

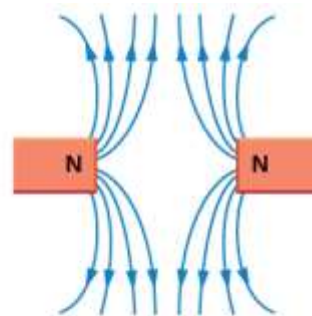
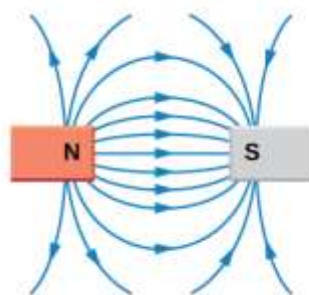
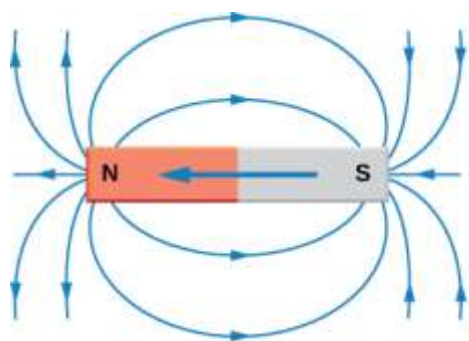


---

Університетська фізика

---

# МАГНЕТИЗМ



SENIOR CONTRIBUTING AUTHORS  
SAMUEL J. LING, TRUMAN STATE UNIVERSITY  
JEFF SANNY, LOYOLA MARYMOUNT UNIVERSITY  
WILLIAM MOEBS, FORMERLY OF LOYOLA MARYMOUNT  
UNIVERSITY

<https://openstax.org/details/books/university-physics-volume-2>

Переклад з англійської А. В. Здешиц

за редакцією В. М. Здешиц

Кривий Ріг  
КДПУ  
2024

Університетська фізика. Магнетизм: навчальний посібник. Переклад з англійської А.В. Здещиц за редакцією В. М. Здещиц. Кривий Ріг : Криворізький державний педагогічний університет, 2024. 220 с.

Рецензенти:

М. Слюсаренко, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри фізики та методики її навчання

Ю. Прихожа, доктор філософії PhD, ст. викл. кафедри фізики та методики її навчання

Викладено поняття і принципи електрики і магнетизма, застосування їх методів для визначення параметрів електромагнітного поля.

Посібник призначено для супроводу електронного навчального курсу дисципліни “Електрика і магнетизм” і використання під час самостійної роботи студентів педагогічних ЗВО.

Навчальний посібник затверджено на засіданні кафедри фізики та методики її навчання

«29» серпня 2024 р., протокол № 1.

Завідувач кафедри \_\_\_\_\_ Микола Слюсаренко

## Зміст

Вступ	5
<b>Розділ 1. Магнітні сили і поля</b>	6
1.1. Магнетизм і історія його відкриття	6
1.2. Магнітні поля і лінії	10
1.3. Рух зарядженої частинки в магнітному полі	15
1.4. Магнітна сила, що діє на струмоведучий провідник	21
1.5. Сила і крутний момент петлі зі струмом	27
1.6. Ефект Холла	30
1.7. Застосування магнітних сил і полів	34
<b>Розділ 2. Джерела магнітних полів</b>	40
Введення	40
2.1. Закон Біо-Савара	41
2.2. Магнітне поле тонкого прямого дроту	45
2.3. Магнітна сила між двома паралельними струмами	49
2.4. Магнітне поле петлі зі струмом	52
2.5. Закон Ампера	56
2.6. Соленоїди та тороїди	63
2.7. Магнітне поле в речовині	69
<b>Розділ 3. Електромагнітна індукція</b>	79
Введення	79
3.1. Закон Фарадея	80
3.2. Закон Ленца	84
3.3. ЕРС руху	90
3.4. Індуковані електричні поля	100
3.5. Вихрові струми	105
3.6. Електрогенератори та зворотна ЕРС	111
3.7. Застосування електромагнітної індукції	119
<b>Розділ 4. Індуктивність</b>	122
Введення	122
4.1. Взаємна індуктивність	127
4.2. Індуктивність і котушки індуктивності	127
4.3. Енергія магнітного поля	134
4.4. Схеми з $RL$ -елементами	137
4.5. Коливання в $LC$ -контурі	143
4.6. Схеми з $RLC$ -елементами	147
<b>Розділ 5. Кола змінного струму</b>	149
Введення	149
5.1. Джерела змінного струму	150
5.2. Прості кола змінного струму	152
5.3. $RLC$ -схеми зі змінним струмом	159

5.4. Живлення в колі змінного струму	164
5.5. Резонанс в колі змінного струму	168
5.6. Трансформатори	173
<b>Розділ 6. Електромагнітні хвилі</b>	179
Введення	179
6.1. Рівняння Максвелла і електромагнітні хвилі	180
6.2. Плоскі електромагнітні хвилі	188
6.3. Енергія, що переноситься електромагнітними хвилями	197
6.4. Імпульс і радіаційний тиск	203
6.5. Електромагнітний спектр	209

## Вступ

The OpenStax – некомерційна організація, що базується в Університеті Райса (США), місія якої — покращити доступ студентів до освіти. Підручники, створені OpenStax, є високоякісними навчальними матеріалами, які підтримують найвищі стандарти академічної вимогливості.

У перекладі тої частини книги “University Physics Volume 2”, яка стосується електромагнетизму, представлені його класичні ідеї та методи розв’язання задач. Саме у цій книзі розглядаються магнітні явища.

Більшість тем починаються з спостережень, які вносять ясність у предмет навчання та визначеність у проявах законів електромагнетизму. Приклади та зображення, що відкривають розділи, є сучасними проявами повсякденного життя або сучасної науки та техніки, з якими студенти мають безпосередній стосунок: від смартфонів до Інтернету та пристроїв GPS.

Ключові історичні постаті, їх ідеї та фундаментальні експерименти обговорюються, з акцентом на їх вплив на розвиток розуміння фізичної картини Всесвіту.

Вправи в розділах зазвичай складаються з трьох частин: стратегія, розв’язок та обговорення, щоб підкреслити, як підійти до проблеми, як працювати з рівняннями та як перевірити й узагальнити результат. Щоб студенти зрозуміли важливі ідеї прикладів за ними йдуть запитання.

Для практики у окремому підручнику “Збірник задач з електромагнетизму” студентам надаються вправи для кожного розділу, які складаються з:

- Концептуальних запитань, які не вимагають розрахунків, але перевіряють засвоєння студентом ключових понять.
- Задач, які перевіряють навички студентів розв’язувати проблеми та здатність застосовувати ідеї до практичних ситуацій.
- Додаткових задач, для розв’язку яких застосовуються отримані знання, змушуючи студентів визначати, які концепції та рівняння підходять для розв’язання заданих задач. У разі отримання необґрунтованих результатів, студентам пропонується надати відповідь, чому умови задачі є некоректними та які зроблені припущення можуть бути неправильними.
- Проблемних завдань, які поширюють ідеї електромагнетизму на цікаві складні ситуації.

## МАГНІТНІ СИЛИ І ПОЛЯ



Рис. 1.1. Промисловий електромагніт здатний підняти тисячі кілограмів металевих відходів

### 1.1. Магнетизм і історія його відкриття

Магнетизм відомий ще з часів древніх греків, але він завжди був трохи загадковим. Ви можете побачити електрику в спалаху блискавки, але коли стрілка компаса вказує на магнітну північ, ви не бачите жодної сили, яка змушує його обертатися. Люди дізнавалися про магнітні властивості поступово, протягом багатьох років, перш ніж деякі фізики дев'ятнадцятого століття пов'язали магнетизм з електрикою. У цьому розділі ми розглянемо основні ідеї магнетизму і опишемо, як вони вписуються в картину магнітного поля.

#### Коротка історія магнетизму

Магніти зазвичай зустрічаються в повсякденних предметах, таких як іграшки, вішалки, ліфти, дверні дзвінки та комп'ютерні пристрої. Експерименти над цими магнітами показують, що всі магніти мають два полюси: один позначений північним (N), а інший — південним (S). Магнітні полюси відштовхуються, якщо вони однакові (обидва N або обидва S), вони притягуються, якщо вони протилежні (один N, а інший S), і обидва полюси магніту притягують ненамагнічені шматки заліза. Важливим моментом, на який слід звернути увагу, є те, що ви не можете

отримати окремий магнітний полюс. Кожна частина магніту, якою б маленькою вона не була, яка містить північний полюс, повинна містити також південний полюс.

Прикладом магніту є стрілка компаса. Це просто тонкий стрижневий магніт, підвішений у центрі, тому він може вільно обертатися в горизонтальній площині. Сама Земля також діє як дуже великий магніт з південним полюсом поблизу географічного Північного полюса (рис. 1.2).

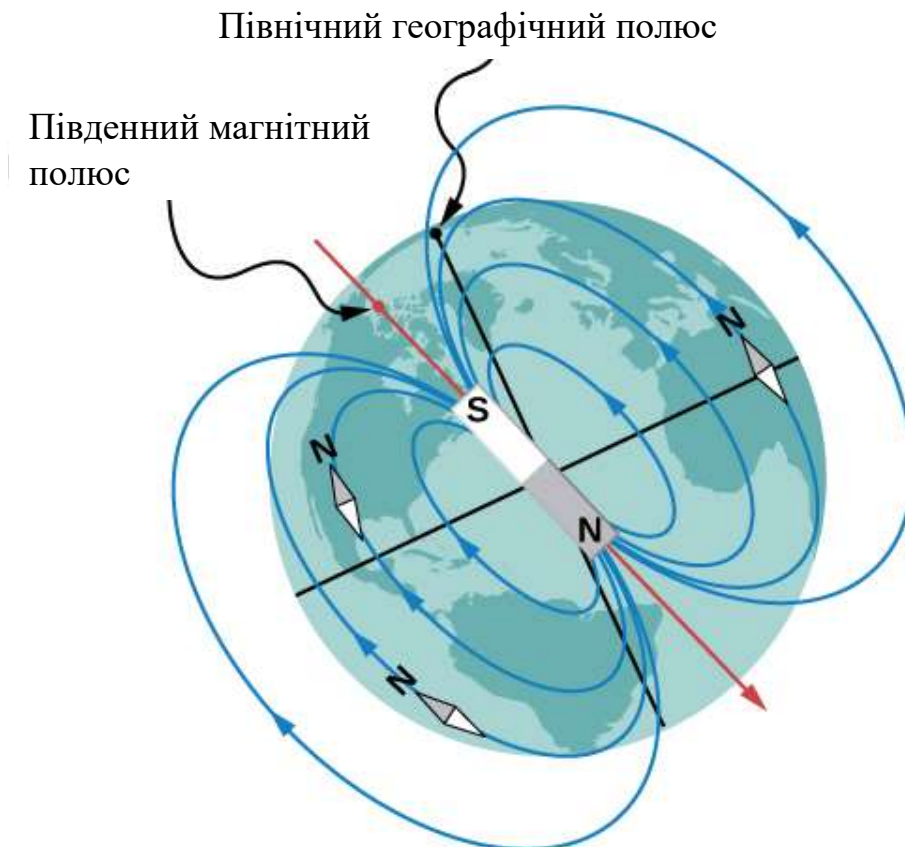


Рис. 1.2. Північний полюс стрілки компаса вказує на південний полюс магніту, саме так орієнтується сучасне магнітне поле зсередини Землі. Він також вказує на географічний Північний полюс Землі, оскільки географічний Північний полюс знаходиться поблизу магнітного південного полюса

Північний полюс компаса притягується до географічного Північного полюса Землі, тому що магнітний полюс, який знаходиться поблизу географічного Північного полюса, насправді є південним магнітним полюсом. Плутанина виникає через те, що географічний термін «Північний полюс» став використовуватися (неправильно) для магнітного полюса, який знаходиться поблизу Північного полюса. Таким чином, «**північний магнітний полюс**» насправді є неправильною назвою — його слід називати **південним магнітним полюсом**. [Зауважимо, що орієнтація магнітного поля Землі не постійна, а змінюється («перевертається») через тривалі



проміжки часу. Зрештою, північний магнітний полюс Землі може бути розташований поблизу її географічного Північного полюса.

Ще в **1819** році датський фізик Ганс Ерстед проводив лекцію для студентів і помітив, що стрілка компаса рухається щоразу, коли струм протікає в сусідньому дроті. Подальші дослідження цього явища переконали Ерстеда в тому, що електричний струм може якимось чином викликати магнітну силу. Він повідомив про цю знахідку на засіданні Французької академії наук у **1820** році.

Незабаром після цієї доповіді дослідження Ерстеда були повторені і розширені іншими вченими. Серед тих, чия робота була особливо важливою, були: Жан-Батист Біо і Фелікс Савар, які досліджували сили, що діють на магніти поблизу струмів; Андре Марі Ампер, який вивчав сили, що діють між струмом; Франсуа Араго, який виявив, що залізо може намагнічуватися під дією струму; і Гемфрі Деві, який виявив, що магніт діє на дріт, що несе електричний струм. Через 10 років після відкриття Ерстеда Майкл Фарадей виявив, що відносний рух магніту і металевого дроту індукуює струм в дроті. Це відкриття показало не тільки те, що струм має магнітний ефект, але й те, що магніт може генерувати електричний струм. Пізніше ви побачите, що імена Біо, Савара, Ампера і Фарадея пов'язані з деякими фундаментальними законами електромагнетизму.

Дані цих різних експериментів привели Ампера до припущення, що електричний струм є джерелом усіх магнітних явищ. Щоб пояснити існування постійних магнітів, він припустив, що матерія містить мікроскопічні петлі струму, які якимось чином вирівнюються, коли матеріал намагнічується. Сьогодні ми знаємо, що постійні магніти фактично створюються шляхом орієнтації у просторі електронів, що обертаються. Ситуація дуже схожа на ту, яку запропонував Ампер. Ця *модель постійних магнітів була розроблена Ампером майже за століття до того, як була зрозуміла атомна природа матерії.*

### Сучасні застосування магнетизму

Сьогодні магнетизм відіграє багато важливих ролей у нашому житті. Розуміння фізиками магнетизму дозволило розробити технології, які впливають як на окремих людей, так і на суспільство. Наприклад, електронний планшет в сумочці або рюкзаку був би неможливий без застосування магнетизму і електрики в малих масштабах (рис. 1.3).

Було виявлено, що слабкі зміни магнітного поля в тонкій плівці заліза і хрому призводять до набагато більших змін опору, які називають *гігантським магнітоопором*. Потім інформація може бути записана магнітним способом залежно від напрямку, в якому намагнічується шар заліза. В результаті відкриття гігантського магнітоопору і його застосування в цифрових сховищах, Нобелівська премія з фізики 2007 року

була присуджена Альберту Ферту з Франції і Петеру Грюнбергу з Німеччини.

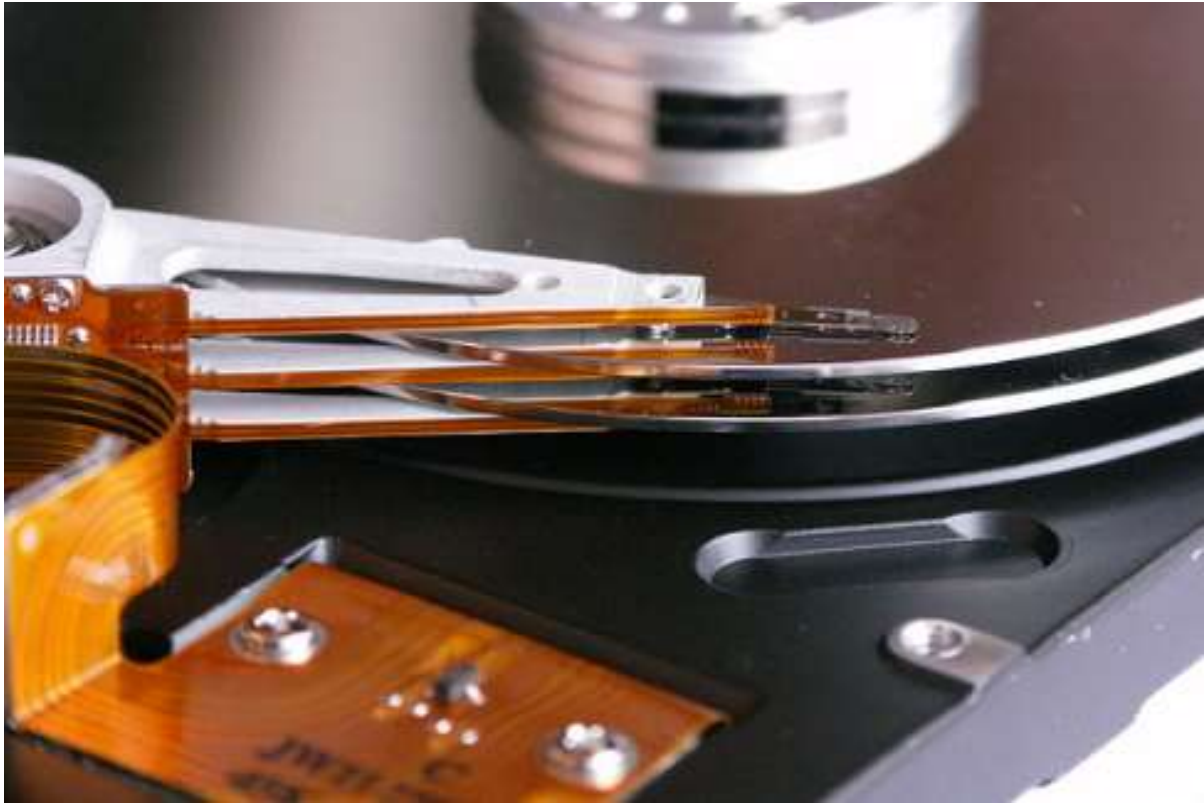


Рис. 1.3. Інженерні технології, такі як комп'ютерні сховища, були б неможливі без глибокого розуміння магнетизму

Всі електродвигуни, які мають таке різноманітне застосування, як живлення холодильників, запуск автомобілів і переміщення ліфтів, містять магніти. Генератори, незалежно від того, чи виробляють гідроелектроенергію або працюють велосипедні ліхтарі, використовують магнітні поля. На переробних підприємствах використовуються магніти, щоб відокремити залізо від іншого сміття. Дослідження використання магнітної оболонки термоядерного синтезу як майбутнього джерела енергії тривають вже кілька років. Магнітно-резонансна томографія (МРТ) стала важливим діагностичним інструментом у галузі медицини, а використання магнетизму для дослідження мозкової активності є предметом сучасних досліджень і розробок. У список додатків також входять жорсткі диски комп'ютерів, магнітофонний запис, виявлення вдихуваного азбесту, левітація швидкісних поїздів. Магнетизм бере участь у структурі атомних енергетичних рівнів, а також у русі космічних променів і заряджених частинок, захоплених у поясах Ван Аллена навколо Землі. Ми знову бачимо, що всі ці розрізнені явища пов'язані невеликою кількістю основних фізичних принципів.

## 1.2. Магнітні поля і лінії

Ми окреслили властивості магнітів, описали, як вони поведуться, і перерахували деякі застосування магнітних властивостей. Незважаючи на те, що не існує таких речей, як ізольовані магнітні заряди, ми все одно можемо визначити притягання і відштовхування магнітів як такі, що базуються на полі. У цьому розділі ми визначимо магнітне поле, визначимо його напрямок за правилом правої руки, а також обговоримо, як проводити лінії магнітного поля.

### Визначення магнітного поля

Магнітне поле визначається силою, яку відчуває заряджена частинка, рухаючись у цьому полі. Величина цієї сили пропорційна величині заряду  $q$ , швидкості зарядженої частинки  $v$  і величині прикладеного магнітного поля. Напрямок цієї сили перпендикулярний як напрямку рухомої зарядженої частинки, так і напрямку прикладеного магнітного поля. На основі цих спостережень визначено *напруженість магнітного поля*  $B$  на основі **магнітної сили Лоренца**  $F$ , яка діє на заряд  $Q$ , що рухається зі швидкістю  $v$ , як векторний добуток швидкості і магнітного поля, тобто,

$$\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (1.1)$$

Власне, так ми визначаємо магнітне поле  $\vec{B}$  — з точки зору сили, що діє на заряджену частинку, що рухається в магнітному полі. Величина сили визначається з визначення векторного добутку, оскільки вона співвідноситься з величинами кожного з векторів. Іншими словами, величина сили задовольняє умові:

$$F = qvB \sin \theta, \quad (1.2)$$

де  $\theta$  – кут між вектором швидкості і магнітного поля.

Одиниця вимірювання напруженості магнітного поля  $B$  в СІ називається **тесла** (Тл) на честь ексцентричного, але геніального винахідника Ніколи Тесли (1856–1943), де

$$1 \text{ Тл} = \frac{1 \text{ Н}}{\text{А}\cdot\text{м}}. \quad (1.3)$$

Іноді в СГС, СГСМ використовують одиницю вимірювання магнітної напруженості **гаус** (Гс), де  $1 \text{ Гс} = 10^{-4} \text{ Тл}$ . Найсильніші постійні магніти мають поля біля 2 Тл; надпровідні електромагніти можуть досягати 10 Тл і більше. Магнітне поле Землі на її поверхні становить лише близько  $5 \times 10^{-5} \text{ Тл}$ , або 0,5 Гс.

## Напрямок магнітного поля за правилом правої руки

Напрямок магнітної сили  $F$  перпендикулярний площині, утвореній векторами  $v$  і  $B$ , визначається **правилом правої руки-1** (або ППР-1), яке проілюстровано на рис. 1.4.

1. Праву руку зорієнтуйте так, щоб пальці зігнулися в площині, визначеній векторами швидкості і магнітного поля.
2. Правою рукою проведіть пальцями від швидкості до магнітного поля під найменшим можливим кутом.
3. Магнітна сила спрямована туди, куди спрямований великий палець.
4. Якщо заряд був негативним, змініть напрямок, знайдений цими кроками.

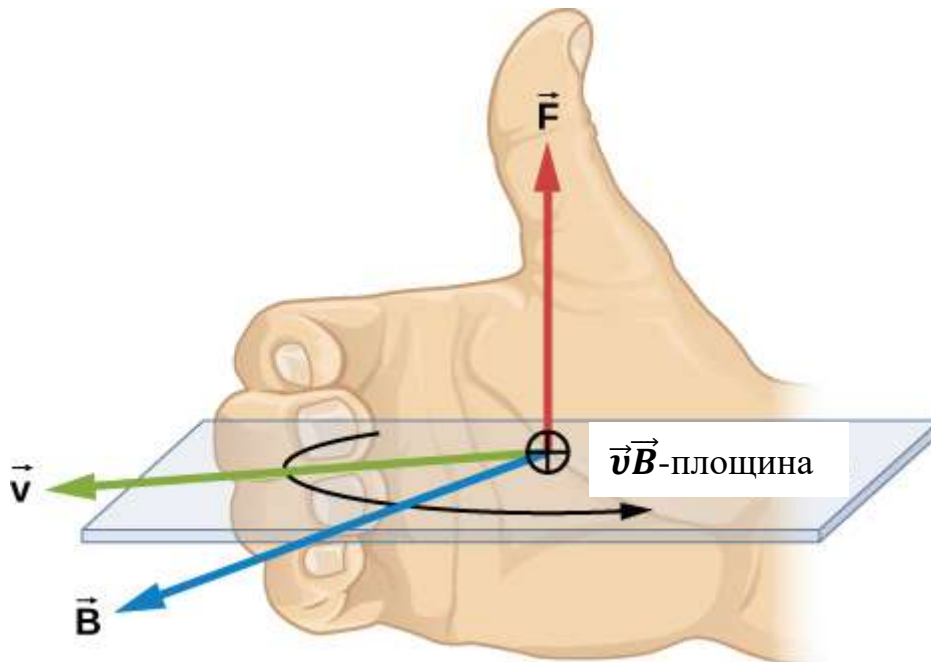


Рис. 1.4. Дія магнітного поля на рухомий заряд

Магнітна сила на статичні заряди не діє. Однак магнітна сила діє на заряди, що рухаються під кутом до магнітного поля. Коли заряди нерухомі, їх електричні поля не впливають на магніти. Однак, коли заряди рухаються, вони створюють магнітні поля, які діють на інші магніти. При відносному русі виникає зв'язок між електричними і магнітними силами, кожна з яких впливає на іншу.

### ПРИКЛАД 1.1. Альфа-частинка, що рухається в магнітному полі

Альфа-частинка ( $q = 3,2 \times 10^{-19}$  Кл) рухається через однорідне магнітне поле, величина якого становить 1,5 Тл. Поле паралельне додатній осі  $z$  прямокутної системи координат (рис. 1.5). Яка магнітна сила діє на альфа-

частинку при її русі (а) в позитивному напрямку  $x$  зі швидкістю  $5,0 \times 10^4 \text{ м/с}$ , (б) у від'ємному напрямку  $y$  зі швидкістю  $5,0 \times 10^4 \text{ м/с}$ ? (в) в позитивному  $z$ -напрямку зі швидкістю  $5,0 \times 10^4 \text{ м/с}$ ? (г) зі швидкістю:

$$\vec{v} = (2,0\vec{i} - 3,0\vec{j} + 1,0\vec{k}) \times 10^4 \text{ м/с?}$$

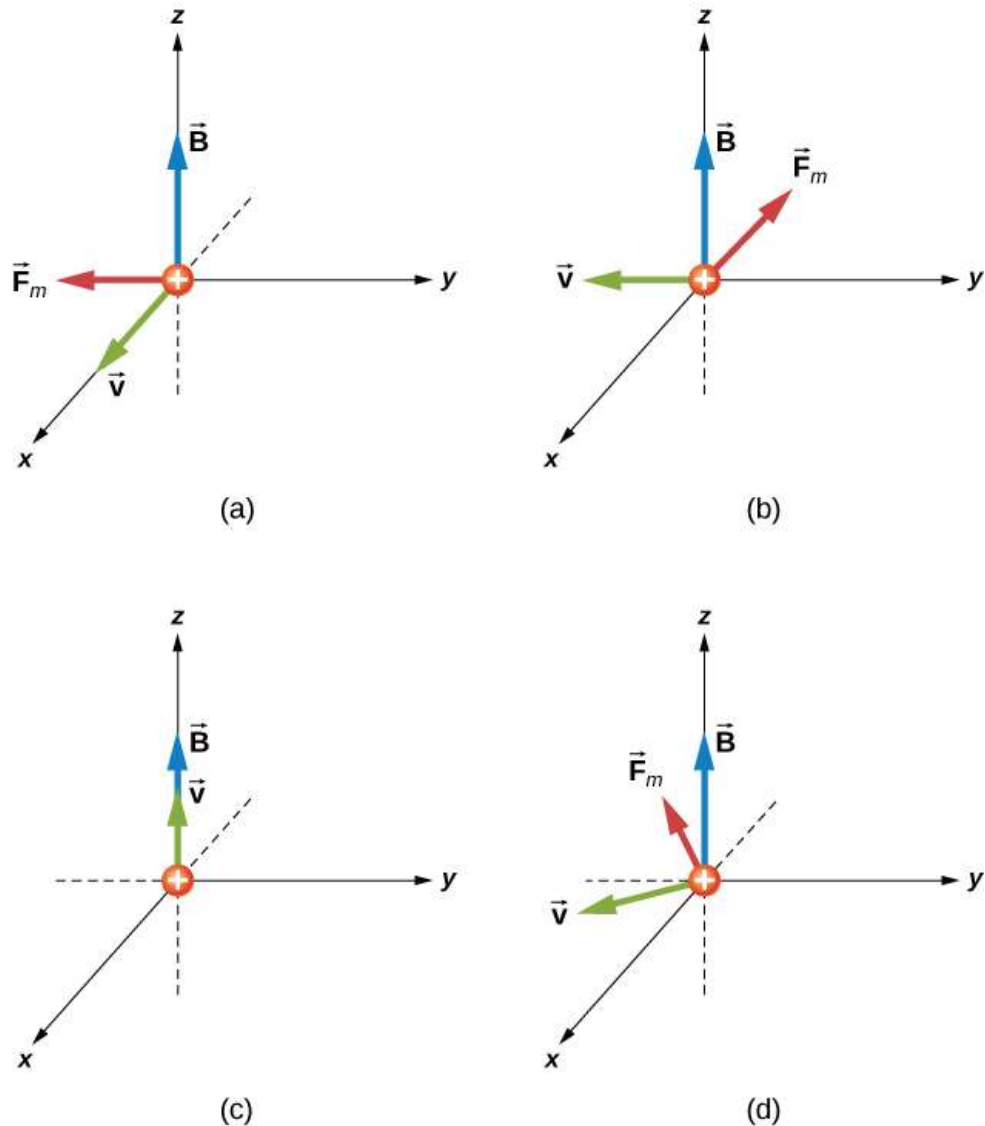


Рис. 1.5. Дія магнітної сили на альфа-частинку, що рухається в однорідному магнітному полі. Поле однакове на кожному малюнку, але швидкість різна

### Стратегія

Нам задано заряд, його швидкість, а також напруженість і напрямок магнітного поля. Таким чином, ми можемо використовувати рівняння:

$$\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$$

або

$$F = qvB \sin \theta$$

для обчислення сили. Напрямок сили визначається ППР-1.

## Розв'язання

а. По-перше, щоб визначити напрямок, почніть з того, що пальці спрямовані в позитивному напрямку  $x$ . Проведіть пальцями вгору в напрямку магнітного поля. Ваш великий палець повинен бути спрямований в негативний бік  $Y$ . Це має збігатися з математичною відповіддю. Для обчислення сили використовуємо заданий заряд, швидкість і магнітне поле, а також визначення магнітної сили у вигляді векторного добутку для обчислення:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q[\vec{v} \times \vec{B}] = (3,2 \times 10^{-19} \text{Кл}) \left( 5,0 \times 10^4 \frac{\text{М}}{\text{с}} \vec{i} \right) \times (1,5 \text{Тл} \vec{k}) = \\ &= -2,4 \times 10^{-14} \text{Н} \vec{j}.\end{aligned}$$

б. По-перше, щоб визначити спрямованість, почніть з пальців, спрямованих у негативному напрямку  $Y$ . Проведіть пальцями вгору в напрямку магнітного поля, як і в попередній задачі. Ваш великий палець повинен бути відкритий в негативному напрямку  $x$ . Це має збігатися з математичною відповіддю. Для обчислення сили використовуємо заданий заряд, швидкість і магнітне поле, а також визначення магнітної сили у вигляді векторного добутку для обчислення:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q[\vec{v} \times \vec{B}] = (3,2 \times 10^{-19} \text{Кл}) \left( 5,0 \times 10^4 \frac{\text{М}}{\text{с}} \vec{j} \right) \times (1,5 \text{Тл} \vec{k}) = \\ &= -2,4 \times 10^{-14} \text{Н} \vec{i}.\end{aligned}$$

Альтернативним підходом є використання рівняння 1.2 для знаходження величини сили. Це стосується обох частин (а) і (б). Оскільки швидкості перпендикулярні магнітному полю, то кут між ними дорівнює  $90$  градусам. Отже, величина сили дорівнює:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= qvB \sin \theta = (3,2 \times 10^{-19} \text{Кл}) \left( 5,0 \times 10^4 \frac{\text{М}}{\text{с}} \right) \times (1,5 \text{Тл}) \sin 90^\circ = \\ &= 2,4 \times 10^{-14} \text{Н}.\end{aligned}$$

в. Оскільки швидкість і магнітне поле паралельні один одному, то немає орієнтації вашої руки, яка призведе до напрямку сили. Отже, сила на цей рухомий заряд дорівнює нулю. Це підтверджує векторний добуток. При перетині двох векторів, спрямованих в одному напрямку, результат дорівнює нулю.

г. По-перше, щоб визначити напрямок, ваші пальці можуть бути спрямовані в будь-якій орієнтації; Однак ви повинні провести пальцями вгору в напрямку магнітного поля. Обертаючи руку, зверніть увагу, що великий палець може бути спрямований у будь-якому можливому напрямку  $x$  або  $y$ , але не в напрямку  $z$ . Це має збігатися з математичною відповіддю. Для обчислення сили використовуємо заданий заряд, швидкість і магнітне поле, а також визначення магнітної сили у вигляді векторного добутку для обчислення:

$$\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}] = (3,2 \times 10^{-19} \text{ Кл}) \left( (2,0\vec{i} - 3,0\vec{j} + 1,0\vec{k}) \times 10^4 \frac{\text{М}}{\text{с}} \vec{j} \right) \times (1,5 \text{ Тл } \vec{k}) = (14,4\vec{i} - 9,6\vec{j}) \times 10^{-15} \text{ Н}.$$

Цей розв'язок можна переписати через величину сили і кут  $\theta$  в  $xy$ -площині:

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-14,4)^2 + (-9,6)^2} \times 10^{-15} \text{ Н} = 1,7 \times 10^{-14} \text{ Н},$$

$$\theta = \text{arctg} \left( \frac{F_y}{F_x} \right) = \text{arctg} \left( \frac{-9,6 \times 10^{-15} \text{ Н}}{-14,4 \times 10^{-15} \text{ Н}} \right) = 34^\circ.$$

Величину сили також можна обчислити за допомогою рівняння 1.2. Однак швидкість у цьому питанні має три складові,  $z$ -складовою швидкості можна знехтувати, оскільки вона паралельна магнітному полю і тому не генерує ніякої сили. Величина швидкості обчислюється за  $x$ - і  $y$ -компонентами. Кут між швидкістю в  $xy$ -площині і магнітним полем в  $z$ -площині дорівнює  $90$  градусам. Отже, сила буде такою:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} \times 10^4 \frac{\text{М}}{\text{с}} = 3,6 \times 10^4 \frac{\text{М}}{\text{с}},$$

$$\vec{F} = qvB \sin \theta = (3,2 \times 10^{-19} \text{ Кл}) \left( 3,6 \times 10^4 \frac{\text{М}}{\text{с}} \right) \times (1,5 \text{ Тл}) \sin 90^\circ = 1,7 \times 10^{-14} \text{ Н}.$$

Це та сама величина сили, обчислена за допомогою одиничних векторів.

## Обговорення

Векторний добуток у цій формулі призводить до третього вектора, який має бути перпендикулярним до двох інших. Інші фізичні величини, такі як момент імпульсу, також мають три вектори, які пов'язані векторним добутком. Зауважимо, що типові значення сили в задачах на магнітну силу набагато більші, ніж гравітаційна сила. Отже, для ізолюваного заряду магнітна сила є домінуючою силою, що керує рухом заряду.

## ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 1.1

Повторіть попередню задачу з магнітним полем у напрямку  $x$ , а не в  $z$ -напрямку. Перевірте свої відповіді за допомогою ППР-1.

## Представлення магнітних полів

Представлення магнітних полів **лініями магнітного поля** дуже корисне для візуалізації сили та напрямку магнітного поля. Як показано на рис. 7.6, кожна з цих ліній утворює замкнутий цикл, навіть якщо він не показаний обмеженнями простору, доступного для фігури. Лінії поля виходять з північного полюса (N), прямують до південного полюса (S) і продовжуються через стержневий магніт назад до північного полюса.

Для лінії магнітного поля виконуються правила:

1. Напрямок магнітного поля є дотичним до лінії поля в будь-якій точці простору. Маленький компас вкаже в напрямку лінії поля.
2. Напруженість поля пропорційна густині ліній. Вона точно пропорційна числу ліній на одиницю площі, перпендикулярної до ліній.
3. Лінії магнітного поля ніколи не можуть перетинатися, а це означає, що це поле унікальне в будь-якій точці простору.
4. Лінії магнітного поля безперервні, утворюють замкнуті контури без початку і кінця. Вони спрямовані від північного полюса до південного.

Остання властивість пов'язана з тим, що північний і південний полюси не можна розділити. Це явна відмінність від ліній електричного поля, які, як правило, починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних зарядах або на нескінченності. Якби існували ізольовані магнітні заряди (їх називають **магнітними монополями**), то лінії магнітного поля починалися б і закінчувалися на них.

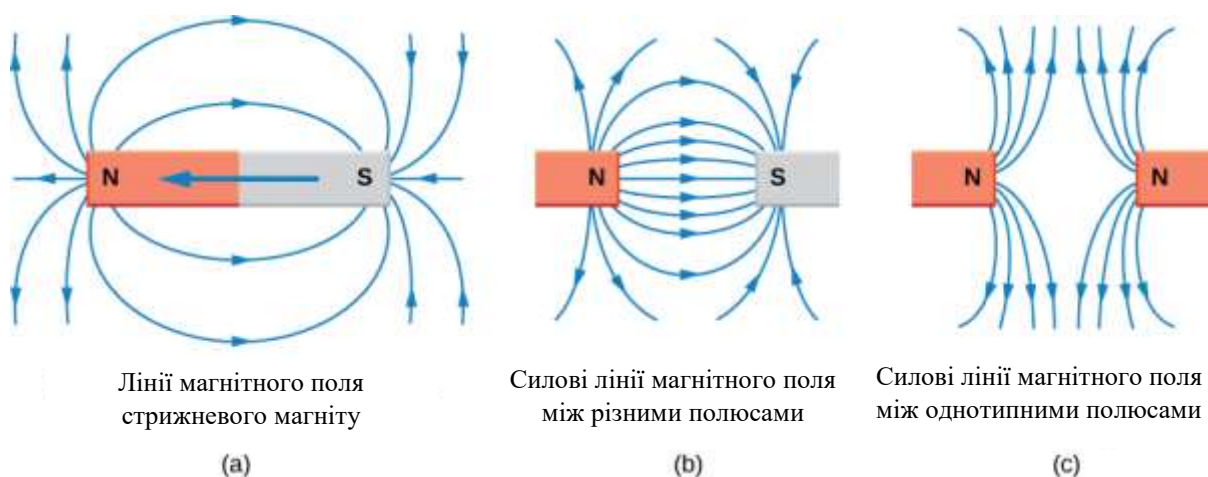


Рис. 1.6. Лінії магнітного поля визначаються так, щоб мати напрямок, в якому вказує малий компас при розміщенні в певному місці поля. Напруженість поля пропорційна щільності ліній. Лінії магнітного поля, присутні всередині магніту або поза полем зору, не відображаються з огляду на обмеження простору малюнка. Якби була показана інша лінія магнітного поля, то вона утворила б безперервну петлю.

### 1.3. Рух зарядженої частинки в магнітному полі

Заряджена частинка відчуває дію сили при русі через магнітне поле. Що станеться, якщо це поле буде рівномірним під час руху зарядженої частинки? Яким шляхом рухається частинка? У цьому розділі ми обговорюємо круговий рух зарядженої частинки, а також інший рух, який виникає в результаті потрапляння зарядженої частинки в магнітне поле.

Найпростіший випадок має місце, коли заряджена частинка рухається перпендикулярно однорідному **В**-полю (рис. 1.7). Якщо поле знаходиться у вакуумі, магнітне поле є домінуючим фактором, що визначає рух. Оскільки



магнітна сила перпендикулярна напрямку руху, заряджена частинка рухається по криволінійній траєкторії в магнітному полі. Частинка продовжує рухатися по цій криволінійній траєкторії, поки не утворить повне коло. Інший спосіб поглянути на це полягає в тому, що магнітна сила завжди перпендикулярна швидкості, так що вона не виконує роботи. Таким чином, кінетична енергія і швидкість частинки залишаються постійними. Магнітне поле впливає на напрямок руху, але не на швидкість.

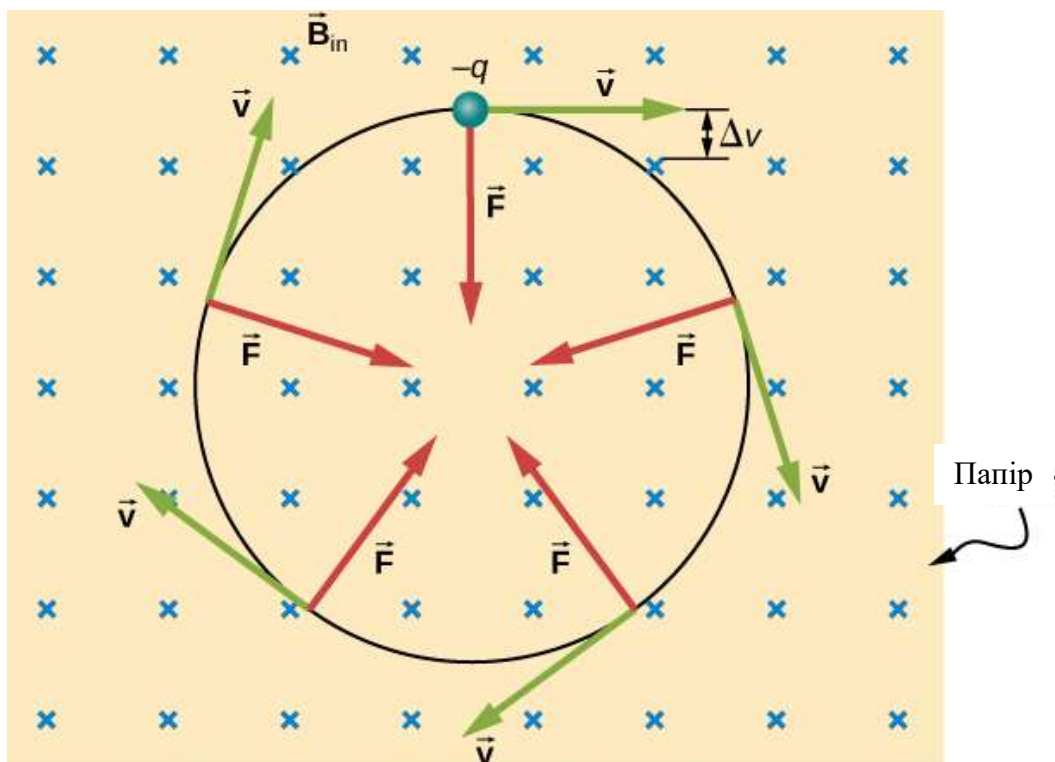


Рис. 1.7. Негативно заряджена частинка рухається в площині паперу в області, де магнітне поле перпендикулярне паперу (представлено  $\times$  — як хвости стріл). Магнітна сила перпендикулярна до швидкості, тому швидкість змінюється в напрямку, але не величиною. В результаті виходить рівномірний круговий рух. (Зауважимо, що оскільки заряд від'ємний, то сила протилежна за напрямком передбаченню правила правої руки)

У цій ситуації магнітна сила забезпечує доцентрову силу  $F_c = mv^2/r$ . Помітивши, що швидкість перпендикулярна магнітному полю, величина магнітної сили буде  $F = qvB$ . Оскільки магнітна сила  $F$  забезпечує доцентрову силу  $F_c$ , ми маємо:

$$qvB = \frac{mv^2}{r}. \quad (1.4)$$

Розв'язок для  $r$  буде таким:

$$r = \frac{mv}{qB}. \quad (1.5)$$

Тут  $r$  — радіус кривизни шляху зарядженої частинки з масою  $m$  і зарядом  $q$ , що рухається зі швидкістю  $v$ , яка перпендикулярна магнітному полю

величиною  $B$ . Час, за який заряджена частинка обійшла кругову траєкторію, визначається як період, який дорівнює пройденій відстані (колу), поділеній на швидкість. Виходячи з цього і рівняння 1.4, можна визначити період руху у вигляді:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi mv}{v qB} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (1.6)$$

Якщо швидкість не перпендикулярна магнітному полю, то можна порівняти кожен складову швидкості окремо з магнітним полем. Складову швидкості, перпендикулярна магнітному полю, створює магнітну силу, перпендикулярну як цій швидкості, так і полю:

$$v_{\perp} = v \sin \theta, v_{\parallel} = v \cos \theta. \quad (1.7)$$

де  $\theta$  — кут між  $v$  і  $B$ . Компонент, паралельний магнітному полю, створює постійний рух уздовж того ж напрямку, що і магнітне поле, також показане в рівнянні 1.7. Паралельний рух визначає крок  $h$  спіралі, який є відстанню між сусідніми витками. Ця відстань дорівнює паралельній складовій швидкості, помноженій на період:

$$h = v_{\parallel} T. \quad (1.8)$$

В результаті виходить **гвинтовий рух**, як показано на рис. 1.8.

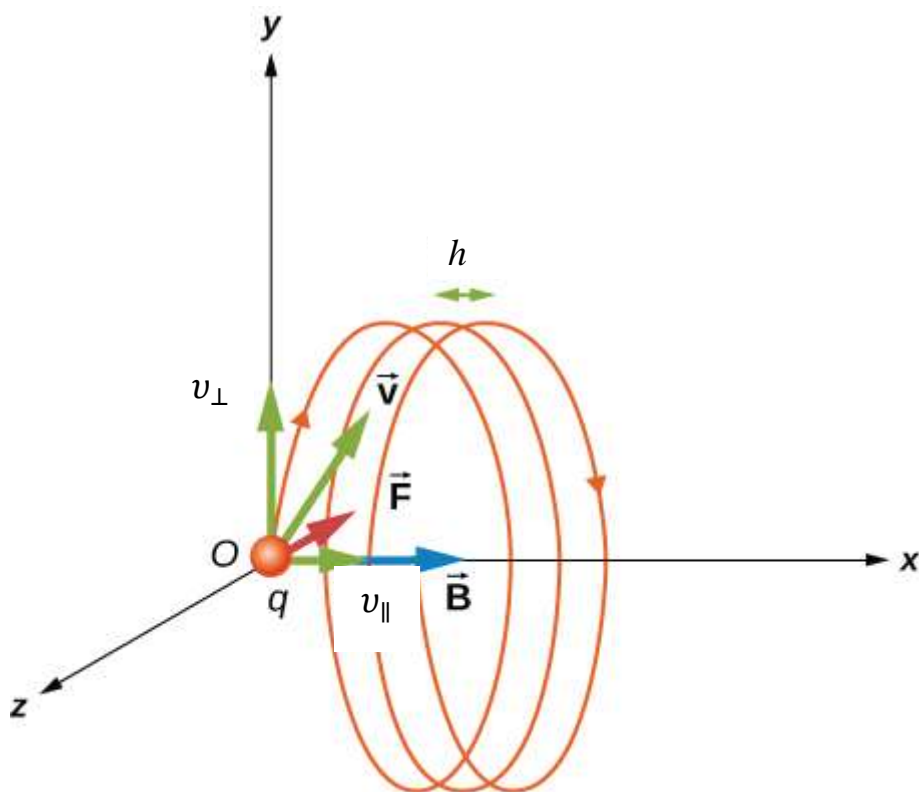


Рис. 1.8. Заряджена частинка, що рухається зі швидкістю, відмінною від напрямку магнітного поля. Компонента швидкості, перпендикулярна магнітному полю, створює круговий рух, тоді як компонента швидкості, паралельна полю, переміщує частинку вздовж прямої лінії. Крок  $h$  — це відстань по горизонталі між двома послідовними колами. Результуючий рух є гвинтовим

Поки заряджена частинка рухається по спіральній траєкторії, вона може потрапити в область, де магнітне поле неоднорідне. Зокрема, припустимо, що частинка рухається з області сильного магнітного поля в область слабшого поля, а потім назад в область сильнішого поля. Частинка може відбитися назад, перш ніж увійти в область сильнішого магнітного поля. Це схоже на хвилю на струні, що рухається від дуже легкої, тонкої струни до твердої стінки і відбивається назад. Якщо відбиття відбувається на обох кінцях, частинка потрапляє в так звану *магнітну пастку*.

Захоплені частинки в магнітних полях знаходяться в радіаційних поясах Ван Аллена навколо Землі, які є частиною магнітного поля Землі. Ці пояси були відкриті Джеймсом Ван Алленом, коли він намагався виміряти потік **космічних променів** за межами Землі (частинки високої енергії, які надходять з-за меж Сонячної системи), щоб побачити, чи схожий він на потік, виміряний на Землі. Ван Аллен виявив, що через внесок частинок, захоплених магнітним полем Землі, потік на Землі набагато вищий, ніж у космічному просторі.

Полярні сяйва (північне сяйво) в Північній півкулі (рис. 1.9), є прекрасними проявами світла, що випромінюється, коли іони рекомбінують з електронами, що надходять в атмосферу, коли вони рухаються по спіралі вздовж ліній магнітного поля. (Іони — це насамперед атоми кисню та азоту, які спочатку іонізуються внаслідок зіткнень з енергійними частинками в атмосфері Землі). Полярні сяйва також спостерігалися на інших планетах, таких як Юпітер і Сатурн.

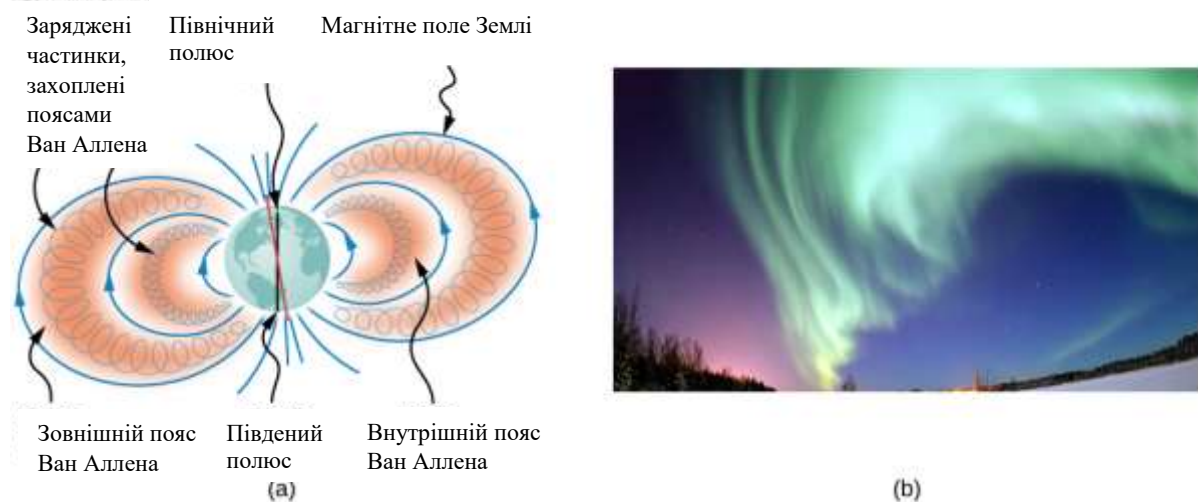


Рис. 1.9. (а) Радіаційні пояси Ван Аллена навколо Землі захоплюють іони, що утворюються космічними променями, які вдаряються об атмосферу Землі. (б) Чудове видовище полярного сяйва, або північного сяйва, яке сяє в північному небі. Це світло, сформоване магнітним полем Землі, випромінюється збудженими молекулами та іонами кисню та азоту

## ПРИКЛАД 1.2. Дефлектор променя

Дослідницька група досліджує короткоживучі радіоактивні ізотопи. Їм потрібно розробити спосіб транспортування альфа-частинок (ядер гелію) з місця, де вони утворені, до місця, де вони зіткнуться з іншим матеріалом, утворюючи ізотоп. Пучок альфа-частинок ( $m = 6,64 \times 10^{-27}$  кг,  $q = 3,2 \times 10^{-19}$  Кл) вигинається через 90-градусну область з однорідним магнітним полем 0,050 Тл (рис. 1.10). а) У якому напрямку слід прикласти магнітне поле? б) Скільки часу потрібно альфа-частинкам, щоб пройти однорідну область магнітного поля?

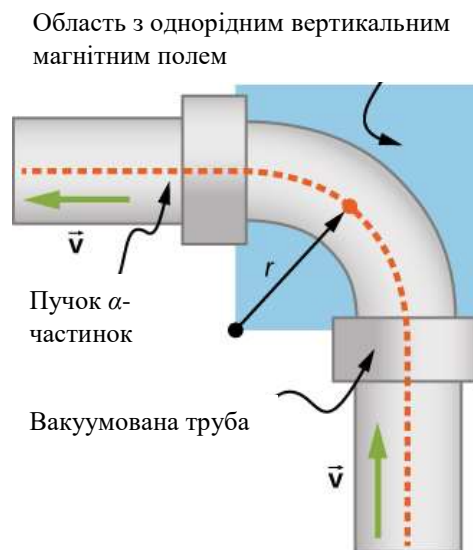


Рис. 1.10. Вигляд зверху установки дефлектора променя

### Стратегія

а. Напрямок магнітного поля показує ППР-1. Ваші пальці спрямовані в напрямку  $\vec{v}$ , а великий палець повинен бути спрямований у напрямку сили, вліво. Тому, оскільки альфа-частинки заряджені позитивно, магнітне поле має бути спрямоване вниз.

б. Період руху альфа-частинки по колу дорівнює:

$$T = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (1.9)$$

Оскільки частинка обертається лише навколо чверті кола, ми можемо взяти 0,25  $T$ , щоб знайти час, необхідний для обходу цього шляху.

### Розв'язання

а. Почнемо з того, що зосередимося на альфа-частинці, що потрапляє в поле в нижній частині малюнка. Спочатку направте великий палець вгору по сторінці. Для того, щоб ваша долоня відкрилася вліво, куди вказує доцентрова сила (а значить, і магнітна сила), пальці повинні змінити орієнтацію, поки не вкажуть на сторінку. Це напрямок прикладеного магнітного поля.

б. Період обертання зарядженої частинки по колу обчислюється за допомогою заданої в задачі маси, заряду і магнітного поля. Це виходить:

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi(6,64 \times 10^{-27} \text{ кг})}{(3,2 \times 10^{-19} \text{ Кл})(0,05 \text{ Тл})} = 2,61 \times 10^{-6} \text{ с.}$$

Однак для даної задачі альфа-частинка обертається навколо чверті кола, тому час, необхідний для цього, буде:

$$t = 0,25 \times 2,61 \times 10^{-6} \text{ с} = 0,65 \text{ мкс.}$$

### Обговорення

Цей час може бути досить швидким, щоб дістатися до матеріалу, який ми хотіли б бомбардувати, залежно від того, наскільки короткоживучий радіоактивний ізотоп, який випромінює альфа-частинки. Якби ми могли збільшити прикладене магнітне поле, це ще більше скоротило б час. Шлях, який частинки повинні пройти, можна скоротити, але це може бути економічно не вигідно.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 1.2

Рівномірне магнітне поле 1,5 Тл спрямоване горизонтально із заходу на схід. а) Яка магнітна сила діє на протон у той момент, коли він рухається в полі вертикально вниз зі швидкістю  $4 \times 10^7 \text{ м/с}$ ? б) Порівняйте цю силу з вагою  $w$  протона.

### ПРИКЛАД 1.3. Гвинтовий рух в магнітному полі

Протон потрапляє в однорідне магнітне поле  $1,0 \times 10^{-4} \text{ Тл}$  зі швидкістю  $5 \times 10^5 \text{ м/с}$ . Під яким кутом має бути магнітне поле до швидкості, щоб крок результуючого гвинтового руху дорівнював радіусу спіралі?

### Стратегія

Крок руху пов'язаний з паралельною швидкістю, помноженою на період кругового руху, тоді як радіус відноситься до перпендикулярної складової швидкості. Встановивши радіус і крок рівними один одному, визначте кут  $\theta$  між магнітним полем і швидкістю.

### Розв'язок

Крок задається рівнянням 1.8, період задається рівнянням 1.6, а радіус руху по колу задається рівнянням 1.5. Зауважимо, що швидкість у рівнянні радіуса пов'язана лише з перпендикулярною швидкістю, з якою відбувається рух по колу. Отже, підставляємо синусоїдальну складову загальної швидкості в рівняння радіуса, щоб порівняти крок і радіус:

$$h = r, \\ v_{\parallel} T = \frac{mv_{\perp}}{qB},$$

$$v \cos \theta \frac{2\pi m}{qB} = \frac{mv \sin \theta}{qB},$$

$$2\pi = \operatorname{tg} \theta,$$

$$\theta = 81,0^\circ.$$

### Обговорення

Якби цей кут був  $0^\circ$ , виникала б тільки паралельна швидкість, і спіраль не утворювалася, тому що не було б руху по колу в перпендикулярній площині. Якби цей кут був  $90^\circ$ , відбувався б тільки круговий рух і не було б руху кіл, перпендикулярних до руху. Саме це і створює гвинтовий рух.

## 1.4. Магнітна сила, що діє на струмоведучий провідник

На заряди, що рухаються в магнітному полі, діє сила Лоренца. Якщо ці рухомі заряди знаходяться в дроті, тобто якщо дріт несе струм, дріт також повинен відчувати силу. Однак, перш ніж обговорювати силу, що діє на струм магнітним полем, ми спочатку розглянемо магнітне поле, створюване електричним струмом. Тут ми вивчаємо два окремих ефекти, які тісно взаємодіють: струмоведучий провід створює магнітне поле, а магнітне поле діє на струмоведучий провідник.

### Магнітні поля, створювані електричним струмом

Обговорюючи історичні відкриття в галузі магнетизму, ми згадували про відкриття Ерстеда про те, що дріт, що передає електричний струм, змушує відхилитися компас, що знаходиться поблизу. Встановлено зв'язок, що електричний струм створює магнітні поля.

Стрілка компаса біля дроту відчуває силу, яка вирівнює дотичну стрілку до кола навколо дроту. Тому струмоведучий провід створює кругові петлі магнітного поля. Для визначення напрямку магнітного поля, створюваного дротом, використовуємо друге правило правої руки (ППР-2). У ППР-2 великий палець спрямований у напрямку струму, а пальці обертаються навколо дроту, вказуючи в напрямку створюваного магнітного поля (рис. 1.11).

Якщо магнітне поле йде на вас або за межі сторінки, ми представляємо це точкою. Якби магнітне поле потрапило на сторінку, ми представимо це за допомогою символу  $\times$ . Ці символи походять від розгляду векторної стрілки: стрілка, спрямована на вас, з вашої точки зору, виглядатиме як крапка або кінчик стріли. Стріла, спрямована від вас, з вашої точки зору, буде виглядати як хрест або  $\times$ . Складений ескіз магнітних

кіл, наведений на рис. 1.11, показує, що напруженість поля зменшується в міру віддалення від дроту петлями, які знаходяться далі один від одного.

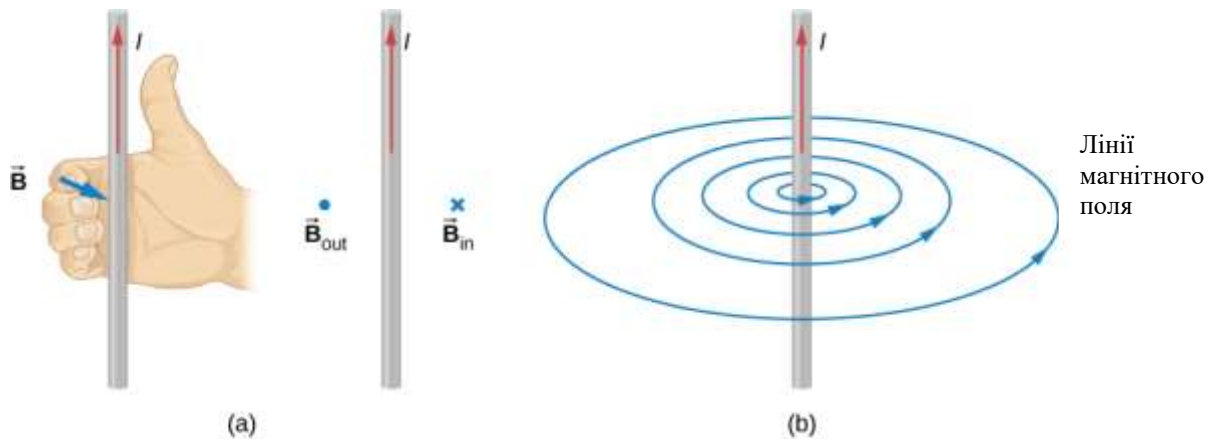


Рис. 1.11. (а) Коли дріт знаходиться в площині паперу, поле перпендикулярне паперу. Зверніть увагу на символи, які використовуються для поля, спрямованого всередину (наприклад, хвіст стріли), і поля, спрямованого назовні (наприклад, кінчик стріли). (б) Довгий і прямий дріт створює поле з лініями магнітного поля, що утворюють кругові петлі

### Обчислення магнітної сили

Електричний струм – це впорядкований рух заряду. Тому струмоведучий провід в магнітному полі повинен відчувати силу, обумовлену цим полем. Щоб дослідити цю силу, розглянемо нескінченно малий переріз дроту, як показано на рис. 1.12.

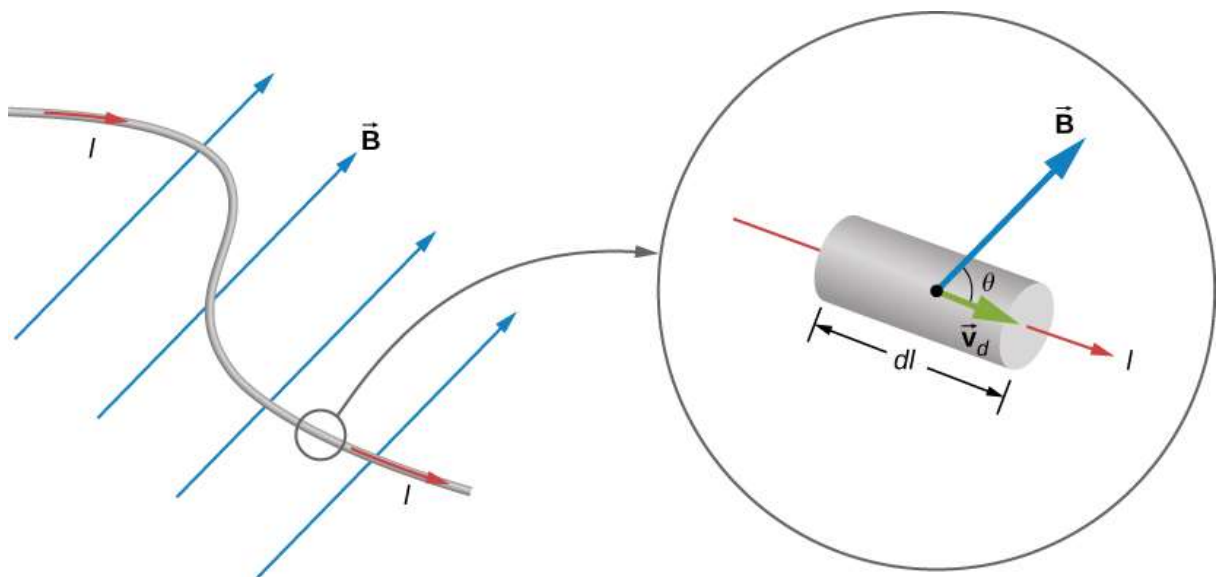


Рис. 1.12. Нескінченно малий переріз струмоведучого проводу в магнітному полі

Довжина і площа поперечного перерізу дорівнюють  $dl$  і  $A$  відповідно, тому його об'єм становить  $V = A \cdot dl$ . Дріт формується з матеріалу, який містить  $n$  носіїв заряду на одиницю об'єму, тому кількість носіїв заряду в перерізі становить  $n A \cdot dl$ . Якщо носії заряду рухаються зі швидкістю дрейфу  $\vec{v}_d$ , струм  $I$  в проводі дорівнює:

$$I = neA\vec{v}_d.$$

Магнітна сила на будь-якому окремому носії заряду дорівнює:  $e\vec{v}_d \times \vec{E}$ . Отже, сумарна магнітна сила  $d\vec{F}$  на об'єкті  $n A \cdot dl$  носіїв заряду в перерізі дроту є:

$$d\vec{F} = (nA \cdot dl) e\vec{v}_d \times \vec{E}. \quad (1.10)$$

Ми можемо визначити  $dl$  як вектор довжини  $dl$ , спрямований уздовж  $\vec{v}_d$ , що дозволяє переписати це рівняння у вигляді:

$$d\vec{F} = neA \vec{v}_d d\vec{l} \times \vec{E}. \quad (1.11)$$

або

$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \times \vec{E}]. \quad (1.12)$$

Це магнітна сила на ділянці дроту. Зауважимо, що це фактично сумарна сила, що діє полем на носіїв заряду. Напрямок цієї сили задається ППР-1, де ви вказуєте пальцями в напрямку струму і згинаєте їх до поля. Потім ваш великий палець вказує в напрямку сили.

Для визначення магнітної сили  $\vec{F}$  на дроті довільної довжини і форми ми повинні інтегрувати рівняння 1.12 по всьому дроту. Якщо переріз дроту прямий, а  $E$  рівномірне, то диференціали рівнянь стають абсолютними величинами, що дає нам вираз:

$$\vec{F} = I [\vec{l} \times \vec{E}]. \quad (1.13)$$

Це сила Ампера на прямому струмоведучому дроті в однорідному магнітному полі.

#### **ПРИКЛАД 1.4. Врівноваження гравітаційних і магнітних сил на струмоведучому проводі**

Провідник довжиною 50 см і масою 10 г підвішується в горизонтальній площині за допомогою пари гнучких дротів (рис. 1.13). Потім провідник піддається дії постійного магнітного поля величиною 0,50 Тл, яке спрямоване, як показано на малюнку. Яка величина і напрямок струму в провіднику необхідні для зняття силової напруги в опорних дротах?

#### **Стратегія**

З діаграми (b) на малюнку можна побачити, що механічна напруга в опорних проводах дорівнює нулю, коли гравітаційні і магнітні сили врівноважують один одного. За допомогою ППР-1 знаходимо, що магнітна



сила спрямована вгору. Тоді ми можемо визначити струм  $I$ , прирівнявши дві сили.

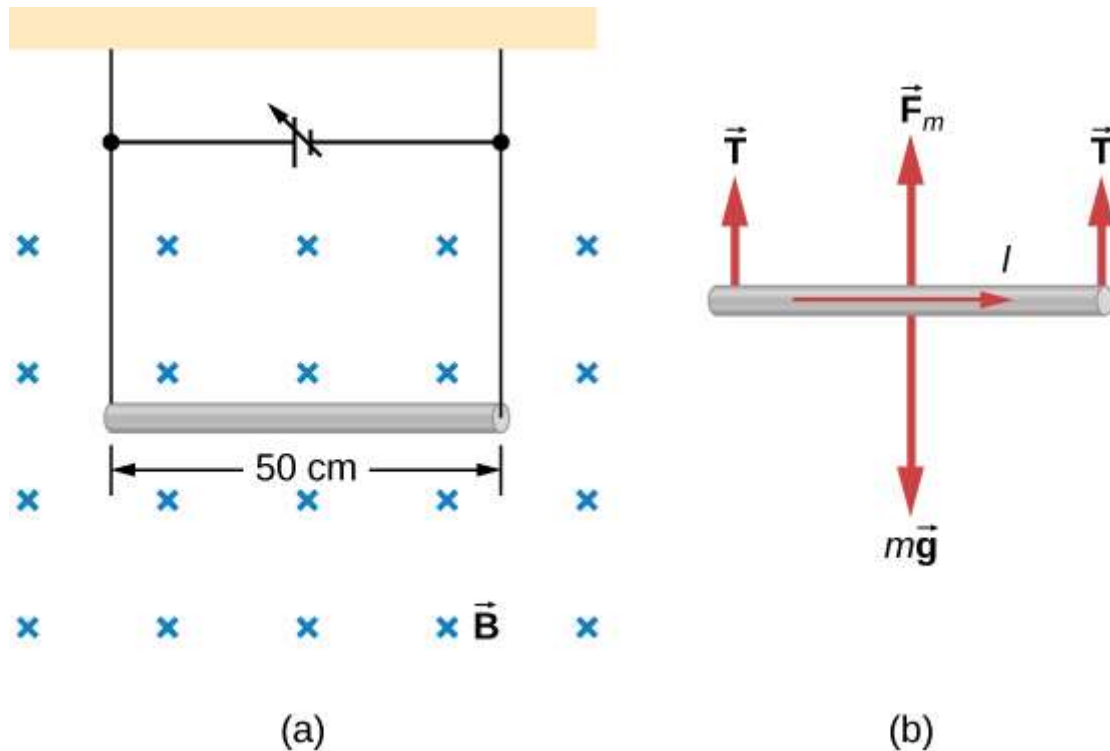


Рис. 1.13. (а) Провідник, підвішений в магнітному полі. (б) Схема дії сил

### Розв'язок

Прирівнюємо силу ваги і магнітну силу на дроті:

$$mg = IlB.$$

Таким чином отримуємо:

$$I = \frac{mg}{lB} = \frac{(0,01 \text{ кг})(9,8 \text{ м/с}^2)}{(0,5 \text{ м})(0,5 \text{ Тл})} = 0,39 \text{ А.}$$

### Обговорення

Це велике магнітне поле створює значну силу, що діє на дріт, щоб зрівноважити його вагу.

### ПРИКЛАД 1.5. Розрахунок магнітної сили на струмоведучому проводі

Довгий жорсткий дріт, що лежить уздовж осі  $Y$ , несе струм  $5,0 \text{ А}$ , що протікає в позитивному напрямку  $Y$ . а) Якщо уздовж позитивної осі  $x$  спрямоване постійне магнітне поле величиною  $0,30 \text{ Тл}$ , то яка магнітна сила діє на одиницю довжини дроту? б) Якщо постійне магнітне поле  $0,30 \text{ Тл}$  спрямоване на  $30$  градусів від осі  $+x$  до осі  $+y$ , то яка магнітна сила діє на одиницю довжини дроту?

## Стратегія

Магнітна сила на струмоведучому проводі в магнітному полі задається формулою:

$$\vec{F} = I[\vec{l} \times \vec{B}].$$

Для умови *a*), оскільки струм і магнітне поле в цій задачі перпендикулярні, ми можемо спростити формулу, щоб отримати величину і знайти напрямок через ППР-1. Кут  $\theta$  дорівнює 90 градусам, що означає  $\sin \theta = 1$ . Крім того, силу можна розділити на  $l$ , щоб знайти силу на одиницю довжини. Для умови *b*) в одиничній векторній нотації записується магнітна сила. Після того, як взято векторний добуток, спрямованість видно за отриманим одиничним вектором.

## Розв'язання

а. Почнемо із загальної формули сили Ампера. Ми шукаємо силу на одиницю довжини, тому ділимо на довжину  $l$ . Ми також встановлюємо  $\sin \theta = 1$ . Таким чином, розв'язок є таким:

$$F = IlB \sin \theta,$$
$$\frac{F}{l} = (5.0 \text{ A})(0,30 \text{ Тл}) = 1,5 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

Спрямованість: направте пальці в позитивному напрямку  $Y$  і зігніть пальці в позитивному напрямку  $x$ . Ваш великий палець буде вказувати на  $-\hat{k}$  напрям. Тому з урахуванням спрямованості розв'язок є таким:

$$\frac{F}{l} = -1,5 \hat{k} \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

б. В одиничній векторній системі числення візьмемо векторний добуток, щоб знайти силу:

$$\vec{F} = I[\vec{l} \times \vec{B}] = (5,0 \text{ A})l\hat{j} \times (0,30 \text{ Тл} \cos(30^\circ)\hat{i} + 0,30 \text{ Тл} \sin(30^\circ)\hat{j}),$$
$$\frac{F}{l} = -1,30 \hat{k} \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

## Обговорення

Це велике магнітне поле створює значну силу на невеликій довжині дроту. У міру того, як кут магнітного поля стає більш близьким до струму в дроті, сила, яка діє на нього, зменшується, як видно з порівняння частин *a* і *b*.

## ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 1.3

Прямий гнучкий відрізок мідного дроту занурений в магнітне поле, яке спрямоване всередину сторінки. *a*) Якщо струм дроту йде в напрямку  $+x$ , то в який бік він зігнеться? *б*) В який бік зігнеться дріт, якщо струм тече в напрямку  $-x$ ?

### ПРИКЛАД 1.6. Сила, що діє на дріт у вигляді кільця

Кільце радіусом  $R$ , що несе струм  $I$ , розміщена в  $xу$ -площині. Постійне однорідне магнітне поле пронизує кільце, яке розміщується паралельне осі  $Y$  (рис. 1.14). Знайдіть магнітну силу, що діє на верхню половину кільця, нижню половину та загальну силу, що діє на кільце.

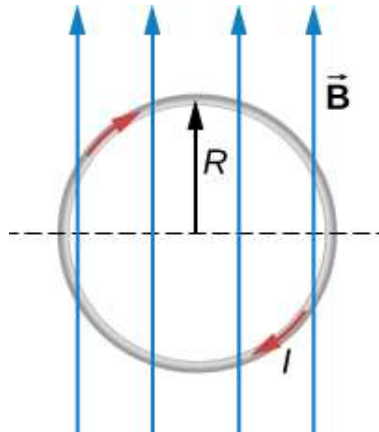


Рис. 1.14. Контур дроту, що несе струм в магнітному полі

### Стратегія

Магнітна сила на верхній петлі повинна бути записана через диференціальну силу, що діє на кожен відрізок петлі. Після інтегрування кожної диференціальної частини визначимо загальну силу на цій ділянці петлі. Аналогічним чином знаходять силу на нижній петлі, а сумарна сила є додаванням цих двох сил.

### Розв'язання

Диференціальна сила на довільному шматку дроту, розташованому на верхньому кільці, дорівнює:

$$dF = IB \sin \theta dl.$$

де  $\theta$  — кут між напрямком магнітного поля ( $+y$ ) і відрізком дроту. Диференціальний відрізок розташований на однаковому радіусі, тому, використовуючи формулу довжини дуги, маємо:

$$dl = R d\theta,$$

$$dF = IBR \sin \theta d\theta.$$

Для того, щоб знайти силу на відрізку, інтегруємо верхню половину кола від  $0$  до  $\pi$ . Це призводить до виразу:

$$F_{\text{в}} = IBR \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = IBR(-\cos \pi + \cos 0) = 2IBR.$$

Нижня половина петлі інтегрується з  $\pi$  до нуля, що дає нам:

$$F_{\text{н}} = IBR \int_{\pi}^0 \sin \theta d\theta = IBR(-\cos 0 + \cos \pi) = -2IBR.$$

Сумарна сила – це сума сил  $F_B + F_H$ , яка дорівнює нулю.

### Обговорення

Сумарна сила, що діє на будь-який замкнутий контур в однорідному магнітному полі, дорівнює нулю. Незважаючи на те, що на кожну частину петлі діє сила, сумарна сила на систему дорівнює нулю.

### 1.5. Сила і крутний момент петлі зі струмом

**Двигуни** є найбільш поширеним застосуванням магнітної сили на струмоведучих проводах. Двигуни містять петлі з дроту в магнітному полі. При пропусканні струму через контури магнітне поле надає крутний момент на петлі, які обертають вал. Електрична енергія в процесі перетворюється в механічну роботу. Після того, як площа поверхні петлі вирівняна з магнітним полем, напрямок струму змінюється на протилежний, тому на петлі виникає постійний крутний момент (рис. 1.15).

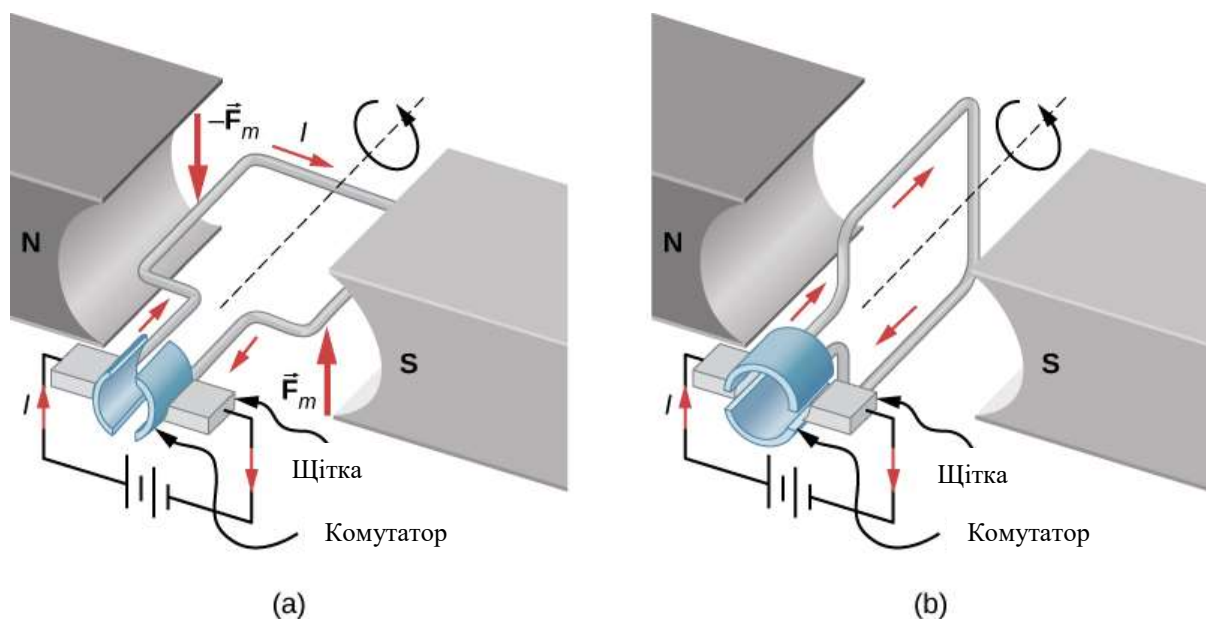


Рис. 1.15. Спрощений варіант електродвигуна постійного струму. (а) Прямокутна дротяна петля поміщена в магнітне поле. Сили на проводах, найближчих до магнітних полюсів (N і S), протилежні за напрямком, що визначається ППР-1. (а) петля має крутний момент і обертається (б) Тепер щітки торкаються сегментів комутатора так, що струм не протікає через петлю. Крутний момент на петлю не діє, але петля продовжує обертатися від початкової швидкості, заданої їй в положенні (а). До того моменту, коли петля перевертається, струм знову протікає по проводах, але вже в протилежному напрямку, і процес повторюється, як в частині (а). Це викликає безперервне обертання петлі

Цей розворот струму здійснюється за допомогою колекторів і щіток. Комутатор налаштований на реверсування потоку струму в заданих точках, щоб підтримувати безперервний рух у двигуні. Базовий комутатор має три контактні зони, яких слід уникати, і мертві зони, де петля матиме нульовий миттєвий крутний момент у цій точці. Щітки притискаються до колектора, створюючи електричний контакт між частинами колектора під час обертання.

В однорідному магнітному полі струмоведуча петля дроту, наприклад петля в двигуні, відчуває як сили, так і крутні моменти на петлю. На рис. 1.16 зображена прямокутна петля з дроту, яка проводить струм  $I$  і має сторони довжиною  $a$  і  $b$ .

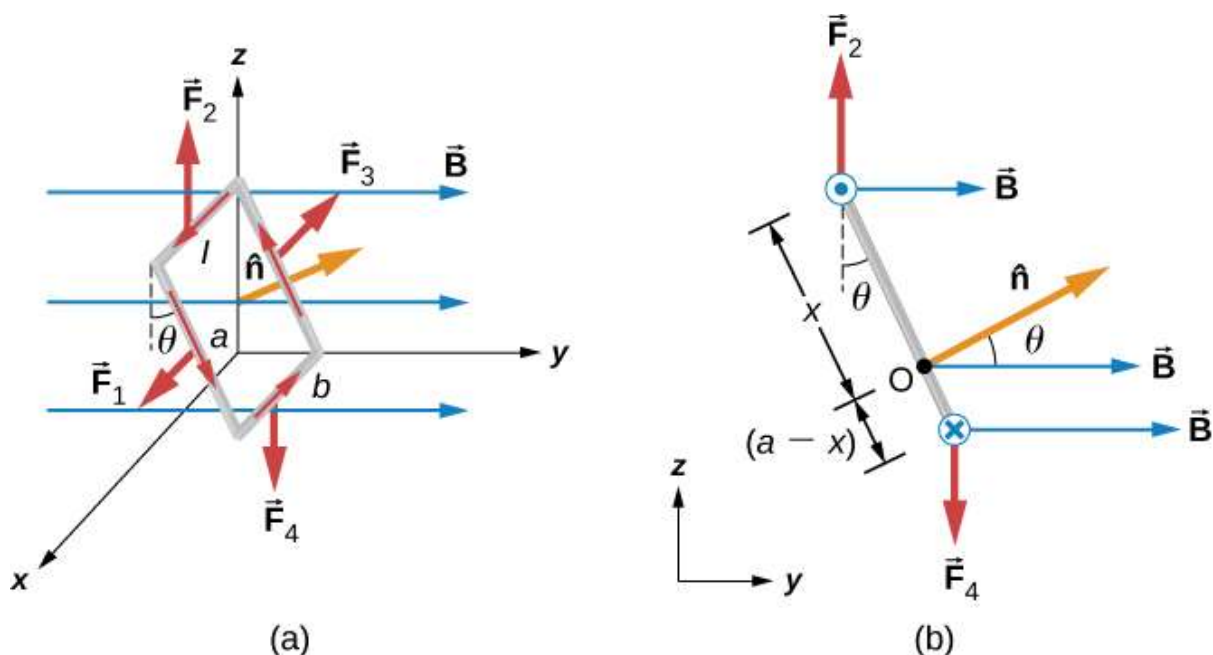


Рис. 1.16. (а) Прямокутна петля струму в однорідному магнітному полі піддається дії крутного моменту, але не сумарної сили. (б) Вид котушки збоку

Петля знаходиться в однорідному магнітному полі  $\vec{B} = B\hat{j}$ . Магнітна сила на прямому струмоведучому дроті довжиною  $l$  задається формулою  $I [\vec{l} \times \vec{B}]$ . Щоб знайти силу, що діє на петлю, ми повинні застосувати це рівняння до кожної з чотирьох сторін. Сила на стороні 1 дорівнює:

$$\vec{F}_1 = IaB \sin(90^\circ - \theta)\hat{i} = IaB \cos \theta \hat{i}, \quad (1.14)$$

де напрямок визначено за допомогою ППР-1. Струм у стороні 3 тече в напрямку, протилежному стороні 1, тому

$$\vec{F}_3 = -IaB \sin(90^\circ + \theta)\hat{i} = -IaB \cos \theta \hat{i}. \quad (1.15)$$

Струми, що діють на сторони 2 і 4 перпендикулярні  $\vec{B}$ , тому:

$$\vec{F}_2 = IbB \hat{k}, \quad \vec{F}_4 = -IbB \hat{k}. \quad (1.16)$$

Тепер ми можемо знайти сумарну силу, яка діє на прямокутну петлю:

$$\sum \vec{F}_\Sigma = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0. \quad (1.17)$$

Хоча такий результат отримано для прямокутної петлі, вона набагато загальніша і справедлива для струмоведучих петель довільної форми. Тобто на контурі струму в однорідному магнітному полі відсутня сумарна сила.

