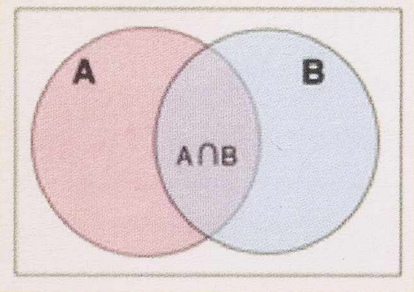
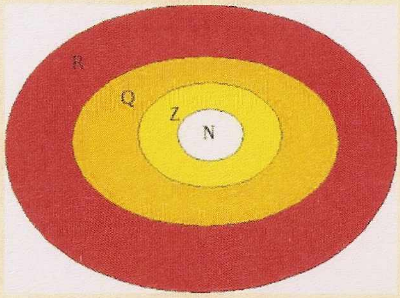
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«КРИВОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
КРИВОРІЗЬКИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ

Кафедра змісту і методики початкового навчання





ТЕОРЕТИКО-МНОЖИННИЙ ПІДХІД ДО ПОНЯТТЯ ЦІЛОГО НЕВІД'ЄМНОГО ЧИСЛА ТА АРИФМЕТИЧНИХ ДІЙ НАД ЧИСЛАМИ

Методичні рекомендації для студентів
спеціальності 6.010100 – початкове навчання,
освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»
вищих педагогічних навчальних закладів
III – IV рівнів акредитації

м. Кривий Ріг - 2013

УДК 373.3.016:511(07)
ББК

Автори: В.П. Кисільова-Біла, І.Є. Макаренко.

Теоретико-множинний підхід до поняття цілого невід'ємного числа та арифметичних дій над числами [методичні рекомендації для студентів] – Кривий Ріг, КПІ ДВНЗ «Криворізький національний університет», 2013. – 38с.

У методичних рекомендаціях вдало підібрано матеріал для набуття практичних навичок з розв'язування, доведення, пояснення задач на основі теоретико-множинного підходу до поняття цілого невід'ємного числа та арифметичних дій над числами (додавання, віднімання, множення, ділення). Зокрема, текст рекомендацій містить наочні ілюстарції до задач, що є вкрай важливим для більш глибокого розуміння та засвоєння необхідного матеріалу з теми.

Зміст матеріалу має важливе значення для майбутнього вчителя початкових класів, оскільки перехід на новий Державний стандарт початкової загальної освіти посилив роль теоретико-множинної основи у початковому курсі математики.

Рекомендації адресовані студентам спеціальності 6.010100 – початкове навчання, освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр», вищих педагогічних навчальних закладів III-IV рівнів акредитації на допомогу у підготовці до практичних занять з математики, а також складання екзамену з цієї дисципліни.

Рецензент: Капіносов А.М., кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики та методики її навчання Криворізького педагогічного інституту ДВНЗ «Криворізький національний університет».

Рекомендовано до друку і використання у навчальному процесі на засіданні методичної ради психолого-педагогічного факультету Криворізького педагогічного інституту ДВНЗ «Криворізький національний університет» (протокол №1 від 26.09.2013р.).

ЗМІСТ

ВСТУП

Новий Державний стандарт початкової загальної освіти (освітня галузь «Математика») посилив роль і значення теоретико-множинного підходу до формування поняття цілого невід'ємного числа і арифметичних дій на множині цілих невід'ємних чисел (Z_0) у початковому курсі математики.

У зв'язку з цим великого значення набуває вивчення студентами першого курсу матеріалу змістового модуля № 4«Арифметичні дії на множині Z_0» у теоретичному курсі математики. На вивчення цього змістового модуля за програмою відведено 42 години - 1,2 кредита (10 годин лекцій, 18 годин практичних занять, 14 годин самостійної роботи студентів).

У навчальних посібниках з математики, рекомендованих для вивчення курсу математики студентами спеціальності 6.010100 – початкове навчання, освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» недостатньо представлені такі аспекти цього змістового модуля:

- відсутні завдання, які формують вміння студентів визначати сутність поняття цілого невід'ємного числа;
- частково представлені основні види простих задач, які розв'язуються діями додавання, віднімання, множення і ділення;
- відсутні обґрунтування вибору дії для розв'язування того чи іншого виду задач;
- відсутні доведення властивостей множини цілих невід'ємних чисел, законів арифметичних дій.

Пропоновані методичні рекомендації складені з урахуванням вище названих аспектів як доповнення до навчальних підручників і посібників з математики для студентів і включають такі два розділи:

Розділ 1 «Поняття цілого невід'ємного числа на основі теоретико-множинного підходу. Відношення «більше», «менше», «дорівнює» на множині цілих невід'ємних чисел (Z_0)»;

Розділ 2 «Теоретико-множинний підхід до визначення арифметичних дій на множині Z_0».

Другий розділ структурований за чотирма основними арифметичними діями:

- поняття суми і дії додавання. Основні види задач на додавання у початковому курсі математики;
- поняття різниці і дії віднімання. Основні види задач на віднімання у початковому курсі математики;
- поняття добутку і дії множення. Основні види задач на множення у початковому курсі математики;
- поняття частки і дії ділення. Основні види задач на ділення у початковому курсі математики.

Кожен розділ містить систему завдань для засвоєння математичного поняття і серію текстових задач, які відображають застосування поняття в практичних ситуаціях. У методичних рекомендаціях студенти знайдуть грунтовні пояснення зразків завдань, які вони будуть виконувати на практичних заняттях та під час самостійної роботи з математики.

У посібнику студенти знайдуть поради і до виконання самостійних робіт за № 3, 4, 5, 6 змістового модуля № 4 «Арифметичні дії на множині Z_0», і як підготуватися до короткочасного експрес-опитування (летучок) на практичних заняттях. Матеріали посібника допоможуть студентам і у підготовці до першого екзамену з математики.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИКО-МНОЖИННИЙ ПІДХІД ДО ОЗНАЧЕННЯ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА (КІЛЬКІСНА ТЕОРІЯ)

Множина натуральних чисел є першою числовою множиною в плані виникнення і розвитку з досвіду і необхідності вести рахунок. Спостерігаючи природні явища і активно використовуючи природній потенціал в своїй діяльності, люди первісного суспільства рано навчились із множини виділяти його елементи: птаха із зграї птахів; коня з табуна коней; зерно з купи зерна і т.д.

Так у них послідовно утворилось уявлення про один елемент і багато елементів, які утворюють задані множини.

Разом з цим зявляються такі нові поняття як «один» і «багато». У відповідності з цим послідовно розвивається і мова людей, відбуваються закономірні зміни в закінченні слів: рука-руки; відпочиваю – відпочиваємо; червоний-червоні.

Спостереження над предметами впевнили людей в тому, що багато предметів бувають в однакових сукупностях: пара очей, пара ніг, пара крил, пара рук, пара вух і .т.д. Так, коли первинна людина бачила двох ведмедів, вона порівнювала їх з парою очей (рук). Розвиток числових уявлень прискорився, коли перейшли від рук до пальців рук і ніг і т.д.

Розглянемо скінченні множини M_1, M_2, M_3, M_4.

M_1={пальці правої руки дорослої людини}

M_2={пальці лівої руки дитини}

M_3={частини світу: Азія, Африка, Америка, Австралія, Європа}

M_4={вершини п'ятикутної зірки}

Ці множини якісно зовсім різні, вони складаються з різних предметів, а в кількісному відношенні вони однакові. Кожна з них складається з 5-ти елементів. *Та спільна властивість .яка не змінюється, яка характеризує кожну з множин одного класу називається* ***натуральним числом****.*

Твердження «множин одного класу» потрібно розуміти так: в одному класі містяться різні множини, але спільним для всіх множин є та властивість, що всі вони містять однакову кількість елементів).

Означення: Кількісним натуральним числом називається кількісна характеристика деякого класу скінченних еквівалентних між собою множин.

Які це скінченні еквівалентні між собою множини? – Це такі множини між якими можна встановити взаємно-однозначну відповідність, тобто кожному елементу однієї множини поставити у відповідність один і тільки один елемент іншої множини і навпаки.

