\right)^{теор}$	1,34	1,24	1,146

РУХ СНІГОВОЇ КУЛІ, ЯКА КОТИТЬСЯ З ГОРИ

Методичні особливості викладання теми «Рух тіл зі змінною в часі масою» особливо яскраво можна пояснити на прикладі нібито простої проблеми — руху снігової кулі, яка котиться зі снігового схилу, накопичуючи масу під час руху. Нефізичне наближення в роботі [3] полягає в тому, що поперечний переріз кулі завжди залишається круглим (це означає, що сніг рухається зі схилу та миттєво розподіляється по всій поверхні об'єкта, що котиться, таким чином миттєво набуваючи кінетичної енергії, імпульс та кутовий момент). Покажемо, разом з [39], що це припущення призводить до різних рівнянь руху. Доведення цього твердження будемо проводити за допомогою аналізу крутного моменту щодо центру мас уявного снігового циліндра та його лінії контакту зі схилом, а також різних рівнянь, заснованих на збереженні енергії та лагранжіана.

По-друге, розглянемо питання: чи має рух простий, асимптотичний (граничний) характер? Тобто, чи наближається прискорення снігової кулі до якого постійного значення?

Але досліджувати ми будемо, як фізичну модель, не снігову кулю, а сніговий циліндр. Справа в тому, що куля сама по собі, без участі людини, не стане сферичною, коли вона котиться з гори і накопичує сніг, тому, краще розглянути снігову колоду, циліндр, що ближче до спостережень людини. Однак, принципова методична складність опису процесу кочення в [3] залишається в тому, що, ні колода, яка котиться, ні сфера не є суворо циліндричною або сферичною, оскільки накопичує сніг. Ця здавалося б невелика проблема, як виявляється, має наслідком те, що можна знайти різні рівняння руху, якщо використовувати аналіз сили та крутного моменту, як у

роботі [3], або енергетичний аналіз, як у роботі [39]. Фактично, проблема недостатньо чітко визначена за цим припущенням для знаходження єдиного аналітичного рішення – різні, мабуть, обґрунтовані підходи, дають різні формули під час розв’язку таких проблем із змінною масою.

Ще одним наслідком цієї асиметрії форми є те, що прискорення сніжної кулі ніколи не стає рівномірним; з часом коливається приблизно на постійному рівні. Причому величина прискорення в роботі [39] схожа на знайдену в роботі [3], але не зовсім така, як у аналізах, проведених в [3]. Для більш точного визначення величини прискорення потрібно розглядати рух снігового циліндра під час першого та наступних повних обертів кочення.

4.1. Визначення швидкості накопичення маси сніговим циліндром

Розглянемо циліндр, який скочується вниз по схилу під кутом α до горизонталі, вкритий шаром снігу завтовшки b , як показано на рис. 4.1.