Щоб знайти сумарний крутний момент на контурі струму, зображеному на рис. 1.16, спочатку розглянемо  $F_1$  і  $F_3$ . Оскільки вони мають однакову лінію дії, рівні та протилежні, сума їхніх крутних моментів навколо будь-якої осі дорівнює нулю. Таким чином, якщо на петлі є крутний момент, він повинен бути забезпечений  $F_2$  і  $F_4$ . Обчислимо моменти обертання навколо осі, яка проходить через точку  $O$  рис. 1.16 (вид котушки збоку) і перпендикулярна площині сторінки. Точка  $O$  – це відстань  $x$  від сторони 2 і відстань  $(a - x)$  з боку 4 петлі. Плече  $F_2$  і  $F_4$ , відповідно  $(a - x) \sin \theta$ , таким чином, сумарний крутний момент на петлі становить:

$$\begin{aligned} \sum \vec{\tau} &= \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \vec{\tau}_4 = \\ &= F_2 x \sin \theta \hat{i} - F_4 (a - x) \sin \theta \hat{i} = -IbBx \sin \theta \hat{i} - IbB(a - x) \sin \theta \hat{i}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Отже,

$$\vec{\tau} = -IAB \sin \theta \hat{i}, \quad (1.19)$$

де  $A = ab$  – площа петлі.

Зверніть увагу, що цей крутний момент не залежить від  $x$ ; тобто, він не залежить від того, де точка  $O$  розташована в площині контуру струму. Отже, петля відчуває однаковий крутний момент від магнітного поля навколо будь-якої осі в площині петлі і паралельно осі  $x$ .

Контур замкнутого струму зазвичай називають **магнітним диполем**, а термін  $IA$  відомий як **магнітний дипольний момент**  $\mu$ . Власне, магнітний дипольний момент – це вектор, який визначається так:

$$\vec{\mu} = IA \hat{n}, \quad (1.20)$$

де  $\hat{n}$  – одиничний вектор, спрямований перпендикулярно площині петлі (див. рис. 1.16). Напрямок  $\hat{n}$  виходить за допомогою ППР-2 – якщо зігнути пальці правої руки в напрямку протікання струму в петлі, то великий палець вказує уздовж  $\hat{n}$ . Якщо петля містить  $N$  витків дроту, то її магнітний дипольний момент задається формулою:

$$\vec{\mu} = NIA \hat{n}, \quad (1.21)$$

З точки зору магнітного дипольного моменту, крутний момент на контурі струму, обумовлений однорідним магнітним полем, можна записати так:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \quad (1.22)$$

Це рівняння справедливе для контуру струму в двовимірній площині довільної форми.

Використовуючи обчислення, аналогічне тому, що знайдено в розділі 6 для електричного диполя, потенціальна енергія магнітного диполя дорівнює:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (1.23)$$

### ПРИКЛАД 7.7. Сила і моменти сил на струмоведучих петлях

Кругова петля струму радіусом 2,0 см несе струм 2,0 мА. а) Яка величина його магнітного дипольного моменту? б) Якщо диполь орієнтований під кутом 30 градусів до однорідного магнітного поля величиною 0,50 Тл, то яка величина його крутного моменту та його потенційна енергія?

#### Стратегія

Дипольний момент визначається струмом, помноженим на площу петлі. Площу петлі можна обчислити з площі кола. Крутний момент петлі та потенційна енергія обчислюються шляхом обчислення магнітного моменту, магнітного поля та кута орієнтації в полі.

#### Розв'язання

а. Магнітний момент  $\mu$  визначається струмом, помноженим на площу петлі або  $\pi r^2$ :

$$\mu = IA = (2,0 \times 10^{-3} \text{ А})(\pi \cdot (0,02 \text{ м})^2) = 2,5 \times 10^{-6} \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

б. Крутний момент і потенційна енергія обчислюються шляхом обчислення магнітного моменту, магнітного поля і кута між цими двома векторами. Розрахунки цих величин такі:

$$\begin{aligned} \tau &= |\vec{\mu} \times \vec{B}| = \mu B \sin \theta = (2,5 \times 10^{-6} \text{ А} \cdot \text{м}^2)(0,5 \text{ Тл}) \sin(30^\circ) = \\ &= 6,3 \times 10^{-7} \text{ Н} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \theta = -(2,5 \times 10^{-6} \text{ А} \cdot \text{м}^2)(0,5 \text{ Тл}) \cos(30^\circ) = \\ &= -1,1 \times 10^{-6} \text{ Дж}. \end{aligned}$$

#### Обговорення

Поняття магнітного моменту на атомному рівні розглядається в наступному розділі.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 1.4

В якій орієнтації повинен знаходитися магнітний диполь, щоб створити (а) максимальний момент в магнітному полі? б) яка максимальна енергія диполя?

### 1.6. Ефект Холла

У 1879 році Е. Х. Холл розробив експеримент, який може бути використаний для виявлення ознаки переважаючих носіїв заряду в провідному матеріалі. З історичної точки зору, цей експеримент був першим, який продемонстрував, що носії заряду в більшості металів негативні.

Дослідимо ефект Холла, вивчаючи рух вільних електронів уздовж металевої смуги шириною  $l$  в постійному магнітному полі (рис. 1.17).

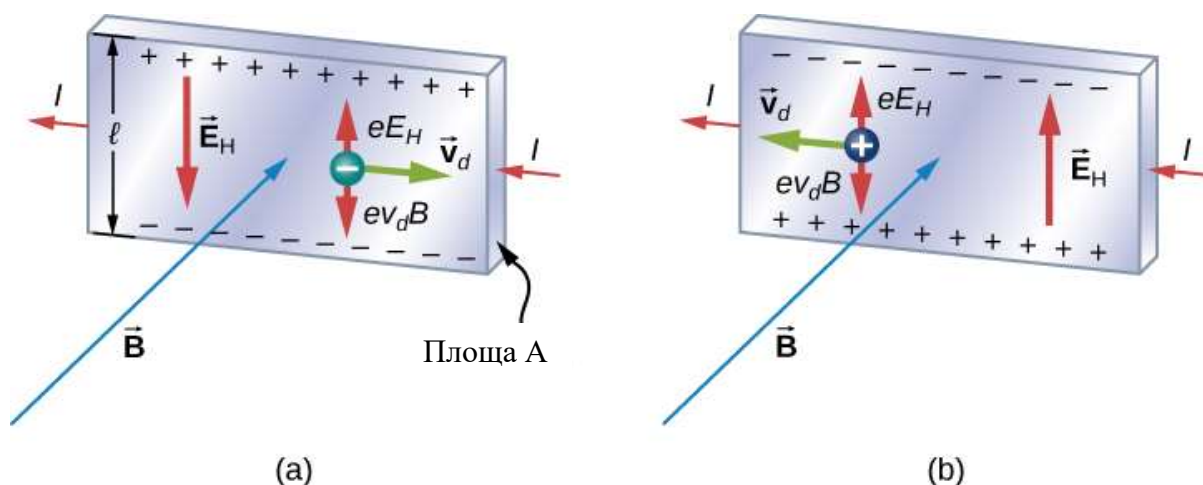


Рис. 1.17. При ефекті Холла різниця потенціалів між верхнім і нижнім краями металевої смуги виникає при відхиленні рухомих носіїв заряду магнітним полем. а) ефект Холла для носіїв негативного заряду; б) ефект Холла для носіїв позитивного заряду

Електрони рухаються зліва направо, тому магнітна сила, яка діє на них, штовхає їх до нижнього краю смужки. При цьому на верхньому краї смужки залишається надлишок позитивного заряду, в результаті чого виникає електричне поле  $E$ , спрямоване зверху вниз. Концентрація заряду на обох краях наростає до тих пір, поки електрична сила, що діє на електрони в одному напрямку, не буде врівноважена магнітною силою на них в протилежному напрямку. Рівновага досягається тоді, коли:

$$eE = ev_d B, \quad (1.24)$$

де  $e$  – величина заряду електрона,  $v_d$  – швидкість дрейфу електронів, а  $E$  – величина електричного поля, створюваного відокремленим зарядом. Розв'язання цього рівняння для швидкості дрейфу призводить до виразу:

$$v_d = \frac{E}{B}. \quad (1.25)$$

Сценарій, коли електричне і магнітне поля перпендикулярні одне одному, називається ситуацією схрещеного поля. Якщо ці поля створюють рівні і протилежні сили на зарядженій частинці, що рухається зі швидкістю, тоді ці частинки здатні проходити через апарат, званий **селектором швидкості**, не відхиляючись. Ця швидкість представлена в рівнянні 1.25. При будь-якій іншій швидкості заряджена частинка, послана в ті ж поля, буде відхилена магнітною або електричною силою.

Повертаючись до ефекту Холла, якщо струм в смузі дорівнює  $I$ , тоді отримуємо:

$$I = nev_d A, \quad (1.26)$$



де  $n$  – число носіїв заряду на об'єм, а  $A$  – площа поперечного перерізу смуги. Об'єднання рівнянь для  $v_d$  і  $I$  дає:

$$I = ne \left( \frac{E}{B} \right) A. \quad (1.27)$$

Поле  $E$  пов'язане з різницею потенціалів  $V$  між гранями смуги так:

$$E = \frac{V}{l}. \quad (1.28)$$

Величина  $V$  називається *потенціалом Холла* і може бути виміряна вольтметром. Нарешті, об'єднання рівнянь для  $I$  і  $E$  дає нам:

$$V = \frac{IBl}{neA}, \quad (1.29)$$

де верхній край смуги на рис. 1.17 позитивний по відношенню до нижнього краю.

Ми також можемо об'єднати рівняння 1.24 і рівняння 1.28, щоб отримати вираз для напруги Холла через магнітне поле:

$$V = Blv_d. \quad (1.30)$$

Що робити, якщо носії заряду позитивні, як на рис. 1.17? Для того ж струму  $I$  величина  $V$  ще задається рівнянням 1.29. Однак верхній край тепер від'ємний по відношенню до нижнього. Тому, просто вимірявши знак  $V$ , можна визначити знак більшості носіїв заряду в металі.

Вимірювання потенціалу Холла показують, що електрони є домінуючими носіями заряду в більшості металів. Однак потенціали Холла вказують на те, що для деяких металів, таких як вольфрам, берилій і багато напівпровідників, більшість носіїв заряду є позитивними. Виявляється, що провідність позитивним зарядом обумовлена міграцією відсутніх електронних ділянок (так званих дірок) на іонах.

Ефект Холла використовується для вимірювання магнітних полів (датчик магнітного поля смартфона). Якщо матеріал з відомою густиною носіїв заряду  $n$  помістити в магнітне поле і виміряти  $V$ , то це поле можна визначити з рівняння 1.29. У дослідницьких лабораторіях, де поля електромагнітів, що використовуються для точних вимірювань, повинні бути надзвичайно стабільними, «зонд Холла» зазвичай використовується як частина електронної схеми, яка регулює поле.

### ПРИКЛАД 1.8. Селектор швидкості

Електронний промінь надходить в селектор швидкостей схрещеного поля з магнітним і електричним полями  $2,0$  мТл і  $6,0 \times 10^3$  Н/Кл, відповідно. а) Якою має бути швидкість електронного пучка, щоб не відхилитися в схрещених полях? Якщо вимкнути електричне поле, то б) яке прискорення електронного пучка і в) який радіус кругового руху?

### Стратегія

Електронний пучок не відхиляється ні магнітним, ні електричним полями, якщо ці сили врівноважені. Виходячи з цих врівноважених сил,

обчислюємо швидкість електронів. Без електричного поля для знаходження прискорення використовується тільки магнітна сила в другому законі Ньютона. Нарешті, радіус шляху визначимо на отриманому круговому русі від магнітної сили.

### Розв'язання

а. Швидкість пучка електронів у схрещених полями обчислюється згідно рівнянням 1.25:

$$v_d = \frac{E}{B} = \frac{6 \times 10^3 \text{ Н/Кл}}{2 \times 10^{-3} \text{ Тл}} = 3 \times 10^6 \text{ м/с.}$$

б. Прискорення обчислюється з сумарної сили магнітного поля, що дорівнює масі, помноженій на прискорення.

$$ma = qvB.$$

Величина прискорення дорівнює:

$$a = \frac{qvB}{m} = \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ Кл})(3 \times 10^6 \text{ м/с})(2 \times 10^{-3} \text{ Тл})}{9,1 \times 10^{-31} \text{ кг}} = 1,1 \times 10^{15} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

в. Радіус шляху впливає з рівності доцентрової  $F_{\text{доц}} = \frac{mv^2}{r}$  і сили Лоренца  $F_L = qvB$ :

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{(9,1 \times 10^{-31} \text{ кг})(3 \times 10^6 \text{ м/с})}{(1,6 \times 10^{-19} \text{ Кл})(2 \times 10^{-3} \text{ Тл})} = 8,5 \times 10^{-3} \text{ м.}$$

### Обговорення

Якби електрони в пучку мали швидкості вище або нижче відповіді в частині (а), тоді ці електрони мали б сумарну силу з боку магнітного та електричного поля не рівну нулеві. Тому тільки ті електрони, які мають цю конкретну швидкість, пройдуть через нього не відхиляючися.

### ПРИКЛАД 1.9. Потенціал Холла в срібній стрічці

На рис. 1.18 зображена срібляста стрічка, переріз якої становить 1,0 см на 0,20 см. Стрічка несе струм 100 А зліва направо, і вона лежить в однорідному магнітному полі величиною 1,5 Тл. Використовуючи значення густини  $n = 5,9 \times 10^{28}$  електронів на кубічний метр для срібла знайдіть потенціал Холла між краями стрічки.

### Стратегія

Оскільки більшість носіїв заряду є електронами, то полярність напруги Холла зазначена на малюнку. Величина напруги Холла обчислюється за рівнянням 1.29:

$$V = \frac{IBl}{neA}.$$

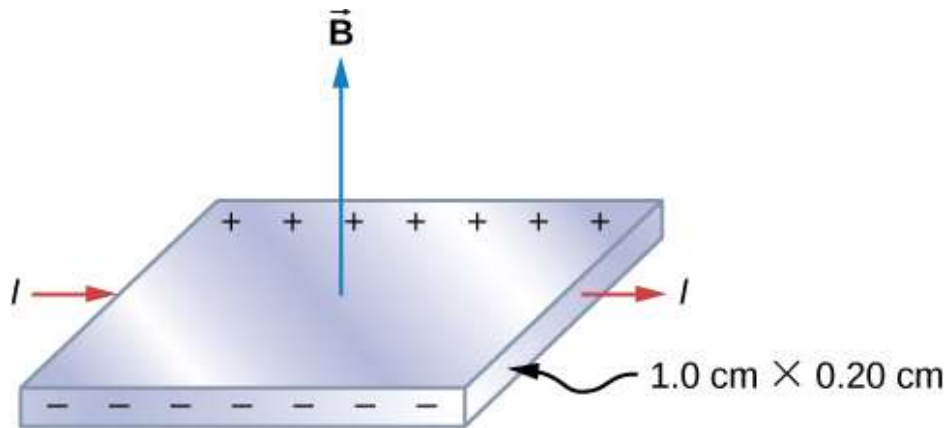


Рис. 1.18. Показано схема для обчислення потенціалу Холла в срібній стрічці в магнітному полі

### Розв'язання

Розраховуючи напругу Холла, нам потрібно знати струм через матеріал, магнітне поле, довжину, кількість носіїв заряду та площу. Оскільки всі вони задані, то напруга Холла обчислюється як:

$$V = \frac{IBl}{neA} = \frac{(100 \text{ A})(1,5 \text{ Тл})(1,0 \times 10^{-2} \text{ м})}{(5,9 \times 10^{28} / \text{м}^3)(1,6 \times 10^{-19} \text{ Кл})(2 \times 10^{-5} \text{ м}^2)} = 7,9 \times 10^{-6} \text{ В.}$$

### Обговорення

Як і в цьому прикладі, потенціал Холла, як правило, дуже малий, і для його вимірювання потрібне чутливе обладнання.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 1.5

Зонд Холла складається з мідної смужки,  $n = 8,5 \times 10^{28}$  електронів на кубічний метр, який має ширину 2,0 см і товщину 0,10 см. Чому дорівнює магнітне поле при  $I = 50 \text{ А}$ , а потенціал Холла дорівнює (а)  $4,0 \text{ мВ}$ , б)  $6,0 \text{ мВ}$ ?

## 1.7. Застосування магнітних сил і полів

Можливість маніпулювати та сортувати заряджені частинки дозволяє глибше експериментувати, щоб зрозуміти, з чого складається матерія. Спочатку ми подивимося на мас-спектрометр, щоб побачити, як ми можемо розділити іони за співвідношенням заряду до маси. Далі ми обговорюємо циклотрони як метод прискорення зарядів до дуже високих енергій.

### Мас-спектрометр

**Мас-спектрометр** – це прилад, який розділяє іони відповідно до їх відношення заряду до маси. Одна з версій – мас-спектрометр Бейнбріджа – проілюстрована на рис. 1.19.

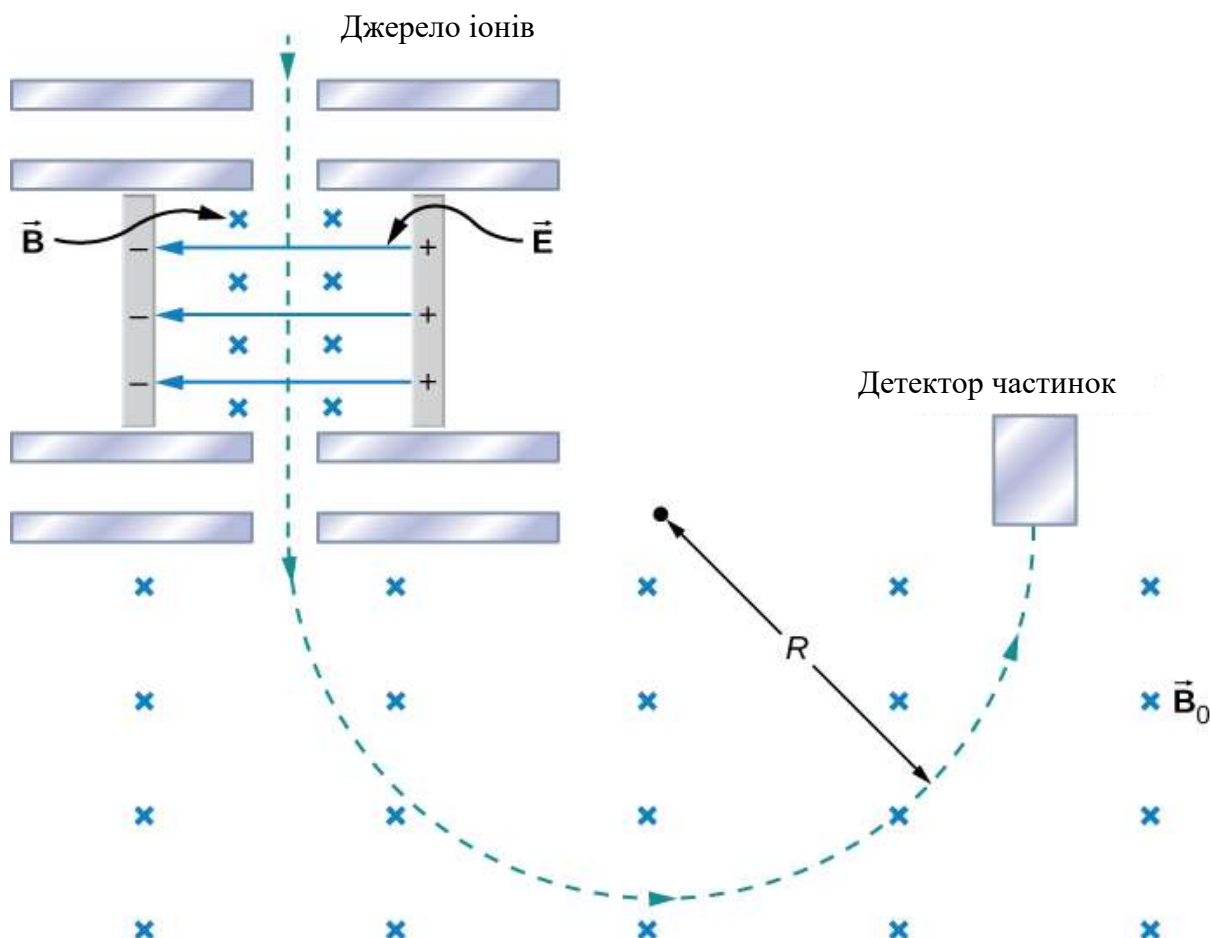


Рис. 1.19. Схема мас-спектрометра Бейнбріджа, що показує вихід заряджених частинок з джерела, за яким слідує селектор швидкості, де електрична і магнітна сили врівноважені, а потім область однорідного магнітного поля, де в кінцевому підсумку детектується частинка

Іони, що утворюються в джерелі, спочатку проходять через селектор швидкостей, де магнітна сила врівноважується електричною силою. Всі ці іони з'являються на виході з однаковою швидкістю  $v = \frac{E}{B}$ , оскільки будь-який іон з іншою швидкістю відхиляється від прямолінійної траєкторії. Потім іони потрапляють в однорідне магнітне поле  $B_0$ , де вони рухаються по круговій траєкторії, радіус якої  $R$  задається рівнянням 1.5. Радіус вимірюється детектором частинок, розташованим так, як показано на малюнку.

Зв'язок між відношенням заряду до маси  $q/m$  і радіусом  $R$  визначається поєднанням рівняння 1.5 і рівняння 1.25:

$$\frac{q}{m} = \frac{E}{qBB_0R}. \quad (1.31)$$

Оскільки більшість іонів заряджені поодинці ( $q = 1,6 \times 10^{-19}$  Кл), вимірні значення  $R$  можуть бути використані з цим рівнянням для визначення маси іонів. За допомогою сучасних приладів маси можуть бути визначені з відносною точністю  $10^{-8}$ .

Цікаве застосування спектрометра в складі системи виявлення дуже малих витоків газу в дослідницькому апараті. У лабораторіях фізики низьких температур пристрій, відомий як холодильник для розведення, використовує суміш He-3, He-4 та інших кріогенів для досягнення температури значно нижче 1 К. Продуктивність холодильника сильно ускладнюється, якщо відбувається навіть незначний витік між різними його компонентами. Отже, перед тим, як охолонути до потрібної температури, холодильник піддається тесту на герметичність. В один з його відсіків впорскується невелика кількість газоподібного гелію, в той час як сусідній, але нібито ізольований відсік з'єднується з високовакуумним насосом, до якого прикріплений мас-спектрометр. Нагріта нитка іонізує будь-які атоми гелію, евакуйовані насосом. Виявлення цих іонів спектрометром вказує на витік між двома відсіками холодильника для розведення.

У поєднанні з газовою хроматографією мас-спектрометри широко використовуються для ідентифікації невідомих речовин. У той час як частина газової хроматографії розщеплює речовину, мас-спектрометр відокремлює отримані іонізовані молекули. Ця техніка використовується в правоохоронних органах для виявлення заборонених наркотиків, в охороні для ідентифікації вибухових речовин і в багатьох медичних цілях.

## Циклотрон

**Циклотрон** був розроблений Е. О. Лоуренсом для прискорення заряджених частинок (зазвичай протонів, дейтронів або альфа-частинок) до великих кінетичних енергій. Потім ці частинки використовуються для експериментів з ядерними зіткненнями для отримання радіоактивних ізотопів. Циклотрон зображений на рис. 1.20.

Частинки переміщуються між двома плоскими напівциліндричними металевими ємностями  $D_1$  і  $D_2$ , які називаються **деками**. Деки укладені в металевий короб більшого розміру, а апарат поміщений між полюсами електромагніту, що забезпечує рівномірне магнітне поле. Повітря видаляється з великого коробу, щоб частинки не втрачали енергію і не відхилялися через зіткнення з молекулами повітря. Деки підключені до високочастотного джерела напруги, що забезпечує змінне електричне поле в невеликій області між ними. Оскільки деки зроблені з металу, їх внутрішня частина захищена від електричного поля.

Припустимо, що позитивно заряджена частинка вводиться в проміжок між деками, коли  $D_2$  знаходиться на позитивному потенціалі відносно  $D_1$ . Потім частинка прискорюється через щілину і потрапляє в  $D_1$  після отримання кінетичної енергії  $qV$ , де  $V$  – середня різниця потенціалів між деками.

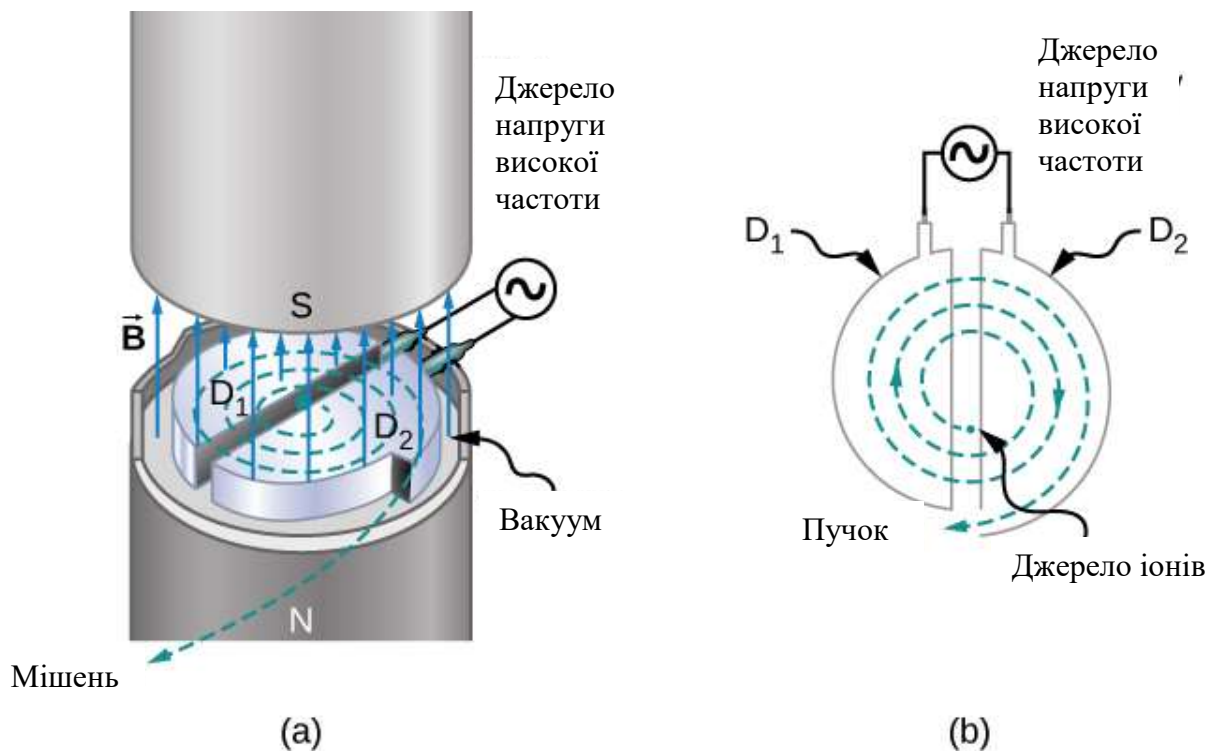


Рис. 1.20. Внутрішня частина циклотрона. Однорідне магнітне поле прикладається, коли циркулюючі протони проходять через деки, та набуваючи енергії, проходячи через проміжок між деками

Коли частинка знаходиться всередині  $D_1$ , тільки однорідне магнітне поле  $\vec{B}$  електромагніту діє на неї, тому частинка рухається по колу радіуса:

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (1.32)$$

з періодом

$$T = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (1.33)$$

Період змінної напруги встановлений рівним  $T$ , тому, поки частинка знаходиться всередині  $D_1$ , рухаючись по своїй півколовій орбіті за час  $T/2$ , полярність дек зворотна. Коли частинка знову входить в щілину,  $D_1$  позитивна по відношенню до  $D_2$ , і частинка знову прискорюється через щілину, отримуючи тим самим кінетичну енергію  $qV$ . Потім частинка входить в  $D_2$ , циркулює по трохи більшому колу і виходить з  $D_2$ , провівши в цій декі час  $T/2$ . Цей процес повторюється до тих пір, поки орбіта частинки не досягне кордону деки. У цей момент частинка (власне, пучок частинок) витягується з циклотрона і використовується з якоюсь експериментальною метою.

Робота циклотрона залежить від того, що в однорідному магнітному полі орбітальний період частинки не залежить від її радіуса і кінетичної енергії. Отже, період джерела змінної напруги повинен бути встановлений тільки на одному значенні, заданому рівнянням 1.33. При такому

налаштуванні електричне поле прискорює частинки щоразу, коли вони опиняються між деками.

Якщо максимальний радіус орбіти в циклотроні дорівнює  $R$ , то з рівняння 1.32 максимальна швидкість циркулюючої частинки масою  $m$  і зарядом  $q$  дорівнює:

$$v_{\max} = \frac{qBR}{m}. \quad (1.34)$$

Таким чином, його кінетична енергія при викиді з циклотрона становить:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{(qBR)^2}{2m}. \quad (1.35)$$

Максимальна кінетична енергія, досяжна за допомогою цього типу циклотрона, становить приблизно 30 МеВ. Вище цієї енергії важливе значення набувають релятивістські ефекти, що призводить до того, що орбітальний період збільшується зі збільшенням радіуса. З енергією в кілька сотень МеВ релятивістські ефекти можна компенсувати, змушуючи магнітне поле поступово збільшуватися зі збільшенням радіуса орбіти. Однак для більш високих енергій необхідно використовувати набагато складніші методи прискорення частинок.

Частинки прискорюються до дуже високих енергій або за допомогою лінійних прискорювачів, або синхротронів. Лінійний прискорювач прискорює частинки безперервно електричним полем електромагнітної хвилі, яка рухається вниз по довгій вакуумній трубці. Стенфордський лінійний прискорювач (SLAC) має довжину близько 3,3 км і розганяє електрони та позитрони (позитивно заряджені електрони) до енергій 50 ГеВ. Синхротрон побудований таким чином, що його магнітне поле збільшується зі швидкістю частинок таким чином, що частинки залишаються на орбіті фіксованого радіуса. Синхротрон з найвищою енергією у світі розташований у ЦЕРНі, що на швейцарсько-французькому кордоні поблизу Женеві, де 2012 відбулося експериментальне відкриття бозона Хіггса (рис. 1.21). Цей синхротрон може розганяти пучки приблизно  $10^{13}$  протонів до енергій близько  $10^3$  Гев.

### **ПРИКЛАД 1.10. Прискорення альфа-частинок в циклотроні**

Циклотрон, що використовується для прискорення альфа-частинок ( $m = 6,64 \times 10^{-27}$  кг,  $q = 3,2 \times 10^{-19}$  Кл) має радіус 0,50 м і магнітне поле 1,8 Тл.  
а) Який період обертання альфа-частинок? б) Яка їхня максимальна кінетична енергія?

#### **Стратегія**

а. Період обертання – це відстань, пройдена по колу, поділена на швидкість. Визначивши, що прикладена магнітна сила є доцентровою, можна вивести формулу періоду.

б. Кінетичну енергію можна знайти з максимальної швидкості частинок, що відповідає максимальному радіусу всередині циклотрона.

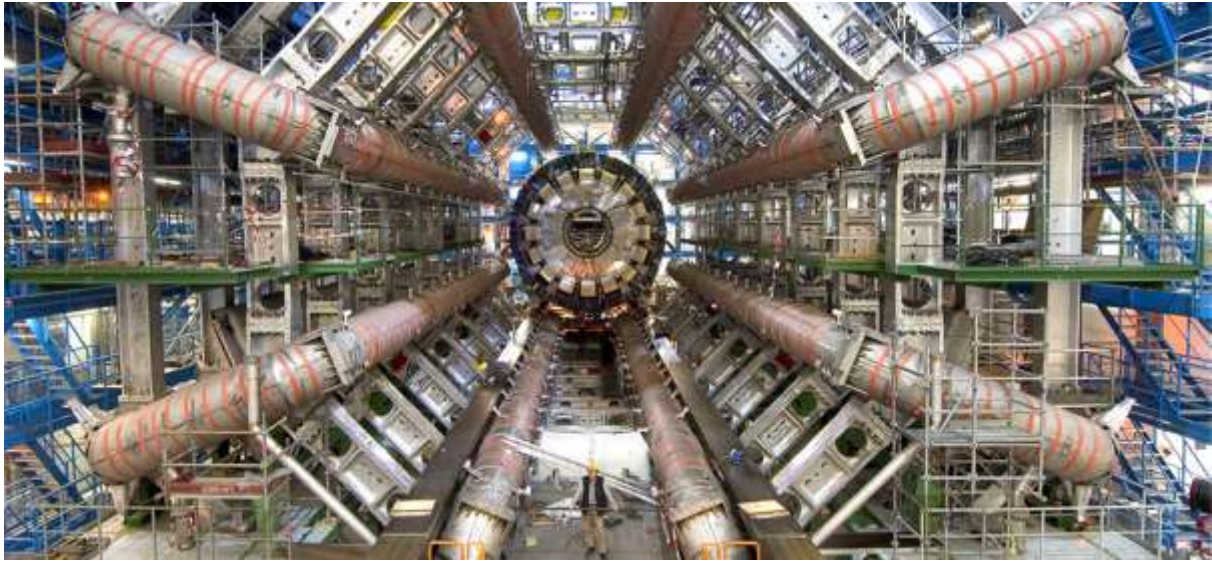


Рис. 1.21. Великий адронний колайдер (ВАК) розташований на глибині понад 150 метрів під землею на кордоні Швейцарії та Франції поблизу Женев, Швейцарія. LHC є найпотужнішою машиною, коли-небудь розробленою для перевірки нашого розуміння взаємодії елементарних частинок. Тут показаний детектор ATLAS, який допомагає ідентифікувати нові частинки, що утворюються при зіткненнях

### Розв'язання

а. Визначивши масу, заряд і магнітне поле в задачі, можна обчислити період:

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi(6,64 \times 10^{-27} \text{ кг})}{(3,2 \times 10^{-19} \text{ Кл})(1,8 \text{ Тл})} = 7,3 \times 10^{-8} \text{ с.}$$

б. Визначивши заряд, магнітне поле, радіус шляху та масу, ми можемо обчислити максимальну кінетичну енергію:

$$\frac{mv_{\text{max}}^2}{2} = \frac{(qBR)^2}{2m} = \frac{((3,2 \times 10^{-19} \text{ Кл})(1,8 \text{ Тл})(0,5 \text{ м}))^2}{2(6,64 \times 10^{-27} \text{ кг})} 6,2 \times 10^{-12} \text{ Дж} = 39 \text{ МеВ.}$$

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 1.6

Циклотрон призначений для розгону протонів до кінетичних енергій 20 МеВ за допомогою магнітного поля 2,0 Тл. Який радіус циклотрона?



## ДЖЕРЕЛА МАГНІТНИХ ПОЛІВ

### Введення



Рис. 2.1. Зовнішній жорсткий диск, підключений до комп'ютера, працює шляхом магнітного кодування інформації, яку можна швидко зберегти або отримати. Ключовою ідеєю в розробці цифрових пристроїв є можливість виробляти і використовувати магнітні поля

У попередньому розділі ми побачили, що рухома заряджена частинка створює магнітне поле. Цей зв'язок між електрикою і магнетизмом використовується в електромагнітних пристроях, таких як жорсткий диск комп'ютера. Фактично, це основний принцип, що лежить в основі більшості технологій сучасного суспільства, включаючи телефони, телебачення, комп'ютери та Інтернет.

У цій главі ми розглянемо, як магнітні поля створюються при довільному розподілі електричного струму, використовуючи закон Біо-Савара. Потім дивимось, як струмоведучі дроти створюють магнітні поля, і виводимо сили, що виникають між двома струмоведучими проводами через ці магнітні поля. Ми також вивчаємо крутні моменти, створювані магнітними полями контурів струму. Потім ми узагальнюємо ці результати до важливого закону електромагнетизму, який називається законом Ампера.

Ми розглянемо деякі пристрої, які створюють магнітні поля від струмів у геометрії, заснованій на петлях, відомих як соленоїди та тороїди. Нарешті, ми розглянемо, як матеріали поведуться в магнітних полях, і класифікуємо матеріали на основі їх реакції на магнітні поля.

## 2.1. Закон Біо-Савара

Ми бачили, що маса створює гравітаційне поле, а також взаємодіє з цим полем. Заряд створює електричне поле і також взаємодіє з цим полем. Оскільки рухомий заряд (тобто струм) взаємодіє з магнітним полем, ми можемо очікувати, що він також створює це поле — і це відбувається.

Рівняння, яке використовується для обчислення магнітного поля, створеного струмом, відоме як **закон Біо-Савара**. Це емпіричний закон, названий на честь двох вчених, які досліджували взаємодію між прямим проводом зі струмом і постійним магнітом. Цей закон дозволяє обчислити величину і напрямок магнітного поля, створюваного струмом, який протікає в дроті. **Закон Біо-Савара** стверджує, що в будь-якій точці  $P$  (рис. 2.2) магнітне поле  $\vec{B}$  за рахунок елемента  $d\vec{l}$  струмоведучого проводу задається формулою:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I [d\vec{l} \times \hat{r}]}{4\pi r^2}. \quad (2.1)$$

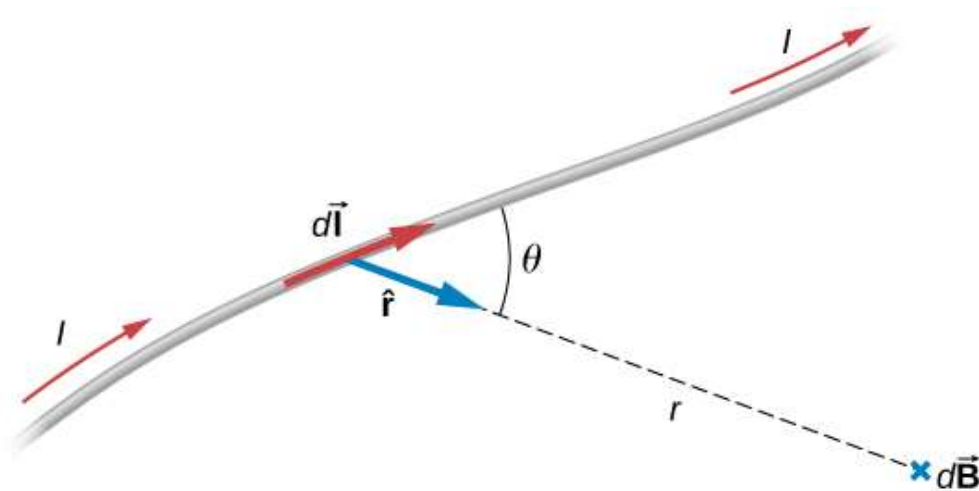


Рис. 2.2. Елемент струму  $I d\vec{l}$  створює магнітне поле в точці  $P$ , задане законом Біо-Савара

Константа  $\mu_0$  відома як **проникність вільного простору** (вакууму) і в системі СІ становить:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{Тл} \cdot \text{м/А} \quad (2.2)$$

Нескінченно малий відрізок дроту  $d\vec{l}$  напрямлений в тому ж напрямку, що і струм  $I$ ,  $r$  — відстань від  $d\vec{l}$  до точки  $P$  і  $\hat{r}$  — одиничний вектор, як показано на малюнку.

Напрямок  $d\vec{B}$  визначається застосуванням правила правого гвинта до векторного добутку  $d\vec{l} \times \hat{r}$ . Величина  $d\vec{B}$  дорівнює:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{4\pi r^2}, \quad (2.3)$$

де  $\theta$  — кут між  $d\vec{l}$  і  $\hat{r}$ .

Зверніть увагу, що якщо  $\theta = 0$ , тоді  $d\vec{B} = 0$ . Поле, створюване струмовим елементом  $I d\vec{l}$  не має компонента, паралельного  $d\vec{l}$ .

Магнітне поле, зумовлене скінченною довжиною струмоведучого дроту, знаходять шляхом інтегрування рівняння 2.3 уздовж дроту, що дає нам звичайну форму закону Біо-Савара. Оскільки це векторний інтеграл, то внески від різних елементів струму можуть не вказувати в одному напрямку. Отже, інтеграл часто важко оцінити навіть для досить простої геометрії. Наступна стратегія може бути корисною.

### **СТРАТЕГІЯ ВИРІШЕННЯ ПРОБЛЕМ. Розв'язування задач за законом Біо-Савара.**

Для розв'язання задач за законом Біо-Савара корисними є такі кроки:

1. Визначте, що закон Біо-Савара є обраним методом розв'язання даної задачі. Якщо в задачі є симетрія  $\vec{B}$  і  $d\vec{l}$ , закон Ампера може бути кращим методом вирішення питання, яке буде розглянуто в «Законі Ампера».
2. Намалюйте довжину елемента  $d\vec{l}$  і одиничний вектор  $\vec{r}$ , зазначаючи, що  $d\vec{l}$  напрямлений в напрямку течії струму і  $\vec{r}$  вказує від цього елемента до точки, де потрібне визначити поле.
3. Обчислити векторний добуток  $d\vec{l} \times \vec{r}$ . Результируючий вектор задає напрямок магнітного поля за законом Біо-Савара.
4. Скористайтесь рівнянням 2.4 і підставьте всі задані величини у вираз для визначення магнітного поля. Зверніть увагу, що всі змінні, які залишаються незмінними по всій довжині дроту, можуть бути винесені за знак інтегрування.
5. Використовуйте правило правої руки, щоб перевірити напрямок магнітного поля, створюваного струмом.

### **ПРИКЛАД 2.1. Розрахунок магнітних полів коротких відрізків струму**

Короткий провід довжиною 1,0 см несе струм 2,0 А у вертикальному напрямку (рис. 2.3). Решта дроту екранована, тому вона не додає магнітного поля, створюваного дротом. Обчисліть магнітне поле в точці  $P$ , яка знаходиться на відстані 1 метра від дроту в напрямку осі  $x$ .

#### **Стратегія**

Визначити магнітне поле в точці  $P$  можна за законом Біо-Саварта. Оскільки поточний відрізок набагато менший за відстань  $x$ , ми можемо відкинути інтеграл від виразу. Інтеграція перетворюється в підсумовування, але тільки для маленького  $dl$ , який ми тепер записуємо як  $\Delta l$ . Інший спосіб розв'язання полягає в тому, що кожне зі значень радіуса майже однакове, незалежно від того, де знаходиться поточний елемент на відрізку прямої, якщо  $\Delta l$  є малим у порівнянні з  $x$ . Кут нахилу  $\theta$  обчислюється за допомогою

дотичної функції. Використовуючи наведені числа, ми можемо обчислити магнітне поле в точці  $P$ .

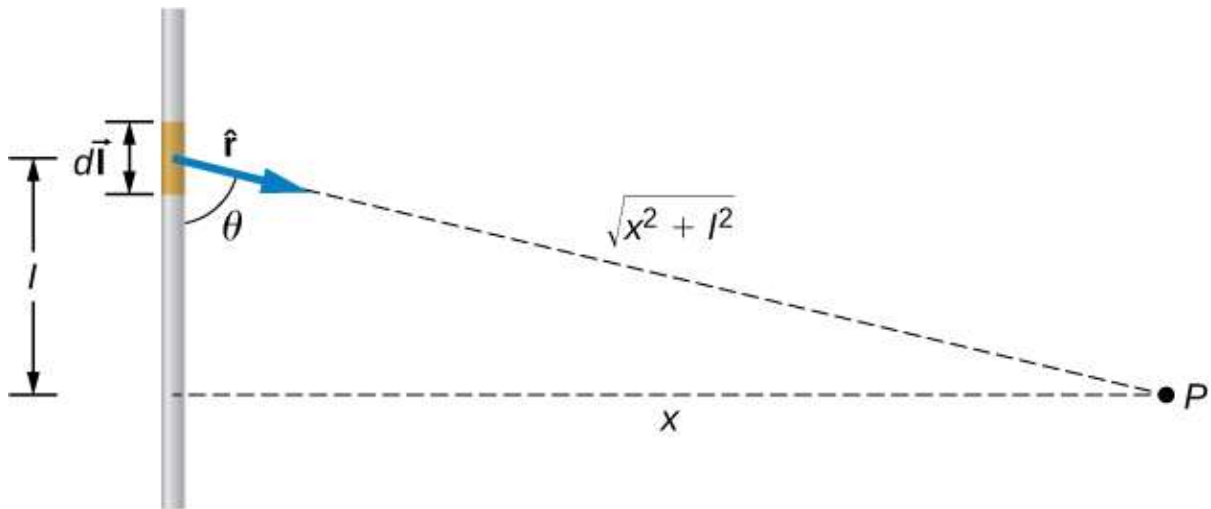


Рис. 2.3. Невеликий відрізок прямого дроту несе струм  $I$  у вертикальному напрямку. Чому дорівнює магнітне поле на відстані  $x$  від відрізка?

### Розв'язок

Кут між  $\Delta l$  і  $\vec{r}$  обчислюється з тригонометрії, знаючи відстані  $l$  і  $x$  із задачі:

$$\theta = \arctg\left(\frac{1 \text{ м}}{0,01 \text{ м}}\right) = 89,4^\circ.$$

Магнітне поле в точці  $P$  обчислюється за законом Біо-Савара:

$$B = \frac{\mu_0 I \Delta l \sin \theta}{4\pi r^2} = (1 \times 10^{-7} \text{ Тл} \cdot \text{м/А}) \left( \frac{2 \text{ А}(0,01 \text{ м}) \sin 89,4^\circ}{(1 \text{ м})^2} \right) = 2 \times 10^{-9} \text{ Тл}.$$

З правила правої руки і закону Біо-Савара поле спрямовується на сторінку.

### Обговорення

Таке наближення добре тільки в тому випадку, якщо довжина відрізка прямої дуже мала в порівнянні з відстанню від поточного елемента до точки. Якщо ні, то для обчислення магнітного поля необхідно використовувати інтегральну форму закону Біо-Савара на всьому відрізку прямої.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 2.1

На прикладі 2.1, на якій відстані має знаходитися точка  $P$ , щоб величина магнітного поля складало половину заданої відповіді?

## ПРИКЛАД 2.2. Розрахунок магнітного поля дроту зі струмом у вигляді кругової дуги

Провід переносить струм  $I$  по круговій дузі радіусом  $R$ , протягнутий через довільний кут  $\theta$  (рис. 2.4). Обчисліть магнітне поле в центрі цієї дуги в точці  $P$ .

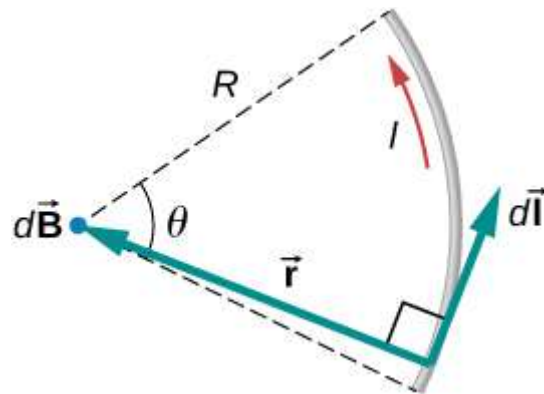


Рис. 2.4 Відрізок дроту, що несе струм  $I$ . Вектор  $d\vec{l}$  і  $\vec{r}$  вказуються

### Стратегія

Визначити магнітне поле в точці  $P$  можна за законом Біо-Савара. Напрямки радіальної довжини і довжини шляху завжди знаходяться під прямим кутом, тому векторний добуток перетворюється на множення. Ми також знаємо, що відстань уздовж шляху  $dl$  пов'язана з радіусом  $r$ , помноженим на кут  $\theta$  (у радіанах). Тоді ми можемо витягнути всі константи з інтегрування і визначити величину магнітного поля.

### Розв'язок

Закон Біо-Савара починається з наступного рівняння:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I[d\vec{l} \times \hat{r}]}{r^2}.$$

Оскільки ми інтегруємо вздовж дуги, всі внески в магнітне поле знаходяться в одному напрямку (за межами сторінки), тому ми можемо працювати з величиною поля. Векторний добуток перетворюється на множення, оскільки шлях  $dl$  і радіальний напрямок перпендикулярні:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I r d\theta}{r^2}.$$

Струм і радіус можуть бути витягнуті з інтеграла, тому що вони однаково незалежно від того, де ми знаходимося на дроті. При цьому залишається тільки інтеграл від кута:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int d\theta.$$

Кут нахилу змінюється на дроті від 0 до  $\theta$ ; отже, в результаті виходить:

$$B = \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi r}$$

## Обговорення

Напрямок магнітного поля в точці  $P$  визначається правилом правої руки, як показано в попередньому розділі. Якщо поряд з дугою на схемі є й інші дроти, і вам пропонується знайти сумарне магнітне поле, знайдіть кожен внесок дроту або дуги і додайте результати шляхом суперпозиції векторів. Обов'язково звертайте увагу на напрямок кожного внеску. Також зауважте, що в симетричній ситуації, наприклад, при прямому або круговому дроті, внески з протилежних сторін точки  $P$  компенсують один одного.

## ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 2.2

Дротяна петля утворює повне коло радіуса  $R$  і струму  $I$ . Яка величина магнітного поля в центрі?

### 2.2. Магнітне поле тонкого прямого дроту

Який струм потрібен, щоб створити значне магнітне поле, можливо, таке ж сильне, як поле Землі? Геодезисти скажуть вам, що повітряні лінії електропередач створюють магнітні поля, які заважають показанням їх компаса. Дійсно, коли в 1820 році Ерстед виявив, що струм в дроті впливає на стрілку компаса, він не мав справи з надзвичайно великими струмами. Як форма проводів, що проводять струм, впливає на форму створюваного магнітного поля? У розділі «Магнітні сили і поля» ми зазначали, що контур струму створює магнітне поле, подібне до магніту на стержні, але як щодо прямого дроту? Ми можемо використовувати закон Біо-Савара, щоб відповісти на всі ці питання, включаючи визначення магнітного поля довгого прямого дроту.

На рис. 2.5 показаний відрізок нескінченно довгого прямого проводу, який несе струм  $I$ . Чому дорівнює магнітне поле в точці  $P$ , розташованій на відстані  $R$  від дроту?

Почнемо з розгляду магнітного поля, обумовленого елементом струму  $I d\vec{l}$  розташований у позиції  $X$ . У точці  $P$  магнітні поля, зумовлені всіма елементами струму, мають однаковий напрямок. Це означає, що ми можемо обчислити там сумарне поле, обчисливши скалярну суму внесків окремих елементів.

Оскільки  $|d\vec{x} \times \hat{r}| = (dx)(1)\sin \theta$ , ми маємо за законом Біо-Савара:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \sin \theta dx}{r^2}. \quad (2.5)$$

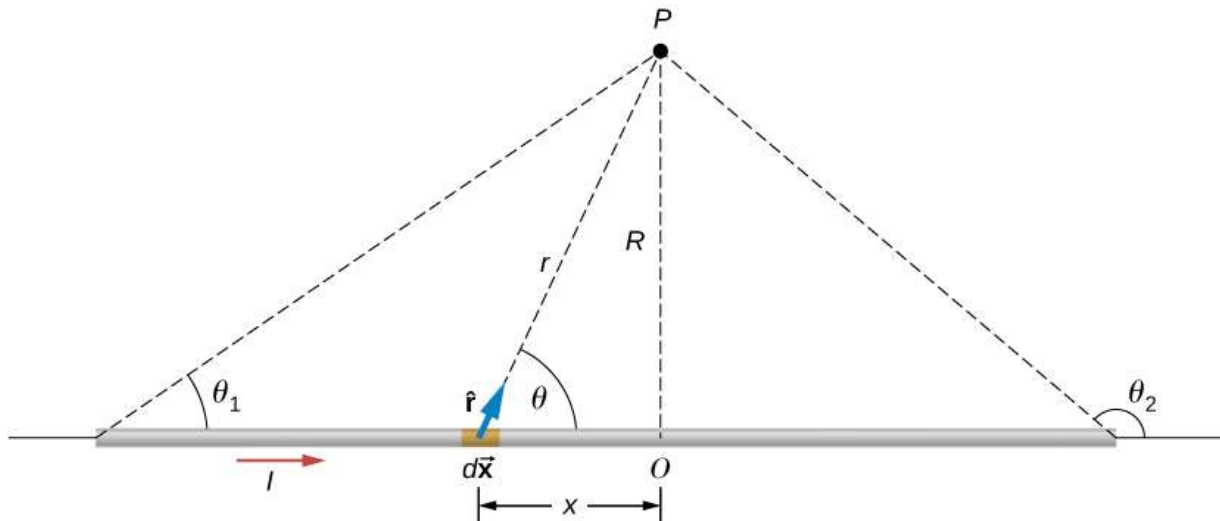


Рис. 2.5. Відрізок тонкого прямого струмоведучого дроту. Незалежна змінна  $\theta$  має межі  $\theta_1$  і  $\theta_2$

Провід симетричний відносно точки  $O$ , тому ми можемо встановити межі інтегрування від нуля до нескінченності і подвоїти відповідь, а не інтегрувати від негативної нескінченності до позитивної нескінченності. Грунтуючись на малюнку та геометрії, ми можемо записати вирази для  $r$  та  $\sin \theta$  через  $x$  і  $R$ , а саме:

$$r = \sqrt{x^2 + R^2},$$

$$\sin \theta = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}.$$

Підставляючи ці вирази в рівняння 2.5, інтегрування магнітного поля набуває вигляду:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{R dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (2.6)$$

Отже, величина магнітного поля визначається так:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left[ \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right]_0^{\infty}. \quad (2.7)$$

Підставляючи межі, ми отримуємо розв'язок:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (2.8)$$

Лінії магнітного поля нескінченного дроту кругові і центровані на дроті (рис. 2.6), і вони однакові в кожній площині, перпендикулярній дроту.

Оскільки поле зменшується з відстанню від дроту, відстань між лініями поля повинна відповідно збільшуватися з відстанню. Напрямок цього магнітного поля можна знайти за допомогою другої форми правила правої руки (проілюстровано на рис. 2.6). Якщо ви тримаєте дрід правою рукою так, щоб великий палець був спрямований уздовж струму, то пальці обвивають дрід в тому ж сенсі, що і  $\vec{B}$ .

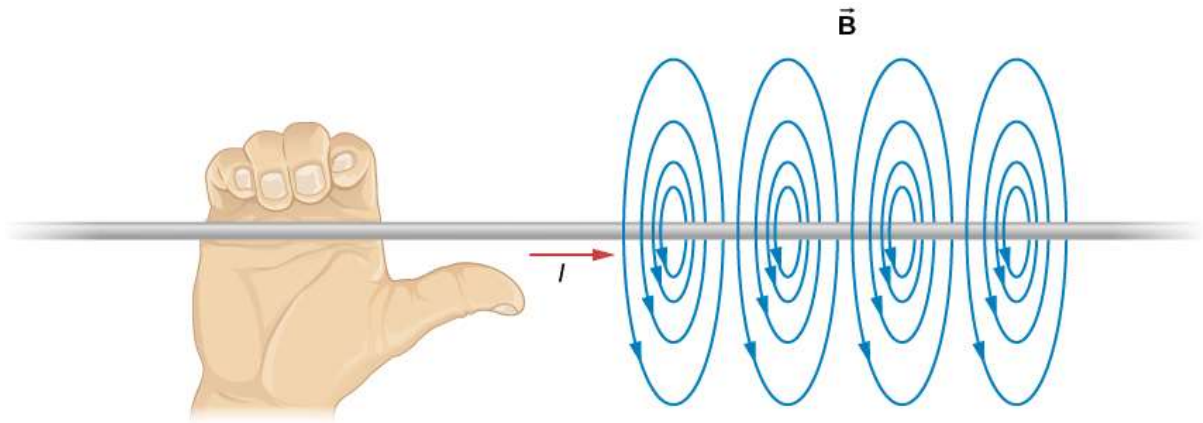
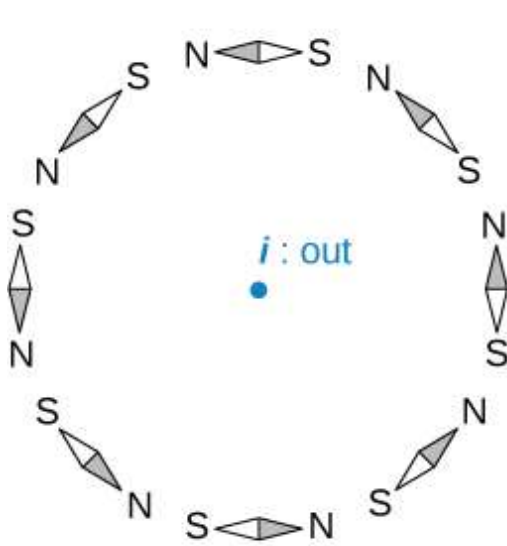


Рис. 2.6. Деякі лінії магнітного поля нескінченного дроту. Напрямок  $\vec{B}$  можна знайти за правилом правої руки-2

Напрямок ліній поля можна спостерігати експериментально, розмістивши кілька невеликих стрілок компаса на колі біля дроту, як показано на рис. 2.7. Коли струму в дроті немає, стрілки вирівнюються з магнітним полем Землі. Однак, коли по дроту проходить великий струм, стрілки компаса вказують по дотичній до кола. Залізною стружкою, посипаною на горизонтальну поверхню, також окреслюють лінії поля, як показано на рис. 2.7.



(a)



(b)

Рис. 2.7. Форму ліній магнітного поля довгого дроту можна побачити за допомогою (а) маленьких стрілок компаса і (б) залізних ошуків



### ПРИКЛАД 2.3. Обчислення магнітного поля трьох проводів зі струмом

Три дроти розташовані по кутах квадрата, всі вони несуть струм в 2 ампера від спостеригача, як показано на рис. 2.8. Обчисліть величину магнітного поля в іншому куті квадрата, точці  $P$ , якщо довжина кожної сторони квадрата дорівнює  $a = 1$  см.

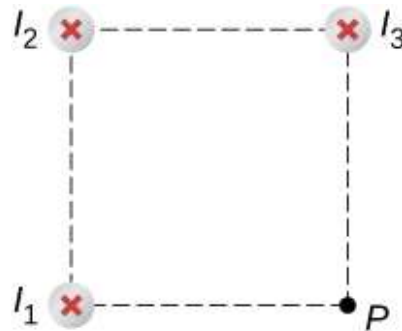


Рис. 2.8. Три дроти мають струм, що протікає від спостеригача. Магнітне поле визначається в четвертому куті квадрата

#### Стратегія

Обчислюється магнітне поле за рахунок кожного дроту в потрібній точці. Відстань по діагоналі обчислюється за допомогою теореми Піфагора. Далі напрямок внеску кожного магнітного поля визначають шляхом проведення кола з центром у точці розміщення дроту та назовні до потрібної точки. Напрямок внеску магнітного поля від цього дроту є дотичним до кола. Нарешті, працюючи з цими векторами, обчислюється результуюча величина.

#### Розв'язок

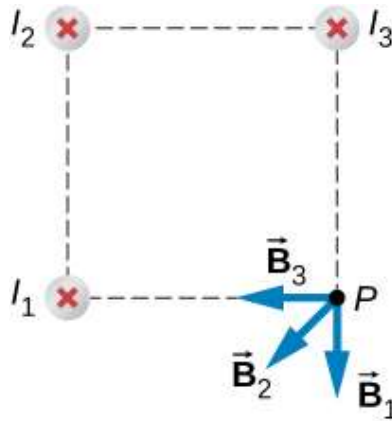
Дроти 1 і 3 мають однакову величину внеску магнітного поля в точці  $P$ :

$$B_1 = B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{Тл} \cdot \text{м/А})(2\text{А})}{2\pi(0,01 \text{ м})} = 4 \times 10^{-5} \text{Тл.}$$

Провід 2 має більшу відстань і внесок магнітного поля в точці  $P$ :

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a\sqrt{2}} = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{Тл} \cdot \text{м/А})(2\text{А})}{2\pi(0,0141 \text{ м})} = 3 \times 10^{-5} \text{Тл.}$$

Вектори для кожного з цих внесків магнітного поля показані на малюнку нижче.



Магнітне поле в  $x$ -напрямку має внески дроту 3 і  $x$ -компонента дроту 2:

$$B_x = -4 \times 10^{-5} \text{Тл} - 2,83 \times 10^{-5} \text{Тл} \cdot \cos 45^\circ = -6 \times 10^{-5} \text{Тл}.$$

$Y$ -компонента магнітного поля складається з внеску дроту 1 і  $y$ -компонента дроту 2:

$$B_y = -4 \times 10^{-5} \text{Тл} - 2,83 \times 10^{-5} \text{Тл} \cdot \sin 45^\circ = -6 \times 10^{-5} \text{Тл}.$$

Отже, сумарне магнітне поле є результируючим з цих двох компонентів:

$$B_\Sigma = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-6 \times 10^{-5} \text{Тл})^2 + (-6 \times 10^{-5} \text{Тл})^2} = 8 \times 10^{-5} \text{Тл}.$$

### Обговорення

Геометрія в цій задачі призводить до того, що внесок магнітного поля в  $x$ - і  $y$ -напрявках має однакову величину. Це не обов'язково так, якщо струми були б різних значень або якщо дроти розташовувалися в різних положеннях. Незалежно від числових результатів, робота над компонентами векторів дасть результируюче магнітне поле в точці, яка вам потрібна.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 2.3

Використовуючи приклад 2.3, зберігаючи однакові струми в проводах 1 і 3 визначити, яким повинен бути струм у дроті 2, щоб протидіяти магнітним полям від проводів 1 і 3 так, щоб у точці  $P$  не було в підсумку магнітного поля?

### 2.3. Магнітна сила між двома паралельними струмами

Можна очікувати, що два струмоведучі дроти створюють значні сили між собою, оскільки звичайні струми створюють магнітні поля, і ці поля діють на звичайні струми. Але ви можете не очікувати, що сила між проводами використовується для визначення ампера. Ви також можете бути здивовані, дізнавшись, що ця сила пов'язана з тим, чому великі автоматичні вимикачі згорають, коли вони намагаються перервати великі струми.

Силу між двома довгими, прямими і паралельними провідниками, розділеними відстанню  $r$ , можна знайти, застосувавши те, що ми розробили

в попередніх розділах. На рис. 2.9 показані дроти, їх струми, поле, створене одним проводом, і, як наслідок, сила, яку інший провід відчуває від створеного поля. Розглянемо поле, створюване дротом 1, і силу, з якою воно діє на провід 2 (назвемо силою  $F_2$ ). Поле за рахунок  $I_1$  на відстані  $r$  дорівнює:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}. \quad (2.9)$$

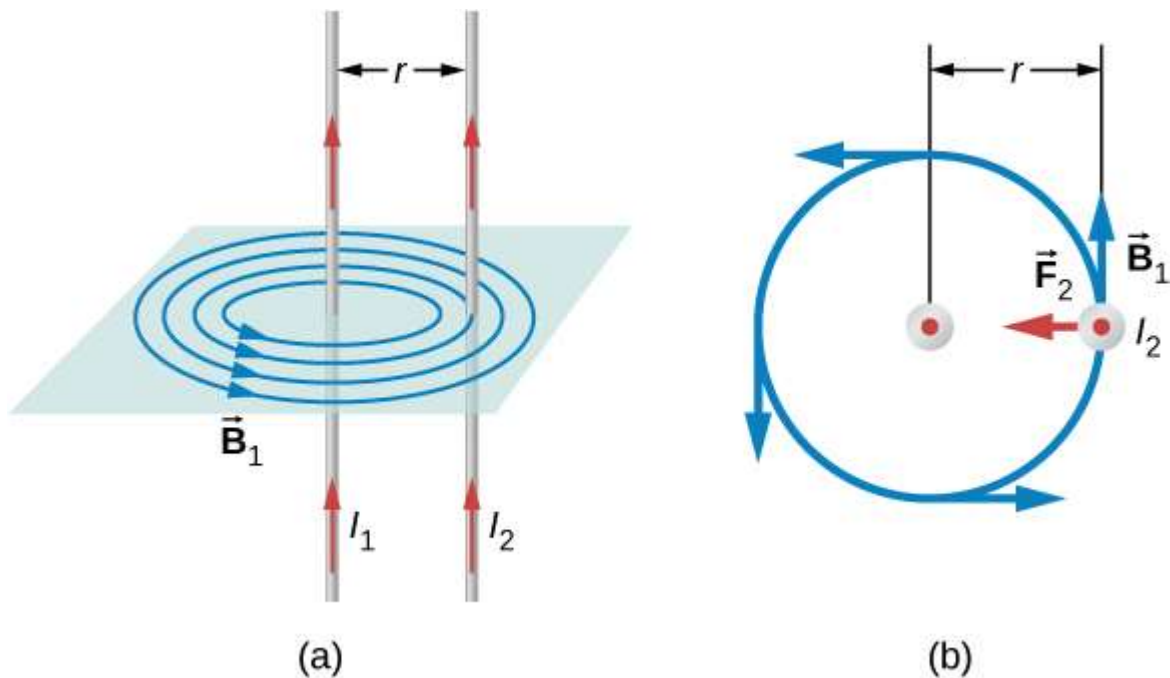


Рис. 2.9. (а) Магнітне поле, створюване довгим прямим провідником, перпендикулярне паралельному провіднику, на що вказує правило правої руки (ППР)-2. (б) Вид зверху на два дроти, показані в пункті (а), з однією лінією магнітного поля, показаною для дроту 1. ППР-1 показує, що сила між паралельними провідниками притягальна, коли струми знаходяться в одному напрямку. Подібний аналіз показує, що сила буде відштовхувальна між струмами, якщо вони течуть в протилежних напрямках

Поле від струму, що тече по дроту  $I_1$ , діє перпендикулярно струму  $I_2$ , тому сила  $F_2 = IlB \sin \theta$ , де  $\sin \theta = 1$ , що діє на довжину  $l$  дроту  $I_2$  задається формулою:

$$F_2 = I_2 l B_1. \quad (2.10)$$

Сили на проводах рівні за величиною, тому просто пишемо  $F$  для величини  $F_2$ . (Зауважимо, що  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ .) Оскільки дроти дуже довгі, зручно думати категоріями  $F/l$ , сила на одиницю довжини. Заміна  $B_1$  в рівнянні 2.10 виразом з рівняння 2.9 дає:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}. \quad (2.11)$$

Струми притягуються, якщо течії струмів йдуть в одному напрямку, і відштовхуються, якщо вони знаходяться в протилежних напрямках.

Ця сила відповідає за *ефект заземлення* в електричних дугах та інших плазмах. В електричній дузі, де заряди рухаються паралельно один одному, сила притягання стискає струми в трубку меншого розміру. У великих автоматичних вимикачах, таких як ті, що використовуються в сусідніх системах розподілу електроенергії, ефект заземлення може концентрувати дугу між пластинами вимикача, які намагаються розірвати великий струм, пропалити отвори і навіть запалити обладнання. Інший приклад ефекту заземлення можна знайти в сонячній плазмі, де струмені іонізованого матеріалу, такі як сонячні спалахи, формуються магнітними силами.

Визначення ампера ґрунтується на силі взаємодії між струмоведучими проводами. Зверніть увагу, що для довгих паралельних проводів, розділених 1 метром,

$$\frac{F}{l} = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{Тл}\cdot\text{м}/\text{А})(1 \text{ А})^2}{(2\pi)(1 \text{ м})} = 2 \times 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad (2.12)$$

На цьому ґрунтується визначення ампера.

#### ПРИКЛАД 2.4. Розрахунок дії сил на проводах

Два дроти, обидва проводять струм 5,0 мА за межі сторінки до спостерігача. Перший дріт розташований на позиції (0,0 см, 3,0 см), а інший дріт – на (4,0 см, 0,0 см), як показано на рис. 2.10. Яка магнітна сила на одиницю довжини першого дроту діє на другий і другого дроту на перший?

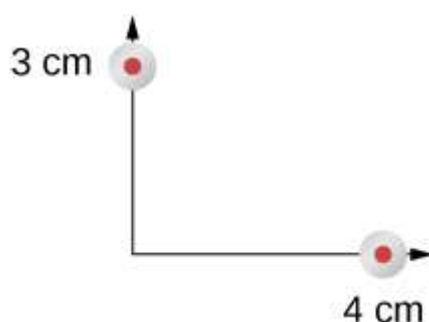


Рис. 2.10 Два струмоведучих дроти в заданих координатах зі струмами, напрямленими до спостерігача

#### Стратегія

Кожен провід створює магнітне поле, яке діє на інший провід. Відстань уздовж гіпотенузи трикутника між проводами – це радіальна відстань, яка використовується при розрахунку для визначення сили на одиницю довжини. Оскільки обидва дроти мають струми, що протікають в одному напрямку, напрямок сили спрямований один на одного.

### Розв'язання

Відстань між проводами є результатом знаходження гіпотенузи трикутника:

$$r = \sqrt{(3,0 \text{ см})^2 + (4,0 \text{ см})^2} = 5,0 \text{ см.}$$

Тоді модуль сили на одиницю довжини можна обчислити, використовуючи рівняння (2.11):

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ Тл} \cdot \text{м/А})(5 \times 10^{-3} \text{ А})^2}{(2\pi)(5 \times 10^{-2} \text{ м})} = 1 \times 10^{-10} \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

Кут між радіусом і віссю  $x$  дорівнює:

$$\theta = \arctg\left(\frac{3 \text{ см}}{4 \text{ см}}\right) = 36,9^\circ.$$

Одиничний вектор обчислюється за формулою:

$$-\cos(36,9^\circ)\hat{i} + \sin(36,9^\circ)\hat{j} = -0,8\hat{i} + 0,6\hat{j}.$$

Отже, сила у вигляді вектора дорівнює:

$$\frac{\vec{F}}{l} = \left(1 \times 10^{-10} \frac{\text{Н}}{\text{м}}\right) \times (-0,8\hat{i} + 0,6\hat{j}) = (-8 \times 10^{-11}\hat{i} + 6 \times 10^{-11}\hat{j}) \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

Сила на одиницю довжини від дроту 2, що діє на дрот 1 є негативною від попередньої відповіді:

$$\frac{\vec{F}}{l} = (8 \times 10^{-11}\hat{i} - 6 \times 10^{-11}\hat{j}) \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

### Обговорення

Ці дроти створювали магнітні поля однакової величини, але протилежних напрямків у місцях розташування один одного. Незалежно від того, однакові поля чи ні, сили, з якими дроти діють один на одного, завжди рівні за величиною і протилежні за напрямком (третій закон Ньютона).

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 2.4

Два дроти, обидва проводять струм за межі сторінки, мають струм величиною 2,0 мА і 3,0 мА відповідно. Перший дріт має координати (0, 0 см, 5,0 см), а інший дріт – (12,0 см, 0,0 см). Яку величину магнітної сили на одиницю довжини першого дроту відчує другий і другий дріт від першого?

### 2.4. Магнітне поле петлі зі струмом

Кругова петля рис. 2.11 має радіус  $R$ , несе струм  $I$  і лежить в  $xz$ -площині. Яке магнітне поле зумовлене струмом буде у довільній точці  $P$  уздовж осі контуру?

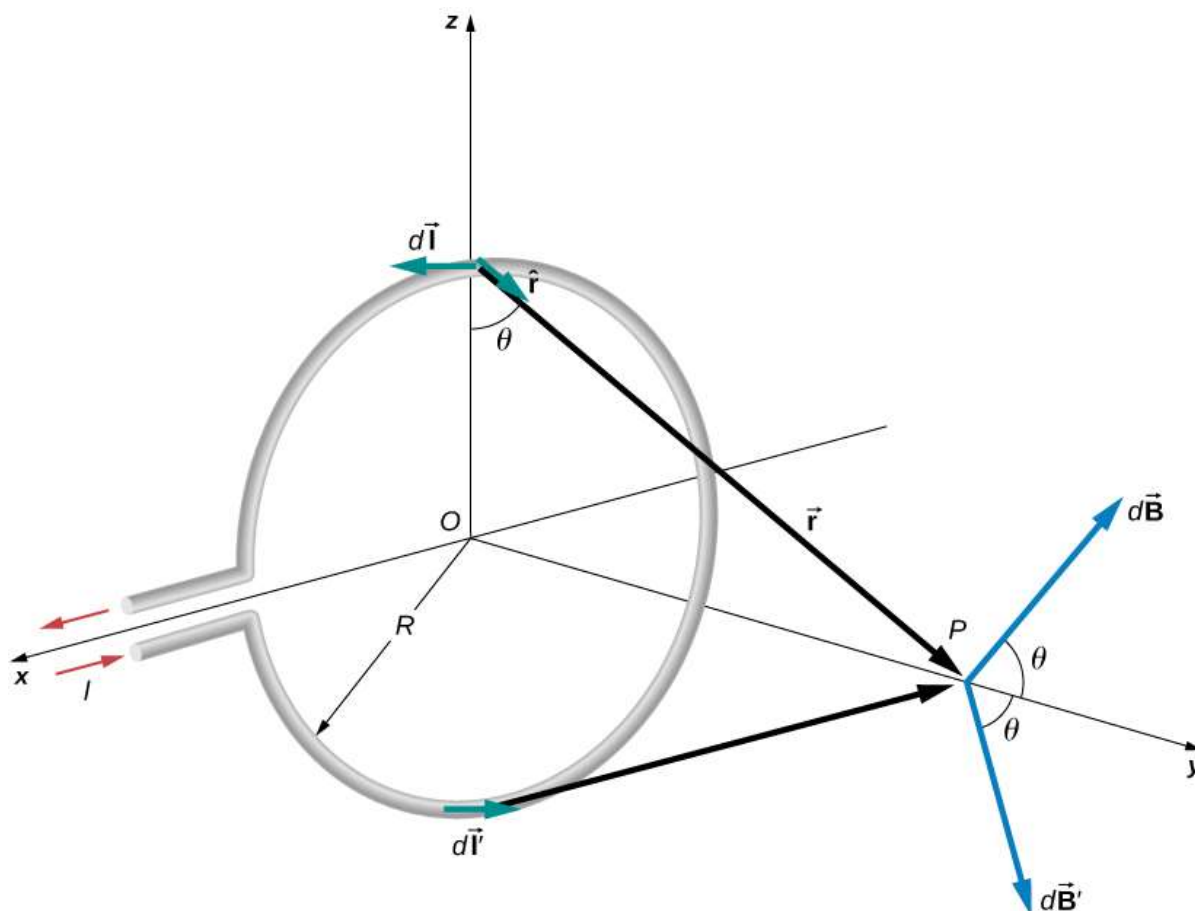


Рис. 2.11. Визначення магнітного поля в точці  $P$  уздовж осі струмоведучого контуру дроту

Ми можемо використовувати закон Біо-Савара для знаходження магнітного поля струму. Спочатку розглянемо довільні відрізки на протилежних сторонах контуру, щоб якісно показати, що напрямок сумарного магнітного поля знаходиться уздовж центральної осі від петлі. Після чого ми можемо використовувати закон Біо-Савара, щоб вивести вираз для магнітного поля.

Нехай до точки  $P$  – відстань  $y$  від центру петлі. За правилом правої руки, магнітне поле  $d\vec{B}$  у точці  $P$ , від струмового елемента  $Id\vec{l}$ , спрямовано під кутом  $\theta$  до осі  $Y$ , як показано на рис. 2.11. Елемент  $Id\vec{l}$  паралельний осі  $X$ , а вектор  $\vec{r}$  знаходиться в  $yz$ -площині. Ці два вектори перпендикулярні, тому маємо:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin(\pi/2)}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi y^2 + R^2}, \quad (2.13)$$

де ми використовували  $r^2 = y^2 + R^2$ .

Тепер розглянемо магнітне поле  $d\vec{B}'$  за рахунок елемента струму  $Id\vec{l}'$ , який прямо протилежний  $Id\vec{l}$  на петлі. Величина  $d\vec{B}'$  також задається рівнянням 2.13, але воно спрямоване під кут  $\theta$ , але нижче осі  $Y$ . Складові частини  $d\vec{B}$  і  $d\vec{B}'$ , перпендикулярні осі  $Y$  компенсують одна одну, і при

розрахунку сумарного магнітного поля необхідно враховувати тільки компоненти вздовж осі  $Y$ . Компоненти, перпендикулярні осі контуру, попарно дорівнюють нулю. Отже, в точці  $P$ :

$$\vec{B} = \hat{j} \int dB \cos \theta = \hat{j} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\cos \theta dl}{y^2 + R^2}. \quad (2.14)$$

Для всіх елементів  $d\vec{l}$  на дроті,  $y$ ,  $R$  і  $\cos \theta$  є постійними і пов'язані співвідношенням:

$$\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{y^2 + R^2}}.$$

З рівняння 2.14 випливає, що магнітне поле в точці  $P$  дорівнює:

$$\vec{B} = \hat{j} \frac{\mu_0 I R}{4\pi(y^2 + R^2)^{3/2}} \int dl = \frac{\mu_0 I R^2}{2(y^2 + R^2)^{3/2}} \hat{j}, \quad (2.15)$$

де ми використали  $\int dl = 2\pi R$ . Як обговорювалося в попередньому розділі, замкнений контур струму є магнітним диполем з моментом  $\mu_0 = IA\hat{n}$ . Для цього прикладу  $A = \pi R^2$  і  $\hat{n} = \hat{j}$ , тому магнітне поле в точці  $P$  також можна записати у вигляді:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{2(y^2 + R^2)^{3/2}} \hat{j}. \quad (2.16)$$

Якщо  $y = 0$ , тоді з рівняння 2.15 отримаємо магнітне поле в центрі контуру:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{j}. \quad (2.17)$$

Це рівняння набуває вигляду

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2R}.$$

для плоскої котушки з  $N$  петель на довжину. Воно також може виражатися так:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{\mu}}{2\pi R^3}. \quad (2.18)$$

Якщо врахувати  $y \gg R$  у рівнянні 2.16, тоді вираз (2.18) зводиться до виразу, відомого як магнітне поле диполя:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{\mu}}{2\pi y^3}. \quad (2.19)$$

Розрахунок магнітного поля за рахунок контуру кругового струму в точках, що знаходяться поза віссю  $Y$ , вимагає досить складної математики, тому ми просто подивимося на результати. Лінії магнітного поля мають форму, як показано на рис. 2.12. Зверніть увагу, що одна лінія поля слідує вздовж осі кола. Це лінія поля, яку ми щойно знайшли. Крім того, дуже близько до дроту лінії поля майже кругові, як лінії довгого прямого дроту.

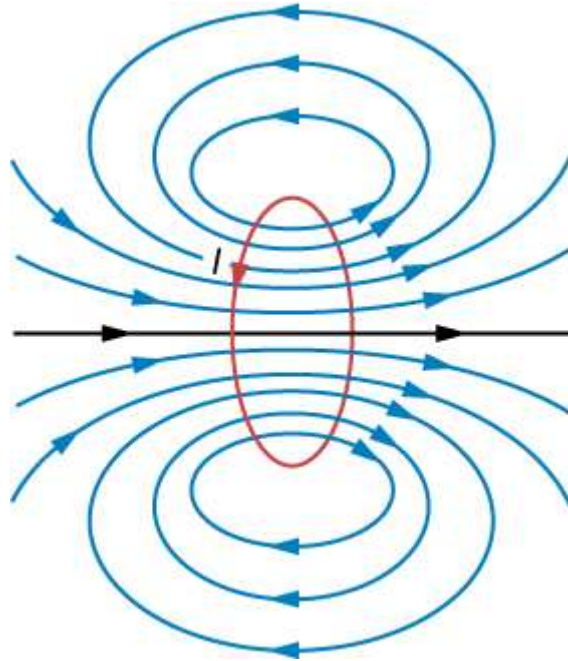


Рис. 2.12. Ескіз ліній магнітного поля кругового контуру зі струмом

**ПРИКЛАД 2.5. Магнітне поле між двома контурами**

Дві петлі дроту несуть однаковий струм 10 мА, але течуть у протилежних напрямках, як показано на рис. 2.13.