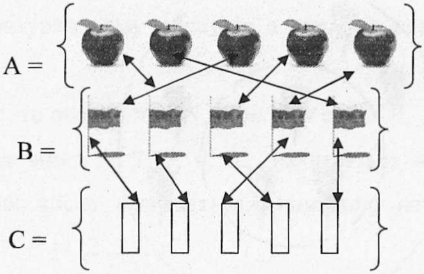


Рис. 1. Ілюстрація еквівалентних множин

A~B~C, це множини якісно різні, складаються з елементів різної природи. Вони еквівалентні між собою і мають однакову кількісну характеристику – це є їх спільна властивість – це і є натуральне число 5.

Твердження: Кожному класу еквівалентних скінченних множин відповідає одне і тільки одне натуральне число і, навпаки, кожному натуральному числу відповідає один і тільки один клас еквівалентних скінченних множин.

Наприклад: натуральне число 4 характеризує і множину кінцівок людини, і множину вершин квадрата і ін.

Натуральний ряд чисел записують за допомогою таких десяти символів: 0, 1, 2, 3, 4 ,5, 6, 7, 8, 9. Два натуральних числа a і b називаються *рівними* тоді і тільки тоді, коли відповідні їм скінченні множини еквівалентні, і нерівними – коли ці множини нееквівалентні. Які б ми не взяли два натуральних числа a і b завжди має місце одне із співвідношень: або $a=b$, або $a \neq b$.

Натуральне число а називається *меншим* за натуральне число b і позначають a<b, тоді і тільки тоді, коли множина А є власною підмножиною множини В, або А еквівалентна деякій власній підмножині множини В' і записують це так:

$$(\forall a\in z_0 \wedge \forall b\in z_0, a=n(A), b=n(B), a<b) \Leftrightarrow (A\subset B \vee A\sim B_1 \wedge B_1\subset B)$$

Наприклад: Нехай В = {букет із 7-ми троянд},

А = {букет із 3 троянд}

За умовою, А ⊂В, тоді a<b, тобто 3<7

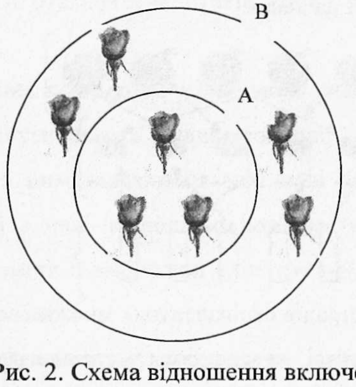


Рис. 2. Схема відношення включення між множинами

Якщо ж В = {букет із 7-ми троянд}

А = {5 кольорових олівців}

B_1= {букет із 5-ти троянд}

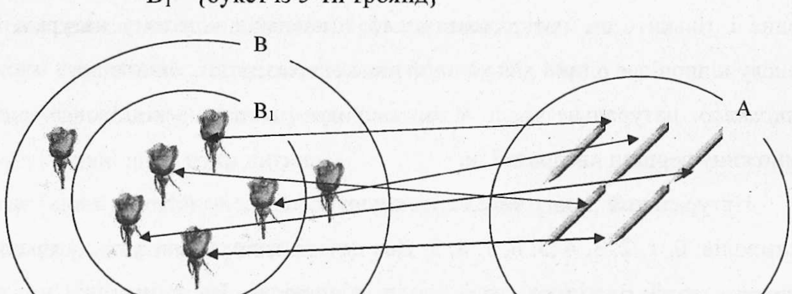


Рис. 3. Схема відношення еквівалентності множин А і B_1

За умовою: $B_1 \subset B \wedge A \sim B_1$, тоді $a<b$, тобто $5<7$.

Із означення еквівалентних множин і поняття кількісного натурального числа одержуємо такі властивості:

1. Властивість рефлексивності рівності і антирефлексивності нерівності. Кожне натуральне число дорівнює самому собі, тобто $a=a$ і неправильно, що $a < a$.

2. Властивість симетричності рівності і антисиметричності нерівності. Якщо натуральне число $a=b$, то і навпаки $b=a$; якщо $a<b$, то $b>a$.

3. Властивість транзитивності рівності і нерівності: якщо натуральне число a дорівнює натуральному числу b, а число b дорівнює $c \in N$, то a дорівнює c;

Якщо $a<b$ і $b<c$, то $a<c$, де $\forall a \in N$, $\forall b \in N$, $\forall c \in N$.

Як відомо, ряд чисел 1, 2, 3, 4, 5... називається натуральним рядом чисел. Множина цих чисел називається множиною натуральних чисел і позначають літерою $N = \{1, 2, 3, ...\}$.

Множина натуральних чисел має такі властивості: вона *упорядкована*. Умовились, відносно довільних двох нервіних натуральних чисел вважати, що менше число передує більшому і більше слідує за меншим.

Множина натуральних чисел – *дискретна*. Не для довільних двох чисел із множини N існує число, яке знаходиться між ними. Наприклад, не існує натурального числа, яке б було б проміжним між числами 2 і 3, 5 і 6, ...

Множина натуральних чисел – *нескінченна*. Не існує найбільшого натурального числа, тому що яке б натуральне число a ми не взяли, за ним слідує безпосередньо наступне число $a' = a + 1$.

Для характеристики порожньої множини вводиться число нуль, яке позначають, як відомо, знаком 0.

Слово «нуль» походить від латинського nubus – нічого, порожнє. Нуль не є натуральним числом. Воно не має всіх властивостей натуральних чисел і, навпаки, має ряд специфічних особливостей, які не властиві натуральним числам.

Множина, яка утворилась приєднанням до множини натуральних чисел N одноелементної множини {0} називається множиною цілих невід'ємних чисел і позначається N_0 або Z_0. Нуль в цій множині записують попереду числа 1. Отже, упорядкована множина {0, 1,2,3,…} називається множиною цілих невід'ємних чисел. Множина N_0 (Z_0) упорядкована, дискретна і нескінченна.

Розглянемо основні типи завдань, які пов'язані з поняттям цілого невід'ємного числа та введеними відношеннями: більше, менше, дорівнює на множині N_0.

Завдання 1. *Довести, що відношення «менше», яке задане на множині N_0 є відношення порядку.*

Доведення

Відношення «менше», яке задане на множині $N_0 = \{0,1,2,3,4,...,n,...\}$, є відношенням строгого порядку, адже володіє такими властивостями:

1. Антирефлексивне, тобто кожне число з N_0 не може бути меншим самого себе:

$$(\forall a \in N_0)(a \nless a).(1 \nless 1,\ 2 \nless 2).$$

2. Антисиметричне, тобто для будь-яких а і в з N_0, з того, що a<b не слідує, що b<a:

$$(\forall a \in N_0, \forall b \in N_0, a < b) \not\to (b < a).$$

Наприклад: якщо 3 <5, то $5 \nless 3$, а 5>3.

3. Транзитивне, тобто для будь-яких a, b, c, з множини N_0, якщо a<b і b<c, то a<c:

$$(\forall a \in N_0, \forall b \in N_0, \forall c \in N_0, a < b \text{ і } b < c) \to (a < c).$$

Наприклад: (5<8, а 8<12) $\to$ (5<12).

Завдання 2. *Доведіть, що множина* N_0 *- нескінченна*

Доведення

Розглянемо деяку множину A_2 , яка містить n елементів.