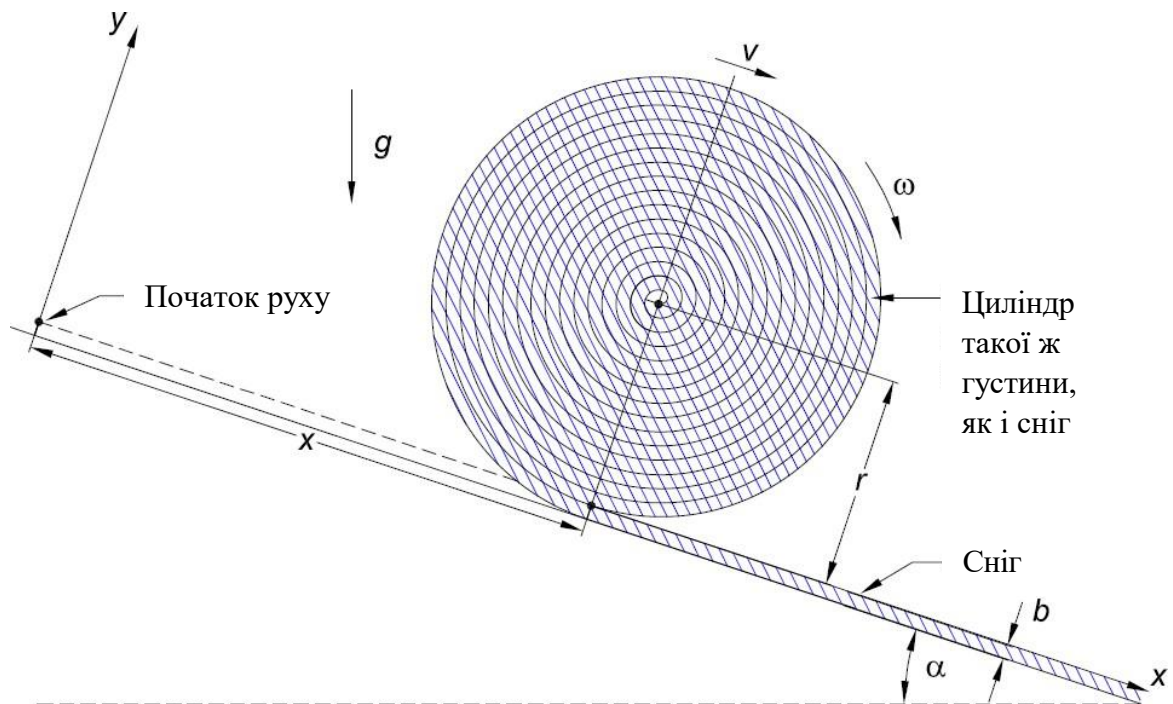


Рис. 4.1. Розрахункова схема скочування снігового циліндра з гори

Циліндр (з масовою густиною ρ , такою ж, як і у снігу) накопичує весь сніг, з яким він стикається, без втрати енергії на можливе ущільнення снігу (ще одне припущення). Таким чином, форма циліндра не зовсім кругла, але привабливим наближенням є те, що циліндр весь час залишається круглим із радіусом $r(t)$. У цьому наближенні маса циліндра довжиною l дорівнює $m = \rho\pi r^2 l$, а швидкість накопичення маси дорівнює:

$$\frac{dm}{dt} = 2\pi\rho r l \frac{dr}{dt} = \rho b l v = \frac{mbu}{\pi r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{bu}{2\pi r} = \frac{\omega b}{2\pi} \quad (4.1)$$

де $v = dx/dt$ — швидкість центру циліндра вниз по схилу, а $\omega = v/r$ — кутова швидкість циліндра.

4.2. Визначення рівняння руху снігового циліндра

Компонента сили F_x , паралельна схилу і напрямлена вгору, пов'язана з x -компонентою імпульсу $p_x = mv$, наступним чином:

$$mg \sin \alpha - F_x = \frac{dp_x}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt} + \frac{mbu}{\pi r^2} \frac{dr}{dt} \quad (4.2)$$

де g — прискорення сили тяжіння.

Крутний момент по відношенню до центру мас циліндра дорівнює:

$$\begin{aligned} rF_x = \tau &= \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = \frac{d(mrv/2)}{dt} = \frac{rv}{2} \frac{dm}{dt} + \frac{mv}{2} \frac{dr}{dt} + \frac{mr}{2} \frac{dv}{dt} = \\ &= \frac{mbu^2}{2\pi r} + \frac{mbu^2}{4\pi r} + \frac{mr}{2} \frac{dv}{dt}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

в наближенні, що момент інерції циліндра відносно його осі дорівнює $I = mr^2/2$.

Поєднання рівняння (4.2) і (4.3) дає рівняння руху:

$$\frac{3m}{2} \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - \frac{7mbu^2}{4\pi r^2}.$$

Отже, прискорення руху циліндра дорівнює:

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{2g}{3} \sin \alpha - \frac{7bu^2}{6\pi r^2}. \quad (4.4)$$

Накопичення снігу на відстані x збільшує радіус циліндра від r_0 до r . Тоді площа поперечного перерізу циліндра стане:

$$\pi r^2 = \pi r_0^2 + bx.$$

При заміні змінних: $u = v^2 = \dot{x}^2$,

$$2a = 2\ddot{x} = \frac{\dot{u}}{\dot{x}} = \frac{du}{dx} = \frac{4g}{3} \sin \alpha - \frac{7bu^2}{3(\pi r_0^2 + bx)}$$

Цей вираз можна проінтегрувати, щоб отримати:

$$u = \dot{x}^2 = \frac{4g}{5b} \sin \alpha (\pi r^2 + bx) + \frac{C}{(\pi r_0^2 + bx)^{7/3}},$$

чия похідна за часом дає нам вираз для визначення прискорення:

$$a = \frac{g}{5} \sin \alpha - \frac{7bC}{3(\pi r_0^2 + bx)^{10/3}},$$

що переходить до постійного значення $(g/5) \sin \alpha$ для великих x .

А зараз знайдемо рівняння крутного моменту відносно лінії контакту циліндра зі схилом, яка миттєво перебуває у спокої. Тоді

$$\begin{aligned} rmg \sin \alpha = \tau_c = \frac{dL_c}{dt} &= \frac{d(I_c \omega)}{dt} = \frac{d(3mr^2 v/2)}{dt} = \frac{3rv}{2} \frac{dn}{dt} + \frac{3mv}{2} \frac{d}{dt} + \frac{3mr}{2} \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{3mbu^2}{2\pi r} + \frac{3mbu^2}{4\pi r} + \frac{3mr}{2} \frac{du}{dt} \end{aligned} \quad (4.5)$$

зауваживши, що момент інерції відносно точки дотику $I_c = I + mr^2 = 3mr^2/2$.

Отже, отримане рівняння руху (без необхідності враховувати силу на лінії контакту), дорівнює:

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{2g}{3} \sin \alpha - \frac{3bu^2}{2\pi r^2}. \quad (4.6)$$

Як видно, два рівняння руху, (4.4) і (4.6), відрізняються, що доводить нам те, що попередній аналіз не є достатньо точним.