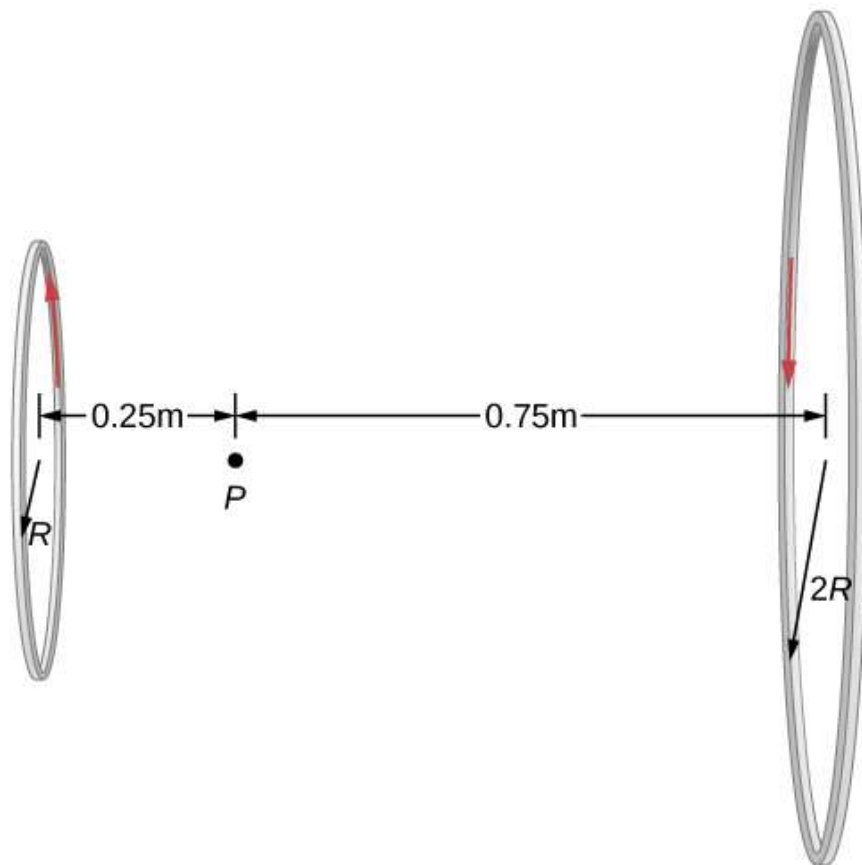


Рис. 2.13. Два контури різних радіусів мають однаковий струм, але течуть вони в протилежних напрямках



Одна петля має радіус  $R = 50\text{см}$  в той час як інша петля має радіус  $2R = 100\text{см}$ . Відстань від першої петлі до точки, де вимірюється магнітне поле, становить  $0,25\text{ м}$ , а відстань від цієї точки до другої петлі –  $0,75\text{ м}$ . Яка величина сумарного магнітного поля в точці  $P$ ?

### Стратегія

Магнітне поле в точці  $P$  визначено в рівнянні 2.15. Оскільки струми течуть у протилежних напрямках, то сумарне магнітне поле є різницею між двома полями, створюваними котушками. Використовуючи задані величини в задачі, обчислюється сумарне магнітне поле.

### Розв'язання

Розв'язок для сумарного магнітного поля за допомогою рівняння 2.15 і заданих величин у задачі дає:

$$B = \frac{\mu_0 I R_1^2}{2(y_1^2 + R_1^2)^{3/2}} - \frac{\mu_0 I R_2^2}{2(y_2^2 + R_2^2)^{3/2}}$$

$$B = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{Тл} \cdot \text{м/А})(0,01 \text{ А})(0,5 \text{ м})^2}{2((0,25 \text{ м})^2 + (0,5 \text{ м})^2)^{3/2}} - \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{Тл} \cdot \frac{\text{м}}{\text{А}})(0,01 \text{ А})(1,0 \text{ м})^2}{2((0,75 \text{ м})^2 + (1,0 \text{ м})^2)^{3/2}} =$$

$$= 5,77 \times 10^{-9} \text{Тл}$$

Напрявлене сумарне магнітне поле праворуч.

### Обговорення

Котушки Гельмгольца зазвичай мають петлі з рівними радіусами струму, що течуть в одному напрямку, щоб мати сильне рівномірне поле в середній точці між петлями. Подібне застосування розподілу магнітного поля, створюваного котушками Гельмгольца, використовується в магнітній пляшці, яка може тимчасово затримувати заряджені частинки. Дивись розділ “Магнітні сили та поля” для обговорення цього питання.

## ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 2.5

На якій відстані потрібно перемістити першу котушку, щоб у точці  $P$  магнітне поле було нульовим?

### 2.5. Закон Ампера

Фундаментальна властивість статичного магнітного поля полягає в тому, що, на відміну від електростатичного, воно не є консервативним. Консервативне векторне поле – це поле, інтеграл якого між двома кінцевими точками однаковий незалежно від обраного шляху. Магнітні поля такою властивістю не володіють. Натомість існує взаємозв'язок між магнітним полем і його джерелом – електричним струмом. Він виражається

через прямий інтеграл від  $\vec{B}$  і відомий як **закон Ампера**. Цей закон також може бути виведений безпосередньо із закону Біо-Савара. Розглянемо це виведення для окремого випадку нескінченного прямого дроту.

На рис. 2.14 показана довільна площина, перпендикулярна нескінченному прямому проводу, струм якого  $I$  спрямований за межі сторінки. Лінії магнітного поля є колами, спрямованими проти годинникової стрілки і центровані на дроті. Для початку розглянемо інтеграл  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  вздовж замкнутих шляхів  $M$  і  $N$ . Зверніть увагу, що один шлях ( $M$ ) охоплює дріт, а інший ( $N$ ) – ні. Оскільки лінії поля кругові,  $\vec{B} \cdot d\vec{l}$  є добутком  $B$  і проекцією  $dl$  на коло, що проходить через  $d\vec{l}$ . Якщо радіус цього конкретного кола дорівнює  $r$ , тоді проекція має вигляд  $r d\theta$ , і

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = Br d\theta.$$

Величина  $\vec{B}$  задано рівнянням 8.9:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\theta. \quad (2.20)$$

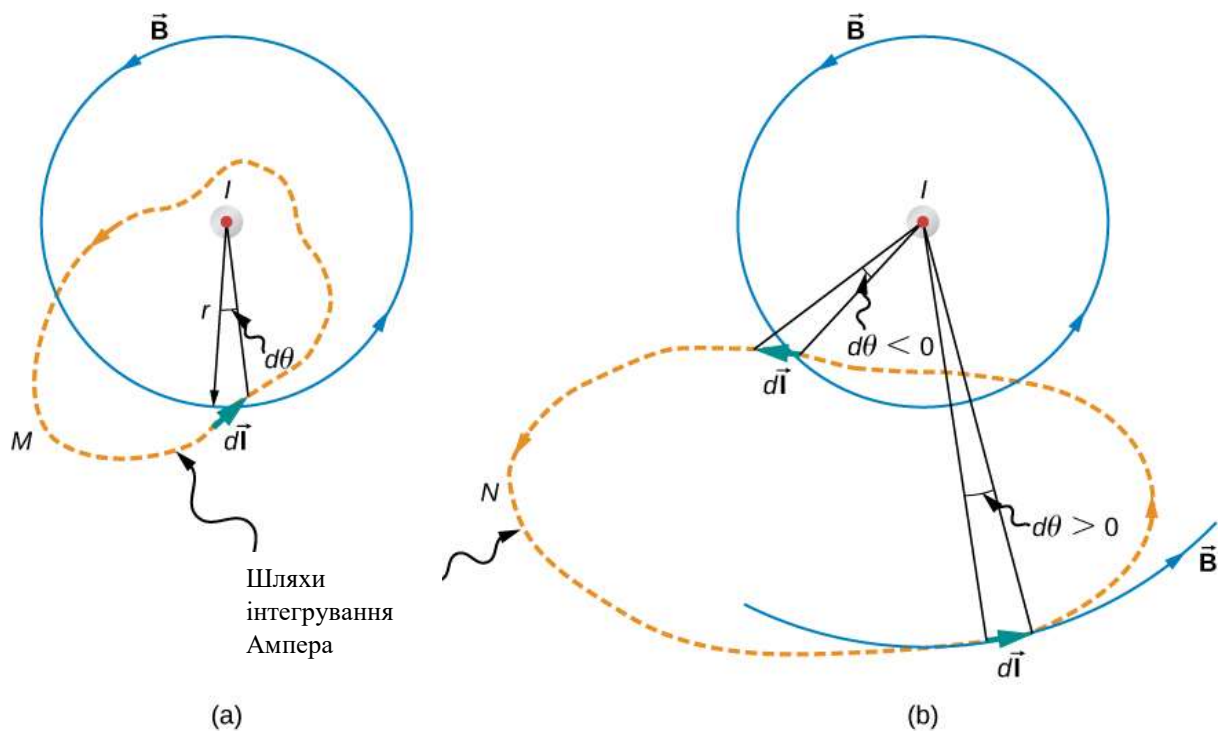


Рис. 2.14. Струм  $I$  довгого прямого проводу спрямований за межі сторінки. Інтеграл  $\oint d\theta$  дорівнює  $2\pi$  і  $0$ , відповідно, для шляхів  $M$  і  $N$

Для шляху  $M$ , який циркулює навколо дроту,  $\oint_M d\theta = 2\pi$  і

$$\oint_M \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (2.21)$$

Шлях  $N$ , з іншого боку, циркулює як у позитивному (проти годинникової стрілки), так і в негативному (за годинниковою стрілкою)  $d\theta$  (див. рис. 2.14), а оскільки він закритий,  $\oint_N d\theta = 0$ .

Таким чином, для шляху  $N$ ,

$$\oint_N \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (2.22)$$

Поширенням цього результату на загальний випадок є закон Ампера.

### ЗАКОН АМПЕРА

По довільному замкнутому шляху,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I, \quad (2.23)$$

де  $I$  – сумарний струм, що проходить через будь-яку відкриту поверхню  $S$ , периметр якої  $L$  є шляхом інтегрування. Необхідно враховувати лише напрямки струмів на шляху інтеграції.

Щоб визначити, позитивний або негативний конкретний струм  $I$ , зігніть пальці правої руки в напрямку шляху інтегрування, як показано на рис. 2.14. Якщо  $I$  проходить через  $S$  в тому ж напрямку, що і твій витягнутий великий палець, тоді  $I$  позитивний; якщо  $I$  проходить через  $S$  у напрямку, протилежному вашому витягнутому великому пальцю, тоді  $I$  – негативний.

### ПРИКЛАД 2.6. Використання закону Ампера для обчислення магнітного поля дроту

Використайте закон Ампера для обчислення магнітного поля, обумовленого постійним струмом  $I$  в нескінченно довгому тонкому, прямому дроті, як показано на рис. 2.15.

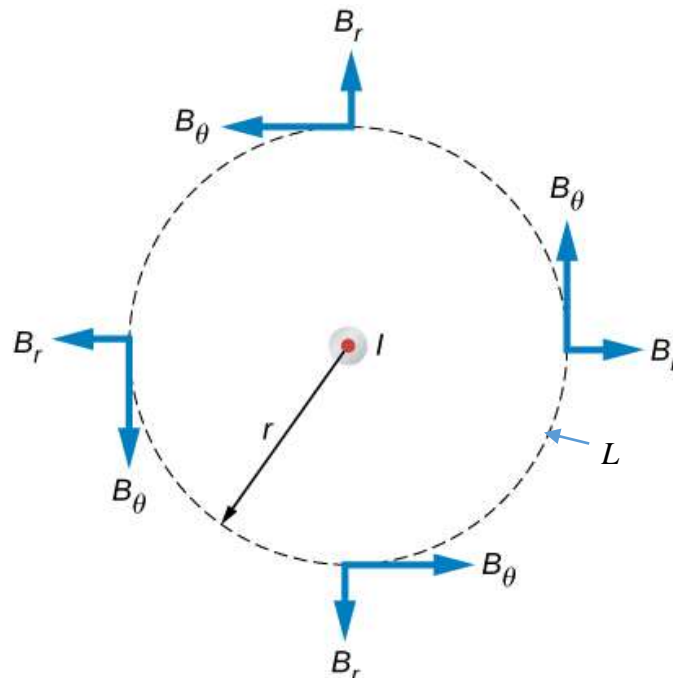


Рис. 2.15. Можливі складові магнітного поля  $B$ , обумовлені струмом  $I$ , який спрямований за межі сторінки. Поле не має радіальної складової, тому радіального внеску в інтеграл немає

## Стратегія

Розглянемо довільну площину, перпендикулярну дроту, при цьому струм спрямований за межі сторінки. Можливі складові магнітного поля в цій площині,  $B_r$  і  $B_\theta$ , показані в довільних точках на колі радіуса  $r$  з центром на дроті. Оскільки поле циліндрично симетричне, ні  $B_r$ , ні  $B_\theta$  не змінюється в залежності від положення на цьому колі. Також з точки зору симетрії, радіальні лінії повинні бути спрямовані або всередину, або всі назовні від дроту. Однак це означало б, що повинен існувати сумарний магнітний потік через довільний циліндр, концентричний з дротом. Однак, оскільки лінії магнітного поля безперервні, утворюючи замкнуті контури без початку або кінця (див. обговорення в розділі “Магнітні поля і лінії”), сумарний магнітний потік через будь-яку замкнуту поверхню повинен дорівнювати нулю. Звідси можна зробити висновок, що радіальна складова магнітного поля повинна дорівнювати нулю. Таким чином, ми можемо застосувати закон Ампера до кругового шляху, як показано на малюнку.

## Розв’язок

На цьому шляху  $\vec{B}$  є постійним і паралельним  $\vec{l}$ , тому

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\theta \oint dl = B_\theta(2\pi R).$$

Таким чином, закон Ампера зводиться до

$$B_\theta(2\pi r) = \mu_0 I.$$

Нарешті, оскільки  $B_\theta$  є єдиною складовою  $\vec{B}$ , ми можемо відкинути нижній індекс і написати:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Це узгоджується з наведеним вище розрахунком за законом Біо-Савара.

## Обговорення

Закон Ампера добре працює, якщо у вас є шлях, який потрібно інтегрувати,  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  має результати, які легко спростити. Для нескінченного дроту це легко працює з контуром  $L$ , який є круговим навколо дроту, так що магнітне поле впливає на інтегрування. Якщо залежність шляху здається складною, ви завжди можете повернутися до закону Біо-Савара і використувати його для знаходження магнітного поля.

## ПРИКЛАД 2.7. Обчислення магнітного поля товстого дроту за законом Ампера

Радіус довгого прямого дроту на рис. 2.16 дорівнює  $a$ , і провід несе струм  $I_0$ , який рівномірно розподіляється по його поперечному перерізу. Знайдіть магнітне поле як всередині, так і зовні дроту.

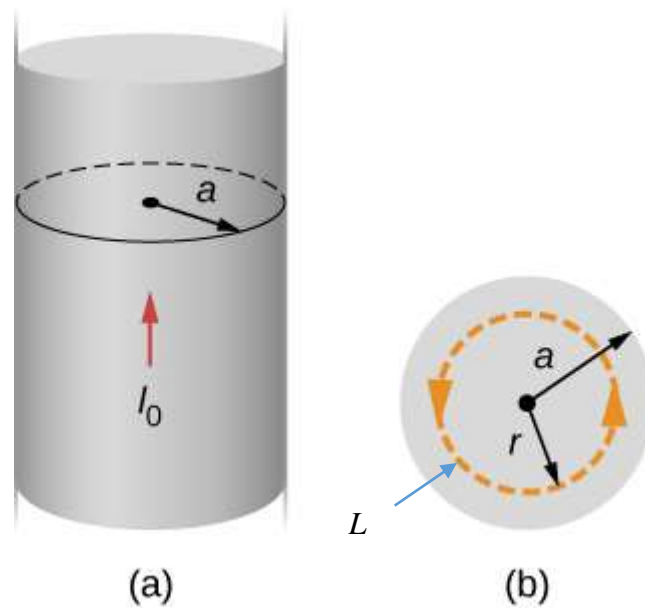


Рис. 2.16. а) модель струмоведучого проводу радіуса  $a$  і струму  $I_0$ . б) поперечний переріз того ж дроту, що показує радіус  $a$  і петлю інтегрування Ампера радіуса  $r$

### Стратегія

Ця задача має ту ж геометрію, що і в прикладі 2.6, але укладений струм змінюється в міру переміщення шляху інтегрування  $L$  ззовні дроту всередину дроту, де він не захоплює весь струм (див. рис. 2.16).

### Розв'язок

Для будь-якої кругової траєкторії радіуса  $r$ , яка зосереджена на дроті,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = B(2\pi r).$$

За законом Ампера це дорівнює сумарному струму, що проходить через будь-яку поверхню, обмежену шляхом інтегрування  $L$ .

Розглянемо спочатку кругову доріжку, яка знаходиться всередині дроту ( $r \leq a$ ) так, як показано в частині (а) рис. 2.16. Нам потрібен струм  $I$ , що проходить через територію, огорожену стежкою. Це дорівнює густині струму  $J$ , помноженій на площу. Оскільки струм рівномірний, то густина струму всередині шляху дорівнює густині струму в усьому дроті, що становить  $I_0 / \pi a^2$ . Тому струм  $I$ , що проходить через площу, огорожену шляхом  $L$ , дорівнює:

$$I = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I_0 = \frac{r^2}{a^2} I_0.$$

Це співвідношення доводить, що густина струму  $J$  постійна по площі дроту. Отже, густина струму частини дроту дорівнює густині струму у всій площі. Використовуючи закон Ампера, отримаємо:

$$B(2\pi r) = \mu_0 \left( \frac{r^2}{a^2} \right) I_0,$$

а магнітне поле всередині дроту

$$B = \left( \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a^2} \right) \cdot r \quad (r \leq a).$$

Поза дротом ситуація ідентична ситуації з нескінченним тонким дротом у попередньому прикладі; Тобто

$$B = \left( \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \right) \cdot \frac{1}{r} \quad (r \geq a).$$

Зміна величини  $B$  зі зміною  $r$  показана на рис. 2.17.

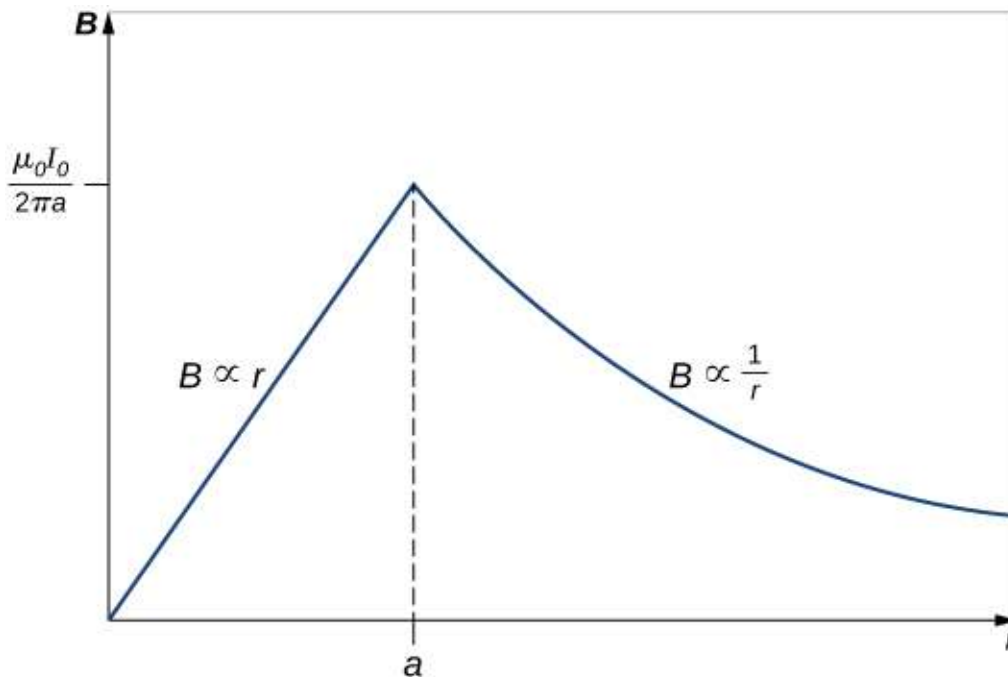


Рис. 2.17. Зміна магнітного поля, створюваного струмом  $I_0$  в довгому прямому дроті радіуса  $a$

### Обговорення

Результати показують, що зі збільшенням радіальної відстані всередині товстого дроту магнітне поле збільшується від нуля до звичного значення магнітного поля тонкого дроту. Поза дротом поле падає незалежно від того, товстий це чи тонкий дріт. Цей результат подібний до того, як закон Гаусса для електричних зарядів поводить себе всередині рівномірного розподілу заряду, за винятком того, що закон Гаусса для електричних зарядів має рівномірний об'ємний розподіл заряду, тоді як закон Ампера тут має рівномірну область розподілу струму. Крім того, падіння  $B$  за межою товстого дроту подібне до того, як електричне поле падає за межами лінійного розподілу заряду, оскільки обидва випадки мають однакову геометрію, і жоден випадок не залежить від конфігурації зарядів або струмів, коли петля інтегрування знаходиться поза розподілом.

## ПРИКЛАД 2.8. Використання закону Ампера з довільними шляхами $L$

Використаємо закон Ампера для оцінки  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  для поточних конфігурацій та шляхів інтегрування на рис. 2.18.

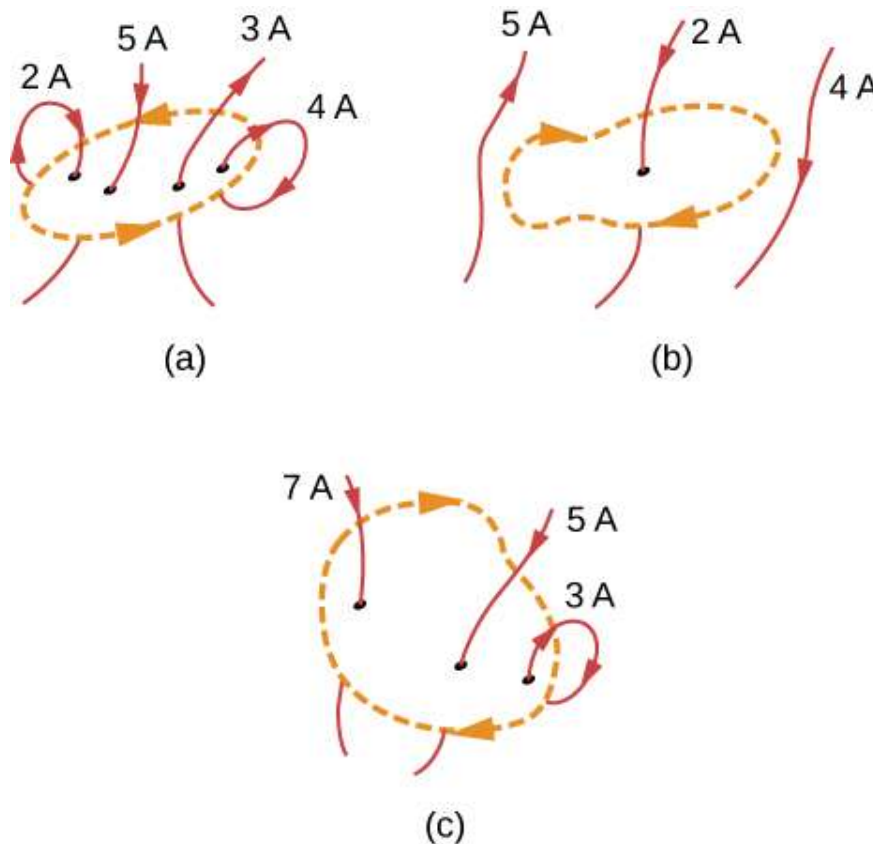


Рис. 2.18. Поточні конфігурації та шляхи інтегрування для прикладу 2.8

### Стратегія

Закон Ампера стверджує, що  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ , де  $I$  – сумарний струм, що проходить у замкнутому контурі  $L$ . Найшвидший спосіб обчислити інтеграл  $\mu_0 I$  – це знаходження сумарного струму через петлю інтегування Ампера. Позитивні струми протікають за напрямком великого пальця правої руки, якщо пальці обертаються в напрямку петлі. Це підкаже нам знак відповіді.

### Розв'язок

а) Струм, що йде вниз по контуру, дорівнює струму, що виходить з петлі, тому сумарний струм дорівнює нулю. Таким чином  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ .

(б) Єдиний струм, який слід враховувати в цій задачі, дорівнює 2 А, оскільки це єдиний струм всередині контуру. Правило правої руки показує нам, що струм, що йде вниз петлі, йде в позитивному напрямку. Тому відповідь така:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (2A) = 2,51 \times 10^{-6} \text{Тл} \cdot \text{м}.$$

с) Правило правої руки показує нам, що струм, що йде вниз петлі, має позитивний напрямок. Розрізняється  $7\text{A} + 5\text{A} = 12\text{A}$  – струм, що йде вниз, і струм  $-3\text{A}$ , що йде вгору. Отже, сумарний струм становить  $9\text{A}$ . Тобто,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(9\text{A}) = 1,13 \times 10^{-5} \text{Тл} \cdot \text{м}.$$

### Обговорення

Якби всі струми оберталися так, що один і той же струм йшов в петлю і виходив з петлі, то сумарний струм дорівнював би нулю і магнітного поля не було б. Ось чому дроти розташовані дуже близько один до одного в електричному шнурі. Струми, що протікають до пристрою і віддаляються від пристрою в дроті, дорівнюють нульовому сумарному струму, протікають через амперну петлю навколо цих проводів. Тому від таких шнурів, що несуть струм, не може бути ніяких блукаючих магнітних полів.

## ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 2.6

Розгляньте використання закону Ампера для обчислення магнітних полів скінченного прямого дроту та кругової петлі дроту. Чому це не корисно для цих обчислень?

### 2.6. Соленоїди і тороїди

Два найбільш поширених і корисних електромагнітних приладів називаються соленоїдами і тороїдами. У тому чи іншому вигляді вони входять до складу численних інструментів, як великих, так і маленьких. У цьому розділі ми розглянемо магнітне поле, характерне для цих пристроїв.

#### Соленоїди

Довгий дріт, намотаний у вигляді спіральної котушки, відомий як **соленоїд**. Соленоїди зазвичай використовуються в експериментальних дослідженнях, що вимагають наявності магнітного поля. Соленоїд, як правило, легко виготовляється, а поблизу його центру магнітне поле досить однорідне і прямо пропорційне струму в дроті.

На рис. 2.19 показаний соленоїд, що складається з  $N$  витків дроту, щільно намотаних на довжину  $L$ . По проводу соленоїда протікає струм  $I$ .

Кількість витків на одиницю довжини дорівнює  $N/L$ ; отже, число витків на нескінченно малій довжині  $dy$  дорівнює  $(N/L)dy$ . При цьому утворюється струм:

$$dI = \frac{NI}{L} dy. \quad (2.24)$$

Спочатку обчислимо магнітне поле в точці  $P$  на рис. 2.19. Ця точка знаходиться на центральній осі соленоїда. По суті, ми розрізаємо соленоїд



на тонкі скибочки товщиною  $dy$  і розглядаємо кожну як петлю струму. Таким чином,  $dI$  – струм через кожен зріз.

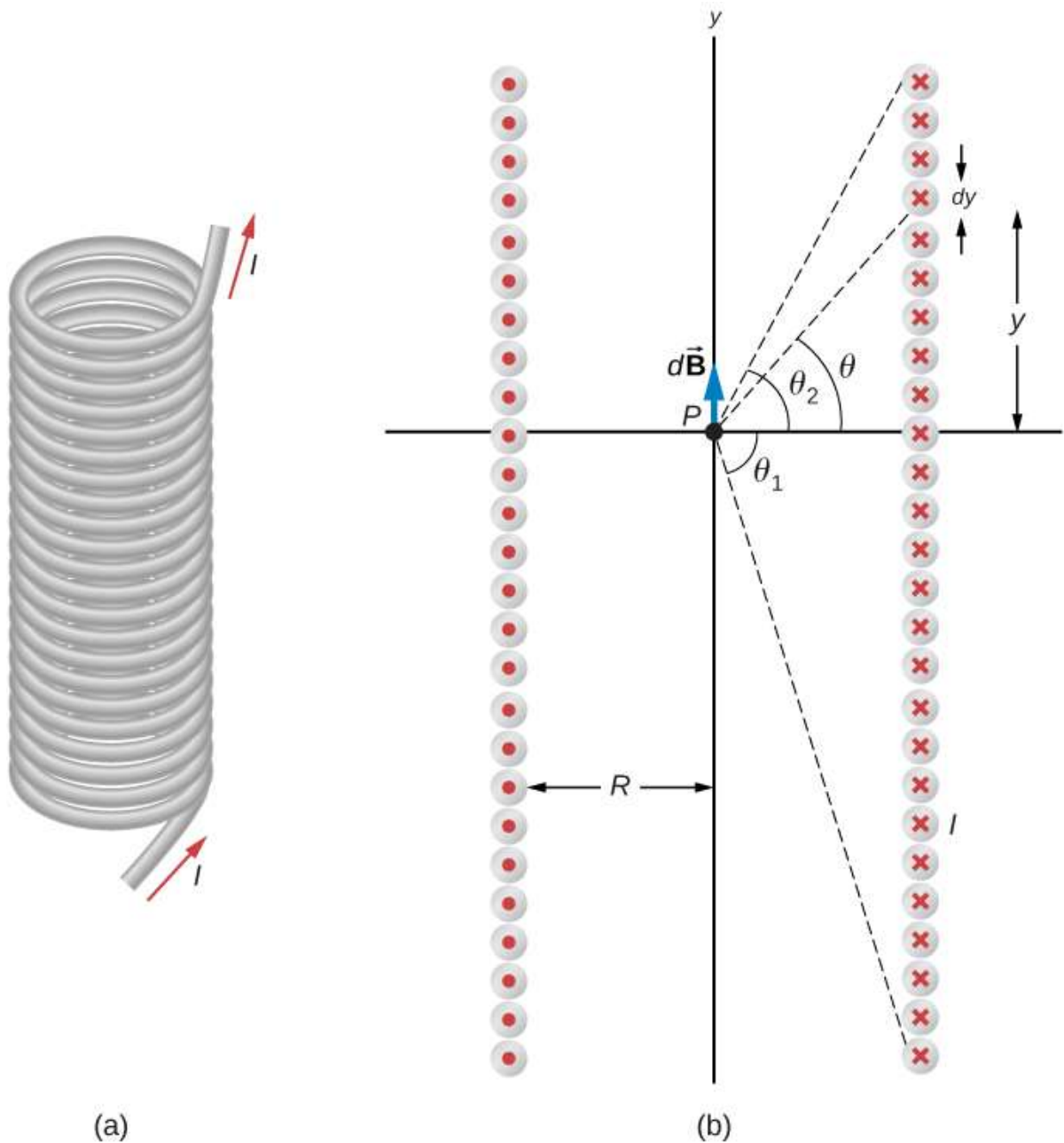


Рис. 2.19. (а) Соленоїд – це довгий дрiт, намотаний у формi спiралi. (б) Магнiтне поле в точцi  $P$  на осi соленоїда є сумарним полем, обумовленим усіма струмовими петлями

Магнiтне поле  $d\vec{B}$  за рахунок струму  $dI$  в  $dy$  можна знайти за допомогою рiвняння 2.15 i рiвняння 2.24:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 R^2 dI}{2(y^2 + R^2)^{3/2}} \hat{j} = \left( \frac{\mu_0 I R^2 N}{2L} \hat{j} \right) \frac{dy}{(y^2 + R^2)^{3/2}}, \quad (2.25)$$

де ми використали рiвняння 2.24 для заміни  $dI$ .

Результуюче поле точці  $P$  знаходять шляхом інтегрування  $d\vec{B}$  по всій довжині соленоїда. Найпростіше обчислити цей інтеграл, змінивши незалежну змінну  $z$  у на  $\theta$ . З огляду рис. 2.19 маємо:

$$\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}}. \quad (2.26)$$

Взявши диференціал обох частин цього рівняння, отримаємо:

$$\cos \theta d\theta = \left[ -\frac{y^2}{(y^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(y^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \right] dy = \frac{R^2 dy}{(y^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Коли це підставляється в рівняння для  $d\vec{B}$ , ми маємо:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L} \hat{j} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 IN}{2L} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \hat{j}, \quad (2.27)$$

яке є магнітним полем уздовж центральної осі кінцевого соленоїда.

Особливий інтерес представляє нескінченно довгий соленоїд, для якого  $L \rightarrow \infty$ . З практичної точки зору, нескінченний соленоїд – це той, довжина якого набагато більше його радіуса ( $L \gg R$ ). У цьому випадку  $\theta_1 = -\pi/2$  і  $\theta_2 = \pi/2$ . Тоді з рівняння 2.27 магнітне поле вздовж центральної осі нескінченного соленоїда має вигляд:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L} (\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)) \hat{j} = \frac{\mu_0 IN}{L} \hat{j},$$

або

$$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{j}, \quad (2.28)$$

де  $n$  – число витків на одиницю довжини. Ви можете знайти напрямок  $\vec{B}$  за правилом правої руки: зігніть пальці в напрямку струму, а великий палець вказує вздовж магнітного поля у внутрішній частині соленоїда.

Тепер ми використовуємо ці властивості разом із законом Ампера для обчислення величини магнітного поля в будь-якому місці всередині нескінченного соленоїда. Розглянемо замкнутий шлях на рис. 2.20.

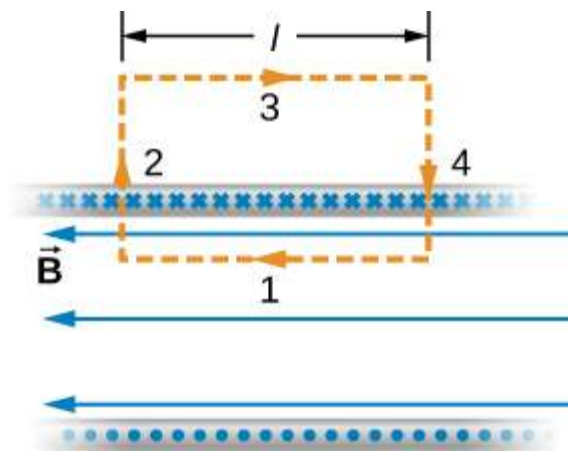


Рис. 2.20. Шлях інтегрування, що використовується в законі Ампера для визначення магнітного поля нескінченного соленоїда

Уздовж відрізка  $1$ , поле  $\vec{B}$  є рівномірним і паралельним шляху, як показано в рівнянні 2.28. Уздовж відрізків  $2$  і  $4$ ,  $\vec{B}$  перпендикулярна частині шляху і зникає над рештою його частини. Отже, відрізки  $2$  і  $4$  не вносять вкладу в інтеграл закону Ампера. Уздовж відрізка  $3$ ,  $\vec{B} = 0$ , тому що магнітне поле дорівнює нулю поза соленоїдом. Якщо розглядати петлю Ампера поза соленоїдом, то струм тече в протилежних напрямках на різних відрізках петлі. Отже, за законом Ампера немає замкнутого струму і магнітного поля. Таким чином, внесок в інтеграл від відрізка  $3$  відсутній. В результаті знаходимо:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl. \quad (2.29)$$

Соленоїд має  $n$  витків на одиницю довжини, тому струм, який проходить через поверхню, натягнуту на замкнуту траєкторією, дорівнює  $nIl$ . Отже, за законом Ампера,

$$Bl = \mu_0 nIl$$

і

$$B = \mu_0 nI \quad (2.30)$$

всередині соленоїда. Це узгоджується з тим, що ми виявили раніше для  $B$  на центральній осі соленоїда. Тут, однак, розташування відрізка  $1$  є довільним, тому ми виявили, що це рівняння дає магнітне поле всюди всередині нескінченного соленоїда.

Коли пацієнт проходить магнітно-резонансну томографію (МРТ), людина лягає на стіл, який переміщується в центр великого соленоїда, який може генерувати дуже великі магнітні поля. Соленоїд здатний на ці високі поля від великих струмів, що протікають по надпровідних проводах. Велике магнітне поле використовується для зміни положення спіну протонів в організмі пацієнта. Час, необхідний для вирівнювання або послаблення обертань (повернення до початкової орієнтації), є сигнатурою – унікальним ідентифікатором – різних тканин, які можна проаналізувати, щоб побачити, чи нормальні структури тканин (рис. 2.21).



Рис. 2.21. У апараті МРТ циліндричний соленоїд, що оточує пацієнта, генерує велике магнітне поле

### ПРИКЛАД 2.9. Магнітне поле всередині соленоїда

Соленоїд має 300 витків, намотаних на циліндр діаметром 1,20 см і довжиною 14,0 см. Якщо струм через котушку дорівнює 0,410 А, яка величина магнітного поля всередині і поблизу середини соленоїда?

#### Стратегія

Нам дано кількість витків і довжину соленоїда, щоб ми могли знайти кількість витків на одиницю довжини. Отже, магнітне поле всередині і поблизу середини соленоїда задається рівнянням 2.30. Поза соленоїдом магнітне поле дорівнює нулю.

#### Розв'язок

Кількість витків на одиницю довжини становить:

$$n = \frac{300}{0,14 \text{ м}} = 2,14 \times 10^3 \text{ м}^{-1}.$$

Магнітне поле, що утворюється всередині соленоїда, є

$$B = \mu_0 n I = \left(4\pi \times 10^{-7} \text{ Тл} \cdot \frac{\text{М}}{\text{А}}\right) (2,14 \times 10^3 \text{ м}^{-1})(0,41 \text{ А}) = 1,1 \times 10^{-3} \text{ Тл}.$$

#### Обговорення

Така відповідь справедлива тільки в тому випадку, якщо довжина соленоїда досить велика в порівнянні з його діаметром. Цей приклад є випадком, коли це справедливо.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 2.7

Чому дорівнює відношення величини магнітного поля, утвореного скінченним соленоїдом, до величини нескінченного наближення для кута  $\theta$ , рівного (а)  $85^\circ$ ? б)  $89^\circ$ ? Соленоїд має 1000 витків діаметром 50 см, по яким тече струм 1,0 А.

### Тороїди

Тороїд – це бубликоподібна котушка, тісно намотана одним безперервним дротом, як показано в частині (а) рис. 2.22. Якщо тороїд має  $N$  обмоток, а струм у дроті дорівнює  $I$ , тоді яке магнітне поле як всередині, так і зовні тороїда?

Почнемо з припущення циліндричної симетрії навколо осі  $OO'$ . Власне, це припущення не зовсім вірне, оскільки, як видно з частини (б) рис. 2.22, вид тороїдальної котушки змінюється від точки до точки (наприклад,  $P_1$ ,  $P_2$ , і  $P_3$ ) на круговій траєкторії з центром навколо  $OO'$ . Однак, якщо тороїд щільно намотаний, то всі точки кола стають по суті еквівалентними [частина (б) рис. 2.22], а циліндрична симетрія є точним наближенням.

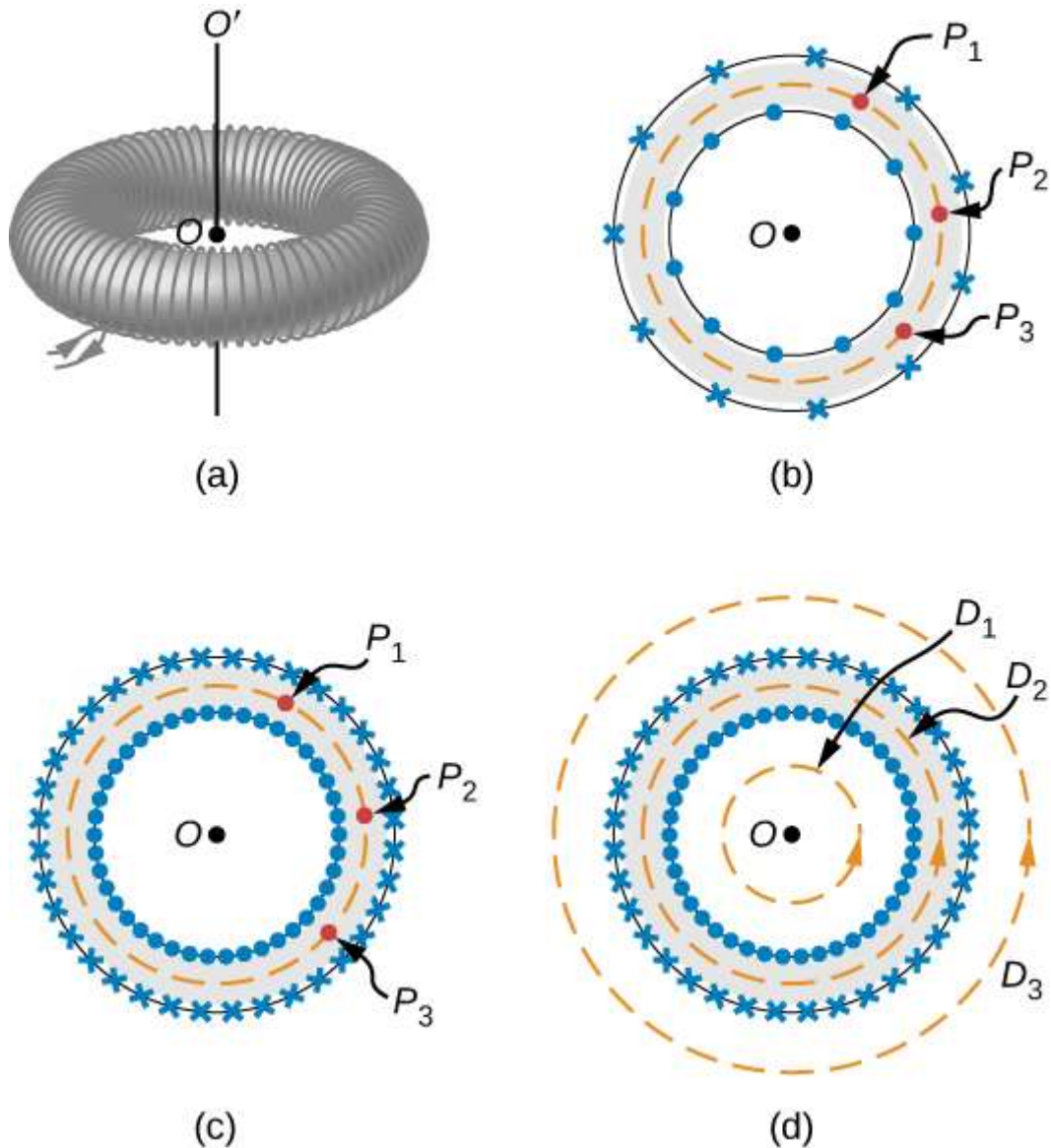


Рис. 2.22. (а) Тороїд – це спіраль, намотана на предмет у формі бублика. (б) Слабо намотаний тороїд не має циліндричної симетрії. (с) У щільно намотаному тороїді циліндрична симетрія є дуже хорошим наближенням. (с) Кілька шляхів інтегрування за законом Ампера

При такій симетрії вектор магнітного поля  $\vec{B}$  повинен бути дотичним і постійним за величиною уздовж будь-якої кругової траєкторії з центром на осі  $OO'$ . Це дозволяє нам писати для кожного зі шляхів  $D_1$ ,  $D_2$ , і  $D_3$  показані в частині (с) рис. 8.22,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(2\pi r). \quad (2.31)$$

Закон Ампера пов'язує цей інтеграл з сумарним струмом, що проходить через будь-яку поверхню, обмежену шляхом інтегрування. Для шляху, який є зовнішнім по відношенню до тороїда, або якщо струм не проходить через натягнуту на шлях  $D_1$  поверхню, або якщо струм, що проходить через поверхню в одному напрямку, точно врівноважується

струмом, що проходить через неї в протилежному напрямку (шлях  $D_3$ ), тобто коли сумарний струм не проходить через поверхню, тоді

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

і

$$B = 0. \quad (2.32)$$

Витки тороїда утворюють спіраль, а не кругові петлі. В результаті з'являється невелике зовнішнє по відношенню до котушки поле; однак наведений вище висновок справедливий, якби котушки були круглими.

Для кругової траєкторії в тороїді (шлях  $D_2$ ), струм у дроті розрізає поверхню  $N$  разів, в результаті чого через поверхню проходить загальний струм  $NI$ . Тепер ми знаходимо за допомогою закону Ампера, що

$$B(2\pi r) = \mu_0 NI$$

і

$$B = \frac{\mu_0 NI}{(2\pi r)}. \quad (2.33)$$

Магнітне поле напрямлено проти годинникової стрілки для показаних обмоток. Коли струм в котушках змінюється на протилежний, напрямок магнітного поля також змінюється на протилежний.

Магнітне поле всередині тороїда неоднорідне, оскільки воно змінюється обернено пропорційно відстані  $r$  від осі  $OO'$ . Однак, якщо центральний радіус  $R$  (радіус посередині між внутрішнім і зовнішнім радіусами тороїда) набагато більше діаметра поперечного перерізу витків  $r$ , то варіація досить мала, і величину магнітного поля можна обчислити за рівнянням 2.33, коли  $r = R$ .

## 2.7. Магнітне поле в речовині

Чому одні матеріали магнітні, а інші ні? І чому одні речовини намагнічуються полем, а інші не зазнають впливу? Щоб відповісти на такі питання, нам потрібне розуміння магнетизму на мікроскопічному рівні.

Усередині атома кожен електрон рухається по орбіті і обертається навколо внутрішньої осі. Обидва типи руху утворюють петлі струму і, отже, є магнітними диполями. Для конкретного атома сумарний магнітний дипольний момент є векторною сумою магнітних дипольних моментів. Величини  $\mu$  для декількох типів атомів наведені в табл. 2.1. Зауважимо, що деякі атоми мають нульовий сумарний дипольний момент і що величини незникаючих моментів, як правило, є  $10^{-23} \text{ А}\cdot\text{м}^2$ .

Жменька матерії має приблизно  $10^{26}$  атомів і іонів, кожен з яких має свій магнітний дипольний момент. Якщо зовнішнє магнітне поле відсутнє, магнітні диполі орієнтовані хаотично — стільки ж спрямовані вгору, як і вниз, стільки ж спрямовані на схід, як на захід і так далі. Отже, сумарний магнітний дипольний момент зразка дорівнює нулю.

**Магнітні моменти деяких атомів**

Атом	Магнітний момент, ( $10^{-24} \text{А} \cdot \text{м}^2$ )
H	9.27
He	0
Li	9.27
O	13.9
Na	9.27
S	13.9

Однак, якщо зразок помістити в магнітне поле, ці диполі мають тенденцію вирівнюватися з полем (див. рівняння 2.14), і це вирівнювання визначає, як зразок реагує на поле. На основі цієї реакції кажуть, що матеріал є або парамагнітним, або феромагнетичним, або діамагнетичним.

У **парамагнітному матеріалі** лише невелика частина (приблизно одна третина) магнітних диполів вирівняна з прикладеним полем. Оскільки кожен диполь створює своє власне магнітне поле, це вирівнювання вносить додаткове магнітне поле, яке посилює прикладене поле.

Коли **феромагнітний матеріал** поміщається в магнітне поле, його магнітні диполі також вирівнюються; Крім того, вони замикаються разом, так що виникає постійна намагніченість, навіть коли поле вимикається або змінюється на протилежне. Ця постійна намагніченість відбувається у феромагнітних матеріалах, але не в парамагнітних матеріалах.

**Діамагнітні матеріали** складаються з атомів, які не мають сумарного магнітного дипольного моменту. Однак, коли діамагнітний матеріал поміщається в магнітне поле, магнітний дипольний момент спрямований протилежно прикладеному полю  $i$ , отже, створює магнітне поле, яке протистоїть прикладеному полю. Тепер розглянемо кожен вид матеріалу більш детально.

**Парамагнітні матеріали**

Для простоти ми припускаємо, що наш зразок є довгим циліндричним шматком, який повністю заповнює внутрішню частину довгого, щільно намотаного соленоїда. Коли в соленоїді немає струму, магнітні диполі в зразку орієнтовані випадковим чином і не створюють чистого магнітного поля. Під час проходження струму магнітне поле соленоїда надає диполю

крутний момент, який прагне вирівняти його за напрямком поля. Конкуренцію вирівнюванню складають теплові зіткнення, які мають тенденцію до випадкової орієнтації диполів. Відносну важливість цих двох конкуруючих процесів можна оцінити, порівнявши задіяні енергії.

З рівняння 2.14 різниця енергій між магнітним диполем, вирівняним з магнітним полем і проти нього, дорівнює  $U_B = 2\mu B$ . Якщо  $\mu = 9,3 \times 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2$  (величина атомарного водню) і  $B = 1,0 \text{ Тл}$ , тоді

$$U_B = 1,9 \times 10^{-23} \text{ Дж.}$$

При кімнатній температурі  $27^\circ\text{C}$  тепла енергія на атом дорівнює:

$$U_T \approx kT = \left( 1,38 \times \frac{10^{-23} \text{ Дж}}{\text{К}} \right) (300 \text{ К}) = 4,1 \times 10^{-21} \text{ Дж,}$$

що приблизно в 220 разів більше, ніж  $U_B$ . Очевидно, що обмін енергією при теплових зіткненнях може серйозно заважати вирівнюванню магнітних диполів. В результаті в будь-який момент часу вирівнюється лише невелика частина диполів.

Чотири ескізи рис. 2.23 дають просту модель цього процесу вирівнювання.

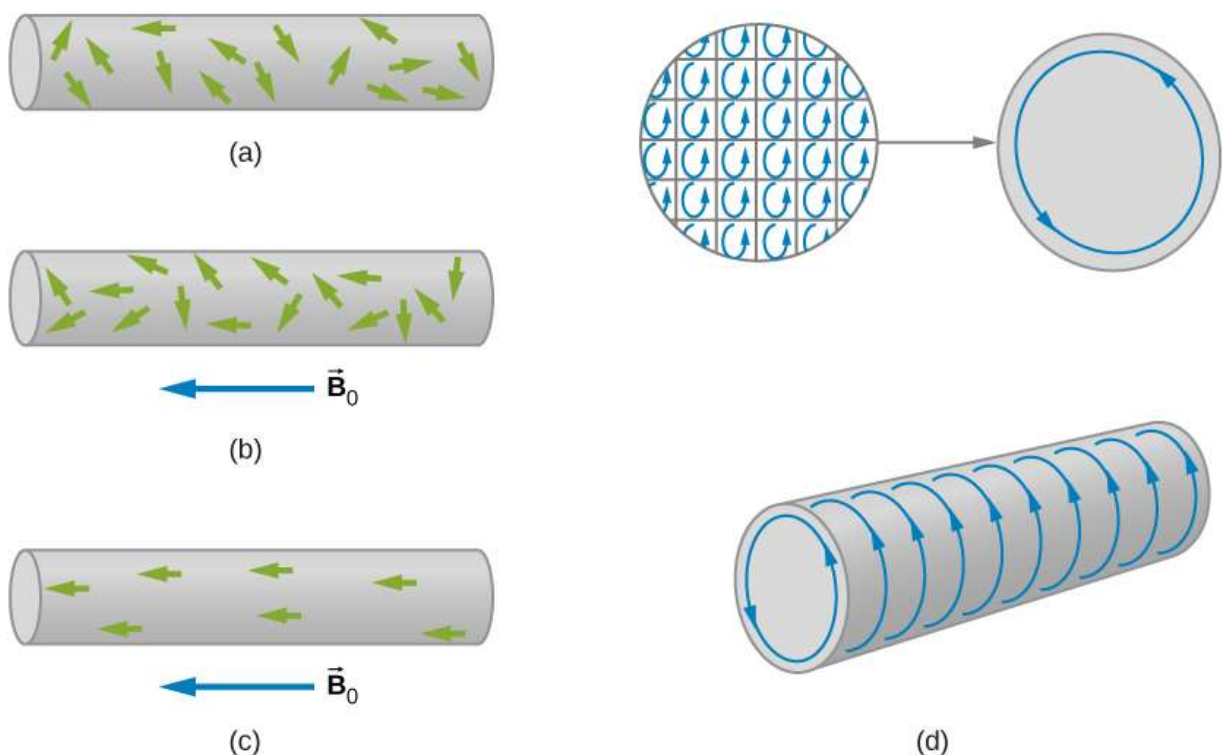


Рис. 2.23. Процес вирівнювання в парамагнітному матеріалі, що заповнює соленоїд (не показаний). (а) Без прикладеного поля магнітні диполі орієнтовані хаотично. (б) З включенням поля відбувається часткове вирівнювання. (с) Еквівалентне представлення частини (б). (д) внутрішні струми скасовуються, залишаючи ефективний поверхневий струм, який створює магнітне поле, подібне до магнітного поля скінченного соленоїда



У частині (а), перед тим, як застосувати поле соленоїда (не показано), що містить парамагнітний зразок, магнітні диполі орієнтовані випадковим чином, і сумарний магнітний дипольний момент дорівнює нулю. З включенням поля відбувається часткове вирівнювання диполів, як показано в частині (b). Компонента сумарного магнітного дипольного моменту, яка перпендикулярна полю, зникає. Тоді ми можемо представити зразок за допомогою частини (c), яка показує сукупність магнітних диполів, повністю вирівняних з полем. Розглядаючи ці диполі як контури струму, ми можемо уявити вирівнювання диполя як еквівалентний струм навколо поверхні матеріалу, як у частині (d). Цей поверхневий струм створює власне магнітне поле, яке підсилює поле соленоїда.

Ми можемо виразити повне магнітне поле  $\vec{B}$  у матеріалі так:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m, \quad (2.34)$$

де  $\vec{B}_0$  – це поле за рахунок струму  $I_0$  в соленоїді і  $\vec{B}_m$  – це поле, обумовлене поверхневим струмом  $I_m$  навколо зразка. Величина  $\vec{B}_m$  зазвичай пропорційна  $\vec{B}_0$ , факт, який ми виражаємо так:

$$\vec{B}_m = \chi \vec{B}_0, \quad (2.35)$$

де  $\chi$  – це безрозмірна величина, яка називається **магнітною сприйнятливістю**. Величини  $\chi$  для деяких парамагнітних матеріалів наведені в табл. 2.2 (наведені значення стосуються кімнатної температури).

Таблиця 2.2

### Магнітна сприйнятливість

Парамагнітні матеріали	$\chi$	Діамагнітні матеріали	$\chi$
Алюміній	$2.2 \times 10^{-5}$	Вісмут	$-1,7 \times 10^{-5}$
Кальцій	$1.4 \times 10^{-5}$	Вуглець (алмаз)	$-2,2 \times 10^{-5}$
Хром	$3.1 \times 10^{-4}$	Мідь	$-9,7 \times 10^{-6}$
Магній	$1.2 \times 10^{-5}$	Свинець	$-1,8 \times 10^{-5}$
Газоподібний кисень (1 атм)	$1.8 \times 10^{-6}$	Ртуть	$-2,8 \times 10^{-5}$
Киснева рідина (90 К)	$3.5 \times 10^{-3}$	Газоподібний водень (1 атм)	$-2,2 \times 10^{-9}$
Вольфрам	$6.8 \times 10^{-5}$	Газоподібний азот (1 атм)	$-6,7 \times 10^{-9}$
Повітря (1 атм)	$3.6 \times 10^{-7}$	Вода	$-9,1 \times 10^{-6}$

Оскільки вирівнювання магнітних диполів дуже слабке,  $\chi$  дуже малий для парамагнітних матеріалів. Об'єднавши рівняння 2.34 і рівняння 2.35, отримаємо:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \chi \vec{B}_0 = (1 + \chi) \vec{B}_0. \quad (2.36)$$

Для зразка всередині нескінченного соленоїда це стає рівним:

$$B = (1 + \chi) \mu_0 n I. \quad (2.37)$$

Цей вираз демонструє нам те, що введення парамагнітного матеріалу в соленоїд збільшує поле в  $(1 + \chi)$  разів. Однак, оскільки  $\chi$  дуже маленьке, тому поле майже не збільшується.

Величину

$$\mu = (1 + \chi) \mu_0 \quad (2.38)$$

називають магнітною проникністю матеріалу. З урахуванням (2.38), рівняння 2.37 можна записати у вигляді

$$B = \mu n I. \quad (2.39)$$

для заповненого соленоїда.

### Діамагнітні матеріали

Магнітне поле завжди індукує в атомі магнітний диполь. Цей індукований диполь протилежний прикладеному полю, тому його магнітне поле також спрямоване протилежно прикладеному полю. У парамагнітних і феромагнітних матеріалах індукований магнітний диполь маскується набагато сильнішими постійними магнітними диполями атомів. Однак в діамагнітних матеріалах, атоми яких не мають постійних магнітних дипольних моментів, ефект індукованого диполя спостерігається.

Тепер ми можемо описати магнітні ефекти діамагнітних матеріалів за допомогою тієї ж моделі, розробленої для парамагнітних матеріалів. Однак у цьому випадку фіктивний поверхневий струм протікає протилежно струму соленоїда, а магнітна сприйнятливість  $\chi$  є від'ємною. Значення  $\chi$  для деяких діамагнітних матеріалів також наведені в табл. 2.2.

### Феромагнітні матеріали

Звичайні магніти виготовляються з феромагнітного матеріалу, такого як залізо або один з його сплавів. Експерименти показують, що феромагнітний матеріал складається з крихітних областей, відомих як **магнітні домени**. Їх обсяги зазвичай коливаються від  $10^{-12}$  до  $10^{-8} \text{ м}^3$ , і вони містять близько  $10^{17}$  -  $10^{21}$  атомів. У межах домену магнітні диполі жорстко вирівняні в одному напрямку шляхом зв'язку між атомами. Цей зв'язок, який зумовлений квантово-механічними ефектами, настільки міцний, що навіть термічне перемішування при кімнатній температурі не може його порушити. В результаті кожен домен має дипольний момент. Деякі

матеріали мають більш слабке зчеплення і стають феромагнітними тільки при більш низьких температурах.

Якщо домени в феромагнітному зразку орієнтовані випадковим чином, як показано на рис. 2.24, то зразок не має сумарного магнітного дипольного моменту і називається ненамагніченим.

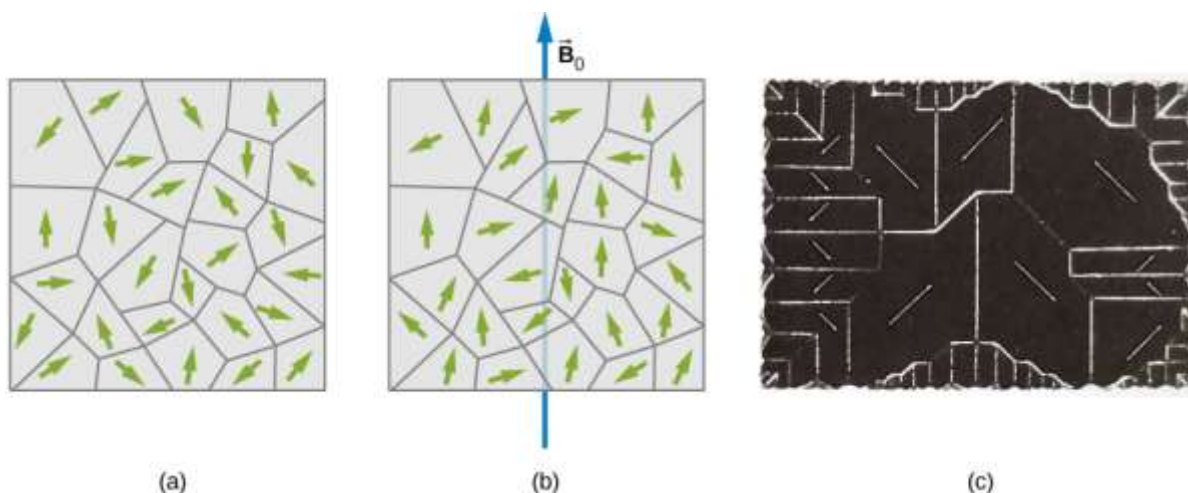


Рис. 2.24. (а) Домени випадково орієнтовані в ненамагніченому феромагнітному зразку, наприклад заліза. Стрілки представляють орієнтації магнітних диполів у доменах. (б) У прикладеному магнітному полі домени збігаються з полем. (с) домени монокристала нікелю. Білими лініями позначені межі доменів. Ці лінії виробляються порошком оксиду заліза, посипаним на кристал

Припустимо, що ми заповнюємо об'єм соленоїда ненамагніченим феромагнітним зразком. Коли магнітне поле  $\vec{B}_0$  соленоїда включається, дипольні моменти доменів обертаються так, що вони де-інде вирівнюються з полем, як це зображено на рис. 2.24. Крім того, вирівняні домени мають тенденцію збільшуватися в розмірах за рахунок невирівняних. Кінцевим ефектом цих двох процесів є створення сумарного магнітного дипольного моменту для феромагнетика, який спрямований уздовж прикладеного магнітного поля. Цей сумарний магнітний дипольний момент набагато більший, ніж у парамагнітного зразка, і домени з їх великою кількістю атомів не зміщуються при тепловому збудженні. Отже, поле за рахунок вирівнювання доменів стає досить великим.

Крім заліза, тільки чотири елементи містять магнітні домени, необхідні для прояву феромагнітної поведінки: кобальт, нікель, гадолій і диспрозій. Багато сплавів цих елементів також є феромагнетиками. Феромагнітні матеріали можуть бути описані за допомогою рівнянь 2.34 - 2.39, парамагнітних рівнянь. Однак значення  $\chi$  для феромагнітного матеріалу, як правило, порядку  $10^3 - 10^4$ , а також це залежить від історії магнітного поля, якому піддавався матеріал. Типовий графік  $B$  (сумарне

поле в матеріалі) в залежності від  $B_0$  (прикладене поле) для спочатку ненамагніченого шматка заліза показано на рис. 2.25. Деякі зразки чисел (1) для  $B_0 = 1,0 \times 10^{-4} \text{Тл}$ ,  $B = 0,60 \text{Тл}$  і  $\chi = (0,60/1,0 \times 10^{-4}) - 1 \approx 6,0 \times 10^3$ , (2) для  $B_0 = 6,0 \times 10^{-4} \text{Тл}$ ,  $B = 1,5 \text{Тл}$  і  $\chi = (1,5/6,0 \times 10^{-4}) - 1 \approx 2,5 \times 10^3$ .

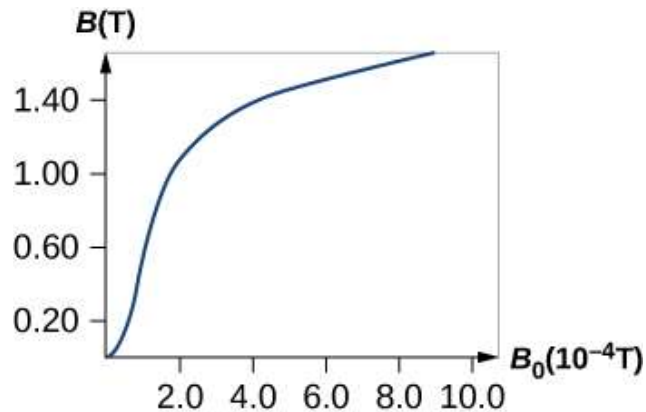


Рис. 2.25. Магнітне поле  $B$  у відпаленому залізі як функція прикладеного поля  $B_0$

Коли  $B_0$  змінюється в діапазоні позитивних і негативних значень,  $B$  поводитьься так, як показано на рис. 2.26.

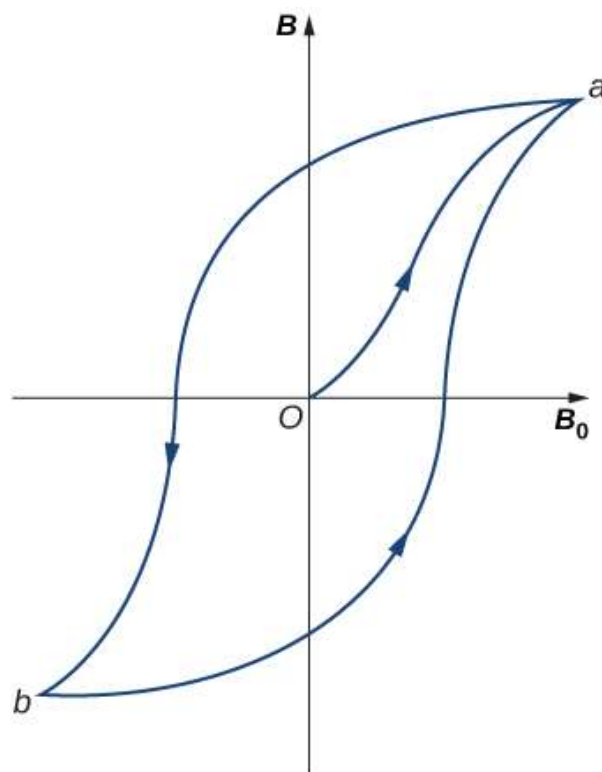


Рис. 2.26. Типова петля гістерезису для ферромагнетика. Коли матеріал вперше намагнічується, він рухається по кривій від 0 до  $a$ . Коли  $B_0$  є зворотним, він проходить шлях, показаний від  $a$  до  $b$ . Якщо  $B_0$  знову перевернути, матеріал слідує по кривій від  $b$  до  $a$

Зауважимо, що те саме  $B_0$  (що відповідає одному і тому ж струму в соленоїді) може давати різні значення  $B$  в матеріалі. Магнітне поле  $B$ , що утворюється в феромагнітному матеріалі прикладеним полем  $B_0$  залежить від магнітної історії матеріалу. Цей ефект називається **гістерезисом**, а крива рис. 2.26 – петлею гістерезису. Зверніть увагу, що  $B$  не зникає, коли  $B_0 = 0$  (тобто при відключенні струму в соленоїді). Зразок заліза залишається намагніченим, а це означає, що він стає постійним магнітом.

Як і парамагнітний зразок на рис. 2.23, часткове вирівнювання доменів у феромагнетик у еквівалентно струму, що протікає навколо поверхні. Таким чином, стержневий магніт можна зобразити як щільно намотаний соленоїд з великим струмом, що циркулює по його котушках (поверхневий струм).

На рис. 2.27 видно, що дана модель досить добре підходить. Поля стержневого магніту і кінцевого соленоїда разюче схожі. На малюнку також показано, як визначаються полюси стержневого магніту. Щоб утворити замкнуті петлі, лінії поля поза магнітом залишають північний (N) полюс і входять у південний (S) полюс, тоді як всередині магніту вони залишають S і входять у N.

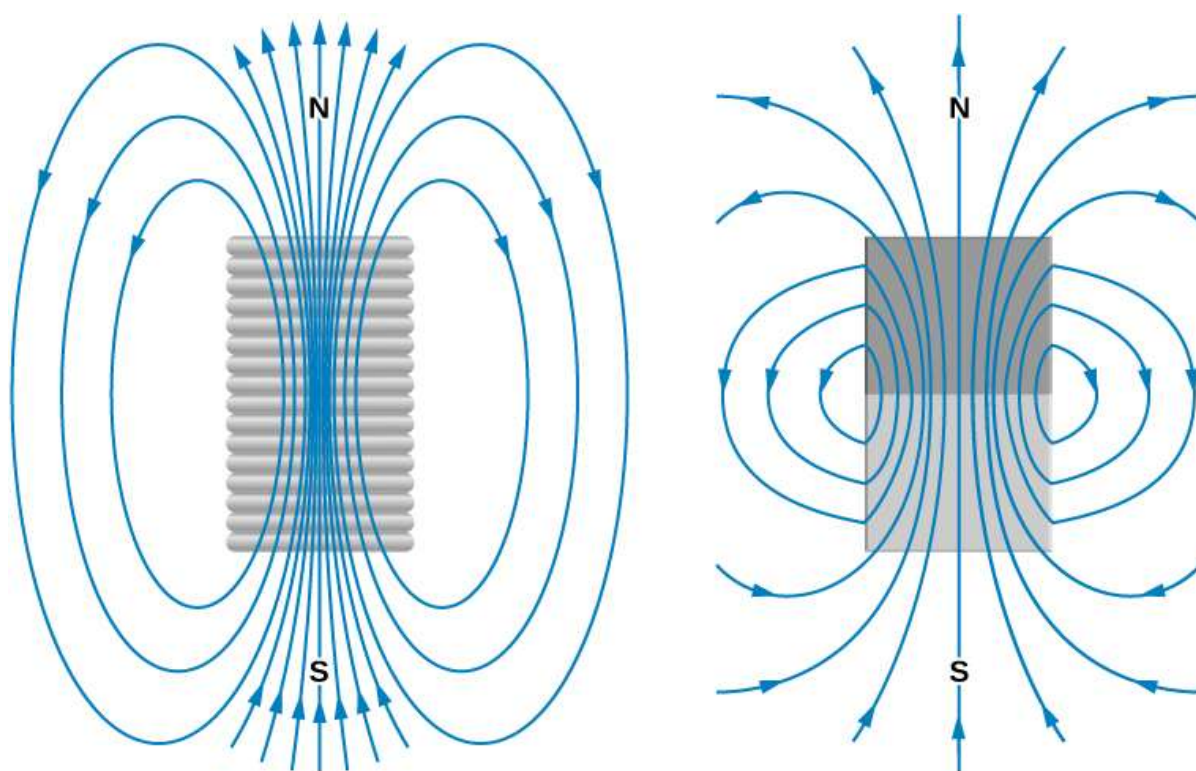


Рис. 2.27. Порівняння магнітних полів скінченного соленоїда і стержневого магніту

Феромагнітні матеріали зустрічаються в жорстких дисках комп'ютерів і постійних запам'ятовуючих пристроях (рис. 2.28). Матеріал, який використовується в жорстких дисках, називається спіновим клапаном,

який має шари феромагнітних (вирівнюються із зовнішнім магнітним полем) і антиферомагнітних (кожен атом вирівняний протилежно наступному) металів. Було помічено, що значна зміна опору була виявлена в залежності від того, чи було прикладене магнітне поле на спін-клапані чи ні. Ця велика зміна опору створює швидкий і послідовний спосіб запису або зчитування інформації прикладеним струмом.



Рис. 2.28. Внутрішня частина жорсткого диска. Срібний диск містить інформацію, тоді як тонкий стилус у верхній частині диска зчитує та записує інформацію на диск

### **ПРИКЛАД 2.10. Залізний сердечник в змійовику**

Довга котушка щільно намотана на залізний циліндр, крива намагнічування якого показана на рис. 2.25. (а) Якщо  $n = 20$  витків на сантиметр, яка величина поля  $B_0$ , коли  $I_0 = 0,20\text{A}$ ? (б) Яке сумарне магнітне поле для цього самого струму? (в) Яка магнітна сприйнятливність у цьому випадку?

### **Стратегія**

а) Магнітне поле соленоїда обчислюється за допомогою рівняння 2.28. (б) Графік використовуємо для визначення сумарного магнітного поля для цього самого струму. (в) Магнітна сприйнятливність обчислюється за допомогою рівняння 2.37.

### Розв'язок

а. Прикладне поле  $B_0$  котушки є

$$B_0 = \mu_0 n I_0 = (4\pi \times 10^{-7} \text{Тл} \cdot \text{м/А})(200/\text{м})(0,2 \text{ А}) = 5,0 \times 10^{-4} \text{Тл}.$$

б. З огляду кривої намагніченості на рис. 2.25 ми бачимо, що для цього значення  $B_0$ ,  $B = 1,4 \text{Тл}$ . Зауважимо, що внутрішнє поле вирівняних атомів набагато більше, ніж зовнішнє поле.

в. Магнітна сприйнятливість дорівнює:

$$\chi = \frac{B}{B_0} - 1 = \frac{1,4 \text{Тл}}{5,0 \times 10^{-4} \text{Тл}} - 1 = 2,8 \times 10^3.$$

### Обговорення

Феромагнітні матеріали мають сприйнятливість в діапазоні  $10^3$ , що добре погоджується з отриманими нами тут результатами. Парамагнітні матеріали мають малу сприйнятливість, тому прикладене до них поле котушки набагато більше, ніж магнітне поле, створюване матеріалом.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 2.8

Повторіть розрахунки з попереднього прикладу для  $I_0 = 0,040 \text{А}$ .

## ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ

### Введення



Рис. 3.1. Чорна смуга на зворотному боці кредитних карток і водійських посвідчень є дуже тонкий шар магнітного матеріалу з інформацією, що зберігається на ньому. Зчитування та запис інформації на кредитній картці здійснюється під час її руху. Фізична причина, чому це необхідно робити, називається електромагнітною індукцією і обговорюється в цьому розділі

Ми розглядали електричні поля, створювані фіксованим розподілом заряду, і магнітні поля, створювані постійними струмами, але електромагнітні явища не обмежуються цими стаціонарними ситуаціями. Більшість цікавих застосувань електромагнетизму, насправді, залежать від часу. Щоб дослідити деякі з цих застосувань, ми тепер усуваємо припущення незалежності від часу, яке ми робили, і дозволяємо полям змінюватися з часом. У цьому та наступних кількох розділах ви побачите чудову симетрію в поведінці, яку демонструють змінні в часі електричні та магнітні поля. Математично ця симетрія виражається додатковим доданком в законі Ампера і іншим ключовим рівнянням електромагнетизму, яке називається законом Фарадея. Ми також обговорюємо, як переміщення дроту через магнітне поле створює ЕРС або напругу. Нарешті, ми опишемо застосування цих принципів, наприклад, кардрідер, показаний вище.



### 3.1. Закон Фарадея

Перші продуктивні досліди, що стосуються впливу магнітних полів, що змінюються в часі, були проведені Майклом Фарадеєм в 1831 році. Один з його раних експериментів представлений на рис. 3.2. ЕРС індукується, коли магнітне поле в котушці змінюється шляхом руху стержневого магніту в котушку або з неї. ЕРС протилежних знаків утворюються при русі в протилежних напрямках, а напрямки ЕРС також міняються місцями зворотними полюсами. Такі ж результати виходять, якщо рухати котушку, а не магніт – важливий саме відносний рух. Чим швидше рух, тим більше ЕРС, а ЕРС немає, коли магніт нерухомий щодо котушки.

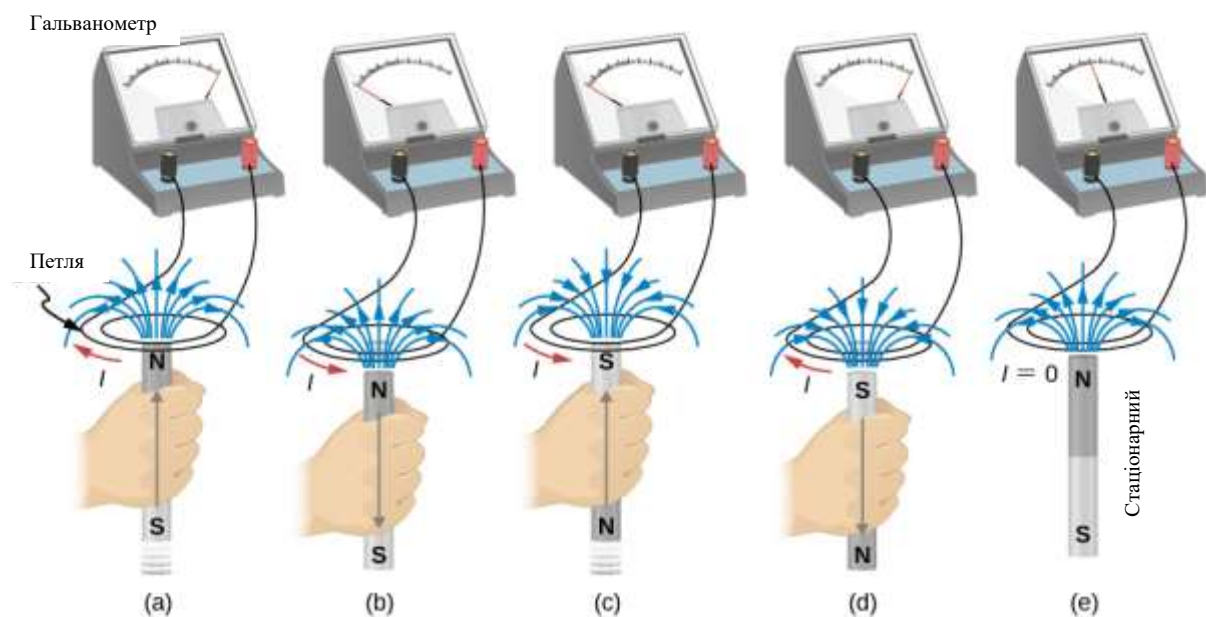


Рис. 3.2. Рух магніту відносно котушки створює ЕРС, як показано на малюнку (а–d). Такі ж ЕРС утворюються, якщо котушку переміщати щодо магніту. Ця короточасна ЕРС присутня тільки під час руху. Чим більша швидкість, тим більша величина ЕРС, а ЕРС дорівнює нулю, коли руху немає, як показано на (e)

Фарадей також виявив, що подібний ефект може бути отриманий за допомогою двох контурів – змінний струм в одному контурі індукує струм в другому, сусідньому контурі. Наприклад, при замиканні вимикача в контурі 1 рис. 3.3 (а) стрілка амперметра контура 2 на мить відхиляється, вказуючи на те, що в цьому колі індукований короточасний стрибок струму. Стрілка амперметра швидко повертається у вихідне положення, де і залишається. Однак, якщо вимикач контура 1 тепер раптово розімкнути, в контурі 2 спостерігається ще один короточасний стрибок струму в напрямку, протилежному попередньому.

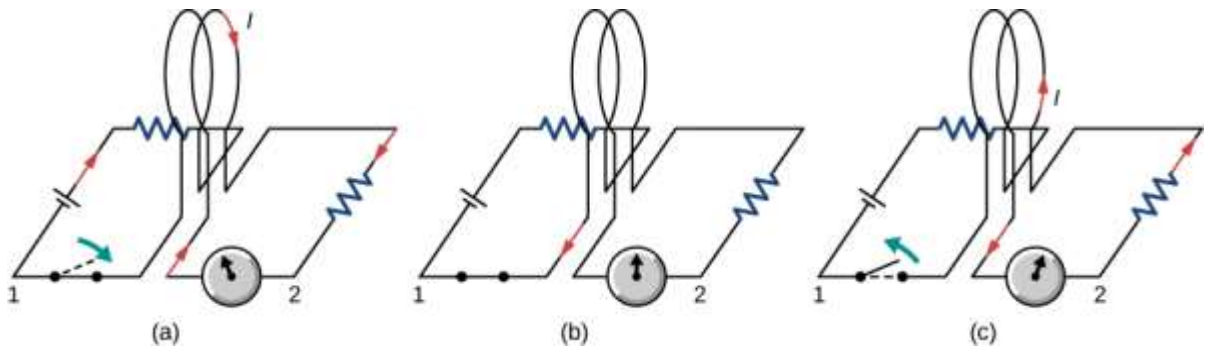


Рис. 3.3. (а) Замикання вимикача контура 1 призводить до короткочасного стрибка струму в контурі 2. (б) Якщо вимикач залишається замкнутим, струм у контурі 2 не спостерігається. (с) Повторне відкриття вимикача створює короткочасний струм у контурі 2, але в напрямку, протилежному попередньому

Фарадей зрозумів, що в обох дослідах струм протікає в колі, що містить амперметр, тільки тоді, коли *змінюється* магнітне поле в області, зайнятій цим контуром. Під час переміщення магніту в контурі змінювалася напруженість магнітного поля навколо контура; а при включенні або виключенні струму в контурі 1 величина його магнітного поля навколо контура 2 змінювалася. Врешті-решт Фарадей зміг інтерпретувати ці та всі інші експерименти, пов'язані з магнітними полями, які змінюються з часом, з точки зору наступного закону:

### ЗАКОН ФАРАДЕЯ

Електрорушійна сила  $\varepsilon_{\text{мп}}$  індукована негативною зміною магнітного потоку  $\Phi_m$  за одиницю часу. Будь-яка зміна магнітного поля або зміна орієнтації площі котушки по відношенню до магнітного поля індукують напругу (ЕРС).

**Магнітний потік** – це міра кількості ліній магнітного поля через задану площу поверхні, як це видно на рис. 3.4. Це визначення аналогічно вивченому раніше електричному потоку. Це означає, що якщо ми маємо:

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA, \quad (3.1)$$

тоді **індукована ЕРС** або напруга, створювана провідником або котушкою, що рухається в магнітному полі, дорівнює:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (3.2)$$

Негативний знак описує напрямок, в якому індукована ЕРС жене струм навколо контура. Однак цей напрямок найлегше визначити за допомогою правила, відомого як закон Ленца, про який ми поговоримо незабаром.