Якщо до неї приєднати ще один елемент, відмінний від усіх елементів множини, то отримаємо нову множину В, в якій буде n + 1 елемент.Число n буде менше числа n + 1 так як множина А є власною підмножиною множини В. Назвемо число (n + 1)-число, що безпосередньо слідує за числом n. Тоді для кожного цілого невідємного числа можна вказати єдине натуральне число, яке за ним безпосередньо слідує. Обернено: кожне ціле невідємне число безпосередньо слідує не більш ніж за одним цілим невідємним числом, нуль безпосередньо не слідує ні за яким невід'ємним числом. Далі, рухаючись від числа нуль і переходячи по порядку до безпосередньо слідуючим один за одним натуральним числом, ми отримаємо множину цілих невід'ємних чисел. Запропонована діаграма Ейлера-Венна наочно ілюструю нескінченність множини N_0 , так як $A \subset B \subset C \subset ....$

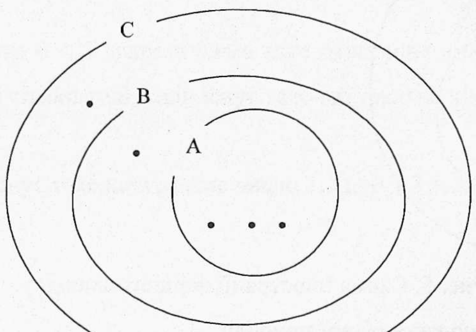


Рис. 4. Схема, яка ілюструє нескінченність множини N_0

Завдання 3. *Виходячи з теоретико-множинного підходу до визначення поняття «менше», доведіть, що а)3<5; б) 0<3.*

Доведення:

З визначення відношення «менше» відомо, що число a<b, якщо множина А є власною підмножиною множини В або множина А рівнопотужна деякій множині B_1, яка є власною підмножиною множини В, при умові, що a=n(A), b=n(B).

$$((a < b) \leftrightarrow (A \subset B \vee A \sim B_1 i B_1 \subset B, B_1 \neq \varnothing,\ B_1 \neq B, n(A) = a, n(B) = b).$$

Перший випадок: множини однієї природи

Нехай А – букет із трьох троянд, а В – букет з 5-ти троянд.

(3<5, де 3= n(A), 5=n(B) $\leftrightarrow (A \subset B, A \neq$ Ø, A $\neq B$)

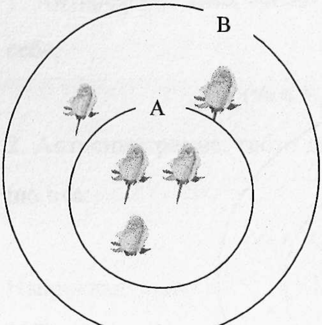


Рис. 5. Схема ілюстрації першого випадку

Другий випадок: множини різної природи

Якщо ж А – букет з трьох троянд, а В –множина з 5-ти олівців, то для того, щоб довести, що 3 <5 виокремимо у множині В її власну підмножину B_1, що складається з 3-ох олівців. Множина А та множина B_1 – рівнопотужні: n(A) = n(B_1) = 3. І так 3 олівця менше 5-ти олівців,

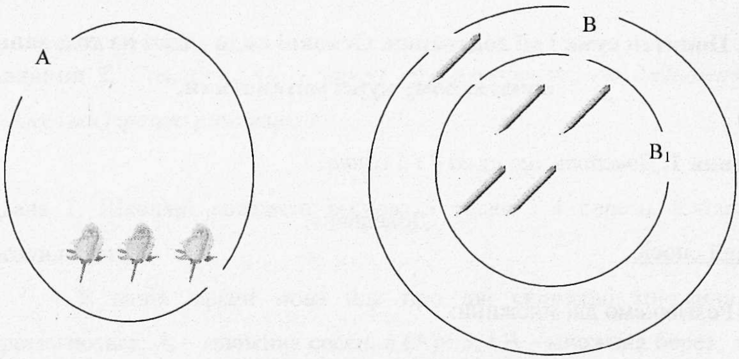


Рис. 6. Схема до ілюстрації другого випадку

Таким чином,

$(3 < 5,\ n(A) = 3,\ n(B) = 5) \leftrightarrow (A \sim B_1$, де $B_1 \subset B$ та $B_1 \neq B$, $B_1 \neq B)$.

Якщо використати другий спосіб визначення поняття «менше» через додавання, то a буде менше числа b тоді і тільки тоді, коли існує таке натуральне число c, що: a + c = b.

Для доведення 0 < 3 використаємо таке означення «менше»: число a менше числа b тоді і тільки тоді, коли існує таке натуральне число c, що a + c = b.

0 < 3 так як існує таке натуральне число 3, що 0 + 3 = 3.

РОЗДІЛ 2
ТЕОРЕТИКО-МНОЖИННИЙ ПІДХІД ДО ВИЗНАЧЕННЯ АРИФМЕТИЧНИХ ДІЙ НА МНОЖИНІ Z_0

2.1. Поняття суми і дії додавання. Основні види задач на додавання у початковому курсі математики.

Завдання 1. *Доведіть, що сума 4 і 5 єдина.*

Доведення:

Перший спосіб.

Розглянемо дві множини:

$A=\{a,b,c,d\}$, n (A) = 4,
$B = \{k,l,m,t,s\}$, n (B) =5,

такі , що $A \cap B = \varnothing$ і A ≠ Ø, B ≠ Ø.

Обєднаємо їх: $A \cup B = \{a,b,c,d,k,l,m,t,s\}$

Оскільки існує і єдина множина, яка є об'єднанням множин А і В, то існує і єдина сума чисел 4 і 5, яка є, згідно означення суми, чисельністю обєднання множин А і В.

n ($A \cup B$)= 9 і n($A \cup B$)=n (A) + n (B) = 4 + 5, 4 + 5 = 9 і ця сума єдина, тому що єдина множина $A \cup B$.

Другий спосіб (від супротивного)

Дано: 4 +5 = 9 (1).

Припустимо, що 4 + 5 = а , де а ≠ 9. (2)

З умов (1) і (2) на основі означення суми маємо:

(1′) 4 +5 = 9, де 9 = n ($A \cup B$) і n (A) = 4, n (B) =5.

(2′) 4 +5 = a, де a = n ($A \cup B$) і n (A) = 4, n (B) =5.

Відомо, що об'єднання множин А та В існує і ця множина єдина. Тоді одна і та ж множина $A \cup B$ має різні чисельності - 9 і а згідно нашого припущення. А цього бути не може. Тому а = 9, тобто сума чисел 4 і 5 єдина.

Завдання 2. *Поясніть, чому задачі розв'язуються дією додавання. Дайте наочну ілюстрацію розв'язанню:*

Задача 1. Школярі посадили весною 3 сосни і 4 берези. Скільки дерев посадили діти?

У даній задачі мова йде про дві скінченні множини, що не перетинаються: А – множина сосен, n (A)= 3, і В – множина берез, n (B) = 4. Відповідь на запитання задачі полягає у знаходженні чисельності об'єднання двох множин А і В, які у перетині $A \cap B = \varnothing$. Згідно означення суми натуральних чисел маємо:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 3 + 4 = 7.$$

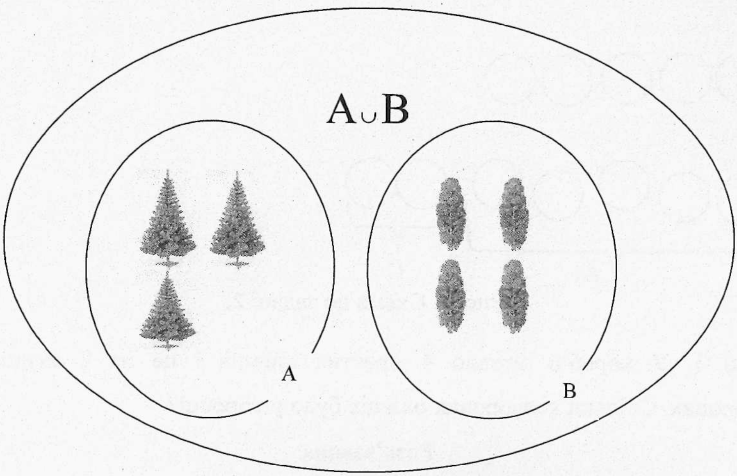


Рис. 7. Схема до задачі 1.

Задача 2. У Ніни було 5 гвоздик, а у Ліди на 2 гвоздики більше. Скільки гвоздик було у Ліди?

$$5 + 2 = 7.$$

У даній задачі мова йде про дві множини: А – множина гвоздик у Ніни, $n(A) = 5$ і В – множина гвоздик у Ліди, причому $n(B) = ?$, але сказано, що вона на 2 одиниці більше чисельності множини А. Це означає, що:

$$n(B) - n(A) = 2 \text{ Звідки}$$

$$n(B) = n(A) + 2 = 5 + 2 = 7.$$

Або: так як у множині В на 2 елемента більше, ніж у множині А, то це означає, що у множині В стільки ж елементів, скільки в А, та ще 2 елементи. Іншими словами, множину В можна розглядати як обєднання двох множин A_1 та С, де $n(C) = 2$ і $A \sim A_1$. Тому множини A_1 та С не мають спільних елементів, то $n(B) = n(A_1 \cup C) = n(A_1) + n(C) =$
$=5 + 2 = 7$, де $A_1 \sim A$ і $n(A_1) = 5$.