У межах відсутності снігу на схилі, $b \rightarrow 0$, обидва рівняння руху дають добре відомий результат, що прискорення суцільного циліндра, який котиться без ковзання вниз по схилу під кутом α , становить

$$a = \frac{2g}{3} \sin \alpha. \quad (4.7)$$

Це вказує на правильність напрямку нашого аналізу, але вказує на наявність нюансів. І якщо поправка на прискорення у випадку схилу товщиною b пропорційна цій товщині, але не залежить від g , тоді аналіз розмірності говорить нам, що поправка повина бути пропорційна bv^2/r^2 . Таким чином, завдання успішного аналізу руху полягає в тому, щоб визначити числовий коефіцієнт цього члена рівняння, що, очевидно, не вдається переконливо зробити при аналізі крутного моменту.

Інший, енергетичний аналіз, проведений в роботі [39], базувався на припущенні, що енергія не розсіюється накопиченням снігу на циліндрі, що котиться, або опором повітря. Отримане рівняння руху:

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{2g}{3} \sin \alpha - \frac{bu^2}{2\pi r^2} - \frac{gb}{\pi r} \cos \alpha, \quad (4.8)$$

не узгоджується з обома рівняннями (4.4) і (4.6), за винятком межі відсутності снігу, $b \rightarrow 0$. Зверніть увагу на вигляд у рівнянні (4.8) члена, пропорційного gb/r , який не виник під час аналізу крутного моменту.

Виведення в роботі [39] рівняння руху методом Лагранжа:

$$\frac{du}{dt} \left(1 + \frac{b^2}{6\pi^2 r^2}\right) = \frac{2g}{3} \sin \alpha - \frac{bu^2}{\pi r^2} - \frac{gb(3rb+b^2)}{3\pi r} \cos \alpha, \quad (4.9)$$

відрізняється від рівняння (4.4), (4.6) і (4.8), хоча всі чотири рівняння узгоджуються в межі, коли $b \rightarrow 0$.

Отже, виявляється, що не тільки снігова куля, але і наближення круглого снігового циліндра, який котиться по сніговому схилу, не призводить до узгодженого рівняння руху (табл. 4.1).

Таблиця 4.1

Результати визначення прискорення руху тіл зі снігу

Робота	Прискорення	Об'єкт
[3]	$a(t) = \frac{5g}{7} \sin \alpha - \frac{23bv^2}{14\pi r^2}$	Куля

[3]	$a(t) = \frac{2g}{3} \sin \alpha - \frac{7bv^2}{6\pi r^2}$	Циліндр
[39]	$a(t) = \frac{2g}{3} \sin \alpha - \frac{7bv^2}{6\pi r^2}$	Циліндр
[39]	$a(t) = \frac{2g}{3} \sin \alpha - \frac{3bv^2}{2\pi r^2}$	Циліндр
[39]	$a(t) = \frac{2g}{3} \sin \alpha - \frac{bv^2}{2\pi r^2} - \frac{gb}{\pi r} \cos \alpha$	Циліндр
[39]	$a(t) = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{6\pi^2 r^2}} \left[\frac{2g}{3} \sin \alpha - \frac{bv^2}{\pi r^2} - \frac{gb(3rb + b^2)}{3\pi r} \cos \alpha \right]$	Циліндр
[40]	$a(r) = \frac{g}{6} \sin \alpha \left[1 + \frac{23}{7} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{60/7} \right]$	Куля

СВІЧКОВА ГОЙДАЛКА

Якщо в попередніх розділах ми розглядали системи зі змінною масою, які рухалися вздовж однієї лінії, то в цьому розділі ми наведемо приклад системи, яка за рахунок зміни маси коливається.

5.1. Постановка досліду, аналіз джерел інформації

“Свічку проколюємо голкою в поперечному напрямку біля її центру мас [42] і врівноважуємо її між двома винними келихами” (див. рис. 5.1) – так раніше демонструвалася магія свічкової гойдалки.



Рис. 5.1. Свічка-гойдалка з вирізаними паперовими вершиками від La Science Amusante (посил. [42]). Хоча райдери є необов’язковими, вони не можуть бути виключно декоративними

Свічка, збалансована між двома опорами з низьким коефіцієнтом тертя, під час горіння з обох кінців асиметрично капатиме і почне коливатися, як гойдалка; причому ці коливання зростають у часі. Дослідження такої системи, проведене в роботі [41], показало, що свічка не вагається квазістабільно, поки центр мас не буде знижений симетричним плавленням кожного її кінця, створюючи фізичний маятник з чітко визначеним характерним періодом. Додаткове асиметричне капання нижче горизонтальної площини надає руху маятнику, що призводить до лінійного зростання амплітуди. Випуск краплі стає синхронізованим по фазі з коливальним рухом свічки.