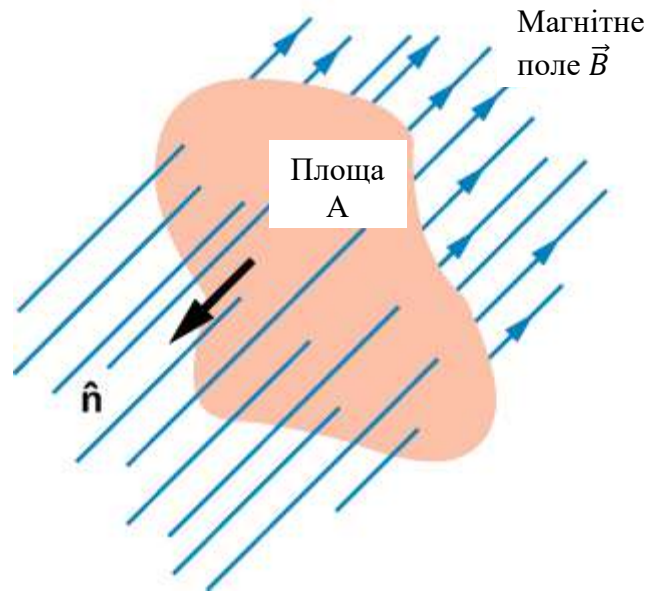


Рис. 3.4. Магнітний потік – це кількість ліній магнітного поля, що перетинають площу поверхні  $A$ , що визначається одиничним вектором площі  $\hat{n}$ . Якщо кут між  $\hat{n}$  і вектором магнітного поля  $\vec{B}$  є паралельними або антипаралельними, як показано на схемі, магнітний потік є максимально можливим значенням при даному значенні площі і магнітного поля

У частині (а) рис. 3.5 зображена схема і довільна поверхня  $S$ , яку вона обмежує.

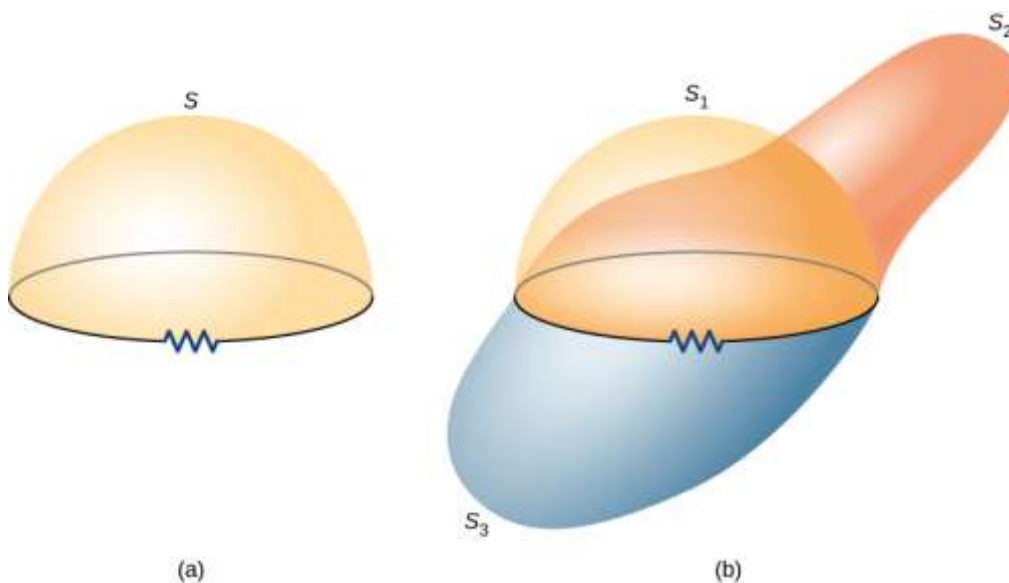


Рис. 3.5. (а) Контур, що обмежує довільну відкриту поверхню  $S$ . Плоська площа, обмежена контуром, не є частиною  $S$ . (b) три довільні відкриті поверхні, обмежені одним і тим же контуром. Значення  $\Phi_m$  однакова для всіх цих поверхонь

Зверніть увагу, що  $S$  є відкритою поверхнею. Можна показати, що будь-яка відкрита поверхня, обмежена даним контуром, може бути використана для оцінки  $\Phi_m$ . Наприклад  $\Phi_m$  однаковий для різних поверхонь  $S_1, S_2, \dots$  частини (b) малюнка.

Одиницею вимірювання магнітного потоку в СІ є вебер (Вб),

$$1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2.$$

Іноді одиниця магнітного поля виражається у вигляді веберів на квадратний метр ( $\text{Вб}/\text{м}^2$ ) замість Тл, виходячи з цього визначення. У багатьох практичних застосуваннях цікава схема складається з числа  $N$  туго намотаних витків (див. рис. 3.6). Кожен виток пронизує один і той же магнітний потік. Отже, сумарний магнітний потік через кола дорівнює  $N$  помноженим на потік, що припадає на один виток, а закон Фарадея записується так:

$$\varepsilon = - \frac{d(N\Phi_m)}{dt} = - N \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (3.3)$$

### ПРИКЛАД 3.1. Квадратна котушка в мінливому магнітному полі

Квадратна котушка рис. 3.6 має сторони довжиною  $l = 0,25$  м зі щільно намотаними  $N = 200$  витками дроту. Опір котушки становить  $R = 5,0$  Ом. Котушка поміщена в просторово однорідне магнітне поле, яке спрямоване перпендикулярно грані котушки і величина якого зменшується зі швидкістю  $dB/dt = -0,040$  Тл/с. а) Яка величина ЕРС, індукованої в котушці? б) Яка величина струму, що циркулює в котушці?

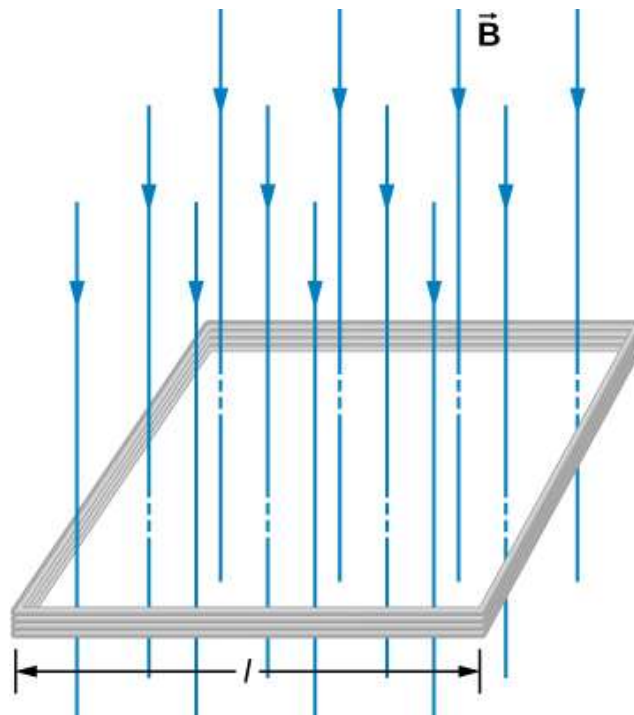


Рис. 3.6. Квадратна котушка з  $N$  витків дроту у рівномірному магнітному полі  $\vec{B}$ , спрямованому вниз перпендикулярно котушці

## Стратегія

Вектор площі, або  $\hat{n}$  напрямок, перпендикулярний площині, що покриває петлю. Ми виберемо напрямок так, щоб він був спрямований вниз. Тоді вектор  $\vec{B}$  буде паралельним до  $\hat{n}$  і потік визначимо як множення магнітного поля на площу. Площа контуру не змінюється в часі, тому її можна винести як множник з похідної за часом, залишивши магнітне поле єдиною величиною, що змінюється в часі. Нарешті, щоб знайти струм у контурі ми можемо застосувати закон Ома, визначивши індуковану ЕРС.

## Розв'язок

а. Потік через один виток становить

$$\Phi_m = BA = Bl^2,$$

так що ми можемо обчислити величину ЕРС за законом Фарадея. Знак ЕРС буде розглянуто в наступному розділі, присвяченому закону Ленца:

$$|\varepsilon| = \left| -N \frac{d\Phi_m}{dt} \right| = Nl^2 \frac{dB}{dt} = (200)(0,25 \text{ м})^2 (0,04 \text{ Тл/с}) = 0,5 \text{ В.}$$

б. Величина струму, індукованого в котушці, дорівнює:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{0,5 \text{ В}}{5 \text{ Ом}} = 0,1 \text{ А.}$$

## Обговорення

Якби площа контуру змінювалася в часі, ми не змогли б витягнути її з похідної за часом. Оскільки петля є замкнутим шляхом, тоді результатом течії струму буде невеликий нагрів проводів до тих пір, поки магнітне поле не перестане змінюватися. Це може трохи збільшити площу котушки під час нагрівання проводів.

## ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 3.1

Щільно намотана котушка має радіус 4,0 см, 50 витків і загальний опір 40 Ом. З якою швидкістю має змінюватися магнітне поле, перпендикулярне площі спіралі, щоб нагрівати спіраль зі швидкістю 2,0 мВт?

## 3.2. Закон Ленца

Напрямок, в якому індукована ЕРС жене струм навколо дрітної петлі, можна знайти через негативний знак. Однак зазвичай простіше визначити цей напрямок за допомогою **закону Ленца**, названого на честь його першовідкривача Генріха Ленца (1804-1865). (Фарадей також відкрив цей закон, незалежно від Ленца.) Сформулюємо закон Ленца наступним чином:

## ЗАКОН ЛЕНЦА

Напрямок індукованої ЕРС змушує струм обертатися навколо дротяної петлі так, щоб завжди *протистояти* зміні магнітного потоку, що викликає ЕРС.

Закон Ленца можна розглядати і з точки зору збереження енергії. Якщо проштовхування магніту в котушку викликає струм, то енергія цього струму повинна звідкись взятися. Якщо індукований струм викликає магнітне поле, протилежне збільшенню поля магніту, який ми вштовхнули, то ситуація зрозуміла. Ми притиснули магніт до поля і попрацювали над системою, і це показало струм. Якби не було так, що індуковане поле протистоїть зміні потоку, магніт був би втягнутий і виробляв би струм без будь-якої роботи. Тоді електрична потенційна енергія створювалася б, порушуючи закон збереження енергії.

Для визначення індукованої ЕРС  $\varepsilon$ , спочатку обчислюється магнітний потік  $\Phi_m$  а потім отримуємо  $d\Phi_m/dt$ . Величина  $\varepsilon$  задається формулою  $\varepsilon = |d\Phi_m/dt|$ . Нарешті, ви можете застосувати закон Ленца для визначення фзичного сенсу  $\varepsilon$ . Застосуємо закон Ленца до системи рис. 3.7 (а).

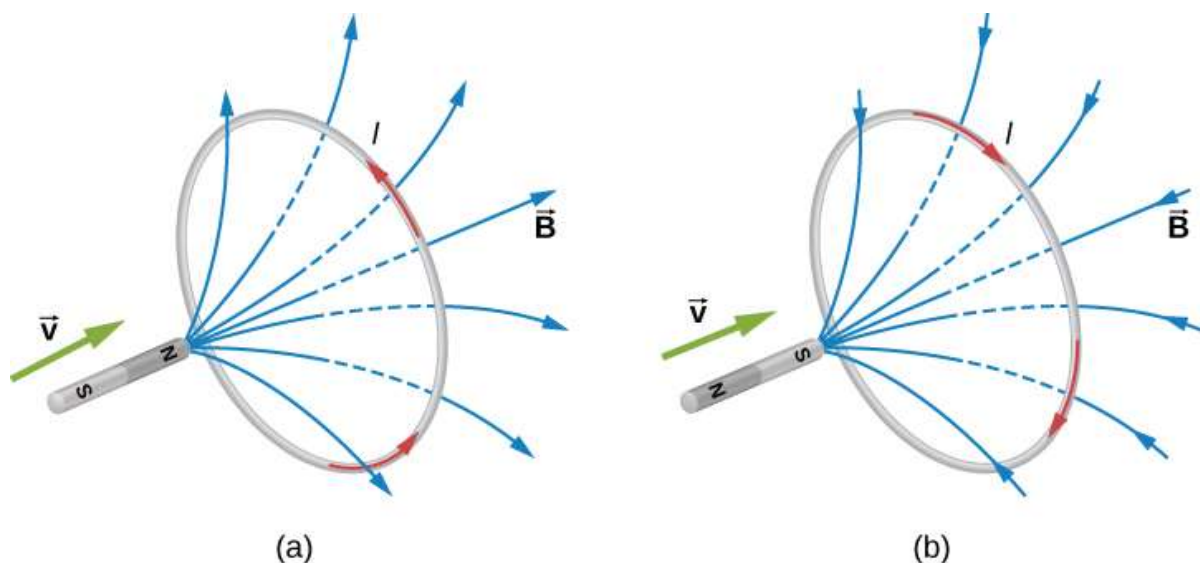


Рис. 3.7. Зміна магнітного потоку, викликане наближенням магніту, індукує струм в контурі. (а) Північний полюс, що наближається, індукує струм проти годинникової стрілки відносно стержневого магніту. (b) південний полюс, що наближається, індукує струм за годинниковою стрілкою відносно стержневого магніту

«Передню» частину замкнутої провідної петлі позначаємо як область, що містить стрижневий магніт, що наближається, а «задню» частину петлі – як іншу область. У міру того, як північний полюс магніту рухається до петлі, потік через петлю, обумовлений полем магніту, збільшується,

оскільки напруженість ліній поля, спрямованих від передньої до задньої частини петлі, зростає. Таким чином, в контурі індукується струм. За законом Ленца напрямок індукованого струму має бути таким, щоб його власне магнітне поле було спрямоване таким чином, щоб *протистояти* змінному потоку, викликаному полем магніту, що наближається. Отже, індукований струм циркулює так, що лінії його магнітного поля через петлю спрямовані зі зворотного боку на передню частину петлі. За допомогою ППР-2 розташуйте великий палець проти ліній магнітного поля, який спрямований до стержневого магніту. Ваші пальці обертаються проти годинникової стрілки, як це видно з стержневого магніту. Крім того, ми можемо визначити напрямок індукованого струму, розглядаючи контур струму як електромагніт, який *протистоїть* зближенню північного полюса стержневого магніту. Це відбувається, коли індукований струм протікає, як показано на малюнку, бо тоді бік петлі ближчий до магніту, що наближається, також є північним полюсом.

Частина (b) малюнка показує південний полюс магніту, що рухається до провідної петлі. При цьому потік через петлю за рахунок поля магніту збільшується тому, що збільшується число ліній поля, спрямованих зі зворотного боку на передню частину петлі. Щоб протистояти цій зміні, в петлі індукується струм, лінії поля якого через петлю спрямовані спереду назад. Аналогічно можна сказати, що струм тече в такому напрямку, що частина петлі ближча до магніту, що наближається, є південним полюсом, який потім відштовхує південний полюс магніту, що наближається. За допомогою ППР-2 ваш великий палець спрямований у бік від стержневого магніту. Ваші пальці обертаються за годинниковою стрілкою, що є напрямком індукованого струму.

Інший приклад, що ілюструє використання закону Ленца, показаний на рис. 3.8.

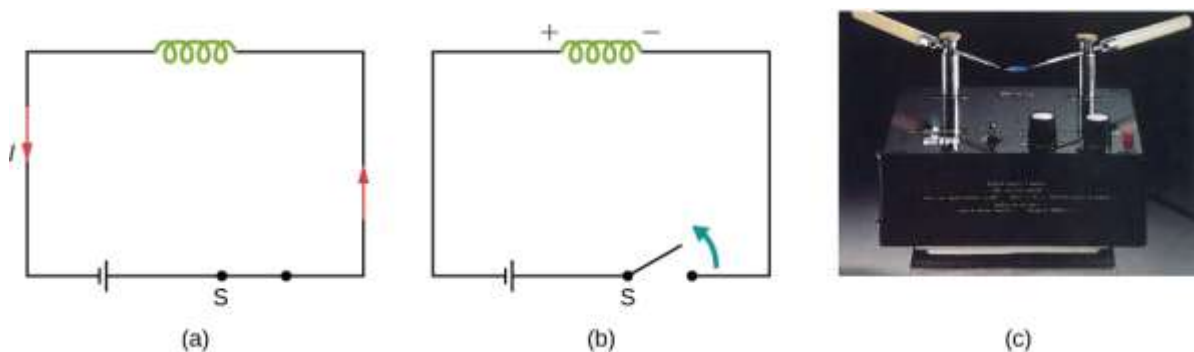
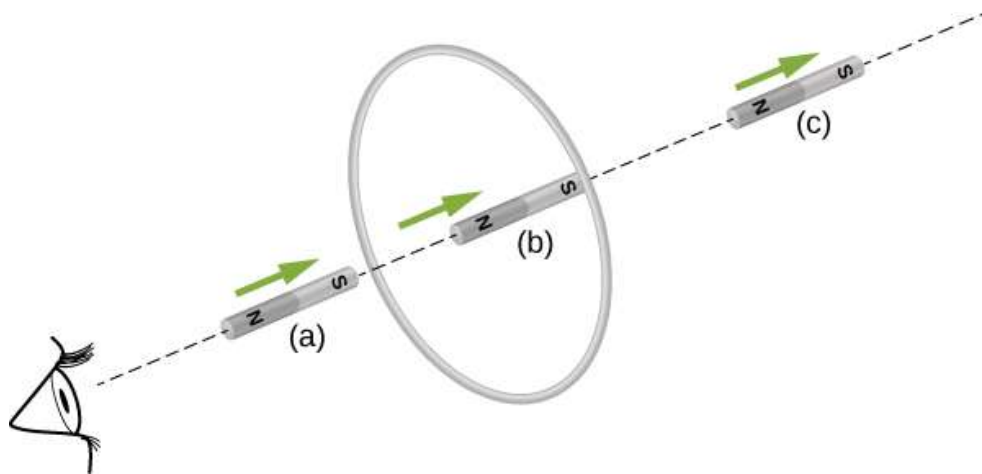


Рис. 3.8. (a) Соленоїд, з'єднаний з джерелом ЕРС. (b) Вимикач  $S$  припиняє струм, який, у свою чергу, індукує ЕРС у соленоїді. (c) різниця потенціалів між кінцями гострозагострених стрижнів утворюється шляхом індукції ЕРС в котушці. Ця різниця потенціалів досить велика, щоб утворити дугу між гострими точками

При розмиканні перемикача зменшення струму через соленоїд викликає зменшення магнітного потоку через його котушки, що індукує ЕРС в соленоїді. Ця ЕРС повинна протистояти зміні (припиненню струму), що її викликає. Отже, індукована ЕРС має показану полярність і рухається в напрямку вихідного струму. Це може утворити дугу на клеммах перемикача під час його розмикання.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 3.2

Знайдіть напрямок індукованого струму в дротяній петлі, показаній нижче, коли магніт входить, проходить і виходить з петлі.



### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 3.3

Перевірте напрямки індукованих струмів на рис. 3.3.

### ПРИКЛАД 3.2. Кругова котушка в мінливому магнітному полі

Магнітне поле  $\vec{B}$  спрямоване назовні перпендикулярно площині кругової спіралі радіуса  $r = 0,50$  м (рис. 3.9). Поле циліндрично симетричне по відношенню до центру котушки, а його величина експоненціально зменшується відповідно до  $B = (1,5T) e^{-5t}$ , де  $B$  – в тесла, а  $t$  – в секундах.

а) Обчисліть ЕРС, індуковану в котушці в моменти часу  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 5,0 \times 10^{-2}$  с і  $t_3 = 1,0$  с. б) Визначте струм в котушці в ці три моменти часу, якщо її опір дорівнює 10 Ом.

#### Стратегія

Оскільки магнітне поле перпендикулярне площині котушки і постійне в кожній точці котушки, тоді скалярний добуток магнітного поля  $\vec{B}$  і нормаль до одиниці площі вектора  $\hat{n}$  перетворюється на множення. Магнітне поле можна витягнути з інтегрування, визначивши потік як добуток площі на часову зміну магнітного поля. Нам потрібно взяти похідну за часом від експоненціальної функції, щоб обчислити ЕРС за



законом Фарадея. Після чого для обчислення сили струму використовуємо закон Ома.

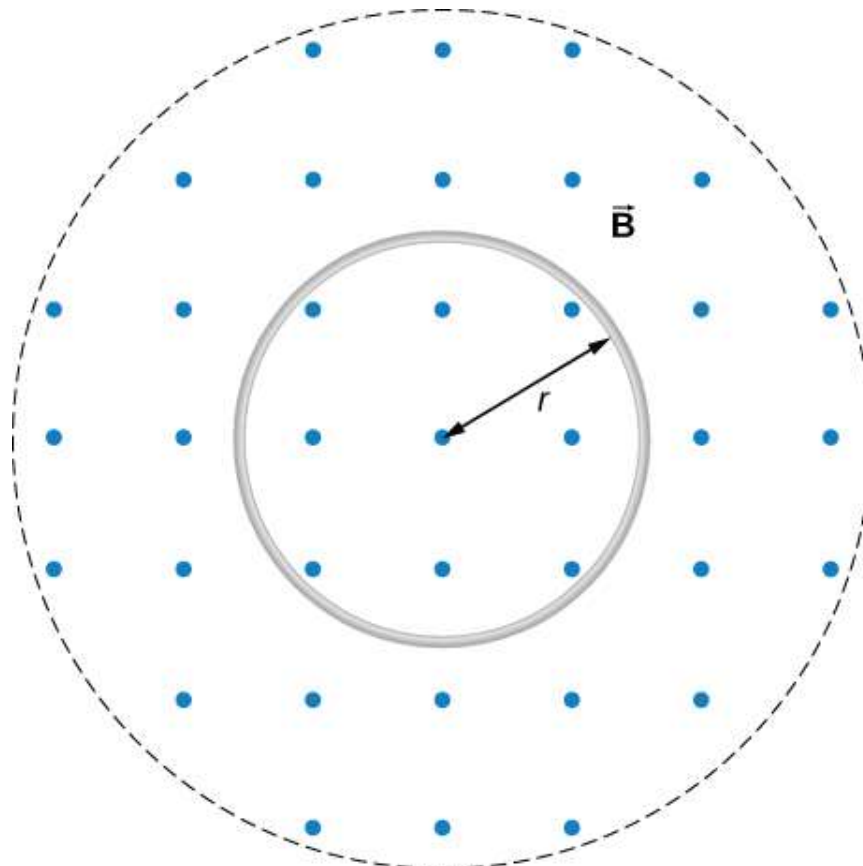


Рис. 3.9. Кругова котушка в магнітному полі, що спадає

### Розв'язок

а. Оскільки  $\vec{B}$  перпендикулярно площині котушки, магнітний потік задається формулою:

$$\Phi_m = B\pi r^2 = (1,5 e^{-5t} \text{Тл})\pi(0,5 \text{ м})^2 = 1,2 e^{-(5 \text{ с}^{-1})t} \text{Вб}.$$

Із закону Фарадея величина індукованої ЕРС дорівнює:

$$|\varepsilon| = \left| -\frac{d\Phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{d}{dt} (1,2 e^{-(5 \text{ с}^{-1})t} \text{Вб}) \right| = 6 e^{-(5 \text{ с}^{-1})t} \text{В}.$$

Оскільки  $\vec{B}$  спрямований за межі сторінки і зменшується, індукований струм повинен текти проти годинникової стрілки, якщо дивитися зверху, щоб магнітне поле, яке він створює через котушку, також вказувало за межі сторінки. Для всіх трьох значень часу  $\varepsilon$  напрямлена проти годинникової стрілки; його величини становлять:

$$\varepsilon(t_1) = 6,0 \text{ В}; \varepsilon(t_2) = 4,7 \text{ В}; \varepsilon(t_3) = 0,04 \text{ В}.$$

б. Із закону Ома відповідні струми дорівнюють:

$$I(t_1) = \frac{\varepsilon(t_1)}{R} = \frac{6,0 \text{ В}}{10 \text{ Ом}} = 0,6 \text{ А};$$

$$I(t_2) = \frac{\varepsilon(t_2)}{R} = \frac{4,7 \text{ В}}{10 \text{ Ом}} = 0,47 \text{ А};$$

$$I(t_3) = \frac{\varepsilon(t_3)}{R} = \frac{0,04 \text{ В}}{10 \text{ Ом}} = 0,004 \text{ А}.$$

### Обговорення

Напряга ЕРС створюється зміною магнітного потоку з часом. Якщо ми знаємо, як змінюється магнітне поле з часом на постійній площі, ми можемо взяти його похідну часу для обчислення індукованої ЕРС.

### ПРИКЛАД 3.3. Зміна магнітного поля всередині соленоїда

Струм по обмотках соленоїда з  $n = 2000$  витків на метр змінюється зі швидкістю  $dI/dt = 3,0 \text{ А/с}$ . Соленоїд має довжину  $50 \text{ см}$  і діаметр поперечного перерізу  $3,0 \text{ см}$ . Невелика котушка складається з  $N = 20$  витків. Щільно намотані витки, загорнуті в коло діаметром  $1,0 \text{ см}$ , розміщують посередині соленоїда так, щоб площина котушки була перпендикулярна центральній осі соленоїда. Припускаючи, що наближення нескінченного соленоїда справедливе в місці розташування малої котушки, визначте величину ЕРС, індукованої в котушці.

### Стратегія

Магнітне поле в середині соленоїда є рівномірним значенням  $\mu_0 nI$ . Це поле створює максимальний магнітний потік через котушку, оскільки він спрямований уздовж довжини соленоїда. Отже, магнітний потік через котушку є добутком магнітного поля соленоїда, помноженого на площу котушки. Закон Фарадея передбачає похідну за часом від магнітного потоку. Єдиною величиною, що змінюється в часі, є струм, решту можна витягнути з похідної часу. Нарешті, ми включаємо кількість витків в котушці для визначення індукованої ЕРС в котушці.

### Розв'язок

Оскільки поле соленоїда задається формулою  $B = \mu_0 nI$ , потік через кожен виток малої котушки становить:

$$\Phi_m = \mu_0 nI \frac{\pi d^2}{4},$$

де  $d$  – діаметр котушки. Тепер, виходячи із закону Фарадея, величина ЕРС, індукованої в котушці, дорівнює:

$$\varepsilon = \left| N \frac{d\Phi_m}{dt} \right| = \left| N \mu_0 nI \frac{\pi d^2}{4} \frac{dI}{dt} \right| =$$

$$= 20(4\pi \times 10^{-7} \text{ Тл} \cdot \text{м/с})(200 \text{ м}^{-1}) \frac{\pi(0,01 \text{ м})^2}{4} \left( 3 \frac{\text{А}}{\text{с}} \right) = 1,2 \times 10^{-5} \text{ В}.$$

## Обговорення

При включенні струму у вертикальному соленоїді, як показано на рис. 3.10, кільце має індуковану ЕРС від змінного магнітного потоку соленоїда, яка протистоїть зміні магнітного потоку. В результаті кільце вистрілюється вертикально в повітря.



Рис. 3.10. Стрибуче кільце. При включенні струму у вертикальному соленоїді в металевому кільці індукується струм. Змінне поле, створюване соленоїдом, змушує кільце зіскакувати з соленоїда

### 3. 3. ЕРС руху

Магнітний потік залежить від трьох факторів: напруженості магнітного поля, площі, через яку проходять лінії поля, і орієнтації поля з площею поверхні. Якщо будь-яка з цих величин змінюється, виникає відповідна зміна магнітного потоку. До сих пір ми розглядали тільки зміни потоку через зміну поля. Тепер ми розглянемо ще одну можливість: зміну площі, через яку проходять лінії поля, включаючи зміну орієнтації площини.

Два приклади такого типу зміни потоку представлені на рис. 3.11. У частині (а) потік через прямокутну петлю збільшується при його русі в магнітне поле, а в частині (б) потік через обертову котушку змінюється в залежності від кута  $\theta$ .

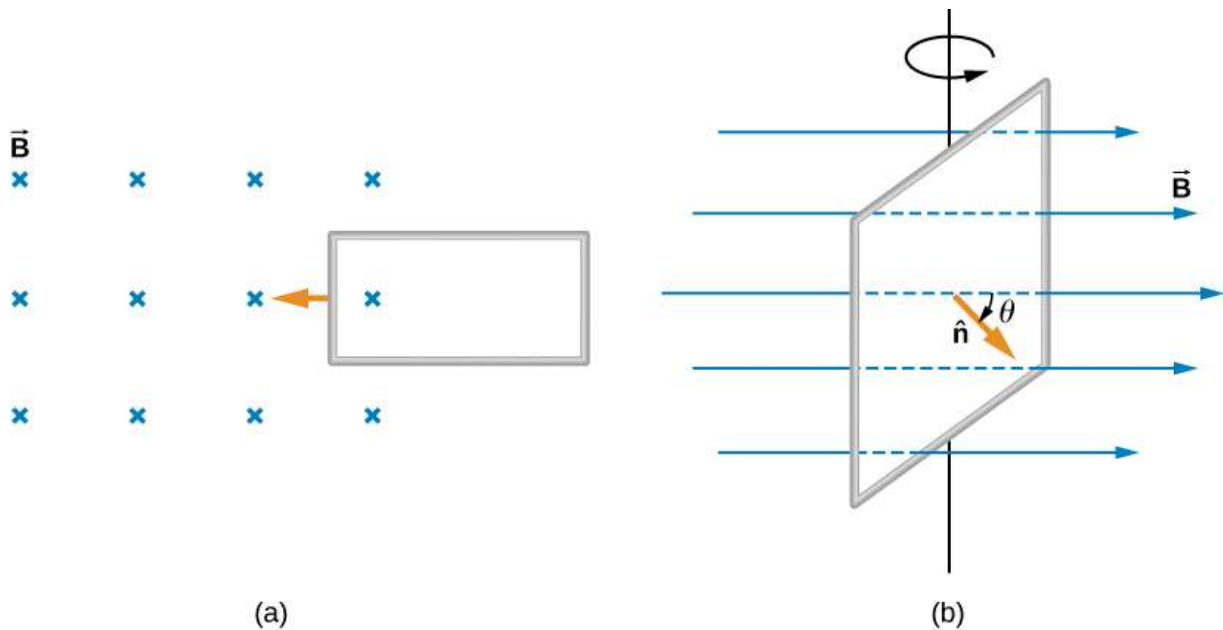


Рис. 3.11 (а) Магнітний потік змінюється при русі петлі в магнітне поле; (b) магнітний потік змінюється при обертанні петлі в магнітному полі

Тепер розглянемо провідний стрижень як частину замкненого електричного кола, через яке змінюється магнітний потік. Площа кола  $MNOP$  на рис. 3.12, дорівнює  $lx$  і перпендикулярна магнітному полю, тому можна замінити інтегрування рівняння 3.1 множенням магнітного поля і площі. Таким чином, магнітний потік через відкриту поверхню дорівнює:

$$\Phi_m = Blx. \quad (3.4)$$

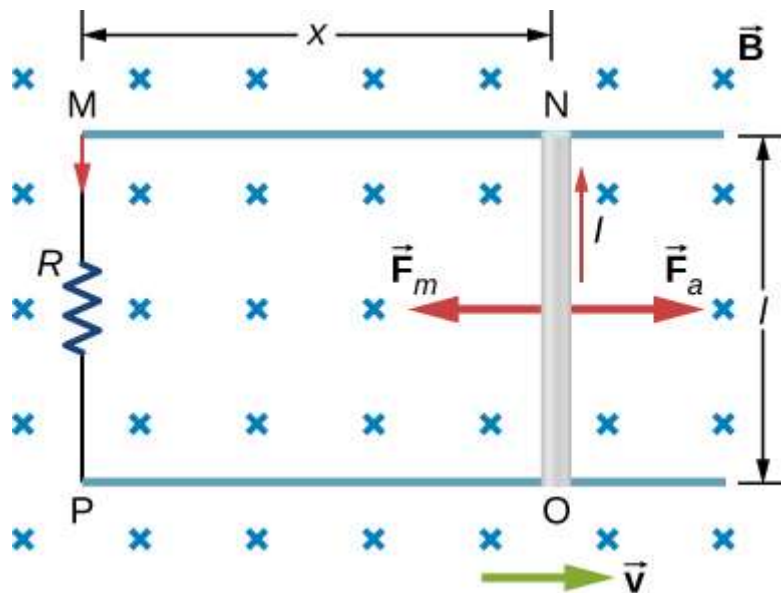


Рис. 3.12. Струмopвідний стрижень штовхається вправо з постійною швидкістю. Зміна магнітного потоку індукує струм в колі  $I$

Оскільки  $B$  і  $l$  постійні, а швидкість стрижня дорівнює  $v = dx/dt$ , ми можемо переформулювати закон Фарадея у вигляді рівняння 3.2 для величини ЕРС в термінах рухомого провідного стрижня як

$$\varepsilon = \frac{d\Phi_m}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv. \quad (3.5)$$

Струм, індукований в колі, – це ЕРС  $\varepsilon$ , поділена на опір  $R$ :

$$I = \frac{Blv}{R}.$$

Напрямок індукованої ЕРС задовольняє закону Ленца, в чому можна переконатися, оглянувши схему.

Цей розрахунок ЕРС, викликаній рухом стрижня по провідних рейках, не обмежується цим випадком. Використавши формулу  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ , як відправну точку, можна показати, що формула  $\varepsilon = -d\Phi_m/dt$  справедлива для будь-якої зміни потоку, викликаній рухом провідника. У законі Фарадея ми побачили, що ЕРС, індукована магнітним полем, що змінюється в часі, підкоряється цьому ж співвідношенню і є законом Фарадея. Таким чином, закон Фарадея *справедливий для всіх змін потоку*, незалежно від того, чи виникають вони під впливом змінного магнітного поля, зміни площі кола, або їх комбінації.

З енергетичної точки зору, сила  $\vec{F}_a$ , що рухає стрижень, виробляє енергію  $\vec{F}_a \vec{v}$  в одиницю часу і резистор розсіює потужність  $I^2 R$ . Оскільки стрижень рухається з постійною швидкістю, то прикладена сила  $F_a$  повинна врівноважити магнітну силу Ампера  $F_m = IlB$ , що діє на стрижень, коли по ньому протікає індукований струм  $I$ . Таким чином, вироблена в одиницю часу енергія становить:

$$F_a v = Blv \cdot I = Blv \cdot \frac{Blv}{R} = \frac{(Blv)^2}{R}, \quad (3.6)$$

а потужність, що розсіюється дорівнює:

$$P = I^2 R = \left(\frac{Blv}{R}\right)^2 R = \frac{(Blv)^2}{R}. \quad (3.7)$$

Тобто, за принципом енергозбереження вироблена і розсіяна потужності рівні.

Цей принцип можна побачити в роботі рейкової гармати. Рейкова гармата – це пускова електромагнітна установка зі снарядом, в якій використовується апаратна схема, аналогічна наведеної на рис. 3.12 і показана в схематичному вигляді на рис. 3.13. Струмopовідний стрижень замінюється пластиною зі снарядом, який вистрілюється.

Поки що ми розглядали питання про те, як рух стрижня в магнітному полі викликає ЕРС. У рейкової гарматі під час відключення магнітного поля зменшується магнітний потік між рейками, викликаючи протікання струму в пластині (якорі), який несе снаряд. Цей якор з струмом за рахунок магнітної сили Ампера, що діє на нього, рухається вперед. Рейкові гармати, однак, не використовуються широко у військовій справі через високу

вартість виробництва та великі струми: майже мільйон ампер потрібно для вироблення достатньої енергії, щоб рейкова гармата була ефективною зброєю.

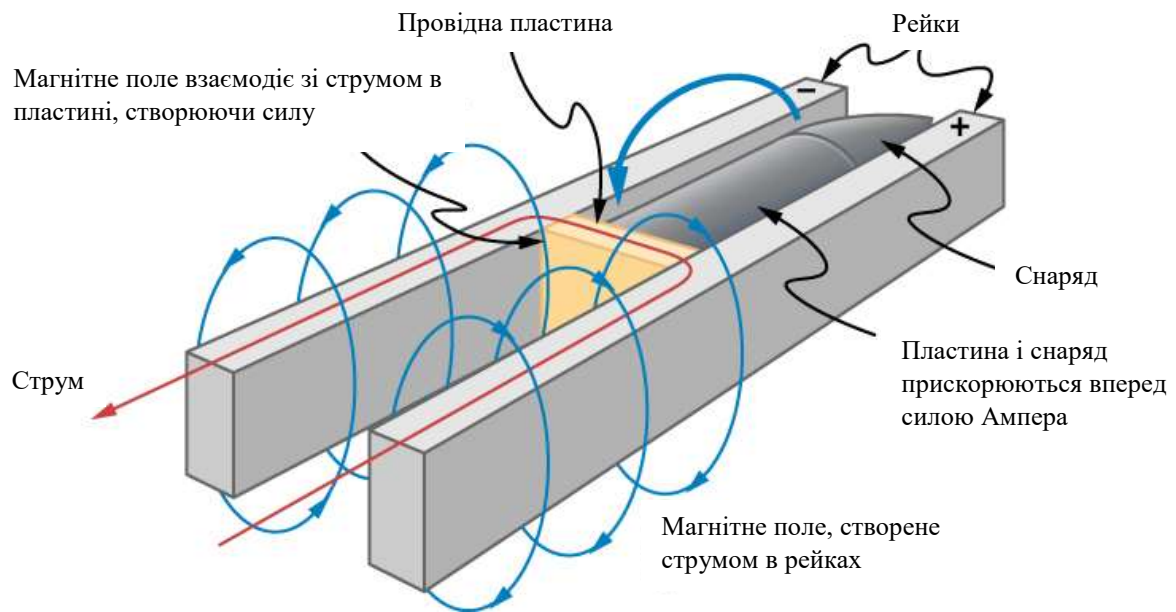


Рис. 3.13. Струм через дві рейки та пластину створює силу Ампера, яка рухає пластину і снаряд вперед

Ми можемо обчислити ЕРС, викликану рухом стрижня, за допомогою закону Фарадея, *навіть коли реального замкнутого кола немає*. Ми просто уявляємо собі замкнуту область, межа якої включає в себе рухомий провідник, обчислюємо  $\Phi_m$ , а потім знаходимо ЕРС із закону Фарадея. Наприклад, рухомий стрижень рис. 3.14 може бути однією стороною уявної прямокутної області, представлені пунктирними лініями.

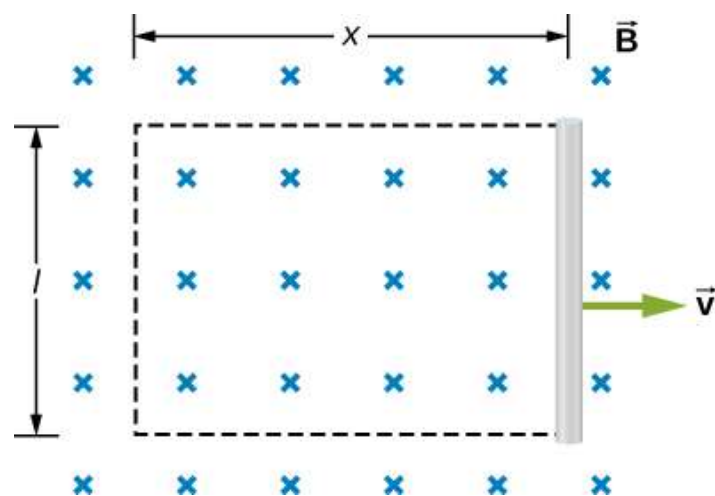


Рис. 3.14. За допомогою уявного прямокутника ми можемо використовувати закон Фарадея для обчислення індукованої ЕРС в рухомому стрижні

Площа прямокутника дорівнює  $lx$ , тому магнітний потік через нього дорівнює  $\Phi_m = Blx$ . Диференціюючи це рівняння, отримаємо:

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv, \quad (3.8)$$

що ідентично різниці потенціалів між кінцями стрижня, яку ми визначили раніше. ЕРС, що виникають під час руху стрижнів у слабкому магнітному полі Землі зазвичай не дуже великі, інакше ми помітили б напругу вздовж металевих стрижнів, таких як викрутка, під час звичайних рухів. Наприклад, простий розрахунок ЕРС руху 1,0-метрового стрижня, що рухається зі швидкістю 3,0 м/с перпендикулярно до поля Землі, дає величину:

$$\varepsilon = Blv = (5 \times 10^{-5} \text{Тл})(1 \text{ м})(3 \text{ м/с}) = 150 \text{ мкВ}.$$

Це невелике значення узгоджується з досвідом. Однак є суттєвий виняток.

У 1992 і 1996 роках за допомогою космічного човника були зроблені спроби створення великих ЕРС. Прив'язний супутник повинен був бути випущений на дроті довжиною 20 км, як показано на рис. 3.15, для створення ЕРС 5 кВ, рухаючись з орбітальною швидкістю через поле Землі.

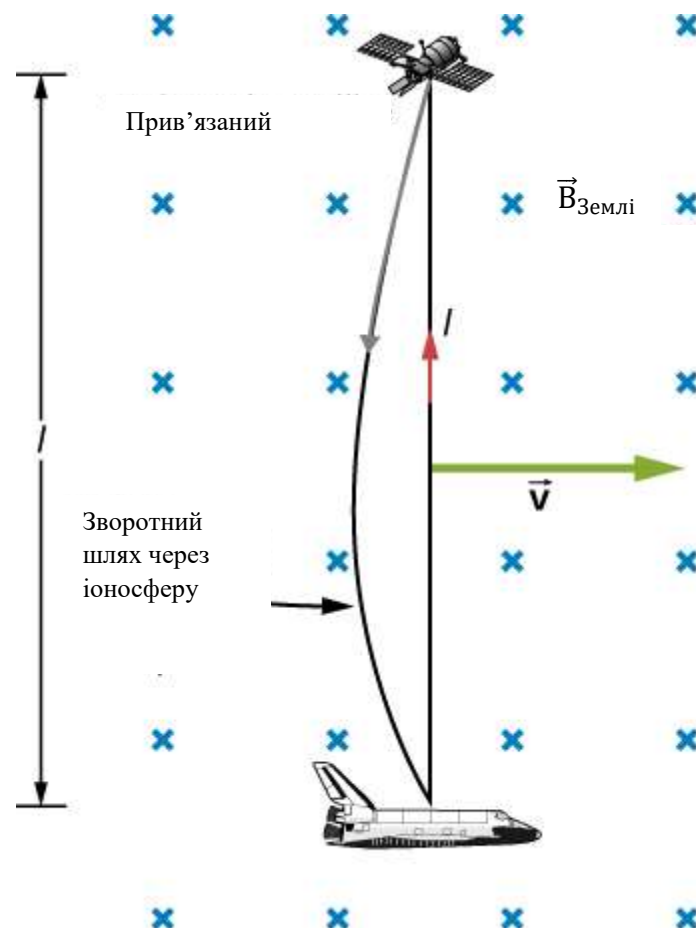


Рис. 3.15. Експеримент з прив'язаним супутником. Передбачалося, що ЕРС 5 кВ індукується в 20-кілометровому провіднику під час руху з орбітальною швидкістю в магнітному полі Землі. Коло замикається зворотним шляхом через нерухому іоносферу

Ця ЕРС може бути використана для перетворення частини кінетичної та потенційної енергії шаттла в електричну енергію, якщо вдасться створити повну схему. Щоб замкнути ланцюг, нерухома іоносфера повинна була забезпечити зворотний шлях, по якому міг би протікати струм. (Іоносфера — це розріджена і частково іонізована атмосфера на орбітальних висотах. Він проводить за рахунок іонізації. Іоносфера виконує ту ж функцію, що і нерухомі рейки і з'єднувальний резистор на рис. 3.13, без яких не було б повного кола). Протікання струму в кабелі за рахунок магнітної сили  $F = IlB \sin \theta$  виконує роботу, яка зменшує кінетичну і потенційну енергію шаттла, і дозволяє перетворювати її в електричну енергію. Обидва випробування виявилися невдалими. У першому трос висів і його можна було протягнути лише на пару сотень метрів; У другому трос обірвався при майже повному витягуванні. Приклад 3.4 вказує на доцільність таких експериментів в принципі.

### ПРИКЛАД 3.4. Обчислення ЕРС під час руху об'єкта на орбіті Землі

Обчисліть ЕРС руху, індуковану вздовж 20,0-кілометрового провідника, що рухається з орбітальною швидкістю 7,80 км/с, перпендикулярною до земного магнітного поля  $5,00 \times 10^{-5}$  Тл.

#### Стратегія

Це відмінний приклад використання рівняння руху  $\varepsilon = Blv$ .

#### Розв'язок

Введення заданих значень  $\varepsilon = Blv$  дає:

$$\varepsilon = Blv = (5,0 \times 10^{-5} \text{ Тл})(2,0 \times 10^4 \text{ м})(7,8 \times 10^3 \text{ м/с}) = 7,8 \times 10^3 \text{ В.}$$

#### Обговорення

Отримане значення більше, ніж виміряна напруга 5 кВ для експерименту з човником, оскільки фактичний орбітальний рух троса не перпендикулярний полю Землі. Величина 7,80 кВ – це максимальна ЕРС, отримана при  $\theta = 90^\circ$  і  $\sin \theta = 1$ .

### ПРИКЛАД 3.5. Металевий стрижень, що обертається в магнітному полі

У частині (а) рис. 3.16 зображений металевий стрижень  $OS$ , який обертається в горизонтальній площині навколо точки  $O$ . Стрижень ковзає по дроту, що утворює кругову дугу  $PST$  радіусом  $r$ . Система знаходиться в постійному магнітному полі  $\vec{B}$ , яке спрямовується за межі сторінки. а) Якщо обертати стрижень з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ , який струм  $I$  протікає в замкнутому контурі  $OPSO$ ? Припустимо, що резистор  $R$  забезпечує весь опір в замкнутому контурі. (b) Обчисліть роботу за



одиницю часу, яку ви виконаєте під час обертання стрижня, і покажіть, що вона дорівнює потужності, що розсіюється в резисторі.

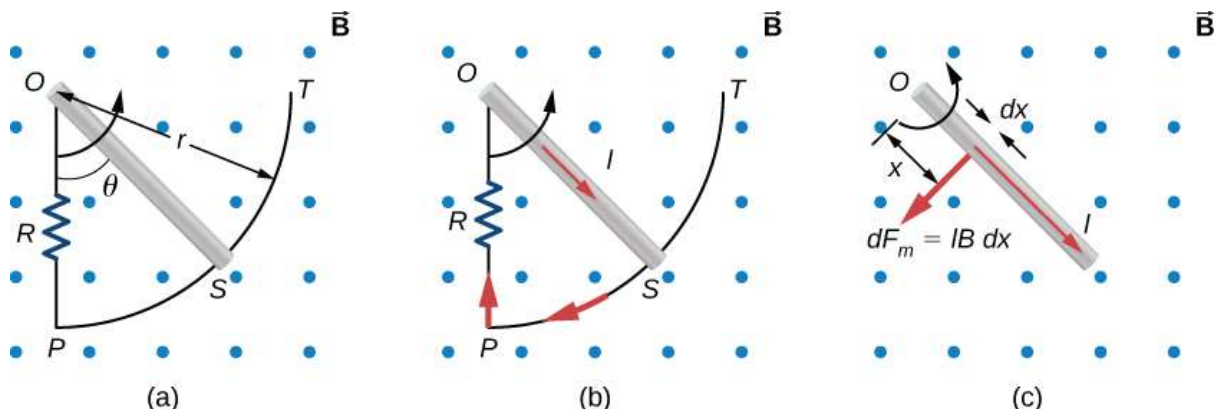


Рис. 3.16. (а) Металевий стрижень, який під час обертання ковзає по круглому дроту в горизонтальній площині. (б) індукований струм у стрижні. (с) схема дії магнітної сили на нескінченно малому відрізку струму

### Стратегія

Магнітний потік – це магнітне поле, помножене на площу чверті кола, тобто  $A = r^2\theta/2$ . При знаходженні ЕРС за законом Фарадея всі змінні є постійними в часі крім кута  $\theta$ , пов'язанного з кутовою швидкістю  $\omega = d\theta/dt$ . Робота, виконана за одиницю часу, обчислюється множенням крутного моменту на кутову швидкість. Крутний момент обчислюється шляхом визначення сили на стрижні та інтегрування її по довжині стрижня.

### Розв'язок

а. З геометрії площа контуру  $OPSO$  дорівнює  $A = r^2\theta/2$ . Отже, магнітний потік через контур становить:

$$\Phi_m = BA = B \frac{r^2\theta}{2}.$$

Після диференціювання за часом і використанням  $\omega = d\theta/dt$ , ми маємо:

$$\varepsilon = \left| \frac{d\Phi_m}{dt} \right| = \frac{Br^2\omega}{2}.$$

При поділі на опір  $R$  петлі це дає величину індукованого струму:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Br^2\omega}{2R}.$$

Якщо  $\theta$  збільшується, збільшується і потік через петлю за рахунок  $\vec{B}$ . Щоб протидіяти цьому збільшенню, магнітне поле, зумовлене індукованим струмом, має бути спрямоване на сторінку в області, замкнутій петлею. Отже, як видно з частини (б) рис. 3.16, струм циркулює за годинниковою стрілкою.

б. Ви обертаєте стрижень, надаючи йому крутний момент. Оскільки стрижень обертається з постійною кутовою швидкістю, то цей крутний

момент рівний і протилежний крутному моменту, що діє на струм в стрижні вихідним магнітним полем. Магнітна сила на нескінченно малому відрізку довжиною  $dx$ , показана в частині (b) рис. 3.16, дорівнює  $dF_m = IBdx$ . Отже, магнітний крутний момент на цьому відрізку становить:

$$d\tau_m = x \cdot dF_m = IBx dx.$$

Тоді сумарний магнітний крутний момент на стрижні становить:

$$\tau_m = \int_0^r d\tau_m = IB \int_0^r x dx = \frac{1}{2} IB r^2.$$

Крутний момент  $\tau$  що ви докладаете до стрижня, є рівним і протилежним  $\tau_m$ , і робота, яку ви виконуєте, коли стрижень обертається на кут  $d\theta$  є  $dW = \tau d\theta$ . Отже, робота за одиницю часу, яку ви виконуєте, становить:

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} IB r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{Br^2 \omega}{2R} \right) Br^2 \omega = \frac{B^2 r^4 \omega^2}{4R},$$

де ми замінили  $I$ . Потужність, що розсіюється в резисторі, становить  $P = I^2 R$ , яку можна записати так:

$$P = \left( \frac{Br^2 \omega}{2R} \right)^2 R = \frac{B^2 r^4 \omega^2}{4R}.$$

Отже, ми бачимо, що

$$P = dW/dt.$$

Таким чином, потужність, що розсіюється в резисторі, дорівнює роботі за одиницю часу, виконаної при обертанні стрижня.

### Обговорення

Альтернативний погляд на індуковану ЕРС із закону Фарадея полягає в інтегруванні в просторі, а не в часі. Однак рішення буде таким самим. ЕРС руху дорівнює:

$$|\varepsilon| = \int B v dl.$$

Швидкість можна записати як кутову швидкість, помножену на радіус, а диференціальну довжину записати як  $dr$ . Тому

$$|\varepsilon| = B \int v dr = B \omega \int_0^l r dr = \frac{1}{2} B \omega l^2, .$$

що є тим самим розв'язком, що й раніше.

### ПРИКЛАД 3.6. Прямокутна котушка, що обертається в магнітному полі

Прямокутна котушка, що має площу  $A$  і  $N$  витків, поміщена в однорідне магнітне поле  $\vec{B} = B\hat{j}$ , як показано на рис. 3.17. Котушка обертається навколо осі  $z$  через її центр з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ . Отримати вираз для індукованої ЕРС в котушці.

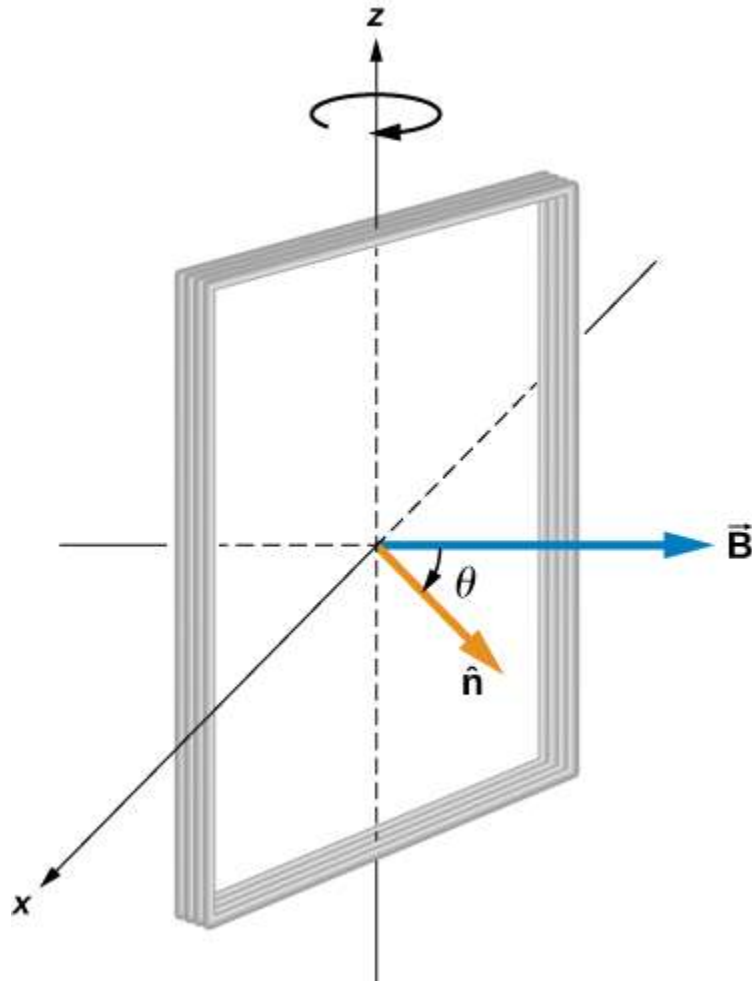


Рис. 3.17. Прямокутна котушка, що обертається в однорідному магнітному полі

### Стратегія

Згідно зі схемою, кут між перпендикуляром до поверхні ( $\hat{n}$ ) і магнітним полем  $\vec{B}$  є  $\theta$ . Скалярний добуток  $\vec{B}\hat{n}$  залежить від  $\cos \theta$ . Величина магнітного поля і площа контуру стабільна в часі, що дозволяє спростити інтегрування. Індукована ЕРС записується за допомогою закону Фарадея.

### Розв'язок

Коли котушка знаходиться в такому положенні, що її нормаль  $\hat{n}$  утворює кут  $\theta$  з магнітним полем  $\vec{B}$ , магнітний потік за один оборот котушки становить:

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = BA \cos \theta.$$

За законом Фарадея ЕРС, індукована в котушці, дорівнює:

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = NBA \sin \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Постійна кутова швидкість  $\omega = d\theta/dt$ ,  $\theta = \omega t$ . Тому індукована ЕРС виглядає так:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t,$$

де  $\varepsilon_0 = NBA\omega$ .

### Обговорення

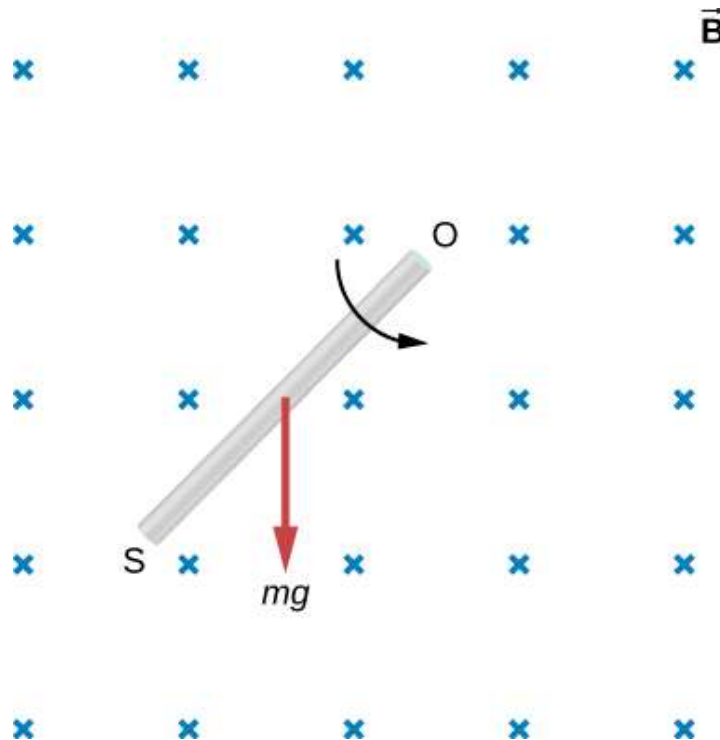
Якби напруженість магнітного поля або площа петлі також змінювалися з часом, ці змінні не можна було б витягнути з похідної часу, щоб спростити розв'язок, як показано на малюнку. Цей приклад є теоретичною основою роботи електрогенератора.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 3.4

Нижче показаний стрижень довжиною  $l$ , який обертається проти годинникової стрілки навколо осі, яка проходить через точку  $O$ , за рахунок крутного моменту, обумовленого  $m\vec{g}$ . Припустимо, що стрижень знаходиться в однорідному магнітному полі  $\vec{B}$ . Визначити ЕРС, індуковану між кінцями стрижня, коли його кутова швидкість  $\omega$ ? Який кінець стрижня має більший потенціал?

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 3.5

Стрижень довжиною 10 см рухається зі швидкістю 10 м/с перпендикулярно магнітному полю величиною 1,5 Тл. Яка різниця потенціалів між кінцями стрижня?



### 3.4. Індуковані електричні поля

Той факт, що в контурах індуються ЕРС, вказує на те, що виконується робота над електронами провідності в проводах. Що може бути джерелом цієї роботи? Ми знаємо, що це не батарея і не магнітне поле, тому що батарея не обов'язково повинна бути присутня в колі, де індукується струм, а магнітні поля ніколи не виконують роботи з рухомими зарядами. Відповідь полягає в тому, що джерелом роботи є електричне поле  $\vec{E}$ , що індукується в проводах. Робота, виконана  $\vec{E}$  при переміщенні одиничного заряду вздовж замкнутого контуру є індуквана ЕРС  $\varepsilon$ ; тобто,

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (3.9)$$

де  $\oint$  є повний інтеграл навколо електричного контуру.

Закон Фарадея можна записати в термінах **індукованого електричного поля** так:

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (3.10)$$

Існує важлива відмінність між електричним полем, індукованим змінним магнітним полем, і електростатичним полем, створеним фіксованим розподілом заряду. Зокрема, індуковане електричне поле є неконсервативним, оскільки воно виконує роботу при переміщенні заряду по замкнутому шляху, тоді як електростатичне поле є консервативним і робота по замкнутому шляху дорівнює нулю. Отже, електричний потенціал може бути пов'язаний з електростатичним полем, але не з індукованим. Наступні рівняння представляють різницю між двома типами електричного поля:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &\neq 0 \text{ (індуковане),} \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= 0 \text{ (електростатичне).} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Наші результати можна узагальнити, об'єднавши ці рівняння:

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (3.12)$$

#### ПРИКЛАД 3.7. Індуковане електричне поле в круговій котушці

Чому дорівнює індуковане електричне поле в круговій котушці прикладу 3.2 (рис. 3.9) в три зазначені моменти часу?

#### Стратегія

Використовуючи циліндричну симетрію, інтеграл електричного поля спрощується до електричного поля, помноженого на довжину кола. Оскільки ми вже знаємо індуквану ЕРС, то можемо з'єднати ці два вирази за законом Фарадея, щоб розв'язати задачу для індукваного електричного поля.

### Розв'язок

Індуковане електричне поле в котушці є постійним за величиною, а вектор  $\vec{E}$  є дотичним до котушки, тому

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint E dl = 2\pi r E.$$

У поєднанні з рівнянням 3.12 це дає:

$$E = \frac{\varepsilon}{2\pi r}.$$

Напрямок  $\varepsilon$  проти годинникової стрілки, а  $\vec{E}$  циркулює в одному напрямку навколо котушки. Значення  $E$  для різних моментів часу дорівнюють:

$$E(t_1) = \frac{6,0 \text{ В}}{2\pi(0,5 \text{ м})} = 1,9 \frac{\text{В}}{\text{м}};$$
$$E(t_2) = \frac{4,7 \text{ В}}{2\pi(0,5 \text{ м})} = 1,5 \frac{\text{В}}{\text{м}};$$
$$E(t_3) = \frac{0,04 \text{ В}}{2\pi(0,5 \text{ м})} = 0,013 \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

### Обговорення

При зміні магнітного потоку індукується неконсервативне електричне поле, яке гонить струм по контуру. Але що станеться, якщо  $dB/dt \neq 0$  у вільному просторі, де немає провідної доріжки? Відповідь полягає в тому, що цей випадок можна трактувати *так, ніби присутня провідна траєкторія*; тобто неконсервативні електричні поля індуються скрізь, де  $dB/dt \neq 0$ , чи є провідний шлях. Ці неконсервативні електричні поля завжди задовольняють рівнянню 3.12. Наприклад, якщо прибрати кругову котушку з рис. 3.9, то електричне поле у вільному просторі при  $r = 0,50$  м все одно було б спрямовано проти годинникової стрілки, і її величина все одно становило б  $1,9$  В/м при  $t = 0$ ,  $1,5$  В/м при  $t = 5,0 \times 10^{-2}$  с, тощо. Існування індукованих електричних полів, звичайно, не обмежується проводами в електричних колах.

### ПРИКЛАД 3.8. Електричне поле, індуковане зміною магнітного поля соленоїда

У частині (а) рис. 3.18 показаний довгий соленоїд з радіусом  $R$  і  $n$  витками на одиницю довжини; його струм зменшується з часом відповідно до закону  $I = I_0 e^{-at}$ . Яка величина індукованого електричного поля в точці на відстані  $r$  від центральної осі соленоїда (а) при  $r > R$ . (б) коли  $r < R$  [див. частину (б) рис. 3.18]. (в) Який напрямок індукованого поля в обох місцях? Припустимо, що наближення нескінченного соленоїда справедливе для всіх областей, що цікавлять.

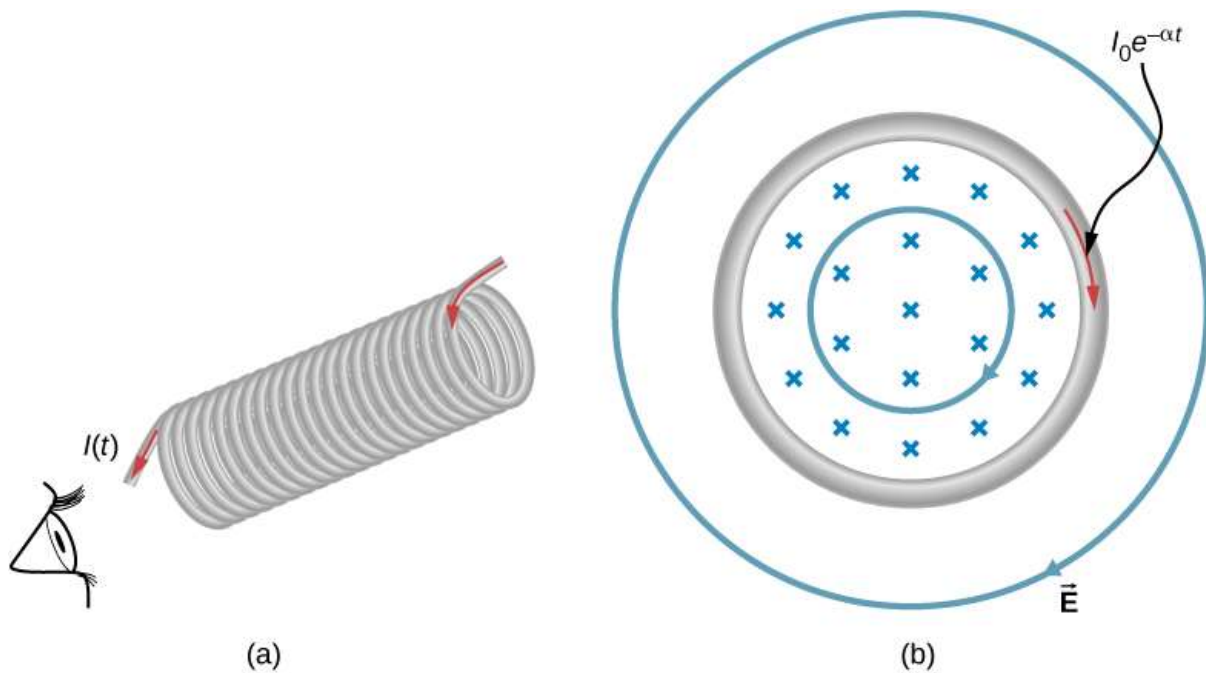


Рис. 3.18. (а) Сила струму в довгому соленоїді зменшується в геометричній прогресії. (б) Поперечний переріз соленоїда з його лівого кінця. Показаний поперечний переріз знаходиться біля середини соленоїда. Електричне поле індукується як всередині, так і зовні соленоїда

### Стратегія

Використовуючи формулу магнітного поля всередині нескінченного соленоїда і закон Фарадея, обчислюємо індуковану ЕРС. Оскільки ми маємо циліндричну симетрію, інтеграл електричного поля зводиться до електричного поля, помноженого на довжину кола шляху інтегрування. З цього рівняння потім визначаємо величину електричного поля.

### Розв'язок

а. Магнітне поле обмежене внутрішньою частиною соленоїда, де

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 n I_0 e^{-\alpha t}.$$

Таким чином, магнітний потік по круговому шляху, радіус якого  $r$  більше  $R$ , радіуса соленоїда, дорівнює:

$$\Phi_m = BA = \mu_0 n I_0 \pi R^2 e^{-\alpha t}.$$

Індуковане поле  $\vec{E}$  є дотичним до цього шляху, і через циліндричну симетрію системи її величина постійна на траєкторії. Отже, ми маємо:

$$\left| \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \right| = \left| \frac{d\Phi_m}{dt} \right|,$$

$$E(2\pi r) = \left| \frac{d}{dt} (\mu_0 n I_0 \pi R^2 e^{-\alpha t}) \right| = \alpha \mu_0 n I_0 \pi R^2 e^{-\alpha t},$$

$$E = \frac{\alpha \mu_0 n I_0 R}{2r} e^{-\alpha t} \quad (r > R)$$

b. Для шляху радіуса  $r$  всередині соленоїда,  $\Phi_m = B\pi r^2$ , тому

$$E(2\pi r) = \left| \frac{d}{dt} (\mu_0 n I_0 \pi r^2 e^{-\alpha t}) \right| = \alpha \mu_0 n I_0 \pi r^2 e^{-\alpha t},$$

а індуковане поле

$$E = \frac{\alpha \mu_0 n I_0 r}{2r} e^{-\alpha t} \quad (r < R)$$

с. Магнітне поле вказує на сторінку, як показано в частині (b), і зменшується. Якби будь-яка з кругових траєкторій була зайнята провідними кільцями, то струми, індуковані в них, циркулювали б, як показано на малюнку, відповідно до закону Ленца. Індуковане електричне поле також має бути спрямоване таким чином.

### Обговорення

У частині (b) зазначимо, що  $|\vec{E}|$  зростає з  $r$  всередині і зменшується за законом  $1/r$  поза соленоїдом, як показано на рис. 3.19.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 3.6

Припустимо, що котушка в прикладі 3.2 є квадратною, а не круговою. Чи можна використовувати рівняння 3.12 для обчислення (a) індукованої ЕРС і (б) індукованого електричного поля?

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 3.7

Яка величина індукованого електричного поля в прикладі 3.8 коли  $t = 0$ , якщо  $r = 6,0$  см,  $R = 2,0$  см,  $n = 2000$  витків на метр,  $I_0 = 2,0$  А, і  $\alpha = 200$  с<sup>-1</sup>?

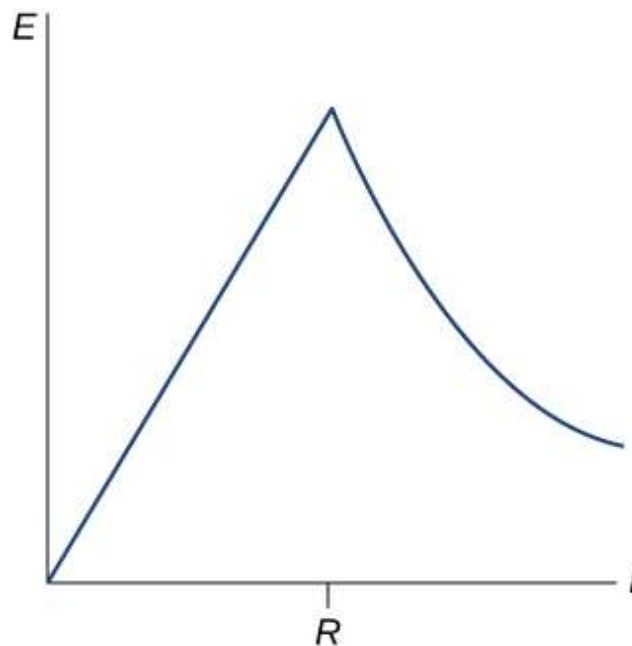
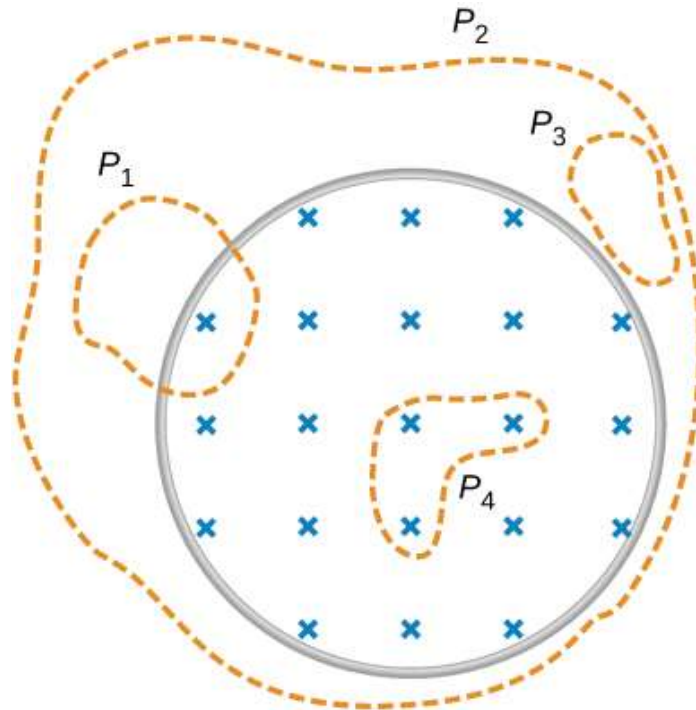


Рис. 3.19. Графік залежності електричного поля від відстані  $r$ . Коли  $r < R$ , електричне поле зростає лінійно, тоді як при  $r > R$ , електричне поле падає пропорційно  $1/r$



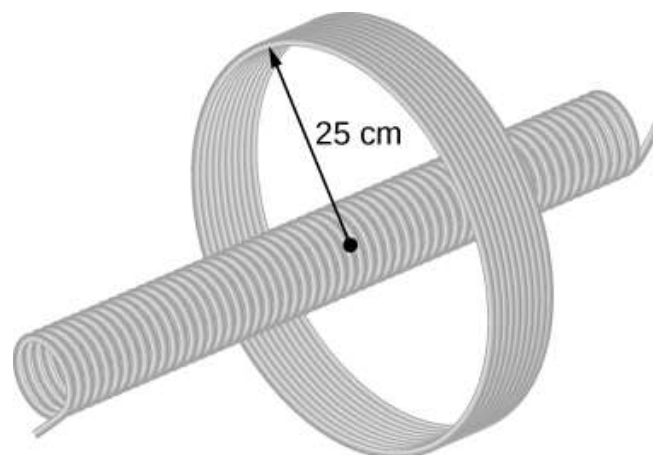
### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 3.8

Магнітне поле, показане нижче, обмежене показаною циліндричною областю і змінюється з часом. Визначте ті шляхи, рухаючись якими отримаємо  $\varepsilon = \oint \vec{E} d\vec{l} \neq 0$ .



### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 3.9

Довгий соленоїд площею поперечного перерізу  $5,0 \text{ cm}^2$  має 25 витків дроту на сантиметр. Він розміщується посередині щільно обгорнутої котушки на 10 витків і радіусом 25 см, як показано нижче. а) Яка ЕРС індукується в котушці, коли струм через соленоїд зменшується зі швидкістю  $di/dt = -0,20 \text{ A/s}$ ? б) Яке електричне поле індукується в котушці?



### 3.5. Вихрові струми

Як обговорювалося двома розділами раніше, ЕРС індукується, коли провідник рухається в магнітному полі або коли магнітне поле рухається відносно провідника. Якщо рухома ЕРС може викликати струм у провіднику, ми називаємо цей струм **вихровим струмом**.

#### Магнітне демпфування

З появою вихрових струмів може виникнути значний опір, який називають **магнітним демпфіруванням**. Розглянемо апарат, зображений на рис. 3.20, який дозволяє розгойдувати пластину між полюсами сильного магніту. (Це ще одна улюблена демонстрація фізики). Якщо пластина металева, спостерігається значний опір руху пластини, коли вона входить і залишає магнітне поле, що швидко гасить рух. Однак, якщо пластина металева але з прорізами, як показано в частині (b) малюнка, спостерігається набагато менший опір. Помітного впливу на пластину, яка є ізолятором, взагалі немає. Чому виникає опір руху металевим пластинам скрізь постійне магнітне поле і чи є застосування магнітного опору?

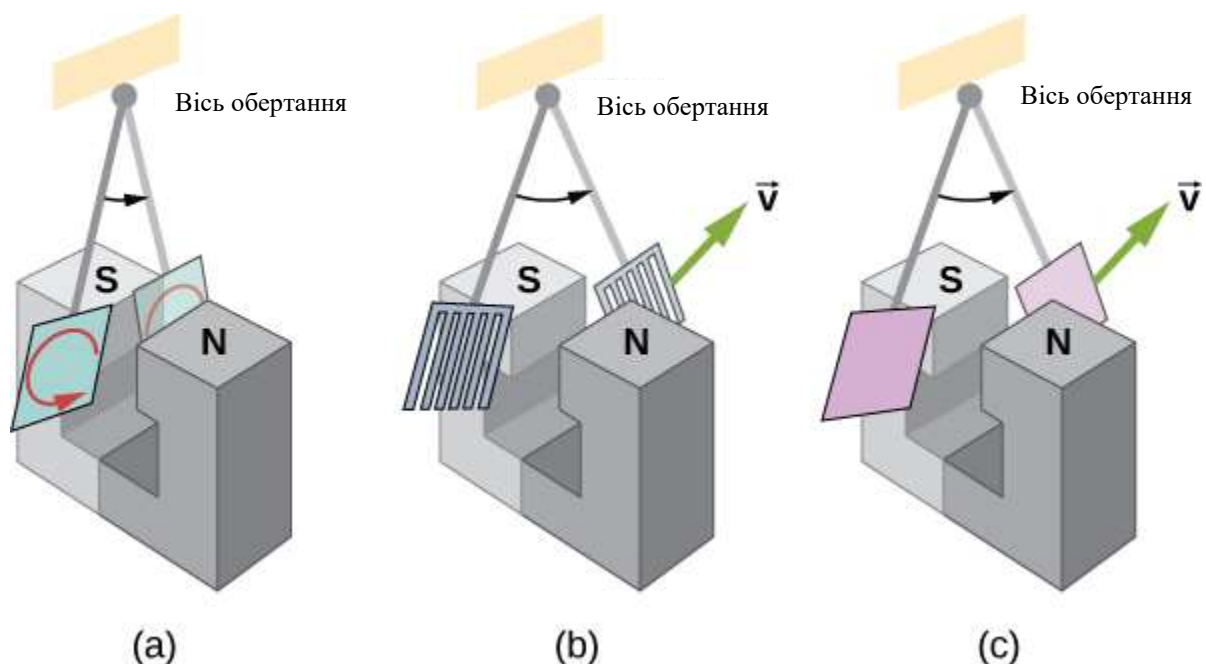


Рис. 3.20. Поширений фізичний демонстраційний прилад для дослідження вихрових струмів і магнітного демпфування. (a) Рух металевого маятника, що коливається між полюсами магніту, швидко гаситься дією вихрових струмів. (b) На рух металевої пластини з щілинами магнітне поле слабо впливає, а це означає, що вихрові струми стають менш ефективними. (c) Під час руху непровідної пластини – ізолятора – також відсутнє магнітне затухання

На рис. 3.21 показано, що відбувається з металевою пластинною, коли вона входить в магнітне поле і виходить з нього. В обох випадках вона відчуває силу, що протидіє її руху. У міру того, як вона надходить зліва, потік збільшується, створюючи вихровий струм (закон Фарадея) проти годинникової стрілки (закон Ленца), як показано на малюнку. У полі знаходиться тільки права частина контуру струму, тому на нього ліворуч діє сила (ППР-1). Коли металева пластина повністю знаходиться всередині поля, вихровий струм відсутній, якщо поле рівномірне, оскільки потік в цій області залишається постійним. Але коли пластина залишає поле праворуч, потік зменшується, викликаючи вихровий струм за годинниковою стрілкою, який, знову ж таки, відчуває силу напрямлену вліво, ще більше сповільнюючи рух. Подібний аналіз того, що відбувається, коли пластина повертається назад, показує, що її рух також гаситься при вході та виході з магнітного поля.

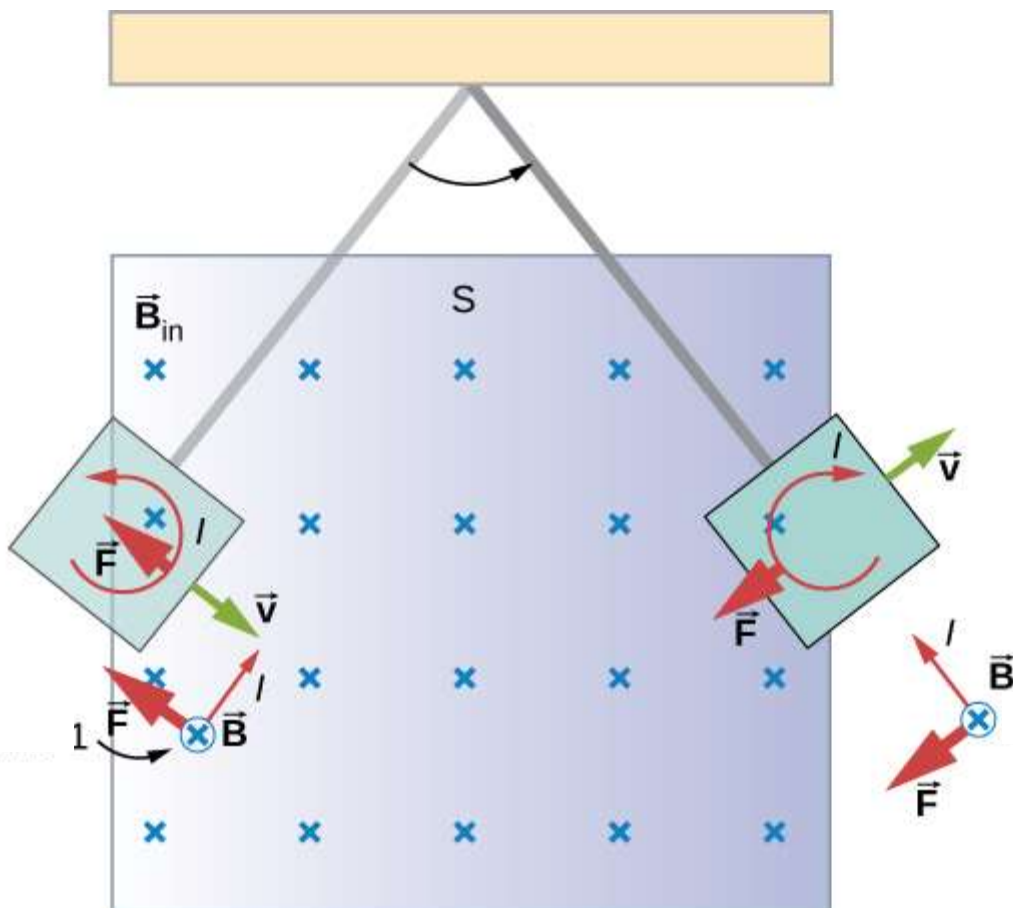


Рис. 3.21. Більш детально розглянемо провідну пластину, що проходить між полюсами магніту. Коли вона входить у поле і виходить з нього, зміна потоку створює вихровий струм. Магнітна сила, що діє на контур струму, протидіє руху. Немає ні струму, ні магнітного опору, коли пластина повністю знаходиться всередині рівномірного магнітного поля

При вході в поле металевій пластині з щілинами (рис. 3.22) змінюється магнітний потік, виникає ЕРС, але вона менша, оскільки пази обмежують розмір струмових контурів. Більш того, сусідні петлі мають струми в протилежних напрямках, і їх вплив нівелюється. При використанні ізоляційного матеріалу вихровий струм вкрай малий, тому магнітне демпфірування на ізоляторах незначне. Якщо слід уникати вихрових струмів у провідниках, то вони повинні бути щілинними або виготовленими з тонких шарів струмопровідного матеріалу, розділених ізоляційними листами.