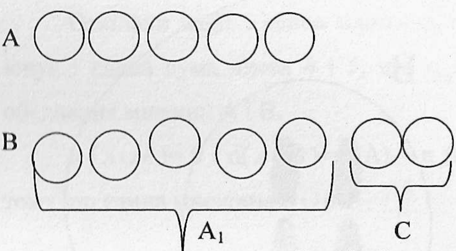


Рис. 8. Схема до задачі 2.

Задача 3. У коробці лежало 4 простих олівців і це на 2 менше ніж кольорових. Скільки кольорових олівців було у коробці?

Розв'язання:

$$4 + 2 = 6.$$

Нехай А – це множина простих олівців, $n(A) = 4$, В – множина кольорових олівців у коробці, $n(B)$ - ?

Але, якщо число простих олівців на 2 менше кольорових, то кольорових олівців на 2 більше. Тому у множині В стільки ж елементів скільки в А та ще 2 елементи. Іншими словами множину В можна розглядати як обєднання двох множин A_1 та С, де $A_1 \sim A$ і $n(C) = 2$. Тому що множини A_1 і С не мають спільних елементів, то

$$n(B) = n(A_1 \cup C) = n(A_1) + n(C) = 4 + 2 = 6.$$

Так як $A_1 \sim A$, то $n(A_1) = n(A) = 4$.

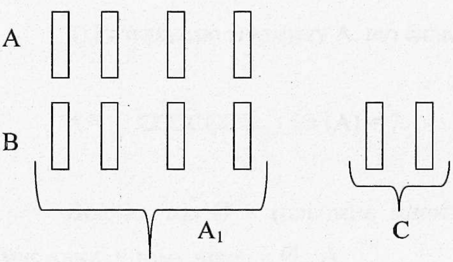


Рис. 9. Схема до задачі 3.

2.2. Поняття різниці і дії віднімання. Основні види задач на віднімання у початковому курсі математики

Завдання 1. *Виходячи з теоретико-множинного підходу до означення різниці, поясніть чому*:

1) 5 – 2 = 3; 2) 3 – 3 = 0; 3) 7 – 0 = 7.

Розв'язання:

1) Розглянемо множини:

A=$\{x, y, z, t, k\}$, n (A) = 5,

B = $\{x, y\}$, n (B) =2,

причому $B \subset A$

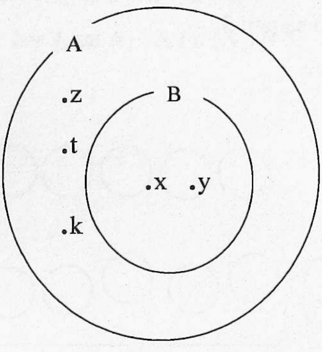


Рис. 10. Відношення включення між множинами А та В

Знайдемо доповнення множини В до множини А.

$B'_A = A / B = \{z, t, k\}$ та n (B'_A) = 3.

Таким чином: 5 -2 = 3 згідно означення різниці цілих невідємних чисел а і в.

2) Роглянемо множини А і В, що знаходяться у відношенні рівності.

А = $\{x, y, z\}$ та n (A) = 3

B = $\{x, y, z\}$ та n (B) = 3

(*) $B'_A = A / B = \varnothing$, так як A = B.

Тоді, за означенням різниці цілих невідємних чисел маємо:

$n(B'_A) = n(A/B) = n(A) - n(B) = 3 - 3$ (1),

а n (Ø) = 0 (2)

Із (1) та (2), а також умови (*) випливає, що 3-3 = 0.

3) Розглянемо множину A, що складається з семи кружечків:

A = { ○○○○○○○ } і n (A) = 7.

Відомо, що Ø – (порожня множина) є підмножиною для будь-якої множини, у тому числі і: $\varnothing \subset A$.

З теорії множин відомо, що:

A / Ø = A (*)

Згідно означення різниці цілих невідємних чисел ліва частина умови (*) запишеться так:

n (A / Ø) = n (A) - n (Ø) = 7 – 0 (1)

так як нуль є чисельністю порожньої множини, а права частина (*) з урахуванням умови задачі запишеться:

n (A) = 7 (2)

З умов (1), (2) та (*) маємо

7 – 0 = 7.

Завдання 2. *Поясніть чому задачі розв'язуються відніманням (дайте наочну ілюстрацію розв'язанню)*

Задача 1. На гілці було 6 листків клену, вітер зірвав 2 листки. Скільки листків залишилось на гілці?

Розв'язання:

6 -2 = 4.

Нехай А – множина листків клену, які були на гілці, n (A) = 6. В – множина листків клену, які були зірвані вітром з гілки, n (B) = 2. Тобто В $\subset$A. З множини А треба видалити елементи множини В і ми отримаємо доповнення множини В до множини А

$$B'_A = A \setminus B$$

Згідно означення різниці цілих невідємних чисел маємо:

$$n\,(B'_A) = n\,(A \setminus B) = n\,(A) - n\,(B) = 6 - 2 = 4.$$

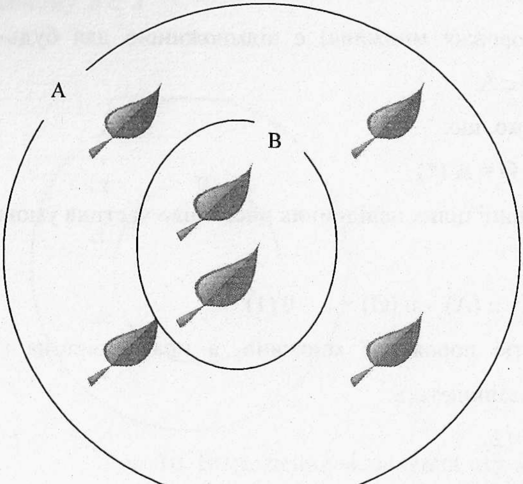


Рис. 11. Ілюстрація до задачі 1.

Задача 2. У Володі було 7 солдатиків, а у Миколки на 3 менше. Скільки солдатиків було у Миколки?

Розв'язання:

7 – 3 = 4.

У даній задачі мова йде про дві множини: множина X – солдатиків у Володі та множина У- солдатиків у Миколки. Відомо, що n (X) = 7, а число елементів множини У треба найти, знаючи, що у ній на 3 елементи менше ніж у множині X. З останнього випливає, що

$$n(X) - n(Y) = 3, \text{ звідки } n(Y) = n(X) - 3 = 7 - 3 = 4.$$

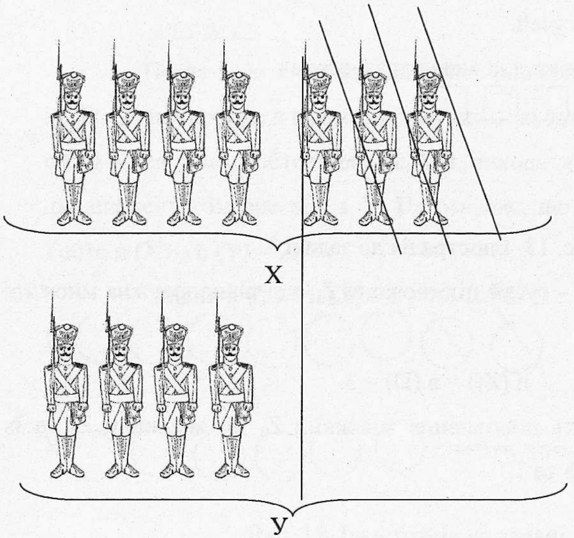


Рис. 12. Ілюстрація до задачі 2

Або: оскільки у Миколки солдатиків на 3 менше ніж у Володі, то у Володі на 3 солдатики більше ніж у Миколки, тому видаливши з множини X підмножину, що складається з 3-ох елементів, отримаємо множину, що рівнопотужна множині У.

$n(Y) = 7 - 3 = 4.$

Задача 3. У ставку плавало 3 качки та 8 гусей. На скільки плавало менше качок ніж гусок?