Перші письмові згадки про свічкові гойдалки, або *moteur stearique*, датуються дев'ятнадцятим сторіччям [42–44], і ефект був включений великим Гаррі Гудіні у його посмертну книгу салонних фокусів [45]. Мартін Гарднер описав це як «Трюк з the Month» у *The Physics Teacher* [46], а пізніше в *Magic Magazine* [46, 47]. Не счуває інтерес до цієї теми і зараз. У роботі [48] за 2016 рік дослідження показали, що система потенційно стає хаотичною при високій амплітуді. Сучасні роботи пропонують кілька пояснень ефекту.

Основне питання, яке виникає: за рахунок чого здійснюються ці коливання? Невже невелика краплина воску, яка залишає кінчик свічки, керує маленькою машиною. Але чи так це? Чи достатня різниця у вазі?

Розглянемо аналітичну модель цього процесу для малих кутів, яка передбачає максимальну швидкість зростання коливань, коли швидкість крапель відповідає частоті гойдання. Все це дозволить внести пропозиції методичного характеру для демонстратора коливань свічкової гойдалки.

5.1.1. Фізика процесу

Довга циліндрична свічка масою $2M_0$, радіусом r і довжиною $2R_0$ коливається у вертикальній площині навколо горизонтальної осі. Якщо вісь

проходить через центр маси, відновлення крутного моменту не відбувається; за відсутності тертя свічка може вільно обертатися необмежено довго з постійною швидкістю, якщо задана початкова кутова швидкість. Коли свічка запалюється з обох кінців і відпускається в стані спокою, свічка капає хаотично, без коливань, танучи й видовбуючи частину воску над осьюовою центральною лінією біля будь-якого гнота. Це початкове плавлення створює характерну форму, приблизно трапецію, як видно на профілі рис. 5.2, зменшує загальну масу до $2M$, скорочує циліндричний поперечний переріз свічки до довжини $2R$ і опускає центр маси на відстань $a = a_0$ нижче центральної лінії свічки, що дозволяє системі поводитися як фізичний маятник.

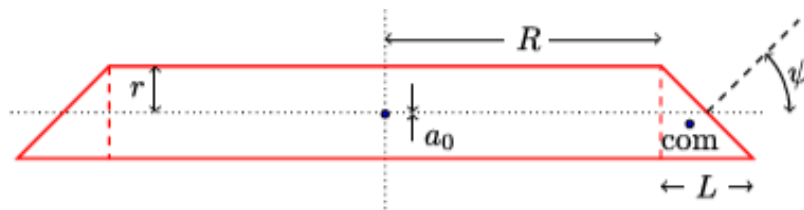


Рис. 5.2. Профіль свічки половинної довжини $R = 6r$, і $L = 2r$ після початкового плавлення. Точка, позначена «com», є центром маси похилої частини з основою L і кутом ψ . Таким чином, центр мас усієї свічки лежить на відстані $a = a_0$ нижче центру нерозплавленої свічки

Якщо свічка неправильно збалансована ліворуч/праворуч, обидва кінці розтануть, але швидша швидкість крапання нижнього кінця змушує свічку врівноважити себе протягом кількох хвилин. Якщо гноти тепер погасити, розплавлена свічка утворює фізичний маятник з моментом інерції $2I$, де

$$I = \frac{MR^2}{3} + \frac{MR^2}{4} + I_{\text{скошений кінець}} \quad (5.1)$$

Отже, свічка коливається в межах невеликого кута з власною частотою:

$$\omega = \sqrt{\frac{2Mga}{2I}}, \quad (5.2)$$

де a — центр мас гойдалки.

Якщо свічку проткнути через хорду, довжина якої менша за її діаметр, що призводить до швидшого коливання, маючи незначний вплив на I , за умови, що $R \gg r$. Коли обидва гноти запалюються повторно, свічка крапає більш-менш рівномірно з обох кінців, але система розвивається до режиму, коли краплі переважно відходять від нижнього гноту, що призводить до коливань із зростаючою амплітудою. Завдяки чашеподібній формі біля гнотів, краплі мають тенденцію вивільнятися, коли гноти знаходяться нижче горизонталі, поблизу найнижчих точок. За синхронних умов ($\omega_d \approx \omega$, де швидкість утворення розплавленого воску приблизно відповідає частоті коливань гойдалки), одна крапля воску масою m стікає з нижнього гноту за кожену половину циклу руху свічки, близько до найнижчої точки.

Під час аналізу сил або крутних моментів, що діють на систему, необхідно чітко ідентифікувати об'єкт дослідження. Можна вважати системою свічку плюс віск, який падає; альтернативно можна розглядати свічку, що залишилася, як систему, а віск, який збирається впасти, розглядати поза системою, тобто краплі, що тануть, розглядаються як зовнішні по відношенню до системи. Останній випадок – це те, що ми будемо досліджувати. Це робиться цикл за циклом, даючи карту амплітуди для повного циклу, який інтерпретується як диференціальне рівняння. Припускаємо, що довжина свічки мало змінюється порівняно з її загальною довжиною протягом розглянутого часу та коли всього одна крапля відлітає від кожного гнота під час одного коливання: Припустимо також, що зростання амплітуди в одному циклі невелике, тому свічка коливається з амплітудою θ_0 ($\theta = 0$) із загальною енергією $\frac{1}{2}(2I)\omega^2\theta_0^2$. Ми починаємо наш цикл з $\theta = \theta_0$. Ми припускаємо також однаковий випуск маси m справа і зліва на кожному циклі. Коли маса m вивільняється, система стає незбалансованою, переходячи від надлишкової маси $m/2$ праворуч до надлишкової маси $m/2$ ліворуч, і цей процес повторюється. Щоб ізолювати краплі, які будуть вилітати з системи,