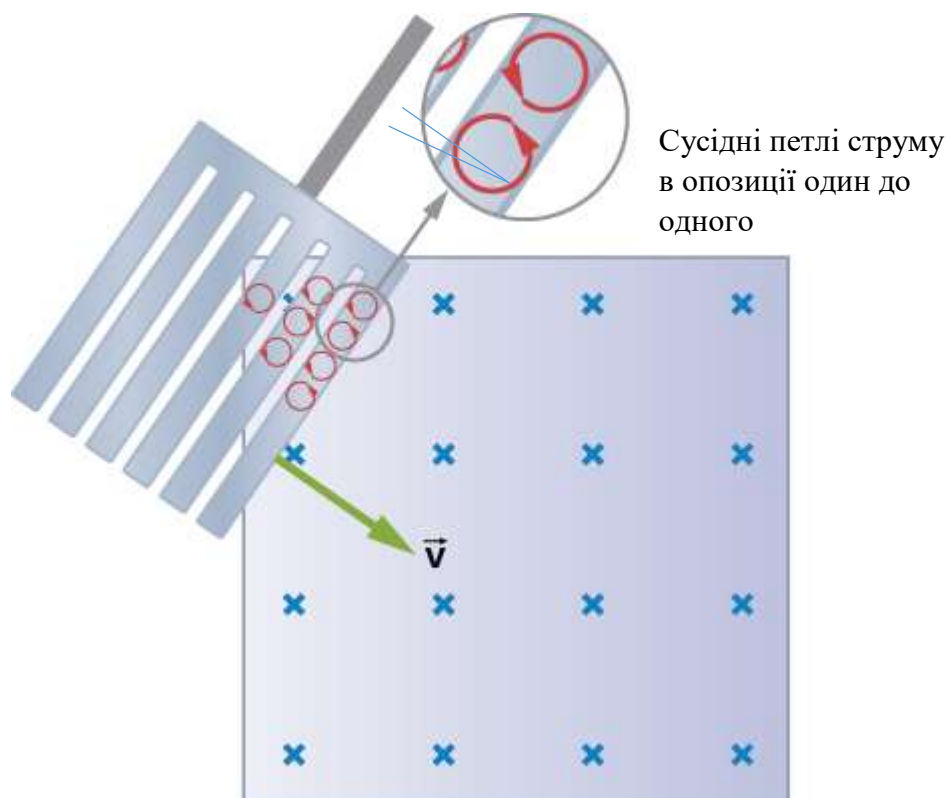


Рис. 3.22. Вихрові струми, індуковані в металевій пластині з щілинами, що входять в магнітне поле, утворюють невеликі петлі, і сили, що діють на них, протидіють один одному, тим самим роблячи магнітний опір практично нульовим

### Застосування магнітного демпфування

Одне з застосувань магнітного демпфування зустрічається в чутливих лабораторних вагах. Щоб мати максимальну чутливість і точність, ваги повинні бути максимально вільними від тертя. Але якщо він буде без тертя, то буде дуже довго коливатися. Магнітне демпфування є простим і ідеальним рішенням. Під час магнітного демпфування лобовий опір пропорційний швидкості і стає рівним нулю при нульовій швидкості. Таким чином, коливання швидко гаснуть, після чого сила демпфування зникає,

дозволяючи терезам бути дуже чутливими (рис. 3.23). У більшості вагів магнітне демпфірування здійснюється за допомогою провідного диска, який рухається в нерухомому магнітному полі.

Оскільки вихрові струми та магнітне демпфування відбуваються лише в провідниках, центри переробки можуть використовувати магніти для відділення металів від інших матеріалів. Сміття пачками скидається на пандус, під яким ховається потужний магніт. Провідники в смітнику сповільнюються за рахунок магнітного демпфування, в той час як неметали в смітті рухаються далі, відокремлюючись від металів (рис. 3.24). Це працює для всіх металів, а не тільки для феромагнітних. Магніт може відокремлювати феромагнітні матеріали самостійно, впливаючи на нерухоме сміття.

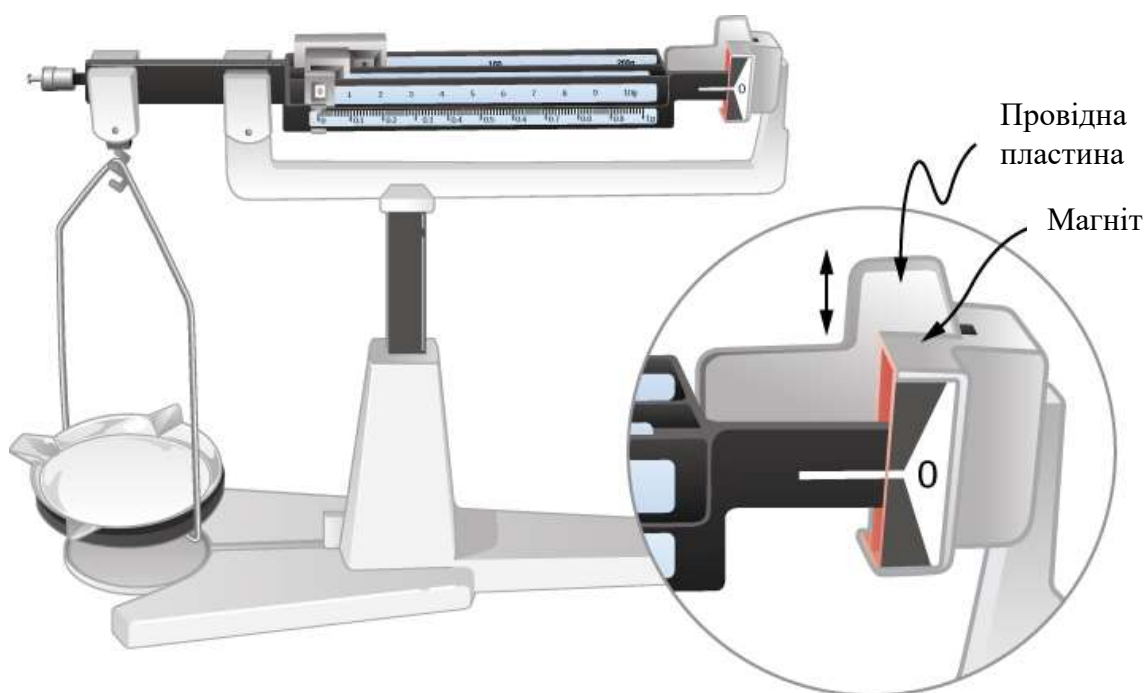


Рис. 3.23. Магнітне затухання уповільнює коливання вагів. Оскільки закон індукції Фарадея дає найбільший ефект для найбільш швидкої зміни магнітного поля, то загасання є найбільшим при великих коливаннях і йде до нуля при припиненні руху

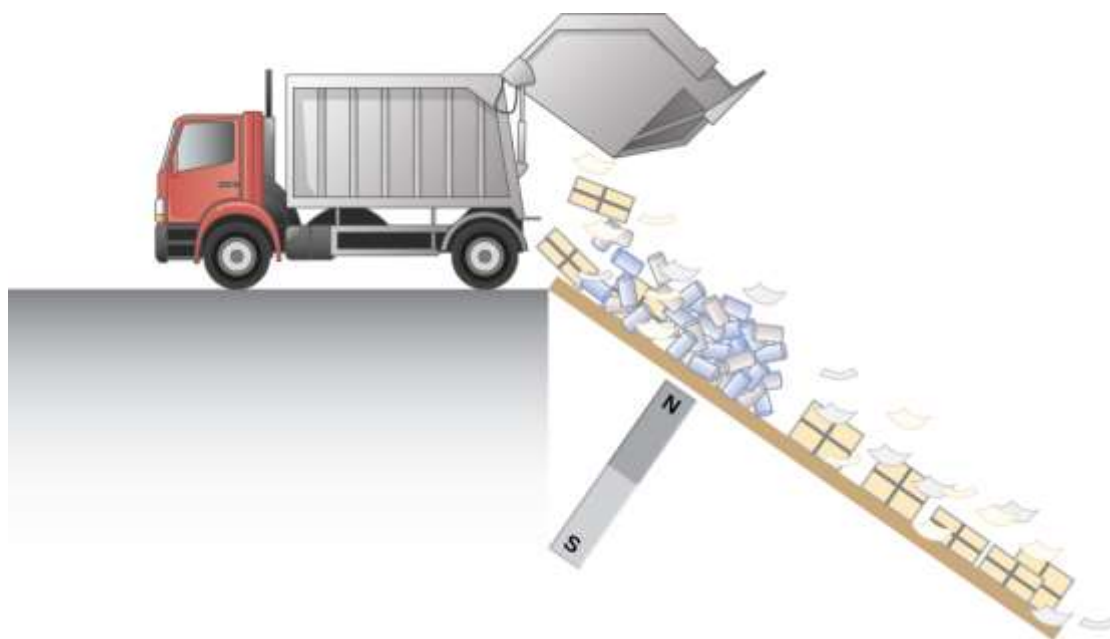


Рис. 3.24. Метали можуть бути відокремлені від іншого сміття за допомогою магнітного опору. Вихрові струми і магнітний опір створюються в металах, що спускаються вниз по цьому пандусу потужним магнітом під ним. Неметали рухаються далі

Інші основні застосування вихрових струмів з'являються в металодетекторах і гальмівних системах в поїздах і на американських гірках. Переносні металошукачі (рис. 3.25) складаються з первинної котушки, що несе змінний струм, і вторинної котушки, в якій індукуються струм. У шматку металу, близькому до детектора, індукуються вихровий струм, що викликає зміну індукованого струму у вторинній котушці. Це може викликати сигнал, наприклад, пронизливий шум.



Рис. 3.25. Солдат використовує металошукач для пошуку вибухівки і зброї

Гальмування за допомогою вихрових струмів безпечніше, оскільки такі фактори, як дощ, не впливають на гальмування, а гальмування відбувається більш плавно. Однак вихрові струми не можуть повністю зупинити рух, оскільки створювана гальмівна сила зменшується зі зменшенням швидкості. Таким чином, швидкість може бути зменшена, скажімо, з 20 м/с до 5 м/с, але для повної зупинки транспортного засобу потрібна інша форма гальмування. Як правило, потужні рідкоземельні магніти, такі як неодимові магніти, використовуються в американських гірках. На рис. 3.26 показані ряди магнітів в такому атракціоні. Транспортний засіб має металеві ребра (зазвичай містять мідь), які проходять через магнітне поле, уповільнюючи транспортний засіб майже так само, як і провідна пластина маятника, показана на 3.20.



Рис. 3.26. Ряди рідкоземельних магнітів (виступаючих горизонтально) використовуються для магнітного гальмування в американських гірках

Індукційні варильні поверхні мають електромагніти під своєю поверхнею. Магнітне поле швидко змінюється, створюючи вихрові струми в основі горщика, що призводить до підвищення температури горщика та його вмісту. Індукційні варильні поверхні мають високу ефективність і хороший час відгуку, коли основою горщика є провідник, наприклад, залізо або сталь.

### 3.6. Електрогенератори та зворотна ЕРС

Різноманітні важливі явища і пристрої можна зрозуміти за допомогою закону Фарадея. У цьому розділі ми розглянемо два з них. Першим таким пристроєм є **електричний генератор**. Електричні генератори індукують ЕРС, обертаючи котушку в магнітному полі. Розглянемо генератори більш детально.

#### ПРИКЛАД 3.9. Обчислення ЕРС, індукованої в котушці генератора

Котушка генератора, зображена на рис. 3.27, обертається на одну четверту обороту (від  $\theta = 0$  до  $\theta = 90^\circ$ ) за 15,0 мс. 200-виткова кругова котушка має радіус 5,00 см і знаходиться в однорідному магнітному полі 0,80 Тл. Яка величина ЕРС?

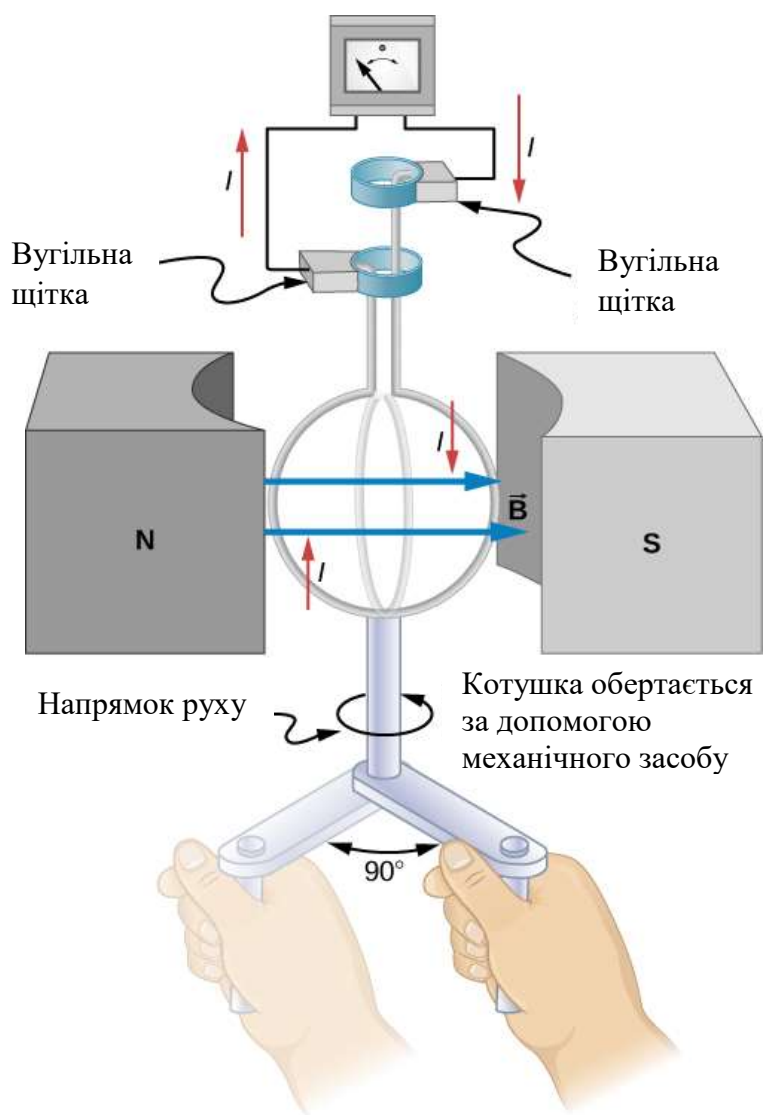


Рис. 3.27. При обертанні котушки генератора на одну четверту обороту магнітний потік  $\Phi_m$  змінюється від максимуму до нуля, індукуючи ЕРС



## Стратегія

Закон індукції Фарадея використовується для знаходження індукованої ЕРС:

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_m}{dt}.$$

Ми визнаємо цю ситуацію такою ж, як у прикладі 3.6. Відповідно до діаграми проекція магнітного поля  $\vec{B}$  на напрям нормального вектора  $\hat{n}$  визначається їх скалярним добутком на  $\cos \theta$ . Величина магнітного поля і площа контуру не змінюються в часі, що дозволяє спростити інтегрування. Індукована ЕРС записується за допомогою закону Фарадея:

$$\varepsilon = NBA \sin \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

## Розв'язок

Нам дано, що  $N = 200$ ,  $B = 0,80$  Тл,  $\theta = 90^\circ$ ,  $d\theta = 90^\circ = \pi/2$  і  $dt = 15,0$  мс. Площа петлі дорівнює:

$$A = \pi r^2 = (3,14)(0,05 \text{ м})^2 = 7,85 \times 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Введення цього значення дозволяє визначити ЕРС:

$$\varepsilon = (200)(0,8 \text{ Тл})(7,85 \times 10^{-3} \text{ м}^2) \sin(90^\circ) \frac{\pi/2}{15 \times 10^{-3} \text{ с}} = 131 \text{ В}.$$

## Обговорення

Це практичне середнє значення, аналогічне 120 В, що використовуються іноді в побутовому живленні.

ЕРС, обчислена в прикладі 3.9, є середнім значенням за одну четверту обороту. Яка величина ЕРС у будь-який момент часу? Вона змінюється в залежності від кута між магнітним полем і перпендикуляром до котушки. Вираз для ЕРС як функції від часу можна отримати, розглянувши ЕРС руху на обертовій прямокутній котушці шириною  $w$  і висотою  $l$  в однорідному магнітному полі, як показано на рис. 3.28.

Заряди в проводах рамки відчувають магнітну силу, тому що вони рухаються в магнітному полі. Заряди у вертикальних проводах відчувають сили, паралельні дроту, викликаючи струми. А ось ті, що знаходяться у верхньому і нижньому сегментах, відчувають силу, перпендикулярну дроту, яка не викликає струму. Таким чином, ми можемо знайти індуковану ЕРС, розглянувши тільки бічні дроти. Величина ЕРС задається формулою  $\varepsilon = Blv$ , де швидкість  $v$  перпендикулярна магнітному полю  $B$ . Тут швидкість знаходиться під кутом  $\theta$  до  $B$ , так що його компонента, яка є перпендикулярною до  $B$ , дорівнює  $v \sin \theta$  (див. рис. 3.28).

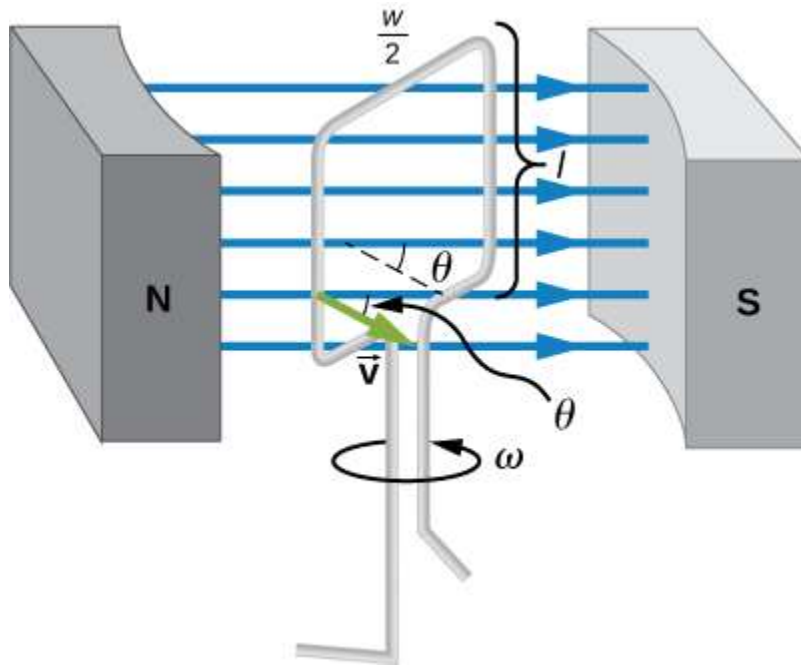


Рис. 3.28. Генератор з однією прямокутною котушкою, що обертається з постійною кутовою швидкістю в однорідному магнітному полі, створює ЕРС, яка змінюється синусоїдально в часі. Зверніть увагу, що генератор схожий на двигун, за винятком того, що вал обертається для створення струму, а не навпаки

Таким чином, в даному випадку ЕРС, індуковані з кожного боку, дорівнюють  $\varepsilon = Blv \sin \theta$ , і вони знаходяться в одному напрямку. Тоді загальна ЕРС, яка діє в контурі, дорівнює:

$$\varepsilon = 2Blv \sin \theta. \quad (3.13)$$

Цей вираз справедливий, але він не дає ЕРС як функцію часу. Щоб знайти залежність ЕРС у часі, припустимо, що котушка обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ . Кут нахилу  $\theta$  пов'язана з кутовою швидкістю формулою  $\theta = \omega t$ . Отже,

$$\varepsilon = 2Blv \sin \omega t. \quad (3.14)$$

Лінійна швидкість  $v$  пов'язана з кутовою швидкістю  $\omega$  формулою:  $v = r\omega$ . Тут  $r = w/2$ , тобто  $v = (w/2)\omega$ , і

$$\varepsilon = 2Bl \frac{w}{2} \omega \sin \omega t = (lw)B\omega \sin \omega t \quad (9.15)$$

Відзначимо, що площа петлі дорівнює  $A = lw$ , і якщо врахувати  $N$  витків, тоді знаходимо, що

$$\varepsilon = NBA\omega \sin \omega t \quad (3.16)$$

Це ЕРС, індукована в котушці генератора з  $N$  витками і площею  $A$ , що обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  в однорідному магнітному полі  $B$ . Це також може бути виражено так:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t \quad (3.17)$$

де

$$\varepsilon_0 = NAB\omega \quad (3.18)$$

є піковою ЕРС, оскільки максимальне значення  $\sin(\omega t) = 1$ . Зауважимо, що частота коливань дорівнює  $f = \omega/2\pi$ , а період становить  $T = 1/f = 2\pi/\omega$ . На рис. 3.29 показаний графік ЕРС як функції часу, і тепер здається розумним, що напруга змінного струму є синусоїдальною.

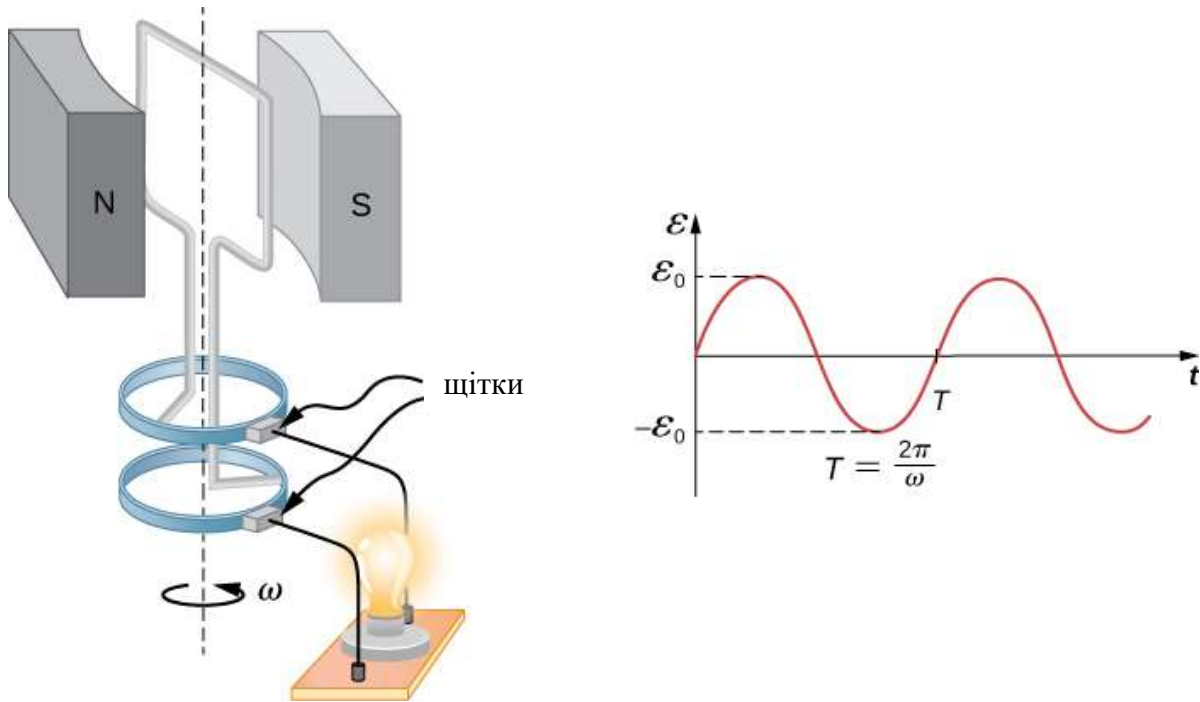


Рис. 3.29. ЕРС генератора прикладається до лампочки з показаною системою кілець і щіток. Графік дає ЕРС генератора як функцію часу, де  $\varepsilon_0$  – пікова ЕРС. Період коливань становить  $T = 1/f = 2\pi/\omega$ , де  $f$  – частота

Отже, пікова ЕРС  $\varepsilon_0 = NBA\omega$ . Чим більше число контурів, тим більше загальна площа, і чим сильніше поле, тим більше вихідна напруга. Цікаво, що чим швидше розкручується генератор (більше  $\omega$ ), тим більше ЕРС. Це помітно на велосипедних генераторах — принаймні на її дешевших різновидах.

На рис. 3.30 показана схема, за якою може бути виготовлений генератор для отримання імпульсного постійного струму. Більш складне розташування кількох котушок і роз'ємних кілець може створити більш плавний постійний струм, хоча для створення постійного струму без пульсацій зазвичай використовуються електронні, а не механічні засоби.

У реальному житті електрогенератори виглядають зовсім інакше, ніж на малюнках у цьому розділі, але принципи ті самі. Джерелом механічної енергії, що обертає рамку, може бути падаюча вода (гідроенергія), пара, що утворюється при спалюванні викопного палива, або кінетична енергія вітру.

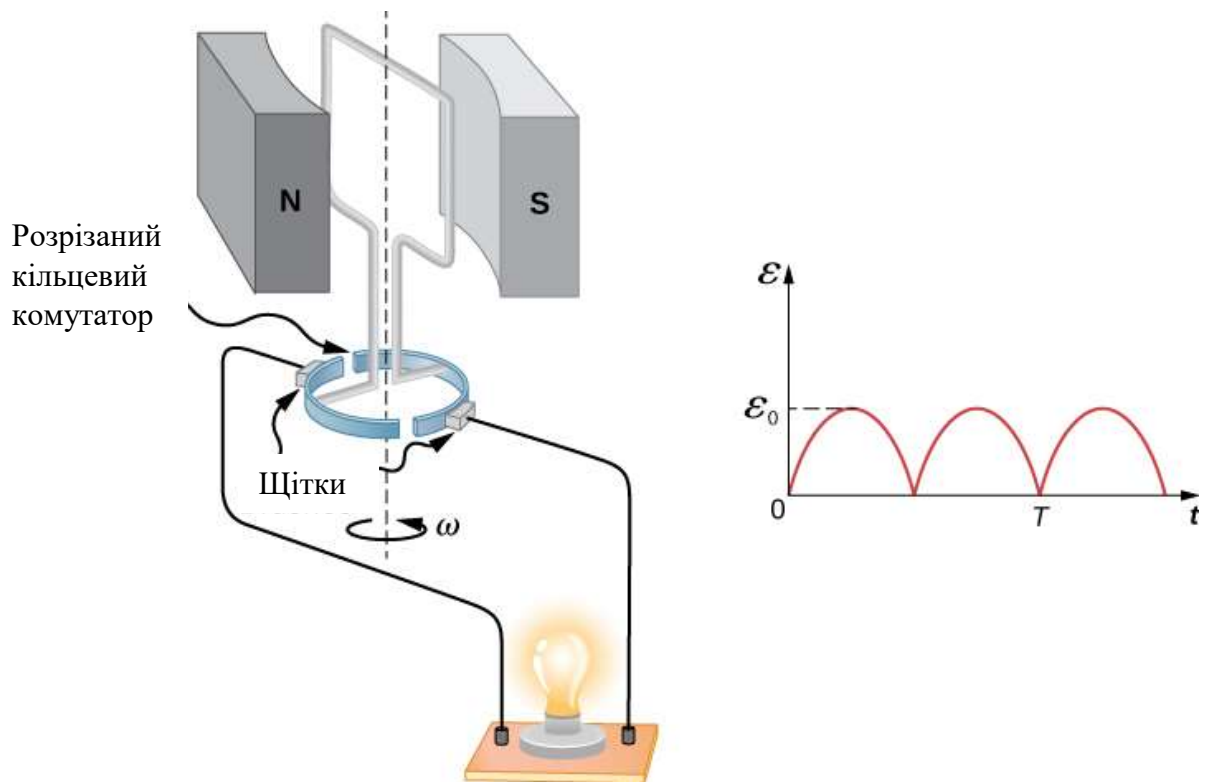


Рис. 3.30. В даній конфігурації на розрізаних кільцях, які називають комутаторами, виникає імпульсна ЕРС квазіпостійного струму

На рис. 3.31 показаний вигляд парової турбіни в розрізі; пара рухається по лопатях, з'єднаних з валом, який обертає котушку всередині генератора.



Рис. 3.31. Парова турбіна/генератор. Пара, що утворюється при спалюванні вугілля, діє на лопаті турбіни, повертаючи вал, який з'єднаний з генератором

Вироблення електричної енергії з механічної енергії є основним принципом всієї енергії, яка направляєється через наші електричні мережі в наші будинки. Генератори, проілюстровані в цьому розділі, дуже схожі на двигуни, проілюстровані раніше. Це не випадково. По суті, двигун стає генератором, коли його вал обертається. Деякі ранні автомобілі використовували свій стартер як генератор. У наступному розділі ми далі розглянемо дію двигуна як генератора.

### Зворотна ЕРС

Генератори перетворюють механічну енергію в електричну, тоді як двигуни перетворюють електричну енергію в механічну. Таким чином, не дивно, що двигуни і генератори мають однакову загальну конструкцію. Двигун працює, посилаючи струм через дротяний контур, розташований в магнітному полі. В результаті магнітне поле надає крутний момент контуру. Це обертає вал, тим самим витягуючи механічну роботу з електричного струму, що подається спочатку.

При обертанні котушки двигуна через котушку змінюється магнітний потік, і індукується ЕРС (відповідно до закону Фарадея). Таким чином, двигун діє як генератор щоразу, коли його котушка обертається. Це відбувається незалежно від того, чи обертається вал, наприклад, ремінною передачею, або дією самого двигуна. Тобто, коли двигун виконує роботу і його вал обертається, утворюється ЕРС. За законом Ленца ЕРС протистоїть будь-яким змінам, так що вхідна ЕРС, яка живить двигун, протистоїть самогенерованій ЕРС двигуна, яку називають **зворотною ЕРС** двигуна (рис. 3.32).

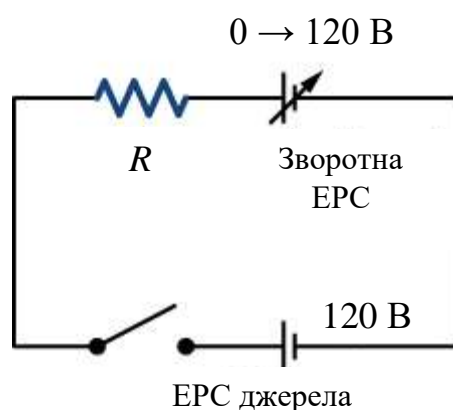


Рис. 3.32. Котушка двигуна постійного струму на даній схемі представлена у вигляді резистора. Зворотна ЕРС представлена у вигляді змінної ЕРС, яка протилежна ЕРС, що приводить в рух двигун. Зворотна ЕРС дорівнює нулю, коли двигун не обертається, і збільшується пропорційно кутовій швидкості двигуна

Вихід генератора двигуна – це різниця між напругою живлення і зворотною ЕРС. Зворотна ЕРС дорівнює нулю при першому включенні двигуна, що означає, що котушка отримує повну рушійну напругу, і двигун споживає максимальний струм, коли він увімкнений, але не обертається. У міру того, як котушка двигуна обертається швидше, зворотна ЕРС зростає, завжди протидіючи провідній ЕРС, і зменшує як напругу на котушці, так і величину струму, який вона споживає. Цей ефект помітний у багатьох поширених ситуаціях. Коли пылесос, холодильник або пральна машина вперше вмикається, світло в тому ж контурі ненадовго тьмяніє через падіння ІЧ-випромінювання, що утворюється в фідерних лініях великим струмом, споживаним двигуном. Коли двигун вперше вмикається, він споживає більше струму, ніж коли він працює на звичайній робочій швидкості. Коли на двигун накладається механічне навантаження, наприклад, електричний інвалідний візок, що піднімається в гору, двигун сповільнюється, зворотна ЕРС падає, протікає більше струму, і можна виконати більше роботи. Якщо двигун працює на занадто низькій швидкості, більший струм може перегріти його (через резистивну силу в котушці,  $P = I^2R$ ), можливо, навіть вигорання. З іншого боку, якщо на двигун немає механічного навантаження, він збільшує кутову швидкість  $\omega$  до тих пір, поки зворотна ЕРС не зрівняється з рушійною ЕРС. Тоді мотор витрачає тільки стільки енергії, щоб подолати тертя.

Вихрові струми в залізних сердечниках двигунів можуть спричинити неприємні втрати енергії. Зазвичай їх зводять до мінімуму, конструюючи сердечники з тонких, електроізолюваних листів заліза. На магнітні властивості сердечника майже не впливає ламінування ізоляційного листа, при цьому резистивний нагрів значно зменшується. Розглянемо, наприклад, котушки двигуна, представлені на рис. 3.32. Котушки мають еквівалентний опір 0.400 Ом і приводяться в рух ЕРС 48,0 В. Незабаром після включення вони споживають струм:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{48 \text{ В}}{0,4 \text{ Ом}} = 120 \text{ А.}$$

і таким чином розсіюються  $P = I^2R = 5,76$  кВт енергії теплопередачею. При нормальних умовах експлуатації для цього двигуна припустимо, що зворотна ЕРС становить 40,0 В. Тоді при робочій швидкості сумарна напруга на котушках становить 8,0 В (48,0 В мінус 40,0 В зворотної ЕРС), а споживаний струм дорівнює:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{8 \text{ В}}{0,4 \text{ Ом}} = 20 \text{ А.}$$

Отже, при нормальному навантаженні потужність, що розсіюється, становить  $P = IV = (20 \text{ А})(8,0 \text{ В}) = 160$  Вт. Це не створює проблем для цього двигуна, тоді як перші 5,76 кВт спалили б котушки, якщо цю потужність підтримували й далі.

### ПРИКЛАД 3.10. Двигун з послідовною обмоткою

Сумарний опір ( $R_f + R_a$ ) двигуна постійного струму з послідовною обмоткою є 2,0 Ом (рис. 9.33). При підключенні до джерела 120 В ( $\varepsilon_s$ ), двигун споживає 10 А під час роботи з постійною кутовою швидкістю. (a) Яка зворотна ЕРС індукується в котушці,  $\varepsilon_i$ ? (b) Яка механічна вихідна потужність двигуна? (c) Яка потужність розсіюється в опорі котушок? (d) Яка вихідна потужність джерела 120 В? (e) Припустимо, що навантаження на двигун збільшується, змушуючи його сповільнюватися до такої міри, що він споживає 20 А. Дайте відповідь на частини (a) - (e) для цієї ситуації.

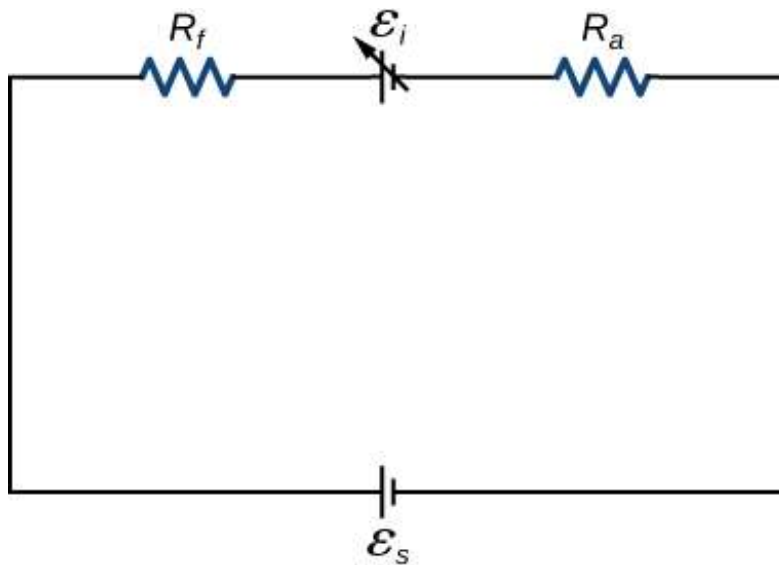


Рис. 3.33. Схема двигуна постійного струму з послідовною обмоткою

#### Стратегія

Зворотна ЕРС розраховується виходячи з різниці між напругою, що подається, і втратами від струму через опір. Потужність від кожного приладу розраховується за однією з формул потужності на основі наведеної інформації.

#### Розв'язок

а. Зворотна ЕРС дорівнює:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_s - I(R_f + R_a) = 120 \text{ В} - (10 \text{ А})(2 \text{ Ом}) = 100 \text{ В}.$$

б. Оскільки потенціал на якорі становить 100 В, коли струм, що проходить через нього, дорівнює 10 А, вихідна потужність двигуна становить:

$$P_m = \varepsilon_i I = (100 \text{ В})(10 \text{ А}) = 1,0 \times 10^3 \text{ Вт}.$$

с. Струм 10 А протікає по котушках, сумарний опір яких дорівнює 2,0 Ом, тому потужність, що розсіюється в котушках, становить:

$$P_R = I^2 R = (10 \text{ А})^2 (2 \text{ Ом}) = 2,0 \times 10^2 \text{ Вт}.$$

d. Оскільки від джерела 120 В споживається 10 А, його вихідна потужність становить

$$P_S = \varepsilon_S I = (120 \text{ В})(10 \text{ А}) = 1,2 \times 10^3 \text{ Вт.}$$

e. Повторення тих же обчислень з  $I = 20 \text{ А}$ , дає:

$$\varepsilon_i = 80 \text{ В}, P_m = 1,6 \times 10^3 \text{ Вт}, P_R = 8,0 \times 10^2 \text{ Вт}, P_S = 2,4 \times 10^3 \text{ Вт.}$$

Мотор в цьому випадку обертається повільніше, тому його вихідна потужність і потужність джерела більше.

### Обговорення

Зверніть увагу, що ми маємо енергетичний баланс у частині (b - d):  $1,2 \times 10^3 \text{ Вт} = 1,0 \times 10^3 \text{ Вт} + 2,0 \times 10^2 \text{ Вт}$ .

## 3.7. Застосування електромагнітної індукції

Сучасне суспільство має численні застосування закону індукції Фарадея, який ми розглянемо в цьому та інших розділах. На цьому етапі згадаємо декілька, які передбачають запис інформації за допомогою магнітних полів.

Деякі жорсткі диски комп'ютерів застосовують принцип магнітної індукції. Дані записують на жорсткий диск, що обертається. Історично склалося так, що читання цих даних відбувалося за принципом індукції. Однак більшість вхідної інформації сьогодні передається в цифровій, а не аналоговій формі – на жорсткому диску, що обертається, записується серія 0 або 1. Тому більшість пристроїв зчитування жорстких дисків не працюють за принципом індукції, а використовують техніку, відому як гігантський магнітоопір. **Гігантський магнітоопір** – це ефект великої зміни електричного опору, індукваного прикладеним магнітним полем до тонких плівок феромагнітного і немагнітного шарів, що чергуються. Це один з перших великих успіхів нанотехнологій.

Графічні планшети або планшетні комп'ютери, де для малювання цифрових зображень використовується спеціально розроблене перо, також застосовують принципи індукції. Планшети, про які тут ідеться, позначені як пасивні, оскільки існують інші конструкції, які використовують або перо, що працює від батарейок, або оптичні сигнали для письма. Пасивні планшети відрізняються від сенсорних планшетів і телефонів, якими багато хто з нас користується регулярно, але їх все одно можна зустріти при підписі на касі. Під екраном, показаним на рис. 3.34, знаходяться крихітні дроти, що проходять по всій довжині і ширині екрана. Ручка має крихітне магнітне поле, що виходить від її кінчика. Коли кінчик ковзає по екрану, у проводах відчувається мінливе магнітне поле, яке перетворюється на індуквану ЕРС, яка перетворюється на лінію, яку ви щойно намалювали.

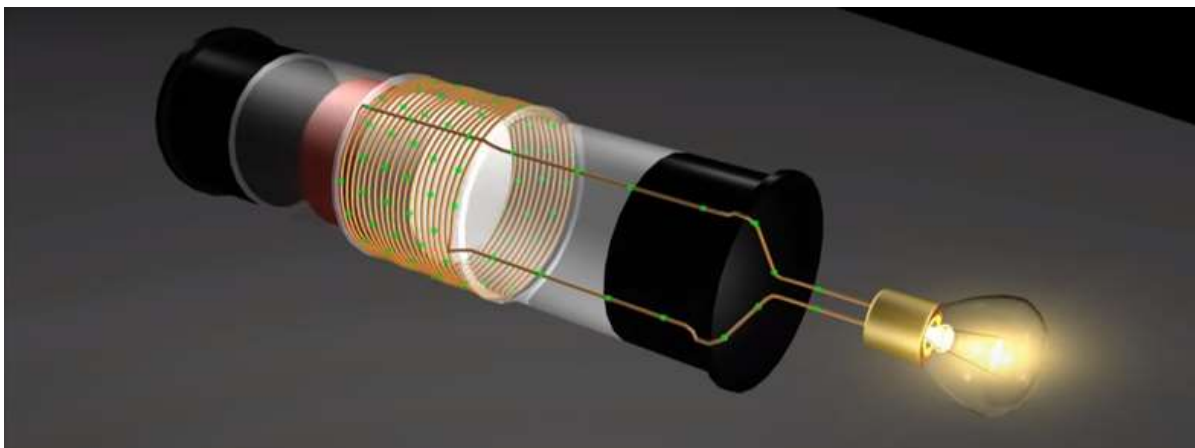




Рис. 3.34. Планшет зі спеціально розробленим пером для письма є ще одним застосуванням магнітної індукції

Ще одним застосуванням індукції є магнітна смуга на зворотному боці вашої особистої кредитної картки, яка використовується в продуктовому магазині або банкоматі. Це працює за тим же принципом, що і аудіо- або відеокасета, в якій головка відтворення зчитує особисту інформацію з вашої карти.

Ліхтарики можуть використовувати магнітну індукцію. Магніт переміщається за допомогою вашої механічної роботи в середині котушки. Індукований струм заряджає конденсатор, який зберігає заряд, який буде запалювати лампочку навіть тоді, коли ви не виконуєте цю механічну роботу.



Електричні та гібридні транспортні засоби також використовують переваги електромагнітної індукції. Одним із обмежувальних факторів, який перешкоджає широкому 100% прийняттю електромобілів, є те, що термін служби батареї не такий довгий, як час, протягом якого ви можете їздити на повному баку бензину. Щоб збільшити кількість заряду акумулятора під час руху, двигун може діяти як генератор щоразу, коли автомобіль гальмує, використовуючи переваги виробленої зворотної ЕРС. Ця додаткова ЕРС може бути знову отриманою накопиченою енергією в акумуляторі автомобіля, продовжуючи термін служби акумулятора.

Ще однією сучасною областю досліджень, в якій успішно впроваджується електромагнітна індукція, є транскраніальна магнітна стимуляція (ТМС). Безліч розладів, включаючи депресію та галюцинації, можна простежити через нерегулярну локалізовану електричну активність у мозку. При транскраніальній магнітній стимуляції мінливе і дуже локалізоване магнітне поле розміщується поблизу певних ділянок, визначених у мозку. Використання ТМС як діагностичного методу добре відоме.

Погляньте ще, як рок-н-рольні інструменти, такі як електрогітари, використовують електромагнітну індукцію, щоб отримати стильні ритми.



## ІНДУКТИВНІСТЬ

### Введення



Рис. 4.1. Килимок для зарядки смартфона містить котушку, на яку надходить змінний струм, або струм, який постійно збільшується і зменшується. Змінний струм індуктує в смартфоні ЕРС, яка заряджає його батарею. Зверніть увагу, що чорна скринька, що містить електричну вилку, також містить трансформатор, який змінює струм з розетки відповідно до потреб смартфона

У розділі «Електромагнітна індукція» ми обговорювали, як змінний у часі магнітний потік індуктує ЕРС у контурі. У багатьох наших розрахунках цей потік був обумовлений прикладним магнітним полем, залежним від часу. Відбувається і зворотне явище: струм, що протікає в колі, створює власне магнітне поле.

Ми обговорювали деякі приклади застосувань індукції. Чи існує фізична величина, пов'язана з тим, наскільки «ефективним» є даний пристрій? Відповідь: так, і ця фізична величина є *індуктивністю*. У цьому розділі ми розглянемо застосування індуктивності в електронних пристроях і те, як котушки індуктивності використовуються в схемах.

## 4.1. Взаємна індуктивність

**Індуктивність** – це властивість пристрою, яка повідомляє нам, наскільки ефективно він індукує ЕРС в іншому пристрої. Іншими словами, це фізична величина, яка виражає ефективність даного пристрою.

Коли два контури, що несуть змінні в часі струми, знаходяться близько один до одного, магнітний потік через кожен контур змінюється через зміну струму  $I$  в іншому контурі. Отже, ЕРС індукується в кожному контурі змінною струму в іншому. Тому цей тип ЕРС називається *взаємно індукованою ЕРС*, а явище, що виникає, відоме як **взаємна індуктивність ( $M$ )**.

Як приклад розглянемо дві котушки (рис. 4.2). Котушки 1 і 2 мають  $N_1$  і  $N_2$  витків і переносять струми  $I_1$  і  $I_2$ , відповідно. Потік через один виток котушки 2, створюваний магнітним полем струму в котушці 1, дорівнює  $\Phi_{21}$ , тоді як потік через один виток котушки 1 за рахунок магнітного поля  $I_2$  є  $\Phi_{12}$ .

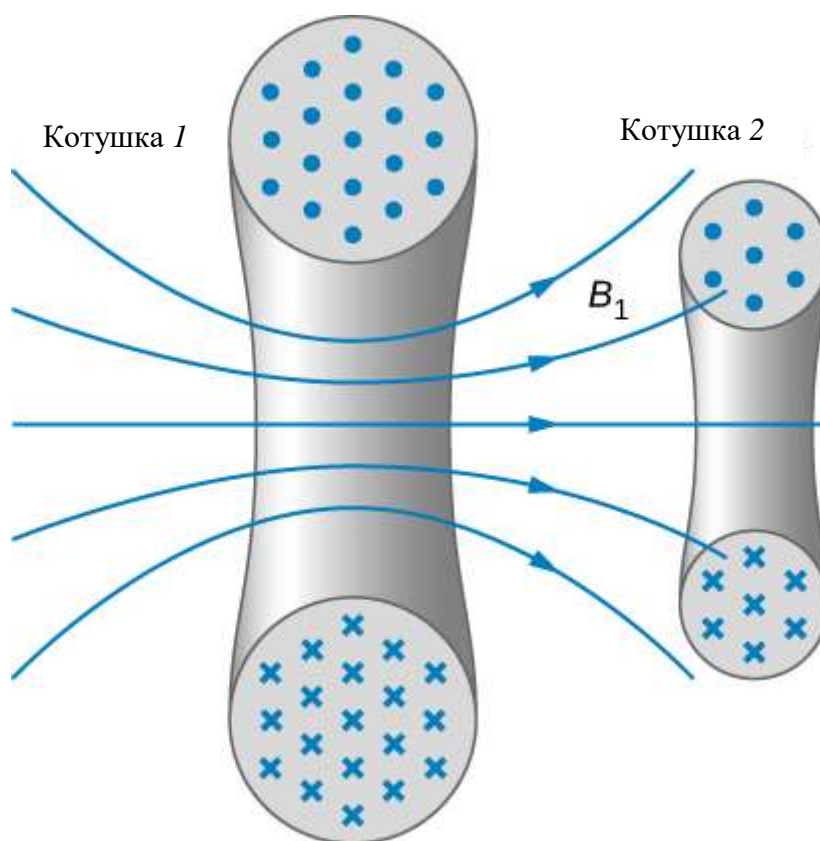


Рис. 4.2. Деякі лінії магнітного поля, створені струмом в котушці 1, проходять через котушку 2

Взаємна індуктивність  $M_{21}$  котушки 2 по відношенню до котушки 1 – відношення потоку через  $N_2$  витків котушки 2, створювані магнітним полем струму в котушці 1, поділеної на цей струм, т. е.

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}. \quad (4.1)$$

Аналогічно, взаємна індуктивність котушки 1 по відношенню до котушки 2 дорівнює:

$$M_{21} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2}. \quad (4.2)$$

Як і ємність, взаємна індуктивність є геометричною величиною. Це залежить від форми та взаємного розташування двох котушок, і це не залежить від струмів у котушках. Одиниця взаємної індуктивності  $M$  в СІ називається **генрі (Гн)** на честь Джозефа Генрі (1799-1878), американського вченого, який відкрив індуквану ЕРС незалежно від Фарадея. Таким чином, ми маємо  $1 \text{ Гн} = 1 \text{ В} \cdot \text{с} / \text{А}$ . Можна показати, що  $M_{21} = M_{12}$ , тому ми зазвичай відкидаємо індекси, пов'язані з взаємною індуктивністю, і пишемо:

$$M = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}. \quad (4.3)$$

ЕРС, що розвивається в будь-якій котушці, знаходять шляхом поєднання закону Фарадея і визначення взаємної індуктивності. Оскільки  $N_2 \Phi_{21}$  становить сумарний потік через котушку 2 за рахунок  $I_1$ , ми отримуємо:

$$\varepsilon_2 = -\frac{d}{dt} \left( \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} \right) = -\frac{d}{dt} (M I_1) = -M \frac{dI_1}{dt}, \quad (4.4)$$

де ми використали той факт, що  $M$  є незалежною від часу константою, оскільки геометрія не залежить від часу. Аналогічно маємо:

$$\varepsilon_1 = -M \frac{dI_2}{dt}. \quad (4.5)$$

У рівнянні 4.5 ми бачимо значення більш раннього опису взаємної індуктивності ( $M$ ) як геометричної величини. Значення  $M$  чітко відображає фізичні властивості елементів схеми і дозволяє відокремити фізичну схему кола від динамічних величин, таких як ЕРС і струм. Рівняння 4.5 визначає взаємну індуктивність з точки зору властивостей в колі, тоді як попереднє визначення взаємної індуктивності в рівнянні 4.1 визначається в термінах магнітного потоку, що виникає, незалежно від елементів кола. Слід бути обережним при використанні рівнянь 4.4 і рівнянь 4.5, тому що  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  не обов'язково відображають сумарні ЕРС у відповідних котушках. Кожна котушка також може мати ЕРС, індуквану через її *самоіндуктивність* (про самоіндуктивність докладніше піде мова в наступному розділі).

Велика взаємна індуктивність  $M$  може бути бажаною, а може і не бажаною. Ми хочемо, щоб трансформатор мав велику взаємну індуктивність. Але прилад, такий як електрична сушарка для білизни, може викликати небезпечну ЕРС на своєму металевому корпусі, якщо взаємна індуктивність між його котушками і корпусом велика. Одним із способів зменшення взаємної індуктивності є протинамотування котушок для погашення створюваного магнітного поля (рис. 4.3).

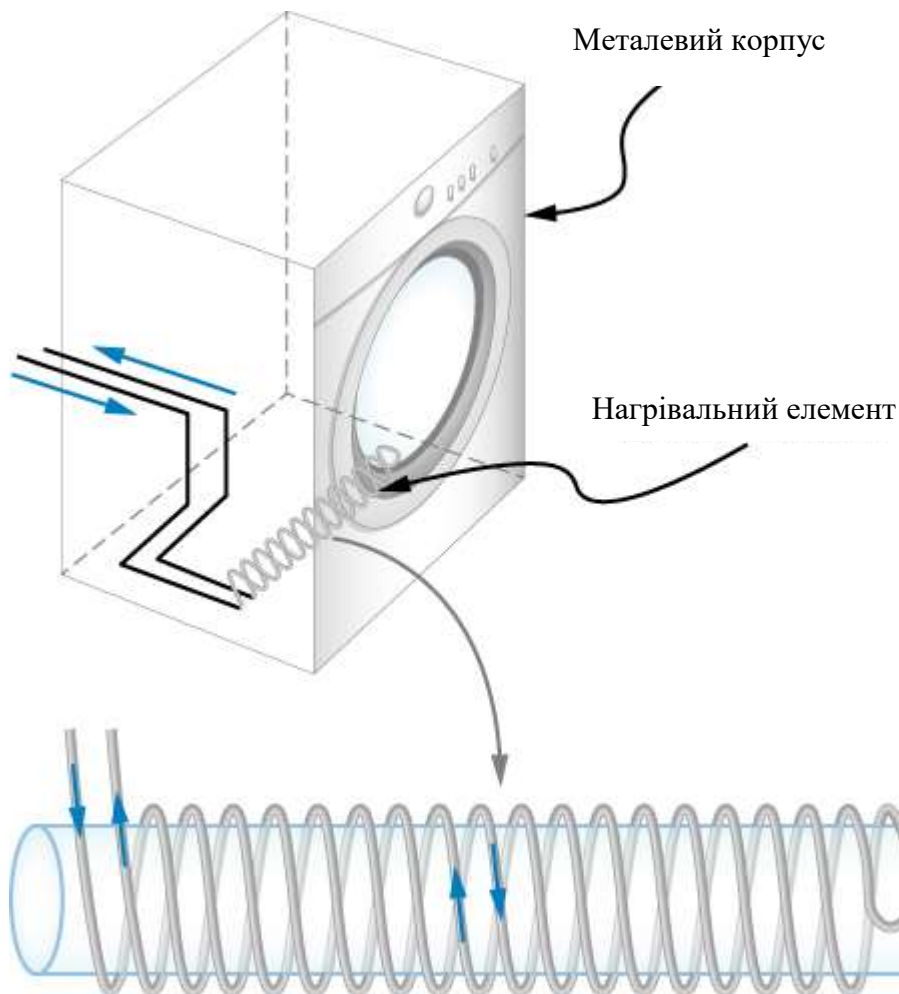


Рис. 4.3. Нагрівальні спіралі електричної сушарки для білизни можна намотати так, щоб їх магнітні поля компенсували один одного, значно зменшуючи взаємну індуктивність з корпусом сушарки

Цифрова обробка сигналів є ще одним прикладом, в якому взаємна індуктивність зменшується котушками зустрічної обмотки. Швидка ЕРС увімкнення/вимкнення, що представляє 1 і 0 у цифровій схемі, створює складне магнітне поле, що залежить від часу. У сусідніх провідниках може утворюватися ЕРС. Якщо цей провідник також передає цифровий сигнал, індукована ЕРС може бути достатньо великою, щоб перемикаєти 1 і 0, з наслідками від незручних до катастрофічних.

#### ПРИКЛАД 4.1. Взаємна індуктивність

На рис. 4.4 зображена котушка з  $N_2$  витками радіусом  $R_2$ , яка оточує довгий соленоїд довжиною  $l_1$  радіусом  $R_1$  і  $N_1$  витками. а) Яка взаємна індуктивність двох котушок? б) якщо  $N_1 = 500$  витків,  $N_2 = 10$  витків,  $R_1 = 3,10$  см,  $l_1 = 75,0$  см, а струм у соленоїді змінюється зі швидкістю  $200$  А/с, яка ЕРС індукується в навколишній котушці?

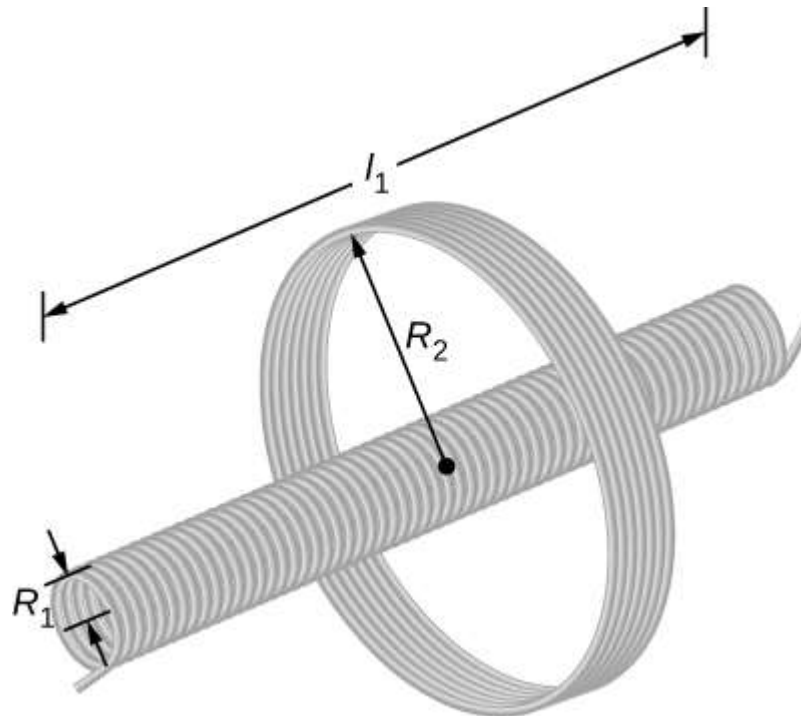


Рис. 4.4. Соленоїд, оточений котушкою

### Стратегія

Поза соленоїдом немає магнітного поля, а поле всередині має величину  $B_1 = \mu_0 (N_1/l_1)I_1$  і спрямоване паралельно осі соленоїда. Ми можемо використовувати це магнітне поле для знаходження магнітного потоку через навколишню котушку, а потім використовувати цей потік для обчислення взаємної індуктивності для частини (а), використовуючи рівняння 4.3. Розв'яжемо частину (б), обчисливши взаємну індуктивність із заданих величин і використовуючи рівняння 4.4 для обчислення індукованої ЕРС.

### Розв'язок

а. Магнітний потік  $\Phi_{21}$  через навколишню котушку дорівнює:

$$\Phi_{12} = B_1 \pi R_1^2 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_1} \pi R_1^2.$$

Виходячи з рівняння 10.3, взаємна індуктивність дорівнює:

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \left( \frac{N_2}{I_1} \right) \left( \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l_1} \right) \pi R_1^2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi R_1^2}{l_1}.$$

б. Використовуючи попередній вираз і задані значення, взаємна індуктивність дорівнює:

$$M = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{Тл} \cdot \text{м/А})(500)(10)\pi(0,031 \text{ м})^2}{0,75 \text{ м}} = 2,53 \times 10^{-5} \text{ Н}.$$

Таким чином, з рівняння 4.4 випливає, що ЕРС, індуквана в навколишній котушці, дорівнює:

$$\varepsilon_2 = -M \frac{dI_1}{dt} = -(2,53 \times 10^{-5} \text{H}) \left( \frac{200 \text{A}}{c} \right) = -5,06 \times 10^{-3} \text{В.}$$

### Обговорення

Зауважимо, що  $M$  в частині (а) не залежить від радіуса  $R_2$  навколишньої котушки, оскільки магнітне поле соленоїда обмежене її внутрішньою частиною. В принципі, ми також можемо обчислити  $M$ , знайшовши магнітний потік через соленоїд, створений струмом у навколишній котушці. Такий підхід набагато складніший, тому що визначити  $\Phi_{12}$  складно. Однак, оскільки  $M_{12} = M_{21}$ , ми знаємо результат цього обчислення.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 4.1

Струм  $I(t) = (5,0 \text{ A})\sin((120\pi \text{ рад/с})t)$  протікає через соленоїд частини (b) прикладу 4.1. Яка максимальна ЕРС індукується в навколишній котушці?

### 4.2. Індуктивність і котушки індуктивності

Взаємна індуктивність виникає, коли струм в одному колі створює змінне магнітне поле, яке індукує ЕРС в іншому колі. Але чи може магнітне поле впливати на струм у вихідному колі, який створив це поле? Відповідь – так, і це явище називають *самоіндукцією*.

#### Котушки індуктивності

На рис. 4.5 показані деякі лінії магнітного поля, обумовлені струмом в дротяному круговому контурі.

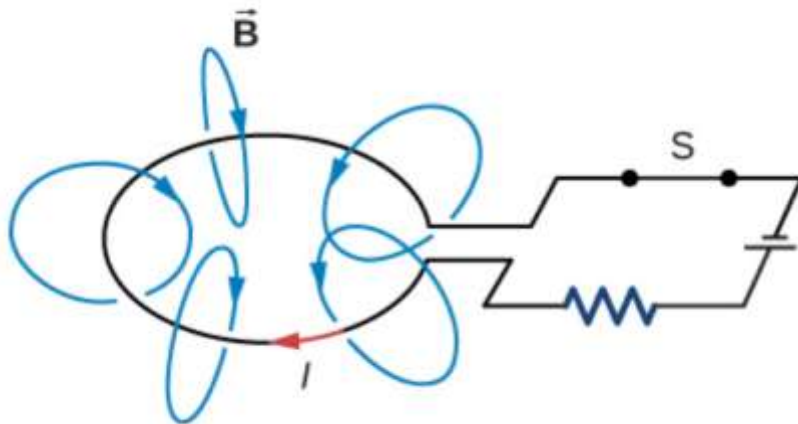


Рис. 4.5. Магнітне поле створюється струмом  $I$  в контурі. Якби  $I$  змінювався з часом, то магнітний потік через петлю також змінювався б, і в петлі індукувалася б ЕРС



Якщо струм постійний, то магнітний потік через контур також постійний. Однак, якщо струм  $I$  буде змінюватися з часом, скажімо, відразу після замикання перемикача  $S$ , то магнітний потік  $\Phi_m$  відповідно зміниться. Тоді за законом Фарадея ЕРС  $\varepsilon$  буде індукуватися в контурі, де

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (4.6)$$

Оскільки магнітне поле за рахунок струмоведучого проводу прямо пропорційно струму, то і потік, обумовлений цим полем, пропорційний струму; Тобто,

$$\Phi_m \propto I. \quad (4.7)$$

Це також можна записати у вигляді:

$$\Phi_m = LI, \quad (4.8)$$

де константу пропорційності  $L$  називають **індуктивністю** дротяної петлі.

Якщо петля має  $N$  витків, тоді це рівняння набуває вигляду:

$$N\Phi_m = LI. \quad (4.9)$$

За домовленістю, позитивний сенс нормалі до петлі пов'язаний зі струмом за правилом правої руки, тому на рис. 4.5 нормаль спрямована вниз. За цим правилом  $\Phi_m$  є додатним у рівнянні 4.9, тому  $L$  завжди має позитивне значення.

Якщо контур складається з  $N$  витків,  $\varepsilon = -Nd\Phi_m/dt$ . Таким чином, індуквану ЕРС можна записати в *термінах індуктивності* так:

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}. \quad (4.10)$$

При використанні цього рівняння для визначення  $L$  найпростіше ігнорувати ознаки  $\varepsilon$  і  $dI/dt$ , і обчислити  $L$  так:

$$L = \frac{|\varepsilon|}{|dI/dt|}.$$

Оскільки індуктивність пов'язана з магнітним полем, створюваним струмом, то будь-яка конфігурація провідників має індуктивність. Наприклад, крім дротяної петлі, довгий прямий провід має індуктивність, як і коаксіальний кабель. Коаксіальний кабель найчастіше використовується в індустрії кабельного телебачення, а також може бути підключений до кабельного модему. Коаксіальні кабелі використовуються завдяки своїй здатності передавати електричні сигнали з мінімальними спотвореннями. Коаксіальні кабелі мають дві довгі циліндричні жили, які мають струм і індуктивність, що може мати небажані ефекти.

Елемент схеми, який використовується для забезпечення індуктивності, відомий як **катушка індуктивності**. Він представлений символом, зображеним на рис. 4.6, який нагадує дротяну катушку, основну форму катушки індуктивності. На рис. 4.7 показано кілька типів катушок індуктивності, які зазвичай використовуються в схемах.



Рис. 4.6. Символ, який використовується для позначення котушки індуктивності в електричному колі

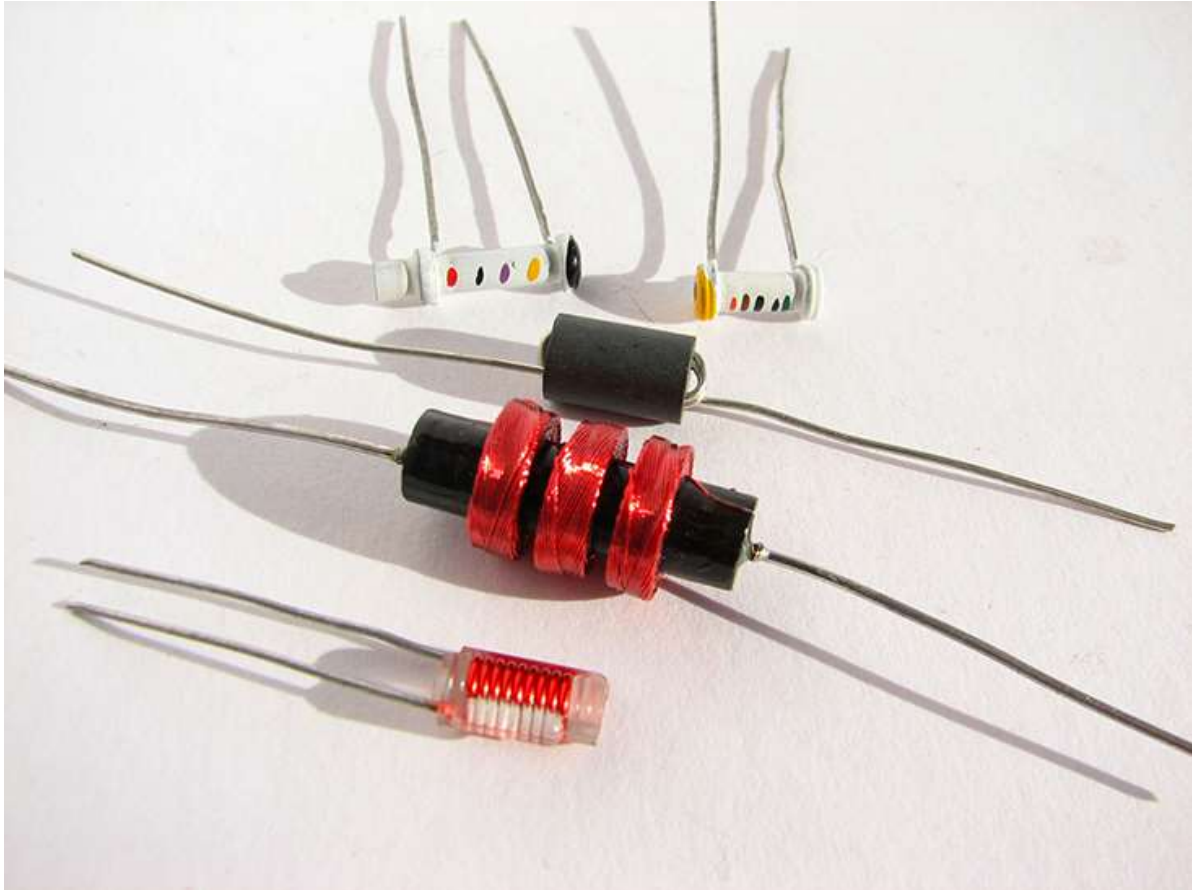


Рис. 4.7. Різновиди котушок індуктивності. Незалежно від того, чи інкапсульовані вони, як три верхні, чи намотані на котушку, як найнижча, кожна з них є відносно довгою дротяною котушкою

Відповідно до закону Ленца, негативний знак в рівнянні 4.10 вказує на те, що індукована ЕРС на котушці індуктивності завжди має полярність, *протилежну* зміні струму. Наприклад, якби струм, що протікає від *A* до *B* на рис. 4.8 (а), зростав, то індукована ЕРС (представлена уявною батареєю) мала б показану полярність, щоб протистояти збільшенню. Якби струм від *A* до *B* зменшувався, то індукована ЕРС мала б протилежну полярність, знову ж таки, щоб протистояти зміні струму (рис. 4.8 (b)). Нарешті, якби струм через котушку індуктивності був постійним, то в котушці не індукувалася б ЕРС.

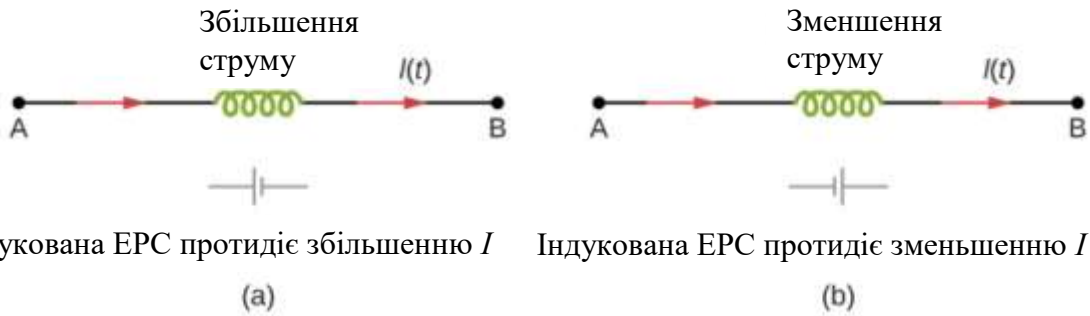


Рис. 4.8. Індукована ЕРС на котушці індуктивності завжди протидіє зміні струму. Це можна уявити як уявну батарею, яка змушує струм текти, щоб протистояти зміні (a) і посилювати зміну (b)

Одним із поширених застосувань індуктивності є те, що сигнали світлофора можуть відчувати, коли транспортні засоби чекають на перехресті вулиць. Електричне коло з котушкою індуктивності розміщується в дорозі під місцем, де буде зупинятися автомобіль, що чекає. Кузов автомобіля збільшує індуктивність і характеристики кола змінюється, посылаючи сигнал на світлофори про зміну кольору. Аналогічним чином, металошукачі, які використовуються для безпеки аеропорту, використовують ту саму техніку. Котушка або котушка індуктивності в рамці металошукача виконує одночасно роль передавача і приймача. Імпульсний сигнал від котушки передавача індуктує сигнал у приймачі. На індуктивність кола впливає будь-який металевий предмет на тракті (рис. 4.9). Металошукачі можуть бути налаштовані на різну чутливість, а також можуть відчувати наявність металу на людині.



Рис. 4.9. Звичайний гейт безпеки в аеропорту не тільки виявляє метали, але і може вказувати на їх приблизну висоту над підлогою

Великі індуковані напруги зустрічаються у спалахах камер. Спалахи камер використовують акумулятор, дві котушки індуктивності, які функціонують як трансформатор, і систему комутації або *генератор* для індукції великої напруги.

Також нагадаємо, що нам потрібне змінне магнітне поле, викликане зміною струму, щоб індукувати напругу в іншій котушці. Система осциляторів робить це багато разів, коли напруга акумулятора підвищується до понад 1000 вольт. (Ви можете почути високий свист трансформатора під час заряджання конденсатора.) Конденсатор зберігає високу напругу для подальшого використання в живленні спалаху.

#### **ПРИКЛАД 4.2. Індуктивність котушки**

Індукована ЕРС 20 мВ вимірюється на котушці з 50 близько намотаних витків, при цьому струм через неї рівномірно зростає від 0,0 А до 5,0 А за 0,10 с. а) Яка індуктивність котушки? б) При струмі 5,0 А який магнітний потік пронизує кожен виток котушки?

#### **Стратегія**

Обидві частини цієї задачі дають всю інформацію, необхідну для визначення індуктивності в частині (а) або потоку через кожен виток котушки в частині (б). Необхідні рівняння 4.10 для частини (а) і рівняння 10.9 для частини (б).

#### **Розв'язок**

а. Ігноруючи негативний знак і використовуючи модулі величин, ми маємо, з рівняння 4.10:

$$L = \frac{\varepsilon}{dI/dt} = \frac{20 \text{ мВ}}{5 \text{ А/с}} = 4 \times 10^{-4} \text{ Н.}$$

б. З рівняння 4.9 магнітний потік задається через силу струму:  $\Phi_m = LI/N$ , отже,

$$\Phi_m = \frac{(4 \times 10^{-5} \text{ Н})(5 \text{ А})}{50 \text{ витків}} = 4 \times 10^{-5} \text{ Вб.}$$

#### **Обговорення**

Індуктивність і потік, обчислені в частинах (а) і (б), є типовими значеннями для котушок, що зустрічаються в сучасних пристроях. Якщо струм не змінюється з часом, потік не змінюється в часі, тому ЕРС не індукується.

#### **ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 4.2**

Струм протікає через котушку індуктивності на рис. 4.8 від *B* до *A*, а не від *A* до *B*, як показано на малюнку. Струм збільшується чи зменшується для того, щоб отримати ЕРС, задану на діаграмі (а)? На діаграмі (б)?

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 4.3

Змінний струм індукує ЕРС 10 В на котушці індуктивності 0,25 Гн. З якою швидкістю змінюється струм?

Хороший підхід до розрахунку індуктивності котушки складається з наступних кроків:

### СТРАТЕГІЯ ВИРІШЕННЯ ПРОБЛЕМ

*Індуктивність*

1. Припустимо, що струм  $I$  протікає через котушку індуктивності.
2. Визначаємо магнітне поле  $B$ , що виробляється струмом. Якщо є відповідна симетрія, ви можете зробити це за допомогою закону Ампера.
3. Отримати магнітний потік,  $\Phi_m$ .
4. З відомим потоком індуктивність можна знайти з рівняння 4.9:

$$L = N\Phi_m / I.$$

Щоб продемонструвати цю процедуру, ми тепер обчислимо індуктивності двох котушок.

### Циліндричний соленоїд

Розглянемо довгий циліндричний соленоїд з довжиною  $l$ , площею поперечного перерізу  $A$  і  $N$  витками дроту. Ми припускаємо, що довжина соленоїда настільки більша за його діаметр, що ми можемо обчислити магнітне поле за формулою:  $B = \mu_0 n I$  для всій внутрішній частині соленоїда, тобто ми ігноруємо кінцеві ефекти в соленоїді. При струмі  $I$ , що протікає через котушки, магнітне поле, створене всередині соленоїда, дорівнює:

$$B = \mu_0 \left(\frac{N}{l}\right) I, \quad (4.11)$$

Таким чином, магнітний потік через один виток становить:

$$\Phi_m = BA = \frac{\mu_0 N A}{l} I. \quad (4.12)$$

Використовуючи рівняння 4.9, знаходимо величину індуктивності соленоїда:

$$L_{\text{соленоїд}} = \frac{N\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}. \quad (4.13)$$

Якщо  $n = N/l$  – це число витків на одиницю довжини соленоїда, тоді

$$L = \mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 Al = \mu_0 n^2 Al = \mu_0 n^2 V, \quad (4.14)$$

де  $V = Al$  – об'єм соленоїда.

Зверніть увагу, що *індуктивність довгого соленоїда залежить тільки від його фізичних властивостей* (таких як кількість витків дроту на одиницю довжини і об'єму), а не від магнітного поля або струму. Це справедливо для котушок індуктивності в цілому.

## Прямокутний тороїд

Тороїд з прямокутним перерізом показаний на рис. 4.10. Внутрішня і зовнішня радіуси тороїда  $R_1$  і  $R_2$ , і  $h$  – висота тороїда.

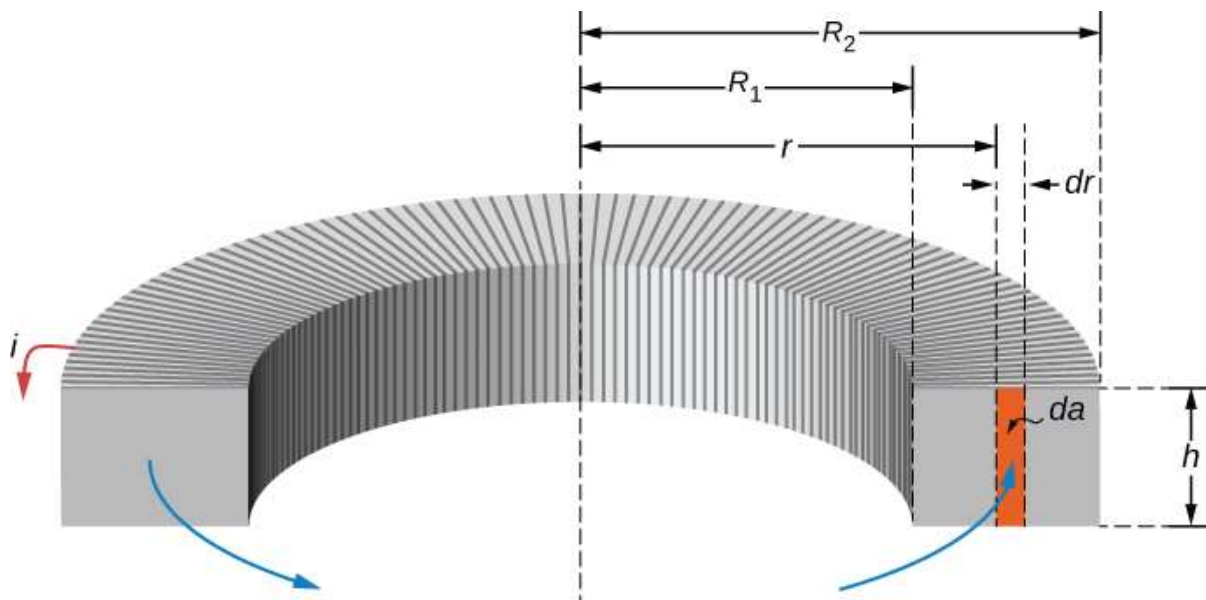


Рис. 4.10. Схема для обчислення індуктивності прямокутного тороїда

Застосовуючи закон Ампера таким же чином, як ми це робили в прикладі 4.8 для тороїда з круглим поперечним перерізом, ми знаходимо, що магнітне поле всередині прямокутного тороїда також задається формулою:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}, \quad (4.15)$$

де  $r$  – відстань від центральної осі тороїда.

Оскільки поле змінюється всередині тороїда, ми повинні обчислити потік, інтегруючи поперечний переріз тороїда. Використавши елемент з площею нескінченно малого поперечного перерізу  $da = h dr$  на рис. 4.10, отримаємо:

$$\Phi_m = \int B da = \int_{R_1}^{R_2} \left( \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \right) (h dr) = \frac{\mu_0 N h I}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (4.16)$$

Тепер з рівняння 4.16 отримуємо індуктивність прямокутного тороїда:

$$L = \frac{N \Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (4.17)$$

Як і очікувалося, індуктивність – це константа, яка визначається тільки фізичними властивостями тороїда.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 4.4

а) Обчисліть індуктивність соленоїда, який щільно намотаний дротом діаметром 0,10 см, має площу поперечного перерізу 0,90 см<sup>2</sup>, і довжину

40 см. б) Якщо струм через соленоїд рівномірно зменшується від 10 А до 0 А за 0,10 с, то яка ЕРС індукується між кінцями соленоїда?

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 4.5

а) Чому дорівнює магнітний потік через один виток соленоїда, індуктивність якого  $8,0 \times 10^{-5}$  Гн, коли через нього протікає струм 3 А? Припустимо, що соленоїд має 1000 витків і намотаний дротом діаметром 1,0 мм. б) Яка площа поперечного перерізу соленоїда?

### 4.3. Енергія магнітного поля

Енергія конденсатора накопичується в електричному полі між його пластинами. Аналогічно, котушка індуктивності має здатність накопичувати енергію, але в своєму магнітному полі. Цю енергію можна знайти, інтегруванням густини магнітної енергії,

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (4.18)$$

у відповідному об'ємі. Щоб зрозуміти, звідки береться ця формула, розглянемо довгий циліндричний соленоїд з попереднього розділу. Знову ж таки, використовуючи наближення нескінченного соленоїда, ми можемо припустити, що магнітне поле по суті є постійним і задається формулою

$$B = \mu_0 n I$$

всюди всередині соленоїда. Таким чином, енергія, накопичена в соленоїді, або густина магнітної енергії, помножена на об'єм, еквівалентна виразу:

$$U = u_m V = \frac{(\mu_0 n I)^2}{2\mu_0} (Al) = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 Al) I^2. \quad (4.19)$$

При підстановці рівняння 4.14 це стає рівним:

$$U = \frac{1}{2} L I^2. \quad (4.20)$$

Хоча це рівняння виведено для особливого випадку, воно дає енергію, запасену в магнітному полі *будь-якої* котушки індуктивності. Ми можемо переконатися в цьому, розглянувши довільну котушку індуктивності, через яку проходить змінний струм. У будь-який момент часу величина індукованої ЕРС дорівнює:

$$\varepsilon = L \frac{di}{dt'}$$

де  $i$  є індукованим струмом у цьому випадку. Отже, потужність, що поглинається котушкою індуктивності, становить величину:

$$P = \varepsilon i = L \frac{di}{dt} i. \quad (4.21)$$

Сумарну енергію, запасену в магнітному полі при збільшенні струму від 0 до  $I$  в інтервалі часу від 0 до  $t$ , можна визначити, інтегрувавши цей вираз:

$$U = \int_0^t P dt' = \int_0^t L \frac{di}{dt'} i dt' = L \int_0^I i di = \frac{1}{2} L I^2. \quad (4.22)$$

### ПРИКЛАД 4.3. Індуктивність коаксіального кабелю

На рис. 4.11 показані дві довгі концентричні циліндричні оболонки радіусів  $R_1$  і  $R_2$ .