Розв'язання:

8 – 3 = 5

Розвязування задачі відбувається згідно правила: щоб дізнатись, на скільки одне число менше чи більше другого, треба від більшого числа відняти менше

$$8 - 3 = 5$$

Однак виникає запитання: чи можна від гусей віднімати качок? Насправді ж ми від гусей віднімаємо 3 гусей.

Зобразимо гусей квадратиками, а качок кружечками

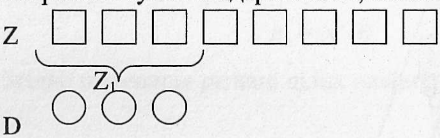


Рис. 13. Ілюстрація до задачі 3

Виокремимо у множині Z – гусей підмножину Z_1, що рівнопотужна множині D – качок.

$$n(Z_1) = n(D) = 3.$$

Тоді, інші гуси утворюють доповнення множини Z_1 до множини Z, та їх число рівне різниці чисел 8 та 3.

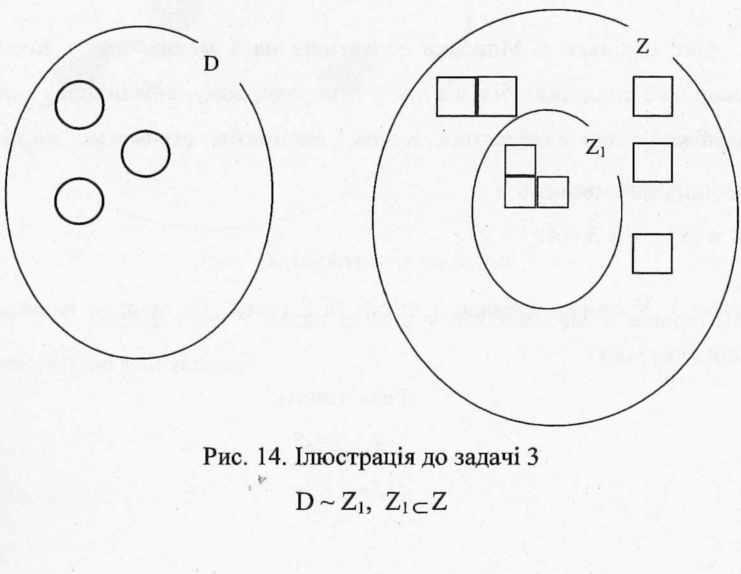


Рис. 14. Ілюстрація до задачі 3

$$D \sim Z_1,\ Z_1 \subset Z$$

$$Z'_{1Z} = Z / Z_1, \quad n(Z'_{1Z}) = n(Z) - n(Z_1) = n(Z) - n(D) = 8 - 3 = 5.$$

Задача 4. Майстер відремонтував 8 двигунів, це на 2 більше, ніж відремонтував учень. Скільки двигунів відремонтував учень?

Розв'язання:

$8 - 2 = 6.$

<u>*Спосіб 1:*</u>

Позначимо множину двигунів, які відремонтував майстер через Х, n (X) = 8 за умовою, а множину двигунів, які відремонтував учень через У і n (Y) – невідомо, тобто треба знайти, виходячи з умови, що у множині Х на два елементи більше ніж в У. Це означає, що стільки ж як і в У, та ще 2. Тобто n (X) – n (Y) = 2.

Звідки n (Y) = n (X) – 2 = 8 – 2 =6.

Рис. 15. Ілюстрація до задачі 4 (спосіб 1)

<u>*Спосіб 2:*</u>

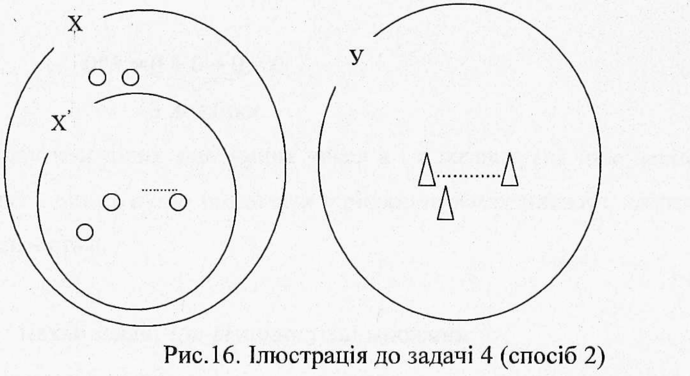


Рис.16. Ілюстрація до задачі 4 (спосіб 2)

$(X' \sim Y) \to n(X') = n(Y) = ?$

$X = X' \cup \{\bigcirc\ \bigcirc\}$

$n(X) = n(X') + 2$

$8 = n(X') + 2$

$n(Y) = n(X') = 8 - 2.$

2.3. Поняття добутку і дії множення. Основні види задач на множення у початковому курсі математики

Завдання 1. *Використовуючи означення добутку через*

а) суму рівних доданків;

б) чисельність обєднання рівнопотужних множин;

в) чисельність декартового добутку,

поясніть чому:

2 * 3 = 6,   1 * 5 = 5,   0 * 3 = 0.

Розв'язання:

а) Добутком цілих невідємних чисел а і в називається сума в доданків кожен з яких дорвінює а, тобто

$$a*в = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{в\ доданків},$$

$$2*3 = \underbrace{2 + 2 + 2}_{3\ доданки} = 6$$

$$1*5 = \underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + 1}_{5\ доданків} = 5$$

$$0*3 = \underbrace{0 + 0 + 0}_{3\ доданки.} = 0$$

б) Добутком цілих невідємних чисел а і в називається ціле невідємне число ав, яке є чисельністю обєднання в рівнопотужних множин, кожна з яких має чисельність а.

Нехай задані три рівнопотужні множини:

$A_1 = \{a, в\}$, n (A_1) =2.

$A_2 = \{c, d\}$, n (A_2) = 2.

$A_3 = \{m, n\}$, n (A_3) = 2, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $A_1 \cap A_3 = \varnothing$, $A_2 \cap A_3 = \varnothing$

Розглянемо їх обєднання:

$A_1 \cup A_2 \cup A_3$ = {a, в, c, d, m, n} та n ($A_1 \cup A_2 \cup A_3$) = 6.

Згідно сформульованого означення добутку:

n ($A_1 \cup A_2 \cup A_3$) = n (A_1) + n (A_2) + n (A_3) = 2 + 2 + 2 = 6.

1*5 = 5.

Розглянемо п'ять одноелементних множин, що не перетинаються між собою, чисельність кожної з яких рівна 1.

$A_1 = \{a\}, n(A_1) = 1$
$A_2 = \{в\}, n(A_2) = 1$
$A_3 = \{c\}, n(A_3) = 1$
$A_4 = \{d\}, n(A_4) = 1$
$A_5 = \{m\}, n(A_5) = 1$.
$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \{a, в, c, d, m\}$
$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) + n(A_5) = 1+1+1+1+1 = 5.$

0*3=0.

Розглянемо три порожні множини $A_1 = A_2 = A_3 = \varnothing$.
$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$
n ($A_1 \cup A_2 \cup A_3$) = n (Ø).
n ($A_1 \cup A_2 \cup A_3$) = $n(A_1) + n(A_2) + n(A_3)$ = 0+0+0
а, n (Ø)=0
Тому: 0+0+0=0

в) a*в= n (A×B) = n(A) * n (B), де a = n (A), в = n (B).

2*3 = 6, де 2 = n (A), 3 = n (B).
Нехай A = $\{x, y\}, B = \{z, k, t\}$

Складемо A×B = $\{(x;z),(x;k),(x;t),(y;z),(y;k),(y;t)\}$. Усього 6 пар.

(1) n (A×B) = 6. Таким чином маємо:

(2) n (A×B) = n (A) * n (B) = 2* 3. З (1) та (2) випливає, що 2*3 = 6.

1*5=5, де 1 = n (A), 5 = n (B).

Нехай A = {x} та B = {1, 3, 5, 7, 9}

A×B = {(x;1), (x;3), (x;5), (x;7), (x;9)}. Усього 5 пар.

n (A×B) = n (A) * n (B) = 1 * 5 = 5.

0 * 3 = 0, де 0 = n (A), 3 = n (B).

A – порожня множина, B = {a, в, c}.

A*B = Ø * B = Ø. Якщо множини рівні, то вони мають одну й ту саму чисельність.

n (A*B) = n (Ø).

n (A*B) = n (A) * n (B) = 0 * 3. (1)

n (Ø) = 0. (2).