ми починаємо з початкової амплітуди θ_0 з масою $3m/2$ праворуч і m ліворуч, що призводить до середнього крутного моменту за годинниковою стрілкою $\frac{mg}{2} (R + \frac{L}{2})$. Цей крутний момент рухає свічку в напрямку $-\theta_0$, після чого права крапля m вивільняється, створюючи крутний момент проти годинникової стрілки такої ж величини. Через дисбаланс крутного моменту $\frac{mg}{2} (R + \frac{L}{2})$, коли свічки обертаються від $\theta_0 = 0$ до $\theta = \theta_0$, середня робота $\frac{mg}{2} (R + \frac{L}{2})\theta_0$ виконується над рештою коливальної системи. Подібним чином, коли θ змінюється від $-\theta_0$ до θ_0 , ліва крапля виконує над системою додаткову роботу $\frac{mg}{2} (R + \frac{L}{2})\theta_0$. Ми припускаємо, що протягом періоду I та a залишаються постійними, і що в середньому система знаходиться в рівновазі. Враховуючи кінетичні втрати на тертя протягом циклу, $4\mu_k W r_a \theta_0$, [49] з W вагою гойдалки (рис. 5.3), сумарна енергія, що доставляється для коливання свічки дорівнює:

$$2mg (R + \frac{L}{2}) \theta_0 - 4\mu_k W r_a \theta_0, \quad (5.3)$$

де μ_k – коефіцієнт кінетичного тертя, r_a – радіус осі.

Протягом цього циклу амплітуда зростає $\theta_0 \rightarrow \theta_0 + \Delta\theta_0$, тому механічна енергія збільшується на

$$\Delta E \cong 2I\omega^2\theta_0\Delta\theta_0, \quad (5.4)$$

де $\Delta\theta_0$ – мала зміна амплітуди для одного циклу. Прирівнювання сумарної енергії, що постачається краплями, що відлітають, до зміни загальної енергії системи означає, що

$$2mg (R + \frac{L}{2}) \theta_0 - 4\mu_k W r_a \theta_0 = 2I\omega^2\theta_0\Delta\theta_0. \quad (5.5)$$

Для простоти позначення ми визначимо

$$\eta = \frac{\mu_k W r_a}{\pi I}. \quad (5.6)$$

Виражаючи цю зміну енергії як плавну зміну протягом повного періоду коливання ($T = \frac{2\pi}{\omega}$), швидкість зростання амплітуди стає рівним:

$$\theta_0 = \frac{mg(R + \frac{L}{2})}{2\pi I \omega} - \frac{\eta}{\omega} \quad (5.7)$$

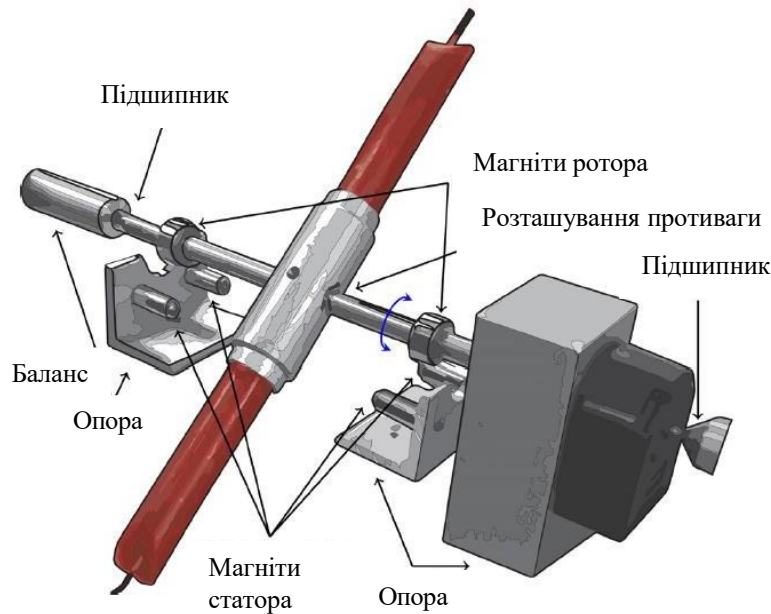


Рис. 3. Експериментальна установка, що показує тримач для свічки та вал, закріплений між двома голчастими підшипниками. Пасивні магніти ротора та статора зменшують тертя ковзання в підшипниках, витримуючи більшу частину ваги гойдалки, тоді як безконтактний датчик обертання дозволяє вимірювати кут повороту в реальному часі. Невеликий сталевий гвинтовий противаг, вставлений у різьбовий отвір у нижній частині поперечини, опускає центр ваги гойдалки, тим самим регулюючи частоту коливань

Зауважте, що ця прогнозована швидкість зростання припускає, що краплі в середньому відриваються біля нижньої частини руху з кожного боку, так що виконана робота є максимальною. Якщо більше однієї краплі відлітає з кожного боку, кожна з них не матиме $\theta_0 = 0$, отже, вони підуть з деякою кінетичною енергією, і передбачувана швидкість зростання буде дещо меншою.