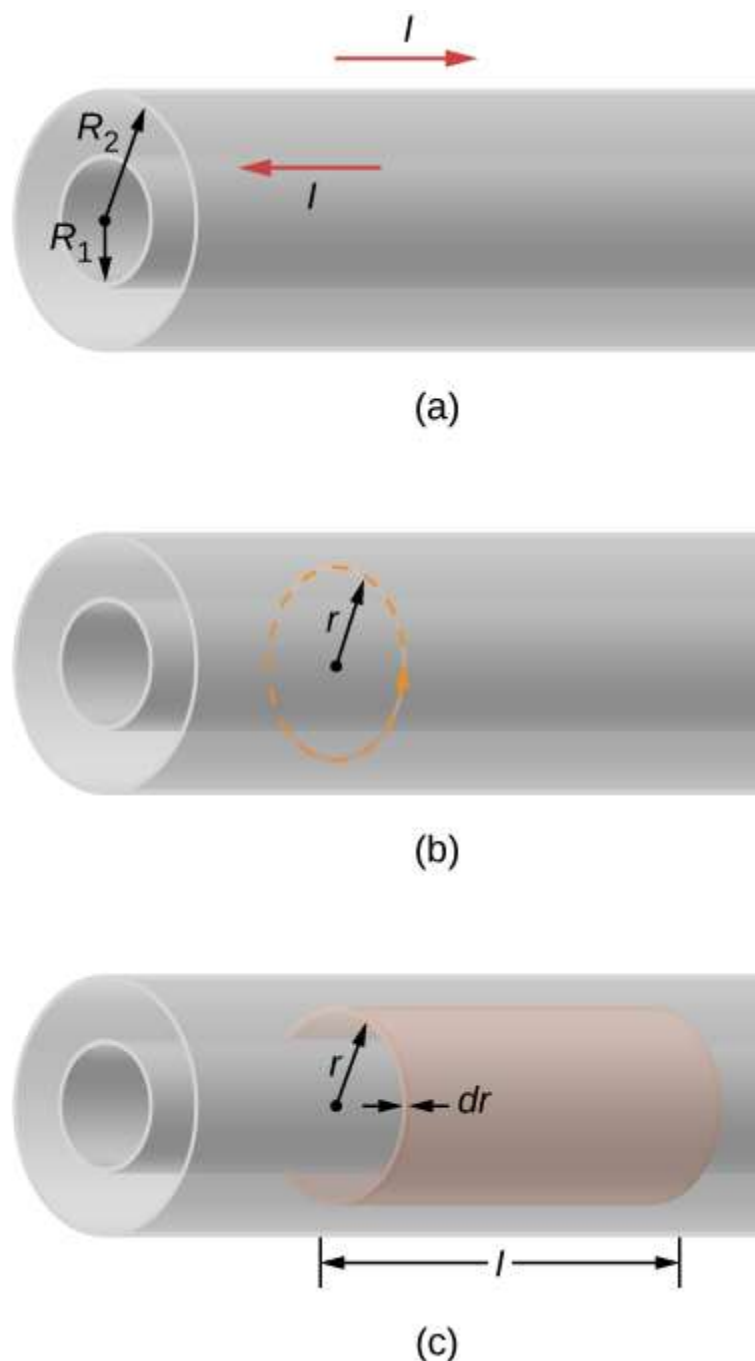


Рис. 4.11. (а) Коаксіальний кабель тут представлений двома порожнистими концентричними циліндричними провідниками, по яких в протилежних напрямках тече електричний струм. (б) Магнітне поле між провідниками можна знайти, застосувавши закон Ампера до пунктирної траєкторії. (с) Циліндрична оболонка використовується для знаходження магнітної енергії, що зберігається на довжині  $l$  кабелю



Ця конфігурація є спрощеним представленням коаксіального кабелю. Ємність на одиницю довжини кабелю вже розрахована. Тепер (а) визначте магнітну енергію, накопичену на одиницю довжини коаксіального кабелю, і (б) використовуйте цей результат, щоб знайти самоіндуктивність на одиницю довжини кабелю.

### Стратегія

Магнітне поле як всередині, так і зовні коаксіального кабелю визначається законом Ампера. Виходячи з цього магнітного поля, ми можемо використовувати рівняння 4.22 для обчислення густини енергії магнітного поля. Магнітна енергія обчислюється інтегралом від густини магнітної енергії, помноженої на диференціальний об'єм над циліндричною оболонкою. Після того, як інтеграція здійснена, ми маємо рішення закритої форми для частини (а). Індуктивність на одиницю довжини визначається виходячи з цього результату і рівняння 4.22.

### Розв'язок

а. Визначаємо магнітне поле між провідниками, застосовуючи закон Ампера до пунктирної кругової траєкторії, показаної на рис. 4.11 (b). Через циліндричну симетрію  $B$  є постійною величиною уздовж шляху, тому

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(2\pi r) = \mu_0 I.$$

Це дає нам формулу для визначення величини магнітного поля:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

В області за межами кабелю аналогічне застосування закону Ампера показує, що  $B = 0$ , оскільки ніякий струм не перетинає площу, обмежену круговою траєкторією, де  $r > R_2$ . Цей аргумент також справедливий, коли  $r < R_1$ ; тобто в області всередині внутрішнього циліндра. Таким чином, вся магнітна енергія кабелю зберігається між двома провідниками. Оскільки густина енергії магнітного поля дорівнює:

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

тоді енергія, запасена в циліндричній оболонці внутрішнього радіуса  $r$ , зовнішнього радіуса  $r+dr$ , довжиною  $l$  (див. частину (b) малюнка) дорівнює:

$$u_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Таким чином, сумарна енергія магнітного поля на довжині  $l$  кабелю дорівнює:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} dU = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} (2\pi r l) dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

а енергія на одиницю довжини дорівнює:

$$\frac{U}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

б. З рівняння 10.22, отримуємо:

$$U = \frac{1}{2} LI^2,$$

де  $L$  – самоіндуктивність коаксіального кабелю довжиною  $l$ . Прирівнявши попередні два рівняння, знаходимо, що самоіндуктивність на одиницю довжини кабелю дорівнює:

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

### Обговорення

Індуктивність на одиницю довжини залежить тільки від внутрішнього і зовнішнього радіусів, як видно з результату. Щоб збільшити індуктивність, ми можемо збільшити зовнішній радіус ( $R_2$ ) або зменшити внутрішній радіус ( $R_1$ ). У межі, коли два радіуси стають рівними, індуктивність йде до нуля. У цьому ліміті коаксіальний кабель відсутній.

Крім того, магнітна енергія одиниці довжини від частини (а) пропорційна квадрату струму.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 4.6

Скільки енергії накопичиться в котушці індуктивності прикладу 4.2 після того, як струм досягає максимального значення?

### 4.4. Схеми з $RL$ -елементами

Електричне коло з опором і самоіндуктивністю називають  $RL$ -контуром. На рис. 4.12 (а) показана  $RL$ -схема, що складається з резистора, котушки індуктивності, постійного джерела ЕРС і перемикачів  $S_1$  і  $S_2$ . Коли  $S_1$  замкнений, схема еквівалентна одноконтурній схемі, що складається з резистора і котушки індуктивності, з'єднаної через джерело ЕРС (рис. 4.12 (b)). Коли  $S_1$  відкривається і  $S_2$  замикається, схема перетворюється в одноконтурне коло, що складається тільки з резистора і котушки індуктивності (рис. 4.12 (c)).

Спочатку розглянемо  $RL$ -схему на рис. 4.12 (b). Коли  $S_1$  є закритим і  $S_2$  розімкнотий, джерело ЕРС виробляє струм в колі. Якби в колі не було власної індуктивності, струм негайно зріс би до сталого значення  $\varepsilon / R$ . Однак, згідно закону Фарадея, зростаючий струм породжує ЕРС  $V_L = -L(di/dt)$  у котушки індуктивності.

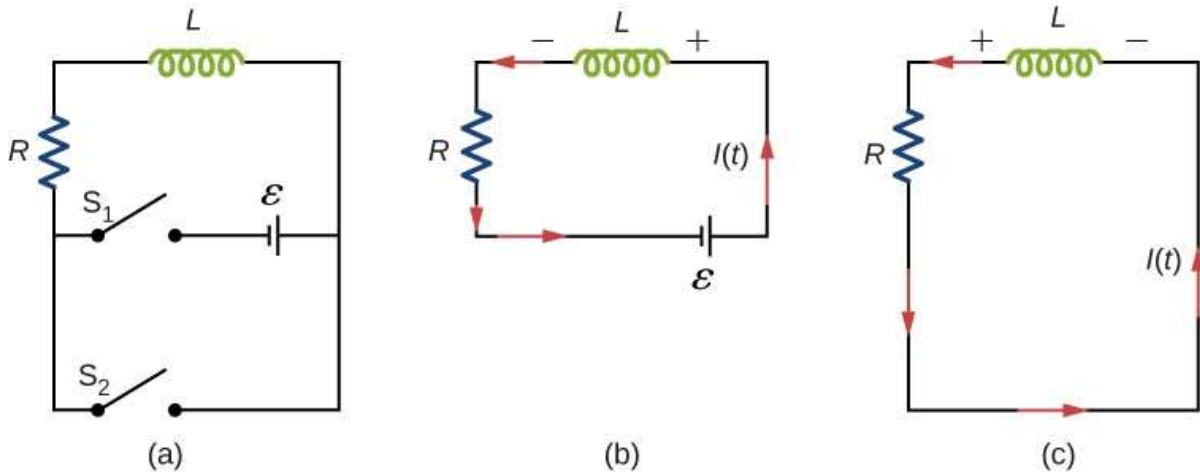


Рис. 4.12. (а)  $RL$ -схема з перемикачами  $S_1$  і  $S_2$ . (б) Еквівалентна схема з закритим  $S_1$  і відкритим  $S_2$ . (с) Еквівалентна схема після відкриття  $S_1$  і закриття  $S_2$

Відповідно до закону Ленца, індукована ЕРС протидіє збільшенню струму і спрямована так, як показано на малюнку. В результаті  $I(t)$  починається з нуля і асимптотично зростає до кінцевого значення.

Застосувавши до цієї схеми правило петлі Кірхгофа, отримаємо:

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} - IR = 0, \quad (4.23)$$

що є диференціальним рівнянням першого порядку для  $I(t)$ . Зверніть увагу на його схожість з рівнянням для конденсатора і резистора, розташованих послідовно (див. Схеми  $RC$ ). Розв'язок рівняння 4.23 можна знайти аналогічно:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau_L}), \quad (4.24)$$

де

$$\tau_L = L/R \quad (4.25)$$

**індуктивна постійна часу** контуру.

Струм  $I(t)$  зображений на рис. 4.13 (а). Він починається з нуля, а коли  $t \rightarrow \infty$ ,  $I(t)$  підходить до  $\mathcal{E}/R$  асимптотично. Індукована ЕРС  $V_L(t)$  прямо пропорційна  $dI/dt$ , або нахилу кривої. Отже, в той час, як індукована ЕРС досягла свого найбільшого значення відразу після скидання перемикачів, вона з часом зменшується до нуля в міру наближення струму до кінцевого значення  $\mathcal{E}/R$ . Тоді схема стає еквівалентною резистору, підключеному до джерела ЕРС.

Енергія магнітного поля котушки індуктивності дорівнює:

$$U_L = \frac{1}{2} LI^2. \quad (4.26)$$

Таким чином, у міру наближення струму до максимального значення струму  $\mathcal{E}/R$ , накопичена енергія в котушці індуктивності зростає від нуля і асимптотично наближається до максимуму  $L(\mathcal{E}/R)^2/2$ . Постійна часу  $\tau_L$  вказує нам, як швидко струм зростає до кінцевого значення.

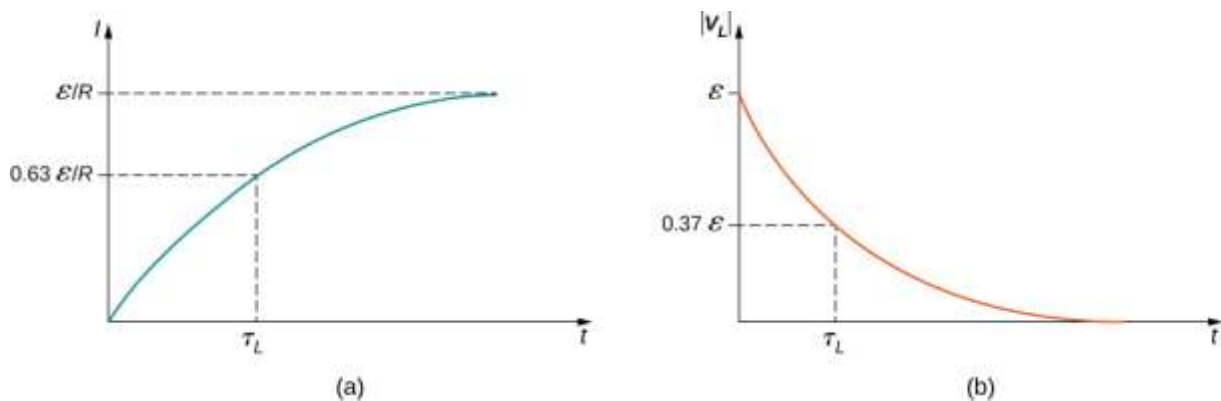


Рис. 4.13. Зміна в часі (а) електричного струму і (б) величини індукованої напруги на котушці в колі рис. 4.12 (б)

З рівняння 4.24 при  $t = \tau_L$ , струм в колі дорівнює:

$$I(t = \tau_L) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-1}) = 0,63 \frac{\varepsilon}{R}, \quad (4.27)$$

який складає 63% кінцевого значення  $\varepsilon/R$ . Чим менше індуктивна постійна часу  $\tau_L = L/R$ , тим стрімкіше наближається величина  $\varepsilon/R$ .

Залежність від часу індукованої напруги на котушці індуктивності в цьому колі можна знайти за допомогою рівняння:

$$V_L(t) = -L \frac{dI}{dt}$$

і рівняння 4.24:

$$V_L(t) = -L \frac{dI}{dt} = -\varepsilon e^{-\frac{t}{\tau_L}}. \quad (4.28)$$

Графік цієї функції накреслений на рис. 4.13 (б). Найбільшим значенням  $L(dI/dt)$  є  $\varepsilon$ ; воно виникає, коли  $dI/dt$  найбільший, тобто відразу після того як  $S_1$  закривається і  $S_2$  відкривається. При наближенні до стаціонарного стану  $dI/dt$  зменшується до нуля. В результаті напруга на котушці індуктивності також зникає коли  $t \rightarrow \infty$ .

Постійна часу  $\tau_L$  також вказує нам, як швидко згасає індукована напруга. При  $t = \tau_L$ , величина індукованої напруги дорівнює:

$$|V_L(\tau_L)| = \varepsilon e^{-1} = 0,37\varepsilon = 0,37V(0). \quad (4.29)$$

Тому напруга на котушці індуктивності падає приблизно до 37% від свого початкового значення через час  $\tau_L$ . Чим коротша постійна часу  $\tau_L$ , тим стрімкіше знижується напруга.

Після того, як пройде достатньо часу, щоб струм досяг свого кінцевого значення, положення перемикачів на рис. 4.12 (а) міняються місцями (див. схему відображену в частині (б)). При  $t = 0$ , сила струму в колі становить  $I(0) = \varepsilon/R$ . За допомогою правила циклу Кірхгофа отримаємо:

$$IR + L \frac{dI}{dt} = 0. \quad (4.30)$$

Розв'язок цього рівняння аналогічний розв'язку рівняння для конденсатора, який розряджається, з аналогічними підстановками. Тоді струм у момент часу  $t$  дорівнює:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau_L}}. \quad (4.31)$$

Струм починається з  $I(0) = \varepsilon/R$  і зменшується з часом у міру втрат енергії, запасеної в котушці індуктивності (рис. 4.14).

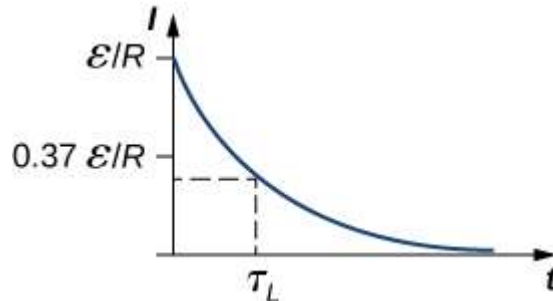


Рис. 4.14. Зміна в часі електричного струму в  $RL$ -колі на рис. 4.12 (b). Індукована напруга на котушці також зменшується в геометричній прогресії

Залежність напруги в часі на котушці індуктивності може бути визначена за формулою  $V_L = -L(dI/dt)$ :

$$V_L(t) = \varepsilon e^{-\frac{t}{\tau_L}}. \quad (4.32)$$

Ця напруга спочатку дорівнює  $V_L(0) = \varepsilon$ , потім загасає до нуля, як струм. Енергія, накопичена в магнітному полі котушки індуктивності,  $LI^2/2$ , також експоненціально зменшується з часом, оскільки розсіюється за рахунок джоулевого нагріву в опорі контуру.

#### ПРИКЛАД 4.4. $RL$ -схема з джерелом ЕРС

У схемі рис. 4.12 (a) нехай  $\varepsilon = 2,0$  В,  $R = 4,0$  Ом і  $L = 4,0$  Гн. Коли  $S_1$  закритий і  $S_2$  відкритий (рис. 4.12 (b)), а) яка постійна часу кола? б) Який струм в колі і величина індукованої ЕРС на котушці індуктивності, коли  $t = 0$ ,  $t = 2,0 \tau_L$ , і коли  $t \rightarrow \infty$ ?

#### Стратегія

Постійна часу для котушки індуктивності і резистора в послідовному колі обчислюється за допомогою рівняння 4.25. Струм і напруга на котушці індуктивності обчислюються за сценаріями, детально описаними в рівнянні 4.24 і рівнянні 4.32.

#### Розв'язок

а. Індуктивна постійна часу дорівнює:

$$\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{4 \text{ Гн}}{4 \text{ Ом}} = 1 \text{ с.}$$

б. Сила струму в колі, зображеному на рис. 4.12 (b), збільшується відповідно до рівняння 4.24:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}} \right).$$

Коли  $t = 0$ ,

$$\left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}} \right) = (1 - 1) = 0.$$

Тобто,  $I(0) = 0$ . Коли  $t = 2,0 \tau_L$  і  $t \rightarrow \infty$ , маємо, відповідно,

$$I(2 \tau_L) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-2}) = (0,5 \text{ A})(0,86) = 0,43 \text{ A},$$

і

$$I(\infty) = \frac{\varepsilon}{R} = 0,5 \text{ A}.$$

З рівняння 4.32 випливає, що величина індукованої ЕРС зменшується за законом:

$$|V_L(t)| = \varepsilon e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Коли  $t = 0$ ,  $t = 2,0 \tau_L$  і  $t \rightarrow \infty$ , отримуємо:

$$\begin{aligned} |V_L(0)| &= \varepsilon = 2 \text{ В}, \\ |V_L(2\tau_L)| &= (2 \text{ В}) e^{-2} = 0,27 \text{ В}, \\ |V_L(\infty)| &= 0 \text{ В}. \end{aligned}$$

### Обговорення

Якби час вимірювання був набагато більшим, ніж постійна часу, ми б не побачили згасання або зростання напруги на котушці індуктивності або резисторі. Схема швидко досягне асимптотичних значень для обох цих значень. Дивіться рис. 4.15. Відзначимо, що напруга швидко досягає постійної напруги за рахунок того, що час шкали вимірювань значно перевищує постійну часу.

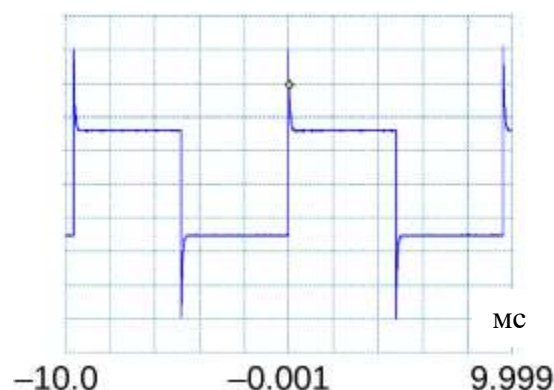


Рис. 4.15. На малюнку показана напруга на резисторі в  $RL$ -контурі

### ПРИКЛАД 4.5. $RL$ -схема без джерела ЕРС

Після того, як струм в  $RL$ -контурі прикладу 4.4 досягне кінцевого значення, положення перемикачів міняються місцями так, що схема стає такою, як показано на рис. 4.12 (b). а) Скільки часу потрібно, щоб струм

впав до половини свого початкового значення? б) скільки часу потрібно, перш ніж енергія, накопичена в котушці індуктивності, зменшиться до 1,0% від його максимального значення?

### Стратегія

Тепер струм у котушці індуктивності зменшуватиметься, оскільки резистор розсіює цю енергію. Тому струм падає за експоненціальним законом. Ми також можемо використовувати цю ж залежність як заміну енергії у формулі індуктивності, щоб знайти, як енергія зменшується через різні проміжки часу.

### Розв'язок

а. При перевернутих перемикачах струм зменшується відповідно до виразу:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau_L}} = I(0)e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

У момент часу  $t$ , коли струм дорівнює половині свого початкового значення, маємо:

$$I(t) = 0,5 I(0).$$

Отже,

$$e^{-\frac{t}{\tau_L}} = 0,5 \text{ с,}$$

і

$$t = -|\ln(0,5)|\tau_L = 0,69(1 \text{ с}) = 0,69 \text{ с,}$$

де ми використали індуктивну постійну часу, знайдену в прикладі 4.4.

б. Енергія, запасена в котушці індуктивності, задається формулою:

$$U_L(t) = \frac{1}{2}L|I(t)|^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)^2 = \frac{L\varepsilon^2}{2R^2}e^{-\frac{2t}{\tau_L}}.$$

Якщо енергія падає до 1,0% від його початкового значення в момент часу  $t$ , тоді маємо:

$$U_L(t) = (0,01) U_L(0),$$

або

$$\frac{L\varepsilon^2}{2R^2}e^{-\frac{2t}{\tau_L}} = (0,01) \frac{L\varepsilon^2}{2R^2}.$$

Скасувавши доданки і взявши натуральний логарифм обох сторін, отримаємо:

$$-\frac{2t}{\tau_L} = \ln 0,01,$$

тобто,

$$t = -\frac{1}{2}\tau_L \ln(0,01).$$

Оскільки  $\tau_L = 1,0$  с, час, необхідний для того, щоб енергія, запасена в котушці індуктивності, зменшилася до 1.0% його початкового значення, тоді:

$$t = -\frac{1}{2}(1 \text{ с}) \ln(0,01) = 2,3 \text{ с.}$$

### Обговорення

Цей розрахунок працює лише в тому випадку, якщо коло має максимальний струм. В іншому випадку ми почнемо з меншого початкового струму, який буде затухати при тому ж співвідношенні.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 4.7

Переконайтеся, що  $RC$  і  $L/R$  мають виміри часу.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 4.8

(а) Якщо струм у колі, зображеному на рис. 4.12 (б), збільшується до 90% від його кінцевого значення через 5,0 с, яка індуктивна постійна часу? б) якщо  $R = 20$  Ом, яке значення індуктивності? (с) Якщо резистор 20 Ом замінюється на резистор 100 Ом, скільки часу потрібно, щоб струм досяг 90% його кінцевої величини?

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 4.9

Для схеми на рис. 4.12 (б) покажіть, що при досягненні стаціонарного стану різниця сумарних енергій, вироблених батареєю і розсіяних в резисторі, дорівнює енергії, запасеної в магнітному полі котушки.

## 4.5. Коливання в $LC$ -контурі

Варто відзначити, що і конденсатори, і котушки індуктивності накопичують енергію, в своєму електричному і магнітному полях, відповідно. Контур, що містить котушку індуктивності ( $L$ ) і конденсатор ( $C$ ), може коливатися без джерела ЕРС, перекидаючи енергію, що зберігається в колі, між електричним і магнітним полями. Таким чином, концепції, які ми розвиваємо в цьому розділі, безпосередньо застосовні до обміну енергією між електричним і магнітним полями в електромагнітних хвилях, або світлі. Почнемо з ідеалізованої схеми нульового опору, що містить котушку індуктивності і конденсатор у  $LC$ -контурі.  $LC$ -схема показана на рис. 4.16. Якщо конденсатор містить заряд  $q_0$  до того, як вимикач буде замкнутий, то вся енергія контуру спочатку запасується в електричному полі конденсатора (рис. 4.16 (а)). Ця енергія дорівнює:

$$U_C = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}. \quad (4.33)$$



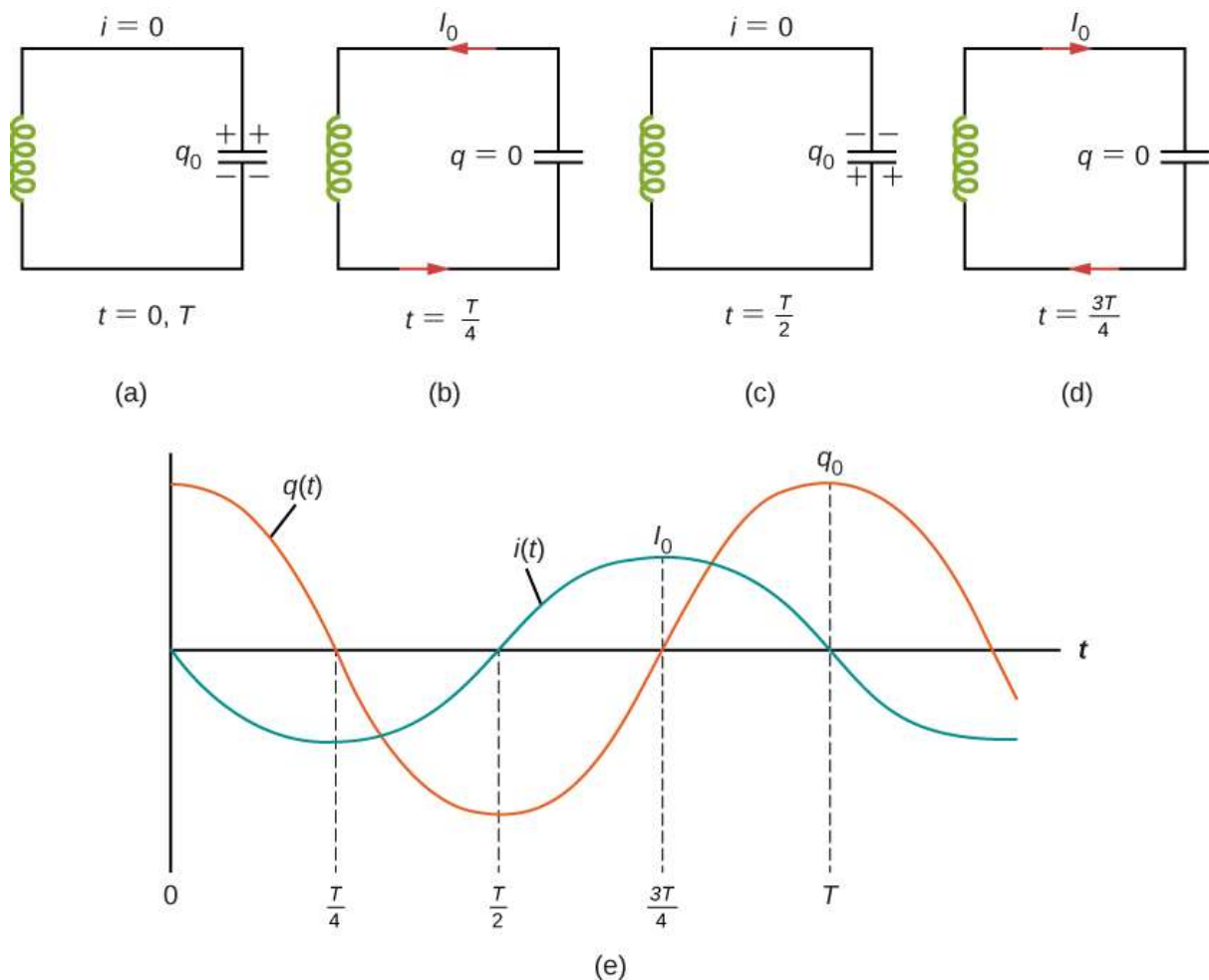


Рис. 4.16. (а–d) Коливання накопиченого заряду зі зміною напрямків струму в  $LC$ -контурі. (е) На графіках показано розподіл заряду і струму між конденсатором і котушкою індуктивності

При замиканні вимикача конденсатор починає розряджатися, виробляючи струм в колі. Струм, в свою чергу, створює магнітне поле в котушці індуктивності. Кінцевим ефектом цього процесу є передача енергії від конденсатора зі зменшенням його електричного поля до котушки індуктивності, зі збільшенням його магнітного поля.

На рис. 4.16 (b) конденсатор повністю розряджений і вся енергія запасється в магнітному полі котушки індуктивності. У цей момент струм має максимальне значення  $I_0$ , а енергія в котушці індуктивності дорівнює:

$$U_L = \frac{1}{2} L I_0^2. \quad (4.34)$$

Оскільки в колі немає опору, енергія не втрачається через нагрів Джоуля. Таким чином, максимальна енергія, запасена в конденсаторі, дорівнює максимальній енергії, запасеній в подальшому в котушці індуктивності:

$$\frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} = \frac{1}{2} L I_0^2. \quad (4.35)$$

У довільний момент часу, коли заряд конденсатора  $q(t)$ , а струм  $i(t)$ , повна енергія  $U$  в колі задається формулою:

$$U = \frac{q^2(t)}{2C} + \frac{Li^2}{2}.$$

Оскільки немає розсіювання енергії, тому

$$U = \frac{q^2(t)}{2C} + \frac{Li^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} = \frac{1}{2} LI_0^2. \quad (4.36)$$

Після досягнення максимуму  $I_0$  струм  $i(t)$  продовжує передавати заряд між пластинами конденсатора, тим самим перезаряджаючи конденсатор. Оскільки котушка індуктивності чинить опір зміні струму, струм продовжує протікати, навіть незважаючи на те, що конденсатор розряджений. Цей безперервний струм змушує конденсатор заряджатися з протилежною полярністю. Електричне поле конденсатора зростає, а магнітне поле котушки індуктивності зменшується, і загальним ефектом є передача енергії від котушки індуктивності назад до конденсатора. Із закону збереження енергії максимальний заряд, який знову набуває конденсатор, дорівнює  $q_0$ . Однак, як показано на рис. 4.16 (с), пластини конденсатора заряджені протилежно тому, що було спочатку.

При повній зарядці конденсатор знову передає свою енергію котушці індуктивності до тих пір, поки вона знову повністю не розрядиться, як показано на рис. 4.16 (е). Потім, в останній частині цього циклічного процесу, енергія надходить назад до конденсатора, і початковий стан контура відновлюється.

Ми простежили за схемою протягом одного повного циклу. Його електромагнітні коливання аналогічні механічним коливанням маси на кінці пружини. В останньому випадку енергія передається туди-сюди між масою, яка має кінетичну енергію  $mv^2/2$ , і пружиною, яка має потенційну енергію  $kx^2/2$ . При відсутності тертя в системі маса-пружина коливання тривали б нескінченно довго. Аналогічно, коливання  $LC$ -контур без опору триватимуть вічно, якщо їх не порушувати; однак ця ідеальна  $LC$ -схема з нульовим опором не є практичною, і будь-яка  $LC$ -схема матиме принаймні невеликий опір, який з часом випромінюватиме та втрачатиме енергію.

Частоту коливань в  $LC$ -контурі без опору можна знайти за аналогією з системою маса-пружина. Для схеми,  $i(t) = dq(t)/dt$ , сумарна електромагнітна енергія  $U$  дорівнює:

$$U = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2}. \quad (4.37)$$

Для системи маса-пружина,  $v(t) = dx(t)/dt$ , повна механічна енергія  $E$  дорівнює:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (4.38)$$

Еквівалентність цих двох систем очевидна. Щоб перейти від механічної до електромагнітної системи, ми просто замінимо  $m$  на  $L$ ,  $v$  на  $i$ ,  $k$  на  $1/C$  і  $x$  на  $q$ . Тепер  $x(t)$  задається формулою:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.39)$$

де  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Отже, заряд конденсатора в  $LC$ -колі задається формулою:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.40)$$

де  $\omega$  – кутова частота коливань в контурі:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (4.41)$$

Нарешті, струм в колі  $LC$  знаходять, взявши похідну за часом від  $q(t)$ :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\omega q_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (4.42)$$

Часові варіації  $q$  і  $I$  показані на рис. 10.16 (е) для  $\varphi = 0$ .

#### ПРИКЛАД 4.6. $LC$ -схема

У  $LC$ -контурі індуктивність дорівнює  $2,0 \times 10^{-2}$  Гн, а ємність дорівнює  $8,0 \times 10^{-6}$  Ф. Коли  $t = 0$  вся енергія накопичується в конденсаторі, який має заряд  $1,2 \times 10^{-5}$  В. а) Яка кутова частота коливань в контурі? б) Який максимальний струм протікає в колі? в) Скільки часу потрібно конденсатору, щоб повністю розрядитися? г) Знайти рівняння, що представляє залежність  $q(t)$ .

#### Стратегія

Кутова частота  $LC$ -контура задається рівнянням 4.41. Для знаходження максимального струму максимальна енергія в конденсаторі встановлюється рівною максимальній енергії в котушці індуктивності. Час, протягом якого конденсатор розряджається, якщо він спочатку заряджений, становить чверть періоду циклу, тому, якщо ми обчислимо період коливань, ми зможемо дізнатися, яка чверть цього часу. Нарешті, знаючи початковий заряд і кутову частоту, ми можемо скласти рівняння для знаходження  $q(t)$ .

#### Розв'язок

а. З рівняння 4.41 випливає, що кутова частота коливань дорівнює:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(3 \times 10^{-2} \text{ Гн})(8 \times 10^{-6} \text{ Ф})}} = 2,5 \times 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

б. Сила струму досягає максимуму  $I_0$  коли вся енергія накопичується в котушці індуктивності. Із закону енергозбереження

$$\frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} = \frac{1}{2} L I_0^2$$

отримуємо:

$$I_0 = \frac{q_0}{\sqrt{LC}} = \left(2,5 \times 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}\right) (1,2 \times 10^{-5} \text{ Кл}) = 3 \times 10^{-2} \text{ А}.$$

Цей результат також можна отримати за аналогією з простим гармонійним рухом, де струм і заряд є швидкістю і положенням генератора.

с. Конденсатор повністю розряджається за одну четверту циклу, або за час  $T/4$ , де  $T$  – період коливань. Оскільки

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2,5 \times 10^3 \text{ рад/с}} = 2,5 \times 10^{-3} \text{ с},$$

час, необхідний для повної розрядки конденсатора, становить:

$$\frac{(2,5 \times 10^{-3} \text{ с})}{4} = 6,3 \times 10^{-4} \text{ с}.$$

д. Конденсатор повністю заряджений коли  $t = 0$ , тобто  $q(0) = q_0$ . Використовуючи рівняння 4.40, отримаємо:

$$q(0) = q_0 = q_0 \cos \varphi.$$

Таким чином  $\varphi = 0$ , і

$$q(t) = (1,2 \times 10^{-5} \text{ Кл}) \cos (2,5 \times 10^3 t).$$

### Обговорення

Енергетичні зв'язки, встановлені в частині (б), не є єдиним способом прирівнювання енергій. У більшості випадків деяка кількість енергії зберігається в конденсаторі, а частина – в котушці індуктивності. Ми можемо помістити обидва доданки в кожену сторону рівняння. Досліджуючи схему тільки тоді, коли на конденсаторі немає заряду або немає струму в котушці індуктивності, спростуємо рівняння енергії.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 4.10

Кутова частота коливань в  $LC$ -контурі дорівнює  $2,0 \times 10^3$  рад/с. (а) Якщо  $L = 0,10$  Гн, чому дорівнює  $C$ ? б) Припустимо, що при  $t = 0$  вся енергія накопичується в котушці індуктивності. Яка величина  $\varphi$ ? (с) Другий ідентичний конденсатор підключений паралельно вихідному конденсатору. Яка кутова частота цього контуру?

### 4.6. RLC-схеми

Коли перемикач замикається в  $RLC$ -контурі, зображеному на рис. 4.17 (а), конденсатор починає розряджатися, і електромагнітна енергія розсіюється резистором зі швидкістю  $I^2 R$ . З  $U$ , заданим рівнянням 4.37, ми маємо:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{q}{c} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} = -I^2 R, \quad (4.43)$$

де  $i$  і  $q$  – залежні від часу функції.

Це зводиться до виразу:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{c} q = 0. \quad (4.44)$$

Це рівняння аналогічно рівнянню:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

що є рівнянням руху для затухаючої системи маса-пружина.

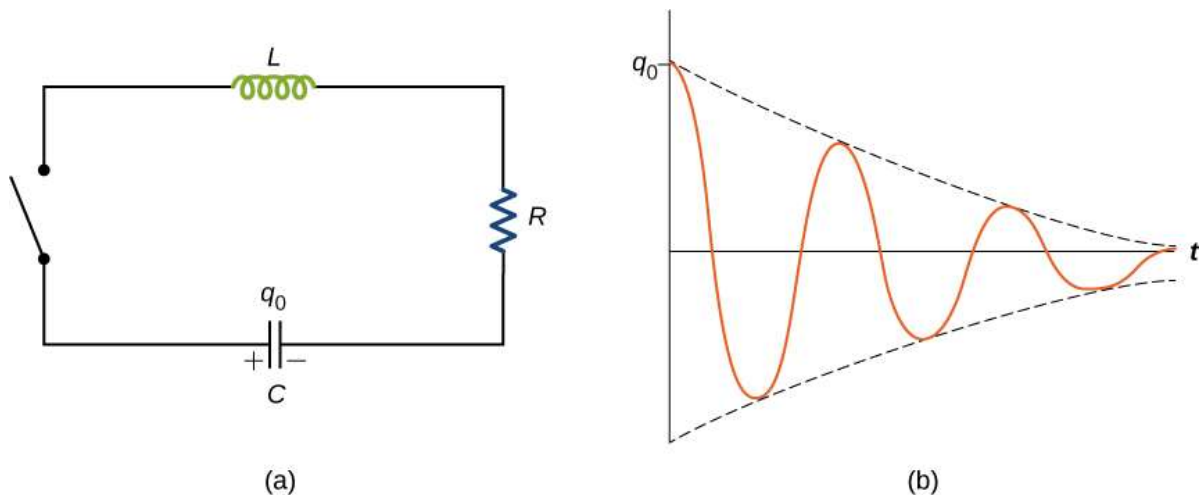


Рис. 4.17. (а)  $RLC$ -схема. Електромагнітні коливання починаються при замиканні вимикача. Конденсатор спочатку повністю заряджений. (б) Затухаючі коливання заряду конденсатора показані на графіку залежності заряду  $q$  від часу  $t$ . Конденсатор містить заряд  $q_0$  до того, як вимикач буде замкнутий

Як ми бачили в цьому розділі, можна показати, що розв'язок цього диференціального рівняння має три форми, залежно від того, чи кутова частота незатухаючої пружини більша, дорівнює або менша за  $b/2m$ . Тому результат може бути таким: ( $\sqrt{k/m} > b/(2m)$ ), таким ( $\sqrt{k/m} = b/(2m)$ ), або таким ( $\sqrt{k/m} < b/(2m)$ ). За аналогією, розв'язок  $q(t)$  диференціального рівняння  $RLC$  має ту саму особливість. Замінивши  $m$  на  $L$ ,  $b$  на  $R$ ,  $k$  на  $1/C$  і  $x$  на  $q$  у рівнянні 4.44 і припустивши, що  $\sqrt{1/LC} > R/2L$ , ми отримуємо:

$$q(t) = q_0 e^{-(R/2L)t} \cos(\omega' t + \varphi), \quad (4.45)$$

де кутова частота коливань задається формулою:

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \quad (4.46)$$

Графік рівняння 4.45 показаний на рис. 4.17 (b). Зверніть увагу, що амплітуда коливань зменшується в міру розсіювання енергії в резисторі. Рівняння 4.45 можна підтвердити експериментально, вимірявши напругу на конденсаторі в залежності від часу. Ця напруга, помножена на ємність конденсатора, дає  $q(t)$ .

#### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 4.11

У схемі  $RLC$   $L = 5,0$  мГн,  $C = 6,0$  мкФ, і  $R = 200$  Ом. а) Чи є коло недостатньо демпфованим, критично демпфованим або надмірно сдемпфованим? б) якщо в колі починає коливатися заряд  $3,0 \times 10^{-3}$  Кл скільки енергії на конденсаторі буде розсіяно в резисторі до моменту припинення коливань?

## КОЛА ЗМІННОГО СТРУМУ

### ВВЕДЕННЯ



Рис. 5.1. Струм, який ми споживаємо, є змінним струмом. Лінії електропередач передають змінний струм до наших районів, де місцеві електростанції та трансформатори розподіляють його по наших будинках. У цьому розділі ми обговорюємо, як працює трансформатор і як він дозволяє нам передавати енергію при дуже високій напрузі та мінімальних втратах на нагрівання по лініях

Електроенергія доставляється в наші будинки змінним струмом (АС) через високовольтні лінії електропередач. Як пояснюється в розділі «Трансформатори», трансформатори можуть змінювати амплітуду змінної різниці потенціалів на більш корисну форму. Це дозволяє нам передавати енергію при дуже високій напрузі, мінімізуючи резистивні втрати на нагрівання в лініях, а потім постачати цю енергію в будинки з нижчою та безпечнішою напругою. Оскільки трансформатори не впливають на постійну різницю потенціалів, цю здатність важче досягти за допомогою передачі постійного струму.

У цій главі ми використовуємо закони Кірхгофа для аналізу чотирьох простих електричних кіл, в яких протікає змінний струм. Ми обговорили використання резистора, конденсатора і котушки індуктивності в схемах з акумуляторами. Ці компоненти також входять до складу електричних кіл змінного струму. Однак, оскільки потрібен змінний струм, постійне джерело ЕРС, що подається батареєю, замінюється джерелом змінної напруги, яке створює коливальну ЕРС.

## 5.1. Джерела змінного струму

Більшість прикладів, розглянутих у цій книзі, особливо ті, що використовують акумулятори, мають джерела постійної напруги. Таким чином, після того, як струм встановлений, він постійний. **Постійний струм (DC)** – це потік електричного заряду тільки в одному напрямку. Це стаціонарний стан кола постійної напруги.

Однак більшість відомих застосувань використовують джерело напруги, що змінюється в часі. **Змінний струм (AC)** – це потік електричного заряду, який періодично змінює напрямок. Змінний струм виробляється змінною ЕРС, яка генерується в електростанції, як описано в розділі “Індуковані електричні поля”. Якщо джерело змінного струму періодично змінюється, особливо синусоїдально, схему називають колом змінного струму. Прикладами є комерційна та житлова електроенергія, яка обслуговує так багато наших потреб.

Напруга та частота змінного струму, які зазвичай використовуються на підприємствах і в будинках, різняться в різних країнах світу. У типовому будинку різниця потенціалів між двома сторонами електричної розетки чергується синусоїдально з частотою 60 або 50 Гц і амплітудою 170 або 311 В, залежно від того, чи живете ви в Сполучених Штатах чи Європі відповідно. Більшість людей знають, що різниця потенціалів для електричних розеток становить 120 В або 220 В у США чи Європі, але, як пояснюється далі в розділі, ці напруги не є піковими значеннями, наведеними тут, а скоріше пов'язані із загальною напругою, яку ми бачимо в наших електричних розетках. На рис. 5.2 показані графіки залежності напруги і струму від часу для типової потужності постійного і змінного струму в США.

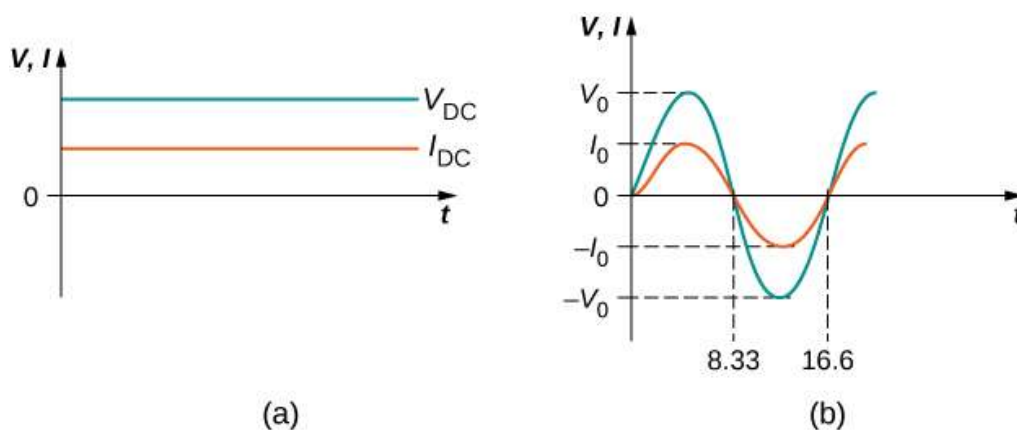


Рис. 5.2 (а) Напруга і струм постійного струму є постійними в часі після встановлення струму. (б) Напруга та струм у залежності від часу значно відрізняються для мережі змінного струму. У цьому прикладі, який показує змінний струм 60 Гц і час  $t$  в мілісекундах, напруга і струм є синусоїдальними і знаходяться в фазі для простого електричного кола

Частоти і пікові напруги джерел змінного струму сильно відрізняються. Припустимо, ми підключаємо резистор до джерела змінної напруги і визначаємо, як напруга і струм змінюються в часі на резисторі. На рис. 5.3 показана схема з джерелом напруги змінного струму.

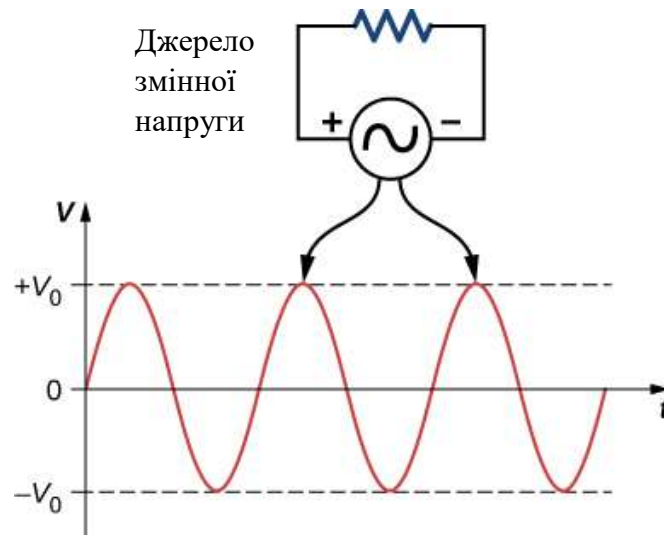


Рис. 5.3. Різниця потенціалів  $V$  між клемми джерела змінної напруги коливається, тому джерело і резистор мають синусоїдальні хвилі змінного струму. Математичний вираз для  $V$  задається формулою  $V = V_0 \sin \omega t$

Напруга коливається синусоїдально з часом на фіксованій частоті, як показано на малюнку, або на клеммах акумулятора, або на резисторі. Таким чином, **напруга змінного струму**, або «напруга на вилці», може бути задана так:

$$V = V_0 \sin \omega t, \quad (5.1)$$

де  $V$  – напруга в момент часу  $t$ ,  $V_0$  – пікова напруга, а  $\omega$  — кутова частота в радіанах за секунду. Для типового будинку в Сполучених Штатах,  $V_0 = 170$  В і  $\omega = 120\pi$  рад/с, тоді як у Європі  $V_0 = 311$  В і  $\omega = 100\pi$  рад/с.

Для цієї простої схеми з опором,  $I = V/R$ , отже, **змінний струм**, тобто струм, який синусоїдально коливається з часом на фіксованій частоті, дорівнює:

$$i = I_0 \sin \omega t, \quad (5.2)$$

де  $i$  – струм в момент часу  $t$  і  $I_0$  є піковим струмом і дорівнює  $V_0/R$ . У цьому прикладі кажуть, що напруга і струм знаходяться в фазі, що означає, що їх синусоїдальні функціональні форми мають піки, западини і вузли в одному і тому ж місці. Вони коливаються синхронно один з одним, як показано на рис. 5.2 (b). У цих рівняннях, а також у цьому розділі, ми використовуємо малі літери (наприклад,  $i$ ) для позначення миттєвих значень і великі літери (наприклад,  $I$ ) для позначення максимальних, або пікових, значень.

Струм в резисторі чергується туди-сюди так само, як і керуюча напруга, оскільки  $I = V/R$ . Наприклад, якщо резистором є люмінесцентна



лампочка, він яскравішає і тьмяніє 120 разів на секунду, оскільки струм багаторазово проходить через нуль. Мерехтіння частотою 120 Гц занадто швидко для ваших очей, але якщо ви проведете рукою вперед і назад між обличчям і флуоресцентним світлом, ви побачите стробоскопічний ефект змінного струму.

## ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 5.1

Якщо розглядати європейське джерело змінної напруги, то яка різниця в часі між перетинами нуля на графіку змінної напруги та часу?

## 5.2. Прості кола змінного струму

У цьому розділі ми розглянемо прості моделі джерел змінної напруги, підключених до трьох компонентів схеми: (1) резистора, (2) конденсатора і (3) котушки індуктивності. Потужність, що подається джерелом змінної напруги, має ЕРС, задану функцією:

$$v(t) = V_0 \sin \omega t,$$

як показано на рис. 5.4.

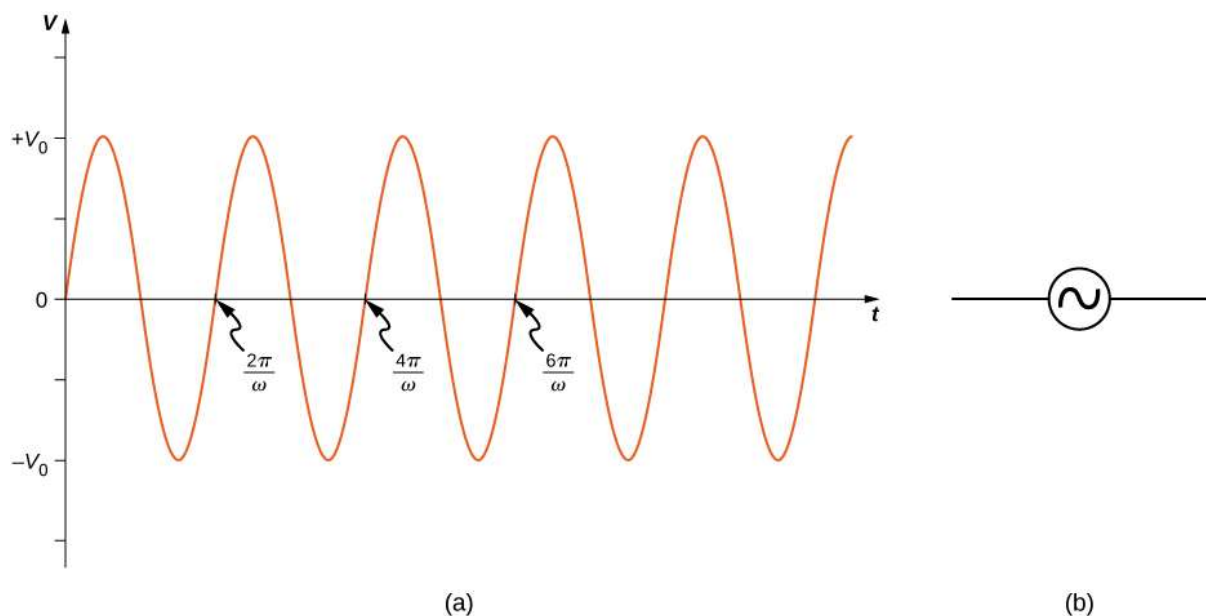


Рис. 5.4. (а) Вихідні дані  $v(t) = V_0 \sin \omega t$  генератора змінного струму. (б) Символ, що використовується для позначення джерела змінної напруги на електричній схемі

Ця синусоїдальна функція передбачає, що ми починаємо записувати напругу, коли  $v = 0$  В, а  $t = 0$  с. Може бути задіяна фазна константа, яка зсуває функцію, коли ми починаємо вимірювати напруги, подібно до фазової постійної у хвилях, які ми вивчали. Однак, оскільки ми вільні вибирати, коли починаємо досліджувати напругу, ми можемо поки що

ігнорувати цю фазову константу. Ми можемо виміряти цю напругу в компонентах схеми за допомогою одного з двох методів: (1) кількісного підходу, заснованого на наших знаннях про схеми, або (2) графічного підходу, який буде пояснено в наступних розділах.

## Резистор

Спочатку розглянемо резистор, підключений до джерела змінної напруги. З правила петлі Кірхгофа миттєва напруга на резисторі рис. 5.5 (а) дорівнює:

$$v_R(t) = V_0 \sin \omega t,$$

а миттєвий струм через резистор дорівнює:

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{V_0}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t.$$

Тут  $I_0 = V_0/R$  – амплітуда струму, що змінюється в часі. Графіки  $i_R(t)$  і  $v_R(t)$  показані на рис. 5.5 (b). Обидві криві досягають своїх максимумів і мінімумів одночасно, тобто струм і напруга на резисторі знаходяться в однаковій фазі.

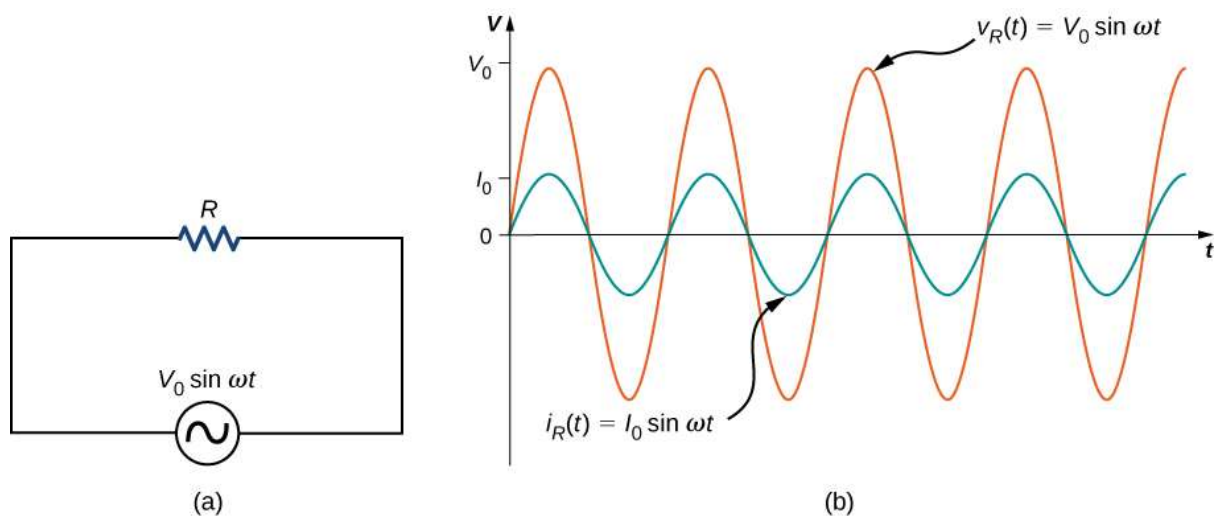


Рис. 5.5. (а) Резистор, підключений через джерело змінної напруги. (b) Поточні  $i_R(t)$  і напруга  $v_R(t)$  на резисторі. Ці дві величини знаходяться в однаковій фазі

Графічні зображення фазових співвідношень між струмом і напругою часто корисні при аналізі кіл змінного струму. Такі уявлення називаються *фазними діаграмами*. Фазна діаграма для  $i_R(t)$  показано на рис. 5.6 (а), при цьому струм знаходиться на вертикальній осі. Стрілка обертається проти годинникової стрілки з постійною кутовою частотою  $\omega$ , отже, ми розглядаємо його в один момент часу. Якщо довжина стрілки відповідає

амплітуді струму  $I_0$ , проекція обертової стрілки на вертикальну вісь дорівнює  $i_R(t) = I_0 \sin \omega t$ , який є миттєвим струмом.

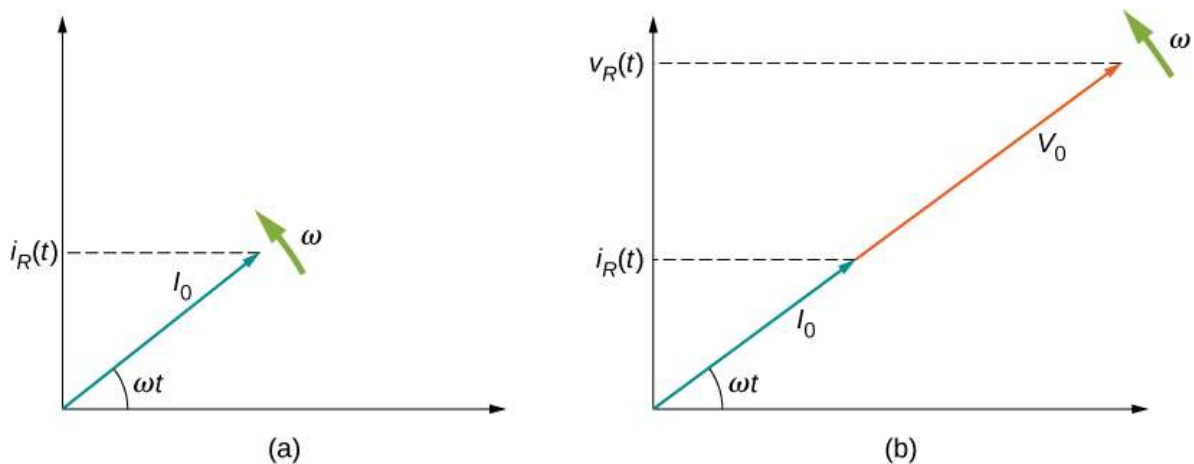


Рис. 5.6. (а) Фазова діаграма, що зображує струм через резистор на рис. 5.5. (б) Фазова діаграма, що відображає одночасно  $i_R(t)$  і  $v_R(t)$

Вертикальна вісь на фазовій діаграмі може бути як напругою, так і струмом, залежно від фази, яка досліджується. Крім того, на одній і тій же фазній діаграмі може бути зображено кілька величин. Наприклад, як поточні  $i_R(t)$  і напруга  $v_R(t)$  показані на схемі рис. 11.6 (b). Оскільки вони мають однакову частоту і знаходяться в фазі, то їх фази вказують в одному напрямку і обертаються разом. Відносні довжини двох стрілок-векторів довільні, оскільки вони представляють різні величини; однак відношення довжин двох векторів можна представити опором, оскільки один є фазою напруги, а інший – фазою струму.

## Конденсатор

Тепер розглянемо конденсатор, підключений до джерела змінної напруги. З правила петлі Кірхгофа миттєва напруга на конденсаторі рис. 5.7 (а) дорівнює:

$$v_C(t) = V_0 \sin \omega t.$$

Нагадаємо, що заряд в конденсаторі дається виразом  $Q = CV$ . Це справедливо в будь-який момент часу, виміряний в циклі змінного струму напруги. Отже, миттєвий заряд конденсатора становить:

$$q(t) = v_C(t) = CV_0 \sin \omega t.$$

Оскільки струм в колі – це швидкість, з якою заряд входить (або виходить) в конденсатор, тоді

$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \omega CV_0 \cos \omega t = I_0 \cos \omega t,$$

де  $I_0 = \omega CV_0$  – амплітуда струму.

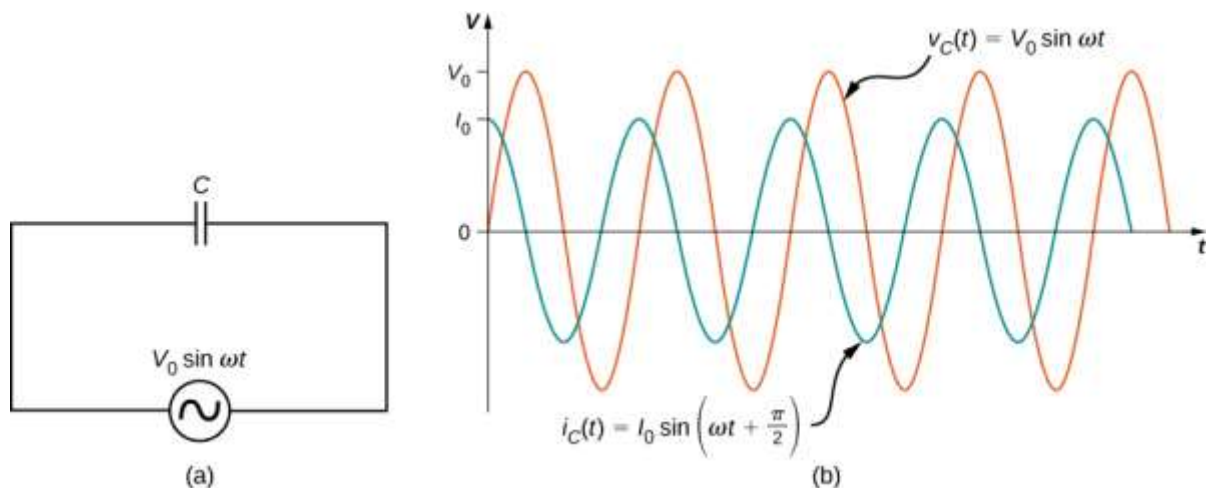


Рис. 5.7. (а) Конденсатор, підключений через генератор змінного струму. (б) Поточні  $i_C(t)$ , що тече через конденсатор, і напруга  $v_C(t)$  на конденсаторі. Зверніть увагу, що  $i_C(t)$  випереджає  $v_C(t)$  на  $\pi/2$

Завдяки використанню тригонометричної залежності  $\cos \omega t = \sin(\omega t + \pi/2)$ , миттєвий струм можна виразити у вигляді:

$$i_C(t) = I_0 \sin(\omega t + \pi/2).$$

Поділивши  $V_0$  на  $I_0$ , отримаємо рівняння, схоже на закон Ома:

$$\frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C} = X_C. \quad (5.3)$$

Величина  $X_C$  є аналогом опору в колі постійного струму в тому сенсі, що обидві величини є відношенням напруги до струму. В результаті вони мають одну і ту ж одиницю вимірювання – Ом. Однак майте на увазі, що конденсатор накопичує і розряджає електричну енергію, тоді як резистор розсіює її. Величина  $X_C$  відома як **ємнісний опір** конденсатора, або опір конденсатора зміні струму. Вона обернено залежить від частоти джерела змінного струму — висока частота призводить до низького ємнісного опору.

Порівняння виразів для  $v_C(t)$  і  $i_C(t)$  показує, що існує різниця фаз у  $\pi/2$  рад між ними. Коли ці дві величини складаються разом, струм досягає піку в чверть циклу (або  $\pi/2$  рад) перед напругою, як показано на рис. 5.7 (б). Струм через конденсатор передує напругу на конденсаторі на  $\pi/2$  рад, або чверть циклу. Відповідна фазова діаграма наведена на рис. 5.8. Тут взаємозв'язок між  $i_C(t)$  і  $v_C(t)$  представлено тим, що їх вектори обертаються з однаковою кутовою частотою, при цьому поточний вектор  $i_C(t)$  випереджає  $v_C(t)$  на  $\pi/2$  рад.

До цього моменту ми використовували в нашому обговоренні виключно пікові значення струму або напруги, а саме:  $I_0$  і  $V_0$ . Однак, якщо усереднити значення струму або напруги, то ці значення дорівнюють нулю. Тому ми використовуємо іншу угоду, яку називають середньоквадратичним значенням струму та напруги.

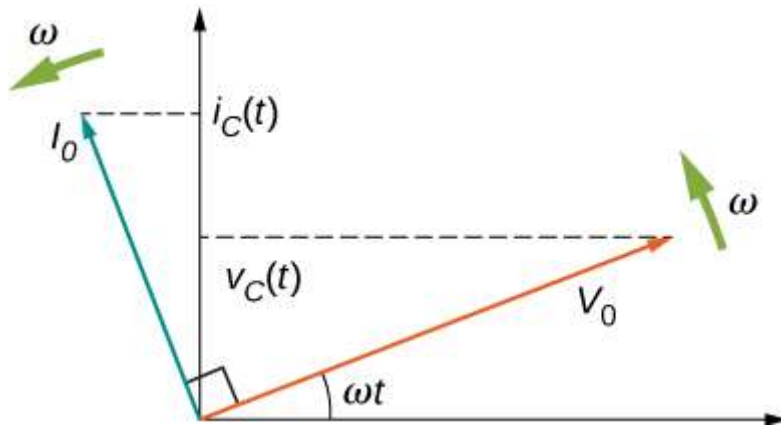


Рис. 5.8. Фазова діаграма конденсатора на рис. 5.7. Вектор струму випереджає вектор напруги на  $\pi/2$  рад, оскільки вони обидва обертаються з однаковою кутовою частотою

Спочатку зводимо функцію в квадрат, потім беремо середнє значення, а потім знаходимо квадратний корінь. В результаті середньоквадратичні значення струму і напруги не дорівнюють нулю. Прилади та пристрої зазвичай вказуються з середньоквадратичними значеннями їх роботи, а не з піковими значеннями. Ми вказуємо середньоквадратичні значення нижнім індексом, прикріпленим до великої літери (наприклад,  $I_{\text{сф}}$ ).

Хоча конденсатор розмикає коло, **середньоквадратичний струм**, або середній квадрат струму, з'являється в колі з напругою змінного струму, прикладеною до конденсатора. Враховуємо, що

$$I_{\text{скз}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad (5.4)$$

де  $I_0$  — піковий струм у системі змінного струму.

**Середньоквадратична напруга**, або середньоквадратичне значення напруги, дорівнює:

$$V_{\text{скз}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}, \quad (5.5)$$

де  $V_0$  — пікова напруга в системі змінного струму.

Середньоквадратичне значення струму з'являється тому, що напруга постійно змінюється на протилежну, заряджає і розряджає конденсатор. Якщо частота йде до нуля, тоді отримуємо напругу постійного струму,  $X_C$  прямує до нескінченності, а струм дорівнює нулю, коли конденсатор заряджений. На дуже високих частотах реактивний опір конденсатора  $X_C$  прямує до нуля — він має незначний реактивний опір і не перешкоджає струму (діє як простий провід).

### Котушка індуктивності

Нарешті, розглянемо котушку індуктивності, підключену до джерела змінної напруги. За правилом петлі Кірхгофа напруга на котушці індуктивності  $L$  на рис. 5.9 (а) дорівнює:

$$v_L(t) = V_0 \sin \omega t. \quad (11.6)$$

ЕРС на котушці індуктивності дорівнює  $\varepsilon = -L(di_L/dt)$ . Отже, різниця потенціалів на котушці індуктивності становить  $v_L(t) = L[di_L(t)/dt]$ . Якщо врахувати, що напруга навколо контуру має дорівнювати нулю, тоді напруга, отримана від джерела змінного струму, повинна розсіюватися через котушку індуктивності. Тому, з'єднавши його з джерелом змінної напруги, ми маємо:

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{V_0}{L} \sin \omega t.$$

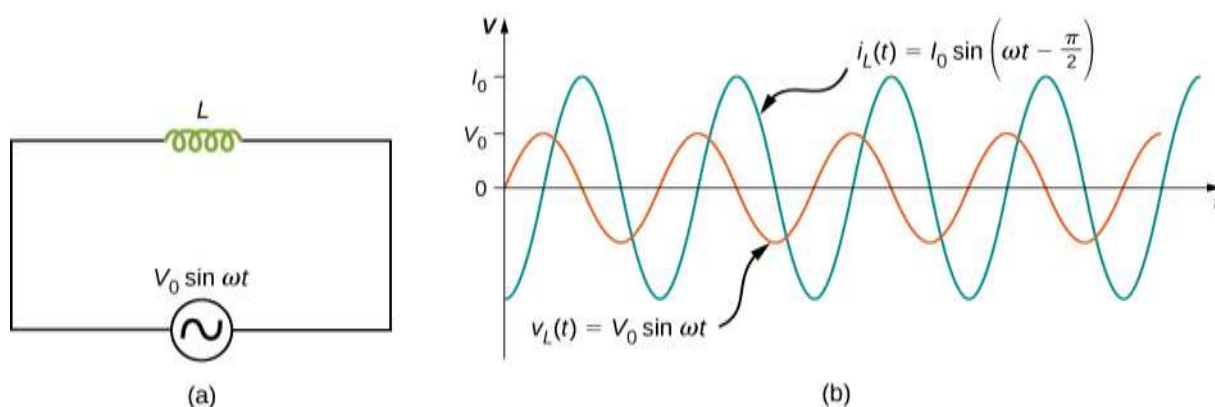


Рис. 5.9 (а) Котушка індуктивності, підключена через генератор змінного струму. (б) поточні  $i_L(t)$  через котушку індуктивності і напруга  $v_L(t)$  на котушці індуктивності. Тут  $i_L(t)$  відстає від  $v_L(t)$  на  $\pi/2$  рад

Поточні  $i_L(t)$  знаходять шляхом інтегрування цього рівняння. Оскільки схема не містить джерела постійної ЕРС, то і сталого струму в колі немає. Отже, ми можемо встановити константу інтегрування, яка представляє собою постійний струм в колі, рівний нулю, після чого маємо:

$$i_L(t) = -\frac{V_0}{\omega L} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = I_0 \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad (5.7)$$

де  $I_0 = V_0/\omega L$ . Взаємозв'язок між  $V_0$  і  $I_0$  також може бути записаний у формі, аналогічній закону Ома:

$$\frac{V_0}{I_0} = \omega L = X_L. \quad (5.8)$$

Величина  $X_L$  відома як **індуктивний опір** котушки індуктивності, або опір котушки індуктивності зміні струму; його одиницею також є Ом. Значимо, що  $X_L$  змінюється безпосередньо в залежності від частоти джерела змінного струму – висока частота викликає високий індуктивний опір.

Різниця фаз  $\pi/2$  рад виникає між струмом і напругою на котушці індуктивності. З рівняння 5.6 і рівняння 5.7 струм через котушку індуктивності відстає від різниці потенціалів на котушці індуктивності на  $\pi/2$  рад, або чверть циклу. Векторна діаграма для цього випадку наведена на рис. 5.10.

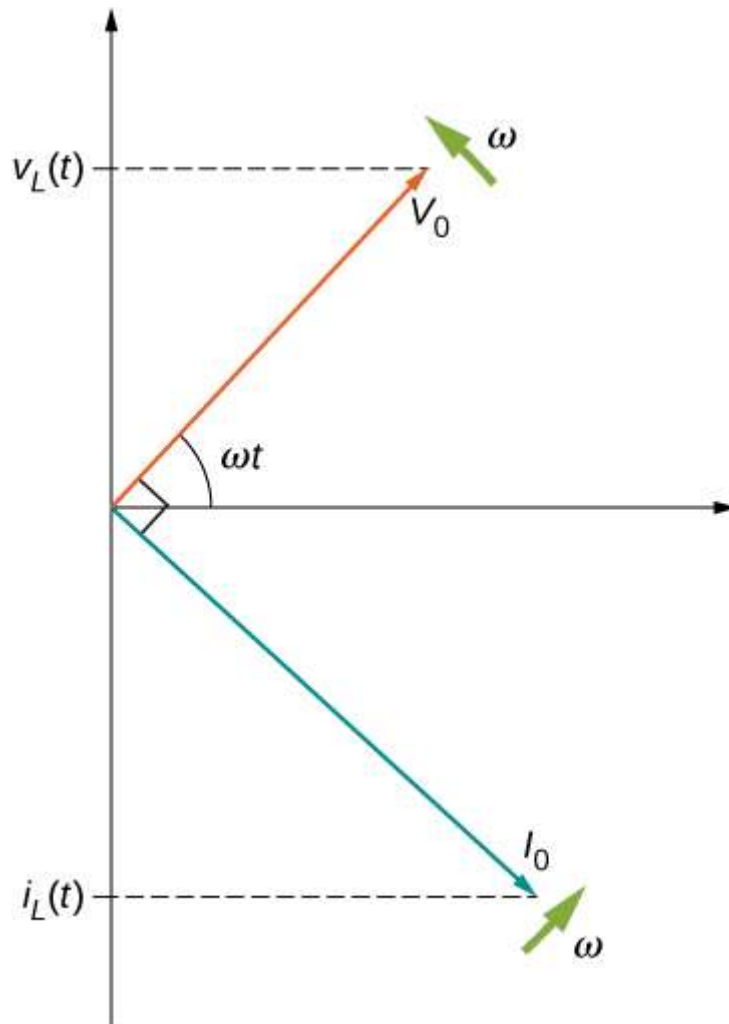


Рис. 5.10. Фазова діаграма для котушки індуктивності рис. 5.9. Вектор струму відстає від фази напруги на  $\pi/2$  рад, оскільки вони обидва обертаються з однаковою кутовою частотою.

### ПРИКЛАД 5.1. Прості кола змінного струму

Генератор змінного струму виробляє ЕРС амплітудою 10 В на частоті  $f = 60$  Гц. Визначте напругу та струми через елементи електричного кола при підключенні генератора до (а) 100 Ом резистора, (б) 10 мкФ конденсатора і (в) котушки індуктивності 15 мГн.

#### Стратегія

Вся напруга змінного струму на кожному пристрої така ж, як і напруга джерела. Ми можемо знайти струми, знайшовши реактивний опір  $X$  кожного елемента, а потім піковий струм за допомогою виразу  $I_0 = V_0/X$ .

#### Розв'язок

Напруга на клеммах джерела становить:

$$v(t) = V_0 \sin \omega t = (10 \text{ В}) \sin (120 \pi t),$$

де  $\omega = 2\pi f = 120\pi$  рад/с – кутова частота. Оскільки  $v(t)$  також є напругою на кожному з елементів, ми маємо:

$$v(t) = v_R(t) = v_C(t) = v_L(t) = (10 \text{ В}) \sin(120 \pi t).$$

а. Коли  $R = 100$  Ом, амплітуда струму через резистор дорівнює:

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{10 \text{ В}}{100 \text{ Ом}} = 0,1 \text{ А},$$

$$i_R(t) = (0,1 \text{ А}) \sin(120 \pi t).$$

б. З рівняння 11.3 ємнісний опір дорівнює:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(120 \pi \text{ рад/с})(10 \times 10^{-6} \text{ Ф})} = 265 \text{ Ом}.$$

Отже, максимальне значення струму становить

$$I_0 = \frac{V_0}{X_C} = \frac{10 \text{ В}}{265 \text{ Ом}} = 3,8 \times 10^{-2} \text{ А},$$

а миттєвий струм задається формулою:

$$i_C(t) = (3,8 \times 10^{-2} \text{ А}) \sin\left(120 \pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

в. З рівняння 5.8 індуктивний опір дорівнює:

$$\frac{X_L}{I_0} = \omega L = (120 \pi \text{ рад/с})(15 \times 10^{-3} \text{ Гн}) = 5,7 \text{ Ом}.$$

Отже, максимальний струм становить:

$$I_0 = \frac{10 \text{ В}}{5,7 \text{ Ом}} = 1,8 \text{ А},$$

а миттєвий струм дорівнює:

$$i_L(t) = (1,8 \text{ А}) \sin\left(120 \pi t - \frac{\pi}{2}\right).$$

## Обговорення

Хоча напруга на кожному пристрої однакова, піковий струм має різні значення, залежно від реактивного опору. Реактивний опір для кожного пристрою залежить від значень опору, ємності або індуктивності.

## ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 5.2

Повторіть приклад 5.1 для джерела змінного струму амплітудою 20 В і частотою 100 Гц.

### 5.3. RLC-схеми зі змінним струмом

Схема зі змінним струмом, показана на рис. 5.11, яку називають RLC-схемою, є послідовною комбінацією резистора, конденсатора і котушки індуктивності, з'єднаних через джерело змінного струму. Воно виробляє ЕРС:

$$v(t) = V_0 \sin \omega t.$$



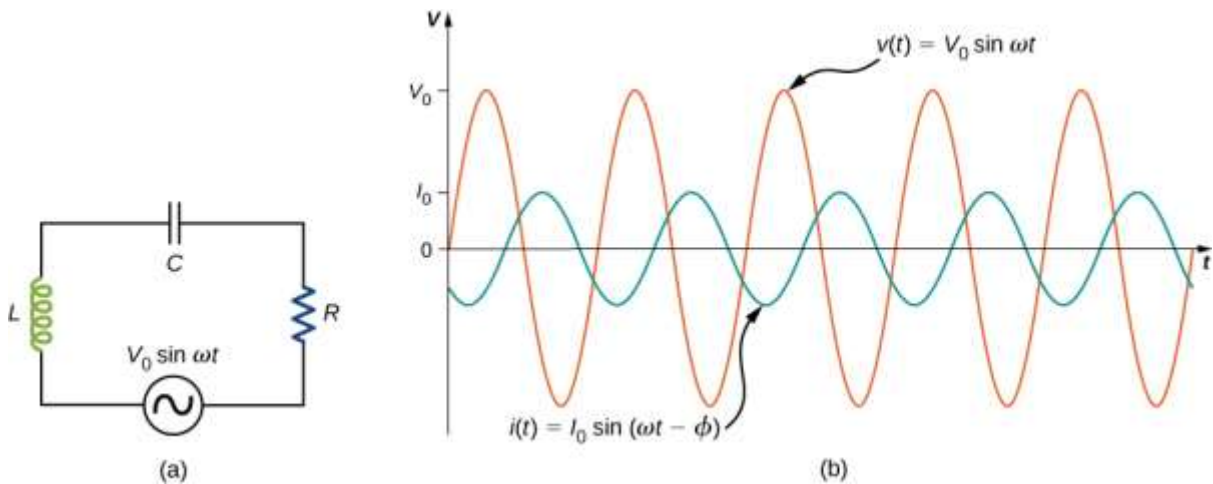


Рис. 5.11 (а)  $RLC$ -схема. (б) Порівняння вихідної напруги генератора та струму. Величина різниці фаз  $\phi$  залежить від значень  $R$ ,  $C$  і  $L$

Оскільки елементи знаходяться послідовно, то через кожен елемент в усі моменти часу протікає один і той же струм. Відносна фаза між струмом і ЕРС не очевидна при наявності всіх трьох елементів. Отже, представляємо струм загальним виразом:

$$i(t) = I_0 \sin(\omega t - \phi).$$

де  $I_0$  – амплітуда струму і  $\phi$  – **фазовий кут** між струмом і прикладеною напругою. Таким чином, фазовий кут – це величина, на яку напруга і струм відрізняються по фазі в електричному колі. Наше завдання – знайти  $I_0$  і  $\phi$ .

Векторна діаграма за участю  $i(t)$ ,  $v_R(t)$ ,  $v_C(t)$  і  $v_L(t)$  корисна для аналізу схеми. Як показано на рис. 5.12, вектор, що представляє собою  $v_R(t)$ , вказує в тому ж напрямку, що і вектор для  $i(t)$ ; його амплітуда становить  $V_R = I_0 R$ .

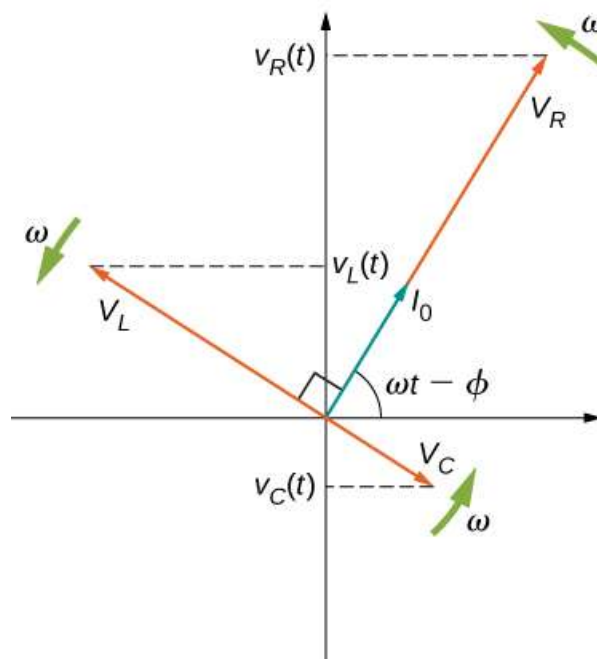


Рис. 5.12. Фазова діаграма для  $RLC$ -схеми на рис. 4.11

Вектор  $v_C(t)$  відстає за фазою від  $i(t)$  на  $\pi/2$  рад і має амплітуду  $V_C = I_0 X_C$ . Вектор  $v_L(t)$  випереджає вектор  $i(t)$  на  $\pi/2$  рад і має амплітуду  $V_L = I_0 X_L$ .

У будь-який момент часу падіння напруги на ділянці  $RLC$  становить  $v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v(t)$ . Тобто дорівнює ЕРС джерела. Оскільки, наприклад, компонента суми векторів є сумою компонент окремих векторів, тоді  $(A+B)_y = A_y + B_y$  — проекція векторної суми векторів на вертикальну вісь є сумою вертикальних проекцій окремих фаз.

Отже, якщо ми додамо векторно вектори, що представляють  $v_R(t)$ ,  $v_L(t)$  і  $v_C(t)$ , а потім знайдемо проекцію результуючої на вертикальну вісь, то отримуємо:

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v(t) = V_0 \sin \omega t.$$

Векторна сума векторів наведена на рис. 5.13.