Підставимо (1) та (2) в умову (*) маємо:

0 * 3 = 0.

Завдання 2. *Поясніть, чому задача розв'язується дією множення. Дайте наочну ілюстрацію розвязанню.*

Задача 1. У клітках розмістили кроликів по 2 кролики у кожну клітку. Усього 5 кліток. Скільки кроликів у всіх клітках?

2 * 5 = 10

Розв'язання:

У даній задачі мова йде про знаходження чисельності множини A, що являє собою обєднання 5 непорожніх, скінчених, рівнопотужних між собою множин, які попарно не перетинаються, й, згідно умови задачі, кожна з них являє собою клітку з двома кроликами. Позначимо їх відповідно:

$A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim A_4 \sim A_5$ та $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = n(A_4) = n(A5) = 2$.

Оскільки множини A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 попарно не перетинаються, то згідно означення суми цілих невідємних чисел маємо:

$n(A) = n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) + n(A_5)$ $= 2 + 2 + 2 + + 2 + 2 = 2 * 5 = 10$.

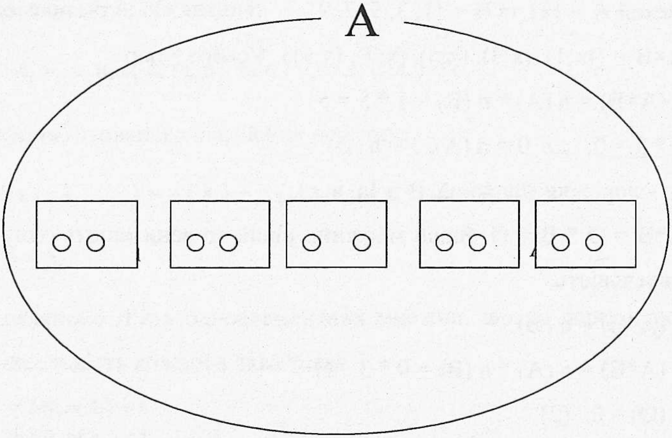


Рис. 17. Ілюстрація до задачі 1

Задача 2. Дмитро вирізав 4 червоних кружечків, а зелених трикутників у 3 рази більше. Скільки зелених трикутників вирізав Дмитро?

Розв'язання:

$4 * 3 = 12$.

У цій задачі розглядаються дві множини: множина А червоних кружечків у Дмитра та множина В – зелених трикутників у Дмитра.

Відомо, що n (A) = 4. Необхідно знайти n (B), знаючи, що це число елементів у множині В у 3 рази більше числа елементів у множині А. Це означає, що множина В складається з підмножин B_1, B_2, B_3, що не перетинаються та рівнопотужні множині А, й відповідно $n(B_1) = n(B_2) = n(B_3) = n(A) = 4$.

Але число елементів у множині В можна знайти додаванням:

$n(B) = n(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = n(B_1) + n(B_2) + n(B_3) = 4 + 4 + 4$.

Зробивши заміну однакових доданків добутком, отримаємо $4 + 4 + 4 = = 4 * 3 = 12$.

Отже, у Дмитра було 12 вирізаних зелених трикутників.

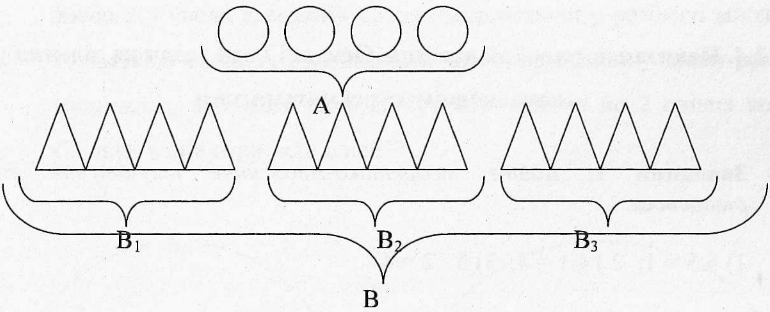


Рис. 18. Ілюстрація до задачі 2

Задача 3. На нижній полиці лежить 5 книжок, це у 2 рази менше, ніж на верхній полиці. Скільки книжок лежить на верхній полиці?

Розв'язання:

У цій задачі розглядаються дві множини: А – множина книжок на нижній полиці і В – множина книжок на верхній полиці. Відомо, що n (А) = 5. Треба знайти чисельність множини В, виходячи з умови задачі: якщо число книжок у множині А у 2 рази менше числа книжок у множині В, то число книжок у множині В у 2 рази більше числа книжок у множині А. Це означає, що множина В складається з 2-ох підмножин, що попарно не перетинаються, та рівнопотужні множині А, тобто $B = B_1 \cup B_2$, де $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ та $B_1 \sim A$, $B_2 \sim A$ й $n(B_1) = n(B_2) = n(A) = 5$.

Тоді, число елементів множини В, знайдемо за означенням суми:

$n(B) = n(B_1 \cup B_2) = n(B_1) + n(B_2) = 5 + 5$. Зробивши заміну суми однакових доданків добутком, маємо $5 + 5 = 5 * 2 = 10$.

Таким чином, на верхній полиці лежить 10 книг.

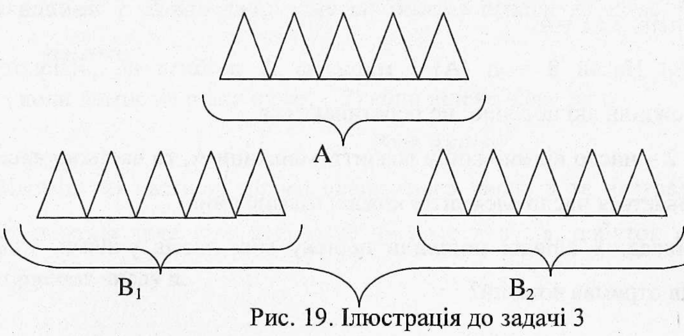


Рис. 19. Ілюстрація до задачі 3

2.4. Поняття частки і дії ділення. Основні види задач на ділення у початковому курсі математики

Завдання 1. *Дайте теоретико-множинне тлумачення таким рівностям:*

1) 5:5 = 1; 2) 4:1 = 4; 3) 8 : 2 = 4.

Розв'язання:

1) Нехай 5 = n (A) і множину A розбито на рівнопотужні підмножини, які попарно не перетинаються.

Якщо 5 – число підмножин у розбитті множини A, то часткою чисел 5 і 5 називається число елементів кожної підмножини. Таким чином, частка 1 – це потужність кожної з підмножин.

Якщо 5 – число елементів кожної підмножини у розбитті множини A, то чатскою чисел 5 і 5 називається число підмножин у цьому розбитті. Воно рівне 1.

2) Розглянемо таку задачу: 4 апельсина поділили між дітьми порівну по 1 апельсину кожній. Скільки дітей отримали апельсин?

У задачі розглядається множина A, n (A) = 4. Вона розбивається на підмножини, у кожній з яких по 1-ому елементу, тобто на рівнопотужні підмножини. Окрім цього, вони попарно не перетинаються. Таким чином, число 4, що отримане у відповіді – це число одноелементних підмножин, на які розбито множину A з 4 елементів: 4 : 1 = 4.

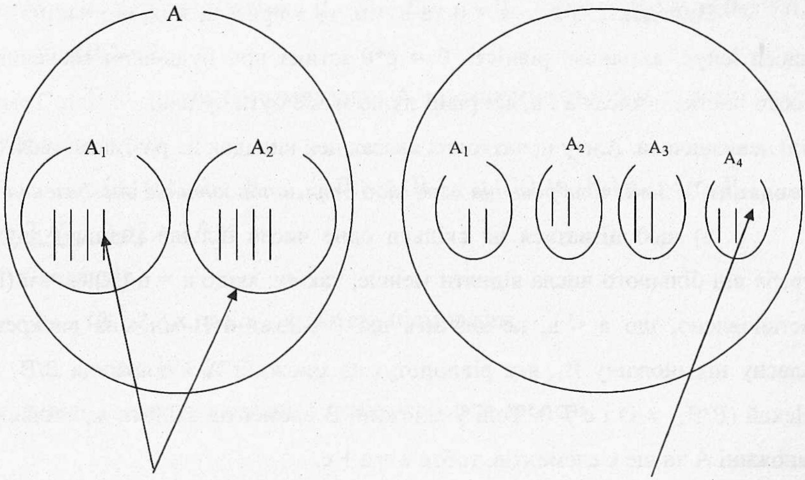
3) Нехай 8 = n (A) і множина A розбита на рівнопотужні підмножини, які попарно не перетинаються.