Можна очікувати додаткової залежності m від амплітуди, що призведе до експоненціального зростання коливань. Проте ми в дослідах спостерігаємо лише лінійне зростання. Середня швидкість плавлення свічок однакова незалежно від того, тримають їх горизонтально чи вона коливається. Початкове плавлення для досягнення балансу ліворуч/праворуч дійсно залежить від кута, але відбувається протягом занадто тривалого часу, щоб вплинути на коливальний рух. Цей висновок передбачає, що система вже коливається. На практиці початковий рух забезпечується випадковим виділенням воску з одного кінця перед іншим.

Випадок із синхронним приводом, коли швидкість утворення розплавленого воску така, що горизонтальна швидкість падіння θ_0 відповідає власній частоті ω_d коливань гойдалки, найпростіше ілюструє механізм, оскільки краплі відлітають у найнижчій точці, і, таким чином, крутний момент забезпечується крапля, що відлітає, виконує роботу над найбільшим можливим кутом ω . З іншого боку, якщо центр маси a зменшується так, що дві або більше крапель відриваються з кожного боку під час циклу, системі може знадобитися скинути краплі до та після найнижчої точки. Регулюючи a , щоб отримати дві краплі на сторону, припускаючи, що краплі все одно відходять близько до дна, і зберігаючи I та R постійними, рівняння (5.7) показує, що якщо $m \rightarrow 2m$ як $\omega \rightarrow \omega/2$, за відсутності тертя ми очікуємо, що темп зростання в чотири рази перевищує швидкість синхронного випадку.

Отже, висновки, які ми можемо зробити такі: крутний момент для свічкової гойдалки виникає внаслідок роботи, яку виконують краплі, коли вони проходять шлях від твердого воску в горизонтальному положенні до розплавлених крапель, які вивільняються нижче горизонталі. Ми проаналізували швидкість росту за допомогою простої моделі, яка враховує, скільки маси відходить протягом кожного пів циклу. Ця модель враховує лише фіксовану середню швидкість танення, не залежну від кута, оскільки

вимірювання показали, що будь-яке залежне від кута крапання відбувається за часовий масштаб, який набагато повільніший, ніж типовий період гойдалки. Енергія для руху забезпечується різницею в гравітаційному потенціалі між початковим горизонтальним положенням крапельних мас і точками їх вивільнення нижче горизонталі центру мас системи.

Рух свічки та час вивільнення краплі вказують на те, що краплі стають синхронізованими по фазі до домінуючого руху гойдалки.

Вимірювання швидкості росту амплітуди коливань для синхронного випадку, де швидкість отримання крапель відповідає частоті коливань гойдалки, як показали результати дослідів, проведених з установкою, що зображена на рис. 5.3 [49], підтверджують прогнози аналітичної моделі.

Джерелом рушійної сили є механічна енергія, що надається гойдалці відлітаючими краплями, приблизно так, як працює водяне колесо. Горіння не приводить в рух свічку; втрата гравітаційної потенціальної енергії воску робить це. Вивільнення гравітаційного потенціалу є джерелом енергії свічкової системи. Робота, виконана відлітаючими краплями над рештою свічки, забезпечує необхідну потужність для приводу та підтримки коливань. «Дрібних» змін ваги справді достатньо, щоб викликати нестабільність свічкової системи.

Висновки

Досліджено рух систем зі змінною в часі масою у світі методичних особливостей викладання цієї теми. Це інший клас задач ніж ті задачі, які розв'язуються в класичній механіці, де маса майже завжди постійна. До задач зі змінною в часі масою відноситься реактивний рух, машина Атвуда зі змінною масою, ланцюги, які рухаються в гору або падають зі стану спокою, снігові кулі, які набирають масу під час скочування з гори, свічки-гойдалки, які втрачають масу під час горіння і багато інших.

На прикладах з теорії та практики показана широка палітра незвичайних задач, які на різних рівнях висвітлюють закономірності руху таких тіл, та методика навчання цієї теми.