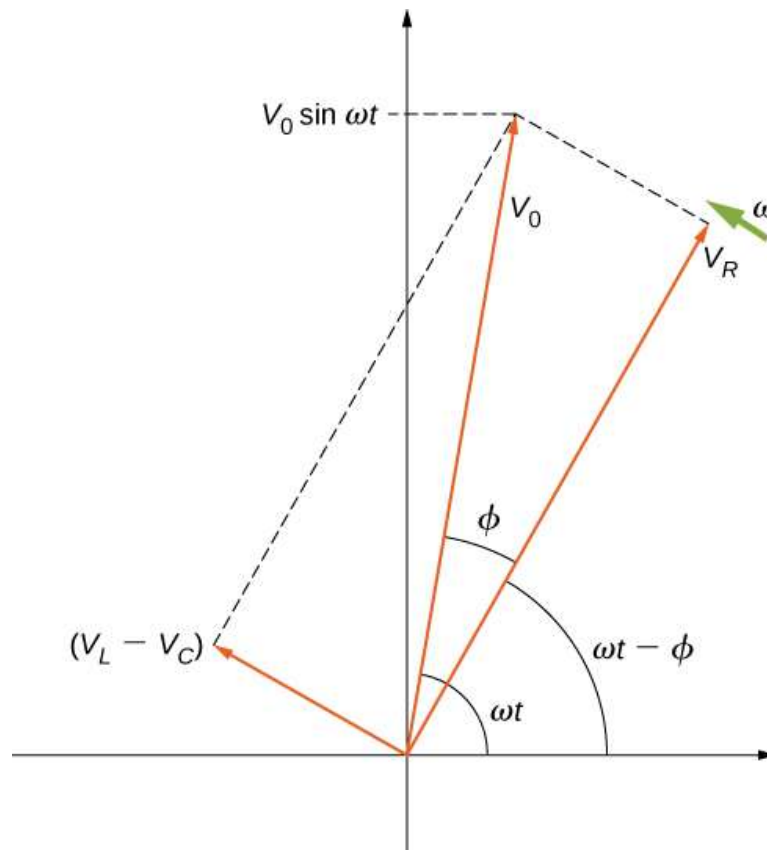


Рис. 5.13. Результуючий вектор, складений з векторів  $v_L(t)$ ,  $v_C(t)$  і  $v_R(t)$  дорівнює  $v(t) = V_0 \sin \omega t$ . Вектор  $i(t)$  (не показаний), напрямлений вздовж вектора  $v_R(t)$

Результуючий вектор має амплітуду  $V_0$  і спрямований під кутом  $\phi$  по відношенню до  $v_R(t)$ , або  $i(t)$  вектору. Проекція цього результуючого вектора на вертикальну вісь має вигляд  $v(t) = V_0 \sin \omega t$ .

Ми можемо легко визначити невідомі величини  $I_0$  і  $\phi$  з геометрії векторної діаграми. Для фазового кута

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{V_L - V_C}{V_R}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{I_0 X_L - I_0 X_C}{I_0 R}\right),$$

і після скасування  $I_0$ , це стає рівним:

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right). \quad (4.9)$$

Крім того, з теореми Піфагора,

$$V_0 = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = \sqrt{(I_0 R)^2 + (I_0 X_L - I_0 X_C)^2} = I_0 \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Амплітуда струму, таким чином, є варіантом закону Ома для змінного струму:

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{V_0}{Z}. \quad (5.10)$$

де

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (5.11)$$

називається **імпедансом** кола. Його одиницею є Ом, а це аналог опору змінного струму в колі постійного струму, який вимірює сумарний вплив резистивного опору, ємнісного опору та індуктивного опору (рис. 5.14).



Рис. 5.14. Силові конденсатори служать для врівноваження опору ефективної індуктивності в лініях електропередачі

*RLC*-схема аналогічна колесу автомобіля, що їде по рифленій дорозі (рис. 5.15). Регулярно розташовані нерівності на дорозі рухають колесо вгору і вниз; таким же чином збільшується і зменшується джерело напруги.

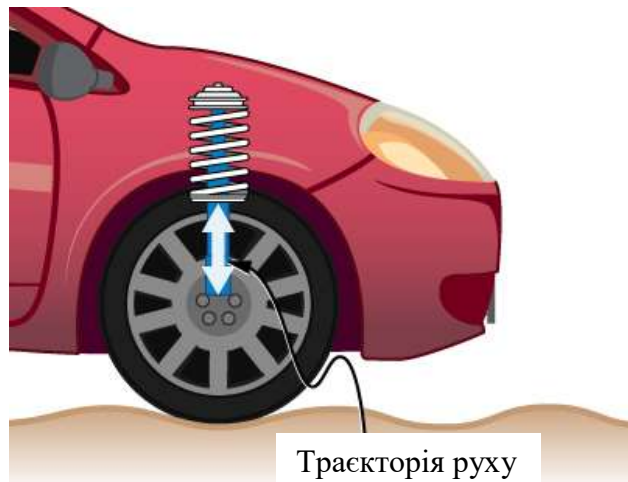


Рис. 5.15 На автомобілі амортизатор гасить рух і розсіює енергію. Це схоже на опір у  $RLC$ -колі. Маса і пружина визначають резонансну частоту

Амортизатор діє як опір кола  $RLC$ , гасячи і обмежуючи амплітуду коливань. Енергія в колісній системі змінюється вперед і назад між кінетичною і потенційною енергією, накопиченою в пружині автомобіля, аналогічно зсуву між максимальним струмом, з енергією, що зберігається в котушці індуктивності, і відсутністю струму, з енергією, накопиченою в електричному полі конденсатора. Амплітуда руху колеса є максимальною, якщо удари по нерівностях дороги здійснюються на резонансній частоті

### ПРИКЛАД 5.2. $RLC$ -схема

Вихід генератора змінного струму, підключеного до комбінації  $RLC$ , має частоту 200 Гц і амплітуду 0,100 В. Якщо  $R = 4,00$  Ом,  $L = 3,00 \times 10^{-3}$  Гн, і  $C = 8,00 \times 10^{-4}$  Ф, який (а) ємнісний опір, (б) індуктивний опір, (в) імпеданс, (г) амплітуда струму і (д) різниця фаз між струмом і ЕРС генератора?

### Стратегія

Реактивний опір і імпеданс в (а)-(в) знаходять підстановками в рівняння 5.3, рівняння 5.8 і рівняння 5.11, відповідно. Амплітуда струму обчислюється виходячи з пікової напруги та імпедансу. Різниця фаз між струмом і ЕРС обчислюється як арктангенс різниці реактивних опорів, поділеної на опір.

### Розв'язок

а. З рівняння 5.3 ємнісний опір дорівнює:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi(200 \text{ Гц})(8 \times 10^{-4} \text{ Ф})} = 0,995 \text{ Ом.}$$

б. З рівняння 5.8 індуктивний опір дорівнює

$$X_L = \omega L = 2\pi(200 \text{ Гц})(3 \times 10^{-3} \text{ Гн}) = 3,77 \text{ Ом.}$$

в. Підставляючи значення  $R$ ,  $X_C$  і  $X_L$  в рівняння 5.11, отримуємо для імпедансу:

$$Z = \sqrt{(4 \text{ Ом})^2 + (3,77 \text{ Ом} - 0,955 \text{ Ом})^2} = 4,87 \text{ Ом}.$$

г. Амплітуда струму дорівнює:

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{0,1 \text{ В}}{4,87 \text{ Ом}} = 2,05 \times 10^{-2} \text{ А}.$$

д. З рівняння 5.9 випливає, що різниця фаз між струмом і ЕРС дорівнює:

$$\phi = \arctg\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \arctg\frac{2,77 \text{ Ом}}{4 \text{ Ом}} = 0,607 \text{ рад}.$$

### Обговорення

Фазовий кут позитивний, оскільки реактивний опір котушки індуктивності більший за реактивний опір конденсатора.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 5.3

Знайдіть напругу на резисторі, конденсаторі та котушці індуктивності в схемі рис. 5.11, якщо  $v(t) = V_0 \sin \omega t$  на виході генератора змінного струму.

### 5.4. Живлення в колі змінного струму

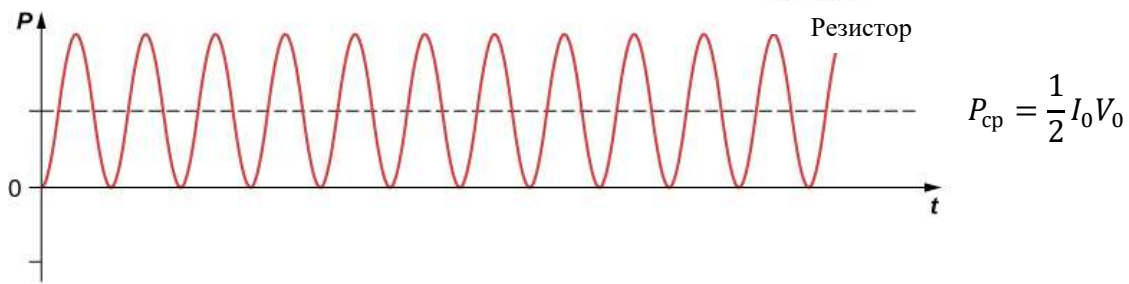
Елемент схеми розсіює або виробляє потужність  $P = IV$ , де  $I$  – струм, що тече через елемент, а  $V$  – напруга на ньому. Оскільки  $i$  струм, і напруга залежать від часу в колі змінного струму, миттєва потужність  $p(t) = i(t)v(t)$  також залежить від часу. Графік  $p(t)$  для різних елементів схеми показаний на рис. 5.16. Для резистора  $i(t)$  і  $v(t)$  знаходяться в фазі і тому завжди мають один і той же знак (див. рис. 5.5). Для конденсатора або котушки індуктивності відносні знаки  $i(t)$  і  $v(t)$  змінюються протягом циклу через різницю їх фаз (див. рис. 5.7 і рис. 5.9). Отже,  $p(t)$  є позитивним в одні моменти часу і негативним в інші, що вказує на те, що ємнісні та індуктивні елементи виробляють енергію в одні моменти і поглинають її в інші.

Миттєва потужність змінюється як за величиною, так і за знаком протягом циклу, тому вона рідко має практичне значення. Нас турбує усереднена в часі потужність, яку ми називаємо **середньою потужністю**. Вона визначається середньою за часом миттєвою потужністю за один цикл:

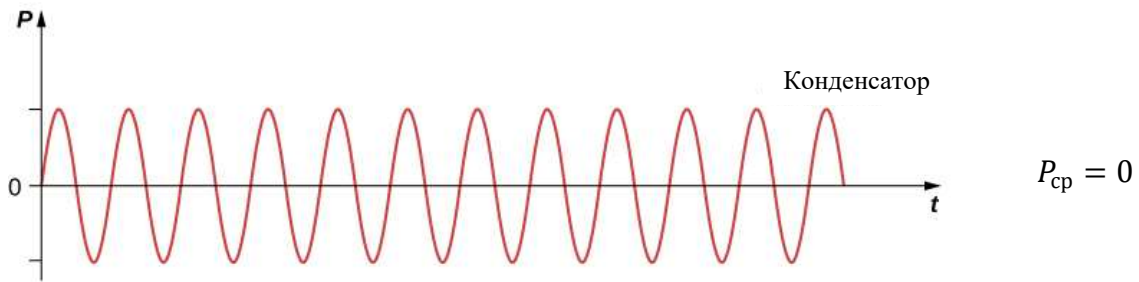
$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt,$$

де  $T = 2\pi/\omega$  – період коливань. Із замінами  $v(t) = V_0 \sin \omega t$  і  $i(t) = I_0 \sin(\omega t - \phi)$ , цей інтеграл стає рівним:

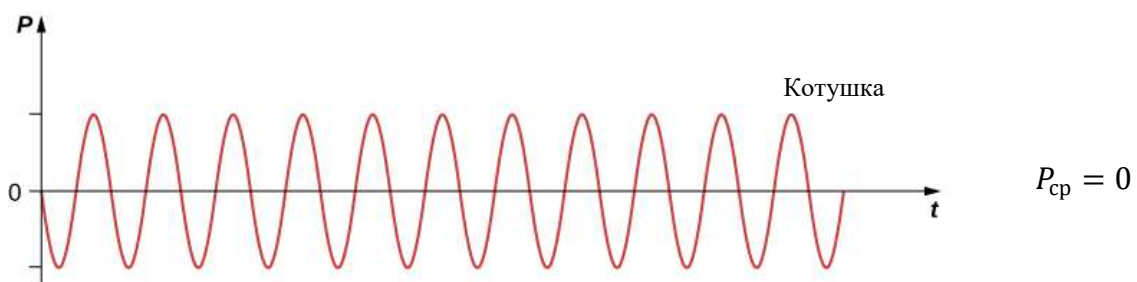
$$P_{\text{ср}} = \frac{I_0 V_0}{T} \int_0^T \sin(\omega t - \phi) \sin \omega t dt.$$



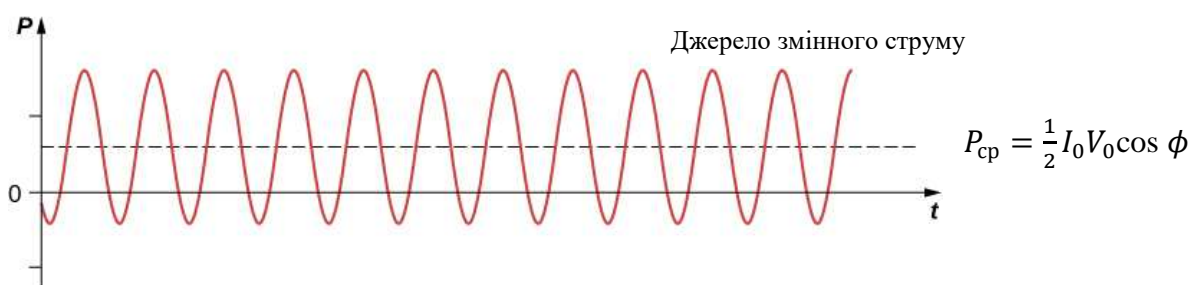
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис. 5.16. Графік миттєвої потужності для різних елементів схеми. (a) Для резистора,  $P_{cp} = I_0 V_0 / 2$ , тоді як для (b) конденсатора і (c) котушки індуктивності,  $P_{cp} = 0$ . (d) Для джерела,  $P_{cp} = I_0 V_0 \cos \phi / 2$ , яке може бути позитивним, від'ємним або нульовим, залежно від  $\phi$

Використавши відоме тригонометричне співвідношення  $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A$ , отримуємо:

$$P_{\text{сп}} = \frac{I_0 V_0 \cos \phi}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt - \frac{I_0 V_0 \sin \phi}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt.$$

Оцінка цих двох інтегралів дає:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}$$

і

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt = 0.$$

Отже, середня потужність, пов'язана з елементом схеми, задається формулою:

$$P_{\text{сп}} = \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos \phi. \quad (5.12)$$

В інженерних додатках,  $\cos \phi$  відомий як **коефіцієнт потужності**, який є величиною, на яку потужність, що подається в коло, менша за теоретичний максимум через те, що напруга та струм змінюються не в однаковій фазі. Для резистора,  $\phi = 0$ , таким чином, середня потужність, що розсіюється становить:

$$P_{\text{сп}} = \frac{1}{2} I_0 V_0.$$

Порівняння  $p(t)$  і  $P_{\text{сп}}$  показано на рис. 5.16 (d). Щоб зробити  $P_{\text{сп}} = (1/2) I_0 V_0$  як і його аналог постійного струму, ми використовуємо значення  $I_{\text{еф}}$  і  $V_{\text{еф}}$  струму і напруги. За визначенням, це:

$$I_{\text{еф}} = \sqrt{i_{\text{сп}}^2}, \quad V_{\text{еф}} = \sqrt{v_{\text{сп}}^2},$$

де

$$i_{\text{сп}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt, \quad v_{\text{сп}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt.$$

З  $i(t) = I_0 \sin(\omega t - \phi)$  і  $v(t) = V_0 \sin \omega t$ , отримуємо:

$$I_{\text{еф}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0, \quad V_{\text{еф}} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_0.$$

Тоді ми можемо записати середню потужність, що розсіюється резистором:

$$P_{\text{сп}} = \frac{1}{2} I_0 V_0 = I_{\text{еф}} V_{\text{еф}} = I_{\text{еф}}^2 R. \quad (5.13)$$

Це рівняння ще більше підкреслює, чому в обговоренні вибирається середньоквадратичне значення, а не пікові значення. Обидва рівняння середньої потужності правильні для рівняння 5.13, але середньоквадратичні значення у формулі дають більш чисте представлення, тому додатковий коефіцієнт 1/2 не потрібен.

Змінні напруги і струми зазвичай описуються через їх середньоквадратичні значення. Наприклад, 110 В від побутової розетки – це середньоквадратичне, ефективне значення. Амплітуда цього джерела дорівнює  $110\sqrt{2}$  В = 156 В. Оскільки більшість лічильників змінного струму відкалібровані за середньоквадратичними значеннями, типовий вольтметр змінного струму, розміщений у побутовій розетці, покаже 110 В.

Для конденсатора і котушки індуктивності,  $\phi = \pi/2$  і  $-\pi/2$  рад відповідно. З  $\cos \pi/2 = \cos(-\pi/2) = 0$ , з рівняння 5.12 знаходимо, що середня потужність, що розсіюється будь-яким з цих елементів, дорівнює  $P_{\text{ср}} = 0$ . Конденсатори та котушки індуктивності поглинають енергію з кола під час одного напівперіоду, а потім віддають її назад у коло під час іншого напівперіоду. Така поведінка проілюстрована на графіках рис. 5.16, (b) і (c) на яких показано, що  $p(t)$  синусоїдально коливається близько нуля.

Фазовий кут для генератора змінного струму може мати будь-яке значення. Якщо  $\cos \phi > 0$ , генератор виробляє електроенергію; якщо  $\cos \phi < 0$ , він поглинає енергію. У термінах середньоквадратичних значень середня потужність генератора змінного струму записується так:

$$P_{\text{ср}} = I_{\text{еф}} V_{\text{еф}} \cos \phi.$$

Для генератора в  $RLC$ -схемі

$$\text{tg } \phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

і

$$\cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{R}{Z}.$$

Звідси середня потужність генератора становить

$$P_{\text{ср}} = I_{\text{еф}} V_{\text{еф}} \cos \phi = \frac{V_{\text{еф}}}{Z} V_{\text{еф}} \frac{R}{Z} = \frac{V_{\text{еф}}^2 R}{Z^2}. \quad (5.14)$$

Це також можна записати як

$$P_{\text{ср}} = I_{\text{еф}}^2 R,$$

що означає, що потужність, вироблена генератором, розсіюється в резисторі. Як бачимо, закон Ома для середньоквадратичного значення змінного струму знаходять діленням середньоквадратичного (ефективного) значення напруги на імпеданс.

### ПРИКЛАД 5.3. Вихідна потужність генератора

Генератор змінного струму, ЕРС якого задається функцією

$$v(t) = (4,00 \text{ В}) \sin[(1,00 \times 10^4 \text{ рад/с}) t]$$

підключається до кола  $RLC$  з параметрами  $L = 2,00 \times 10^{-3} \text{ Гн}$ ,  $C = 4,00 \times 10^{-6} \text{ Ф}$  і  $R = 5,00 \text{ Ом}$ . (а) Яка середньоквадратична напруга на генераторі? б) Який опір електричного кола? в) Яка середня вихідна потужність генератора?

### Стратегія

Середньоквадратична напруга – це амплітуда напруги, помножена на  $1/\sqrt{2}$ . Імпеданс кола включає в себе опір і реактивні опори конденсатора і котушки індуктивності. Середня потужність обчислюється за формулою 5.14, а точніше, останньою частиною рівняння, тому що ми маємо опір кола  $Z$ , середньоквадратичне значення напруги  $V_{\text{еф}}$  та опір  $R$ .



### Розв'язок

а. Оскільки  $V_0 = 4,00$  В, середньоквадратична напруга на генераторі становить:

$$V_{\text{еф}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (4,00 \text{ В}) = 2,83 \text{ В.}$$

б. Імпеданс кола дорівнює:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} =$$
$$= \sqrt{(5 \text{ Ом})^2 + \left( (1 \times 10^4 \text{ рад/с})(2 \times 10^{-3} \text{ Гн}) - \frac{1}{(1 \times 10^4 \text{ рад/с})(4 \times 10^{-6} \text{ Ф})} \right)^2}$$
$$= 7,07 \text{ Ом.}$$

с. З рівняння 5.14 середня потужність, що передається в коло, дорівнює:

$$P_{\text{ср}} = \frac{V_{\text{еф}}^2 R}{Z^2} = \frac{(2,83 \text{ В})^2 (5,00 \text{ Ом})}{(7,07 \text{ Ом})^2} = 0,801 \text{ Вт.}$$

### Обговорення

Якщо опір набагато більше, ніж реактивний опір конденсатора або котушки індуктивності, то середня потужність є рівнянням кола постійного струму  $P = V^2/R$ , де  $V$  заміщає середньоквадратичне значення напруги.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 5.4

Вольтметр змінного струму, прикріплений на клеммах генератора змінного струму частотою 45 Гц, показує 7,07 В. Напишіть вираз для ЕРС генератора.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 5.5

Покажіть, що середньоквадратичні напруги на резисторі, конденсаторі та котушці індуктивності в колі змінного струму, де середньоквадратичне значення струму становить  $I_{\text{еф}}$ , задаються формулами:  $I_{\text{еф}}R$ ,  $I_{\text{еф}}X_C$ , і  $I_{\text{еф}}X_L$ , відповідно. Визначте ці значення для компонентів  $RLC$ -схеми рівняння 5.12.

### 5.5. Резонанс в колі змінного струму

У  $RLC$ -схемі на рис. 5.11 амплітуда струму дорівнює, виходячи з рівняння 5.10,

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (5.15)$$

Якщо ми можемо змінювати частоту генератора змінного струму, зберігаючи амплітуду його вихідної напруги постійною, тоді струм

змінюється відповідно. Графік залежності струму  $I_0$  від  $\omega$  зображено на рис. 5.17.

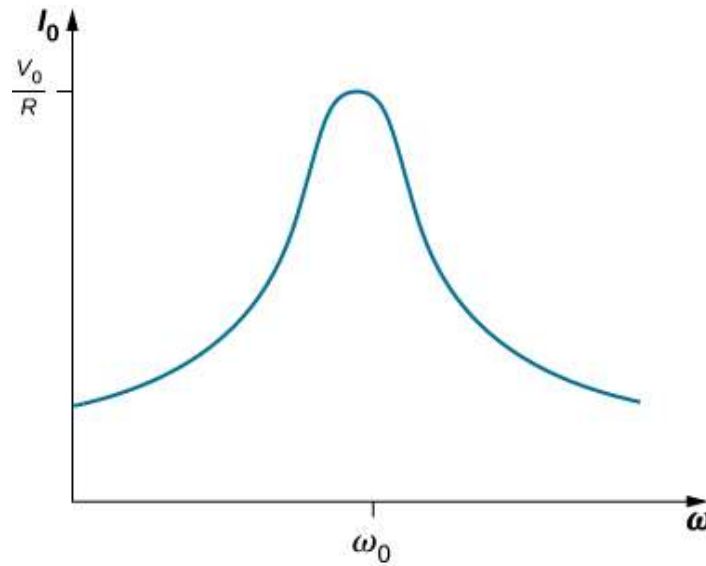


Рис. 5.17. На резонансній частоті  $RLC$ -контур  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  величина струму максимальна

У розділі «Коливання» ми зіткнулися з подібним графіком, де амплітуда затухаючого гармонічного осцилятора була побудована в залежності від кутової частоти синусоїдальної рушійної сили. Ця схожість є більш ніж просто збігом, як показало раніше застосування правила контурів Кірхгофа до схеми на рис. 5.11. Це описується рівнянням:

$$L \frac{di}{dt} + iR + \frac{q}{C} = V_0 \sin \omega t, \quad (5.16)$$

або

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = V_0 \sin \omega t,$$

де ми замінили  $i(t)$  на  $dq(t)/dt$ . Рівняння 5.16 наочно демонструє, що  $RLC$  - схема є електричним аналогом керованого затухаючого гармонічного генератора.

**Резонансна частота**  $f_0$   $RLC$  -кола – це частота, при якій величина струму є максимальною, і в контурі б відбувалися коливання, якби він не керувався джерелом напруги. Це відповідає кутовій частоті  $\omega_0 = 2\pi f_0$  при якому імпеданс  $Z$  в рівнянні 5.15 є мінімальним, або коли

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

і

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (5.17)$$

Це резонансна кутова частота контуру. Після заміщення  $\omega_0$  в рівнянні 5.9, рівнянні 5.10 і рівнянні 5.11, знаходимо, що при резонансі,

$$\phi = \arctg(0) = 0, \quad I_0 = \frac{V_0}{R}, \quad Z = R.$$

Тому при резонансі  $RLC$ - контур є чисто резистивний, з прикладеною ЕРС і струмом по фазі.

Що відбувається з потужністю при резонансі? Рівняння 5.14 показує, як середня потужність, що передається від генератора змінного струму до  $RLC$ - контуру, змінюється залежно від частоти. Крім цього  $P_{\text{ср}}$  досягає максимуму, коли  $Z$ , що залежить від частоти, дорівнює мінімуму, тобто коли  $X_L = X_C$  і  $Z = R$ . Таким чином, при резонансі середня вихідна потужність джерела в  $RLC$ - контурі є максимальною. З рівняння 5.14 цей максимум дорівнює  $V_{\text{ср}}^2/R$ . На рис. 5.18 представлений типовий графік залежності  $P_{\text{ср}}$  від  $\omega$  в області максимальної вихідної потужності.

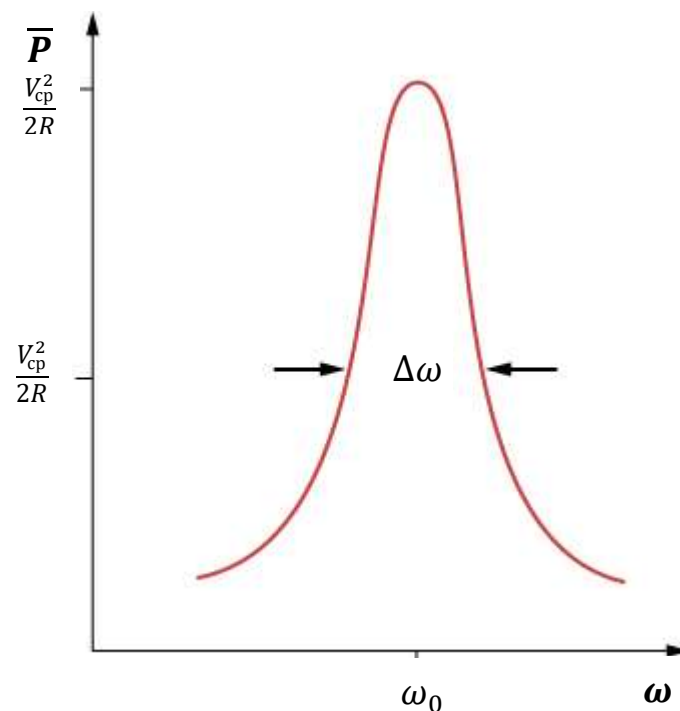


Рис. 5.18. Як і сила струму, середня потужність, що передається від генератора змінного струму до  $RLC$ -контуру, досягає піку на резонансній частоті

**Пропускна здатність**  $\Delta\omega$  піку резонансу визначається як діапазон кутових частот  $\omega$  над якою середня потужність  $P_{\text{птах}}$  перевищує половину максимального значення  $P_{\text{ср}}$ . Гострота піку описується безрозмірною величиною, відомою як **коефіцієнт добротності**  $Q$  схеми. За визначенням,

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}, \quad (5.18)$$

де  $\omega_0$  – резонансна кутова частота.

Велике значення  $Q$  вказує на різкий пік резонансу. Ми можемо дати визначення  $Q$  в термінах параметрів схеми так:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}, \quad (5.19)$$

Резонансні контури зазвичай використовуються для пропускання або відхилення вибраних діапазонів частот. Робиться це шляхом регулювання значення одного з елементів і, отже, «налаштування» схеми на ту чи іншу резонансну частоту. Наприклад, в радіоприймачах приймач налаштовується на потрібну станцію, регулюючи резонансну частоту своєї схеми відповідно до частоти станції. Якщо схема настройки має високу *добротність*, вона буде мати невелику смугу пропускання, тому сигнали від інших станцій на частотах, навіть трохи відмінних від резонансної, стикаються з високим опором і не пропускаються. Стільникові телефони працюють подібним чином, спілкуючись з сигналами близько 1 ГГц, які налаштовуються схемою котушка індуктивності-конденсатор. Одним з найбільш поширених застосувань конденсаторів є їх використання в схемах змінного струму, заснованих на досягненні резонансної частоти. Металощукач також використовує зсув резонансної частоти при виявленні металів (рис. 5.19).



Рис. 5.19. Коли металощукач наближається до шматка металу, змінюється індуктивність однієї з його котушок. Це викликає зсув резонансної частоти контуру, що містить котушку. Цей зсув фіксується схемою і передається водолазу за допомогою навушників

### ПРИКЛАД 5.4. Резонанс в $RLC$ -контурі

(а) Яка резонансна частота контура з використанням значень напруги та  $LRC$ , з'єднаних послідовно з прикладу 5.2? б) Якщо генератор змінного струму налаштований на цю частоту без зміни амплітуди вихідної напруги, то яка амплітуда струму?

#### Стратегія

Резонансна частота для  $RLC$ -контурі обчислюється з рівняння 5.17, яке виходить з балансу між реактивними опорами конденсатора і котушки індуктивності. Оскільки коло знаходиться в резонансному стані, то імпеданс чисто резистивний. Потім піковий струм обчислюється напругою, поділеною на опір.

#### Розв'язок

а. Резонансну частоту знаходимо з рівняння 5.17:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{(3 \times 10^{-3} \text{ Гц})(8 \times 10^{-4} \text{ Ф})}} = 103 \text{ Гц.}$$

б. При резонансі імпеданс контуру чисто резистивний, а амплітуда струму дорівнює:

$$I_0 = \frac{0,1 \text{ В}}{4 \text{ Ом}} = 2,5 \times 10^{-2} \text{ А.}$$

#### Обговорення

Якби коло не було налаштоване на резонансну частоту, нам знадобився б опір всього кола для обчислення струму.

### ПРИКЛАД 5.5. Передача потужності в $RLC$ -контур при резонансі

а) Яка резонансна кутова частота  $RLC$ -контурі з  $R = 0,200 \text{ Ом}$ ,  $L = 4,00 \times 10^{-3} \text{ Гн}$ , і  $C = 2,00 \times 10^{-6} \text{ Ф}$ ?

б) Якщо джерело змінного струму постійної амплітуди  $4,00 \text{ В}$  налаштовано на цю частоту, то яка середня потужність, що передається в коло?

в) Визначте  $Q$  і смугу пропускання цього кола.

#### Стратегія

Резонансна кутова частота обчислюється за рівнянням 5.17. Середня потужність обчислюється з середньоквадратичного значення напруги і опору в колі. Коефіцієнт добротності обчислюється з рівняння 5.19, знаючи резонансну частоту. Пропускна здатність обчислюється на основі рівняння 5.18 і знаючи коефіцієнт якості.

### Розв'язок

а. Резонансна кутова частота дорівнює:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(4 \times 10^{-3} \text{ Гц})(2 \times 10^{-6} \text{ Ф})}} = 1,12 \times 10^4 \text{ рад/с.}$$

б. На цій частоті середня потужність, що передається в коло, є максимальною. Вона дорівнює:

$$P_{\text{ср}} = \frac{V_{\text{ср}}^2}{R} = \frac{[(1/\sqrt{2})(4 \text{ В})]^2}{0,2 \text{ Ом}} = 40 \text{ Вт.}$$

в. Коефіцієнт добротності схеми становить:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{(1,12 \times 10^4 \text{ рад/с})(4 \times 10^{-3} \text{ Гц})}{0,2 \text{ Ом}} = 224.$$

Потім знаходимо значення пропускнуої здатності:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1,12 \times 10^4 \text{ рад/с}}{224} = 50 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

### Обговорення

Якщо потрібна вузка смуга пропускання, допоможе менший опір або більша індуктивність. Однак менший опір збільшує потужність, що передається в коло, що може бути небажаним, залежно від максимальної потужності, яку можна було б передати.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 5.6

У схемі рис. 5.11  $L = 2,0 \times 10^{-3} \text{ Гн}$ ,  $C = 5,0 \times 10^{-4} \text{ Ф}$ , і  $R = 40 \text{ Ом}$ . а) яка резонансна частота? б) Який опір контуру при резонансі? в) Якщо амплітуда напруги дорівнює 10 В, чому дорівнює  $i(t)$  при резонансі? г) Частота генератора змінного струму тепер змінена на 200 Гц. Обчисліть різницю фаз між струмом і ЕРС генератора.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 5.7

Що відбувається з резонансною частотою  $RLC$ -контура при збільшенні наступних величин в 4 рази: (а) ємність, (б) індуктивність і (в) опір?

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 5.8

Резонансна кутова частота  $RLC$ -контура дорівнює  $4,0 \times 10^2 \text{ рад/с}$ . Джерело змінного струму, що працює на цій частоті, передає середню потужність  $2,0 \times 10^{-2} \text{ Вт}$  до схеми. Опір кола дорівнює  $0,50 \text{ Ом}$ . Напишіть вираз для ЕРС джерела.

## 5. 6. Трансформатори

Незважаючи на те, що змінний струм виробляється при відносно низьких напругах, він передається по лініях електропередач при дуже високій напрузі (до 500 кВ). Одна і та ж потужність може передаватися при різних напругах, тому що потужність – це продукт  $I_{\text{ср}}V_{\text{ср}}$ . (Для простоти ігноруємо фазовий фактор  $\cos \phi$ ). Тому певна потреба в потужності може бути задоволена низькою напругою та великим струмом або високою напругою та низьким струмом. Перевага вибору високовольтного/слабкострумового двигуна полягає в тому, що він призводить до нижчих  $I_{\text{ср}}^2 R$  омичних втрат в лініях електропередачі, які можуть бути значними на лініях довжиною в багато кілометрів (рис. 5.20).

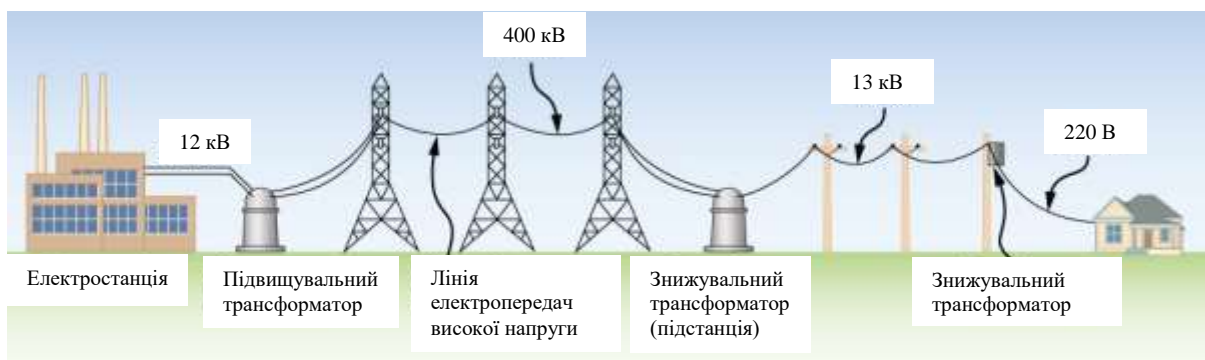


Рис. 5.20. Середньоквадратичну напругу від електростанції з часом потрібно знизити з 12 кВ до 220 В, щоб її можна було безпечно ввести в будинок. Високовольтна лінія електропередачі дозволяє передавати малий струм через підстанцію на великі відстані

Як правило, змінні ЕРС, що виробляються на електростанціях, «підвищуються» до дуже високих напруг перед передачею по лініях електропередач; потім їх необхідно «знизити» до відносно безпечних значень (110 або 220 В середньоквадратичного значення), перш ніж вони будуть введені в будинки. Пристроєм, що перетворює напруги з однієї величини в іншу за допомогою індукції, є **трансформатор** (рис. 5.21).

Як показано на рис. 5.22, трансформатор в основному складається з двох відокремлених котушок, або обмоток, обмотаних навколо м'якого залізного сердечника. Первинна обмотка має  $N_P$  витків, і підключається до змінної напруги  $v_P(t)$ . Вторинна обмотка має  $N_S$  витків і підключається до навантажувального резистора  $R_S$ .

Припустимо ідеальний випадок, коли всі лінії магнітного поля проходять через сердечник так, що один і той же магнітний потік пронизує кожен виток як первинної, так і вторинної обмоток. Нехтуємо також втратами енергії на магнітний гістерезис, омичний нагрів в обмотках і омичний нагрів індуктованих вихрових струмів в сердечнику.



Рис. 5.21. Трансформатори використовуються для зниження високої напруги в лініях електропередач до 110-220 В, що використовуються в будинках

Хороший трансформатор може мати втрати всього 1% від потужності, що передається, тому це непогане припущення.

Щоб розібрати схему трансформатора, спочатку розглянемо первинну обмотку. Вхідна напруга  $v_p(t)$  дорівнює різниці потенціалів, індукованої на первинній обмотці. Із закону Фарадея індукована різниця потенціалів дорівнює  $-N_p(d\Phi/dt)$ , де  $\Phi$  є потік через один виток первинної обмотки. Таким чином,

$$v_p(t) = -N_p \frac{d\Phi}{dt}.$$



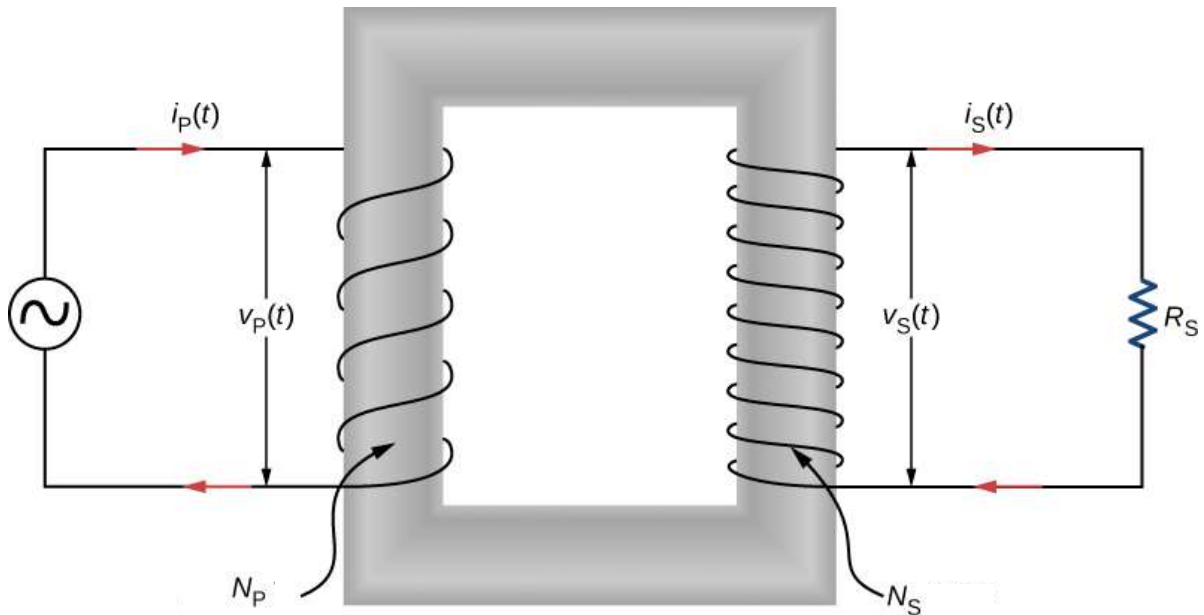


Рис. 5.22. Підвищувальний трансформатор (у вторинній обмотці більше витків, ніж у первинній). Дві обмотки обмотані навколо м'якого залізного сердечника

Аналогічно і вихідна напруга  $v_S(t)$ , що подається на навантажувальний резистор повинна дорівнювати різниці потенціалів, індукованої на вторинній обмотці. Оскільки трансформатор ідеальний, то і потік через кожен виток вторинної обмотки також дорівнює  $\Phi$ , і

$$v_S(t) = -N_S \frac{d\Phi}{dt}.$$

Об'єднавши два останніх рівняння, отримаємо:

$$v_S(t) = \frac{N_S}{N_P} v_P(t). \quad (5.20)$$

Отже, з відповідними значеннями для  $N_S$  і  $N_P$ , вхідна напруга  $v_P(t)$  може бути «посилена» ( $N_S > N_P$ ) або "зменшена" ( $N_S < N_P$ ) до  $v_S(t)$ , вихідної напруги. Це часто представляють як **рівняння трансформатора**,

$$\frac{v_S}{v_P} = \frac{N_S}{N_P}, \quad (5.21)$$

з якого видно, що відношення вторинної і первинної напруг в трансформаторі дорівнює відношенню числа витків в їх обмотках. Для **підвищувального трансформатора**, який збільшує напругу і зменшує струм, це відношення більше одиниці; для **понижуючого трансформатора**, який знижує напругу і збільшує струм, це співвідношення менше одиниці.

Із закону енергозбереження, потужність, що вводиться в будь-який момент часу  $v_P(t)$  до первинної обмотці повинна дорівнювати потужності, що розсіюється в резисторі вторинного кола; таким чином,

$$i_P(t)v_P(t) = i_S(t)v_S(t).$$

У поєднанні з рівнянням 5.20 це дає

$$i_S(t) = \frac{N_P}{N_S} i_P(t). \quad (5.22)$$

Якщо напруга підвищується, струм знижується, і навпаки.

Нарешті, ми можемо використовувати  $i_S(t) = v_S(t)/R_S$ , разом з рівнянням 5.20 і рівнянням 5.22, щоб отримати:

$$v_P(t) = i_P \left[ \left( \frac{N_P}{N_S} \right)^2 R_S \right],$$

що говорить нам про те, що вхідна напруга  $v_P(t)$  «бачить» не опір  $R_S$ , а скоріше опір

$$R_P = \left( \frac{N_P}{N_S} \right)^2 R_S.$$

Наш аналіз ґрунтувався на миттєвих значеннях напруги та струму. Однак отримані рівняння не обмежуються миттєвими значеннями; вони справедливі також для максимальних і середньоквадратичних значень.

### ПРИКЛАД 5.5. Понижуючий трансформатор

Трансформатор на стовпі мережі знижує середньоквадратичне значення напруги з 12 кВ до 240 В. Опір лінії електропередач становить 200 Ом. (а) Яке відношення кількості вторинних витків трансформатора до кількості первинних? (б) Якщо вхідний струм трансформатора становить 2,0 А, яким буде вихідний струм? (в) Визначте втрати потужності в лінії електропередачі. (г) Знайдіть втрати потужності, якщо трансформатора не було, а вихідна потужність залишалася незмінною.

#### Стратегія

Кількість витків трансформатора, пов'язаних із напругою, визначається за рівнянням 5.20. Вихідний струм розраховується за допомогою рівняння 5.22.

#### Розв'язок

а. Використовуючи рівняння 5.20 зі середньоквадратичними значеннями  $V_P$  і  $V_S$ , ми маємо:

$$\frac{N_S}{N_P} = \frac{240 \text{ В}}{12 \times 10^3 \text{ В}} = \frac{1}{50},$$

тому кількість витків у первинній обмотці в 50 разів перевищує кількість витків у вторинній.

б. З рівняння 5.22 середньоквадратичний вихідний струм  $I_S$  визначається за допомогою рівняння трансформатора зі струмом так:

$$I_S = \frac{N_P}{N_S} I_P = (50)(2 \text{ А}) = 100 \text{ А}. \quad (5.23)$$

в. Втрати потужності в лінії електропередач розраховуються так:

$$P_{\text{втрат}} = I_p^2 R = (2 \text{ А})^2 (200 \text{ Ом}) = 800 \text{ Вт.}$$

г. Якби не було трансформатора, для роботи в цих будинках довелося б подавати електроенергію напругою 240 В, а втрати електроенергії становили б

$$P_{\text{втрат}} = I_S^2 R = (100 \text{ А})^2 (200 \text{ Ом}) = 2 \times 10^6 \text{ Вт.}$$

Тому, коли потрібно передати електроенергію, ми хочемо уникнути втрати потужності. Таким чином, на лініях електропередач використовуємо високу напругу та малі струми, а перед подачею електроенергії в будинки знижуємо напругу за допомогою трансформатора.

### **Обговорення**

Таке застосування понижуючого трансформатора дозволяє будинку, який використовує розетки 240 В, мати 100 А для споживання. Це може жити багато пристроїв у будинку.

### **ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 5.9**

Трансформатор знижує напругу лінії від 110 до 9,0 В, щоб на дверний дзвінок можна було подати струм 0,50 А. а) Яке відношення числа витків первинної і вторинної обмоток? б) Який струм у первинній обмотці? в) Який опір “бачить” джерело 110 В?

## ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

### Введення



Рис. 6.1. Тиск сонячного світла, передбачений рівняннями Максвелла, допоміг створити хвіст комети Макнота

Наш погляд на предмети в небі вночі, тепле сонячне сяйво, жало від сонячних опіків, наші розмови по мобільному телефону та рентгенівські промені, що показують зламану кістку, — все це приноситься нам електромагнітними хвилями. Важко переоцінити практичне значення електромагнітних хвиль через їхню роль у баченні, через незліченні технологічні застосування, а також через їхню здатність транспортувати енергію від Сонця через космос для підтримки життя та майже всієї його діяльності на Землі.

Теорія передбачила загальне явище електромагнітних хвиль ще до того, як хтось зрозумів, що світло є формою електромагнітної хвилі. У середині дев'ятнадцятого століття Джеймс Клерк Максвелл сформулював єдину теорію, що об'єднувала всі відомі на той час електричні та магнітні ефекти. Рівняння Максвелла, узагальнюючи цю теорію, передбачили існування електромагнітних хвиль, що поширюються зі швидкістю світла. Його теорія також передбачила, як поведуться ці хвилі, і як вони несуть енергію та імпульс. Хвости комет, таких як комета Макнота на рис. 6.1, є яскравим прикладом. Енергія, яку несе світло від Сонця, нагріває комету, виділяючи пил і газ. Імпульс, який несе світло, діє на слабку силу, яка формує пил у хвіст, подібний до того, який ми бачимо тут. Потік частинок, що випромінюються Сонцем, який називається сонячним вітром, зазвичай утворює додатковий, другий хвіст, як докладно описано в цьому розділі.

У цій главі ми пояснимо теорію Максвелла і покажемо, як вона веде до передбачення електромагнітних хвиль. Ми використовуємо його теорію, щоб дослідити, що таке електромагнітні хвилі, як вони утворюються і як вони передають енергію та імпульс. На завершення ми підсумуємо деякі з багатьох практичних застосувань електромагнітних хвиль.

### 6.1. Рівняння Максвелла і електромагнітні хвилі

Джеймс Клерк Максвелл (1831-1879) був одним з тих, хто зробив вирішальний внесок у фізику XIX століття (рис. 6.2). Незважаючи на те, що він помер молодим, він зробив великий внесок у розвиток кінетичної теорії газів, у розуміння колірної зору та природи кілець Сатурна. Він, ймовірно, найбільш відомий тим, що об'єднав існуючі знання про закони електрики і магнетизму з власними ідеями в повну всеосяжну електромагнітну теорію, представлену **рівняннями Максвелла**.



Рис. 6.2. Джеймс Клерк Максвелл, фізик дев'ятого століття, розробив теорію, яка пояснила зв'язок між електрикою і магнетизмом, і правильно передбачив, що видиме світло складається з електромагнітних хвиль

## Поправка Максвелла на закони електрики і магнетизму

Чотири основні закони електрики і магнетизму були відкриті експериментально в роботах таких фізиків, як Ерстед, Кулон, Гаусс і Фарадей. Максвелл виявив логічні невідповідності в цих ранніх результатах і визначив причину неповноти закону Ампера.

Нагадаємо, що за законом Ампера інтеграл магнітного поля навколо замкнутого контуру  $C$  пропорційний струму  $I$ , що проходить через будь-яку поверхню, межею якої є сама петля  $C$ :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (6.1)$$

Існує нескінченно багато поверхонь, які можуть бути приєднані до будь-якої петлі, і закон Ампера, викладений у рівнянні 6.1, не залежить від вибору поверхні.

Розглянемо установку на рис. 6.3.

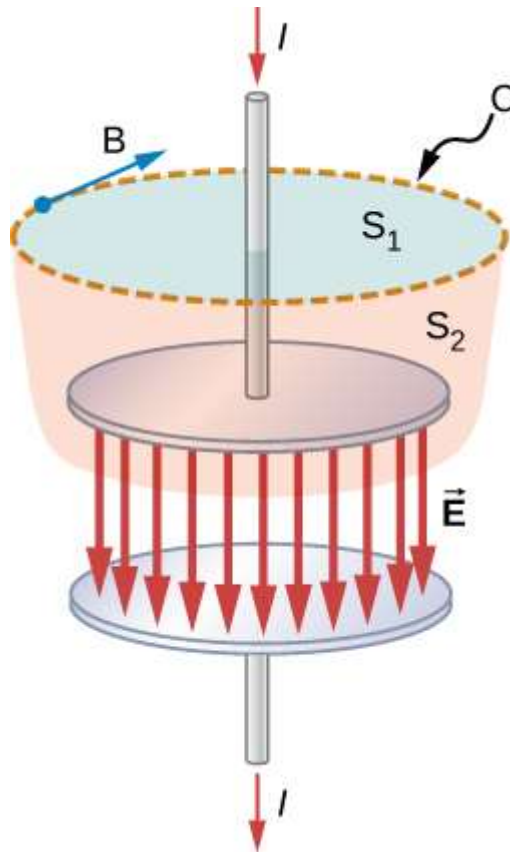


Рис. 6.3. Течії струму через поверхню  $S_1$  і поверхню  $S_2$  є нерівними, незважаючи на однакову граничну петлю  $C$

Джерело ЕРС швидко підключають до плоско-паралельного конденсатора так, що в дроті розвивається залежний від часу струм  $I$ . Припустимо, що ми застосуємо закон Ампера до контуру  $C$  до того, як конденсатор буде повністю заряджений, так що  $I \neq 0$ . Інтеграл по

поверхні  $S_1$  дає ненульове значення для укладеного струму  $I$ , тоді як інтеграл по поверхні  $S_2$  дає нуль, тому що через нього не проходить струм:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} \mu_0 I, & \text{якщо використовуємо } S_1 \\ 0, & \text{якщо використовуємо } S_2 \end{cases}$$

Ясно, що закон Ампера в його звичайному вигляді тут не працює. Це внутрішнє протиріччя в теорії, яке вимагає модифікації самої теорії, закону Ампера.

Як можна змінити закон Ампера, щоб він працював у всіх ситуаціях? Максвелл запропонував включити додатковий внесок, який назвав **струмом зміщення**  $I_{зм}$ , до реального струму  $I$ :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_{зм}), \quad (6.2)$$

де струм зміщення визначається так:

$$I_{зм} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (6.3)$$

Тут  $\varepsilon_0$  є діелектричною проникністю вільного простору і  $\Phi_E$  – це електричний потік, що визначається так:

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

**Струм зміщення** аналогічний дійсному струму в законі Ампера, входячи в закон Ампера таким же чином. Однак він утворюється під впливом змінного електричного поля. Він пояснює зміну електричного поля, що створює магнітне поле, так само, як і реальний струм, але струм зміщення може створювати магнітне поле навіть там, де немає реального струму. При включенні цього додаткового члена модифіковане рівняння закону Ампера набуває вигляду:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (6.4)$$

і не залежить від поверхні  $S$ , через яку вимірюється струм  $I$ .

Тепер ми можемо розглянути цю модифіковану версію закону Ампера, щоб підтвердити, що він справедливий незалежно від того, обрана поверхня  $S_1$  або поверхню  $S_2$  на рис. 6.3. Електричне поле  $\vec{E}$  що відповідає потоку  $\Phi_E$  в рівнянні 6.3 знаходиться між пластинами конденсатора. Таким чином,  $\vec{E}$ -поле і струм зміщення через поверхню  $S_1$  дорівнюють нулю, а рівняння 6.2 набуває вигляду:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (6.5)$$

Тепер ми повинні показати, що для поверхні  $S_2$ , через яку не протікає реальний струм, струм зміщення призводить до того ж значення  $\mu_0 I$  для правої частини рівняння закону Ампера. Для поверхні  $S_2$ , рівняння набуває вигляду:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{d}{dt} \left[ \varepsilon_0 \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} \right]. \quad (6.6)$$

Закон Гаусса для електричного заряду вимагає замкнутої поверхні і не може бути застосований до такої поверхні, як  $S_1$  або  $S_2$  поодиноці. Але дві поверхні  $S_1$  і  $S_2$  утворюють замкнуту поверхню на рис. 6.3 і можуть бути використані в законі Гаусса. Оскільки електричне поле дорівнює нулю на поверхні  $S_1$ , внесок потоку електричного поля через  $S_1$  дорівнює нулю. Це дає нам наступний вираз:

$$\begin{aligned} \oiint_{S_1+S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \\ &= \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A}. \end{aligned}$$

Таким чином, ми можемо замінити інтеграл на  $S_2$  у рівнянні 6.6 із замкнутою поверхнею Гаусса  $S_1+S_2$  і застосувати закон Гаусса для отримання виразу:

$$\oint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{dQ_{in}}{dt} = \mu_0 I. \quad (6.7)$$

Таким чином, модифіковане рівняння закону Ампера є однаковим з використанням поверхні  $S_2$ , де права частина є результатом струму зміщення, так і для поверхні  $S_1$ , де внесок походить від фактичного потоку електричного заряду.

### ПРИКЛАД 6.1. Струм зміщення в зарядному конденсаторі

Плоско-паралельний конденсатор ємністю  $C$ , пластини якого мають площу  $A$  і відстань  $d$ , з'єднаний з резистором  $R$  і батареєю напруги  $V$ . Струм починає протікати при  $t = 0$ . а) Знайдіть струм зміщення між пластинами конденсатора в момент часу  $t$ . б) За властивостями конденсатора знайдіть відповідний дійсний струм  $I = dQ/dt$ , і порівняйте відповідь з очікуваним струмом в проводах відповідної  $RC$ -схеми.

#### Стратегія

Ми можемо використовувати рівняння з аналізу  $RC$ -кола плюс версію закону Ампера-Максвелла.

#### Розв'язок

а. Напруга між пластинами конденсатора в момент часу  $t$  задається формулою:

$$V_C = \frac{1}{C} Q(t) = V_0 (1 - e^{-t/RC}).$$

Нехай вісь  $z$  вказує від позитивної пластини до негативної. Тоді  $z$ -складова електричного поля між пластинами як функція часу  $t$  дорівнює:

$$E_z(t) = \frac{V_0}{d} (1 - e^{-t/RC}).$$

Отже,  $z$ -складова струму зміщення  $I_{zm}$  між пластинами знаходиться так:



$$I_{\text{зм}}(t) = \varepsilon_0 A \frac{\partial E_z(t)}{\partial t} = \varepsilon_0 A \frac{V_0}{d} \times \frac{1}{RC} e^{-t/RC} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC},$$

де ми використали  $C = \varepsilon_0 A/d$  для ємності.

б. З виразу для  $V_C$ , заряд на конденсаторі становить:

$$Q(t) = CV_C = CV_0(1 - e^{-t/RC}).$$

Таким чином, струм в конденсаторі після замикання кола становить:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}.$$

Цей струм такий самий, як і  $I_{\text{зм}}$  знаходиться в (а).

## Система рівнянь Максвелла

З поправкою на струм зміщення рівняння Максвелла набувають вигляду:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{in}}}{\varepsilon_0} \quad (\text{Закон Гаусса}) \quad (6.8)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (\text{Закон Гаусса для магнітного поля}) \quad (6.9)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (\text{Закон Фарадея}) \quad (6.10)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (\text{Закон Ампера-Максвелла}) \quad (6.11)$$

Після того, як поля обчислені за допомогою цих чотирьох рівнянь, рівняння для визначення сили Лоренца:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (6.12)$$

дає силу, з якою поля діють на частинку з зарядом  $q$ , що рухається зі швидкістю  $v$ . Рівняння (6.12) поєднує в собі силу електричного поля і магнітного поля, що діє на рухомий заряд. Магнітні та електричні сили були розглянуті раніше. Отже, сформулюємо ці чотири рівняння Максвелла:

## РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА

### 1. Закон Гаусса

Електричний потік через будь-яку замкнуту поверхню дорівнює електричному заряду  $Q_{\text{in}}$ , огорожену поверхнею. Закон Гаусса [рівняння 12.8] описує зв'язок між електричним зарядом і електричним полем, яке він створює. Це часто зображується у вигляді ліній електричного поля, що походять від позитивних зарядів і закінчуються негативними зарядами, і вказують напрямком електричного поля в кожній точці простору.

### 2. Закон Гаусса для магнітного поля

Потік магнітного поля через будь-яку замкнуту поверхню дорівнює нулю [рівняння 6.9]. Це еквівалентно твердженню, що лінії магнітного поля безперервні, не мають ні початку, ні кінця. Будь-яка лінія магнітного поля, що входить в область, огорожену поверхнею, також повинна покинути її. Відомо, що магнітних монополів, де лінії магнітного поля закінчувалися, не існує.

### 3. Закон Фарадея

Змінне магнітне поле індукує електрорушійну силу (ЕРС) і, отже, електричне поле. Напрямок ЕРС протистоїть зміні магнітного поля. Це третє рівняння Максвелла, рівняння 6.10, є законом індукції Фарадея і включає в себе закон Ленца. Електричне поле від мінливого магнітного поля має лінії поля, які утворюють замкнуті контури, без будь-якого початку і кінця.

### 4. Закон Ампера-Максвелла

Магнітні поля створюються рухомими зарядами або змінними електричними полями. Це четверте рівняння Максвелла, рівняння 6.11, охоплює закон Ампера і додає ще одне джерело магнітних полів, а саме змінне електричне поле.

Рівняння Максвелла і закон сили Лоренца разом охоплюють всі закони електрики і магнетизму. Симетрія, яку Максвелл ввів у свою математичну структуру, може бути помітна не відразу. Закон Фарадея описує, як зміна магнітних полів породжує електричні поля. Струм зміщення, введений Максвеллом, є результатом зміни електричного поля і враховує зміну електричного поля, що створює магнітне поле. Рівняння впливу як змінних електричних полів, так і магнітних полів, що змінюються, розрізняються за формою лише там, де відсутність магнітних монополів призводить до пропуску доданків. Ця симетрія між ефектами зміни магнітних і електричних полів має важливе значення для пояснення природи електромагнітних хвиль.

Пізніше застосування теорії відносності Ейнштейна до повної і симетричної теорії Максвелла показало, що електричні і магнітні сили не є окремими, а є різними проявами одного і того ж – **електромагнітної взаємодії**. Електромагнітна і слабка ядерна взаємодія так само уніфіковані, як **електрослабка взаємодія**. Це об'єднання сил було однією з мотивацій для спроб об'єднати всі чотири основні сили в природі — **гравітаційні, електричні, сильні і слабкі ядерні сили**.

### Механізм поширення електромагнітних хвиль

Щоб побачити, як симетрія, запропонована Максвеллом, пояснює існування комбінованих електричних і магнітних хвиль, які поширюються в просторі, уявіть собі магнітне поле, що змінюється в часі  $\vec{B}_0(t)$ , виробляється змінним струмом високої частоти, що видно на рис. 6.4. Ми представляємо  $\vec{B}_0(t)$  на схемі однією з його ліній поля. Із закону Фарадея, зміна магнітного поля через поверхню індукує змінне в часі електричне поле  $\vec{I}_0(t)$  на межі цієї поверхні. Джерело струму зміщення для електричного поля, як і джерело закону Фарадея для магнітного поля, створює лише замкнуті петлі ліній поля через математичну симетрію,

здіягну в рівняннях для індукованого електричного та індукованого магнітних полів. Представлення лінії поля  $\vec{I}_0(t)$  показано. У свою чергу, зміна електричного поля  $\vec{I}_0(t)$  створює магнітне поле  $\vec{B}_1(t)$  відповідно до модифікованого закону Ампера. Це мінливе поле викликає  $\vec{I}_1(t)$ , що спонукає  $\vec{B}_2(t)$ , і так далі. Тоді ми маємо самобезперервний процес, який призводить до створення змінних у часі електричних і магнітних полів у областях, все далі і далі від  $O$ . Цей процес можна візуалізувати як поширення електромагнітної хвилі в просторі.

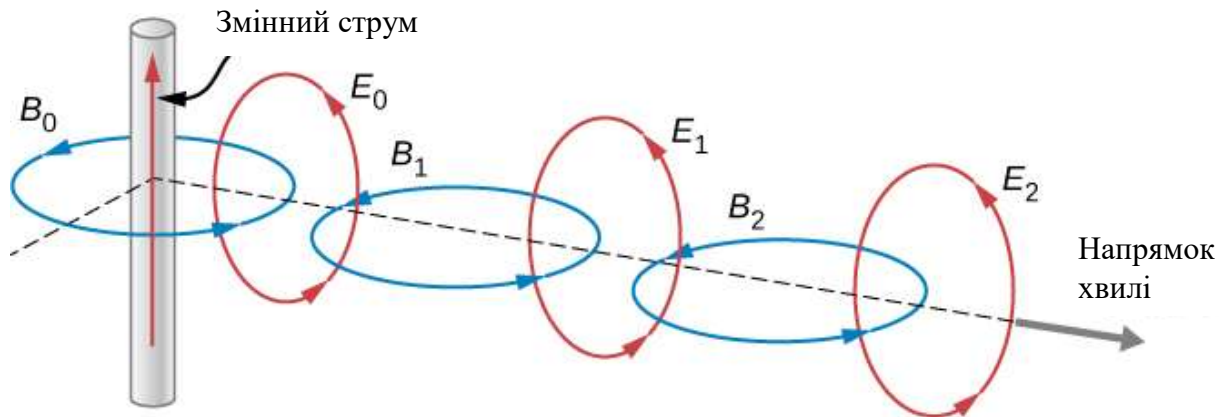


Рис. 6.4. Як змінюється  $\vec{E}(t)$  і  $\vec{B}(t)$  поля, що поширюються в просторі

У наступному розділі ми покажемо в більш точних математичних термінах, як рівняння Максвелла призводять до передбачення електромагнітних хвиль, які можуть поширюватися в просторі без матеріального середовища, маючи на увазі швидкість електромагнітних хвиль, рівну швидкості світла.

До роботи Максвелла експерименти вже вказували на те, що світло є хвильовим явищем, хоча природа хвиль була ще невідома. У 1801 році Томас Янг (1773-1829) показав, що коли світловий промінь розділяється двома вузькими щілинами, а потім знову збирається, на екрані утворюється візерунок, що складається з яскравих і темних бахром. Янг пояснив таку поведінку припущенням, що світло складається з хвиль, які додаються в одних точках і руйнуються в інших. Згодом Жан Фуко (1819-1868) з вимірюваннями швидкості світла в різних середовищах і Огюстен Френель (1788-1827) з детальними експериментами, пов'язаними з інтерференцією і дифракцією світла, надали ще один переконливий доказ того, що світло є хвилею. Отже, світло, як відомо, є хвилею, і Максвелл передбачив існування електромагнітних хвиль, які поширюються зі швидкістю світла. Висновок здавався неминучим: світло має бути формою електромагнітного випромінювання. Але теорія Максвелла показала, що для електромагнітних хвиль можливі інші довжини хвиль і частоти, ніж у світла. Він показав, що електромагнітне випромінювання з тими ж фундаментальними

властивостями, що і видиме світло, повинно існувати на будь-якій частоті. Іншим залишалось перевірити і підтвердити цей прогноз.

## ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 6.1

Коли включається ЕРС на конденсаторі і конденсатор заряджається, коли магнітне поле, індуковане струмом зміщення, має найбільшу величину?

### Спостереження Герца

Німецький фізик Генріх Герц (1857-1894) першим почав генерувати і виявляти в лабораторії певні типи електромагнітних хвиль. Починаючи з 1887 року, він провів ряд експериментів, які не тільки підтвердили існування електромагнітних хвиль, але і підтвердили, що вони поширюються зі швидкістю світла.

Герц використовував  $RLC$ -контур змінного струму (резистор-катушка індуктивності-конденсатор), який резонує на відомій частоті  $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$ , і з'єднав його з петлею з дроту, як показано на рис. 6.5. Висока напруга, індукована через щілину в контурі, виробляла іскри, які були видимим свідченням струму в контурі і допомагали генерувати електромагнітні хвилі.

Поряд з першим контуром Герц помістив ще одну петлю, приєднану до іншого  $RLC$ -контура, який можна було налаштувати (як циферблат на радіоприймачі) на ту ж резонансну частоту, що і першу, і, таким чином, змусити приймати електромагнітні хвилі. Ця петля також мала щілину, через яку утворювалися іскри, що давало переконливі докази того, що електромагнітні хвилі були отримані.

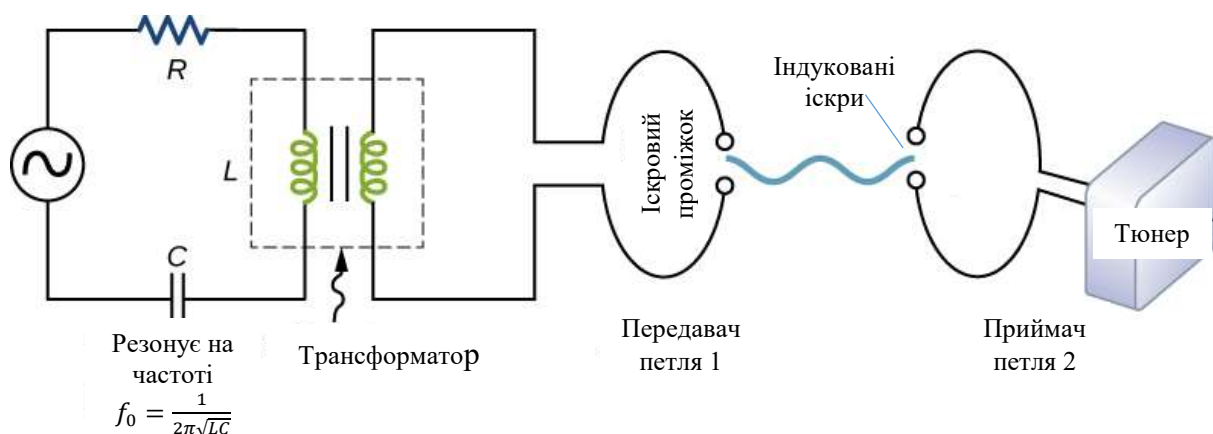


Рис. 6.5. Апарат, використаний Герцом в 1887 році для генерації і виявлення електромагнітних хвиль

Герц також вивчав картини відбиття, заломлення та інтерференції електромагнітних хвиль, які він генерував, підтверджуючи їх хвильовий характер. Він зміг визначити довжини хвиль за інтерференційними діаграмами, а знаючи їх частоти, розрахувати швидкість поширення за допомогою рівняння  $v = fL$ , де  $v$  — швидкість хвилі,  $f$  — її частота, а  $L$  — це його довжина хвилі. Таким чином, Герц зміг довести, що електромагнітні хвилі поширюються зі швидкістю світла. Одиниця вимірювання частоти в СІ, герц ( $1 \text{ Гц} = 1 \text{ цикл/с}$ ), названа на його честь.

## ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 6.2

Чи може електричне поле поширюватися у вигляді хвилі у вакуумі без магнітного поля? Обґрунтуйте свою відповідь.

### 6.2. Плоскі електромагнітні хвилі

Механічні хвилі проходять через таке середовище, як струна, вода або повітря. Мабуть, найбільш значущим передбаченням рівнянь Максвелла є існування комбінованих електричних і магнітних (або електромагнітних) полів, які поширюються в просторі у вигляді електромагнітних хвиль. Оскільки рівняння Максвелла справедливі у вільному просторі, передбачені електромагнітні хвилі, на відміну від механічних, не потребують середовища для свого поширення.

Загальне трактування фізики електромагнітних хвиль виходить за рамки цього підручника. Однак ми можемо дослідити окремий випадок електромагнітної хвилі, яка поширюється у вільному просторі вздовж осі  $x$  заданої системи координат.

#### Електромагнітні хвилі в одному напрямку

Електромагнітна хвиля складається з електричного поля, яке зазвичай визначається в термінах дії сили на заряд на нерухомому заряді, і магнітного поля, визначеного в термінах дії сили на заряд на рухомому заряді. Вважається, що електромагнітне поле є функцією тільки координати  $x$  і часу  $t$ . Тоді  $y$ -складова електричного поля записується у вигляді  $E_y(x, t)$ ,  $z$ -складова магнітного поля як  $B_z(x, t)$  тощо. Оскільки ми займаємо вільний простір, там вільних зарядів або струмів немає, тому ми можемо встановити  $Q_{\text{in}} = 0$  і  $I = 0$  в рівняннях Максвелла.

#### Поперечна природа електромагнітних хвиль

Спочатку розглянемо, що передбачає закон Гаусса для електричних полів про взаємні напрямки електричного поля і напрямку поширення в електромагнітній хвилі. Припустимо, що поверхня Гаусса є поверхнею

прямокутної коробки, поперечний переріз якої є квадратом зі стороною  $l$ , а третя сторона має довжину  $\Delta x$ , як показано на рис. 6.6.

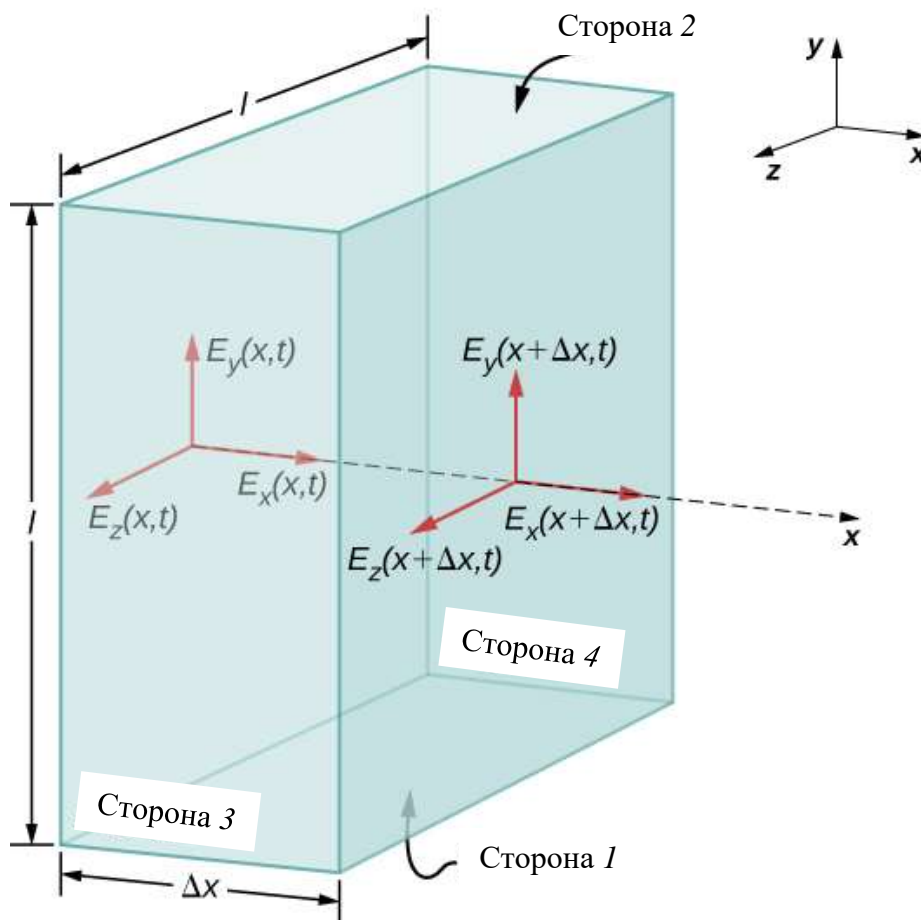


Рис. 6.6. Поверхня прямокутної коробки розмірів  $l \times l \times \Delta x$  — наша гауссова поверхня. Показане електричне поле походить від електромагнітної хвилі, що поширюється вздовж осі  $x$

Оскільки електричне поле є функцією тільки  $x$  і  $t$ ,  $y$ -компонента електричного поля однакова як зверху (позначена стороною 2), так і знизу (позначена стороною 1) коробки, так що ці два внески в потік скасовуються. Відповідний аргумент справедливий і для сумарного потоку від  $z$ -складової електричного поля через сторони 3 і 4. Таким чином, будь-який сумарний потік через поверхню повністю походить від  $x$ -складової електричного поля. Оскільки електричне поле не має  $y$ - або  $z$ -залежності,  $E_x(x, t)$  є постійною по поверхні коробки площею  $A$  і має, можливо, інше значення  $E_x(x + \Delta x, t)$ , що є постійним на протилежному боці коробки. Застосування закону Гаусса дає:

$$\Phi = -E_x(x, t)A + E_x(x + \Delta x, t)A = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}, \quad (6.13)$$

де  $A = l \times l$  — площа передньої і задньої граней прямокутної поверхні. Але заряд, що додається  $Q_{in} = 0$ , отже, сумарний потік цього компонента також

дорівнює нулю, і з рівняння 6.13 випливає, що  $E_x(x, t) = E_x(x + \Delta x, t)$  для будь-якого  $\Delta x$ . Тому, якщо існує  $x$ -компонент електричного поля, то він не може змінюватися з  $x$ . Однорідне поле такого роду було б просто штучно накладено на біжучу хвилю, наприклад, за допомогою пари паралельно заряджених пластин. Такий компонент  $E_x(x, t)$  не буде частиною електромагнітної хвилі, що поширюється вздовж осі  $X$ ; оскільки  $E_x(x, t) = 0$  для цієї хвилі. Отже, єдиними ненульовими складовими електричного поля є  $E_y(x, t)$  і  $E_z(x, t)$ , перпендикулярно напрямку поширення хвилі.

Аналогічний аргумент справедливий, якщо замінити  $E$  на  $B$  і використовувати закон Гаусса для магнетизму замість закону Гаусса для електричних полів. Звідси видно, що поле  $B$  також перпендикулярно напрямку поширення хвилі. Таким чином, електромагнітна хвиля є поперечною хвилею, її коливальні електричні та магнітні поля перпендикулярні напрямку її поширення.

### Швидкість поширення електромагнітних хвиль

Далі ми можемо застосувати рівняння Максвелла до опису, наведеного для пояснення рис. 6.4 в попередньому розділі, щоб отримати рівняння для поля  $E_z$  поля  $B$ , що змінюється, і для поля  $B_z$  поля  $E$ , що змінюється. Потім ми об'єднаємо два рівняння, щоб показати, як мінливі поля  $E$  і  $B$  поширюються в просторі зі швидкістю, точно рівною швидкості світла.

Спочатку застосуємо закон Фарадея до сторони 3 поверхні Гауса, використовуючи шлях, показаний на рис. 6.7. Оскільки  $E_x(x, t) = 0$ , ми маємо:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_y(x, t)l + E_y(x + \Delta x, t)l.$$

Припускаючи, що  $\Delta x$  є невеликим значення  $E_y(x + \Delta x, t)$  можна представити так:

$$E_y(x + \Delta x, t) = E_y(x, t) + \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial x} \Delta x,$$

тому

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial x} \cdot l \Delta x.$$

Оскільки  $\Delta x$  є невеликим, магнітний потік через грань можна апроксимувати його величиною в центрі пройденної області, а саме  $B_z(x + \Delta x/2, t)$ . Тоді потік поля  $B$  через грань 3 дорівнює полю  $B$ , помноженому на площу,

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dA = B_z \left( x + \frac{\Delta x}{2}, t \right) \cdot l \Delta x. \quad (6.14)$$

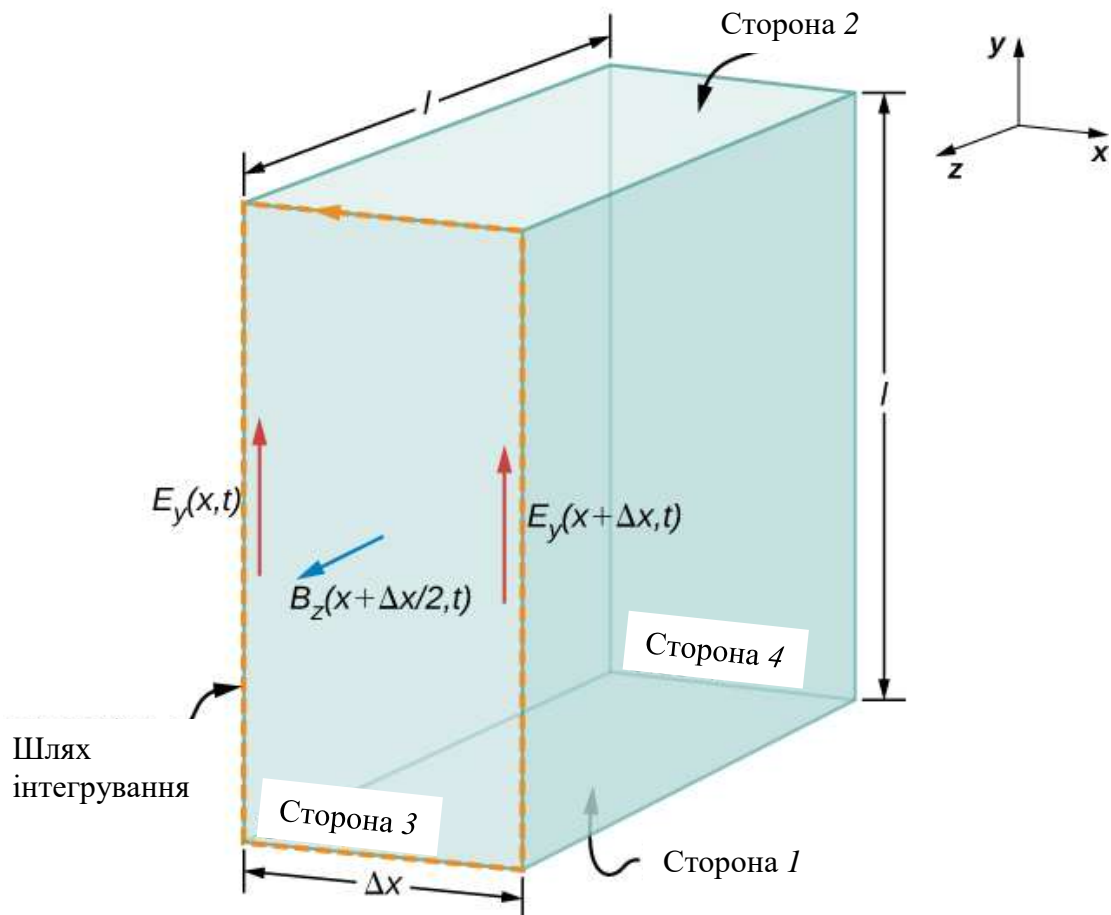


Рис. 6.7 Застосовуємо закон Фарадея до передньої частини прямокутника, обчислюючи  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$  уздовж прямокутного краю сторони 3 у вказаному напрямку, приймаючи поле  $B$ , що перетинає грань, за його значення приблизно посередині пройденної області

За законом Фарадея,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dA. \quad (6.15)$$

Отже, з рівняння 6.13 і рівняння 6.14 отримуємо:

$$\frac{\partial E_y(x, t)}{\partial x} \cdot l\Delta x = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ B_z \left( x + \frac{\Delta x}{2}, t \right) \right] \cdot l\Delta x.$$

Скасувавши  $l\Delta x$  і прийнявши  $\Delta x \rightarrow 0$ , у нас залишається:

$$\frac{\partial E_y(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial B_z(x, t)}{\partial t}. \quad (6.16)$$

Замість цього ми могли б застосувати закон Фарадея до верхньої поверхні (пронумерованої 2) на рис. 6.7, щоб отримати теж рівняння:

$$\frac{\partial E_z(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial B_y(x, t)}{\partial t}. \quad (6.17)$$

Це рівняння, що описує просторово залежне поле  $E$ , створене залежним від часу полем  $B$ .



Далі застосовуємо закон Ампера-Максвелла (з  $I = 0$ ) на тих же двох гранях (поверхня 3, а потім поверхня 2) прямокутної коробки на рис. 6.7. Застосовуючи рівняння 6.10, отримуємо:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} da$$

до поверхні 3, а потім до поверхні 2, що дає два рівняння:

$$\frac{\partial B_y(x,t)}{\partial x} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z(x,t)}{\partial t}, \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t}, \quad (6.19)$$

Ці рівняння описують просторово залежне поле  $B$ , створене залежним від часу полем  $E$ .

Далі ми об'єднаємо рівняння, що показують змінне поле  $B$ , яке створює поле  $E$ , з рівнянням, що показує змінне поле  $E$ , яке створює поле  $B$ . Взявши похідну рівняння 6.16 відносно  $x$  і використовуючи рівняння 6.19, отримуємо:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \right)$$

або

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \quad (6.20)$$

Таку форму приймає загальне хвильове рівняння для нашої плоскої хвилі. Оскільки рівняння описують хвилю, що поширюється з деякою поки що невизначеною швидкістю  $c$ , ми можемо припустити, що компоненти поля є функціями  $x - ct$  для хвилі, що поширюється в напрямку  $+x$ , тобто

$$E_y(x, t) = f(\xi), \quad (6.21)$$

де  $\xi = x - ct$ .