Якщо 2 – число підмножин у розбитті множини A, то часткою чисел 8 і 2 називається число елементів кожної підмножини.

Наприклад: 8 олівців поділили порівну між двома учнями. Скільки олівців отримав кожний?

Якщо 2 – число елементів кожної підмножини у розбитті множини А, то часткою чисел 8 і 2 називається число підмножин у цьому розбитті.

Наприклад, 8 олівців розподілили між учнями по 2 олівця кожному. Скільки учнів отримали олівці?



8 : 2 = 4 – стільки елементів у кожній підмножині. $n(A_1) = n(A_2) = 4$, при умові, що множину А розбито на 2 підмножини, які попарно не перетинаються.	8 : 2 = 4 – кількість підмножин у розбитті множини А, при умові, що число елементів кожної підмножини рівне 2.

Рис. 20. Ілюстрація до задачі 3

Завдання 2. *Поясніть, чому не можна ділити на нуль. Розгляньте два випадки:*

1) коли ділене не рівне нулю; 2) коли ділене рівне нулю.

Розв'язання:

Відомо, що часткою цілого невідємного числа а та натурального числа в називається таке ціле невідємне число с = а : в, добуток якого і числа в дорвінює числу а.

$$(a : в = c) \leftrightarrow (a = c * в)$$

Випадок 1. Нехай дані числа а ≠ 0 та в = о. Припустимо, що частка чисел а і в існує. Тоді за означенням частки існує таке ціле невідємне число с, що а = с * 0. Але с* 0 = 0, значить і а = 0. А це суперечить умові. Отже, частка чисел а ≠ 0 та в = 0 не існує.

Випадок 2. Якщо а = 0 та в = 0, то з припущення, що частка таких чисел існує, випливає рівність 0 = с*0 істина при будь-яких значеннях с, тобто часткою чисел а і в, які рівні нулю може бути будь-яке число. Тому дія 0:0 невизначена. Але у початкових класах цей випадок не розглядається.

Завдання 3. *Закінчіть речення так, щоб отримати істинне висловлення:*

а) щоб дізнатися на скільки одне число більше (менше) другого, треба від більшого числа відняти менше, так як, якщо а = n (A), в = n (B), й встановлено, що а < в, це значить що у множині В множна виокремити власну підмножину B_1, яка рівнопотужна множині А й множина $B/B_1 \neq \varnothing$. Нехай $(B/B_1) \neq \varnothing$ і с ≠ 0. Тоді у множині В елементів стільки ж, скільки й у множині А та ще с елементів, тобто в = а + с.

б) щоб дізнатися у скільки разів одне число більше (менше) другого, треба більше число розділити на менше, а так як, якщо дані числа а і в, такі що а = n (A), в = n (B), а > в, і множину А можна розбити на с підмножин, які рівнопотужні множині В, то говорять, що число а більше числа в в с раз. Але що таке число с? З теоретико-множинної точки зору – це частка чисел а і в. Звідки й випливає вище сформульоване твердження.

Завдання 4. *Поясніть, чому задачі розв'язуються дією ділення. Дайте наочну ілюстрацію розвязанню.*

Задача 1. 10 зошитів вчитель роздав учням по 2 зошити кожному. Скільки учнів отримало зошити?

Розв'язання:

10:2 = 5

У задачі розглядається множина А зошитів, $n(A) = 10$. Вона розбивається на підмножини, у кожній з яких по 2 елементи, тобто на рівнопотужні підмножини: $B_1 \sim B_2 \sim B_3 \sim \ldots \sim B_x$. Ці підмножини попарно не претинаються. Треба встановити, скільки таких підмножин утворилося.

Отже, множина $A = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_x$, де множини $B_1, B_2, B_3 \ldots B_x$ попарно не петертинаються і $B_1 \sim B_2 \sim B_3 \sim \ldots \sim B_x$, тобто $n(B_1) = n(B_2) = n(B_3) = \ldots = n(B_x) = 2$.

Тоді чисельність множини А за означенням суми, а потім добутку буде подана так:

$$n(A) = n(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_x) = n(B_1) + n(B_2) + n(B_3) + \ldots + n(B_x) =$$

$$\underbrace{2 + 2 + 2 \ldots 2 + 2}_{x\text{-доданків}} = 2 * x.$$

$10 = 2 * x$, де x – кількість підмножин,

$x = 10 : 2 = 5$.

Відповідь на питання задачі: 5 учнів отримали зошити.

Задача 2. 12 морквин звязали у 3 пучки порівну. Скільки морквин у кожному пучку?

Розв'язання:

У задачі розглядається множина А морквин, $n(A) = 12$.

Вона розбивається на три рівнопотужні підмножини: $B_1 \sim B_2 \sim B_3$. Оскільки підмножини рівнопотужні, то $n(B_1) = n(B_2) = n(B_3) = x$ - ?

Щоб встановити чисельність цих підмножин будемо виходити з того, що: $A = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ й згідно означення суми цілих невідємних чисел

$$n(A) = n(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = n(B_1) + n(B_2) + n(B_3) = \underbrace{x + x + x}_{3\text{ доданки}} =$$

$= x*3$, за умови, що B_1, B_2, B_3 попарно не перетинаються.

За умовою, $n(A) = 12$, тоді $12 = x*3$, звідки $x = 12:3 = 4$.

Отже у кожному пучку по 4 морквини.

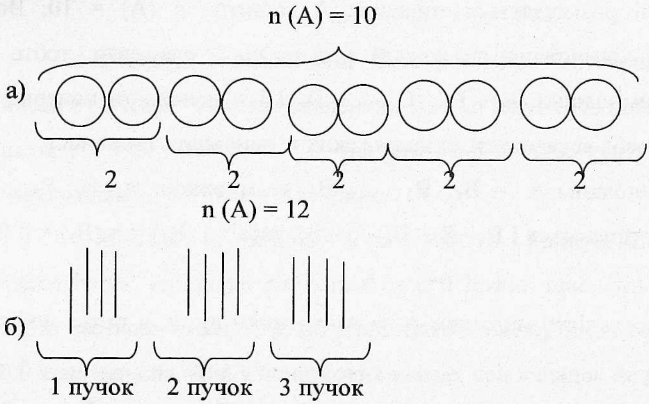


Рис. 21. Ілюстрації до вищерозв'язаних задач

Задача 3. Старший брат знайшов 8 грибів, а молодший у 2 рази менше. Скільки грибів знайшов молодший брат?

Розв'язання:

У задачі йде мова про дві множини: множину A – грибів старшого брата, й множину B – грибів молодшого брата. Відомо, що n (A) = 8. Необхідно знайти n (B), знаючи, що це число у 2 рази менше числа 8. Виходячи з цієї умови множину A можна подати як таку, що складається з двох рівнопотужних підмножин, і тоді у множині B буде стільки елементів, скільки у кожній підмножині множини A, число яких знаходиться діленням: 8 : 2 = 4. Значить n (B) = 4, тобто у молодшого брата 4 гриба.

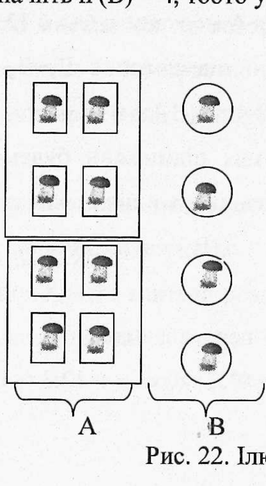


Рис. 22. Ілюстрація до задачі 3

Задача 4. У саду росло 16 кущів малини й 8 кущів смородини. У скільки разів кущів смородини було менше, ніж кущів малини?

Розв'язання:

У даній задачі мова йде про дві множини: А – множина кущів малини, n (A) = 16, й В – множина кущів смородини,
n (B) = 8.