Список використаних джерел

1. Здешиц В.М., Здешиц А.В., Черних А. Розробка та методичний супровід фронтальної лабораторної роботи з фізики “Петльовий маятник”. *Фізико-математична освіта*. 2020. Випуск 1 (23). Частина 2. с. 31-38.
doi 10.31110/2413-1571-2020-023-1-2-005
2. Zhou Yu-bo, Yang Ming-duo, Zhang Min, Fan Dai-he, Liu Qi-jun, Chang Xiang-hui, Jia Xin-yan, Wei Yun. Research on the looping pendulum phenomenon. *European Journal of Physics*. 2020. Vol. 41. P. 1-16.
doi: 10.1088/1361-6404/ab5e68
3. Rubin S. A. Variable-mass snowball rolling down a snowy slope. *The Physics Teacher*. 2019. Vol. 57, P. 150-152. <https://doi.org/10.1119/1.5092471>
4. openstax.org/details/books/university-physics-volume-1
5. Thomas B., Greenslade Jr. Atwood’s machine. *The Physics Teacher*. 1985. Vol. 23, p. 24.
6. Tipler B., Paul A. Physics for scientists and engineers, third edition, extended version. New York: Worth publishers. ISBN 0-87901-432-6. Chapter 6, example 6-13, p. 160.
7. McDermott L., Shaffer P., Somers M. Research as a guide for teaching introductory mechanics: An illustration in the context of the Atwood’s machine. *Am. J. Phys.* 1994, Vol. 62, P. 46–55.
8. Charles T., Wang P. The improved determination of acceleration in Atwood’s machine. *Am. J. Phys.* 1973. Vol. 41, P. 917–919.
9. Monteiro M., Stari C., Cabeza C., Marti A. The Atwood machine revisited using smartphones. *The Physics Teacher*. 2015, Vol. 3, P. 373–374.
10. Lopez D., Caprile I., Corvacho F., Reyes O. Study of a variable mass Atwood’s machine using a smartphone. *The Physics Teacher*. 2018, Vol. 56, 3, P. 182-183.

11. Yersel M. The flow of sand. *The Physics Teacher*. 2000, Vol. 38, 5, P. 290–291.
12. Flores J., Solovey G., Gil S. Flow of sand and a variable mass Atwood machine. *Am. J. Phys.* 2003. Vol. 71, P. 715–720.
13. Кучерук І. М., Горбачук І. М., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Т. 1 : Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. К. : Техніка, 1999. 536 с.
14. Mungan C., Lipscombe T. Vertical launch of a grappling hook. *The Physics Teacher*. 2022. Vol. 60, P. 327-331. <https://doi.org/10.1119/5.0030313>
15. Богданов С. Як швидше падати? Квант. 2012, №1, С. 16-23.
16. Mungan C. Newtonian analysis of a folded chain drop. *The Physics Teacher*. 2018. Vol. 56, p.295.
17. Tomaszewski W., Pieranski P., Géminard J.-C. The motion of a freely falling chain tip. *Am. J. Phys.* 2006, Vol. 74, P. 776–783.
18. Thornton S., Marion J. Student solutions manual for thornton/ Marion's classical dynamics of particles and systems, 5th ed. BrooksCole, Belmont, CA, 2004, p. 290.
19. Miller J., J. Satterly. Falling chains. *Am. J. Phys.* 1951. Vol. 19, P. 383–384.
20. Schagerl M., Steiner W., H. Troger. On the paradox of the free folded chain. *Acta Mech.* 1997, P. 155–168.
21. Géminard J.-C., Vanel L. The motion of a freely falling chain tip: force measurements. *Am. J. Phys.* 2008, Vol. 76, P. 541–545.
22. Wong, C., Yasui K. Falling chains. *Am. J. Phys.* 2006, Vol. 74, P. 490-496.
23. Wong C., Youn S., Yasui K. The falling chain of Hopkins, tait, steele and cayley. *Eur. J. Phys.* 2007, Vol. 28, P. 385-400.
24. Tiersten M. Force, momentum change, and motion. *Am. J. Phys.* 1969, Vol. 37, P. 82-87.
25. Grewal A., Johnson P., A. Ruina. A chain that speeds up, rather than slows, due to collisions: How compression can cause tension, *Am. J. Phys.* 2011. Vol. 79, P.723–729.

26. Siegel S. More about variable mass systems. *Am. J. Phys.* 1972. Vol. 40, P. 183-185.
27. Galkin M. The dynamics of a falling chain: II. *Am. J. Phys.* 1989. Vol. 57, P. 157-159.
28. Prato, D., Gleiser R. Another look at the uniform rope sliding over the edge of a smooth table. *Am. J. Phys.* 1982, Vol. 50, P. 536-539.
29. Galkin, M., March, R. The dynamics of a falling chain. *Am. J. Phys.* 1989, Vol. 57. P. 154-157.
30. Kagan D., Kott A. The greater-than-g acceleration of a bungee jumper. *The Phys. Teacher.* 1996. Vol. 34, P. 368-373.
31. Коли точки A і O на рис. 1 знаходяться далеко одна від одної, ділянки AB і DE спочатку будуть точними контактними мережами [як у F. Behroozi, “In praise of the catenary,” *Phys. Teach.* 2018. Vol. 56, p. 214–217)] лише для рівномірного рядка, а не для ланцюжка з дискретними ланками.
32. Heck A., Uylings P., Kedzierska E. Understanding the physics of bungee jumping. *Phys. Educ.* 2010. Vol. 45, P. 63-72.
33. Heywood, W., Hurwitz H. Whip effect in a falling chain. *Am. J. Phys.* 1955. Vol. 23, P. 279-280.
34. Hooft G. Can there be physics without experiments? Challenges and pitfalls. *Int. J. Mod. Phys.* 2001. A 16, P. 2895-2908.
35. Chain Drop Answer 2, – Режим доступу до ресурсу: <https://www.youtube.com/watch?v=X-QFAB0gEtE>.
36. Чеснокова Д. А. Падіння тіл змінних мас: магістерська робота студентки фізико-математичного факультету групи ФІ-м-14 Д. А. Чеснокової; наук. керівник В. М. Здещиц. Кривий Ріг, 2019. 80 с.
37. Kirk T. McDonald. Snowball/log rolling down a snowy slopeю <http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/snowball.pdf>