Залишилося в якості математичної вправи показати, використовуючи правила диференціювання, що з рівняння 6.17 і рівняння 6.18, що:

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1.$$

Таким чином, швидкість електромагнітної хвилі у вільному просторі визначається в термінах проникності і діелектричної проникності вільного простору:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (6.22)$$

З таким же успіхом ми могли б уявити електромагнітну хвилю з компонентами поля  $E_z(x, t)$  і  $B_y(x, t)$ . Той же тип аналізу з рівнянням 6.17 і рівнянням 6.18 також покаже, що швидкість електромагнітної хвилі дорівнює  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ .

Фізика рухомих електромагнітних полів була розроблена Максвеллом в 1873 році. Він показав у більш загальному вигляді, ніж наше виведення, що електромагнітні хвилі завжди поширюються у вільному

просторі зі швидкістю, заданою рівнянням 6.18. Якщо оцінювати швидкість  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ , ми знаходимо, що

$$c = \frac{1}{\sqrt{\left(8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}\right) \left(4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}}{\text{А}}\right)}} = 3,00 \times 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

яка є швидкістю світла. Уявіть собі, яке хвилювання, мабуть, відчував Максвелл, коли відкрив це рівняння! Він знайшов фундаментальний зв'язок між двома, здавалося б, не пов'язаними між собою явищами: електромагнітними полями і світлом.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 6.3

Хвильове рівняння було отримано шляхом (1) знаходження поля  $E$ , створеного мінливим полем  $B$ , (2) знаходження поля  $B$ , створеного мінливим полем  $E$ , і об'єднання двох результатів. Яке з рівнянь Максвелла було покладено в основу кроку (1), а яке – кроку (2)?

#### Як пов'язані поля $E$ і $B$

До теперішнього часу ми бачили, що швидкості зміни різних компонентів полів  $E$  і  $B$  пов'язані між собою, що електромагнітна хвиля поперечна, і що хвиля поширюється зі швидкістю  $c$ . Далі ми покажемо, що мають на увазі рівняння Максвелла про співвідношення величин полів  $E$  і  $B$  і відносних напрямках полів  $E$  і  $B$ .

Розглянемо розв'язок рівняння 6.16 у вигляді плоских хвиль для електричного поля:

$$E_y(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t). \quad (6.23)$$

Ми доволно прийняли хвилю, що рухається в напрямку  $+x$ , і вибрали її фазу так, щоб максимальна напруженість поля виникала в момент  $t = 0$  на початку координат. Ми маємо право розглядати таким чином тільки синуси і косинуси і узагальнювати результати, тому що з теореми Фур'є випливає, що ми можемо виразити будь-яку хвилю, включаючи навіть квадратні ступінчасті функції, як суперпозицію синусів і косинусів.

У будь-якій конкретній точці простору поле  $E$  синусоїдально коливається з кутовою частотою  $\omega$  між  $+E_0$  і  $-E_0$ , і аналогічно поле  $B$  коливається між  $+B_0$  і  $-B_0$ . Амплітуда хвилі – це максимальне значення  $E_y(x, t)$ . Період коливань  $T$  – це час, необхідний для повного коливання. Частота  $f$  – це число повних коливань за одиницю часу і пов'язана з кутовою частотою  $\omega$  так:  $\omega = 2\pi f$ . Довжина хвилі  $\lambda$  – це відстань, яку долає один повний цикл хвилі, а хвильове число  $k$  – це кількість довжин хвиль, які вписуються в відстань  $2\pi$  в одиницях, що використовуються. Ці величини пов'язані так само, як і для механічної хвилі виразами:

$$\omega = 2\pi f, \quad f = \frac{1}{T}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad c = f\lambda = \frac{\omega}{k}.$$

Враховуючи, що розв'язок  $E_y$  має вигляд, показаний в рівнянні 6.20, нам потрібно визначити поле  $B$ , яке його супроводжує. З рівняння 6.18 складова магнітного поля  $B_z$  повинна підкорятися співвідношенням:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} E_0 \cos(kx - \omega t) = kE_0 \sin(kx - \omega t) \quad (6.24)$$

Оскільки графік хвилі  $B$ -поля поширюється в  $+x$ -напрямку з тією ж швидкістю  $c$ , що й графік  $E$ -поля, він повинен бути функцією від  $k(x-ct) = kx - \omega t$ . Таким чином, з вигляду рівняння 6.21 робимо висновок відносно  $B_z$ :

$$B_z(x, t) = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(kx - \omega t) = \frac{1}{c} E_0 \cos(kx - \omega t).$$

Ці результати можна записати у вигляді

$$E_y(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t),$$

$$B_z(x, t) = B_0 \cos(kx - \omega t). \quad (6.25)$$

$$\frac{E_y}{B_z} = \frac{E_0}{B_0} = c. \quad (6.26)$$

Отже, піки полів  $E$  і  $B$  збігаються, як і западини хвилі, і в кожній точці поля  $E$  і  $B$  знаходяться в однаковому співвідношенні, рівному швидкості світла  $c$ . Плоска хвиля має вигляд, показаний на рис. 6.8.

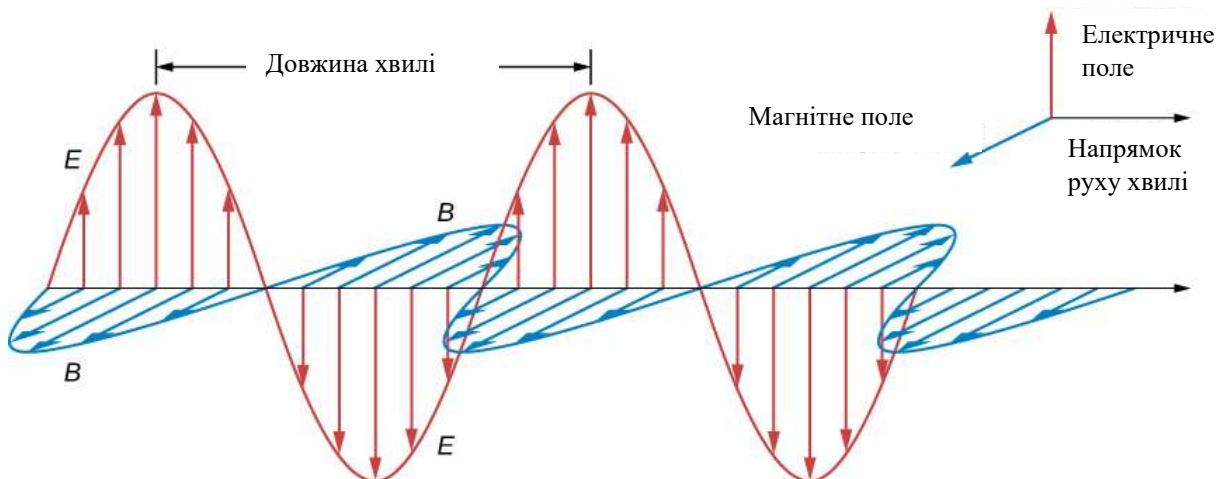


Рис. 6.8. Плоскохвильовий розв'язок рівнянь Максвелла має поле  $B$ , прямо пропорційне полю  $E$  в кожній точці, із зазначенням відносних напрямків

### ПРИКЛАД 6.2. Розрахунок напруженості $B$ -поля в електромагнітній хвилі

Яка максимальна величина поля  $B$  в електромагнітній хвилі, якщо максимальна напруженість  $E$ -поля 1000 В/м?

## Стратегія

Щоб знайти величину поля  $B$ , переставимо рівняння 6.23 так, щоб розв'язати його відносно  $B$ :

$$B = \frac{E}{c}.$$

## Розв'язок

Нам дано  $E$ , а  $c$  – швидкість світла. Введення їх у вираз для  $B$  дає:

$$B = \frac{1000 \text{ В/м}}{3 \times 10^8 \text{ м/с}} = 3,33 \times 10^{-6} \text{ Тл.}$$

## Обговорення

Напруженість  $B$ -поля становить менше десятої частини від явно слабкого магнітного поля Землі. Це означає, що відносно сильне електричне поле 1000 В/м супроводжується відносно слабким магнітним полем.

Зміна електричних полів створює відносно слабкі магнітні поля. Об'єднані електричні і магнітні поля можуть бути виявлені в електромагнітних хвилях, скориставшись явищем резонансу, як це зробив Герц. Систему з тією ж власною частотою, що і електромагнітна хвиля, можна змусити коливатися. Всі радіо- і телеприймачі використовують цей принцип для вловлювання, а потім посилення слабких електромагнітних хвиль, при цьому відкидаючи всі інші не на їх резонансній частоті.

## ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 6.4

До яких висновків прийшов аналіз рівнянь Максвелла про ці властивості плоскої електромагнітної хвилі:

- відносні напрямки поширення хвилі, поля  $E$  і поля  $B$ ,
- швидкість руху хвилі і те, як швидкість залежить від частоти, і
- відносні величини полів  $E$  і  $B$ .

## Виробництво та детектування електромагнітних хвиль

Постійний електричний струм створює магнітне поле, яке є постійним у часі і яке не поширюється хвилею. Прискорювальні заряди, однак, породжують електромагнітні хвилі. Електричний заряд, що коливається вгору і вниз, або змінний струм або потік заряду в провіднику випромінюють випромінювання на частотах своїх коливань. Електромагнітне поле *дипольної антени* показано на рис. 6.9.

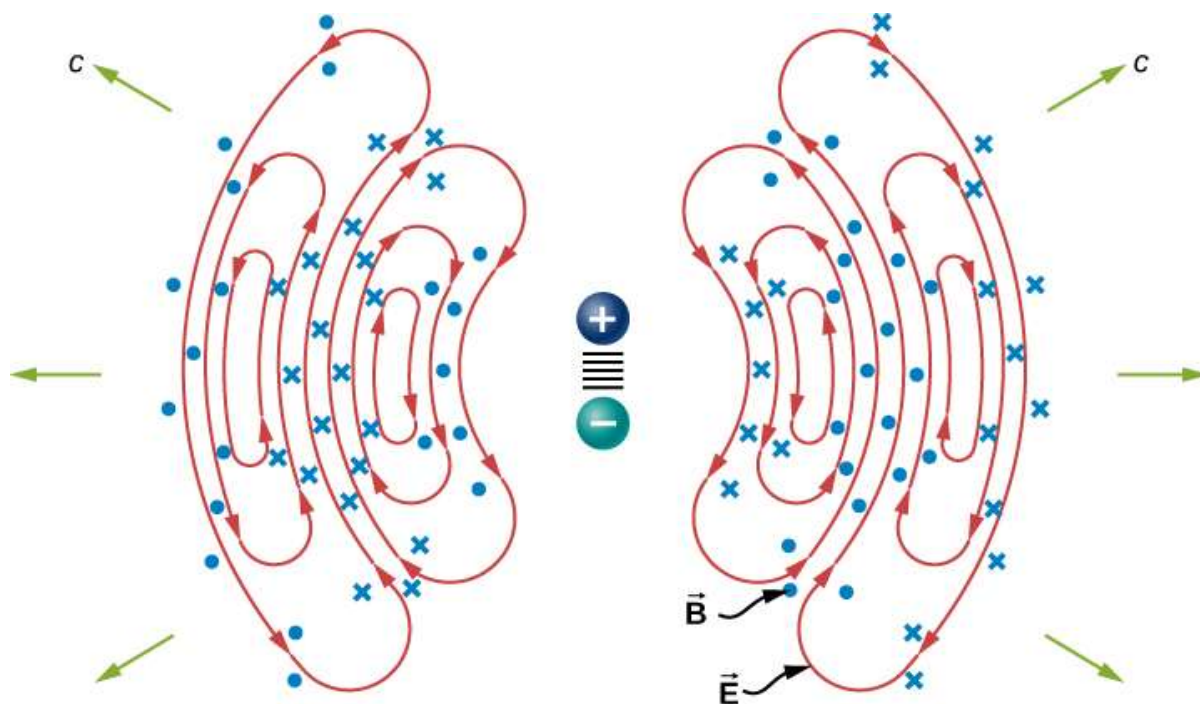


Рис. 6.9. Коливальний рух зарядів в дипольній антені виробляє електромагнітне випромінювання

Позитивні та негативні заряди на двох провідниках змушуються обертатися з потрібною частотою на виході передавача як джерела живлення. Струм, що постійно змінюється, прискорює заряд в антені, і це призводить до коливань електричного поля на відстані від антени. Зміна електричних полів породжує зміну магнітних полів, які, в свою чергу, створюють зміну електричних полів, які тим самим поширюються у вигляді електромагнітних хвиль. Частота цього випромінювання така ж, як і частота джерела змінного струму, що прискорює електрони в антені. Двома провідними елементами дипольної антени зазвичай є прямі дроти. Загальна довжина двох проводів, як правило, становить близько половини бажаної довжини хвилі (звідси альтернативна назва *напівхвильової антени*), оскільки це дозволяє налаштувати стоячі хвилі та підвищує ефективність випромінювання.

Показані лінії електричного поля в одній площині. Магнітне поле перпендикулярне цій площині. Це поле випромінювання має циліндричну симетрію навколо осі диполя. Лінії поля поблизу диполя не відображаються. Малюнок зовсім не однорідний у всіх напрямках. Найсильніший сигнал подається в напрямках, перпендикулярних осі антени, які були б горизонтальними, якщо антена встановлена вертикально. Уздовж осі антени нульова інтенсивність. Поля, виявлені далеко від антени, є результатом змінних електричних і магнітних полів, які індукують один одного і поширюються у вигляді електромагнітних хвиль. Далекі від антени хвильові фронти, або поверхні рівної фази для електромагнітної

хвилі, майже сферичні. Ще далі від антени випромінювання поширюється як хвилі електромагнітної площини.

Електромагнітні хвилі несуть енергію від свого джерела, подібно до того, як звукова хвиля відносить енергію від стоячої хвилі на струні гітари. Антена для прийому електромагнітних сигналів працює у зворотному напрямку. Електромагнітні хвилі, що надходять, індукують коливальні струми в антені, кожна зі своєю частотою. Радіоприймач включає в себе схему тюнера, резонансну частоту якого можна регулювати. Тюнер сильно реагує на потрібну частоту, але не на інші, дозволяючи користувачеві налаштуватися на потрібну трансляцію. Електричні компоненти підсилюють сигнал, утворений електронами, що рухаються. Потім сигнал перетворюється в аудіо та/або відео формат.

### 6. 3. Енергія, що переноситься електромагнітними хвилями

Кожен, хто користувався мікрохвильовою піччю, знає, що в електромагнітних хвилях є енергія. Іноді ця енергія очевидна, наприклад, в теплі літнього Сонця. В інших випадках вона ледь помітна, наприклад, невідчутна енергія гамма-променів, які можуть руйнувати живі клітини.

Електромагнітні хвилі приносять енергію в систему за рахунок своїх електричних і магнітних полів. Ці поля можуть докладати сили і переміщати заряди в системі і, таким чином, виконувати роботу над ними. Однак в самій електромагнітній хвилі є енергія, незалежно від того, поглинена вона чи ні. Після створення поля відводять енергію від джерела. Якщо деяка кількість енергії пізніше поглинається, напруженість поля зменшується, і все, що залишилося, рухається далі.

Зрозуміло, що чим більша напруженість електричного і магнітного полів, тим більше роботи вони можуть виконати і тим більшу енергію несе електромагнітна хвиля. В електромагнітних хвилях амплітуда – це максимальна напруженість поля електричного і магнітного полів (рис. 6.10). Енергія хвилі визначається амплітудою хвилі.

Для плоскої хвилі, що рухається в напрямку позитивної осі  $x$ , при цьому фаза хвилі обрана так, щоб максимум хвилі знаходився на початку координат  $t = 0$ , електричне і магнітне поля підкоряються рівнянням:

$$E_y(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t).$$

$$B_z(x, t) = B_0 \cos(kx - \omega t).$$

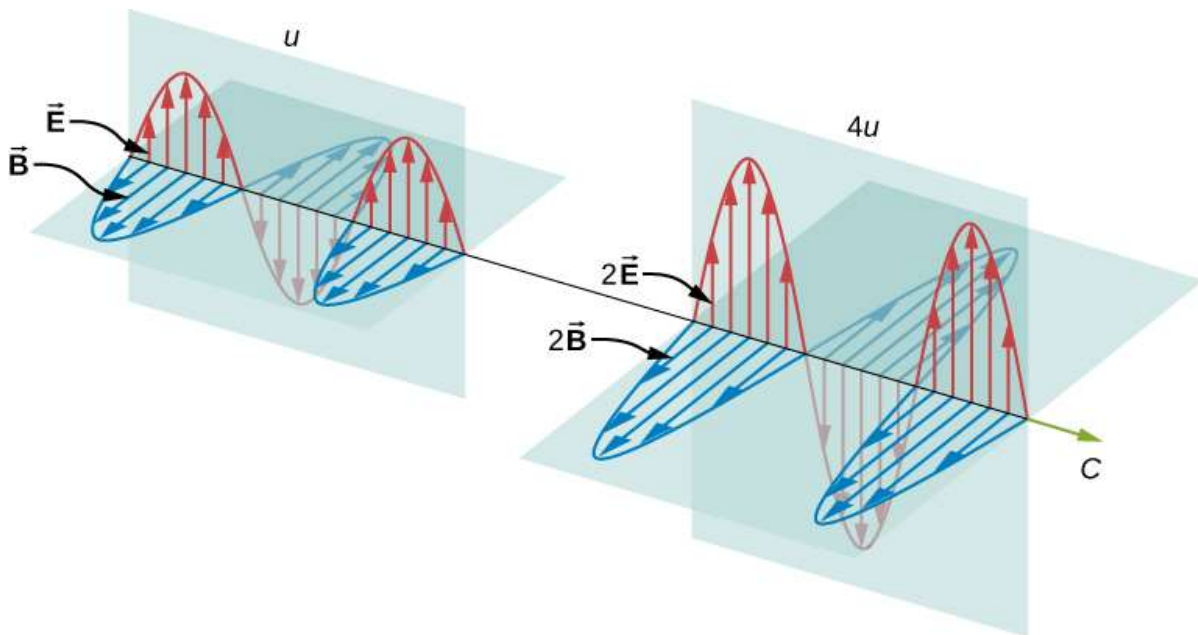


Рис. 6.10. Енергія, що переноситься хвилею, залежить від її амплітуди. При електромагнітних хвилях подвоєння поля  $E$  і поля  $B$  збільшує густину енергії  $u$  і потік енергії  $uc$  в чотири рази

Енергія в будь-якій частині електромагнітної хвилі є сумою енергій електричного і магнітного полів. Ця енергія на одиницю об'єму, або густина енергії  $u$ , є сумою густини енергії електричного поля і густини енергії магнітного поля. Вирази для обох густин енергії поля обговорювалися раніше. Об'єднавши ці внески, ми отримаємо:

$$u(x, t) = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Вираз  $E = cB = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} B$  показує, що густина магнітної енергії  $u_B$  і густина електричної енергії  $u_E$  є рівними, незважаючи на те, що змінні електричні поля, як правило, створюють лише невеликі магнітні поля. Рівність густин електричної і магнітної енергії призводить до співвідношення:

$$u(x, t) = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}. \quad (6.27)$$

Густина енергії рухається разом з електричним і магнітним полями подібно до самих хвиль.

Швидкість перенесення енергії ми можемо знайти, розглянувши невеликий інтервал часу  $\Delta t$ . Як показано на рис. 6.11, енергія, що міститься в циліндрі довжиною  $c\Delta t$  і площею поперечного перерізу  $A$  проходить через площину поперечного перерізу за інтервал часу  $\Delta t$ .

Енергія, що проходить через область  $A$  за час  $\Delta t$  дорівнює:

$$u \times \text{об'єм} = uAc\Delta t.$$

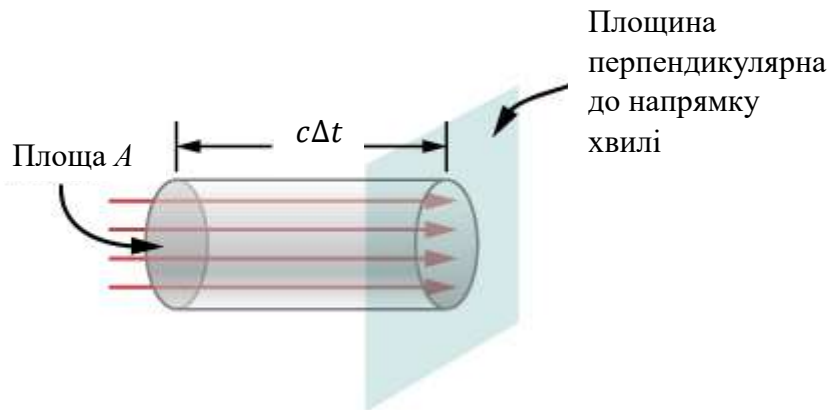


Рис. 6.11. Енергія  $uAc\Delta t$  міститься в електричному і магнітному полі електромагнітної хвилі в об'ємі  $Ac\Delta t$ , проходить через ділянку  $A$  за час  $\Delta t$

Енергію одиниці площі за одиницю часу, що проходить через площину, перпендикулярну хвилі, називають **потокем енергії** і позначають  $S$ . Її можна обчислити, розділивши енергію на площу  $A$  і інтервал часу  $\Delta t$ :

$$S = \frac{\text{Енергія, що проходить через площину } A \text{ за час } \Delta t}{A\Delta t} =$$

$$= uc = \varepsilon_0 c E^2 = \frac{1}{\mu_0} EB.$$

Загалом, потік енергії через будь-яку поверхню також залежить від орієнтації поверхні. Щоб врахувати напрямок, введемо вектор  $\vec{S}$ , який називають **вектором Пойнтінга**, з наступним визначенням:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (6.28)$$

Векторний добуток  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  вказує в напрямку, перпендикулярному до обох векторів. Щоб підтвердити, що напрямок  $\vec{S}$  є напрямком поширення хвилі, а не її поширення в від'ємному напрямку, поверніться до рис. 6.7. Зауважимо, що закони Ленца і Фарадея свідчать про те, що при збільшенні магнітного поля в часі електричне поле більше при  $x$ , ніж при  $x+\Delta x$ . Електричне поле зменшується зі збільшенням  $x$  в даний момент часу і в даному місці. Пропорційність між електричним і магнітним полями вимагає, щоб електричне поле збільшувалося в часі разом з магнітним полем. Це можливо тільки в тому випадку, якщо на діаграмі хвиля поширюється вправо, і в цьому випадку відносні орієнтації показують, що  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$  знаходиться саме в напрямку поширення електромагнітної хвилі.

Потік енергії в будь-якій точці також змінюється в часі, що можна побачити, підставляючи  $u$  з рівняння 6.23 в рівняння 6.27:

$$S(x, t) = c\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t). \quad (6.29)$$



Оскільки частота видимого світла дуже висока, порядку  $10^{14}$  Гц, потік енергії для видимого світла через будь-яку область є швидко мінливою величиною. Більшість вимірювальних приладів, включаючи наші очі, виявляють лише середнє значення за багато циклів. Середнє за часом потоку енергії дорівнює інтенсивності  $I$  електромагнітної хвилі і є потужністю на одиницю площі. Вона може бути виражена усередненням функції косинуса в рівнянні 6.29 за один повний цикл, що те ж саме, що і усереднення часу за багатьма циклами (тут  $T$  – один період):

$$I = S_{\text{ср}} = c\varepsilon_0 E_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \left( 2\pi \frac{t}{T} \right) dt. \quad (6.30)$$

Ми можемо визначити інтеграл, зауважити, що, оскільки синус і косинус відрізняються лише фазою, середнє за повний цикл для  $\cos^2(\xi)$  є такою ж величиною, що і для  $\sin^2(\xi)$ :

$$\langle \cos^2 \xi \rangle = \frac{1}{2} [\langle \cos^2 \xi \rangle + \langle \sin^2 \xi \rangle] = \frac{1}{2} \langle 1 \rangle = \frac{1}{2}.$$

де кутові дужки  $\langle \dots \rangle$  – операції усереднення часу. Отже, інтенсивність світла, що рухається зі швидкістю  $c$  у вакуумі дорівнює:

$$I = S_{\text{ср}} = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2, \quad (6.31)$$

де  $E_0$  – максимальна напруженість електричного поля, яка також є амплітудою електричного поля. Використовуючи зв'язок між електричним і магнітним полем, отримуємо ще один вираз:

$$I = \frac{cB_0^2}{2\mu_0}, \quad (6.32)$$

де  $B_0$  – амплітуда магнітного поля, яка дорівнює максимальній напруженості магнітного поля. Використовуючи той факт, що  $cB_0 = E_0$ , (6.32) набуває вигляду:

$$I = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}. \quad (6.33)$$

Ми можемо використовувати будь-яке з трьох попередніх рівнянь, тому що ці три рівняння насправді є різними версіями одного і того ж результату: енергія хвилі пов'язана з її амплітудою в квадраті. Крім того, оскільки ці рівняння засновані на припущенні, що електромагнітні хвилі синусоїдальні, пікова інтенсивність вдвічі перевищує середню інтенсивність; тобто  $I_0 = 2I$ .

### ПРИКЛАД 6.3. Лазерний промінь

Промінь від невеликого лабораторного лазера зазвичай має інтенсивність близько  $1,0 \times 10^{-3}$  Вт/м<sup>2</sup>. Припускаючи, що промінь складається з плоских хвиль, обчисліть амплітуди електричного і магнітного полів в пучку.

### Стратегія

За допомогою рівняння, що виражає залежність інтенсивності від напруженості електричного поля, обчисліть електричне поле.

### Розв'язок

З рівняння 6.31 випливає, що інтенсивність лазерного променя дорівнює:

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2.$$

Отже, амплітуда електричного поля дорівнює:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2}{c \epsilon_0} I} = \sqrt{\frac{2}{\left(3 \times 10^8 \frac{\text{М}}{\text{с}}\right) \left(8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{М}}\right)} \left(1 \times 10^{-3} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right)} = 0,87 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Амплітуду магнітного поля можна отримати з рівняння 12.20:

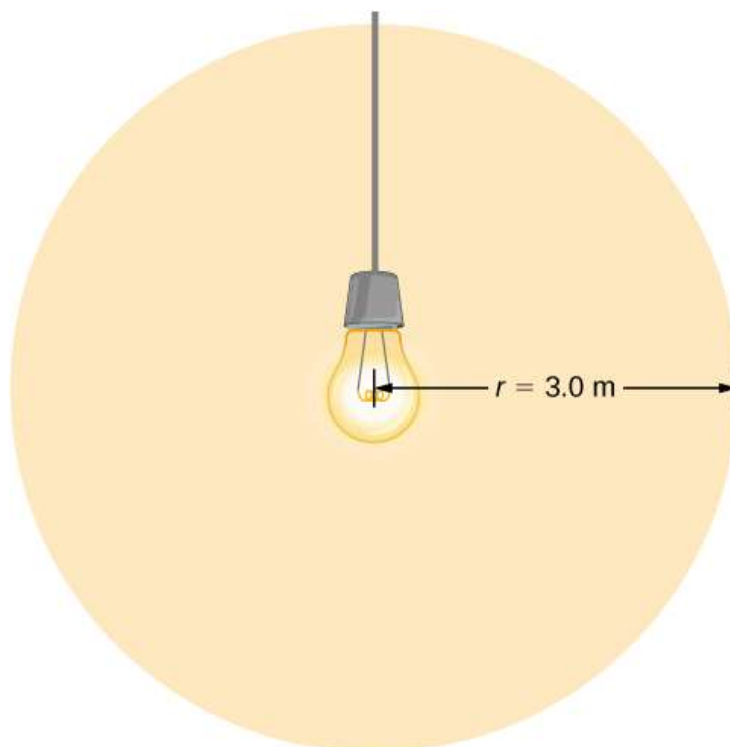
$$B_0 = E_0 c = 2,9 \times 10^{-9} \text{Тл}.$$

### ПРИКЛАД 6.4. Поля лампочок

Лампочка випромінює 5,00 Вт потужності у вигляді видимого світла. Які середні електричні та магнітні поля від світла на відстані 3,0 м?

### Стратегія

Припустимо, що вихідна потужність лампочки  $P$  розподілена рівномірно по сфері радіусом 3,0 м. Обчислимо інтенсивність, а від неї – електричне поле.



### Розв'язок

Інтенсивність видимого світла,  $\epsilon$ :

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2}.$$

Тоді амплітуда електричного і магнітного поля буде:

$$E_0 = \sqrt{2 \frac{P}{4\pi r^2 c \epsilon_0}} = \sqrt{2 \frac{5 \text{ Вт}}{4\pi (3 \text{ м})^2 \left(3 \times 10^8 \frac{\text{М}}{\text{с}}\right) \left(8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{М}}\right)}} = 5,77 \frac{\text{Н}}{\text{Кл}},$$
$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 1,92 \times 10^{-8} \text{ Тл}.$$

### Обговорення

Інтенсивність  $I$  зменшується зі збільшенням квадрата відстані, якщо випромінювання розсіюється рівномірно в усіх напрямках.

### ПРИКЛАД 6.5. Радіодіапазон

Радіопередавач потужністю 60 кВт на Землі посилає свій сигнал на супутник, що знаходиться на відстані 100 км (рис. 6.12). На якій відстані в тому ж напрямку сигнал мав би однакову максимальну напруженість поля, якби вихідна потужність передавача була збільшена до 90 кВт?

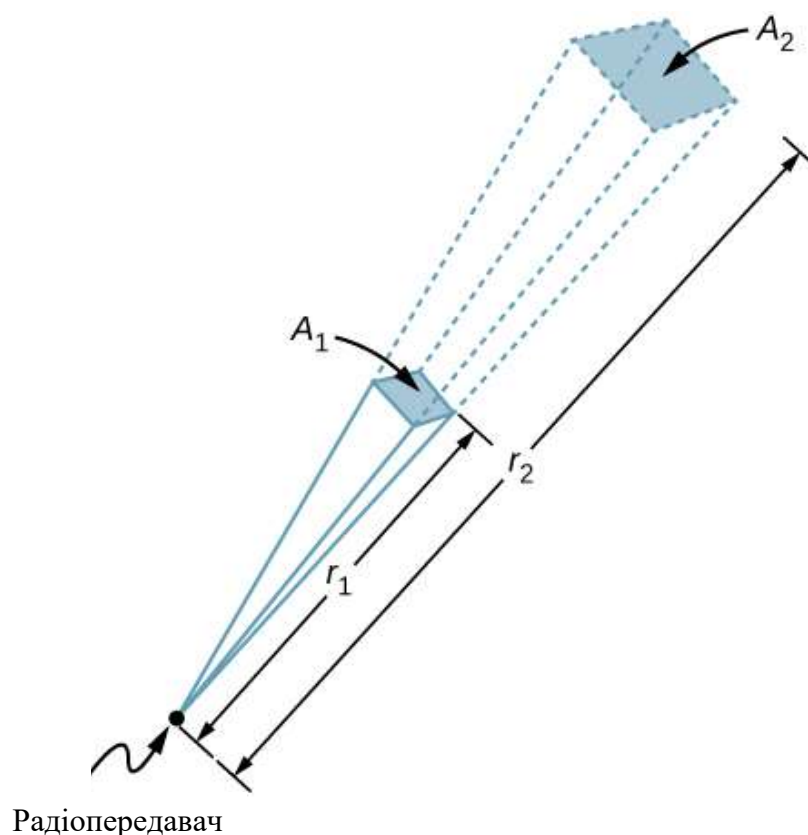


Рис. 6.12. У трьох вимірах сигнал поширюється під тілесним кутом назовні від свого джерела

## Стратегія

Площа, по якій розсіюється потужність в певному напрямку, збільшується в квадраті відстані, як показано на малюнку. Змініть вихідну потужність  $P$  у (90 кВт/60 кВт) разів – це змінити площу на той самий коефіцієнт, щоб зберегти величину  $I = \frac{P}{A} = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2}$ . Потім використаємо пропорцію площі  $A$  на діаграмі до відстані в квадраті, щоб знайти відстань, яка дає обчислену зміну площі.

## Розв'язок

Використаємо пропорційність площ квадратом відстаней:

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{90 \text{ Вт}}{60 \text{ Вт}}$$
$$r_2 = (100 \text{ км}) \sqrt{\frac{90}{60}} = 122 \text{ км.}$$

## Обговорення

Дальність радіосигналу – це максимальна відстань між передавачем і приймачем, що забезпечує нормальну роботу. За відсутності ускладнень, таких як відбиття від перешкод, інтенсивність підпорядковується закону обернених квадратів, і подвоєння діапазону вимагатиме множення степеня на чотири.

## 6.4. Імпульс і радіаційний тиск

Матеріальні об'єкти складаються із заряджених частинок. Електромагнітна хвиля, що падає на об'єкт, діє на заряджені частинки, відповідно до сили Лоренца, рівняння 6.11. Ці сили діють на частинки об'єкта, збільшуючи його енергію, про що йшлося в попередньому розділі. Енергія, яку несе сонячне світло, є звичною частиною кожного теплого сонячного дня. Набагато менш відомою особливістю електромагнітного випромінювання є надзвичайно слабкий тиск, який електромагнітне випромінювання створює, діючи силою в напрямку хвилі. Ця сила виникає тому, що електромагнітні хвилі містять і транспортують імпульс.

Щоб зрозуміти напрямок сили для дуже конкретного випадку, розглянемо плоску електромагнітну хвилю, що падає на метал, в якій рух електронів, як частина струму, гаситься опором металу, так що середній рух електронів знаходиться в фазі з силою, що його викликає. Це можна порівняти з тим, як об'єкт рухається проти тертя і зупиняється, як тільки сила, що штовхає його, припиняється (рис. 6.13). Коли електричне поле знаходиться в напрямку позитивної осі  $y$ , електрони рухаються в негативному напрямку  $y$ , а магнітне поле – в напрямку позитивної осі  $z$ . Застосовуючи правило правої руки і враховуючи негативний заряд

електрона, ми можемо побачити, що сила, що діє на електрон від магнітного поля знаходиться в напрямку позитивної осі  $x$ , яка є напрямком поширення хвилі. Коли поле  $E$  змінюється на протилежне, поле  $B$  також змінюється, і сила знову виявляється в тому ж напрямку. Рівняння Максвелла разом з рівнянням сили Лоренца містять у собі існування радіаційного тиску в набагато більшому сенсі, ніж цей конкретний приклад.

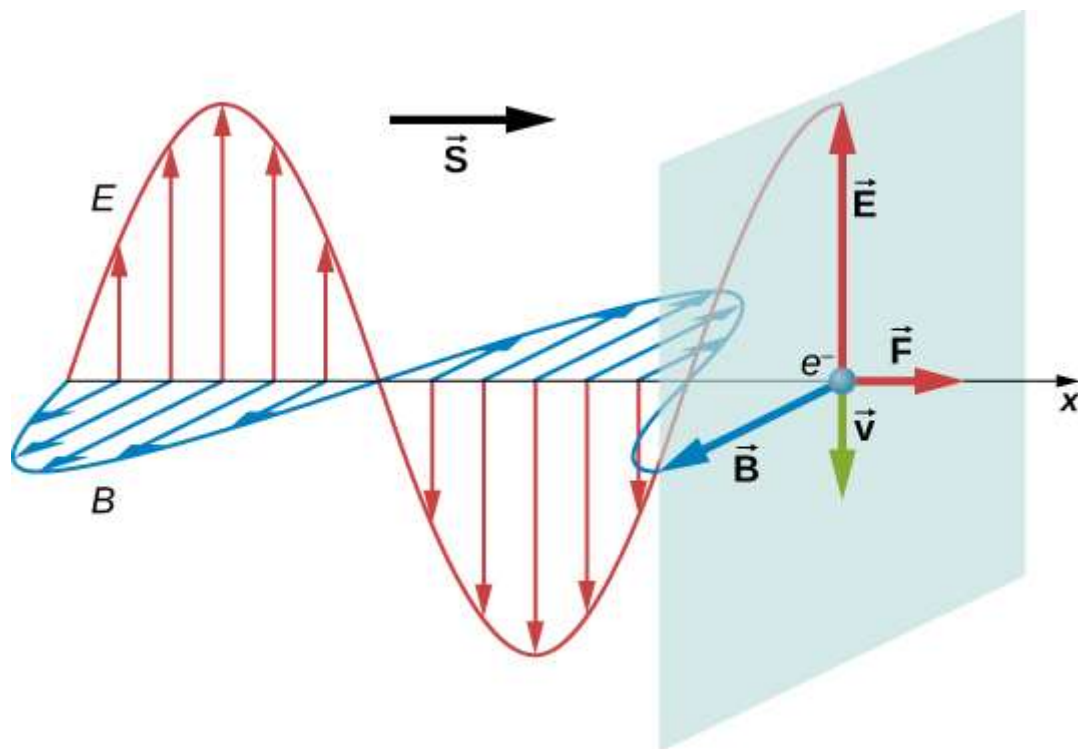


Рис. 6.13. Електричне і магнітне поля електромагнітної хвилі можуть об'єднуватися, утворюючи силу в напрямку поширення, як показано на прикладі окремого випадку електронів, рух яких сильно гаситься опором металу

Максвелл передбачив, що електромагнітна хвиля несе імпульс. Об'єкт, що поглинає електромагнітну хвилю, відчуває силу в напрямку поширення хвилі. Сила відповідає радіаційному тиску, що чиниться хвилею на об'єкт. Сила була б удвічі більшою, якби випромінювання відбивалося, а не поглиналося.

Передбачення Максвелла було підтверджено в 1903 році Ніколсом і Халлом шляхом точного вимірювання радіаційного тиску за допомогою крутильних терезів. Схематичне розташування елементів досліду показано на рис. 6.14. Дзеркала, підвішені до волокна, були поміщені в скляну ємність. Ніколс і Халл змогли отримати невелике вимірне відхилення дзеркал від світла на одне з них. На основі вимірюваного відхилення вони могли обчислити неврівноважену силу на дзеркалі і отримати узгодження з прогнозованим значенням сили.

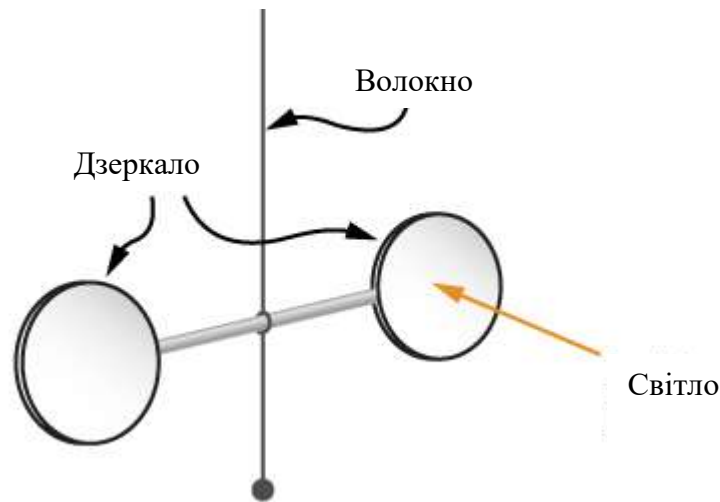


Рис. 6.14. Спрощена схема центральної частини апарату Ніколса і Халла, що використовується для точного вимірювання радіаційного тиску і підтвердження передбачення Максвелла

### Радіаційний тиск $p_{\text{рад}}$

Прикладений електромагнітною хвилею тиск на ідеально поглинаючу поверхню виявляється рівним густині енергії хвилі:

$$p_{\text{рад}} = u. \quad (6.34)$$

Якщо матеріал ідеально відбиває, наприклад, металева поверхня, і якщо падіння відбувається уздовж нормалі до поверхні, то тиск, що чиниться, вдвічі більший, оскільки напрямок імпульсу змінюється на протилежний при відбитті:

$$p_{\text{рад}} = 2u. \quad (6.35)$$

Ми можемо перевірити, що одиницею вимірювання є тиск:

$$[u] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{одиниця тиску.}$$

Рівняння 6.34 і рівняння 6.35 дають миттєвий тиск, але оскільки густина енергії коливається швидко, нас зазвичай цікавить усереднений за часом тиск випромінювання, який можна записати в термінах інтенсивності:

$$p = \langle p_{\text{рад}} \rangle = \begin{cases} \frac{I}{c}, & \text{ідеально поглинає} \\ \frac{2I}{c}, & \text{ідеально відбиває} \end{cases} \quad (6.36)$$

Радіаційний тиск відіграє певну роль у поясненні багатьох спостережуваних астрономічних явищ, включаючи появу комет. Комети – це, по суті, шматки крижаного матеріалу, в які вбудовані замерзлі гази і частинки породи і пилу. Коли комета наближається до Сонця, вона нагрівається і її поверхня починає випаровуватися. Кома комети – це туманна область навколо неї від газів і пилу. Деякі гази і пил утворюють хвости, коли залишають комету. Зверніть увагу на рис. 6.15, де комета має два хвости. Іонний хвіст (або газовий хвіст на рис. 6.15) складається в

основному з іонізованих газів. Ці іони електромагнітно взаємодіють із сонячним вітром, який є безперервним потоком заряджених частинок, що випромінюються Сонцем. Сила сонячного вітру на іонізовані гази досить сильна, тому іонний хвіст майже завжди спрямований прямо від Сонця. Другий хвіст складається з частинок пилу. Оскільки *пиловий хвіст* електрично нейтральний, він не взаємодіє з сонячним вітром. Однак на цей хвіст впливає радіаційний тиск, створюваний світлом від Сонця. Хоча цей тиск досить малий, він досить сильний, щоб змусити пиловий хвіст бути зміщеним зі шляху комети.

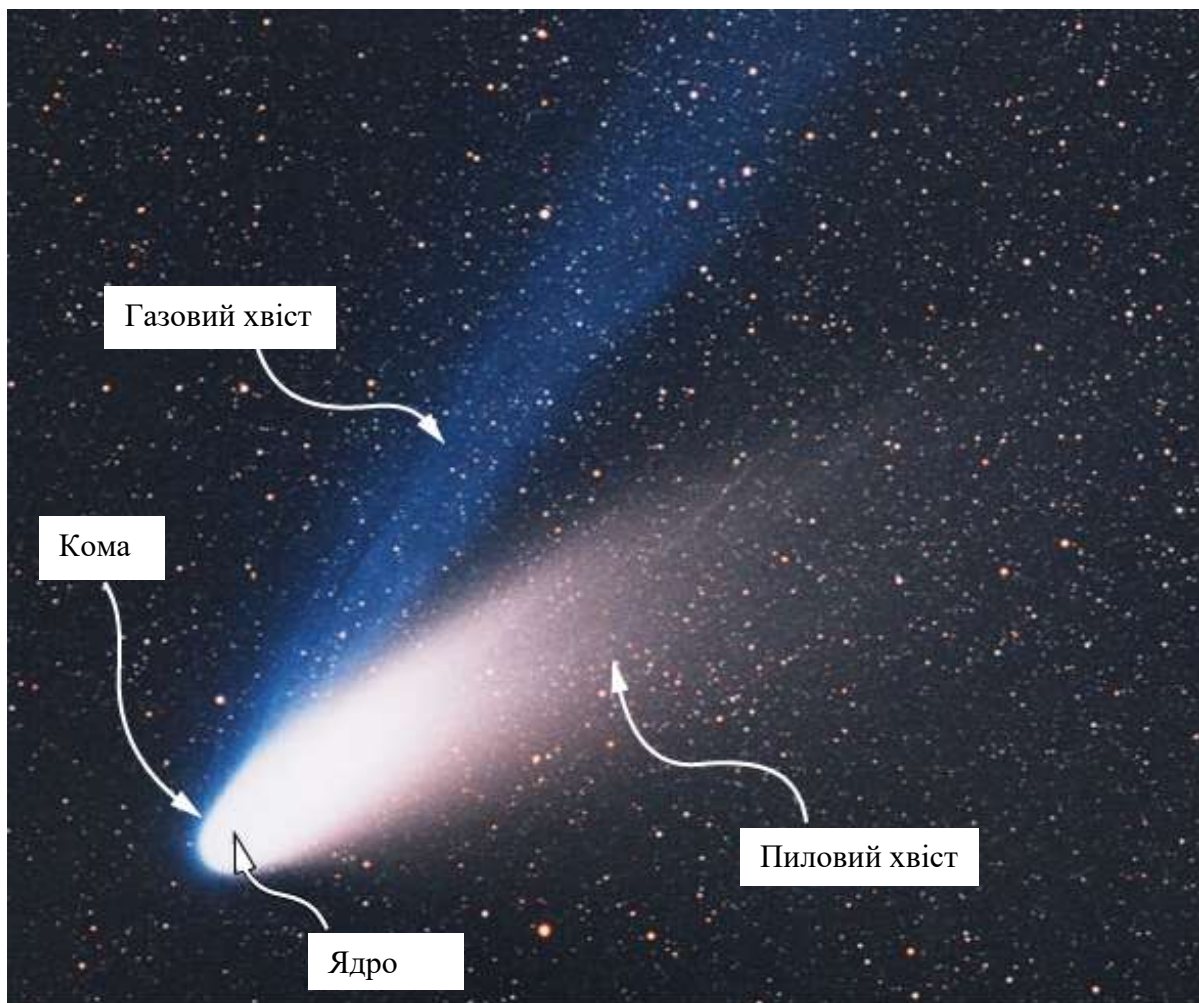


Рис. 6.15. При випаровуванні речовини, що нагрівається Сонцем, утворюються два хвости, як показано на цьому фото комети Ізона

#### **ПРИКЛАД 6.6. Комета Галлея**

9 лютого 1986 року комета Галлея перебувала в найближчій точці до Сонця, приблизно  $9,0 \times 10^{10}$  м від центру Сонця. Середня вихідна потужність Сонця становить  $3,8 \times 10^{26}$  Вт.

а) Обчисліть радіаційний тиск на комету в цій точці її орбіти. Припустимо, що комета відбиває все падаюче світло.

б) Припустимо, що 10-кілограмовий шматок матеріалу площею поперечного перерізу  $4,0 \times 10^{-2} \text{ м}^2$  відривається від комети. Обчисліть силу, що діє на цей шматок, зумовлену сонячною радіацією. Порівняйте цю силу з гравітаційною силою Сонця.

### Стратегія

Обчисліть інтенсивність сонячної радіації на заданій відстані від Сонця і з її допомогою розрахуйте радіаційний тиск. Від тиску і площі обчислюємо силу.

### Розв'язок

а. Інтенсивність сонячної радіації – це середня сонячна потужність на одиницю площі. Отже, при  $9,0 \times 10^{10} \text{ м}$  від центру Сонця маємо:

$$I = S_{\text{cp}} = \frac{3,8 \times 10^{26} \text{ Вт}}{4\pi(9,0 \times 10^{10} \text{ м})^2} = 3,7 \times 10^3 \text{ Вт/м}^2.$$

Припускаючи, що комета відбиває все падаюче випромінювання, отримуємо з рівняння 12.36:

$$p = \frac{2I}{c} = \frac{2(3,7 \times 10^3 \text{ Вт/м}^2)}{3,0 \times 10^8 \text{ м/с}} = 2,5 \times 10^{-5} \text{ Н/м}^2.$$

б. Сила, що діє на шматок за рахунок випромінювання, становить:

$$F = pA = (2,5 \times 10^{-5} \text{ Н/м}^2)(4,0 \times 10^{-2} \text{ м}^2) = 1,0 \times 10^{-6} \text{ Н},$$

тоді як гравітаційна сила притягання Сонця становить:

$$F_{\text{гр}} = \frac{GMm}{r^2} = \frac{(6,67 \times 10^{-11} \text{ м}^2/\text{кг}^2)(2 \times 10^{30} \text{ кг})(10 \text{ кг})}{(9,0 \times 10^{10} \text{ м})^2} = 0,16 \text{ Н}.$$

### Обговорення

Таким чином, гравітаційна сила притягання Сонця шматка комети набагато більша, ніж сила, що діє на шматок за рахунок випромінювання.

Після того, як Максвелл показав, що світло несе в собі як імпульс, так і енергію, вресі-решт з'явилася нова ідея, спочатку лише як наукова фантастика. Можливо, космічний корабель з великим вітрилом, що відбиває світло, міг би використовувати радіаційний тиск для руху. Такому транспортному засобу не довелося б перевозити паливо. Він відчуватиме постійну невелику силу від сонячної радіації, замість коротких сплесків від ракетного руху. Він розганявся б повільно, але, постійно прискорюючись, вресі-решт досяг би великої швидкості. Космічний корабель з малою загальною масою і вітрилом з великою площею був би необхідний для отримання корисного прискорення.



Коли в 1960-х роках почалася космічна програма, ця ідея почала привертати серйозну увагу з боку NASA. Найновіша розробка в галузі легких космічних апаратів була зроблена групою, що фінансується громадянами, Planetary Society. В даний час він тестує використання легких вітрил для приведення в рух невеликого транспортного засобу, побудованого з *кубсатів*, крихітних супутників, які NASA розміщує на орбіті для різних дослідницьких проектів під час космічних запусків, призначених в основному для інших цілей.

Показаний нижче космічний корабель *LightSail* (рис. 6.16) складається з трьох *кубсатів*, з'єднаних разом. Він має загальну масу всього близько 5 кг і розміром приблизно з буханець хліба. Його вітрила виготовлені з дуже тонкого майлару і відкриваються, щоб мати площу поверхні 32 м<sup>2</sup>.

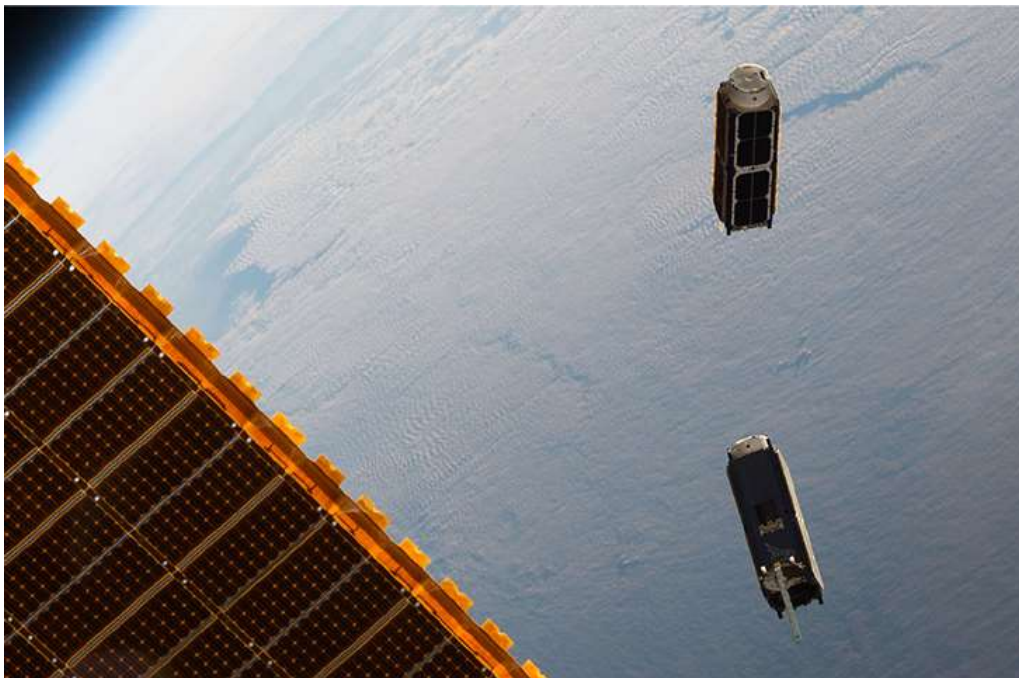


Рис. 6.16. Два невеликих супутника *CubeSat*, розгорнуті з Міжнародної космічної станції в травні 2016 року. Сонячні вітрила відкриваються, коли кубсати знаходяться досить далеко від станції

### ПРИКЛАД 6.7. Прискорення *LightSail*

Інтенсивність енергії сонячного світла на відстані 1 а. о. від Сонця дорівнює 21370 Вт/м<sup>2</sup>. Космічний корабель *LightSail* має вітрила загальною площею 32 м<sup>2</sup> і загальною масою 5,0 кг. Розрахуйте максимальне прискорення, якого космічний корабель *LightSail* може досягти від радіаційного тиску, коли він знаходиться на відстані близько 1 астрономічної одиниці від Сонця.

## Стратегія

Максимальне прискорення можна очікувати, коли вітрило відкривається прямо до Сонця. Використовуйте інтенсивність світла, щоб обчислити тиск випромінювання, а від нього силу на вітрилах. Потім скористайтеся другим законом Ньютона, щоб обчислити прискорення.

## Розв'язок

Радіаційний тиск становить:

$$F = pA = 2uA = \frac{2I}{c}A = \frac{2(1370 \text{ Вт/м}^2)(32 \text{ м}^2)}{3,0 \times 10^8 \text{ м/с}} = 2,92 \times 10^{-4} \text{ Н.}$$

Результуюче прискорення дорівнює:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{2,92 \times 10^{-4} \text{ Н}}{3 \text{ кг}} = 5,8 \times 10^{-5} \text{ м/с}^2.$$

## Обговорення

Якби це невелике прискорення тривало протягом року, корабель досяг би швидкості 1829 м/с, або 6600 км/год.

## ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 6.5

Як це вплине на швидкість і прискорення радіаційного космічного корабля, коли він віддаляється від Сонця під час міжпланетного космічного польоту?

### 6.5. Електромагнітний спектр

Електромагнітні хвилі мають широкий спектр практичних повсякденних застосувань, який включає такі різноманітні застосування, як зв'язок за допомогою мобільного телефону та радіомовлення, Wi-Fi, приготування їжі, зір, медична візуалізація та лікування раку. У цьому модулі ми обговорюємо, як електромагнітні хвилі класифікуються за такими категоріями, як радіо, інфрачервоні, ультрафіолетові тощо. Ми також узагальнюємо деякі з основних застосувань для кожного діапазону. Різні категорії електромагнітних хвиль відрізняються діапазоном довжин хвиль або, що еквівалентно, відповідними діапазонами частот. Їх властивості плавно змінюються від одного частотного діапазону до іншого, з різним застосуванням у кожному діапазоні. Короткий огляд виробництва та використання електромагнітних хвиль наведено в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

## Електромагнітні хвилі

Тип хвилі	Джерело	Використання	Проблеми
Радіо	Прискорення зарядів	Комунікації Пульти дистанційного керування МРТ	Потрібен контроль за використанням
Мікрохвилі	Прискорення зарядів і термічне переміщення	Зв'язок Печі Радар Використання мобільного телефону	
Інфрачервоні	Термічне переміщення та електронні переходи	Тепловізійне опалення	Поглинається атмосферою Парниковий ефект
Видиме світло	Термічне переміщення та електронні переходи	Фотосинтез Зір людини	
Ультрафіолетове	Термічне переміщення та електронні переходи	Стерилізація Виробництво вітаміну D	Виснаження озонового шару Викликає рак
Рентгенівські промені	Внутрішні електронні переходи та швидкі зіткнення	Безпека Медична діагностика Терапія раку	Онкологічні захворювання
Гамма-промені	Ядерний розпад	Ядерна медицина Безпека Медична діагностика Терапія раку	Рак, Спричиняє радіаційне ураження

Взаємозв'язок  $c = f\lambda$  між частотою  $f$  і довжиною хвилі  $\lambda$  застосовується до всіх хвиль і гарантує, що більша частота означає меншу довжину хвилі. На рис. 6.17 показано, як класифікуються різні типи електромагнітних хвиль відповідно до їх довжин хвиль і частот, тобто показаний електромагнітний спектр.

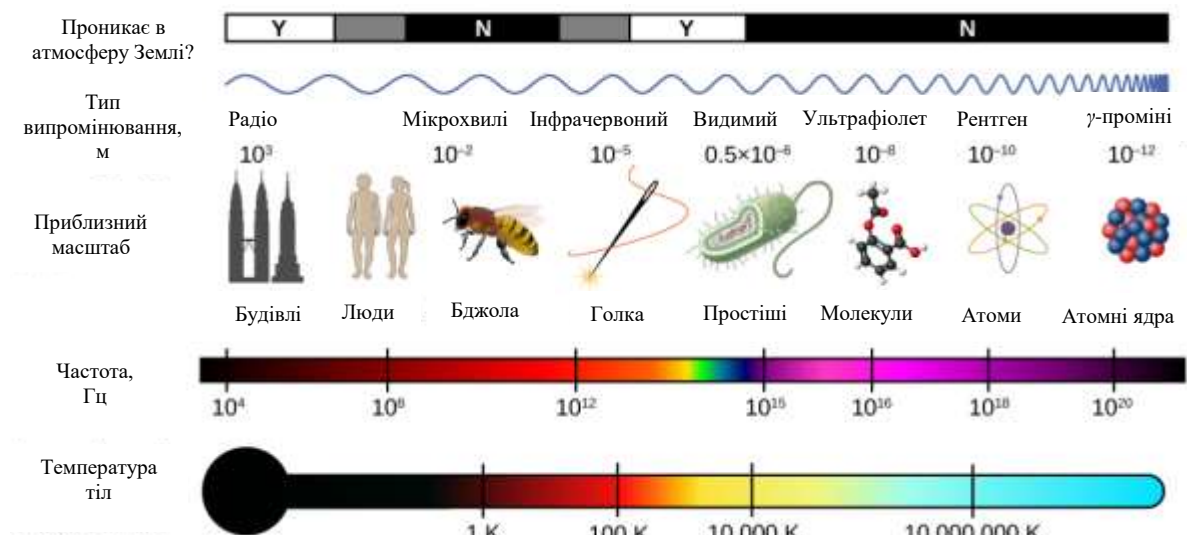


Рис. 6.17. Електромагнітний спектр, що показує основні типи електромагнітних хвиль

## Радіохвилі

Термін «**радіохвилі**» відноситься до електромагнітного випромінювання з довжиною хвилі більше приблизно 0,1 м. Радіохвилі зазвичай використовуються для аудіозв'язку (тобто для радіо), але цей термін використовується для електромагнітних хвиль у цьому діапазоні незалежно від їх застосування. Радіохвилі зазвичай є результатом зміни струму в проводах антени. Вони охоплюють дуже широкий діапазон довжин хвиль і поділяються на багато піддіапазонів, включаючи мікрохвилі, електромагнітні хвилі, що використовуються для АМ і FM-радіо, стільникові телефони та телевізійні сигнали.

Не існує найнижчої частоти радіохвиль, але хвилі ELF, або «надзвичайно низька частота», є одними з найнижчих частот, які зазвичай зустрічаються, від 3 Гц до 3 кГц. Прискорювальний заряд змінного струму ліній електропередач виробляє електромагнітні хвилі в цьому діапазоні. Хвилі ELF здатні проникати в морську воду, яка сильно поглинає електромагнітні хвилі більш високої частоти, а тому корисні для підводного зв'язку.

Для того, щоб використовувати електромагнітну хвилю для передачі інформації, амплітуда, частота або фаза хвилі *модуються* або змінюються контрольованим чином, що кодує інформацію в хвилю. У

радіопередачі АМ амплітуда хвилі модулюється для імітації коливань звуку, що передається. З теореми Фур'є випливає, що модульована АМ-хвиля є суперпозицією хвиль, що охоплюють деякий вузький діапазон частот. Кожній станції АМ присвоюється певна несуча частота, яка, згідно з міжнародною угодою, може змінюватися на  $\pm 5$  кГц. При FM-радіопередачі частота хвилі модулюється для передачі цієї інформації, як показано на рис. 6.18, і частоту кожної станції допускається використовувати по 100 кГц з кожного боку її несучої частоти. Електромагнітна хвиля виробляє струм у приймальній антені, а радіо або телебачення обробляє сигнал для отримання звуку та будь-якого зображення. Чим вища частота радіохвилі, що використовується для передачі даних, тим більша детальна зміна хвилі може бути перенесена, модулюючи її протягом кожної одиниці часу, і тим більше даних можна передати за одиницю часу. Призначені частоти для АМ-мовлення – від 540 до 1600 кГц, а для FM – від 88 МГц до 108 МГц.

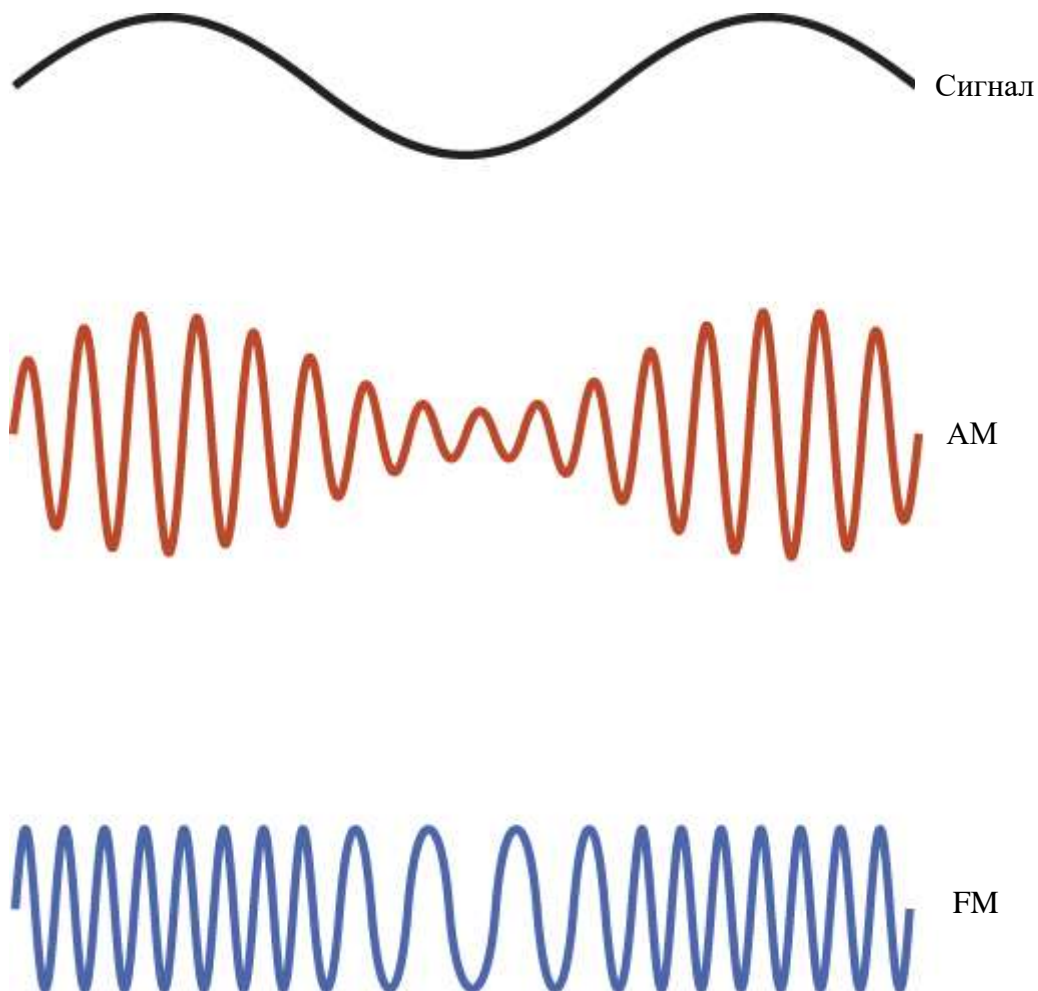


Рис. 6.18. Електромагнітні хвилі використовуються для передачі сигналів зв'язку, змінюючи амплітуду хвилі (АМ), її частоту (FM) або фазу

Розмови по мобільному телефону, а також телевізійні голосові та відеозображення зазвичай передаються у вигляді цифрових даних, шляхом перетворення сигналу в послідовність двійкових одиниць і нулів. Це забезпечує більш чітку передачу даних, коли сигнал слабкий, і дозволяє використовувати комп'ютерні алгоритми для стиснення цифрових даних для передачі більшої кількості даних у кожному частотному діапазоні. Комп'ютерні дані також передаються у вигляді послідовності двійкових одиниць і нулів, кожен з яких становить один біт даних.

## Мікрохвилі

**Мікрохвилі** – це електромагнітні хвилі найвищої частоти, які можуть бути отримані струмами в макроскопічних схемах і пристроях. Частоти НВЧ коливаються приблизно від  $10^9$  Гц майже до  $10^{12}$  Гц. Їх високі частоти відповідають коротким довжинам хвиль в порівнянні з іншими радіохвилями – звідси і назва «мікрохвильові». Мікрохвилі також зустрічаються в природі як космічне фонове випромінювання, що залишилося від походження Всесвіту. Поряд з іншими діапазонами електромагнітних хвиль вони входять до складу випромінювання, яке випромінює і поглинає будь-який об'єкт вище абсолютного нуля внаслідок **теплого збудження**, тобто від теплового руху його атомів і молекул.

Більшість інформації, що передається через супутник, передається мікрохвилями. **Радіолокація** є поширеним застосуванням мікрохвиль. Виявляючи та визначаючи час мікрохвильового відлуння, радіолокаційні системи можуть визначати відстань до таких різноманітних об'єктів, як хмари, літаки або навіть поверхня Венери.

Мікрохвилі 2,45 ГГц зазвичай використовуються в мікрохвильових печах. Електрони в молекулі води, як правило, залишаються ближче до ядра кисню, ніж ядра водню (рис. 6.19). При цьому створюються два розділених центри рівних і протилежних зарядів, що надає молекулі дипольний момент (див. Електричне поле). Коливальне електричне поле мікрохвиль всередині печі створює крутий момент, який має тенденцію вирівнювати кожен молекулу спочатку в одному напрямку, а потім в іншому, при цьому рух кожної молекули пов'язаний з іншими навколо неї. Це перекачує енергію в безперервний тепловий рух води для нагрівання їжі. Тарілка під їжею не містить води і залишається відносно ненагрітою.

Мікрохвилі в мікрохвильовій печі відбиваються від стінок духовки, так що суперпозиція хвиль створює стоячі хвилі, подібні до стоячих хвиль вібруючої гітари або струни скрипки. Обертний вентилятор діє як мішалка, відбиваючи мікрохвилі в різних напрямках, а вертушки допомагають розподілити гарячі точки.

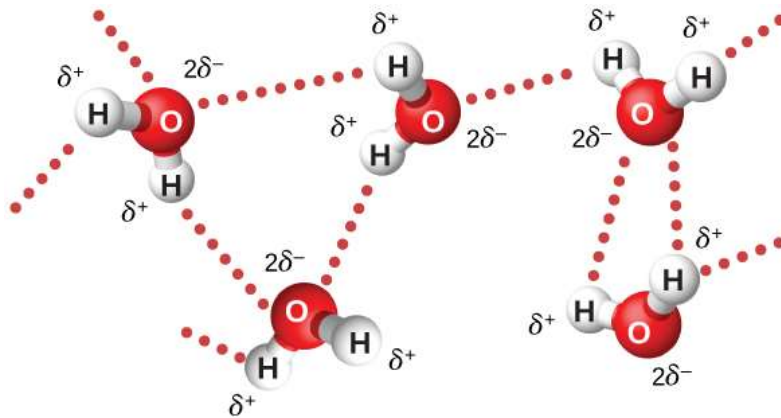


Рис. 6.19. Коливальне електричне поле в мікрохвильовій печі чинить крутний момент на молекули води через їх дипольний момент, і крутний момент змінює напрямок  $4,90 \times 10^9$  разів на секунду. Взаємодія між молекулами розподіляє енергію, що нагнітається в них. Об'єкт  $\delta^+$  і  $\delta^-$  позначає розподіл заряду на молекулах

### ПРИКЛАД 6.8. Чому мікрохвильові печі нагріваються нерівномірно

На якій відстані одна від одної знаходяться точки доступу в мікрохвильовій печі з тактовою частотою 2,45 ГГц?

#### Стратегія

Розглянемо, як хвилі одного напрямку в печі відбиваються від протилежної стіни, звідки вони утворюються.

#### Розв'язок

Вузли з максимальною інтенсивністю, знаходяться на половині довжини хвилі:

$$d = \frac{1}{2} \lambda = \frac{1}{2} \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ м/с}}{2(2,45 \times 10^9 \text{ Гц})} = 6,02 \text{ см.}$$

#### Обговорення

Відстань між гарячими точками в мікрохвильовій печі визначається довжиною хвилі.

Стільниковий телефон має радіоприймач і слабкий радіопередавач, обидва з яких можуть швидко налаштуватися на сотні спеціально призначених мікрохвильових частот. Низька інтенсивність сигналу, що передається, дає йому навмисно обмежений діапазон. Наземна система з'єднує телефон тільки з телевежею, закріпленою за певною невеликою областю або стільником, і плавно переводить його з'єднання з наступною стільниковою, коли прийом сигналу там сильніший. Це дозволяє використовувати мобільний телефон під час зміни місця розташування.

Мікрохвилі також забезпечують Wi-Fi, який дозволяє власникам мобільних телефонів, портативних комп'ютерів та подібних пристроїв бездротово підключатися до Інтернету вдома, а також у кав'ярнях та аеропортах. Бездротовий маршрутизатор Wi-Fi — це пристрій, який обмінюється даними з Інтернет через кабель або інше з'єднання та використовує мікрохвилі для бездротового обміну даними з такими пристроями, як мобільні телефони та комп'ютери. Сам термін Wi-Fi відноситься до стандартів, яких дотримуються при модулюванні та аналізі мікрохвиль, щоб бездротові маршрутизатори та пристрої різних виробників працювали сумісно один з одним. Комп'ютерні дані в кожному напрямку складаються з послідовностей двійкових нулів і одиниць, кожна з яких відповідає двійковому біту. Мікрохвилі знаходяться в діапазоні від 2,4 ГГц до 5,0 ГГц.

Інші бездротові технології також використовують мікрохвилі для забезпечення повсякденного зв'язку між пристроями. Bluetooth був розроблений разом із Wi-Fi як стандарт для радіозв'язку в діапазоні 2,4 ГГц між сусідніми пристроями, наприклад, для підключення до навушників та аудіонавушників до таких пристроїв, як радіо, або мобільного телефону водія до пристрою гучного зв'язку, щоб дозволити відповідати на телефонні дзвінки, не плутаючись безпосередньо з мобільним телефоном.

Мікрохвилі знаходять застосування і в радіоміченні, використовуючи технологію RFID (радіочастотна ідентифікація). Прикладами є RFID-мітки, прикріплені до магазину товарів, транспондер для використання пунктів стягування плати за проїзд, прикріплений до лобового скла автомобіля, або навіть чіп, вбудований у шкіру тварини. Пристрій реагує на мікрохвильовий сигнал, випромінюючи власний сигнал із закодованою інформацією, дозволяючи магазинам швидко обдзвонювати товари на своїх касах, водіям стягувати плату за проїзд на свій рахунок без зупинки, а загубленим домашнім тваринам возз'єднатися зі своїми власниками. NFC (зв'язок ближнього поля) працює аналогічно, за винятком того, що він має набагато менший радіус дії. Механізм його взаємодії полягає в індукованому магнітному полі на мікрохвильових частотах між двома котушками. Мобільні телефони з підтримкою NFC і відповідним програмним забезпеченням можуть надавати інформацію для покупок за допомогою мобільного телефону замість фізичної кредитної картки. Дуже коротка дальність передачі даних є бажаною функцією безпеки в цьому випадку.

### **Інфрачервоне випромінювання**

Межа між НВЧ і інфрачервоною областями електромагнітного спектра недостатньо чітко визначена (див. рис. 6.17). **Інфрачервоне випромінювання**, як правило, створюється тепловим рухом, а також вібрацією та обертанням атомів і молекул. Електронні переходи в атомах і



молекулах також можуть виробляти інфрачервоне випромінювання. Близько половини сонячної енергії, що надходить на Землю, знаходиться в інфрачервоній області, а більша частина решти знаходиться у видимій частині спектра. Близько 23% сонячної енергії поглинається в атмосфері, близько 48% поглинається на поверхні Землі, а близько 29% відбивається назад у космос.<sup>1</sup>

Діапазон інфрачервоних частот простягається до нижньої межі видимого світла, трохи нижче червоного. Насправді інфрачервоне означає «нижче червоного». Молекули води особливо добре обертаються і вібрують на інфрачервоних частотах. Розвідувальні супутники можуть виявляти будівлі, транспортні засоби і навіть окремих людей за своїм інфрачервоним випромінюванням, потужність випромінювання якого пропорційна четвертому степеню абсолютної температури. Більш приземлено, ми використовуємо інфрачервоні лампи, в тому числі ті, які називаються *кварцовими обігрівачами*, щоб краще зігріти нас, тому що ми поглинаємо інфрачервоне світло краще, ніж навколишнє середовище.

Звичні кишенькові «пульти» для зміни каналів і налаштувань на телевізорах часто передають свій сигнал за допомогою модуляції інфрачервоного променя. Якщо ви спробуєте скористатися пультом дистанційного керування телевізора без того, щоб інфрачервоний випромінювач перебував у прямій видимості з інфрачервоним детектором, ви можете виявити, що телевізор не відповідає. Деякі пульти дистанційного керування замість цього використовують Bluetooth і зменшують це роздратування.

## Видиме світло

**Видиме світло** – це вузький відрізок електромагнітного спектра приблизно від 400 нм до приблизно 750 нм, на який реагує нормальне людське око. Видиме світло створюється коливаннями і обертаннями атомів і молекул, а також електронними переходами всередині атомів і молекул. Приймачі або детектори світла в основному використовують електронні переходи.

Червоне світло має найнижчі частоти і найдовші довжини хвиль, тоді як фіолетове має найвищі частоти і найкоротші довжини хвиль (рис. 6.20). Випромінювання чорного тіла від Сонця досягає піку у видимій частині спектра, але більш інтенсивне в червоному, ніж у фіолетовому, що робить Сонце жовтуватим на вигляд.

Живі істоти — рослини і тварини — еволюціонували, щоб використовувати і реагувати на частини електромагнітного спектра, в які вони вбудовані. Ми насолоджуємося красою природи через видиме світло. Рослини більш вибіркові. У процесі фотосинтезу для утворення цукрів використовуються частини видимого спектра.

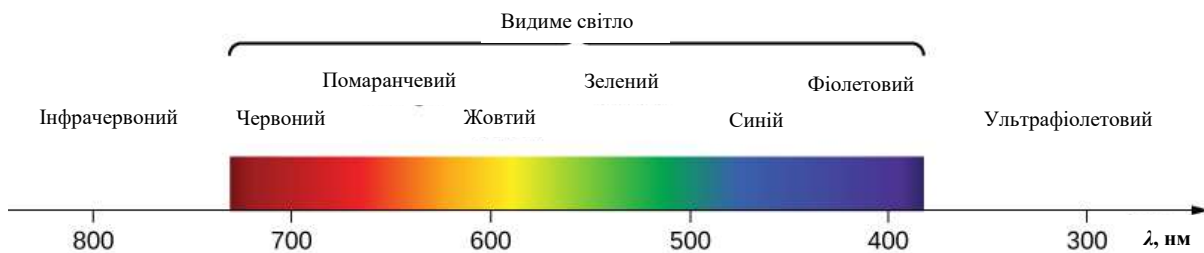


Рис. 6.20. Невелика частина електромагнітного спектра, що включає його видимі компоненти. Поділ між інфрачервоним, видимим та ультрафіолетовим не є абсолютно чітким, так само як і поділ між сімома кольорами веселки

### Ультрафіолетове випромінювання

Ультрафіолет означає «над фіолетовим». Електромагнітні хвилі **ультрафіолетового випромінювання (УФ)** найвищої частоти перекриваються з рентгенівськими променями найнижчої частоти. Довжини хвиль ультрафіолету простягаються від 400 нм до приблизно 10 нм на найвищих частотах. Ультрафіолет утворюється в результаті атомних і молекулярних рухів і електронних переходів.

Ультрафіолетове випромінювання Сонця загалом поділяється на три діапазони довжин хвиль: UV-A (320–400 нм) — найнижча частота, потім UV-B (290–320 нм) і UV-C (220–290 нм). Більшість УФ-B і всі УФ-C поглинаються озоном ( $O_3$ ) молекул у верхніх шарах атмосфери. Отже, 99% сонячного ультрафіолетового випромінювання, що досягає поверхні Землі, є УФ-A.

Сонячні опіки викликані великим впливом УФ-B і УФ-C, а повторний вплив може збільшити ймовірність раку шкіри. Реакція засмаги – це захисний механізм, при якому організм виробляє пігменти в інертних шарах шкіри, щоб зменшити вплив на живі клітини під ними. Однак засмага не є достатнім захистом, і людям, як правило, рекомендується уникати тривалого перебування на сонці та носити сонцезахисний крем або захисний одяг на вулиці — навіть у похмурі дні.

Оскільки озон поглинає шкідливе ультрафіолетове випромінювання, він важливий для багатьох форм життя і для клімату в цілому. Озон виснажується хімічними речовинами, що може призвести до утворення областей з меншою концентрацією, які часто називають «дірками», хоча цей термін цілком точний. Маріо Моліна і Ф. Шервуд Роуланд виявили, що хлорфторвуглеці (СFC), які були надзвичайно поширеними комерційними речовинами, відповідальні за руйнування озонового шару. Ультрафіолетове випромінювання саме по собі розщеплювало фреони, вивільняючи атоми хлору, які вступали в реакцію з озоном і усували його. З тих пір було доведено, що інші речовини мають такий же ефект.

Як було розглянуто в наступному розділі, чим коротша довжина хвилі світла, тим більша зміна енергії атома або молекули, яка поглинає світло в електронному переході. Це робить короткохвильовий ультрафіолет шкідливим для живих клітин. Це також пояснює, чому ультрафіолетове випромінювання краще, ніж видиме світло, змушує деякі матеріали світитися або *флуоресціювати*.

Крім несприятливого впливу ультрафіолетового випромінювання, існують також переваги опромінення в природі та використання в техніці. Вироблення вітаміну D в шкірі є результатом впливу УФ-В випромінювання, як правило, сонячного світла. Кілька досліджень показують, що дефіцит вітаміну D пов'язаний з розвитком ряду видів раку (передміхурової залози, молочної залози, товстої кишки), а також остеопорозу. Ультрафіолет низької інтенсивності має таке застосування, як забезпечення енергії, щоб змусити певні барвники флуоресціювати та випромінювати видиме світло, наприклад, у друкованих грошах для відображення прихованих водяних знаків як захисту від підробки.

Одна з перших ілюстрацій впливу ультрафіолетового світла на Землю сталася під час місії «Аполлон-16» у 1972 році. Місія включала перші астрономічні зображення, зроблені з Місяця, за допомогою компактною та стійкою до ультрафіолета камери/спектрографа, розробленої для використання на Місяці вченим і винахідником Джорджем Робертом Каррутерсом. Розроблений для отримання ультрафіолетових зображень без затемнюючого впливу атмосфери Землі, найвідомішим зображенням була сама планета. Каррутерс, який також навчав астронавтів використанню апарату, пізніше зазначив, що «найбільш очевидні та вражаючі результати були отримані спостереженням за Землею, тому що це був перший випадок, коли Земля була сфотографована здалеку в ультрафіолетовому (УФ) світлі, щоб ви могли побачити повну протяжність водневої атмосфери, полярне сяйво і те, що ми називаємо тропічним поясом світіння повітря».

## Рентгенівські промені

**Рентгенівські промені** мають довжини хвиль приблизно від  $10^{-8}$ м до  $10^{-12}$ м. Вони мають коротші довжини хвиль і вищі частоти, ніж ультрафіолетові, тому енергія, яку вони передають на атомному рівні, більша. В результаті рентгенівські промені надають несприятливий вплив на живі клітини, подібно до впливу ультрафіолету, але вони більш проникаючі. Рак і генетичні дефекти можуть бути індуковані рентгенівськими променями. Завдяки своєму впливу на клітини, що швидко діляться, рентгенівські промені також можуть використовуватися для лікування навіть раку.

Найбільш широке застосування рентгенівських променів – для отримання зображень об'єктів, непрозорих для видимого світла, таких як

людське тіло або частини літака. У людини ризик пошкодження клітин ретельно зважується з користю отриманої діагностичної інформації.

## Гамма-промені

Незабаром після того, як в 1896 році була вперше відкрита ядерна радіоактивність, було виявлено, що випромінюються принаймні три різних типи випромінювання, які були позначені як альфа-, бета- і гамма-промені. Найбільш проникаюче ядерне випромінювання, **гамма-випромінювання** ( **$\gamma$ -промінь**), пізніше з'ясувалося, що це електромагнітна хвиля надзвичайно високої частоти.

Нижній кінець  $\gamma$ -діапазона частот променів перекриває верхню межу рентгенівського діапазону. Гамма-промені мають характеристики, ідентичні рентгенівським променям тієї ж частоти, вони відрізняються лише джерелом. Назва «гамма-промені» зазвичай використовується для електромагнітного випромінювання, що випромінюється ядром, тоді як рентгенівські промені, як правило, виробляються шляхом бомбардування мішені енергійними електронами в рентгенівській трубці. На більш високих частотах  $\gamma$ -промені більш проникаючі і більш шкідливі для живих тканин. Вони мають багато того ж застосування, що і рентгенівські промені, включаючи терапію раку. Гамма-випромінювання від радіоактивних матеріалів використовується в ядерній медицині.

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЄ РОЗУМІННЯ 6.6

Чим відрізняються електромагнітні хвилі для різних видів електромагнітного випромінювання?