Згідно правила: щоб дізнатись, у скільки раз одне число менше другого, необхідно більше число розділити на менше: 16 : 8 = 2.

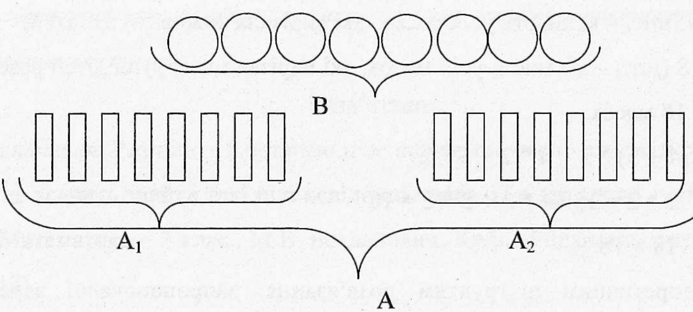


Рис. 23. Ілюстрація до задачі 4

Смисл вищенаведеної операції ілюструє рисунок. Множина А розбивається на рівнопотужні підмножини A_1 та A_2, які рівнопотужні множині В, тобто $n(A_1) = n(A_2) = n(B) = 8$. Щоб відповідсти, скільки таких підмножин буде у множині А, знайдемо число елементів множини А за означенням суми, а потім добутку:

$$n(A) = n(A_1) + n(A_2), \text{ де } A_1 \cap A_2 = \varnothing$$

$$16 = 8 + 8 = 8 * 2$$

16 = 16, значить таких підмножин дійсно повинно бути 2, тобто число кущів смородини у 2 рази менше числа кущів малини.

Завдання 5. *Розв'яжіть задачу різними способами й обгрунтуйте вибір способу:*

Задача 1. З метою прикрасити ялинку кожна з двох груп дітей вирізала по 4 маски птахів й по 5 масок звірів. Скільки усього масок вирізали діти?

Спосіб 1:

1) 4 * 2 = 8 (шт.) – кількість масок птахів, які вирізали дві групи;

2) 5 * 2 = 10 (шт.) – кількість масок звіоів, які вирізали дві групи;

3) 8 + 10 = 18 (шт.) – кількість усіх масок, які вирізали дві групи.

Відповідь: 18 масок.

Спосіб 2:

1) 4 + 5 = 9 (шт.) – кількість усіх масок, які вирізала кожна група дітей;

2) 9 * 2 = 18 (шт.) – кількість усіх масок, які вирізали дві групи дітей разом.

Відповідь: 18 масок.

Висновок: (4 + 5) * 2 = 4 * 2 + 5 * 2

9 * 2 = 18 і 4 * 2 + 5 * 2 = 18

18 = 18.

Теоретичним підгрунтям розв'язання, запропонованої задачі є правило множення суми на число: щоб помножити суму чисел а і в на число с, достатньо знайти суму чисел а і в, а отриманий результат помножити на число с, або перший доданок помножити на с, потім другий доданок помножити на число с й отримані добутки додати:

(а + в) * с = а*с + в*с.

Задача 2. Робітниця спакувала у 3 коробки 12 зелених бокалів й 6 жовтих порвіну. Скільки бокалів було у кожній коробці?

Спосіб 1:

1) 12:3 = 4 (шт.) – кількість зелених бокалів у кожній коробці.

2) 6 : 3 = 2 (шт.) – кількість жовтих бокалів у кожній коробці.

3) 4 + 2 = 6 (шт.) – кількість усіх бокалів у кожній коробці.

Спосіб 2:

1) 12 + 6 = 18 (шт.) – кількість усіх бокалів, які треба спакувати у 3 коробки.

2) 18 : 3 = 6 (шт.) – кількість бокалів у кожній коробці.

Відповідь: 6 бокалів.

Теоретичним підгрунтям розв'язання даної задачі є правило ділення суми на число: щоб поділии суму чисел а і в на число $c \neq 0$, достатньо знайти суму чисел а і в й отриманий результат поділити на с, або поділити на число кожен доданок, а потім отримані результати додати:

$$(a + в) : c = a : c + в : c.$$

Завдання 6. *Наведіть два приклади завдань з підручників математики для початкових класів, під час виконаня яких учні використовують означення ділення з остачею.*

Розв'язання:

Означення: Розділити з остачею ціле невідємне число а на натуральне число в – це значить знайти такі цілі невідємні числа q і r, що $a = вq + r$ та $0 \leq r < в$.

(Математика – 3 клас., М.В. Богданович. Київ, «Радянська школа», 1988 – с. 238).

Вправа № 1468. Обчисли результат й розділи його на підкреслене число.

Зразок: <u>8</u>*5 + 3 = 43 43:8 = 5 (остача 3)

<u>7</u>*4 + 5 <u>6</u>*3 + 2 <u>7</u>*8 + 4 <u>9</u>*3 + 3

(Математика – 4 клас. М.В. Богданович, Л.П. Кочина Н.Н. Левшин, Київ, «Радянська школа», 1989, с. 244).

Вправа № 1527. Які з чисел 2000, 100 000, 986, 1480 діляться на число 200? Які числа не діляться на число 200 без остачі? Назви остачу.

Діляться: 2000 :200 = 10; 100 000: 200 = 500,

Не діляться: 986 = 200*4 + 186; 986 : 200 = 4 (остача 186)

1480 = 200*7+80; 1480:200 = 7 (остача 80).

Завдання 7. *З речень (1 – 6), доповнених запропонованими відповідями складіть 6 істинних висловлень.*

1) Сумою двох цілих невідємних чисел a і b називається ціле невід'ємне число a + b, яке дорівнює чисельності обєднання множин A та B, які не перетинаються, таких що a = n(A), b = n (B).

2) Різницею двох цілих невідємних чисел a і b називається ціле невідємне число (a – b), яке дорівнює чисельності доповнення множини B до множини A, де a = n (A), b = n (B) і $B \subset A$.

3) Добутком двох цілих невідємних чисел a і b називається ціле невід'ємне число ab, яке дорівнює чисельності обєднання b рівнопотужних множин, що не перетинаються, чисельність кожної з яких рівна a.

4) Добутком двох цілих невідємних чисел a і b називається ціле невідємне число ab, яке дорівнює чисельності декартового добутку множин A і B таких, що a = n(A), b = n (B).

5) Часткою двох чисел a і b ($a \in N_0, b \in N_0$) називається число, яке дорівнює чисельності кожної з b рівнопотужних підмножин, на які розбита множина A, чисельність якої дорівнює a.

6) Часткою двох чисел a і b ($a \in N_0, b \in N_0$) називається число, яке дорівнює числу рівнопотужних підмножин чисельності b, на які розбита множина A, чисельність якої дорівнює a.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Кухар В.М. Математика. Множини. Логіка. Цілі числа [практикум] / Кухар В.М., Тадіян С.І., Тадіян В.П.: За заг. ред. В.М. Кухар. – К.: Вища школа, 1989. – 333с. (С. 73-187, С. 221, 222).

2. Математика. / [Боровик В.Н., Вивальнюк Л.М., Костарчук В.М. та ін.]. – К.: Вища школа, 1980. – 400с. (С. 118 – 132).

3. Математика / [Виленкин Н.Я., Пышкало А.М., Рождественская В.П., Стойлова Л.П.]. – М.: Просвещение, 1977. – 352с. (С. 252 – 270).

4. Стойлова Л.П. Основы начального курса математики / Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1988. – 320с. (С. 128-135, С.159 – 166, С. 147-149, С. 163- 164).

Навчальне видання

Валентина Петрівна Кисільова-Біла
Ірина Євгенівна Макаренко

ТЕОРЕТИКО-МНОЖИННИЙ ПІДХІД ДО ПОНЯТТЯ
ЦІЛОГО НЕВІДЄМНОГО ЧИСЛА
ТА АРИФМЕТИЧНИХ ДІЙ НАД ЧИСЛАМИ
(МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ)

Підписано до друку 25.11.2013
Формат 60×84/16. Тираж 300 прим.

Видавництво «Діоніс» (ФО-П Чернявський Д.О.)
пр.200 річчя Кривому Рогу, 17, (зуп. «Спаська»),
тел.: (056) 440-21-63; 404-05-92; 442-71-11.
Свідоцтво ДК 3449 від 02.04.2009 р.