38. Mungan C. Analytic solution for a variable-mass snowball. *The Physics Teacher*. 2019. Vol. 57, p.436; doi: 10.1119/1.5126815
39. Tjossem P., Case W., Bass R. The candle seesaw. *Am. J. Phys.* 2019. Vol. 87, P. 370–376. <https://doi.org/10.1119/1.5096886>
40. Tit T. La Science Amusante, 3e Serie: 100 Nouvelles Experiences (Librairie Larousse, Paris, 1893), P. 11–12.
41. Ehrlich R. Why toast lands jelly-side down (Princeton U.P., Princeton, 1997), P. 142–144.
42. Theodorakis S., Paridi K. Oscillations of a candle burning at both ends. *Am. J. Phys.* 2009. Vol. 77(11), P.1049–1054.
43. Houdini. Book of magic: fascinating puzzles, tricks and vysterious stunts (Whitman, Racine, WI, 1927), P. 164–165.
44. Gardner M. Physics trick of the month: the candle see-saw. *The Physics Teacher*. 1993. Vol. 31(6), p. 382.
45. Gardner M. The candle see-saw. *Magic Mag.* 1995. Vol. 4. P. 88.
46. Lee M., Byrne G., Fenton F. Chaotic dynamics of a candle oscillator. APS Meeting Abstracts. 2016.
47. Lapidus I. Motion of a harmonic oscillator with sliding friction. *Am. J. Phys.* 1970. Vol. 38, P.1360–1361.
48. Sousa C. A., Rodrigues V. H. Mass redistribution in variable mass systems. Departamento de Física da Universidade de Coimbra, P-3004-516 Coimbra, Portugal. 2003 p.
49. Tiersten M. Force, momentum change, and motion. *Am. J. Phys.* 1969. Vol. 37, P. 82-87.
50. Matolyak J., Matous G. Simple variable mass systems: Newton's second law. *The Physics Teacher*. 1990. Vol. 28, P. 328-329.
51. Sousa C. A. Nonrigid systems: mechanical and thermodynamic aspects. *Eur. J. Phys.* 2002. Vol. 23, P. 433-440.

Додаток А

Орієнтовна схема підготовки та проведення уроку, присвяченого проведенню лабораторної роботи з теми: «Рух тіл зі змінною в часі масою» в профільній школі [1]

1. Довести до учнів тему уроку: «Рух тіл зі змінною в часі масою», його місце в загальній системі уроків.
2. Визначити цілі уроку, навчальні, розвивальні і виховні завдання уроку.
3. Перевірити наявність і готовність обладнання та приладів до уроку, комплектність устаткування.
4. Перевірити підготовку учнів до виконання лабораторної роботи: попереднього домашнього завдання, підготовленості учнів.
5. Провести:
 - бесіду перед роботою з вказівкою всіх дій щодо виконання і оформлення роботи;
 - бесіду, інструктаж на протязі всього часу виконання роботи;
 - покрокове виконання підготовленої картки-інструкції.
6. Організувати роботу учнів: спостереження і виконання дослідів за інструкцією.
7. Вести облік питань учнів щодо змісту та оформлення роботи.
8. Підготувати завдання для 1-4 рівнів опанування навчальним матеріалом.
9. Провести самоаналіз: чи включає лабораторна завдання проблемного, пошукового, дослідницького характеру?

10. Підготувати додаткові експериментальні завдання з урахуванням нахилів учнів. Залучати учнів до самостійного складання експериментальних завдань.
11. Підвести підсумки уроку. Провести аналіз виконаної лабораторної роботи. Довести учням коли і як вони оформляють роботу, як обчислювати похибки, яким способом.
12. Довести учням зміст і своєчасність домашнього завдання, його обсяг, як враховуються і оцінюються їх практичні вміння та навички.
13. Зробити загальну самооцінку підготовки та проведення уроку.

1. Шарко В.Д. Курсові роботи з методики навчання фізики: методичні рекомендації з підготовки і написання. Херсон: Видавництво ХДУ, 2016. 36 с.

Додаток Б

Фото таблиці Excel з розрахунками залежності висоти підйому кульок від часу

